

DICTIONNAIRE

DES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

8937 — PARIS, IMPRIMERIE A. LAHURE
9, rue de Fleurus, 9

DICTIONNAIRE

DES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

COMPRENANT LES PRINCIPALES APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES :

A l'Architecture, à l'Arithmétique commerciale, à l'Arpentage,
à l'Artillerie, aux Assurances,
à la Balistique, à la Banque, à la Charpente, aux Chemins de fer,
à la Cinématique, à la Construction navale, à la Cosmographie, à la Coupe des pierres,
au Dessin linéaire, aux Etablissements de prévoyance, à la Fortification, à la Géodésie, à la Géographie,
à la Géométrie descriptive, à l'Horlogerie, à l'Hydraulique, à l'Hydrostatique, aux Machines,
à la Mécanique générale, à la Mécanique des gaz, à la Navigation, aux Ombres,
à la Perspective, à la Population, aux Probabilités,
aux Questions de Bourse, à la Topographie, aux Travaux publics,
aux Voies de communication, etc., etc.,

ET L'EXPLICATION D'UN GRAND NOMBRE DE TERMES TECHNIQUES
USITÉS DANS LES APPLICATIONS

PAR

H. SONNET

Officier de la Légion d'honneur, Docteur ès sciences, Inspecteur de l'Académie de Paris
Professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures
Ancien Répétiteur de mécanique industrielle à la même École

OUVRAGE

CONTENANT 1900 FIGURES INTERCALÉES DANS LE TEXTE

QUATRIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{IE}
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1884

Droits de propriété et de traduction réservés

PRÉFACE.

I. — On désigne sous le nom de *Mathématiques appliquées* un ensemble de connaissances qu'il est plus facile d'énumérer que de réunir sous une définition précise. Cette dénomination n'embrasse pas, en effet, toutes les applications des mathématiques; car l'Astronomie, par exemple, ainsi que la Physique appliquée, constituent des sciences à part, quoiqu'elles empruntent, l'une et l'autre, le secours de la Géométrie ou de l'Analyse. On peut dire toutefois que les Mathématiques appliquées comprennent, d'une part, les questions de calcul qui se rapportent au commerce, à la banque, aux établissements de crédit et de prévoyance; d'autre part, toutes les applications des mathématiques aux constructions civiles et militaires, aux voies de communication et aux machines. L'énumération placée sur le titre de l'ouvrage compléterait, au besoin, ce que cette définition peut laisser à désirer.

Il résulte de l'extrême variété des connaissances dont il s'agit, que les développements théoriques auxquels elles donnent lieu, les données expérimentales sur lesquelles elles s'appuient, et les règles pratiques qui s'y rattachent, se trouvent disséminés dans un grand nombre de traités ou de recueils distincts, dont plusieurs ne sont connus que des hommes spéciaux. A une époque qui est surtout caractérisée par ses efforts pour la diffusion des lumières, il nous a paru utile de réunir, dans un même volume, toutes ces théories, toutes ces données et toutes ces règles. Si nous ne nous sommes pas fait illusion, un pareil livre est de nature à intéresser toutes les personnes qui s'occupent des applications de la science, et plus particulièrement les jeunes gens qui se destinent à la carrière du génie civil ou militaire; il pourra servir de memento aux ingénieurs; les professeurs y trouveront de nombreux exemples de l'application de la science pure à des problèmes usuels; enfin, les gens du monde eux-mêmes pourront y puiser des notions utiles, car la plupart des articles offrent une partie descriptive, et souvent une partie historique, accessible à toutes les classes de lecteurs.

De toutes les formes qui pouvaient être données au recueil que nous publions, la forme de Dictionnaire est incontestablement la plus commode. Si elle a parfois l'inconvénient de scinder des théories, elle offre, en revanche, l'avantage de fournir immédiatement au lecteur le renseignement dont il a besoin, ce qui nous a paru être une des conditions essentielles du succès.

II. — Indépendamment des branches de connaissances dont il est question plus haut, il a été nécessaire d'en traiter ici quelques autres, qui servent de prodrome, de développement, ou de complément aux premières. Ainsi, en vue des questions qui se rapportent aux rentes viagères, aux assurances sur la vie, aux caisses de retraite, etc., il a été indispensable de donner les notions élémentaires du *Calcul des Probabilités*; la *Cosmographie* était nécessaire à l'intelligence de la *Géodésie*; la *Balistique* et quelques autres questions relatives à l'artillerie forment un complément de la *Mécanique appliquée*, qui n'aurait pu être omis sans inconvénient. Enfin nous avons dû faire entrer dans notre cadre la *Géométrie descriptive* et la *Mécanique générale*.

En effet, quoique les éléments de la Géométrie descriptive fassent aujourd'hui

partie des programmes de l'enseignement classique, c'est avant tout une science d'application. Si Monge a eu la gloire d'en faire un corps de doctrine, en ramenant à des méthodes uniformes les procédés, en apparence hétérogènes, usités depuis longtemps dans diverses industries spéciales, on peut dire néanmoins qu'elle est née dans les ateliers, des besoins mêmes de la pratique. Considérée comme science pure, elle ne serait qu'un hors-d'œuvre, fort inférieur en puissance à l'Analyse géométrique. D'un autre côté, c'est à tort, selon nous, que les auteurs modernes s'efforcent de rattacher à la Géométrie descriptive les théories les plus élevées relatives aux propriétés des surfaces; en traitant des questions de ce genre, même avec le secours des projections, on fait de la Géométrie supérieure, on ne fait pas de la Géométrie descriptive proprement dite. Celle-ci ne doit, selon nous, emprunter à la Géométrie pure que les principes indispensables pour l'intelligence des applications aux ombres, à la perspective, à la charpente et à la coupe des pierres. C'est à ce point de vue que nous nous sommes placé pour traiter dans ce Dictionnaire, les questions de Géométrie descriptive.

III. — On peut faire des remarques analogues au sujet de la Mécanique générale. — Considérée comme science, la Mécanique a été d'abord physique et expérimentale; et tout en cherchant à se rendre compte du jeu des forces, et à découvrir les lois qui président à l'équilibre et au mouvement, les premiers mécaniciens ne faisaient aucune difficulté d'emprunter à l'expérience les principes qui leur manquaient. C'est ainsi que, jusqu'à d'Alembert, on a admis comme un fait d'expérience journalière que, dans l'équilibre du levier sous l'action de deux poids, la charge du point d'appui est égale à la somme des poids. Mais, à mesure que la théorie faisait des progrès, à mesure que l'on distinguait mieux le lien qui existe entre les divers principes, le nombre de ceux qu'il était nécessaire d'emprunter à l'expérience allait peu à peu en diminuant; et, de nos jours, ces principes expérimentaux se trouvent définitivement réduits à trois: le principe de l'*inertie*, qui revient au fond à la définition de la force; le principe de l'*indépendance entre les mouvements et les forces*, principe que l'on divise quelquefois en deux, pour la commodité de l'enseignement; enfin le principe de l'*égalité entre l'action et la réaction*, admis depuis Newton comme un axiome.

Malheureusement l'esprit humain ne devait pas s'arrêter à ces légitimes conquêtes. Après avoir réduit, autant que possible, le contrôle de l'expérience, il devait aller jusqu'à vouloir réformer la nature elle-même, pour l'accommoder aux vues de la théorie. A partir de Lagrange, la Mécanique devient, entre les mains des géomètres, une simple annexe du calcul infinitésimal, une science idéale et abstraite sans rapport nécessaire avec la réalité; les corps solides y sont considérés comme infiniment durs et polis; souvent on les suppose sans poids; dans les machines on ne tient compte ni des frottements ni de la roideur des cordes; les fluides eux-mêmes sont supposés doués de propriétés absolues qu'ils sont loin d'avoir dans la nature, etc., etc. Cette Mécanique, nommée *rationnelle*, pour rappeler sans doute que c'est un être de raison, a régné longtemps sans partage dans les écoles; elle y triomphe encore, mais du moins elle n'y est plus enseignée d'une manière exclusive. Les progrès incessants de l'industrie ont ramené les esprits vers une Mécanique en quelque sorte *terrestre*, et plus voisine de la réalité; l'expérience a été de nouveau interrogée; et, grâce aux travaux de Coriolis, de M. Poncelet, de M. Bélanger et de quelques-uns de leurs disciples, on a pu fonder une Mécanique élémentaire, n'empruntant à l'analyse que les premiers éléments du calcul infinitésimal, tenant compte, autant

qu'il est possible, de tout ce que néglige la science abstraite, et présentant surtout les principes sous une forme mieux appropriée aux besoins de l'application. C'est cette Mécanique générale, élémentaire et plus immédiatement applicable, que nous avons cru devoir faire entrer dans le cadre de ce Dictionnaire.

IV. — Bien que, comme nous l'avons expliqué en commençant, les questions de Physique appliquée n'entrent pas dans le plan de ce livre, nous avons dû, en vue de la Géodésie, traiter des principes d'optique dont la connaissance est nécessaire pour l'intelligence des instruments où entrent des miroirs ou des lunettes. De même, en vue des machines à vapeur, il nous a paru indispensable de consacrer quelques articles à l'exposition des propriétés essentielles de la vapeur d'eau, qui servent de base à la théorie de ces machines. Enfin, pour faciliter les recherches, nous avons cru devoir ajouter à ce qui précède l'explication d'un grand nombre de termes techniques que l'on rencontre dans les applications; c'est pour cela que quelques articles paraîtront, d'après leur titre, n'avoir aucune relation avec les mathématiques : mais le lecteur attentif reconnaîtra toujours qu'ils s'y rattachent par quelque côté.

V. — Tel est l'ensemble des matières réunies et traitées dans ce volume. Dans chaque question importante nous nous sommes proposé d'exposer les méthodes le plus généralement en usage; de faire connaître les données numériques fournies par les expérimentateurs les plus habiles, et les règles pratiques les plus utiles à connaître; de décrire, d'une manière précise et claire, toutes les machines, toutes les constructions, tous les appareils qui peuvent offrir quelque intérêt; de rassembler sous une forme concise toutes les observations et tous les renseignements de quelque utilité; et enfin, nous avons renvoyé aux sources pour tout ce qui est d'un intérêt trop secondaire, ou pour tout ce qui présente un caractère trop spécial. Nous avons donc cité les auteurs anciens ou modernes, et particulièrement les auteurs originaux, aussi souvent qu'il nous a été possible de le faire, sans tomber dans des redites monotones.

Nous n'avons pas cru toutefois devoir reproduire indistinctement toutes les formules ou règles pratiques que l'on rencontre dans les manuels spéciaux et dans les aide-mémoire. Beaucoup de ces règles ou de ces formules ont, en effet, une origine suspecte, et se rattachent à des théories imparfaites qui, après avoir eu cours à diverses époques, sont aujourd'hui abandonnées.

VI. — Nous avons remarqué, dans divers Dictionnaires scientifiques, que les plus grands développements sont donnés aux premières lettres de l'alphabet, tandis que les dernières paraissent sacrifiées, et que l'ouvrage *desinit in pisces*, suivant l'expression du poëte. Nous avons cherché à éviter ce défaut; et, pour y parvenir, nous avons pris successivement à part chacune des branches des Mathématiques appliquées; nous en avons fait le Dictionnaire spécial; et le livre que nous publions est résultat de la réunion de ces Dictionnaires particuliers, fondus et liés entre eux par des articles généraux et par des articles de renvoi.

Dans ce travail, nous ne nous sommes pas adjoint de collaborateur. Si nous nous sommes privé de ce secours, ce n'est point par l'effet d'une vaine présomption, mais afin de donner à l'ouvrage plus de cohésion et d'homogénéité. Quelques articles eussent sans doute gagné à être écrits par les hommes spéciaux auxquels nous aurions pu nous adresser; mais l'ensemble de l'œuvre y aurait peut-être perdu. Nous nous sommes d'ailleurs entouré de toutes les lumières qu'il nous a été possible de rassembler.

Notre travail ne s'est pas borné, comme quelques personnes pourraient le

PRÉFACE.

croire, à une sèche compilation; nous avons cherché à nous approprier la matière de chaque article, et à l'exposer, le plus clairement et le plus complètement possible, à notre point de vue personnel. Nous avons introduit partout un système de notations uniformes. Nous avons cherché à améliorer quelques théories et à combler quelques lacunes; nous ne croyons pas utile de les signaler ici : les personnes compétentes apprécieront, nous en avons l'espoir, nos efforts à cet égard. Enfin nous avons mis tous nos soins à une bonne rédaction, quoique ce mérite ne soit pas, de nos jours, fort en crédit auprès des personnes qui étudient les sciences.

VII. — Pour rendre facile et commode l'emploi d'un Dictionnaire des Mathématiques appliquées, il y avait à résoudre une difficulté particulière, résultant de ce que beaucoup de sujets ne peuvent être désignés que par la réunion de plusieurs mots, et que dès lors le lecteur pouvait hésiter dans le choix du mot à chercher pour arriver au sujet qu'il a en vue. Nous croyons avoir levé cette difficulté en introduisant, pour chaque branche des Mathématiques appliquées, un article général, où, après avoir défini cette branche des sciences, on en fait connaître les divisions, en renvoyant aux principaux articles qui traitent de la matière. En recourant à cet article général, il sera toujours facile de distinguer le mot que l'on doit chercher pour arriver au but qu'on se propose. Si, par exemple, on veut connaître les méthodes de construction relatives à la *plus courte distance de deux droites*, on cherchera d'abord l'article GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; et l'on verra, parmi les articles auxquels celui-ci renvoie, l'article DISTANCES (Problèmes sur les); c'est dans ce dernier article qu'on trouvera exposée la question de la plus courte distance de deux droites.

VIII. — La plupart des articles de ce Dictionnaire n'exigent du lecteur que la connaissance des Mathématiques élémentaires; un certain nombre cependant supposent l'étude de la Géométrie analytique; et quelques-uns, en plus petit nombre, emploient les notions élémentaires du Calcul infinitésimal, comprenant les quadratures, et l'intégration des équations différentielles les plus simples. Nous n'avons pas cru devoir, en général, faire usage, dans ces derniers articles, des procédés plus ou moins détournés à l'aide desquels on dissimule l'emploi de l'analyse infinitésimale; les questions d'application, comme les questions de mathématiques pures, sont de divers ordres de difficulté, et il faut savoir accepter cette espèce de hiérarchie.

IX. — Il existe un *Dictionnaire des Mathématiques* : c'est le Dictionnaire de Montferrier; mais ce livre n'aborde qu'un très-petit nombre de questions relatives aux applications, et il les traite, en général, par des méthodes qui paraissent aujourd'hui un peu surannées. Il n'existait pas, à notre connaissance, de Dictionnaire spécial des Mathématiques appliquées. Nous croyons donc avoir fait une chose utile en publiant un ouvrage destiné à remplir cette lacune. D'autres feront sans doute mieux que nous un jour; néanmoins nous croyons pouvoir offrir au public, avec quelque confiance, ce fruit de sept années d'un travail consciencieux et assidu.

X. — Nous ne terminerons pas sans exprimer ici toute notre gratitude pour le soin que les éditeurs ont mis à la bonne exécution typographique de ce volume. Nous remercions aussi MM. Claudel, Bonnafoux et Jahandier, qui ont bien voulu se charger des nombreuses figures insérées dans le texte, et qui se sont acquittés de cette tâche, non-seulement avec leur habileté ordinaire, mais avec un zèle pour lequel nous leur devons tous nos remerciements.

H SONNET.

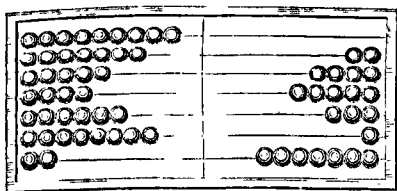
DICTIONNAIRE

DES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ABAQ

ABAQUE, instrument qui sert à faciliter les calculs numériques. Il est connu depuis un temps immémorial en Chine sous le nom de *souan pan*; les Russes l'emploient sous le nom de *schtote*; c'est une des variétés de l'*abacus* des Romains; il a été introduit dans nos écoles primaires sous le nom de *Boulier-compteur*.



Il se compose d'une boîte rectangulaire ouverte à sa partie supérieure, où est disposée une série de tringles parallèles, offrant une légère courbure vers le haut. Sur chacune de ces tringles sont enfilées 9 boules, que l'on peut faire passer à droite ou à gauche d'une ligne médiane tracée au fond de la boîte. Chaque tringle correspond à un ordre d'unités différent : celle du bas est destinée aux unités simples, la seconde aux dizaines, la troisième aux centaines, et ainsi de suite. Pour écrire un nombre avec cet appareil, on fait passer à droite de la ligne médiane un nombre de boules égal au nombre des unités de chaque ordre. Sur la figure, le nombre écrit est 245317.

Quand on veut disposer l'abaque pour le calcul des francs et centimes, on ajoute au bas deux autres tringles, séparées de celle des unités par un intervalle qui sert à les distinguer.

A proprement parler, l'abaque ne sert qu'à écrire les nombres et ne dispense pas du calcul mental.

Son emploi est avantageux dans les écoles primaires pour faire comprendre aux enfants notre système de numération décimale, dont il est l'origine probable.

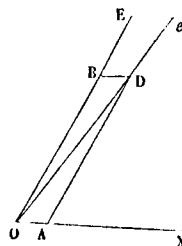
On doit à M. Lalanne une table à deux entrées, à laquelle il a donné le nom d'*Abaque universel*, et

ABER

qui donne à la simple vue le produit et le quotient de deux nombres, les carrés et les racines carrées, ainsi que divers autres indications utiles.

ABAQUE, tablette qui forme la partie supérieure des colonnes, et sur laquelle repose l'architrave. (Voy. TAILLOIR)

ABERRATION, erreur par suite de laquelle un observateur, entraîné avec la terre dans son mouvement de translation annuelle, rapporte les étoiles à d'autres points du ciel qu'à ceux qu'elles occupent réellement. Soit E une étoile, O la position de l'ob-



servateur; si celui-ci était immobile, il verrait l'étoile dans la direction du rayon lumineux OE qui lui vient de cette étoile. Mais l'observateur, participant au mouvement de la terre, est animé d'une certaine vitesse, dans le sens OX par exemple; et dès lors il verra l'étoile, non plus dans la direction OE, mais dans la direction de la VITESSE RELATIVE (Voy. ce mot) avec laquelle la lumière émanée de l'étoile parvient à son œil. Pour trouver cette direction, il faut prendre sur OE une longueur OD représentant la vitesse de la lumière, et sur OX une longueur OA représentant la vitesse de la terre, puis construire sur ces deux longueurs le parallélogramme OADB; la diagonale OB de ce parallélogramme sera la direction de la vitesse relative; et c'est en e que l'observateur verra l'étoile. Il en résulte une erreur de direction exprimée par l'angle EOE; c'est cet angle que l'on appelle l'*aberration*. Quelque considérable que soit la vitesse de la lu-

mière, elle n'est pas hors de toute proportion avec la vitesse de translation du globe. La vitesse de la lumière est de 77 000 lieues (de 4 kilomètres); la vitesse moyenne du globe est de 7,6 lieues; la première vitesse n'est donc qu'environ 10 000 fois plus grande; c'est-à-dire que, dans le triangle OAD, le côté AD est environ 10 000 fois plus grand que le côté OA; l'angle EOE est donc appréciable. Si on l'appelle α , et que l'on désigne EOX par α , on aura dans le triangle OAD :

$$OA : AD = \sin ODA : \sin DOA$$

ou $7,6 : 77000 = \sin \alpha : \sin (\alpha - \alpha)$,
d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{7,6 \cdot \sin \alpha}{77000 + 7,6 \cos \alpha}$$

Le maximum de cette valeur répond à $\alpha = 90^\circ$; on trouve dans ce cas $\alpha = 20^\circ,4$; tel est le maximum de l'erreur due à l'aberration de la lumière; cette erreur devient nulle quand OE et OX ont la même direction, ce qui a lieu deux fois dans l'année pour les étoiles placées dans le plan de l'écliptique.

Si le mouvement annuel de la terre était uniforme, une étoile placée au pôle de l'écliptique paraîtrait décrire autour de ce pôle, dans le cours de l'année, un cercle dont le diamètre sous-tendrait sur la sphère céleste une arc égal au double de $20^\circ,4$. Mais en réalité, à cause de l'inégalité du mouvement de la terre dans son orbite, une telle étoile semble décrire une ellipse. Toutes les autres étoiles semblent de même parcourir annuellement des courbes elliptiques, de plus en plus aplaties à mesure qu'elles sont plus voisines du plan de l'écliptique. Celles qui sont dans le plan de l'écliptique paraissent en décrire annuellement un petit arc en oscillant de part et d'autre de leur position véritable.

Le phénomène de l'aberration a été découvert par Bradley en 1727.

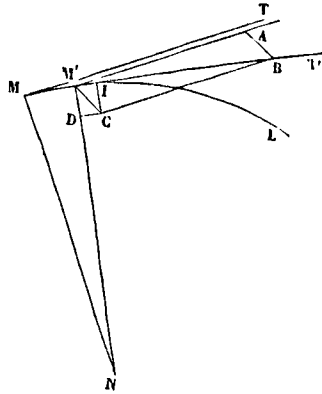
ACCASTILLAGE, partie de la coque d'un navire qui n'est pas destinée à être immergée. Elle constitue ce qu'on appelle les **ŒUVRES MORTES**. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

ACCÉLÉRATION. Dans le mouvement UNIFORMEMENT VARIÉ, l'accélération suivant la trajectoire est la quantité constante dont la vitesse varie dans l'unité de temps, ou dont elle varierait si le mouvement avait cette durée. Dans un MOUVEMENT VARIÉ quelconque, l'accélération est variable; c'est la dérivée de la vitesse considérée comme fonction du temps, ou, ce qui revient au même, la dérivée seconde de l'espace. On peut dire encore que c'est l'ACCÉLÉRATION MOYENNE pendant le temps infiniment court qui succède à l'instant considéré (Voy. les mots soulignés). L'accélération est, en valeur absolue, un nombre d'unités de longueur, un nombre de mètres; mais c'est une quantité *algébrique*, c'est-à-dire susceptible du signe + ou du signe -.

L'accélération due à la pesanteur est ordinairement désignée par la lettre g , initiale du mot *gravité*; sa valeur à Paris est $9^m,8088$. (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES.)

I. Indépendamment de l'accélération dans le sens de la trajectoire, accélération que l'on désigne pour cette raison sous le nom d'ACCÉLÉRATION TANGENTIELLE, il y a lieu en général de considérer une ACCÉLÉRATION NORMALE, et par suite une ACCÉLÉRATION TOTALE qui résulte des deux premières. Soient M et M' deux positions très-voisines du mobile

sur sa trajectoire ML, correspondantes aux temps t et $t + \Delta t$. En M le mobile possède une vitesse v di-



rigée suivant la tangente MT; en M', il possède une vitesse v' dirigée suivant la tangente M'T' (qui peut ne pas être dans un même plan avec MT). On peut décomposer la vitesse v' en deux autres dont l'une soit égale et parallèle à v ; pour cela on mènera par le point M' une droite M'A parallèle à MT, et dont la longueur représente la vitesse v à une échelle déterminée; sur la tangente M'T', on prendra, à la même échelle, une longueur M'B pour représenter v' , et l'on joindra AB, puis on achèvera le parallélogramme M'ABC; le côté M'C représentera la seconde composante de v' ; nous la désignerons par u . Ainsi, la vitesse v' du mobile arrivé en M' résulte de la vitesse v qu'il possédait en M, et d'une vitesse u qui est venue se combiner avec la première. La limite du rapport entre cette seconde vitesse u et le temps Δt que le mobile a mis à l'acquiescer, est ce qu'on appelle l'*accélération totale*. Mais la vitesse M'C = u peut se décomposer en deux autres, l'une M'I = θ suivant la tangente M'T', l'autre M'D = n suivant la normale en M'. La limite du rapport entre la vitesse θ et le temps Δt est ce qu'on appelle l'*accélération tangentielle*; la limite du rapport entre la vitesse n et ce même temps Δt est ce que l'on appelle l'*accélération normale*. — On obtient comme il suit l'expression de chacune de ces accélérations.

Désignons par δ l'angle M'BC ou BM'A, qui est celui des tangentes en M et M'; nous aurons

$$BI = BC \cos \delta = v \cos \delta;$$

et, par conséquent,

$$\theta = M'I = M'B - BI = v' - v \cos \delta,$$

ou, en remplaçant v' par $v + \Delta v$,

$$\theta = v(1 - \cos \delta) + \Delta v,$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{\theta}{\Delta t} = \lim \frac{(1 - v \cos \delta) + \Delta v}{\Delta t}.$$

Or, si l'on suppose que le temps Δt tende vers zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M, l'angle δ tendra vers zéro, ainsi que $1 - \cos \delta$; on aura donc

$$\lim \frac{\theta}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt};$$

c'est-à-dire que l'*accélération tangentielle est la dérivée de la vitesse, considérée comme fonction du temps*. On voit que l'expression de l'accélération-

tangentielle dans le mouvement curviligne est la même que dans le mouvement rectiligne.

Menons la normale MN; l'arc MM' étant supposé infiniment petit, le triangle MM'N peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en M'; il est par conséquent semblable au triangle BIC, comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ce triangle.

On a donc

$$\text{d'où} \quad \frac{IC}{\Delta t} = \frac{M'D}{\Delta t} = \text{IB} \cdot \frac{MM'}{\Delta t} : M'N,$$

$$\text{et} \quad \lim \frac{n}{\Delta t} = v \cos \delta \frac{MM'}{\Delta t} : M'N.$$

Mais si Δt tend vers zéro, $\cos \delta$ tend vers l'unité; $\frac{MM'}{\Delta t}$, ou le rapport entre l'arc parcouru et le temps employé à le parcourir, tend vers la vitesse v ; quant à M'N, qui est la portion de normale comprise entre la courbe et le point d'intersection N de deux normales consécutives, il tend vers le rayon de courbure, que nous désignerons par ρ ; on a donc

$$\lim \frac{n}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho};$$

c'est-à-dire que l'accélération normale est une troisième proportionnelle entre le rayon de courbure et la vitesse.

Le triangle M'IC étant rectangle, on a

$$M'C^2 = M'I^2 + IC^2,$$

$$\text{d'où} \quad \left(\frac{M'C}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{M'I}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{IC}{\Delta t}\right)^2,$$

relation qui a encore lieu à la limite. Mais si l'on appelle φ l'accélération totale, j l'accélération tangentielle, et ψ l'accélération normale, on vient de voir qu'on a

$$\varphi = \lim \frac{M'C}{\Delta t}, \quad j = \lim \frac{M'I}{\Delta t}, \quad \psi = \lim \frac{IC}{\Delta t};$$

en vertu de la relation ci-dessus, on a donc

$$\varphi^2 = j^2 + \psi^2,$$

c'est-à-dire que l'accélération totale peut être calculée comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés seraient l'accélération tangentielle et l'accélération normale. Ainsi l'on a

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

On peut remarquer que, lorsque l'accélération normale est nulle, l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle. Mais l'accélération normale ne peut être constamment nulle que dans le cas où l'on aurait constamment $v=0$, et alors il n'y aurait point de mouvement, ou dans le cas où l'on aurait constamment $\rho=\infty$, ce qui suppose que la trajectoire soit une ligne droite. Si donc l'accélération normale est constamment nulle, le mouvement est rectiligne, à moins qu'il n'y ait point de mouvement.

Si l'accélération tangentielle est nulle, l'accélération totale se réduit à l'accélération normale, c'est-à-dire que si la vitesse est constante, auquel cas on a

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

il reste

$$\varphi = \frac{v^2}{\rho};$$

l'accélération totale varie alors en raison inverse du rayon de courbure. Si le mouvement est à la fois

circulaire et uniforme, l'accélération normale est constante, puisque ρ est alors le rayon du cercle; elle est d'ailleurs dirigée suivant le rayon, et passe par conséquent par le centre, ce qui lui a fait donner le nom d'ACCÉLÉRATION CENTRIFÈTE. (Voy. FORCE CENTRIFÈTE.) Par extension, on appelle souvent accélération centripète l'accélération normale, quoique le rayon de courbure soit variable; mais la dénomination se trouve alors justifiée par cette considération que l'accélération normale est, à chaque instant, dirigée vers le centre de courbure.

Le produit de l'accélération totale par la masse m du mobile est la mesure de la force qui agit sur ce mobile à l'instant considéré; elle peut se décomposer en deux autres, l'une dirigée suivant la tangente, l'autre suivant la normale, et qui ont respectivement pour mesure le produit de la masse du mobile par l'accélération tangentielle ou par l'accélération normale; ces deux forces, auxquelles le mouvement peut être attribué, portent le nom de *force tangentielle* et de *force normale* ou *centripète*. (Voy. FORCES, MOUVEMENT CURVILIGNE, PROJECTION DU MOUVEMENT.)

L'accélération, due à une force constante, a pour expression le quotient de la force qui la produit par la masse du mobile; car on a (Voy. MESURE DES FORCES) :

$$F = mj, \quad \text{d'où} \quad j = \frac{F}{m},$$

en appelant F la force, m la masse du mobile et j l'accélération. Si la force est variable, cette relation subsiste à un instant quelconque, en sorte que l'accélération est aussi variable.

II. Dans le mouvement de TRANSLATION (Voy. ce mot), l'accélération s'exprime d'une manière simple au moyen de la masse totale du système en mouvement et des forces qui y sont appliquées. En effet, si M désigne la masse totale du système, v la vitesse finale d'un quelconque des points matériels qui le composent et v_0 sa vitesse initiale; si F désigne l'une quelconque des forces qui agissent sur le système, F_x sa projection sur la direction du mouvement, et dx le chemin élémentaire décrit dans le temps dt par un point quelconque du corps, on a par le principe de l'effet du travail (Voy. EFFET DU TRAVAIL) :

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \Sigma \int F_x dx = \int \Sigma F_x dx.$$

Différentions cette équation par rapport au temps,

$$\text{il viendra} \quad Mv \frac{dv}{dt} = \Sigma F_x \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Mais $\frac{dx}{dt}$, ou le rapport entre l'accroissement infiniment petit de l'abscisse d'un point du système et l'accroissement infiniment petit du temps, n'est autre chose que la vitesse v ; en supprimant donc ce facteur commun aux deux membres, il reste

$$M \frac{dv}{dt} = \Sigma F_x,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\Sigma F_x}{M};$$

c'est-à-dire que l'accélération a pour valeur la somme algébrique des projections des forces sur la direction du mouvement, divisée par la masse totale du système.

L'accélération est indépendante des forces mu-

uelles que les divers points matériels du système exercent les uns sur les autres; car, dans la somme ΣF_x , les projections de ces forces mutuelles étant deux à deux égales et de signes contraires, disparaissent d'elles-mêmes du résultat.

Si l'on désigne par R la *résultante de translation*, c'est-à-dire la résultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de l'espace, et par R_x sa projection sur la direction du mouvement, on a, par la propriété connue de la résultante, ou du polygone des forces (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*) :

$$\Sigma F_x = R_x,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R_x}{M};$$

c'est-à-dire que l'accélération du système est la même que s'il se réduisait à un point matériel dont la masse serait M , et qui serait soumis à la force R_x ; en d'autres termes, *l'accélération est la même que si toute la masse était concentrée en un même point et que toutes les forces y fussent appliquées.* (*Voy. ACCÉLÉRATION ANGULAIRE.*)

On peut remarquer que si, dans son mouvement de translation, le corps considéré passe par un maximum ou par un minimum de vitesse, comme cela arrive dans les machines pour les corps animés d'un mouvement de va-et-vient, chaque fois que la vitesse v devient maximum ou minimum, sa dérivée $\frac{dv}{dt}$ s'annule, ce qui exige qu'on ait à ce moment-là

$$\Sigma F_x = 0,$$

c'est-à-dire que, *toutes les fois que la vitesse du corps passe par un maximum ou par un minimum, la somme algébrique des projections des forces sur la direction du mouvement devient égale à zéro.* Cette remarque trouve souvent son application.

ACCÉLÉRATION ANGULAIRE, nom que l'on donne, dans le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe, à l'accélération d'un point supposé placé à l'unité de distance de l'axe. Si α désigne l'arc décrit pendant le temps t par un point situé à 1^m de distance de l'axe, à partir de sa position initiale, cet arc est une fonction du temps, et l'on a

$$\alpha = f(t),$$

f désignant une fonction quelconque. La vitesse de ce point est ce que l'on appelle la *vitesse angulaire*; et en la désignant, suivant l'usage, par ω , on a

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = f'(t).$$

L'accélération de ce même point est l'*accélération angulaire*; en la représentant par γ , on a donc (*Voy. ACCÉLÉRATION*)

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = f''(t).$$

L'accélération d'un point quelconque situé à la distance r de l'axe est γr , puisque la vitesse de ce point est ωr . (*Voy. ROTATION.*)

L'accélération angulaire s'exprime d'une manière simple en fonction du moment d'inertie du système tournant, et des forces appliquées en ses différents points. Soit I le moment d'inertie du système, ω la vitesse angulaire au bout du temps t à partir de sa position initiale, ω_0 sa vitesse angulaire au commencement de ce temps, F l'une quelconque des forces qui agissent sur le système, $\mathcal{N}F$ son moment var

rapport à l'axe de rotation, et dx l'arc élémentaire décrit dans le temps dt par un point situé à l'unité de distance de l'axe, on a, par le *principe de l'effet du travail* (*Voy. EFFET DU TRAVAIL*)

$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot I = \int d\alpha \Sigma \mathcal{N}F.$$

Différentions cette équation par rapport au temps,

$$\text{il viendra} \quad \omega \frac{d\omega}{dt} \cdot I = \frac{d\alpha}{dt} \Sigma \mathcal{N}F.$$

Mais $\frac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire ω ; en supprimant donc ce facteur commun aux deux membres, il reste

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot I = \Sigma \mathcal{N}F,$$

$$\text{d'où} \quad \gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{N}F}{I};$$

c'est-à-dire que *l'accélération angulaire est égale à la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du système par rapport au même axe.*

On peut arriver par une autre voie à l'expression de l'accélération angulaire. *Voy. ROTATION.*

Les *forces mutuelles* que les divers points matériels du système exercent les uns sur les autres n'entrent point dans l'expression de l'accélération angulaire; car, ces forces étant deux à deux égales et opposées, leurs moments par rapport à un axe quelconque sont égaux et de signes contraires (*Voy. MOMENT*); ces moments disparaissent donc d'eux-mêmes dans la somme totale des moments.

On peut remarquer que toutes les fois que la vitesse angulaire passe par un maximum ou par un minimum, comme cela arrive généralement à chaque tour pour la plupart des pièces tournantes d'une machine, la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ de cette vitesse angulaire s'annule, ce qui exige qu'on ait à ce moment-là

$$\Sigma \mathcal{N}F = 0,$$

c'est-à-dire que *toutes les fois que la vitesse angulaire d'un système tournant passe par un maximum ou par un minimum, la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation devient égale à zéro.* Cette remarque est souvent utile, particulièrement dans la théorie des **VOLANTS**. (*Voy. ce mot.*)

ACCÉLÉRATION DES FIXES, accroissement de longitude des étoiles, dû à la **PRÉCESSION DES ÉQUINOXES**. (*Voy. ce mot.*)

ACCÉLÉRATION MOYENNE, accélération du mouvement uniformément varié qu'il faudrait substituer au mouvement réel d'un point matériel pour que, dans le même temps total, la variation de vitesse fût la même. Il en résulte que l'accélération moyenne a pour valeur le quotient de la variation de vitesse par le temps total employé à produire cette variation. (*Voy. MOUVEMENT VARIÉ.*)

ACTION, part dans le fonds social et dans les intérêts d'une Compagnie formée pour une entreprise quelconque. Les actions sont nominatives ou au porteur: dans le premier cas, elles se cèdent par voie de transfert comme les titres de rentes; dans le second, elles changent de propriétaire par la simple remise du titre, comme pour le billet de Banque. Les actions sont dites *libérées* lorsque le versement intégral de leur valeur d'émission a été opéré dans la caisse de la Compagnie. Les actions ont presque

toujours une valeur réelle supérieure à leur valeur nominale; cette valeur réelle est cotée chaque jour à la Bourse. Le revenu qu'elles produisent est inscrit dans une colonne spéciale du *Bulletin*.

Les actions servent de matière aux spéculations et aux opérations de Bourse comme les fonds publics. (*Voy. les articles qui suivent immédiatement.*)

ACTIONS DE LA BANQUE. Le capital de la Banque de France se compose de 91 250 actions dont la valeur nominale est de 1000 fr. chacune. Chaque action donne droit à un dividende qui se paye par semestre, en Janvier et en Juillet. Pour former ce dividende, la Banque prélève sur ses bénéfices 6 pour 100 du capital nominal des actions, et y ajoute les $\frac{2}{3}$ du reste, le troisième tiers étant destiné à former sa réserve.

Ces actions ne donnent lieu qu'à des problèmes très-simples. Nous en donnerons deux exemples.

I. En 1854, le dividende du premier semestre a été de 112 fr., et celui du second semestre de 82 fr. A quel taux a-t-on placé son argent cette année-là en achetant des actions de la Banque au cours de 3000 fr.?

Puisque 3000 fr. ont rapporté 112' + 82' ou 194 fr., 100 fr. rapporteraient 30 fois moins, c'est-à-dire 6',466... ou environ 6',47.

II. Quel a été, dans cette même année, le bénéfice total de la Banque de France?

Les 6 pour 100 sur 1000 valent 60 fr. Si donc on désigne par x le bénéfice par action, le dividende se compose de 60 fr., plus les $\frac{2}{3}$ de $x - 60$; on doit donc avoir

$$60 + \frac{2}{3}(x - 60) = 194,$$

d'où l'on tire $x = 261$ fr.

Multipliant par 91 250, qui est le nombre des actions, on obtient pour le bénéfice total 23 816 250 fr.

ACTIONS DU COMPTOIR D'ESCOMPTE. Ces actions, au nombre de 40 000, ont une valeur nominale de 500 fr., et donnent droit à un dividende annuel. Pour le former, le Comptoir prélève 4 pour 100 de la valeur nominale des actions, et y ajoute les $\frac{3}{4}$ du reste, le quatrième quart étant destiné à former sa réserve.

I. En 1852, le dividende a été de 40 fr. On demande à quel taux on a placé son argent en achetant des actions du Comptoir d'escompte à 810 fr.?

Puisque 810 fr. ont rapporté 40 fr., 1 fr. eût rapporté $\frac{40'}{810}$; et 100 fr. eussent rapporté $\frac{40' \times 100}{810}$, c'est-à-dire 4',938.

II. Si l'on évalue à 2 millions le bénéfice annuel du Comptoir d'escompte, quel devrait être le prix des actions pour que l'acheteur retirât $4\frac{1}{2}$ pour 100 de son argent?

Le bénéfice total étant de 2 000 000 fr., le bénéfice par action en serait la 40 000^e partie, c'est-à-dire 50 fr. Le dividende à payer par action se composerait alors de 20 fr. plus les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste de 50 fr. quand on en retranche 20 fr.; c'est-

à-dire que ce dividende aurait pour expression

$$20' + \frac{3}{4} \cdot 30' \text{ ou } 42',50.$$

Le prix d'une action s'obtiendrait dès lors par la proportion

$$4',50 : 100 = 42',50 : x,$$

d'où $x = 944',44$.

ACTIONS DU CRÉDIT FONCIER. Ces actions, au nombre de 60 000, ont une valeur de 500 fr. Elles donnent lieu à un dividende annuel. Pour le former, la société prélève sur ses bénéfices nets 5 pour 100 de la valeur nominale des actions, et y ajoute les $\frac{4}{5}$ du surplus, le dernier cinquième étant destiné à former sa réserve.

Exemples de problèmes relatifs à ces actions.

I. En 1854, le dividende a été de 30 fr. par action. A quel taux a-t-on placé son argent en achetant de ces actions au cours de 660 fr.?

Puisque 660 fr. ont rapporté 30 fr., 100 fr. auraient rapporté un intérêt x donné par la proportion

$$660 : 30 = 100' : x, \text{ d'où } x = 4',545,$$

ou un peu moins de 4,55.

II. Quel a été, dans cette même année, le bénéfice pour 100 de la société?

Les 5 pour 100 sur 500 fr. font 25 fr.; en retranchant cette somme du dividende 30 fr., il reste 5' qui représentent les $\frac{4}{5}$ de la différence entre le bénéfice par action et 25 fr. En appelant x le bénéfice demandé, on doit donc avoir

$$25' + \frac{4}{5}(x - 25) = 30,$$

d'où $x = 31',25$.

ACTIONS DU CRÉDIT MOBILIER. Ces actions, au nombre de 120 000, ont une valeur nominale de 500 fr. Elles donnent droit à un dividende annuel. Pour former ce dividende, la société prélève sur ses bénéfices 5 pour 100 du capital nominal des actions, et elle y ajoute les $\frac{9}{10}$ du reste, diminué préalablement de 5 pour 100 lui-même.

Les problèmes auxquels ces actions peuvent donner lieu sont analogues aux suivants :

I. En supposant que le bénéfice net de la société soit de 10 000 000 fr., quel serait le dividende par action? et à quel taux placerait-on son argent en achetant de ces actions au cours de 900 fr.?

1^o Le bénéfice par action serait $\frac{10000000'}{120000}$ ou 83',33. Le dividende serait donc

$$25' + \frac{9}{10} \left(83',33 - 25' - \frac{1}{20} \cdot 83',33 \right),$$

c'est-à-dire 73',75.

2^o On gagnerait 73',75 sur 900 fr.; le taux de l'intérêt serait donc donné par la proportion

$$900 : 73',75 = 100 : x, \text{ d'où } x = 8',194.$$

II. — Au 18 janvier 1865 le cours des actions du Crédit mobilier était 962',50; et le cours de la rente $4\frac{1}{2}$ pour 100 était 95',30. Quel devrait être le bénéfice net de la société pour qu'il y eût avantage

dans ces conditions d'acheter des actions plutôt que de la rente?

Il faut d'abord calculer le taux réel de l'intérêt équivalent à la rente: il est donné par la proportion

$$95,30 : 4,50 = 100 : x, \text{ d'où } x = 4',72.$$

Soit maintenant y le bénéfice par action réalisé par la société; l'expression du dividende sera

$$25 + \frac{9}{10} \left(y - 25 - \frac{1}{20} y \right) \text{ ou } 2',50 + 0',855 y.$$

Le taux de l'intérêt correspondant est donné par la proportion

$$962',50 : 2',50 + 0,855 y = 100 : x,$$

$$\text{d'où } x = \frac{250 + 85,5 y}{962,50}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{250 + 85,5 y}{962,50} > 4',72,$$

d'où l'on tire

$$y > 50',21.$$

Par conséquent le bénéfice total devrait être supérieur à $50',21 \times 120\,000$ ou à 6 025 200 fr.

ACTIONS INDUSTRIELLES. Elles donnent lieu à des problèmes analogues à ceux qui ont été traités dans les articles précédents. Nous donnons ci-dessous le tableau, à la date du 30 janvier 1865, de la valeur de quelques actions, choisies parmi les principales, avec le revenu qu'elles produisent et le taux du placement.

NOMS DES ACTIONS.	VALEUR nominale.	VALEUR cotée.	REVENU.	TAUX du placement p. 100.
Chemin de fer d'Orléans....	500 ^f	922 ^f ,50	100 ^f	10 ^f ,84
— — du Nord.....	500	1007,50	62	6,15
— — de l'Est.....	500	512,50	33	6,44
— — de la Méditerranée.....	500	940	75	7,98
— — du Midi.....	500	581,25	45	7,74
— — de l'Ouest.....	500	587,50	37,50	6,98
Quatre Canaux.....	1000	1250	50	4,00
Omnibus de Paris.....	1000	1190	71	5,97

(Voir le *Bulletin de la Bourse.*)

Pour obtenir le taux du placement, il suffit de multiplier par 100 le revenu, et de diviser le produit par la valeur totale.

ADHÉRENCE, résistance que les corps en contact opposent à un effort tendant à les séparer. Cette résistance paraît proportionnelle à l'étendue des surfaces, et à peu près indépendante de la pression mutuelle; elle croît avec la durée du contact lorsque les corps sont compressibles.

Coulomb pensait que dans le phénomène du frottement une part doit être attribuée à l'adhérence; et il expliquait ainsi pourquoi le frottement *au départ* est plus considérable que pendant le mouvement. Il est vraisemblable que le frottement proprement dit ne commence à s'exercer que quand l'adhérence est vaincue, et que, par conséquent, ces deux forces n'agissent jamais simultanément.

M. Morin a fait des expériences sur la résistance qu'opposent au glissement les pierres calcaires réunies par une couche de plâtre. Après 48 jours

de contact à l'air, il a obtenu les résultats suivants :

NATURE DES PIERRES SUPÉRIEURES.	SURFACE de contact en décim.carr.	RÉSISTANCE moyenne par mét. carr.
Calcaire de Jaumont sur le même.	2,0	22 000 ^k
Calcaire de Jaumont sur le même..	8,0	28 000
Calcaire bleu à gryphites sur le même.....	2,5	11 000
Calcaire bleu à gryphites sur le même.....	4,5	20 000

Il a fait des expériences analogues avec des pierres réunies par du mortier; et il a trouvé qu'avec du mortier de chaux hydraulique de Metz la résistance au glissement est d'environ 10307^k par mètre carré. Avec des chaux grasses, M. Boistard, ingénieur des ponts et chaussées, a trouvé 6960^k. Mais il faut bien remarquer que si, dans le cas du plâtre, la résistance peut être attribuée à l'adhérence, parce que la rupture s'opère entre la pierre et la couche de plâtre à la jonction des deux surfaces, il n'en est plus de même pour les mortiers; la rupture se faisant alors dans l'intérieur de la couche du mortier, la résistance au glissement doit être attribuée à la cohésion de celui-ci.

(Voy. l'*Introduction à la mécanique industrielle* par M. Poncelet; et les *Leçons de mécanique pratique* de M. Morin.)

AÉROSTAT (du latin *aer*, air, et *stare*, se tenir), appareil disposé pour s'élever dans l'atmosphère et y flotter à une certaine hauteur. Les aérostats ont été imaginés par les frères Montgolfier, qui firent leur première expérience à Annonay (Ardèche) le 5 juin 1783, en présence des états généraux et d'un immense concours de peuple. Leur appareil se composait d'un vaste globe en toile légère, doublée de papier, et présentant à sa partie inférieure une ouverture de quelques décimètres seulement. Au-dessous de cette ouverture était suspendue une corbeille en fils métalliques renfermant de la paille hachée. En enflammant cette paille ils chauffaient l'air contenu dans le globe; une partie de l'air dilaté sortait par l'orifice; et le poids de l'air contenu dans le globe devenait moindre que le poids de l'air déplacé. Lorsque la différence fut devenue égale au poids du globe lui-même, celui-ci s'éleva majestueusement dans l'atmosphère, spectacle inconnu jusqu'alors, et bien digne d'exciter l'admiration des assistants. Les appareils de ce genre furent appelés *montgolfières*, du nom de leur inventeur. C'est à une montgolfière que Pilâtre de Rozier osa le premier suspendre une nacelle, dans laquelle il s'éleva avec le marquis d'Arlandes. Peu de temps après, Charles, depuis physicien célèbre, eut l'idée de remplacer l'air chaud par le gaz hydrogène, en même temps qu'il substituait à la toile doublée de papier une enveloppe de taffetas verni. Il partit avec Robert, du jardin des Tuileries, s'éleva rapidement à une hauteur de 1000 mètres, et parcourut plus de 9 lieues en 2 heures. Depuis, il a été fait un grand nombre d'ascensions aérostatiques, en France et à l'étranger, dans un intérêt scientifique. La plus célèbre est celle qui a été exécutée en 1804 par Gay-Lussac. Parti du Conservatoire des Arts et Métiers, il s'éleva à une hauteur de 7000 mètres, et, après six heures de navigation aérienne, alla

descendre près de Rouen. Le baromètre, qui au départ marquait 0^m,7652, ne marquait plus que 0^m,3288 à la limite de l'ascension; et le thermomètre s'était abaissé dans le même temps de 27^o,75 au-dessus de zéro jusqu'à 9^o au-dessous du point de congélation de l'eau.

On donne généralement aux aérostats ou ballons une forme à peu près sphérique, mais légèrement allongée vers le bas, et présentant en ce point une ouverture dont la destination sera indiquée tout à l'heure; on remplit le ballon soit d'hydrogène pur qu'y amènent des conduits partant d'un certain nombre de tonneaux où l'eau est décomposée à l'aide du zinc ou du fer et de l'acide sulfurique, soit d'hydrogène carboné ou gaz d'éclairage que l'industrie fournit aujourd'hui en abondance. Le ballon est recouvert d'un filet, dont les fils, se réunissant par groupes à partir de l'équateur, portent la nacelle dans laquelle se placent les aéronautes, et qui est lestée avec du sable afin que le système flottant soit toujours en équilibre stable (V. CORPS PLONGÉS). A la partie supérieure est pratiquée une ouverture fermée par une soupape, que l'aéronaute peut ouvrir à volonté, mais qui se referme d'elle-même. Quand le navigateur veut s'élever, il jette du lest; quand il veut descendre, il laisse échapper du gaz en ouvrant la soupape. A mesure que le ballon s'élève, il pénètre dans des couches d'air plus rare; le gaz intérieur se dilate; mais l'ouverture laissée libre à la partie inférieure empêche que la pression intérieure puisse devenir moindre que la pression atmosphérique, ce qui pourrait amener la rupture de l'enveloppe.

Si l'on ne considère que l'équilibre de l'aérostat, sa théorie est des plus simples. D'après le PRINCIPLE d'ARCHIMÈDE (Voy. ce mot), tout corps plongé dans un fluide éprouve de sa part une poussée verticale de bas en haut égale au poids du fluide déplacé. On appelle *force ascensionnelle* d'un aérostat l'excès de cette poussée sur le poids du ballon et du gaz contenu. Soit P le poids de l'air déplacé, c'est-à-dire la poussée, P' le poids du gaz contenu dans l'enveloppe, et p le poids de l'enveloppe, du filet et de la nacelle; la force ascensionnelle aura pour expression

$$P - P' - p.$$

En égalant cette quantité au poids que doit porter l'aérostat, on obtient une égalité qui permet soit de déterminer ce poids si les dimensions du ballon sont connues, soit au contraire de déterminer ces dimensions si le poids à enlever est donné à l'avance. Désignons par R le rayon du ballon considéré comme sphérique, par q le poids du mètre carré de l'étoffe qui forme l'enveloppe, par p' le poids présumé du filet et de la nacelle, et par Q le poids à enlever. Soit enfin Π le poids du mètre cube d'air, et Π' le poids du mètre cube du gaz contenu. On devra avoir

$$\Pi \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 - \Pi' \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 - q \cdot 4 \pi R^2 - p' = Q,$$

relation qui donnera Q quand on connaîtra R , ou R quand on se donnera Q . Dans ce second cas on évitera la résolution d'une équation du troisième degré en négligeant d'abord le poids de l'enveloppe, ce qui donnera pour R une première approximation, et en substituant ensuite cette valeur approchée dans le terme $q \cdot 4 \pi R^2$ pour obtenir une seconde valeur de R plus approchée. Si le ballon est rempli d'hydro-

gène, on aura $\Pi' = 0^h,08976$; s'il est rempli de gaz d'éclairage, on aura en moyenne $\Pi' = 0^h,689$. Dans les deux cas $\Pi = 1^h,299$.

On peut apprécier sommairement la force ascensionnelle en retranchant Π' de Π : pour le gaz hydrogène pur on trouve 1^h,209 environ par mètre cube; et dans le cas du gaz d'éclairage, 0,610 seulement. L'emploi du gaz d'éclairage exige donc un ballon d'un volume presque double pour porter le même poids, enveloppe comprise.

Ordinairement on ne remplit pas entièrement le ballon de gaz, afin de faciliter la dilatation de celui-ci par suite de la diminution de pression extérieure. Il est à remarquer que, dans ce cas, la force ascensionnelle reste sensiblement la même jusqu'à ce que le ballon se soit entièrement gonflé; car, malgré les changements de volume du ballon, les poids P et P' restent les mêmes, ou du moins ne diminuent que d'une quantité insensible par suite de la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Mais, une fois le ballon gonflé, la force ascensionnelle diminue: car si V désigne le volume du ballon, h la pression atmosphérique, t la température et a le coefficient de dilatation du gaz,

$$\text{on a } P - P' = V(\Pi - \Pi') \cdot \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1+at}.$$

Or, $1+at$ diminue moins rapidement que h ; par conséquent $P - P'$ diminue dès que le volume V est devenu constant.

En vertu de la force ascensionnelle, le ballon s'élève d'abord d'un mouvement accéléré; mais il éprouve de la part de l'air une résistance qui croît plus rapidement que le carré de la vitesse; il en résulte que cette résistance devient bientôt égale à la force ascensionnelle, et le mouvement d'ascension devient sensiblement uniforme. Cependant la vitesse continue à diminuer par suite de la diminution de la force ascensionnelle; et, à une certaine hauteur, la vitesse finit par devenir insensible; le ballon flotte dans la couche d'air où il se trouve, et suit la direction du vent.

Jusqu'ici les efforts tentés pour la direction des ballons ont été infructueux; on n'a d'autre moyen de changer de direction que de s'élever ou de s'abaisser pour entrer dans des couches d'air animées de mouvements différents. Mais ce moyen est fort incertain; et pendant longtemps encore vraisemblablement la navigation aérienne demeurera sur ce point capital extrêmement imparfaite.

AIGUILLES, portions de rails mobiles qui servent, sur les chemins de fer, à opérer les changements de voie. Sur les premiers chemins de fer, ces changements se faisaient d'une manière très-simple, représentée par la figure 1. Soit AA la voie

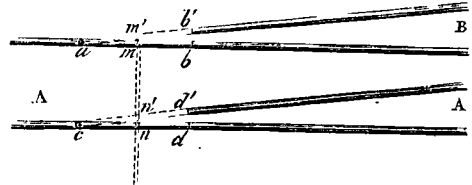


Fig. 1.

principale, qui se bifurque pour prendre la direction B. Ces voies sont interrompues à partir des points a et c sur une certaine longueur. En ces

points sont adaptés deux rails mobiles *ab* et *cd*, qui tournent autour de boulons établis en *a* et en *c*, et qui sont reliés par une tringle *mn* articulée en *m* et en *n*. Si les rails mobiles occupent la position *ab*, *cd*, ils comblent la lacune laissée dans la voie principale AA, et cette voie est ouverte à la circulation des trains. S'ils occupent au contraire la position *ab'*, *cd'*, la voie principale est interrompue et la voie AB est ouverte. La figure exagère l'angle que font alors les rails mobiles avec les rails de la voie principale ; dans la réalité, comme la bifurcation se fait au moyen d'une voie courbe, on peut faire l'angle dont il s'agit aussi petit que l'on veut, et rendre ainsi le changement de voie insensible. Le même système peut être employé pour mettre une même voie en communication alternative avec trois ou même un nombre quelconque de voies. Mais il est très-dangereux, parce que si, par négligence ou autrement, les rails mobiles n'ont pas la position qu'ils doivent avoir, les trains venant de la droite déraillent infailliblement à cause de l'interruption de la voie.

Plusieurs autres systèmes ont été essayés successivement. Nous nous bornerons à décrire celui auquel on semble s'être arrêté aujourd'hui, et dont l'idée première paraît appartenir à Stephenson, mais qui a été notablement perfectionné par M. Wild. Dans le système actuel, les voies ne sont point interrompues des deux côtés, et des deux rails mobiles, l'un appartient à l'une des deux voies, et le second appartient à l'autre. Ces bouts de rails se terminent en biseau à leur extrémité mobile, d'où le nom d'*aiguilles* qui leur a été donné, et peuvent se loger sous le champignon du rail fixe voisin. La figure 2 montre cette disposition. L'une des

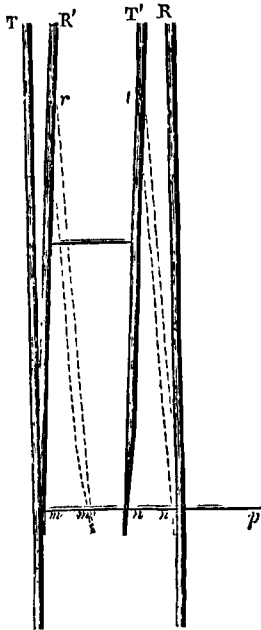


Fig. 2.

voies est formée par le rail fixe R et par le rail R', qui se termine par une aiguille *rm* mobile autour d'un boulon placé en *r*. L'autre voie est formée du rail fixe T et du rail T' qui se termine par une aiguille *tn* mobile autour du point *t*. Les deux aiguilles sont rendues solidaires par des entretoises articulées, dont l'une *mn* peut être tirée ou poussée de l'extérieur à l'aide d'un mécanisme que nous décrirons plus loin. Si l'on donne au système la position indiquée en lignes pleines sur la figure, l'aiguille *rm* s'engage sous le rail fixe T, et c'est la voie RR' qui est ouverte. Si l'on donne au système la position indiquée en lignes pon-

ctées, c'est l'aiguille *tn* qui s'engage sous le rail fixe

R, et c'est la voie TT' qui est ouverte. Un employé spécial appelé *aiguilleur* est chargé de la manœuvre des aiguilles à l'approche des trains; ce service ne demande que de l'attention et de l'exactitude; mais il est des plus importants et n'est confié qu'à des hommes sûrs. Ce système n'offre pas d'ailleurs les dangers que présentent les voies interrompues. En supposant les aiguilles mal placées, il n'en résulterait pas en général d'accident; le train arrivant poussé à droite ou à gauche les aiguilles mal placées, et peut s'engager sur une autre voie que celle qu'il doit suivre; mais l'erreur peut être réparée par une contre-marche dès qu'elle est reconnue, et il n'en résulte pas de déraillement, ce qui est le danger le plus grave que les trains puissent courir.

Les aiguilles sont mises en mouvement à l'aide d'un levier L (fig. 3) pouvant tourner autour d'un axe O,

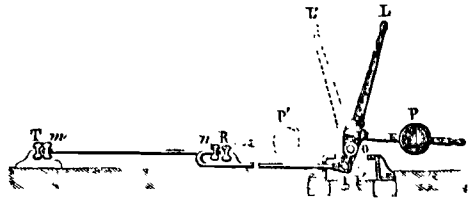


Fig. 3.

et portant un bras mobile terminé par un contre-poids P. Si l'aiguilleur donne au levier la position OL, son extrémité I pousse les aiguilles vers la gauche, le rail mobile *rm* (fig. 2) se loge sous le rail fixe T, et la voie RR' est ouverte. Si l'aiguilleur donne au levier la position OL' (fig. 3), son extrémité I tire les aiguilles vers la droite, le rail mobile *tn* (fig. 2) se loge sous le rail fixe R, et c'est la voie TT' qui devient libre. En faisant passer le levier de la position OL (fig. 3) à la position OL', l'aiguilleur a soin de faire tourner autour de OL le bras qui porte le contre-poids, de manière à l'amener en I', de telle sorte que, dans les deux cas, le levier une fois en place tend à se maintenir dans sa position par l'effet du contre-poids, et que l'aiguilleur n'a plus à occuper des aiguilles, qui se maintiennent d'elles-mêmes pendant toute la durée du passage des trains.

On a quelquefois, notamment au chemin d'Orléans, employé des leviers courbes, à l'extrémité desquels le contre-poids était

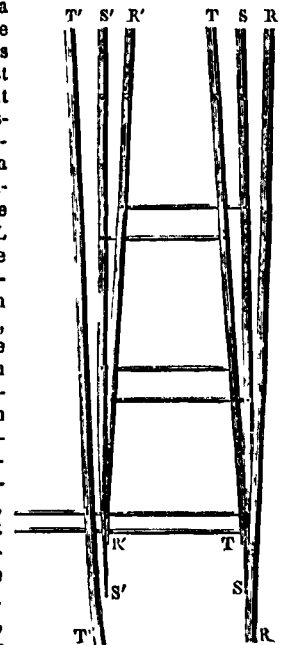


Fig. 4.

établi à demeure. Dans ce cas, le système se maintient de lui-même dans l'une des positions que peuvent prendre les aiguilles; mais pour qu'il se maintienne dans la position opposée, il faut que l'aiguilleur soutienne lui-même le contre-poids. Ce système ne peut être employé par conséquent que dans les points où le changement de voie n'est qu'accidentellement utilisé. S'il doit être fréquent, il faut faire usage du système de la figure 3, qui est employé sur la ligne de l'Est, et sur plusieurs autres grandes lignes.

Le système des aiguilles peut être employé pour faire communiquer une voie unique avec trois voies différentes; c'est ce qu'on appelle un *changement de voie double*. Quatre aiguilles sont alors nécessaires, et il faut deux leviers distincts pour les manœuvrer. Cette disposition est représentée par les figures 4 et 5. Sur la figure 4, l'aiguille S est poussée sous le rail fixe R, et l'aiguille T sous l'aiguille S;

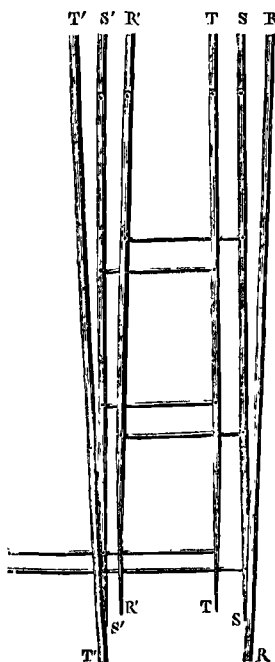


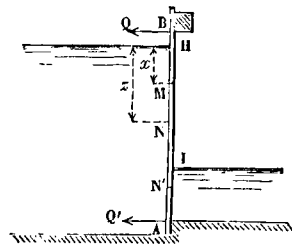
Fig. 5.

que, pour ouvrir une des voies latérales, il faut pousser à la fois les deux aiguilles du côté opposé au rail fixe de cette voie, et que, pour ouvrir la voie du milieu, il faut pousser les deux aiguilles en sens contraire, chacune contre le rail fixe qui est le plus voisin. Cette manœuvre, plus compliquée que le changement de voie simple, exige beaucoup d'attention de la part de l'aiguilleur.

Les aiguilles ayant à supporter un poids considérable au passage des trains, sans être, comme les rails, soutenues par des traverses fixes, on les fait ordinairement en métal très-dur, tel que fer au bois, de première qualité, acier fondu ou acier puddlé, c'est-à-dire affiné dans des fourneaux à réverbère spéciaux.

(Voy. pour plus de détails le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet.)

AIGUILLES DE BARRAGE, pièces de bois verticales juxtaposées qui forment une retenue. Le calcul de leur dimension dans le sens de la poussée de l'eau est une application des principes sur la résistance des prismes à la FLEXION PLANE (Voy. ce mot). Ce cas se distingue de celui d'une poutre droite posée sur deux appuis en ce que la charge n'est plus uniformément répartie.



Soit AB une aiguille dont la hauteur est l , et dont la largeur est λ perpendiculairement au plan de la figure; elle est chargée en amont d'une hauteur d'eau AH, que nous nommerons H , et en aval d'une hauteur d'eau AI, que nous désignerons par h . Soit M un point quelconque de la fibre moyenne, situé à la distance x au-dessous du niveau supérieur. Considérons l'élément rectangulaire λdx situé en ce point: il supporte, d'amont en aval, une pression qui a pour expression $\Pi \lambda x dx$, en désignant par Π le poids du mètre cube d'eau. La pression totale P exercée sur l'aiguille par les eaux d'amont a donc pour valeur

$$P = \int_0^H \Pi \lambda x dx, \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \Pi \lambda H^2.$$

En aval s'exerce une pression totale P' dont la valeur absolue s'obtiendrait de même et qui est égale à

$$P' = \frac{1}{2} \Pi \lambda h^2.$$

En A et en B s'exercent, de la part des appuis, des réactions perpendiculaires à l'aiguille et dirigées d'aval vers l'amont, que nous appellerons Q' et Q . Si l'on considère l'aiguille comme un corps rigide, et qu'on lui applique les conditions d'équilibre d'un système de forces parallèles, on aura d'abord

$$P - P' - Q - Q' = 0,$$

d'où

$$Q + Q' = \frac{1}{2} \Pi \lambda (H^2 - h^2). \quad [1]$$

Prenons maintenant les moments des mêmes forces par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le point A. Le moment de la pression élémentaire $\Pi \lambda x dx$ sera $\Pi \lambda x dx (H - x)$; et la somme de tous les moments analogues pour les pressions d'amont sera

$$\int_0^H \Pi \lambda x dx (H - x) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6} \Pi \lambda H^3.$$

On trouvera de même pour la somme des moments des pressions exercées en aval

$$\frac{1}{6} \Pi \lambda h^3.$$

D'ailleurs le moment de Q est Ql et celui de Q' est nul; on aura donc en ayant égard aux signes de ces moments

$$Ql + \frac{1}{6} \Pi \lambda h^3 - \frac{1}{6} \Pi \lambda H^3 = 0,$$

d'où

$$Q = \frac{\Pi \lambda (H^3 - h^3)}{6l}. \quad [2]$$

Par suite l'équation [1] donnera

$$Q' = \frac{1}{2} \Pi \lambda \left[(H^2 - h^2) - \frac{(H^3 - h^3)}{3l} \right]. \quad [3]$$

Cherchons maintenant le moment fléchissant μ

pour une section faite en un point quelconque N, à la distance x au-dessous du niveau supérieur. Le moment d'une pression élémentaire sera $\Pi \lambda dx (x-x)$; et la somme des moments analogues depuis le point H jusqu'au point N aura pour expression

$$\int_0^x \Pi \lambda dx (x-x) \text{ ou } \frac{1}{6} \Pi \lambda x^3.$$

D'ailleurs le moment de Q sera $Q(x+l-H)$; on aura donc

$$\mu = Q(x+l-H) - \frac{1}{6} \Pi \lambda x^3. \quad [4]$$

En égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à x , on trouve que le maximum de μ répond à la valeur de x donnée par la relation

$$0 = Q - \frac{1}{2} \Pi \lambda x^2, \text{ d'où } x = \sqrt{\frac{2Q}{\Pi \lambda}},$$

ou
$$x = \sqrt{\frac{\Pi \lambda^2 - h^3}{3l}}. \quad [5]$$

Si cette valeur répond à un point situé au-dessus du niveau inférieur, c'est-à-dire si x est moindre que $H-h$, en la transportant dans la relation [4] on obtiendra la valeur de μ qu'il faudra mettre dans la formule de la résistance

$$R = \frac{v\mu}{I},$$

ou, si la section est rectangulaire, et que e soit l'épaisseur de l'aiguille dans le sens de la poussée de l'eau, auquel cas $v = \frac{1}{2} e$ et $I = \frac{1}{12} \lambda e^3$,

$$R = \frac{6\mu}{\lambda e^2},$$

et, en se donnant la résistance par mètre R qu'on ne veut pas dépasser, on tirera de cette dernière relation la valeur de l'épaisseur e .

Mais si la valeur [5] trouvée pour x répondait à un point situé au-dessous du niveau inférieur, c'est-à-dire si x était plus grand que $H-h$, ce serait un signe que le calcul qui a été fait n'est pas applicable; il repose en effet sur l'hypothèse que N est au-dessus de I. On le supposera donc en N'; et l'on recommencera le calcul en tenant compte, dans le calcul du moment fléchissant, des moments des pressions élémentaires exercées en aval. L'une de ces pressions élémentaires a pour expression $\Pi \lambda dx [x - (H-h)]$; son moment par rapport au point N' est donc $\Pi \lambda dx [x - (H-h)] (x-x)$; et la somme de ces moments doit être prise de $x = H-h$ à $x = x$. Pour avoir la nouvelle valeur du moment fléchissant μ' , il faudra donc ajouter au second membre de [4] le terme

$$\int_{H-h}^x \Pi \lambda [x - (H-h)] (x-x) dx;$$

en faisant ce calcul et réduisant, on trouve

$$\mu' = Q(x+l-H) + \frac{1}{2} \Pi \lambda x (H-h)^2 - \frac{1}{2} \Pi \lambda x^2 (H-h) - \frac{1}{6} \Pi \lambda (H-h)^3, \quad [6]$$

expression qui devient maximum pour

$$x = \frac{1}{2} (H-h) + \frac{Q}{\Pi \lambda (H-h)}. \quad [7]$$

Cette valeur doit être supérieure à $H-h$ pour qu'elle soit applicable; dans ce cas, en la transportant dans [6] on aura la valeur de μ' qu'il faudra mettre dans la formule de la résistance; et le calcul de l'épaisseur e s'achèvera comme dans le premier

cas. (V. la *Théorie de la résistance des solides*, de M. Bélanger.)

AISSELIER, petite pièce de charpente qui, dans une ferme, relie l'entrait à la jambe de force. (Voy. FERMES.)

AJUTAGE, tuyau que l'on adapte à l'orifice d'un réservoir pour augmenter la *dépense*, ou le volume d'eau qui s'écoule par seconde. On distingue deux espèces d'ajutages, les ajutages cylindriques et les ajutages coniques ou divergents.

I. AJUTAGE CYLINDRIQUE. Pour qu'un tuyau cylindrique puisse être considéré comme un ajutage, il faut que sa longueur soit au moins de 2 fois $\frac{1}{2}$ à

3 fois le diamètre de l'orifice, afin que la veine ne reste pas détachée de ses parois et que l'eau puisse couler à *plein tuyau*, ou, comme on disait autrefois, à *gueule bée*. Soit ABCD (fig. 1) un ajutage cy-

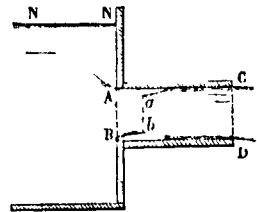


Fig. 1.

lindrique; soit ab la veine contractée et m le coefficient de contraction. Au moment où l'écoulement commence, la veine entraîne d'abord l'air qui l'entoure, et le raréfie; en vertu de la pression plus grande qui s'exerce à l'extrémité CD de l'ajutage, la veine se gonfle et remplit le tuyau. Si le tuyau a la longueur que nous avons indiquée, on peut admettre que dans la section extrême CD les filets coulent parallèlement. Soit P_0 la pression qui s'exerce sur le niveau NN, p la pression dans la section ab , et P la pression extérieure qui s'exerce en CD (Voy. **PRESSION D'UN FLUIDE**); soit u la vitesse dans la section contractée ab , et v la vitesse de sortie en CD. Du niveau NN à la section ab on peut appliquer le **THÉORÈME DE BERNOULLI** (Voy. ce mot),

$$\text{et l'on a } \frac{P_0}{\Pi} + h = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\Pi}. \quad [1]$$

De la section ab à la section AD, on ne peut plus appliquer purement et simplement ce théorème; il y a **CHANGEMENT BRUSQUE DE SECTION** (Voy. ce mot), et par conséquent une *perte de charge*, due à la vitesse relative dans ces sections, et qu'il faut ajouter au second membre, ce qui donne

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\Pi} + \frac{(u-v)^2}{2g}. \quad [2]$$

Par conséquent, en comparant les équations [1] et [2]

$$\frac{P_0}{\Pi} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\Pi} + \frac{(u-v)^2}{2g}.$$

Mais on a

$$m\omega u = \omega v, \text{ d'où } u = \frac{v}{m};$$

par conséquent il vient

$$\frac{P_0}{\Pi} + h = \frac{P}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} \left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 \right]. \quad [3]$$

En mettant pour m la valeur 0,62 qui est une

valeur moyenne, et résolvant par rapport à v , on obtient

$$v = 0,85 \sqrt{2g \left(h + \frac{P_0}{\Pi} - \frac{P}{\Pi} \right)}, \quad [4]$$

et par suit, en appelant Q la dépense,

$$Q = 0,85 \cdot \omega \sqrt{2g \left(h + \frac{P_0}{\Pi} - \frac{P}{\Pi} \right)}. \quad [5]$$

L'expérience ne donne que 0,82 au lieu de 0,85, ce qui s'explique par les frottements que l'on a négligés. Néanmoins on voit que l'emploi de l'ajutage a pour effet d'accroître la dépense dans le rapport de 0,62 à 0,82, c'est-à-dire de l'accroître d'un tiers environ. (Voy. THÉORÈME DE TORRICELLI.)

II. Si dans la relation [4] on remplace 0,85 par 0,82, on en tire

$$\frac{P_0}{\Pi} + h = \frac{P}{\Pi} = 1,49 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

ou à peu près
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{v^2}{2g}; \quad [6]$$

c'est-à-dire que la différence de charge des sections NN et CD est égale à une fois et demie la hauteur due à la vitesse de sortie.

III. Le plus ordinairement on a $P = P_0$, et la valeur de v se réduit à

$$v = 0,82 \sqrt{2gh}. \quad [7]$$

On tire de l'équation [1]

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{P_0}{\Pi} + h - \frac{u^2}{2g}$$

Or $u = \frac{v}{0,62}$; en substituant à u cette valeur et réduisant, on obtient

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{P_0}{\Pi} - 0,749 \cdot h.$$

Ainsi la pression p dans la section contractée est moindre que la pression atmosphérique, et la différence des hauteurs représentatives de ces pressions équivaut, à très-peu de chose près, aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur h du niveau dans le réservoir au-dessus du centre de l'orifice.

Ce fait se vérifie à l'aide d'une expérience due à Venturi. Si l'on adapte à l'ajutage (fig. 2) un tube recourbé s'ouvrant par son extrémité supérieure

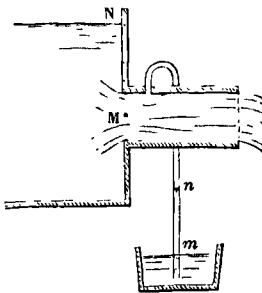


Fig. 2.

plongeant par son extrémité inférieure dans un vase rempli d'eau, on voit, lorsque l'écoulement s'opère, l'eau du vase s'élever dans le tube à une hauteur mn , qui mesure évidemment la différence entre la pression atmosphérique agissant sur l'eau

IV. AJUTAGE DIVERGENT (fig. 3.) Considérons un ajutage conique ABCD adapté à un orifice que nous supposons, pour plus de simplicité, évasé à l'intérieur de manière à éviter toute contraction.

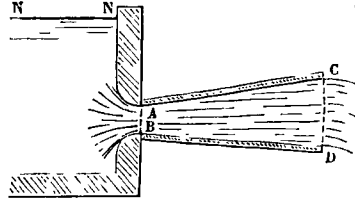


Fig. 3.

Nous supposons, de plus, que la pression CD soit égale à la pression atmosphérique qui s'exerce sur le niveau supérieur NN (nous supposons enfin que l'eau coule à plein tuyau dans cet ajutage). En conservant les notations précédentes, et remarquant que, comme il n'y a pas de changement brusque de section, on peut appliquer le théorème de Bernoulli de NN en AB, et de AB en CD, on aura

$$\frac{P_0}{\Pi} + h = \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} = \frac{P_0}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}. \quad [8]$$

La comparaison du premier et du troisième membre donne $v = \sqrt{2gh}$; et si Ω désigne l'aire de l'orifice de sortie CD, on a

$$Q = \Omega \sqrt{2gh}. \quad [9]$$

Il semblerait d'après cette relation que l'on puisse obtenir une dépense aussi grande qu'on le voudra en agrandissant suffisamment l'orifice CD. Mais cet agrandissement est limité par la condition que la pression dans la section AB ne soit jamais négative; car un fluide ne peut éprouver qu'une pression et jamais une tension, si du moins on néglige sa viscosité, comme cela est permis. Or on tire de la relation [8]

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{P_0}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}.$$

D'ailleurs, en appelant ω l'aire de l'orifice AB,

on a $u\omega = v\Omega$, d'où $u = v \cdot \frac{\Omega}{\omega}$,

et, en substituant, il vient

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{P_0}{\Pi} - \frac{v^2}{2g} \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right),$$

ou
$$\frac{p}{\Pi} = \frac{P_0}{\Pi} - h \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

La limite supérieure de Ω répondrait théoriquement au cas où p serait nul. On aurait dans ce cas

$$\Omega = \omega \sqrt{1 + \frac{P_0}{\Pi h}}.$$

L'expression de la dépense serait alors

$$Q = \omega \sqrt{1 + \frac{P_0}{\Pi h}} \cdot \sqrt{2gh} = \omega \sqrt{2g \left(h + \frac{P_0}{\Pi} \right)},$$

c'est-à-dire que la limite supérieure de la dépense est celle qu'on obtiendrait sans le secours de l'ajutage, si la veine débouchait dans le vide.

Cette limite théorique n'est jamais atteinte dans la pratique; et lorsque l'ajutage diverge d'une manière notable, il est difficile d'obtenir l'écoulement

à plein tuyau que suppose la théorie précédente. Il suffit souvent de quelques coups légers frappés sur l'ajutage pour que la veine s'en détache ; et dès lors on rentre dans le cas de l'écoulement par un simple orifice. (Voy. le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse, et le Cours de Mécanique professé à l'École centrale par M. Bélanger.)

ALÉSOIR, ou MACHINE A ALÉSER, machine-outil avec laquelle on rend parfaitement régulière la surface intérieure d'un cylindre. L'outil qui sert à ce travail se compose de couteaux d'acier solidement calés dans des encoches à la circonférence d'un disque que l'on fait tourner autour de son axe, lequel coïncide avec celui du cylindre à aléser. Mais indépendamment de ce mouvement, par suite duquel l'outil opère sur une bande circulaire de la surface cylindrique, il faut encore qu'il ait, par rapport à cette surface, un mouvement de translation suivant l'axe, afin d'opérer successivement sur toute l'étendue du cylindre. Dans les anciens alésoirs, le cylindre était placé sur un chariot au quel on donnait un mouvement de translation suivant l'axe, tandis que le disque porte-outil tournait autour de cet axe dans une position fixe. Il est difficile, dans ce système, de donner à la pièce à aléser une stabilité parfaite, et on ne peut plus compter sur l'exactitude de l'opération quand le cylindre a plus de 40 à 45 centimètres de diamètre intérieur.

Pour les pièces de grand diamètre, il faut nécessairement que ce soit l'outil qui soit animé à la fois du mouvement de rotation et du mouvement de translation. Et, comme ce dernier mouvement doit être très-lent, on le réalise généralement à l'aide d'un ENGRENAGE DIFFÉRENTIEL (Voy. ce mot). Voici la disposition adoptée. Le cylindre à aléser AAAA (fig. 1) est posé horizontalement sur des

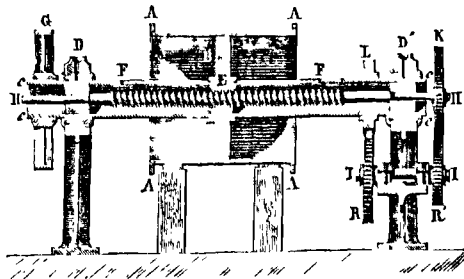


Fig. 1.

supports fixes et solidement établi dans cette position. Le disque porte-outil BB reçoit le mouvement de rotation d'un arbre cylindrique creux cccc, qui repose sur des paliers fixes D et D'. Mais il peut glisser le long de cet arbre ; pour cela, il est lié à un manchon intérieur EE, par le moyen d'une languette qui traverse une rainure FF pratiquée dans l'arbre creux. Cet arbre creux se termine par une roue G qui reçoit le mouvement du moteur, et fait tourner à son tour l'arbre creux et le disque porte-outil. La vitesse est réglée d'après la nature de la matière sur laquelle l'alésoir doit opérer. En général, on admet que la vitesse des couteaux doit être moitié moindre que dans le cas du tour ; c'est-

à-dire qu'elle doit être limitée à 5 ou 6 centimètres par seconde pour le fer, à 4 ou 4 $\frac{1}{2}$ pour le cuivre,

à 3 ou 3 $\frac{1}{2}$ pour la fonte grise, et qu'elle ne doit pas dépasser 1 centimètre pour la fonte blanche. — A l'intérieur de l'arbre creux cccc est placé un arbre plein HH, qui est ficé, en vis à filets carrés, sur une portion de sa longueur correspondant à peu près à la rainure FF ; et cette vis traverse un écrou pratiqué dans le manchon mobile EE. Un troisième arbre II, soutenu par des coussinets fixes, porte à ses extrémités deux roues R et R', dont l'une R engrène avec une roue K montée sur l'arbre plein HH, et l'autre R' engrène avec une roue L calée sur l'arbre creux cccc. Les quatre roues LL, R', R et K forment un engrenage différentiel, et l'on peut régler leurs diamètres de telle sorte que le mouvement différentiel imprimé ainsi à la roue K et à l'arbre plein HH soit aussi lent qu'on le voudra. Le mouvement de rotation de l'arbre HH fait avancer l'écrou EE, et par suite le disque porte-outil. Ce disque BB reçoit donc le mouvement de rotation directement de la roue G, et le mouvement de translation par l'intermédiaire de l'engrenage différentiel et de la vis pénétrant dans l'écrou EE.

On peut, par ce dispositif, donner au disque porte-outil un mouvement de translation aussi lent qu'on le veut. Supposons, par exemple, que le profil des dents étant tracé en développantes de cercle (Voy. ENGRENAGES), on donne aux roues R et R' un même nombre de dents arbitraire, que la roue K ait n dents et que la roue L en ait $n-1$. L'engrenage différentiel peut être établi dans ces conditions, car on sait que, dans l'engrenage à développantes, une même roue, ou, ce qui revient au même, deux roues égales peuvent engrener avec des roues d'un nombre de dents différent. — Cela posé, à chaque tour de l'arbre creux, la roue L, et par conséquent les trois autres R', R et K, auront tourné de $n-1$ dents ; la roue K aura donc fait une fraction de tour marquée par $\frac{n-1}{n}$ ou $1 - \frac{1}{n}$; et, par rapport à la roue L, elle aura tourné de la fraction de tour exprimée par $\frac{1}{n}$. Soit h le pas de la vis, l'écrou aura avancé de $\frac{h}{n}$. Si, par exemple, $h=0^m,01$, et qu'on ait $n=100$, il en résultera $\frac{h}{n}=0^m,0001$; c'est-à-dire que pour un tour de l'arbre creux le disque porte-outil avancera d'un dixième de millimètre (Voy. la Cinématique de M. Morin et celle de M. Bélanger).

Les pièces d'un très-grand diamètre sont exposées à s'ovaliser quand elles sont posées horizontalement ; c'est ce qui a déterminé beaucoup de constructeurs à employer de préférence un système d'alésoir dans lequel la pièce à aléser est verticale. Nous décrirons, d'après M. Laboulaye, l'alésoir de MM. Stéhélin et C^{ie}, qui offre un dispositif ingénieux. Le cylindre à aléser AAAA (fig. 2 et 3) est établi verticalement sur une plate-forme solide BB. Le disque porte-outil CC est assemblé à rainure et languette avec un arbre vertical DD, reposant à

sa partie inférieure par un pivot, et soutenu à sa partie supérieure par un collier E fixé au mur. Le porte-outil tourne donc avec cet arbre, mais il peut

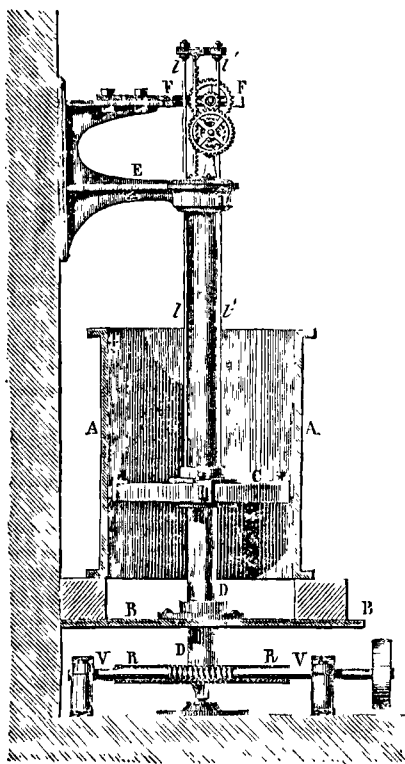


Fig. 2.

glisser verticalement sans cesser de participer au mouvement de rotation. Voici maintenant le mécanisme qui produit le déplacement vertical.

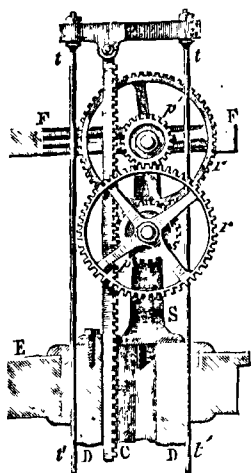


Fig. 3.

l'intérieur d'un écrou fixe FF avec lequel elle engrène (Voy. VIS SANS FIN). Quand l'arbre DD tourne autour de son axe, les tringles et la crémaillère sont

entraînées dans ce mouvement, ainsi que le système des roues dentées; mais la roue r' engrenant avec un écrou fixe, est obligée de tourner sur son axe, en même temps qu'elle tourne autour de l'axe du cylindre; elle tourne, par exemple, d'une dent à chaque tour de l'arbre DD. Ce mouvement de rotation est transmis au pignon p , qui soulève la crémaillère, par suite les tringles et le disque porte-outil. On conçoit qu'on puisse régler le nombre des dents des roues et des pignons de manière à rendre l'ascension du porte-outil aussi lente qu'on le désire.

Le mouvement est donné à l'arbre DD par une vis sans fin V, engrenant avec une roue R montée sur cet arbre, au-dessous de la plate-forme sur laquelle repose le cylindre à aléser.

On a quelquefois à aléser des surfaces coniques, telles que les boîtes de roues; on fait usage pour ce travail d'une machine à percer, à l'arbre de laquelle on adapte un couteau plat, tranchant des deux côtés, et dont la largeur va en augmentant uniformément de la pointe à la base.

ALETTE, partie du piédroit d'une arcade comprise entre l'arête de l'arcade et la colonne ou le pilastre qui orne le piédroit. Sa largeur doit toujours être un peu supérieure au demi-diamètre de la colonne, afin que l'archivolte, dont la largeur est d'un module, ne rencontre pas la colonne, et vienne joindre l'imposte en laissant un peu de jeu entre la colonne et elle.

ALIDADE, instrument qui sert à viser dans la direction d'un signal. Il se compose d'une règle



AB, ordinairement en cuivre, vers les extrémités de laquelle s'élevaient perpendiculairement deux lames de cuivre P, P' percées chacune d'une fente verticale, et que l'on appelle des *pinnules*. Vers le haut de l'une, et vers le bas de l'autre, la fente s'élargit de manière à former une sorte de fenêtre rectangulaire qui est traversée verticalement en son milieu par un fil de crin. Pour viser un signal avec l'alidade, on la place de telle sorte qu'en regardant par la fente de la pinnule P, on aperçoit le signal coupé verticalement par le fil qui traverse la fenêtre de la pinnule P'. Pour s'assurer que l'alidade est bien construite, on la retourne bout à bout, et il faut qu'en regardant par la fente de la pinnule P', on voie de même le signal coupé par le fil qui traverse la fenêtre de la pinnule P.

Le **GRAPHOMÈTRE** (Voy. ce mot) est muni de deux alidades, dont l'une est fixe et l'autre mobile. On se sert aussi d'une alidade quand on opère avec la **PLANCHETTE** (Voy. ce mot); mais une partie de la règle est alors enlevée; en sorte que la ligne AB, qui correspond aux fils des pinnules, et qu'on nomme la *tighe de foi*, devient un des bords de la règle, et sert en effet à tracer des droites dans la direction indiquée par les pinnules. On donne dans

ce cas un peu plus de largeur à la règle afin d'assurer sa stabilité.

Dans les instruments munis d'une lunette, cette lunette est souvent accompagnée d'une règle à laquelle on conserve le nom d'alidade, et dont la ligne de foi correspond à l'axe optique de la lunette.

Quelquefois la règle est remplacée par un cercle entier, mobile à l'intérieur d'un cercle divisé; on lui donne alors le nom d'alidade concentrique. (Voy. THÉODOLITE.)

ALIGNEMENTS (MÉTHODE DES), méthode usitée pour lier entre elles les constellations et les reconnaître dans le ciel. (Voy. CONSTELLATION.)

ALIMENTATION DES CHAUDIÈRES, mécanisme employé pour fournir aux chaudières l'eau qu'elles convertissent en vapeur, et celle que la vapeur entraîne. Dans la plupart des machines, l'alimentation est obtenue à l'aide d'une pompe, que la machine elle-même fait mouvoir. Si la machine est à condensation, on se sert de l'eau du condenseur pour alimenter la chaudière. Si la machine est sans condensation, on peut encore se servir de la vapeur qui sort du cylindre pour échauffer l'eau destinée à l'alimentation. Quelquefois l'eau qui se rend dans la chaudière traverse d'abord des tuyaux réchauffeurs, autour desquels passent les gaz provenant de la combustion du foyer, et conservant encore une assez haute température après avoir agi sur le générateur. Enfin on emploie aussi, depuis quelques années, pour l'alimentation des chaudières, un appareil spécial qui donne d'excellents résultats: nous voulons parler de l'INJECTEUR GIFFARD (Voy. ce mot; voy. aussi les art. GÉNÉRATEURS, MACHINES À VAPEUR).

ALLONGE D'ESTAIN, pièce qui prolonge l'estain dans l'accastillage. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

ALLONGEMENT (RÉSISTANCE A L'), résistance qu'un prisme, dont la section est très-petite par rapport à sa longueur, oppose à un effort longitudinal tendant à augmenter cette longueur. Les lois de cet allongement servent de base à la théorie de la résistance des matériaux. Il a été fait sur ce sujet important un très-grand nombre d'expériences variées. M. Bornet, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, M. Ardant, général du génie, M. Eaton Hodgkinson, savant physicien anglais, M. Vicat, M. P. Leblanc, ont étudié tour à tour la résistance du fer, soit en fils, soit en barres; M. le général Morin, après avoir fait de nouvelles expériences sur ce sujet, a étudié la résistance du cuivre et de l'acier; on doit à Rondelet d'abord, puis à MM. Chevaudier et Wertheim des expériences du même genre sur les bois. Malgré quelques divergences qui s'expliquent par les difficultés mêmes des études expérimentales de cette nature, l'allongement des prismes paraît soumis à des lois constantes. Considérons, pour fixer les idées, un fil métallique OA (fig. 1) suspendu verticalement par son extrémité O; si l'on charge d'un poids P son extrémité inférieure, on observe qu'il s'allonge, d'une quantité AB, en général très-petite par rapport à la longueur totale, et que l'équilibre s'établit entre le poids P et les forces moléculaires que l'allongement a développées. Lorsqu'on enlève le poids P, le fil, s'il était parfaitement élastique, devrait reprendre sa longueur primitive; mais il n'en est presque jamais ainsi. Après l'enlèvement du poids P, le fil revient, non pas à la longueur primitive OA, mais

à une longueur OA' un peu plus grande. Si l'on charge de nouveau l'extrémité A du même poids P, le fil prend de nouveau la longueur OB; et lorsqu'on enlève le poids P, il revient à la longueur OA'; et ainsi de suite. Ainsi, dans les limites OA' et OB, le fil manifeste une élasticité parfaite, pourvu que la charge ne dépasse pas P. On voit donc que l'allongement total AB se divise en deux parties: l'une AA' qui ne disparaît plus, et que pour cette raison on nomme l'allongement permanent; l'autre A'B qui disparaît toutes les fois qu'on supprime la charge, et se reproduit toutes les fois qu'on rétablit cette charge; on lui donne pour cette raison le nom d'allongement élastique. Si l'on augmente la charge P, l'allongement permanent augmente, ainsi que l'allongement élastique, et ce dernier reste proportionnel à la charge jusqu'à ce qu'elle atteigne une certaine valeur que l'on désigne sous le nom de limite d'élasticité. Au delà, l'allongement élastique croît plus lentement que la charge; l'allongement permanent croît, au contraire, d'une manière rapide; et la rupture a lieu sous une charge qui ne dépasse pas de beaucoup celle qui correspond à la limite d'élasticité.

I. Pour faire comprendre la marche du phénomène, nous donnons ci-dessous les résultats des expériences faites par M. Eaton Hodgkinson sur une barre de fer forgé de 15 mètres de long, et d'un diamètre moyen de 0^m,01313. La première colonne du tableau donne les charges en livres anglaises de 12 onces (liv. Troy), la seconde colonne donne les mêmes charges en kilogrammes; ces charges sont rapportées au millimètre carré de section; la troisième colonne donne les valeurs de l'allongement total par mètre de longueur, exprimées en millimètres; les quatrième et cinquième colonnes donnent l'allongement permanent et l'allongement élastique exprimés de la même manière; la sixième donne le rapport de la charge à l'allongement total; enfin la septième donne le rapport de la charge à l'allongement élastique.

CHARGE		ALLONGEMENT			RAPPORT de la charge à l'allongement	
en livres.	en kilogr.	total.	permanent.	élastique.	total.	élastique.
		en mill.	en mill.	en mill.		
5	1,87	0,082	"	0,082	22,0	22,8
10	3,75	0,185	"	0,185	20,2	20,2
15	5,62	0,284	0,003	0,281	19,8	20,0
20	7,60	0,380	0,003	0,377	19,7	19,9
25	9,37	0,485	0,004	0,471	19,7	19,9
30	11,25	0,571	0,005	0,566	19,7	19,9
35	13,12	0,666	0,007	0,659	19,7	19,9
40	15,00	0,760	0,010	0,750	19,7	20,0
45	16,87	0,873	0,033	0,840	19,8	20,1
50	17,75	1,013	0,083	0,930	18,5	20,1
55	20,64	1,283	0,262	1,021	16,1	20,2
60	22,50	2,360	1,130	"	9,5	"
65	24,36	4,287	3,071	1,216	5,7	20,0
70	26,25	9,551	8,574	1,377	2,6	19,1
75	28,12	10,493	9,102	1,391	2,6	21,0
80	30,00	17,878	16,515	1,373	1,7	21,8
85	31,87	21,486	19,797	1,691	1,5	18,9
90	33,75	24,774	22,769	2,005	1,3	16,3
95	35,62	34,935	32,8,0	2,115	1,0	17,0
100	37,46	rupture.	"	"	"	"

L'examen de ce tableau donne lieu à plusieurs remarques. On voit d'abord que pour des charges inférieures à 5 kil. par millimètre carré, l'allongement permanent est insensible. Jusqu'à 15 kil. par millimètre carré, l'allongement total peut être regardé comme sensiblement proportionnel à la charge. Mais le rapport de la charge à l'allongement élastique reste à très-peu près constant jusqu'à 30 kilogrammes par millimètre carré. Au delà, l'allongement permanent prend des valeurs rapidement croissantes; la limite d'élasticité est dépassée; et l'on prévoit qu'on approche de la rupture, qui a lieu en effet sous une charge de 37^k,46 par millimètre carré.

II. On tire des conséquences semblables des résultats obtenus par d'autres expérimentateurs.

III. Soit L la longueur totale du fil, et ΔL l'allongement élastique, le quotient $\frac{\Delta L}{L}$ est ce qu'on appelle l'allongement proportionnel ou par unité de longueur; on le désigne habituellement par la lettre *i*. Si l'on imagine qu'un fil de fer d'un millimètre carré de section prenne, sous une charge *p*, un allongement proportionnel égal à *i*, d'après le tableau ci-dessus $\frac{p}{i}$ sera une quantité sensiblement constante pour *p* inférieur à 30 kilogrammes; et si l'on prend le nombre 20 pour la moyenne des seize premiers quotients inscrits dans la dernière colonne, on aura

$$\frac{p}{i} = 20, \text{ d'où } p = 20 \cdot i. \quad [1].$$

Concevons maintenant un faisceau de *n* fils semblables, soumis chacun à une même charge *p*, et subissant conséquemment le même allongement élastique, l'équation [1] subsistera pour chacun d'eux; et, en faisant la somme des *n* équations analogues, on aura $np = 20 \cdot n \cdot i$.

Or *np* représentera la charge totale que supporte le faisceau; nous la désignerons par *P*; d'un autre côté le facteur *n* du second membre exprime le nombre de millimètres carrés dont se compose la section du faisceau; c'est l'expression numérique de cette section, et on peut la remplacer par cette section même, que nous appellerons Ω; l'équation deviendra ainsi :

$$P = 20 \cdot \Omega \cdot i. \quad [2].$$

On admet qu'une barre métallique, dont la section est peu considérable par rapport à sa longueur, s'allonge d'après les mêmes lois qu'un faisceau de fils du même métal, ayant la même section totale; et l'on applique en conséquence l'équation [2] à une barre ou à un prisme très-mince de longueur et de section quelconque. Cette équation suppose que l'allongement *i* par mètre est exprimé en millimètres, et que la section Ω est exprimée en millimètres carrés; si l'on adopte pour unité de longueur le mètre et pour unité de surface le mètre carré, les nombres exprimant *i* et Ω deviendront respectivement 1000 fois et 1000000 de fois plus petits; pour que l'équation subsiste, il faudra donc remplacer le coefficient 20 par 20.1000000 ou par 20.10⁹ et écrire en conséquence

$$P = 20 \cdot 10^9 \cdot \Omega \cdot i. \quad [3]$$

En général, quelle que soit la matière du prisme, on aura une équation semblable; et l'on pourra écrire

$$P = E \cdot \Omega \cdot i, \quad [4]$$

la lettre *E* représentant un coefficient numérique, qui varie d'une matière à l'autre, et auquel on donne le nom de *coefficient d'élasticité*. Ce coefficient se détermine pour chaque substance en observant les allongements élastiques que prend un prisme de cette substance sous diverses charges; on divise l'allongement par la longueur primitive totale et l'on a l'allongement proportionnel, ou par mètre, *i*. On divise la charge *P* par la section Ω du prisme, et l'on a la charge *p* par millimètre carré; on divise *p* par *i* et l'on a un quotient qui est sensiblement constant, jusqu'à ce que la charge atteigne une certaine limite supérieure qui est la *limite d'élasticité*; la moyenne des valeurs de ce quotient entre la charge zéro et cette limite est la valeur du coefficient d'élasticité *E*.

Une fois ce coefficient connu, on peut résoudre divers problèmes à l'aide de la relation [4], dans laquelle *P*, Ω ou *i* peuvent être inconnus tour à tour.

IV. EXEMPLES. 1. *Quel est l'allongement élastique que prendra une barre de fer forgé de 4 mètres de longueur et de 0^m,0002 de section, sous une charge de 2500 kilos?*

Ici l'inconnue est *i*; on a

$$i = \frac{P}{E \cdot \Omega} = \frac{2500^k}{20 \cdot 10^9 \cdot 0^{m},0002} = 0^{m},000625;$$

l'allongement élastique total sera 0^m,000625 × 4 ou 0^m,0025. En divisant d'ailleurs 2500^k par 200, nombre des millimètres carrés contenus dans la section, on obtient 12^k,50; et l'on voit que cette charge est de beaucoup inférieure à celle qui répond à la limite d'élasticité.

2. *Quelle charge totale faut-il faire supporter à la barre de l'exemple précédent pour que l'allongement élastique total ne soit que de 0^m,001?*

L'allongement élastique par mètre sera $\frac{0^{m},001}{4}$ ou 0^m,00025. On aura donc

$$P = 20 \cdot 10^9 \cdot 0^{m},0002 \cdot 0^{m},00025 = 1000^k.$$

3. *Quel diamètre faut-il donner à une tige en fer forgé de 3 mètres de long pour que, sous une charge de 3000 kil., elle n'éprouve qu'un allongement élastique total de 0^m,0018?* L'allongement élastique par mètre sera $i = \frac{0^{m},0018}{3} = 0^{m},0006$. On

devra donc avoir, en nommant *d* le diamètre inconnu de la section,

$$3000^k = 20 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 \cdot 0,0006,$$

$$\text{d'où } d = \sqrt{\frac{3000 \cdot 4}{20 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 1416 \cdot 0,0006}} = 0^{m},0178.$$

V. La valeur *E* = 20.10⁹, adoptée ci-dessus pour le fer forgé, ne serait pas rigoureusement applicable à toutes les espèces de fer. Il est utile dans chaque cas de déterminer par des expériences directes le coefficient d'élasticité des matériaux qu'on se propose d'employer; mais, dans les cas les plus ordinaires, et lorsqu'une exactitude rigoureuse n'est pas indispensable, on peut prendre pour *E*, suivant la matière, l'un des nombres inscrits dans le tableau suivant :

Nature des matériaux.	Coefficient d'élasticité <i>E</i> .
Acier fondu	30.10 ⁹
Acier ordinaire	21.10 ⁹
Petit fer forgé	20.10 ⁹

Fer en barres moyennes.....	16.10 ⁹
Fer en très-grosses barres.....	14.10 ⁹
Cuivre.....	10.10 ⁹
Zinc.....	10.10 ⁹
Fonte de fer.....	9.10 ⁹
Plomb.....	5.10 ⁹
Bois de chêne.....	1.10 ⁹
Sapin blanc.....	1,5.10 ⁹
Sapin rouge.....	1,3.10 ⁹
Pin résineux.....	0,8.10 ⁹
Pin jaune.....	0,7.10 ⁹

VI. Bien qu'à la rigueur un prisme puisse résister à un effort longitudinal, pourvu qu'il soit moindre que celui qui produit la rupture, et, à plus forte raison, s'il est moindre que celui qui répond à la limite de l'élasticité de la matière, néanmoins la prudence exige que dans les constructions on se tienne à une grande distance de cette limite; surtout si la construction est exposée à des surcharges accidentelles dont on ne peut pas prévoir l'intensité. L'administration des travaux publics exige que, dans les épreuves des ponts suspendus, où le tablier reçoit une surcharge de 200 kil. par mètre carré, la tension des fers, ou la force longitudinale qui produit l'allongement, ne dépasse pas 12 kil. par millimètre carré de section s'il s'agit de fers en barres, et 18 kil. s'il s'agit de fers en fils. Pour la fonte, la règle est de ne pas la soumettre à une tension supérieure à 1⁴,5 ou 2 kil. par millimètre carré. Pour le bois de chêne on ne dépasse pas habituellement 0⁴,6 à 0⁴,8, et pour le sapin 0⁴,8 à 0⁴,9.

VII. L'allongement des prismes sous un effort longitudinal est toujours accompagné d'un autre phénomène : c'est une diminution graduelle de la section, depuis les extrémités jusqu'au milieu où cette section atteint son minimum. M. Poisson a démontré dans un savant mémoire que la diminution proportionnelle de la section n'est que la moitié de l'allongement proportionnel; d'où il résulte que la diminution proportionnelle du diamètre d'une tige cylindrique n'est que le quart de l'allongement proportionnel; c'est-à-dire que le rapport entre la diminution du diamètre et le diamètre primitif n'est que le quart du rapport entre l'allongement et la longueur primitive. Dans les prismes très-minces, cette diminution de diamètre est donc généralement insensible. Cependant il n'est pas douteux qu'elle ne soit la cause immédiate de la rupture. (Voy. les leçons de M. Navier à l'École des ponts et chaussées; l'Introduction à la Mécanique industrielle, de M. Poncelet; la Théorie de la résistance des solides, de M. Béranger; la Résistance des matériaux, par M. A. Morin; le Traité pratique de la résistance des matériaux, par M. Bourdais, etc.)

ALLONGES, pièces qui, avec la VARANGUE, forment chaque COUPLE de la membrure d'un navire. (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE.)

ALLONGES D'ÉCUBIER, pièces disposées en éventail qui remplissent l'espace entre le couple de COLTIS et l'ÉTRAVE. (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE.)

ALLONGES DE VOÛTE. Voy. JAMBETTES.

ALLUCTIONS, dents de la roue qui engrène avec une lanterne à fuscaux. (Voy. ENGRÉNAGES.) On étend quelquefois cette dénomination à toutes les dents qui ne font pas corps avec la couronne. Ainsi

une couronne en fonte peut recevoir des *alluçons* en fonte ou en bois.

ALMICANTARAT (mot dérivé de l'arabe), petit cercle de la sphère céleste dont tous les points ont la même distance zénithale, et par conséquent aussi la même hauteur au-dessus de l'horizon.

ALPHABET, nom donné par Olivier à l'examen méthodique de toutes les positions que peut occuper un point, une droite, ou un plan, avec les notations qui se rapportent à ces positions diverses. Cet auteur se sert, dans ce sens, des expressions : *alphabet du point, alphabet de la droite, alphabet du plan.* (Voy. la Géométrie descriptive de Th. Olivier, ainsi que le Traité élémentaire de Géométrie descriptive, publié par M. Tresca.)

ALTITUDE, hauteur d'un point du globe au-dessus de la surface des mers, supposée prolongée au-dessous des continents. La plus grande altitude connue est celle du sommet du mont Everest dans l'Himalaya : elle est de 8700 mètres; celle du mont Blanc n'est que de 4810 mètres; le niveau de la Seine, à Paris, au pont de la Tournelle, à l'époque de l'étiage, est de 26^m,25 au-dessus du niveau de la mer.

Les altitudes principales se déterminent par des nivellements géodésiques (Voy. NIVELLEMENT) ou par l'emploi du BAROMÈTRE (Voy. ce mot); les altitudes des points secondaires se déduisent des précédentes par des nivellements topographiques.

AMONT (du latin *ad montem*), terme employé en hydraulique pour désigner le côté d'où vient un courant. Un point est dit *en amont* d'un autre point, lorsque l'eau coule du premier point vers le second.

AMORTISSEMENT, extinction d'une dette, remboursement d'un emprunt, par le payement d'une somme annuelle à laquelle on donne le nom d'*annuité* (Voy. ce mot).

I. Celui qui emprunte, et qui ne peut s'acquitter qu'au bout d'un certain temps, doit non-seulement la somme empruntée, mais encore les intérêts de cette somme et les intérêts des intérêts; en d'autres termes, il doit le capital définitif que cette somme aurait produit si elle eût été placée à intérêts composés depuis le jour de l'emprunt jusqu'au jour du payement intégral. Soit A la somme empruntée, a l'annuité à servir, r l'intérêt annuel de 1 fr., et n le nombre des annuités qu'il faudra payer pour éteindre la dette. Cette dette s'élève à une somme marquée par (Voy. INTÉRÊTS COMPOSÉS)

$$A(1+r)^n.$$

D'un autre côté, les annuités successivement payées pouvant être considérées comme placées à intérêts composés entre les mains du prêteur, produiront, à son profit, un capital définitif exprimé par (Voy. ANNUITÉ, formule [2])

$$\frac{a[(1+r)^n - 1]}{r},$$

attendu que la dernière annuité versée ne porte point d'intérêts. On devra donc avoir

$$\frac{a[(1+r)^n - 1]}{r} = A(1+r)^n; \quad [1]$$

c'est la formule de l'amortissement.

II. Le plus souvent, c'est l'annuité qui est inconnue; on tire alors de la formule [1]

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \quad [2]$$

Pour se servir de cette formule, on pose d'abord $y = (1 + r)^n$, ou $\log y = n \log (1 + r)$; connaissant y , on a ensuite

$$a = \frac{Ar y}{y - 1} \quad [3]$$

Supposons, par exemple, qu'une Compagnie emprunte 800 000 fr. pour une entreprise industrielle, et qu'elle veuille amortir sa dette en 20 ans, les intérêts étant calculés à 5 pour 100. On aura d'abord $\log y = 20 \cdot \log 1,05 = 0,4237860$, d'où $y = 2,65329$.

Parsuite $a = \frac{800\,000 \cdot 0,05 \cdot 2,65329}{1,65329}$;

en effectuant le calcul par logarithmes, on trouve $a = 64\,194',10$.

III. Assez souvent, c'est le nombre des annuités qui est inconnu. On tire alors de l'équation [3]

$$y = \frac{a}{a - Ar}$$

on a ensuite $n = \frac{\log y}{\log (1 + r)}$.

Si, par exemple, dans la question précédente, on fixait l'annuité à 60 000 fr., on aurait

$$y = \frac{60\,000}{60\,000 - 800\,000 \cdot 0,05} = 3,$$

puis $n = \frac{\log 3}{\log 1,05} = \frac{0,4771212}{0,0211893} = 22,5\dots$

La valeur de n étant comprise entre 22 et 23, on voit que l'amortissement pourrait s'opérer au moyen de 22 annuités de 60 000 fr., et d'une dernière annuité moindre. Pour trouver cette dernière annuité, on calculera la valeur

$$\frac{60\,000' [(1,05)^{22} - 1]}{0,05}$$

du capital définitif produit par les 22 premières, ce qui donne 2 310 312 fr. On calculera de même la valeur $800\,000' \cdot (1,05)^{22}$ de la dette au bout de la 22^e année, ce qui donne 2 340 208 fr. Si l'on retranche de cette dernière valeur la somme 2 310 312 fr. trouvée ci-dessus, la différence 29 896 fr., placée à 5 pour 100 pendant une année, soit 31 390 fr. 80, sera le montant de la dernière annuité à payer au bout de la 23^e année.

IV. Si l'inconnue est le capital emprunté, la formule [1] résout immédiatement le problème. Si l'inconnue était le taux de l'intérêt, la question ne pourrait être résolue que par tâtonnements. Mais comme dans ce cas, d'ailleurs extrêmement rare, le taux doit toujours être un nombre simple tel que $3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}$, le nombre des tâtonnements n'est jamais considérable.

V. Dans certaines circonstances on peut se proposer d'amortir un emprunt à l'aide d'une *rente perpétuelle*; c'est-à-dire que, dans ce cas, il faut dans la formule [2] supposer n infini. Si, avant de faire cette hypothèse, on commence par diviser les deux termes du second membre par $(1 + r)^n$, on obtient

$$a = \frac{Ar}{1 - \frac{1}{(1 + r)^n}}$$

si l'on fait alors n infini, il reste

$$a = Ar, \quad [3]$$

c'est-à-dire que l'annuité ou la rente n'est alors

autre chose que l'intérêt annuel du capital emprunté : ce que l'on pouvait prévoir.

VI. L'amortissement peut être *différé*, c'est-à-dire que l'emprunteur peut s'engager à s'acquitter en n annuités, dont la première ne sera payable que p années après la date de l'emprunt; dans ce cas la formule [1] subit une modification. Le capital définitif produit par les n annuités est toujours

$$\frac{a [(1 + r)^n - 1]}{r},$$

mais la dette s'élève, au bout des $p + n$ années, à $A (1 + r)^{p+n}$;

on doit donc avoir

$$\frac{a [(1 + r)^n - 1]}{r} = A (1 + r)^{p+n},$$

d'où $a = \frac{Ar (1 + r)^{p+n}}{(1 + r)^n - 1} \quad [4]$

On pose alors $y = (1 + r)^n$, ou $\log y = n \log (1 + r)$,

et l'on a par suite $a = \frac{Ar y^p}{y - 1}$.

Si, par exemple, on suppose $A = 300\,000$ fr., $r = 0,05$, $n = 10$ et $p = 5$, on trouvera ainsi $a = 49\,585$ fr. 34.

VII. Dans la plupart des États européens qui ont recours à l'emprunt, le gouvernement affecte chaque année à l'amortissement de la dette publique une fraction déterminée du capital nominal de cette dette. Les sommes affectées à ce service sont déposées dans une caisse particulière, appelée *Caisse d'amortissement*, où elles produisent, au bout d'un certain temps, en s'augmentant de leurs intérêts composés, le capital nécessaire à l'extinction de la dette. La somme annuelle déposée par le gouvernement dans la caisse d'amortissement est ce que l'on appelle la *dotation* de cette caisse. La dotation est le plus souvent le centième du capital nominal de la dette.

On peut se demander en combien d'années la dette se trouve ainsi éteinte. Mais dans ce problème il faut bien remarquer que l'État servant les intérêts de la dette, ne doit réellement que le capital emprunté. Si donc A désigne ce capital, a la dotation, r l'intérêt annuel de 1 fr., et n le nombre d'années cherché,

on doit avoir $\frac{a [(1 + r)^n - 1]}{r} = A \quad [5]$

On en tire $(1 + r)^n = \frac{Ar}{a} + 1, \quad [6]$

d'où il est ensuite facile de tirer n . Si, par exemple, on suppose $a = \frac{1}{100} \cdot A$ et $r = 0,045$, ce qui répond

au taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100, on aura

$$(1,045)^n = 100r + 1 = 4,5 + 1 = 5,5,$$

d'où $n = \frac{\log 5,5}{\log 1,045} = \frac{0,7403627}{0,0191163}$,

valeur comprise entre 38 et 39 ans.

Au lieu de chercher le temps nécessaire à l'extinction totale de la dette, on peut demander au bout de combien d'années elle sera réduite à moitié, au tiers, au quart, etc. Si, par exemple, on suppose que la dotation ne soit, comme cela a lieu dans quelques

États, que de $\frac{1}{2}$ centième de la valeur nominale de la dette, et qu'on veuille savoir au bout de quel temps elle sera réduite à moitié, il faudra, dans la formule [5], remplacer A par $\frac{1}{2}A$, et a par $\frac{1}{2} \frac{A}{100}$, ce

qui ne changera pas la formule. Si la dotation est de $\frac{1}{100}$ du capital de la dette, on aura

$$(1+r)^n = \frac{1}{2} \frac{Ar}{a} + 1 = 50r + 1,$$

et si $r = 0,045$,

$$(1,045)^n = 2,25 + 1 = 3,25,$$

d'où l'on tire, par logarithmes, une valeur de n comprise entre 26 et 27 ans.

VIII. Ordinairement les fonds destinés à l'amortissement de la dette publique sont employés à racheter une certaine quantité de rentes lorsque le cours est au-dessous du pair; les rentes ainsi rachetées sont ensuite annulées. (Voy. RENTES.)

Dans quelques États, l'amortissement s'opère par voie de remboursement au pair; dans ce cas, le sort désigne chaque année quels seront les titres remboursés.

Dans d'autres États, l'amortissement s'effectue par voie de rachat quand les fonds publics sont au-dessous du pair, et par voie de remboursement au pair quand les fonds atteignent le pair ou le dépassent.

On peut se proposer sur ce sujet divers problèmes (Voy. nos Problèmes et Exercices d'Arithmétique et l'Algèbre); nous prendrons pour exemple le suivant :

Un État a contracté un emprunt de 60 millions, divisé en obligations de 1000 fr., rapportant chacune un intérêt de 50 fr. Cet État consacre à l'amortissement 1 pour 100 du capital emprunté. On suppose qu'un tiers de cette dotation soit employé au pair, et les deux autres tiers en rachats au-dessous du pair. A quels cours moyen ces rachats devraient-ils être opérés pour que la dette fût amortie en 36 ans ?

Il faut d'abord calculer la portion de la dette qui sera amortie par voie de remboursement. La dotation est de 600 000 fr., dont le tiers s'élève à 200 000 fr. En appelant A_1 la portion de la dette amortie par voie de remboursement, on aura donc, d'après la formule (5),

$$A_1 = \frac{200000r \cdot [(1,05)^n - 1]}{0,05}$$

On trouve, en effectuant,

$$A_1 = 19167260r.$$

Retranchons ce capital de la dette totale, il reste 40 832 740 fr., qui devront être amortis par voie de rachat. Pour abrégier l'écriture, nous désignerons ce second capital partiel par A_2 .

Soit c le cours cherché. Puisque l'on paye c ce qui vaut 1000 fr., la dette se trouve diminuée dans le même rapport. Dans la formule (5) il faut donc d'abord remplacer A par $\frac{c}{1000} A_2$; en même temps a devra être remplacé par les deux tiers de la dotation, ou par 400 000. Enfin, le taux réel de l'intérêt sera donné par la proportion

$$c : 50 = 100 : x, \text{ d'où } x = \frac{5000}{c}.$$

On aura donc

$$r = \frac{50}{c},$$

$$\text{et, par suite, } \frac{c}{1000} A_2 = \frac{a \left[\left(1 + \frac{50}{c}\right)^n - 1 \right]}{\frac{50}{c}},$$

$$\text{d'où } \frac{A_2}{20a} + 1 = \left(1 + \frac{50}{c}\right)^n,$$

$$\text{ou } \left(1 + \frac{50}{c}\right)^n = \frac{40832740}{8000000} + 1 = 6,1040925.$$

On tire de cette relation

$$\log \left(1 + \frac{50}{c}\right) = \frac{\log 6,1040925}{36} = 0,02182281,$$

$$\text{d'où } 1 + \frac{50}{c} = 1,0515327;$$

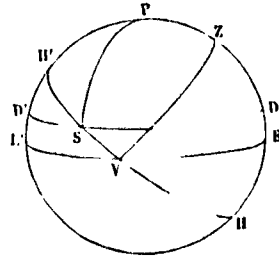
$$\text{puis } \frac{50}{c} = 0,0515327, \text{ et } c = \frac{50}{0,0515327},$$

$$\text{ou enfin } c = 970',257,$$

c'est-à-dire un peu plus de 970',25.

AMORTISSEMENT, en terme d'architecture, signifie ce qui surmonte et termine le comble d'un édifice. Un **ATTIQUE**, une **BALUSTRADE** (Voy. ces mots), des vases, des figures, des trophées, etc., peuvent ainsi servir d'amortissement.

AMPLITUDE D'UN ASTRE, angle que fait le plan vertical d'un astre avec le **PREMIER VERTICAL** (Voy. ce mot). Quand l'astre est à l'horizon, l'amplitude est dite **ortive** ou **occase**, suivant que l'astre se lève ou se couche. La recherche de l'amplitude revient en général à celle de l'**AZMUT** (Voy. ce mot); mais lorsqu'il s'agit de l'amplitude ortive ou occase, elle se détermine d'une manière très-simple, en considérant



le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z et l'astre S. Dans ce triangle, le côté PZ est la distance zénithale du pôle, égale au complément de la latitude λ du lieu; le côté PS est le complément de la déclinaison D de l'astre; le côté ZS est la distance zénithale π de cet astre; enfin l'angle en Z est le complément de l'angle SZV que fait le plan vertical de l'astre avec le premier vertical ZV, c'est-à-dire que c'est le complément de l'amplitude α de l'astre. Or dans ce triangle on a $\cos PS = \cos PZ \cos ZS + \sin PZ \sin ZS \cos PZS$, ou $\sin D = \sin \lambda \cos \pi + \cos \lambda \sin \pi \sin \alpha$; mais $\pi = 90^\circ$, puisque le point S est à l'horizon; on a donc $\cos \pi = 0$ et $\sin \pi = 1$; par suite,

$$\sin D = \cos \alpha \sin \lambda, \text{ d'où } \sin \alpha = \frac{\sin D}{\cos \lambda}. \quad (1)$$

L'heure du lever ou du coucher de l'astre est ordinairement connue à l'avance; on peut donc, à l'aide de cette donnée, calculer la déclinaison de l'astre, si elle est variable, pour le moment où il est à l'horizon; et dès lors la formule (1) donnera α .

Si l'on ne se contente pas de cette première approximation, on pourra, avec la déclinaison calculée pour l'heure présumée du lever ou du coucher, calculer l'heure de ce lever ou de ce coucher (Voy. COUCHER); et calculant alors une valeur plus approchée

de l'image demandée. En opérant ainsi pour tous les points de l'image A à produire, on obtiendra la série des points M qui détermineront sur le plan P le dessin déformé, ou l'anamorphose. Nous prendrons pour exemples les anamorphoses cylindriques et les anamorphoses coniques, qui sont les plus usitées, et pour lesquelles la méthode générale se simplifie.

ANAMORPHOSES CYLINDRIQUES. Soit ABC (fig. 2) un cylindre droit à base circulaire et à axe vertical, que nous prendrons pour la surface du miroir. L'anamorphose devra être tracée sur le plan de la base inférieure. Soit O la position donnée de l'œil de

l'observateur, et P sa projection sur le plan de la base inférieure du cylindre. Du point P menons à la base les deux tangentes PA et PB ; les deux plans tangents OPA et OPB ainsi déterminés comprendront entre eux tous les rayons visuels qui rencontrent la surface antérieure du miroir. Par les deux génératrices de contact AA' et BB' , conduisons un plan; c'est dans ce plan que nous supposerons placée l'image qu'il s'agit d'obtenir. Soit m un point quelconque de cette image, et soit p sa projection sur le plan de la base inférieure du cylindre. Le plan des droites OP et mp contiendra le rayon visuel Om , qui, s'il était prolongé, irait rencontrer

Fig. 2.

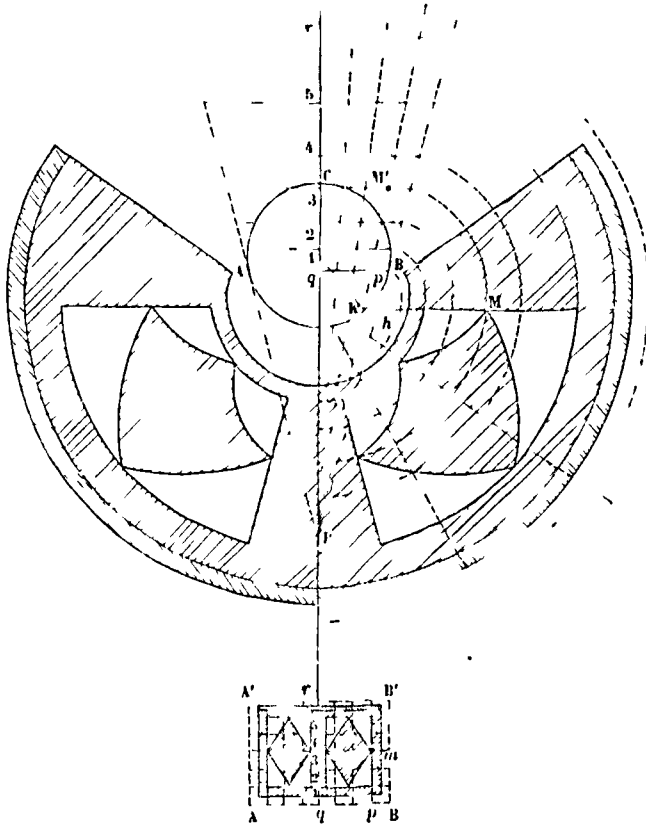


Fig. 3.

en un point M' la trace PM' du plan $OP'm$. Mais ce rayon visuel rencontre la surface du miroir en un point I situé sur la génératrice KI , suivant laquelle le plan OPM' rencontre la surface; et il éprouve en I une réflexion. Soit IH la normale en I , qui est parallèle à la base du cylindre. Dans le plan OIH faisons l'angle HIM égal à HIO ; la droite IM sera le rayon réfléchi, et ira rencontrer le plan de la base en un point M . C'est ce point M qui, vu par réflexion, donnera à l'œil la sensation du point m de l'image. Il s'agit donc de déterminer commodément ce point M . Pour cela, considérons les deux trièdres $IOHV$ et $IMHK$. Les faces OIH et HIM sont

égales d'après la construction; les faces HIV et HIK sont égales comme angles droits; les angles dièdres $OHIV$ et $MHIK$ sont égaux comme opposés par l'arête. Les deux trièdres sont donc égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune. Il en résulte d'abord que les dièdres $OVIH$ et $MKIH$ sont égaux, et que, par conséquent, la trace Kh du plan HIK divise en deux parties égales l'angle PKM formé par les traces des deux plans OIV et MIK . D'ailleurs Kh , parallèle à IH , rencontre l'axe du cylindre; c'est donc un rayon du cercle de base. Il résulte en outre de l'égalité des deux trièdres, que les faces OIV et MIK sont

égales; mais $OIV = KIM'$ comme opposés par le sommet; donc $MIK = KIM'$. Par conséquent les deux triangles IKM et IKM' , rectangles en K , ont un côté IK commun et l'angle aigu adjacent égal; donc ils sont égaux, et il en résulte $KM = KM'$. Or tout étant comme dans le trapèze rectangulaire $OPpm$, il est facile de le rabattre sur le plan de la base et de déterminer par suite la longueur pM' , et par conséquent KM' . Ainsi, pour déterminer le point M , on mènera un rayon au point K où Pp coupe la circonférence de la base; on fera l'angle $hKM = hKP$, et l'on prendra KM égal à KM' .

On peut remarquer que tous les points de l'image situés sur une même parallèle mp à l'axe du cylindre donneront des points M situés sur une même droite KM . On peut remarquer encore, parce que cela sera utile tout à l'heure, que tous les points de l'image situés sur une même parallèle à AB , passant par le point m par exemple, donneront des points M' situés également sur une parallèle à AB ; car ils seront sur l'intersection du plan de la base avec le plan déterminé par le point O et par la parallèle à AB qui passe au point m .

La figure 2 offre un exemple d'anamorphose cylindrique. La circonférence ABC est la base inférieure du miroir. Le point P est la projection de l'œil du spectateur. La ligne AB , corde des contacts relative au point P , est la trace horizontale du plan de l'image. Cette image est le panneau très-simple représenté par la figure 3. On l'a tracée dans un rectangle $ABB'A'$ construit sur AB (fig. 2) comme base, avec une hauteur suffisante, et que l'on a divisé en carrés égaux par des parallèles aux côtés. Sur la figure 4 on a rabattu le plan vertical qui a

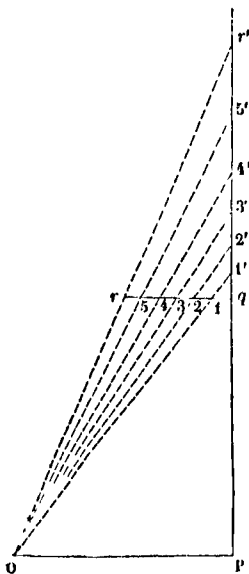


Fig. 4.

pour trace Pr sur la figure 2. La ligne qr est le rabattement de la ligne qr de la fig. 3, avec ses divisions. La ligne PO est la hauteur de l'œil au-dessus du point P . En joignant le point O aux points 1, 2, 3, 4, 5, r , on obtient les points 1', 2', 3', 4', 5', r' qui donnent les distances du point P (fig. 2 et 4) aux points de rencontre de la base du cylindre avec les rayons visuels menés aux points 1, 2, 3, 4, 5, r (fig. 3). Par ces points 1, 2, ... r (fig. 2) on a mené des parallèles à AB ; ce sont, d'après la remarque

faite plus haut, les lignes sur lesquelles se trouvent les traces des rayons visuels menés aux lignes de division horizontales de la figure 3.

Pour avoir le point de l'anamorphose qui correspond à un point m de l'image (fig. 3) situé sur la verticale mp , on a mené (fig. 2) la droite Pp , qui

rencontre la circonférence de base du miroir en un point K ; on a mené le rayon Kh , et l'on a fait l'angle $hKM = hKP$. La ligne Pp prolongée rencontre en un point M' la parallèle à AB qui correspond au chiffre 3, numéro de l'horizontale sur laquelle se trouve le point m (fig. 3); puis on a pris (fig. 2) la distance $KM = KM'$, ce qui a donné le point cherché M .

On pourrait déterminer de la même manière tous les points de l'anamorphose correspondants aux différents points de l'image (fig. 3). Mais il est plus simple de déterminer les lignes qui, sur l'anamorphose, correspondent aux lignes de division de la figure 3. On a vu que les verticales de la figure 3 donnent des lignes droites sur l'anamorphose; on y marque les points qui répondent aux divisions de la figure 3. En réunissant ensuite par un trait continu les points de ces diverses lignes droites qui occupent le même rang, on obtient les courbes de l'anamorphose qui correspondent aux horizontales de la figure 3. Le rectangle de la figure 3 se trouve ainsi remplacé par une sorte de trapèze circulaire, divisé, par les droites et par les courbes dont on vient de parler, en autant de compartiments qu'il y a de carrés dans la figure 3. Quel que soit le point de l'image que l'on considère, on obtient le point correspondant de l'anamorphose en marquant dans le compartiment qui correspond au carré de la figure 3 où ce point se trouve, un point situé d'une manière analogue. Ce moyen abrégé, analogue à la méthode des carreaux (*Voy. ce mot*), est le seul que l'on puisse employer quand l'image à produire est un peu compliquée, lorsqu'elle représente, par exemple, des figures d'hommes ou d'animaux. On lui donne d'ailleurs tel degré d'approximation que l'on veut en multipliant suffisamment le nombre des carreaux.

On peut remarquer que les parties les plus élevées de l'image sont celles qui, dans l'anamorphose, sont les plus éloignées du miroir; tandis que les parties les plus basses sont celles qui en sont le plus rapprochées.

ANAMORPHOSES CONIQUES. Ce genre d'anamorphose est d'un tracé plus facile, et produit des effets plus bizarres et plus inattendus. Le miroir est la surface convexe d'un cône à base circulaire; on place cette base horizontalement; l'œil est situé sur l'axe du cône à une certaine distance au-dessus de son sommet. L'image à produire est supposée tracée sur le plan de la base. La réflexion se fait dans le plan méridien qui passe par le point de l'image que l'on considère. La figure 5 offre un exemple d'anamorphose conique. AB (fig. 5) est le diamètre de la base du cône, O et S' sont les projections de son sommet; O' est la projection verticale de l'œil de l'observateur. Soit m un point quelconque de l'image, et OV la trace du méridien qui contient ce point. Concevons qu'on fasse tourner ce plan autour de l'axe du cône jusqu'à ce qu'on l'ait amené parallèlement au plan vertical de projection. Le point m est alors venu en n , et sa projection verticale est n' . Le rayon visuel mené au point m est venu se placer suivant $S'n'$, et rencontre le miroir au point I . Pour avoir le rayon réfléchi, il suffit de prendre le point O'' symétrique de O' par rapport à la génératrice AS' , et de joindre $O''I$. Cette droite rencontre la ligne de terre au point R ;

la trace horizontale du rayon réfléchi est donc le point r , puisque ce rayon est parallèle au plan vertical de projection. Lorsqu'on ramène le méridien dans sa position primitive, cette trace décrit un

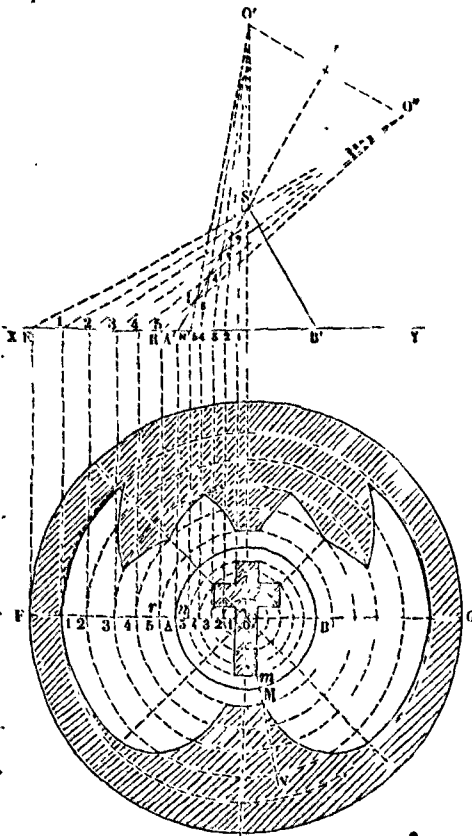


Fig. 5.

cercle dont le point O est le centre, et vient se placer sur OV en un point M , qui est, sur l'anamorphose, le point correspondant au point m de l'image. On pourrait répéter la même construction pour tous les points de l'image. Mais il est généralement préférable d'employer, comme pour l'anamorphose cylindrique, des compartiments correspondants. On divise AB en un certain nombre de parties égales, et l'on décrit, du point O comme centre, des cercles concentriques passant par les points de division. On projette les points de division sur $A'B'$; on joint les projections au point O' ; les lignes de jonction coupent la génératrice $A'S'$ en des points que l'on joint au point O'' ; les nouvelles lignes de jonction vont rencontrer la ligne de terre en des points qu'on ramène sur AB prolongé, au moyen de perpendiculaires à la ligne de terre. Par ces points on fait passer de nouveaux cercles ayant le point O pour centre. On divise ensuite la circonférence AB en un certain nombre de parties égales, et l'on mène aux points de division des rayons qui divisent en un même nombre de parties égales tous les cercles décrits du point O , soit intérieurement, soit extérieurement au cercle AB . On forme

ainsi des compartiments intérieurs à la base du cône, et des compartiments extérieurs, en même nombre et qui leur correspondent. On obtient alors les points de l'anamorphose en observant la place qu'occupent dans les compartiments intérieurs les points de l'image, et en déterminant des points placés de la même manière dans les compartiments extérieurs qui leur correspondent. L'approximation est d'autant plus grande que les divisions de AB , celles de la circonférence de base, et par suite les compartiments, ont été plus multipliés.

On remarquera que les parties de l'image situées au centre sont rejetées à la circonférence dans l'anamorphose, et que les parties voisines de la circonférence de base sur l'image s'en rapprochent aussi dans l'anamorphose. Cette corrélation est rendue sensible sur la figure 5 à l'aide d'une teinte passée sur l'image et sur les parties de l'anamorphose qui lui correspondent.

On donne aussi le nom d'anamorphoses à certaines transformations des TABLES GRAPHIQUES (Voy. ce mot).

ANÉMOMÈTRE (du grec ἀνεμος, vent, et μέτρον, mesure), nom donné à divers appareils destinés à mesurer la vitesse du vent. Le plus simple consiste en une planche carrée s'appuyant par son centre contre un ressort à boudin qu'elle comprime plus ou moins, selon la pression normale qu'elle reçoit du vent; une tige de fer fixée à la planche forme arrêt pour empêcher le ressort de se comprimer au delà de sa limite d'élasticité. L'anémomètre de Lind est un tube en U, rempli d'eau, et dont une branche se recourbe horizontalement; on dirige cette branche horizontale en sens contraire de la vitesse du vent; la pression qu'il exerce déprime la colonne liquide dans l'une des branches du tube et l'élève au contraire dans l'autre; on admet que la différence de niveau qui s'établit est proportionnelle à la hauteur due à la vitesse du vent. Cet instrument est donc analogue au TUBE DE PITOT (Voy. ce mot) et donne lieu aux mêmes objections. Ces appareils ne peuvent fournir que des indications approchées. On obtient une mesure beaucoup plus précise de la vitesse du vent avec l'anémomètre de M. Combes, qui est aujourd'hui généralement employé. Il se compose (fig. 1 et 2) de 4 ailes planes c, c, c, c , montées sur un axe très-délié AA , terminé par des pivots très-fins qui tournent dans des chapes en agate BB . Ce moulinet exposé au vent de manière que la vitesse de celui-ci soit parallèle à l'axe AA , prend un mouvement de rotation plus ou moins rapide. Une vis sans fin, taillée sur l'axe AA , communique le mouvement à une roue dentée D . L'axe de celle-ci porte une petite came, qui, à chaque tour, fait sauter d'un dent une roue à rochet E . La roue à rochet est retenue par un ressort très-flexible fixé à la plaque horizontale G sur laquelle repose tout l'appareil. La roue D a 100 dents, et le rochet en a 50. Deux aiguilles H et H' , placées en regard de ces roues, servent à faire connaître de combien elles ont tourné chacune. A chaque tour du moulinet, la vis sans fin avance d'un pas, et la roue D d'une dent; si donc on trouve que le rochet a sauté de m dents, et que la roue D a tourné en outre de n dents, on en conclut que le moulinet a fait $100m + n$ tours. Deux fils LL , que l'on peut manœuvrer à distance,

servent à faire mouvoir une fourchette K qui s'interpose entre les bras du moulinet lorsqu'on veut arrêter l'appareil, ou qui s'en dégage quand on veut le remettre en marche. Pour se servir de l'appareil,

on commence par amener le zéro de chaque roue en regard de l'aiguille correspondante; on place l'instrument dans le courant dont on veut mesurer la vitesse; on tire la détente à un instant précis;

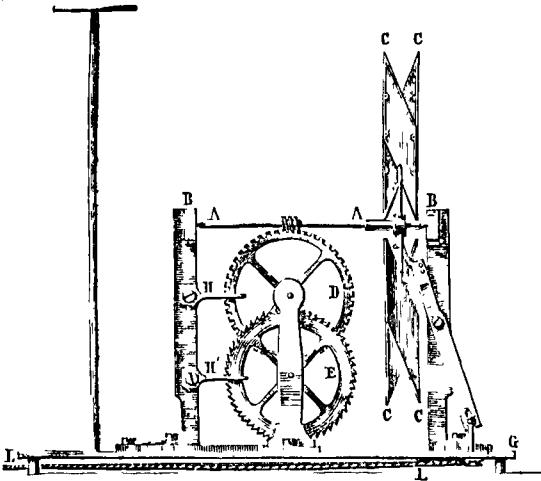


Fig. 1.

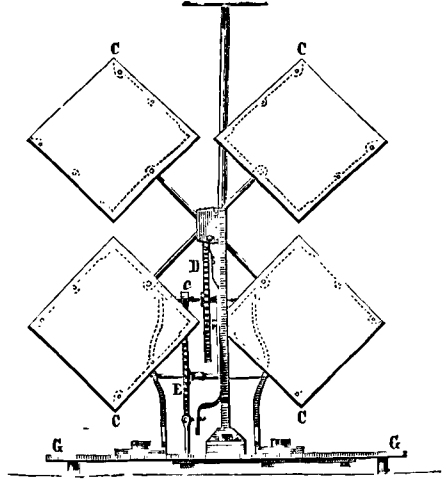


Fig. 2.

on laisse tourner le moulinet pendant 3 ou 4 minutes; on tire le cordon d'arrêt, et on lit sur les roues le nombre de tours exécutés par l'appareil; d'où l'on déduit aisément le nombre de tours faits par seconde.

Si N est ce nombre de tours, on a, en appelant V la vitesse du vent, et a et b des constantes,

$$v = a + bN. \quad [1]$$

Les constantes a et b ont été déterminées à l'avance en plaçant l'appareil dans des courants dont la vitesse soit connue, ou plutôt en le faisant mouvoir, avec une vitesse connue, dans un air en repos. Pour cela, le moyen le plus simple est de placer l'appareil sur un levier horizontal, mobile autour d'un axe vertical dans une position telle, que l'axe de rotation de l'instrument soit perpendiculaire à la direction du levier, puis de faire tourner ce levier uniformément avec une vitesse connue. En répétant l'expérience avec des vitesses différentes, on détermine aisément les deux coefficients de la formule [1].

M. Morin a ajouté à l'appareil des cadrans en émail sur lesquels se meuvent des aiguilles qui indiquent immédiatement le nombre de tours exécutés par le moulinet. Pour les observations prolongées, il a ajouté à l'instrument une troisième roue de 100 dents qui marche d'une dent chaque fois que la roue à rochet fait un tour, ce qui permet de compter jusqu'à 500 000 tours, en lisant au besoin les nombres de tours exécutés à des intervalles de tems quelconques.

L'anémomètre de M. Combes se construit en matières plus ou moins légères, selon les vitesses qu'on a à mesurer. Pour les faibles vitesses, les ailettes se font en mica. Avec un appareil de ce genre, M. Pécelet a pu mesurer des vitesses de 0^m,16.

La théorie des MOULINS À VENT (V. ce mot) à axe horizontal est applicable à l'anémomètre dont nous

nous occupons. Mais on la simplifie d'ordinaire en traitant le mouvement de l'aile comme s'il s'agissait d'un simple élément superficiel. Soit A l'aire de l'une des ailes, x la distance de son centre à l'axe de rotation, i son inclinaison par rapport à cet axe ω la vitesse angulaire de l'appareil, et v la vitesse du vent. La composante de cette vitesse perpendiculairement à l'aile est $v \sin i$; la vitesse de l'aile étant ωx , sa composante perpendiculaire au plan de l'aile est $\omega x \cos i$. La vitesse relative avec laquelle le vent choque l'aile est donc $v \sin i - \omega x \cos i$; et, en vertu des hypothèses admises sur la RÉSTANCE DES FLUIDES (Voy. ce mot), la pression que le vent exerce sur l'aile a pour pression

$$K \Pi A \frac{(v \sin i - \omega x \cos i)^2}{2g},$$

K désignant un coefficient donné par l'expérience, et Π le poids du mètre cube d'air, dont on néglige les variations de densité. Pour avoir le travail de cette pression par seconde, il faut la projeter sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ce qu'on obtiendra en introduisant le facteur $\cos i$, et multiplier ensuite par le chemin que le centre de l'aile décrit dans l'unité de tems, c'est-à-dire par ωx ; on obtient ainsi pour l'expression du travail T demandé

$$T = K \Pi A \frac{(v \sin i - \omega x \cos i)^2}{2g} \cdot \omega x \cos i. \quad [2]$$

Si l'on admet que T soit proportionnel à ω ; on peut le représenter par $B \omega$. Supprimant alors le facteur ω , on peut mettre l'équation [2] sous la forme

$$\frac{2gB}{K \Pi A x \cos i} = (v \sin i - \omega x \cos i)^2$$

ou, en désignant par c la racine du premier membre,

$$d'où \quad v = \frac{c}{\sin i} + \omega x \cot i. \quad [2']$$

D'ailleurs, si N représente le nombre de tours que fait l'appareil dans une seconde, on a

$$\omega = 2\pi N;$$

il vient donc $v = \frac{c}{\sin i} + 2\pi \cot i \cdot N$,

expression de la forme $v = a + bN$.

C'est celle qui a été indiquée plus haut [1]. Mais on voit qu'elle repose sur des hypothèses qui n'ont rien de rigoureux.

L'anémomètre de M. Combes donne la vitesse du vent avec une grande approximation, depuis 0^m,50 jusqu'à 6 mètres et même jusqu'à 10 mètres. — On l'emploie avec succès pour évaluer la vitesse de tous les gaz en mouvement, et particulièrement dans le tirage des cheminées appliqué à la ventilation.

C'est en 1838 que M. Combes a fait construire par M. Neumann l'anémomètre dont nous venons de parler. Déjà en 1820 M. Kallsténius s'était servi d'un moulinet à 12 ailes pour mesurer la vitesse de l'air; mais il avait déduit de ses expériences une formule inexacte.

Pour les vitesses considérables, l'anémomètre de M. Combes devient insuffisant, parce que les ailettes ne peuvent plus supporter sans fléchir les pressions auxquelles elles sont soumises. Il faut alors avoir recours à des instruments qui offrent une plus grande résistance, et l'on se sert généralement de l'anémomètre imaginé par le docteur Robinson, de l'observatoire d'Armagh. Il se compose de quatre bras horizontaux portant chacun à son extrémité une demi-sphère creuse, dont le bord circulaire est placé verticalement; la convexité de chacune d'elles regarde la concavité de celle qui la précède. Les quatre bras sont montés sur un axe vertical mobile, en connexion avec un compteur. La vitesse de rotation de cet anémomètre est très-sensiblement proportionnelle à celle du vent.

ANGLE DE GISEMENT, angle que fait la direction d'un navire avec le plan vertical d'un astre; c'est la différence entre l'azimut de l'astre et celui du chemin suivi par le vaisseau. On a besoin de cet angle lorsque, dans la détermination de la latitude on veut tenir compte du chemin fait par le navire dans l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre les observations de hauteurs d'un même astre (*Voy. LATITUDE* [Détermination de la]).

ANGLE DE POSITION, angle qui a pour sommet le centre d'un astre dans le **TRIANGLE DE POSITION** (*Voy. ce mot*), c'est-à-dire dans le triangle qui a pour sommets cet astre, le pôle, et le zénith du lieu d'observation.

ANGLE DE RUPTURE, angle que fait avec la verticale le joint suivant lequel s'opère la rupture d'une voûte. (*Voy. POUSSÉE DES VOÛTES.*)

ANGLE DIMINUÉ, angle que fait une face quelconque d'un bastion avec le côté extérieur, ou, ce qui revient au même, avec la courtine. Cet angle ne doit pas dépasser 20°; il est de 18° 26' environ dans le tracé de Cormontaigne (*Voy. FORTIFICATION*) pour le cas de l'hexagone; il est de 15° 57' environ pour le pentagone, et de 14° 2' environ pour le carré.

ANGLE DU FROTTEMENT, angle que la réaction mutuelle de deux corps en contact fait avec la normale commune aux surfaces (apparentes) de contact. La tangente trigonométrique de l'angle de frottement est ce que l'on appelle le *coefficient de frottement*. (*Voy. FROTTEMENT*)

ANGLE FLANQUÉ, angle que font entre elles les deux faces d'un bastion. Le chevalier Deville s'astreignait à faire cet angle droit. Aujourd'hui on a reconnu qu'il est avantageux de le faire le plus grand possible. (*Voy. FORTIFICATION.*)

ANGLE HORAIRE, angle que fait le cercle horaire passant par le centre d'un astre avec le méridien du lieu. Les angles horaires se comptent de zéro à 360° dans le sens du mouvement apparent. Un angle horaire se mesure par l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre l'instant du passage de l'astre considéré au méridien du lieu et le moment actuel; 360° répondant à un jour sidéral, un angle horaire AI répondra à un intervalle de temps l' donné par la proportion

$$AI : 360^\circ = T : 1 \text{ jour sidéral,}$$

d'où $AI = 360^\circ \cdot \frac{T}{j} = 360^\circ \cdot \frac{T''}{86400''}$,

désignant le temps observé exprimé en secondes sidérales.

Réciproquement, la connaissance de l'angle horaire donnerait le temps écoulé depuis le passage au méridien; car la formule ci-dessus donne

$$T'' = 86400'' \cdot \frac{AI}{360^\circ}.$$

C'est ainsi que, connaissant l'angle formé par les cercles horaires qui passent par deux étoiles déterminées, on peut en conclure le temps qui s'écoulera entre les passages de ces deux étoiles au méridien, ou *vice versa*.

ANGLES (PROBLÈMES SUR LES). Nous réunissons sous cet article les principaux problèmes de Géométrie descriptive qui ont pour objet, soit de déterminer un angle plan ou un angle dièdre, soit de mener une droite ou un plan qui fassent, avec une droite ou un plan donné, un angle plan ou un angle dièdre donné.

I. ANGLE DE DEUX DROITES. On peut toujours supposer que les deux droites se coupent; car, si elles ne se coupaient pas, on mènerait par un point de l'une d'elles une parallèle à l'autre, et l'on ramènerait ainsi le problème au cas de deux droites qui se coupent.

Soient $ab, a'b'$ et $cd, c'd'$ (fig. 1) les projections

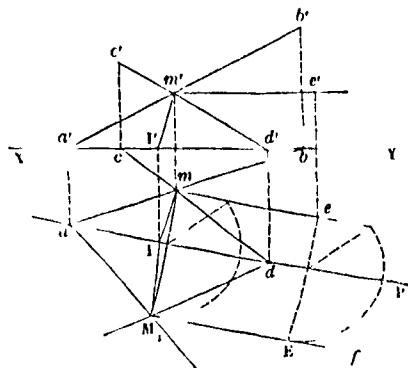


Fig. 1.

de deux droites qui se coupent en un point m, m' ; et supposons qu'il s'agisse de construire l'angle de ces deux droites. La méthode générale consiste à

à résoudre ce problème inverse : *Par un point donné, mener une droite qui rencontre une droite donnée sous un angle donné.*

On déterminerait le plan qui contient le point donné et la droite donnée, et on le rabattrait sur l'un des plans de projection. Par le point donné, ainsi rabattu, on mènerait une droite faisant avec la droite donnée, également rabattue, un angle égal à l'angle donné. Il resterait à relever la droite ainsi menée, et pour cela il suffirait d'en relever un point.

Nous n'insistons pas sur ce problème qui conduit à la même épure que celle de la figure 1, avec cette différence que les constructions y sont faites dans un ordre différent.

Enfin les mêmes constructions serviraient à résoudre cet autre problème, qui n'est qu'un cas particulier du précédent : *Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée.*

V. ANGLE DE DEUX PLANS. On pourrait ramener la recherche de l'angle de deux plans à celle de l'angle de deux droites. Il suffirait pour cela de mener, par un même point de l'espace, deux droites respectivement perpendiculaires aux deux plans; l'angle de ces deux droites serait égal à l'angle des deux plans donnés, ou il en serait le supplément. Mais il est nécessaire de savoir traiter la question d'une manière directe.

Soient $P\alpha P'$ et $P\beta P'$ (fig. 3) les traces des deux

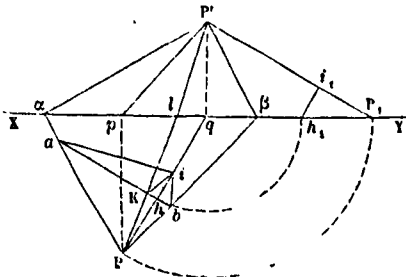


Fig. 3.

plans donnés, Pq et pP' les projections de leur intersection (Voy. INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS). Concevons que l'on mène un plan perpendiculaire à cette intersection; sa trace horizontale sera une droite ab , perpendiculaire à Pq ; et il coupera les deux plans proposés suivant deux droites qui feront entre elles l'angle demandé.

Désignons par I le sommet de cet angle; ses côtés forment avec ab un triangle qu'il s'agit de rabattre autour de ab sur le plan horizontal.

Or, la droite qui joint les points I et h est perpendiculaire à ab , puisqu'elle est dans un plan vertical PqP' auquel l'horizontale ab est perpendiculaire. La même droite est aussi perpendiculaire à l'intersection des deux plans proposés, puisqu'elle est dans le plan mené par le point I perpendiculairement à cette intersection. Il en résulte : 1° que, dans le rabattement autour de ab , la droite qui joint les points I et h viendra se placer suivant hq ; 2° que si l'on fait tourner le plan PqP' autour de Pq jusqu'à le faire coïncider avec le plan vertical de projection, les points h et P venant se placer respectivement en h_1 et en P_1 , la droite h_1i_1 , abaissée

perpendiculairement sur $P'P_1$, sera la vraie distance des points h et I . Si donc on prend sur hq une longueur hi égale à h_1i_1 , le point i sera le rabattement du point I ; et si l'on joint ai et bi , l'angle aib sera l'angle demandé.

VI. Une fois cet angle obtenu, on peut se proposer de mener le plan bissecteur de l'angle dièdre dont on a construit la mesure. Pour cela, on observera que le plan auxiliaire aIb qui coupe les deux plans proposés suivant les droites aI et bI , faisant entre elles l'angle rectiligne du dièdre de ces deux plans, coupe le plan bissecteur suivant une droite qui est la bissectrice de l'angle aIb . Dans le rabattement, cette bissectrice vient se placer suivant la bissectrice iK de l'angle rabattu aib . Il en résulte que le point K qui est à la fois sur cette bissectrice et dans le plan horizontal, est un point de la trace horizontale du plan bissecteur. Si donc on joint PK , et qu'on prolonge cette droite jusqu'en l à sa rencontre avec la ligne de terre, on aura la trace horizontale du plan bissecteur; et en joignant lP' on aura sa trace verticale: car ce plan étant mené par l'intersection des deux plans donnés, ses traces passent respectivement par les points P et P' , traces de cette intersection.

On mènerait de la même façon le plan bissecteur de l'angle dièdre supplémentaire.

VII. Si les traces des deux plans donnés ne se rencontraient pas dans le cadre de l'épure, on mènerait deux plans parallèles aux premiers et remplissant cette condition.

Si les traces des deux plans se rencontraient en un même point de la ligne de terre, on transporterait le plan horizontal de projection parallèlement à lui-même, et l'on rentrerait dans le cas général.

Si les deux plans étaient parallèles à la ligne de terre, la construction se simplifierait. Soient PQ , $P'Q'$ et RS , $R'S'$ les traces des deux plans donnés.

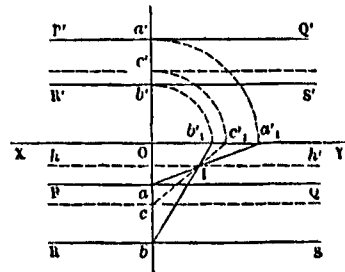


Fig. 4.

Coupons ces plans par un plan auxiliaire ab' perpendiculaire à la ligne de terre; les intersections de ce plan auxiliaire avec les deux plans donnés feront entre elles l'angle demandé; tout se réduit donc à rabattre ces intersections sur l'un des deux plans de projection, par exemple sur le plan horizontal. Pour cela, remarquons que les points a et b , traces horizontales de ces intersections, demeureront fixes dans le rabattement; et que les points a' et b' , traces verticales de ces mêmes intersections, décriront des arcs de cercles, ayant pour centre commun le point O où le plan auxiliaire coupe la ligne de terre, et viendront se rabattre en a_1 et en b_1 . Les rabattements de ces intersections seront

donc les droites aa_1 et bb_1 ; et l'angle a_1b sera l'angle demandé.

Si l'on veut construire le plan bissecteur, on mènera la bissectrice Ic de l'angle a_1b ; on la prolongera jusqu'à la ligne de terre en C_1 , du point O comme centre, on décrira l'arc C_1C' ; enfin, par les points C et C' , on mènera des parallèles à la ligne de terre; ce seront les traces du plan bissecteur.

VIII. Les constructions qui viennent d'être exposées serviront à résoudre ce problème inverse : *Par une droite donnée dans un plan donné, mener un second plan qui fasse avec le premier un angle donné.* Dans le cas général, l'épure est analogue à celle de la figure 3; avec cette différence que les constructions y sont faites dans un autre ordre. Si $P\alpha P'$ est le plan donné, et si Pq et pP' sont les projections de la droite donnée, on se donnera la droite ah perpendiculaire à Pq ; on rabattra les points P et h en P_1 et h_1 par des arcs de cercle décrits du point q , on joindra P_1P_1 ; on abaissera du point h_1 la perpendiculaire h_1i_1 , que l'on portera sur h_1q de h en i ; et l'on joindra ai . Au point i on fera alors un angle aib égal à l'angle donné, ce qui fera connaître le point b ; on joindra Pb qui rencontrera la ligne de terre en un point β ; on joindra $P'\beta$, et l'on aura en $P\beta P'$ les traces du plan demandé.

On verrait aisément comment la construction doit être modifiée dans les divers cas particuliers. Supposons, par exemple, que le plan donné soit un plan parallèle à la ligne de terre $PQ, P'Q'$ (fig. 4), et que la droite donnée soit une droite également parallèle à la ligne de terre et ayant pour projection horizontale hh' . On coupera le plan donné par un plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre, et l'on rabattra l'intersection sur le plan horizontal en aa_1 . Cette intersection rabattue coupe en un point I la projection horizontale de la droite donnée; le point I est le sommet de l'angle que doivent faire entre elles les intersections du plan auxiliaire avec le plan donné et avec le plan cherché. On fera donc au point I un angle a_1b égal à l'angle donné, ce qui fera connaître un point b de la trace horizontale du plan cherché, et par conséquent cette trace RS elle-même, puisqu'elle doit être parallèle à la ligne de terre. Pour obtenir la trace verticale, on prolongera bI jusqu'à la rencontre de XY en b_1 ; on relèvera le point b , par l'arc de cercle b, b' décrit du point O , et par le point b' on mènera une parallèle $R'S'$ à la ligne de terre.

A l'aide des mêmes constructions on résoudrait cet autre problème, qui n'est qu'un cas particulier du précédent : *Par une droite donnée dans un plan donné, mener un plan perpendiculaire au premier.*

IX. ANGLE D'UN PLAN AVEC LES PLANS DE PROJECTION. Soient αP et $\alpha P'$ (fig. 5) les traces d'un plan donné. Pour obtenir l'angle que ce plan fait avec le plan horizontal, menons un plan perpendiculaire à sa trace horizontale; soient $ba, a'a'$ les traces de ce plan. Il coupe le plan donné suivant une droite qui va du point a' au point b , et qui forme avec ba l'angle qu'il s'agit d'obtenir. Rabattons le plan sécant sur le plan vertical en le faisant tourner autour de aa' ; le point b viendra en b_1 , en décrivant un arc de cercle ayant le point a pour centre; la droite d'intersection viendra prendre la position

$a'b_1$; par conséquent l'angle demandé n'est autre que l'angle $a'b_1a$.

On fera une construction analogue pour obtenir l'angle que le plan donné fait avec le plan vertical.

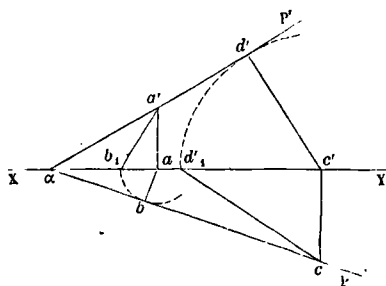


Fig. 5.

On mènera un plan cd' perpendiculaire à la trace verticale $\alpha P'$ du plan donné; du point c' comme centre avec $c'd'$ pour rayon, on décrira l'arc $d'd_1$, et l'on joindra cd_1 ; l'angle cd_1c' sera l'angle demandé.

On peut aussi résoudre, à l'aide des considérations précédentes, plusieurs problèmes inverses. Par exemple : *Étant donnée la trace verticale $\alpha P'$ d'un plan, et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, trouver sa trace horizontale.* Menez aa' perpendiculaire à la ligne de terre, et, par le point a' menez une droite $a'b_1$ qui fasse avec XY un angle $a'b_1a$ égal à l'angle donné; puis du point a comme centre avec ab_1 pour rayon décrivez une circonférence. La trace demandée devra lui être tangente; on l'obtiendra donc en menant par le point a une tangente αP à cette circonférence. Si le point a n'était pas dans le cadre de l'épure, on mènerait par un point de la ligne de terre une parallèle à la trace verticale donnée; on ferait la construction pour cette parallèle; et une fois la direction de la trace horizontale ainsi déterminée, on n'aurait plus qu'à mener une tangente à la circonférence ab_1 parallèlement à une ligne donnée.

On résoudrait de la même manière ce problème analogue : *Étant donnée la trace horizontale αP d'un plan, et l'angle qu'il fait avec le plan vertical, trouver sa trace verticale.* Cette trace devrait être tangente à la circonférence $c'd'$.

On pourrait demander de mener, par un point donné, un plan qui fasse des angles donnés avec les plans de projection. On remarquera que l'on peut d'abord ramener le problème au cas où le point donné serait sur la ligne de terre; car, le plan cherché étant obtenu dans ce cas, on n'aurait qu'à lui mener un plan parallèle pour avoir la solution du problème primitif. Or, quand le point donné est sur la ligne de terre, le problème n'est qu'un cas particulier de la construction de l'ANGLE TRIÈDRE (Voy. ce mot); c'est celui où l'on donne les trois angles dièdres, savoir les angles que le plan cherché doit faire avec les deux plans de projection, et l'angle droit que les plans de projection font entre eux. Nous n'insisterons pas sur ce problème, plus curieux qu'utile.

X. ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. Par un point de la droite on mène une perpendiculaire au plan; l'angle que fait cette perpendiculaire avec la droite donnée est le complément de l'angle demandé.

Ce problème ne donne donc pas lieu à des constructions particulières.

XI. ANGLES D'UNE DROITE AVEC LES PLANS DE PROJECTION. Soient $ab, a'b'$ (fig. 6) les projections

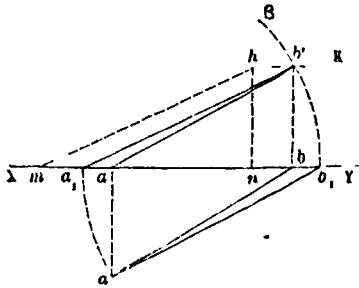


Fig. 6.

d'une droite donnée. L'angle que la droite fait avec le plan horizontal est celui qu'elle fait avec sa projection horizontale. Rabattons sur le plan vertical le plan projetant de la droite, en le faisant tourner autour de bb' ; le point a viendra en a_1 , en décrivant un arc de cercle dont b est le centre; la droite elle-même viendra prendre la position a_1b' ; et l'angle ba_1b' sera l'angle de la droite avec le plan horizontal.

Pour obtenir l'angle qu'elle fait avec le plan vertical, il faut rabattre de même sur le plan horizontal le plan qui la projette verticalement, en le faisant pour cela tourner autour de aa' ; le point b' viendra en b_1 , en décrivant un arc de cercle dont a' est le centre; la droite elle-même prendra la position ab_1 ; et l'angle $a'b_1a$ sera l'angle demandé.

On peut demander de mener par un point donné P une droite qui fasse des angles donnés avec les plans de projection. On remarquera qu'on peut d'abord résoudre le problème en supposant que le point donné est dans le plan horizontal; il restera à mener, par le point P , une parallèle à la droite obtenue. Soit donc a le point donné. On mènera par le point a une perpendiculaire aa' à la ligne de terre, et une droite ab , faisant avec XY un angle $b'a, b$ égal à celui que la droite demandée doit faire avec le plan vertical; puis on décrira du point a comme centre un arc indéfini b, β ; la trace verticale de la droite devra se trouver sur cet arc. On remarquera, en second lieu, que dans la figure 6 la longueur a_1b' est égale à ab , puisqu'elles expriment l'une et l'autre la distance des deux traces de la droite dans l'espace. On connaît d'ailleurs l'angle $b'a, b$: c'est l'angle que la droite demandée doit faire avec le plan horizontal. On peut donc construire un triangle mnh égal au triangle a_1bb' , et connaître, par suite, le côté nh égal à bb' . On mènera donc une parallèle hK à la ligne de terre, à une distance de XY égale à la longueur trouvée nh ; le point b' où cette parallèle rencontrera l'arc b, β , sera la trace verticale de la droite, qui se trouvera dès lors complètement déterminée.

ANGLE TRIÈDRE (CONSTRUCTION DE L'), problème de Géométrie descriptive dans lequel on se propose de déterminer trois éléments d'un angle trièdre, les trois autres étant connus. Le problème se subdivise par conséquent en six cas, que nous examinerons successivement.

I. 1^{er} CAS. On donne les trois faces, et l'on pro-

pose de construire les trois angles dièdres. Soient ASB, BSC, CSA' (fig. 1) les trois faces données; rabattues sur le plan de l'une d'elles, qui sera celui de la figure. Les deux droites SA et SA' sont deux

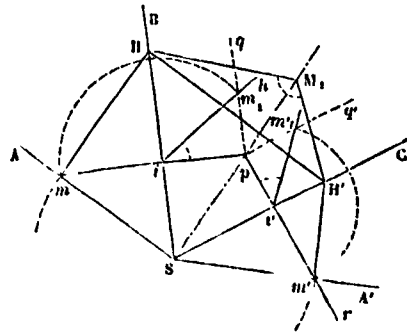


Fig. 1.

rabattements d'une même arête, et si l'on prend sur ces droites les longueurs égales $Sm = Sm'$, les points m et m' seront deux rabattements d'un même point M de l'arête opposée à la face BSC . Pour avoir les dièdres SB et SC , menons par les points m et m' des perpendiculaires mi et $m'i'$ aux droites SB et SC ; ces perpendiculaires se couperont en un point p , qui ne sera autre chose que la projection du point M sur la face BSC ; car on peut regarder les droites mp et $m'p$ comme les traces de deux plans menés par le point M perpendiculairement aux arêtes SB et SC ; leur intersection, qui joint le point M au point p , est donc perpendiculaire au plan de ces deux arêtes. Lorsque la face ASB est remise en place, les droites im et ip forment entre elles un angle qui est la mesure du dièdre SB ; pour obtenir cet angle, il suffit donc de rabattre le triangle dont les sommets sont M, p et i . Or, ce triangle est rectangle en p ; si on le fait tourner autour de pi pour le rabattre sur le plan de la figure, le côté Mp se rabattra suivant une droite pq perpendiculaire à pi , et le point M se rabattra en un point m_1 , de cette droite, qu'on obtiendra en décrivant un arc de cercle du point i comme centre avec im pour rayon. On joindra im_1 , et l'angle m_1ip sera la mesure du dièdre SB . Pour obtenir celle du dièdre SC on procédera d'une manière analogue en rabattant le triangle Mpi' ; pour cela on élèvera pq' perpendiculaire, sur pi' , et du point i' comme centre on décrira un arc de cercle avec $i'm'$ pour rayon; ce qui donnera le point m'_1 ; on joindra $i'm'_1$, et l'angle $pi'm'_1$ sera l'angle cherché.

Il reste à construire le troisième angle dièdre. On pourrait opérer de même, en plaçant les trois faces dans un autre ordre sur le plan où elles sont rabattues; mais on peut aussi achever la construction sur la même figure. Imaginons que par le point M on mène un plan perpendiculaire à l'arête SA ou SA' , sur laquelle ce point se trouve, et qui est opposé à la face BSC ; ce plan coupera les deux faces ASB et $A'SC$ suivant les droites mi et $m'H'$ respectivement perpendiculaires à SA et à SA' ; et par conséquent il coupera la troisième face BSC suivant la droite HH' . Tout se réduit donc à construire l'angle opposé à HH' dans le triangle déterminé par le plan coupant, et qui a pour sommets les points $H,$

M et H'. Or, si l'on rabat ce triangle sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de HH', le point M se rabattra à une distance de H égale à Hm, et à une distance de H' égale à H'm'; on obtiendra donc le point M₁, rabattement du point M, en décrivant deux arcs de cercle, l'un du point H comme centre avec le rayon Hm, l'autre du point H' comme centre avec le rayon H'm'. L'angle HM₁H' sera la mesure du troisième dièdre demandé.

Comme vérification, on peut remarquer que la droite HH', trace d'un plan perpendiculaire à la troisième arête (SA ou SA'), doit être perpendiculaire à Sp, projection de cette même arête. En tournant autour de HH', le point M décrit un cercle vertical, dont le plan a pour trace Sp; il doit donc se rabattre sur le prolongement de cette droite.

Si le point p tombait à gauche de SB, le dièdre qui a cette ligne pour arête serait obtus; mais cette circonstance ne modifierait pas la construction. Il en serait de même si le point p tombait à droite de SC, le dièdre SC serait obtus. Si le point p tombait dans l'angle opposé à BSC, les deux dièdres SB et SC seraient obtus à la fois.

Si le point p (fig. 2) tombait en dehors du cercle

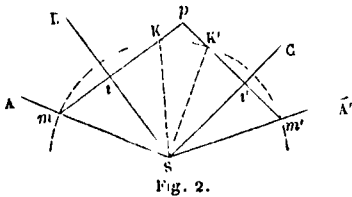


Fig. 2.

décrit du point S comme centre avec Sm ou Sm' pour rayon, la construction serait en défaut, car la ligne mi, moitié de la corde mK, serait moindre que ip, et le triangle ipM serait impossible. Mais il est évident que dans ce cas on aurait

$$BSC > BSK + CSK',$$

ou, ce qui revient au même,

$$BSC > BSA + CSA',$$

c'est-à-dire qu'une face serait plus grande que la somme des deux autres, et que, par conséquent, le trièdre serait impossible lui-même.

En général, toutes les fois qu'on se trouve dans un cas d'impossibilité, on en est averti par la construction même. Nous n'insisterons pas davantage sur cette discussion, qui peut être un exercice utile pour les commençants, mais qui est sans intérêt au point de vue des applications.

II. 2° CAS. On donne deux faces et l'angle dièdre compris; on demande la troisième face et les deux autres angles dièdres. On résout ce problème en exécutant, dans un autre ordre, les constructions du cas précédent. Soient ASB et BSC (fig. 1) les deux faces données. D'un point m, pris sur SA, on abaissera sur SB la perpendiculaire mi; au point i on fera, avec le prolongement ip de cette perpendiculaire, un angle hip égal à la mesure de l'angle dièdre donné. Du point i comme centre, avec im pour rayon, on décrira un arc de cercle, qui coupera la droite ih en un point m₁; de ce point on abaissera sur le prolongement de mi la perpendiculaire m₁p, ce qui fera connaître le point p. Cela fait, on abaissera du point p une perpendiculaire

pr sur SC; puis, du point S comme centre, avec Sm pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera pr en un point m'. On joindra Sm', et l'on aura en CSm' la troisième face du trièdre. On achèvera la construction comme dans le premier cas pour obtenir l'angle dièdre qui a pour arête SC, et celui qui a pour arête SA ou SA'.

Pourvu que les faces et l'angle dièdre donnés soient moindres chacun que 180°, la construction sera toujours possible.

III. 3° CAS. On donne deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles; on demande la troisième face et les deux autres angles dièdres. Soient ASB et BSC (fig. 3) les deux faces données; et suppo-

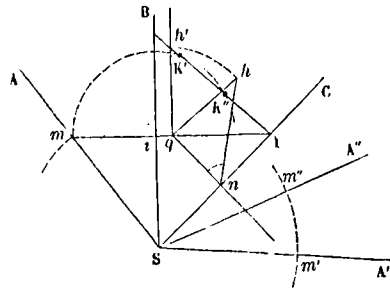


Fig. 3.

sons que l'on donne l'angle dièdre opposé à la première, lequel a pour arête SC. Par un point quelconque n de cette arête, concevons qu'on lui mène un plan perpendiculaire; la trace de ce plan sur le plan de BSC qui est supposé celui de la figure, sera une droite nq perpendiculaire à SC. Si, par un point quelconque h de cette droite, on élève une perpendiculaire au plan BSC, elle percera le plan de la troisième face en un point que nous désignerons par I; et si l'on conçoit qu'on joigne ce point au point n, on formera un triangle hqn, rectangle en q, et dans lequel l'angle en n mesurera le dièdre qui a pour arête SC. Or, ce dièdre est donné; on peut donc construire le triangle dont il s'agit, ou du moins son rabattement hnq. Supposons maintenant que par la perpendiculaire Hq on mène un plan perpendiculaire à l'arête SB; sa trace sur le plan de la figure sera une droite mqI, perpendiculaire à SB. Ce même plan coupera le plan de la troisième face suivant une droite passant par les points H et I. Si l'on rabat le plan HqI en le faisant tourner autour de qI, le point H viendra en h', sur une perpendiculaire à qI, et à une distance du point q égale à qh; et si l'on joint Ih' on aura le rabattement de l'intersection du plan coupant HqI avec le plan de la troisième face. D'ailleurs si l'on relève la face ASB pour reformer l'angle trièdre, le point m appartenant à la fois au plan coupant puisqu'il est sur qI, et au plan de la troisième face puisqu'il est sur l'arête SA, ce point m viendra coïncider avec un point de la droite HI, intersection de ces deux plans, après avoir décrit un arc de cercle dont mI est la projection et dont i est le centre. Pour obtenir la position que prendra le point m dans le rabattement, il suffit donc de décrire, du point i comme centre, avec im pour rayon, un arc de cercle qui coupera la droite Ih' en deux points K' et K''. Ces

de la face de droite devra être tangent à ce cône ; et son intersection avec la face de gauche, c'est-à-dire l'arête opposée à BSC, devra être tangente à la base de ce cône, située dans la face de gauche. Il est facile de déduire de là les éléments inconnus du trièdre. En effet, dans le rabattement du plan dont la trace est *cig*, l'axe du cône se rabattra suivant la droite *cP* perpendiculaire à *iG* ; et si, par le point *c*, on mène une droite *cG* faisant avec *cP* un angle égal au complément du dièdre opposé à BSC, ce sera une génératrice du cône ; par conséquent *PG* sera le rayon de sa base. Supposons maintenant que l'on rabatte la face de gauche en la faisant tourner autour de *SB* ; les points *P* et *G* se rabattront sur le prolongement de *ci* en *p* et en *g*. La base du cône rabattue sera donc le cercle qui a pour centre *p* et pour rayon *pg*. Or, la troisième arête doit être tangente à cette base ; on obtiendra donc son rabattement en menant du point *S* une tangente *SA* au cercle *pg*. La face de gauche sera ainsi rabattue en *ASB*. Pour obtenir la face de droite, on remarquera que, si on la rabat en la faisant tourner autour de *SC*, le point de contact *K* de la base du cône avec l'arête *SA* se rabattra sur l'arc de cercle décrit du point *S* comme centre avec *SK* pour rayon ; d'ailleurs la distance de ce point *K* au sommet du cône étant égale à la génératrice *cG*, ce point *K* se rabattra sur un arc de cercle décrit du point *c* comme centre avec *cG* pour rayon. Soit *K'* le point de rencontre de ces deux arcs, on joindra *SK'*, et l'on aura en *A'SC* le rabattement de la face de droite. Connaissant ainsi les trois faces, on construira, comme dans le premier cas, l'angle dièdre qui a pour arête *SC*.

On peut remarquer que du point *S* on peut mener deux tangentes au cercle *pg* ; mais c'est la plus éloignée de *SB* qui convient ici à la question. Le contraire aurait lieu si l'angle dièdre opposé à BSC était obtus au lieu d'être aigu comme nous l'avons supposé.

Il peut arriver que le cercle *pg* coupe l'arête *SB* ; dans ce cas les deux tangentes menées du point *S* à ce cercle répondent toutes deux au problème, qui admet alors deux solutions. Ces deux solutions deviennent symétriques lorsque l'angle dièdre *SB* est droit et que dès lors le point *p* tombe sur l'arête *SB* elle-même. Si la distance du centre *p* au sommet *S* était moindre que le rayon *pg*, le point *S* serait intérieur au cercle de base du cône ; on ne pourrait plus mener suivant *SC* un plan tangent à ce cône, et le problème serait impossible.

VII. 6^e CAS. On donne les trois angles dièdres. Plaçons l'arête *SO* de l'un des dièdres donnés (fig. 5) dans le plan vertical, perpendiculairement à la ligne de terre *XY*. Supposons que *OX* et *OH* soient les traces horizontales des deux faces qui comprennent le dièdre *SO*. Le problème consiste à mener par le point *S* un plan qui fasse avec les deux faces dont il s'agit des angles égaux aux deux autres angles dièdres donnés. Il est commode de mener d'abord ce plan par le point *O*, et de mener ensuite un plan parallèle par le point *S*.

Considérons un cône de révolution ayant pour axe la droite *Oa* perpendiculaire à la face dont la trace est *OX*, pour sommet le point *O*, et des génératrices faisant avec l'axe un angle égal au complément du second angle dièdre donné. La droite *Og*

faisant avec *Oa* ce complément sera une génératrice de ce cône. Le plan que nous nous proposons de mener par le point *O*, et que nous désignerons par *P* pour abrégé le discours, devra être tangent à ce

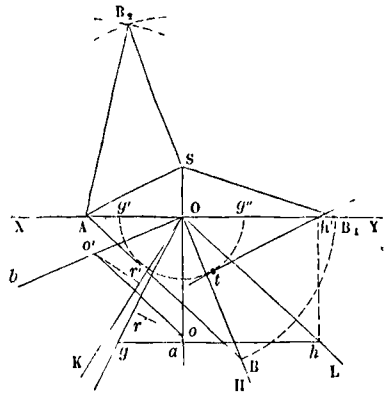


Fig. 5.

cône. — Considérons un second cône ayant pour sommet le point *O*, pour axe la droite *Ob* perpendiculaire à la face dont la trace est *OH*, et des génératrices faisant avec l'axe un angle égal au complément du troisième angle dièdre donné. La droite *OK* faisant avec *OB* ce complément, sera une génératrice de ce second cône. Le plan *P* devra être tangent aussi à ce cône.

Mais, comme l'a indiqué Hachette, on peut substituer à ces deux cônes deux sphères qui leur soient inscrites ; le plan *P* devant être tangent aux deux cônes, devra aussi être tangent aux deux sphères. Or, on peut s'arranger de manière que ces deux sphères aient le même rayon ; tout revient à trouver sur les axes *Oa* et *Ob* des deux cônes, deux points *o* et *o'* tels, que les perpendiculaires *or* et *o'r'* abaissées de ces points sur les génératrices *Og* et *OK* soient égales, problème élémentaire très-facile à résoudre. Dès lors le plan *P* devant être tangent à deux sphères égales, ayant leurs centres dans le plan horizontal, sa trace horizontale sera parallèle à la droite *oo'* qui joint les centres des deux sphères. Menant donc par le point *O* une parallèle *OL* à *oo'*, on aura la trace horizontale du plan *P*. Il faut trouver sa trace verticale. Pour cela, menons un plan perpendiculaire à l'axe du premier cône ; soit *gh* la trace horizontale de ce plan. Il coupera le cône suivant un cercle ayant pour rayon *ag*, et qui se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical en *g'a'g''*. Il coupera le plan *P* tangent au cône, suivant une droite ayant pour projection horizontale *gh*, et pour trace horizontale le point *h* où *gh* rencontre la trace horizontale *OL* du plan *P*. Cette droite, tangente à la section du cône, se projettera sur le plan vertical suivant la droite *h't*, tangente au cercle *g'a'g''*. Et puisque le plan vertical *gh* est parallèle au plan vertical de projection, la trace verticale du plan *P* sera parallèle à *h't*. On l'obtiendrait donc en menant par le point *O* une parallèle à *h't*. Afin d'éviter la confusion, nous nous dispenserons de tirer cette ligne. Rien de plus facile maintenant que de mener par le point *S* un plan parallèle au plan *P*. On mènera *SA* parallèle à *h't*, puis *AB* parallèle à *OL* ;

les droites SA et AB seront les traces du plan développé, troisième face de l'angle trièdre.

Il reste à développer les trois faces sur un même plan, qui sera ici le plan vertical de projection. La face ASO est déjà dans ce plan. Du point O comme centre avec OB₁ pour rayon on décrira un arc de cercle qui donnera le point B₁; on joindra SB₁ et l'on aura en OSB₁ la seconde face rabattue.

Pour rabattre la troisième, on fera tourner autour de AS le triangle qui a pour sommets les points A, S et B. Le point B se rabattra en B₂, à une distance de A égale à AB, et à une distance de S égale à SB₁; on obtiendra donc le point B₂ par la rencontre de deux arcs de cercles décrits des points A et S avec AB et SB₁ pour rayon; et l'on aura en ASB₂ le rabattement de la troisième face.

Si les angles que le plan P doit faire avec les faces dont les traces sont OX et OH étaient obtus, l'angle des génératrices de chaque cône avec l'axe devrait être égal à l'excès de l'angle dièdre correspondant sur 90°; et la tangente Mt devrait être menée au-dessus de la ligne de terre, au lieu d'être menée au-dessous. Le point A, au lieu d'être situé à gauche du point O, serait situé à droite; le point B₂ serait au contraire à gauche. Les constructions et le rabattement s'opéreraient d'ailleurs de la même manière.

Si l'angle αOg était plus grand que l'angle αOh, la trace OL du plan P se trouverait inférieure au premier cône, et la construction deviendrait impossible.

Nous n'insisterons pas sur la discussion de cette construction plus curieuse que pratique; quand on se trouvera dans un cas d'impossibilité, on en sera toujours averti par la construction elle-même.

ANNEAU DE SATURNE, sorte de satellite, de

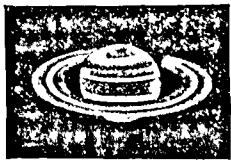


Fig. 1.

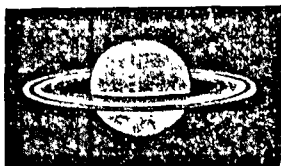


Fig. 2.

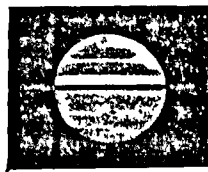


Fig. 3.

forme annulaire, qui environne Saturne sans le toucher, tourne autour du même axe, et accompagne la planète dans son mouvement autour du soleil. Cet anneau est un corps opaque, circulaire, très-mince, placé à peu près dans le plan de l'équateur de Saturne. La présence de cet anneau donne à la planète les apparences les plus singulières. A certaines époques l'anneau apparaît sous la forme d'une ellipse dont le petit axe atteint et dépasse même le diamètre de la planète, en sorte qu'on n'aperçoit qu'une ellipse sur laquelle le disque de Sa-

turne ne fait point saillie; c'est ce que montre la figure 1. A d'autres époques, c'est au contraire l'an-

neau qui fait saillie de chaque côté de la planète en figurant deux espèces d'anses, comme le montre la figure 2; c'est l'aspect le plus ordinaire. Quelquefois, l'anneau étant vu par sa tranche, comme dans la figure 3, ne paraît plus qu'une simple ligne droite qui dépasse le disque de part et d'autre. Enfin il peut arriver que le plan de l'anneau, passant entre le soleil et la terre, ne nous présente que son côté obscur et devienne invisible pour nous; auquel cas le disque de Saturne paraît un cercle entièrement isolé, sur lequel l'anneau ne se manifeste que par son ombre portée. Ces apparences si variables et sans analogie dans notre système planétaire ont été pendant quarante ans une énigme pour les astronomes. C'est Huyghens qui le premier donna, en 1659, l'explication de cette diversité d'aspects.

L'anneau de Saturne est incliné de $28^{\circ} \frac{1}{2}$ sur le plan de l'écliptique; il tourne d'occident en orient autour de l'axe de rotation de la planète et fait un tour entier en $10^{\text{h}} 32^{\text{m}} 15^{\text{s}}$.

L'anneau de Saturne n'est pas simple; il se compose réellement de plusieurs anneaux concentriques, séparés par des intervalles qu'on peut apercevoir avec de forts instruments d'optique, principalement du côté des anses. On n'avait d'abord distingué que deux anneaux; le rayon intérieur de l'un est représenté par 1,66, celui de Saturne étant 1; et le rayon extérieur de l'autre est représenté par 2,37. Mais, en 1850, M. Bond a découvert un troisième anneau, intérieur aux deux premiers et plus obscur. En outre les deux autres anneaux semblent quelquefois se partager temporairement en plusieurs anneaux concentriques. Ces circonstances font supposer que l'anneau est formé d'une matière fluide.

Laplace, dans son *Exposition du système du monde*, a montré comment une nébuleuse, en se condensant par ses couches extérieures, a pu, sous l'influence de la force centrifuge, donner naissance à un anneau animé à peu près du même mouvement de rotation que la nébuleuse elle-même; et comment cet anneau a pu se diviser plus tard en fragments qui sont devenus des planètes ou des satellites. L'anneau de Saturne serait un exemple de ce mode de formation, pris ainsi sur le fait.

ANNÉE SIDÉRALE, intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à une même étoile. Sa valeur, déduite d'observations faites à de longs intervalles, a été trouvée de $365^{\text{d}} 2563835$. Ce nombre est exprimé en jours moyens; en temps sidéral, la même durée comprendrait un jour de plus (*Voy. TEMPS MOYENS*), et l'on aurait $366^{\text{d}} 2563835$.

ANNÉE TROPIQUE, intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à une même équinoxe. Sa valeur moyennante, déduite d'observations faites à de grands intervalles, a été trouvée de $365^{\text{d}} 242217$. Dans cette évaluation on ne tient compte que de la PRÉCESSION DES ÉQUINOXES (*Voy. ce mot*), mais non de la NUTATION (*Voy. ce mot*), qui a pour effet de rendre l'année tropique tantôt un peu plus courte, tantôt un peu plus longue que ne l'indique le nombre ci-dessus.

Par l'effet de la précession, l'année tropique est un peu plus courte que l'année sidérale.

La durée de l'année tropique est exprimée plus haut en jours moyens; si on voulait l'exprimer en

jours sidéraux, il faudrait ajouter un jour de plus (Voy. TEMPS MOYENS), et l'on aurait 366^{jours},242217.

L'année tropique est aujourd'hui de 11^{mois} plus courte que du temps d'Hipparque; ce changement est dû aux inégalités séculaires.

ANNELETS, petits filets, au nombre de quatre, séparés par un refouillement égal à leur hauteur, et qui terminent par le bas le chapiteau de l'ordre dorique grec. Leur saillie diminue de l'un à l'autre, depuis l'annelet supérieur dont la saillie est de 2 parties $\frac{2}{3}$ du module, jusqu'à l'annelet inférieur

dont la saillie n'est que de $\frac{2}{3}$ de partie.

ANNUITÉ, somme payée annuellement, soit pour éteindre une dette (Voy. AMORTISSEMENT), soit pour acquérir une rente viagère à partir d'une époque déterminée (Voy. RENTES VIAGÈRES), soit pour constituer simplement un certain capital à cette époque. C'est à ce dernier point de vue que la question sera traitée dans cet article.

Soit a la somme placée annuellement, n le nombre d'années formant la durée totale du placement, t le taux de l'intérêt, r le centième de ce taux, et A le capital produit au bout de n années. Il y a deux cas à distinguer, suivant que l'annuité doit être payée au commencement ou à la fin de chaque année.

Dans le premier cas, la somme a , payée au commencement de la première année, vaudra, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ (Voy. INTÉRÊTS COMPOSÉS)... $a(1+r)^n$; la somme a , payée au commencement de la seconde année, vaudra à la fin de la $n^{\text{ième}}$ $a(1+r)^{n-1}$; la somme a , payée au commencement de la troisième année, vaudra..... $a(1+r)^{n-2}$; et ainsi de suite; enfin la somme a , payée au commencement de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudra à la fin de cette même année..... $a(1+r)$.

Les quantités ainsi obtenues, rangées en ordre inverse, forment une progression géométrique de n termes dont le premier terme est $a(1+r)$ et la raison $(1+r)$; la somme de ces termes, qui n'est autre chose que la valeur du capital A , aura donc pour expression

$$A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{(1+r) - 1} = \frac{a[(1+r)^{n+1} - 1](1+r)}{r} \quad [1]$$

Dans le second cas, où chaque somme a n'est payée qu'à la fin de l'année, les versements successifs produisent à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année des capitaux qui ne diffèrent de ceux écrits plus haut que parce qu'ils sont divisés par $1+r$; le capital définitif total est donc égal lui-même à celui qu'exprime la formule [1], divisée par $1+r$; et l'on a

$$A = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}, \quad [2]$$

ce qu'on établirait d'ailleurs directement comme on l'a fait pour la formule [1].

Pour se servir des formules [1] ou [2], on calcule d'abord par logarithmes la quantité

$$y = (1+r)^n, \quad [3]$$

d'où $\log y = n \log (1+r)$. On a ensuite, s'il s'agit de la formule [1] :

$$A = \frac{a(y-1)(1+r)}{r}; \quad [4]$$

et s'il s'agit de la formule [2].

$$A = \frac{a(y-1)}{r}, \quad [5]$$

expressions qui se calculeront elles-mêmes par logarithmes.

Si, par exemple, on a $a=1000$, $r=0,05$ et $n=21$, on trouvera d'abord

$$\log y = 21 \log 1,05 = 0,4449753,$$

d'où $y = 2,78596$.

On trouvera ensuite, si l'on est dans le cas de la formule [4],

$$A = \frac{1000^r \cdot 1,78596 \cdot 1,05}{0,05} \text{ ou } A = 3750^r,52;$$

et si l'on est dans le cas de la formule [5],

$$A = \frac{1000^r \cdot 1,78596}{0,05} = 3571^r,92.$$

Si c'est l'annuité qui est inconnue, on calcule d'abord y par la formule [3]; on a ensuite, si l'on est dans le cas de la formule [4],

$$a = \frac{Ar}{(y-1)(1+r)}, \quad [6]$$

et, si l'on est dans le cas de la formule [5],

$$a = \frac{Ar}{y-1}. \quad [7]$$

Si l'on demande, par exemple, quelle annuité il faut payer pendant 10 ans au commencement de chaque année pour constituer un capital de 60000 fr.

l'intérêt étant $4\frac{1}{2}$ pour 100, on aura d'abord par la formule [3]

$$\log y = 10 \log 1,045 = 0,1911030,$$

d'où $y = 1,55297$.

On aura ensuite par la formule [6]

$$a = \frac{60000^r \cdot 0,045}{0,55297 \cdot 1,045} \text{ ou } a = 4694^r,03.$$

Si l'inconnue est le nombre d'années n , on tirera d'abord des formules [4] ou [5] la valeur de y ; la formule [3] donnera ensuite

$$n = \frac{\log y}{\log (1+r)}. \quad [8]$$

Si l'inconnue est le taux de l'intérêt, les formules [1] ou [2] ne peuvent être résolues que par tâtonnement. Mais ce dernier cas ne se présente pour ainsi dire jamais dans les applications.

Les intérêts, au lieu de se capitaliser par année, peuvent se capitaliser par semestre. Dans ce cas, a désignant toujours l'annuité, $\frac{1}{2}a$ sera la somme payée

à chaque semestre, et $\frac{1}{2}r$ sera le centième de l'intérêt de 100 fr. pour un semestre; si N désigne alors

le nombre des semestres formant la durée totale du placement, la formule [2] par exemple deviendra, en y remplaçant a par $\frac{1}{2}a$, r par $\frac{1}{2}r$ et n par N ,

$$A = \frac{\frac{1}{2}a \left[\left(1 + \frac{1}{2}r\right)^N - 1 \right]}{\frac{1}{2}r} = \frac{a \left[\left(1 + \frac{1}{2}r\right)^N - 1 \right]}{r}, \quad [9]$$

et l'on en tire

$$a = \frac{Ar}{\left(1 + \frac{1}{2}r\right)^N - 1}. \quad [10]$$

Comme application de cette formule, nous traiterons un problème qui se rencontre dans les ques-

tions relatives au CRÉDIT FONCIER (Voy. ce mot); et nous formerons le *tableau des annuités à payer pour produire un capital définitif de 100 fr., au bout de 20 ans, de 21 ans, de 22 ans, et ainsi de suite jusqu'à 50 ans, les intérêts se capitalisant par semestre, et le taux annuel étant $\frac{1}{4}$ pour 100.*

Il faudra dans la formule [10] faire $A = 100$ fr., $r = 0,0425$, et $N = 40, 42, 44$, et ainsi de suite jusqu'à 100. On trouvera :

Nombre d'années.	Annuités. fr.	Nombre d'années.	Annuités. fr.
20.....	3,222374	36.....	1,198560
21.....	2,996114	37.....	1,136382
22.....	2,791676	38.....	1,077716
23.....	2,606206	39.....	1,022652
24.....	2,437322	40.....	0,970916
25.....	2,283028	41.....	0,922254
26.....	2,141628	42.....	0,876440
27.....	2,011682	43.....	0,833270
28.....	1,891956	44.....	0,792554
29.....	1,781382	45.....	0,754124
30.....	1,679036	46.....	0,717820
31.....	1,584116	47.....	0,683504
32.....	1,495916	48.....	0,651044
33.....	1,413816	49.....	0,620320
34.....	1,337270	50.....	0,591220
35.....	1,265796		

Nous traiterons encore le problème suivant, qui trouve son application dans les calculs relatifs au Crédit foncier. *Quelle annuité faut-il payer pour produire au bout de 50 ans un capital définitif de 100 fr., les intérêts étant calculés au taux de 3',70 pour 100 et se capitalisant par semestre?*

Dans la formule [10] il faut remplacer A par 100 fr., r par 0',037 et N par 50×2 ou 100, ce qui donne

$$a = \frac{3',70}{(1,0185)^{100} - 1}$$

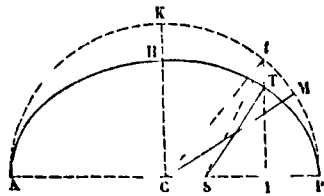
ou, en effectuant les calculs,

$$a = 0',704332,$$

à une demi-unité près du sixième ordre décimal.

On a aussi donné le nom d'*annuités* à des engagements émis par le Trésor à l'occasion d'un emprunt remboursable par portions à des époques fixes; ces engagements portaient intérêt, les uns à 6 pour 100, les autres à 4 pour 100.

ANOMALIE, distance angulaire d'une planète au périhélie. On distingue trois espèces d'anomalies.



Soit AHP l'orbite de la planète, P le périhélie et A l'aphélie; soit AKP une demi-circonférence décrite sur AP comme diamètre; soit C le centre de l'orbite, et S le foyer occupé par le soleil. En même temps que la planète parcourt son orbite d'un mouvement varié, on imagine une planète fictive parcourant dans le même temps le cercle AKP d'un mouvement uniforme. Soit, à un même instant, T la position de la planète, M la position correspondante de la planète fictive ou moyenne; enfin, soit f le point du cercle qui a la même abscisse CI que la planète; joignons TS, MC, fS et fC. L'angle TSI

formé par le rayon vecteur ST mené du soleil à la planète, avec la ligne SP menée du soleil au périhélie, sera ce qu'on appelle l'*anomalie vraie*. L'angle MCP formé par le rayon CM mené du centre à la planète fictive, avec le rayon CP mené au périhélie, sera l'*anomalie moyenne*. Enfin l'angle fCP sera l'*anomalie excentrique*.

L'anomalie moyenne est proportionnelle au temps écoulé depuis le passage de la planète au périhélie; on peut donc la regarder comme donnée, quand on connaît la durée de la révolution sidérale de la planète. On en déduit de la manière suivante l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie.

En vertu de la loi des aires, le secteur TSP est une fraction connue de l'aire de l'ellipse; mais le secteur MCP, en vertu de l'uniformité du mouvement de la planète fictive, est la même fraction de l'aire du cercle; il en résulte que ces deux secteurs sont dans le rapport du petit axe de l'ellipse au grand, ou, ce qui revient au même, dans le rapport de TI à fI. Mais, par une propriété connue de l'ellipse, les segments TIP et fIP sont dans le même rapport; et il en est évidemment de même des triangles TSI et fSI; d'où il suit que les secteurs TSP et fSP sont dans ce même rapport.

Il en résulte que les secteurs MCP et fSP sont équivalents. On a donc :

$$\text{sect MCP} = \text{sect fSP} = \text{sect fCP} - \text{triangle fCS.}$$

Or, si l'on prend pour unité de longueur le rayon CP, qu'on appelle e l'excentricité de l'ellipse, ou la longueur CS, m l'anomalie moyenne et u l'anomalie excentrique, on a :

$$\text{sect MCP} = \frac{1}{2} m, \quad \text{sect fCP} = \frac{1}{2} u,$$

$$\text{et triangle fCS} = \frac{1}{2} CS \cdot fI = \frac{1}{2} e \cdot \sin u.$$

Par conséquent il vient

$$\frac{1}{2} m = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} e \cdot \sin u$$

$$\text{ou} \quad m = u - e \sin u, \quad [1]$$

relation qui donnera u connaissant m .

On sait que dans l'ellipse le rayon vecteur a pour expression

$$p = a - \frac{cx}{a}.$$

En remplaçant ici a par l'unité, c par e , et x ou CI par $\cos fCI$ ou $\cos u$, on aura donc

$$p = 1 - e \cos u. \quad [2]$$

Enfin, en appelant v l'anomalie vraie, on a, dans le triangle TSI,

$$\cos v = \frac{SI}{ST} = \frac{CI - CS}{ST} = \frac{\cos u - e}{1 - e \sin u}.$$

formule qui peut être transformée en cette autre :

$$\tan \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{1}{2} u. \quad [3]$$

Lorsqu'on peut négliger les puissances de e supérieures à la troisième, le développement en série fournit pour l'anomalie excentrique et pour l'anomalie vraie les expressions suivantes, déduites des formules ci-dessus (Voy. le Cours d'astronomie de l'École polytechnique) :

$$u = m + \left(e - \frac{1}{8} e^3 \right) \sin m + \frac{1}{2} e^2 \sin 2m + \frac{3}{8} e^3 \sin 3m, \quad [4]$$

$$v = m + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 \right) \sin m + \frac{5}{4} e^2 \sin 2m + \frac{13}{12} e^3 \sin 3m \quad [5]$$

La différence $v - m$ est ce qu'on nomme l'équation du centre.

On obtient également l'expression du rayon vecteur en fonction de l'anomalie moyenne :

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) - \left(e - \frac{3}{8} e^3 \right) \cos m - \frac{1}{2} e^2 \cos 2m - \frac{3}{8} e^3 \cos 3m \quad [6]$$

Le carré du rayon vecteur, leurs inverses, et le logarithme de ρ , s'expriment par des formules analogues.

ANOMALISTIQUE, qui se rapporte à L'ANOMALIE (Voy. ce mot). La durée de la révolution anomalistique d'une planète est le temps qu'elle emploie à revenir au périhélie.

ANSE DE PANIER, courbe analogue à une demi-ellipse, et formée d'un nombre impair d'arcs de cercles de rayons distincts qui se raccordent successivement; on la nomme pour cette raison *courbe à plusieurs centres*; elle est particulièrement appliquée au tracé des arches des ponts. Il y a des anses de panier à 3 centres; à 5 centres, à 7, à 9 et jusqu'à 11 centres. On fait usage de diverses méthodes pour tracer l'anse de panier. La plus répandue est celle qui a été imaginée par M. Michal, inspecteur général des ponts et chaussées. Supposons d'abord qu'il s'agisse de la courbe à 3 centres. Soit AA' (fig. 1)

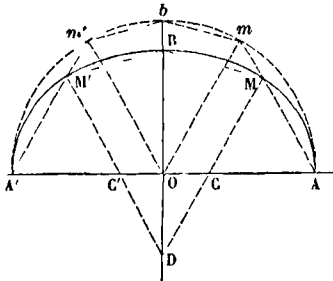


Fig. 1.

l'ouverture de l'anse de panier, et OB sa montée, qui remplacent le grand axe et le demi petit axe d'une ellipse. Sur AA' comme diamètre, on décrit une demi-circonférence AbA', que l'on divise en trois parties égales; soient m et m' les points de division. On joint Am , mb , bm' , $m'A'$. Par le point B on mène BM parallèle à bm , et terminé à sa rencontre avec Am en M ; on mène de même BM' parallèle à bm' , et terminé en M' à la rencontre de Am' . On tire mO et $m'O$; et par les points M et M' on mène à ces rayons des parallèles MD et $M'D$ qui se rencontreront sur le prolongement de BO , et qui couperont AA' aux points C et C' . Il résulte de la similitude des triangles OmA et CMA que CM est égal à CA ; par la même raison, $C'M'$ est égal à $C'A'$. La similitude des triangles bOm et BDM montre aussi que BD est égal à MD ; de même $M'D$ est égal à BD . D'ailleurs, à cause de la symétrie, on a $CA = C'A'$. Par conséquent, si des points C et C' comme centres avec CA pour rayon on décrit les arcs de cercle AM , et $A'M'$ et si du point D comme

centre avec BD pour rayon on décrit un troisième arc de cercle, il se raccordera en M et M' avec les deux premiers; et la courbe $AMBMA'$ sera la courbe demandée. Ce tracé donne un résultat satisfaisant toutes les fois que la montée OB n'est pas inférieure aux trois quarts de la demi-ouverture OA .

Supposons en second lieu qu'il s'agisse de la courbe à 5 centres. Sur l'ouverture AA' (fig. 2)

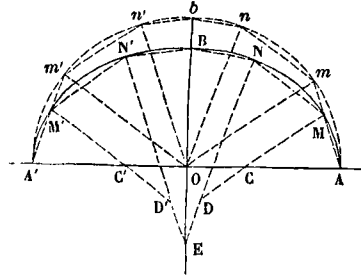


Fig. 2.

comme diamètre, on décrit encore une demi-circonférence AbA' ; mais on la divise en 5 parties égales aux points m , n , n' , m' . On joint Am , mn , nb , bn' , $n'm'$, $m'A'$, Om , On , On' , Om' . On mène BN parallèle à bn , et d'un point M , convenablement choisi sur Am , on mène MN parallèle à mn ; puis on tire NE parallèle à nO , et MD parallèle à mO ; on opère de même de l'autre côté de bE ; les points C , D , E , D' , C' sont les 5 centres qui servent à décrire l'anse de panier. En effet, par des similitudes évidentes, on reconnaît qu'on a $CM = CA$, $ND = MD$, $NE = BE$, et des égalités analogues de l'autre côté de l'axe de symétrie bE . Si donc on décrit 5 arcs de cercles, savoir : de C et de C' comme centres avec CA pour rayon, de D et de D' comme centres avec MD pour rayon, enfin de E comme centre avec BE pour rayon, ces arcs se raccorderont aux points M , N , N' , M' , et la courbe $AMNBm'N'm'A'$ sera la courbe demandée.

On voit que dans ce tracé le point M choisi sur Am demeure arbitraire, et que par conséquent le problème reste indéterminé. Pour faire disparaître l'indétermination, M. Michal considère l'ellipse qui aurait pour demi-axes les droites OA et OB . Si l'on imagine qu'on mène à cette ellipse une normale parallèle à la bissectrice de l'angle MCA , à cette normale correspondra un certain rayon de courbure. M. Michal prend ce rayon de courbure pour la valeur du rayon AC avec lequel est décrit le premier arc de cercle de l'anse de panier. Nous reviendrons tout à l'heure sur la manière de calculer ce rayon de courbure; sa valeur étant connue, on la portera de A en C , ce qui déterminera le point C ; par ce point on mène DM parallèle à Om , ce qui donnera le point M ; le reste du tracé s'achèvera comme nous l'avons expliqué ci-dessus.

L'anse de panier à 5 centres convient aux cas où la montée est comprise entre les $\frac{3}{4}$ et les $\frac{2}{3}$ de la demi-ouverture.

L'ouverture restant la même, si la montée diminue, il convient d'employer plus de 5 centres, afin de se rapprocher davantage de l'ellipse ayant même ouverture et même montée. Pour tracer la courbe à 7 centres, on décrit toujours une demi-circonfé-

rence sur l'ouverture prise comme diamètre, mais on la divise en 7 parties égales. Soient m, n, p (fig. 3) les points de division qui tombent à droite de l'axe de symétrie Ob . On joint Am, mn, np, pb ,

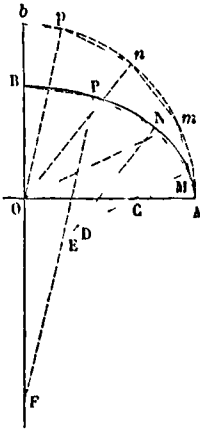


Fig. 3.

Om, On, Op . Par un point M convenablement choisi sur Am , on mène une parallèle à mn , et par un point N pris sur cette parallèle, on mène une parallèle à np ; elle rencontre en un certain point P la parallèle à pb menée par le point B . On mène MC parallèle à Om , ND parallèle à On , PF parallèle à Op ; les points C, D, E, F , et les symétriques des trois premiers, sont les 7 centres qui servent à tracer l'anse de panier. Il résulte, en effet, de similitudes évidentes que l'on a

$$MC = CA, ND = DM, PE = EN, BF = FP.$$

Si donc on décrit l'arc AM du point C , l'arc MN du point D , l'arc NP du point E , l'arc PB du point F , et les symétriques de l'autre côté de OB , ces arcs se raccorderont successivement et formeront la courbe demandée.

On voit qu'il y a ici deux points M et N qui restent arbitraires, pourvu qu'ils soient pris l'un sur Am et le second sur la parallèle à mn menés par le point M . Pour faire disparaître l'indétermination, M. Michal se sert encore de l'ellipse qui aurait pour demi-axes OA et OB . Concevons qu'on lui mène deux normales, l'une parallèle à la bissectrice de l'angle MCA , l'autre à la bissectrice de l'angle NDM ; à ces normales correspondent deux rayons de courbure. M. Michal prend le premier pour la valeur de AC et le second pour la valeur de MD . Les points C et D se trouvant ainsi déterminés, on mène par le point D une parallèle à On , qui détermine le point N ; le reste s'achève comme nous l'avons dit ci-dessus.

La courbe à 7 centres s'emploie depuis une montée égale aux $\frac{2}{3}$ de la demi-ouverture, jusqu'à une montée égale à la moitié de cette demi-ouverture. Pour une montée moindre, on fait usage de la courbe à 9 centres, qui se trace comme la courbe à 7 centres, avec cette différence que, pour faire disparaître l'indétermination, il faut se donner les 3 premiers rayons. On suppose que, dans l'ellipse qui aurait pour demi-axes la demi-ouverture et la montée, on ait mené des normales parallèles aux bissectrices des angles consécutifs que ces rayons forment entre eux, et on calcule les rayons de courbure corres-

pondants à ces normales; ce sont les valeurs des trois rayons demandés.

On a calculé des tables qui, pour les diverses valeurs du rapport entre la montée et la demi-ouverture, donnent la valeur du premier rayon AC (fig. 2) s'il s'agit de la courbe à 5 centres; la valeur des deux premiers rayons AC et MD (fig. 3) s'il s'agit de la courbe à 7 centres; les valeurs des trois premiers rayons s'il s'agit de la courbe à 9 centres. Voici comment ces tables ont été calculées. On sait que l'expression générale du rayon de courbure est

$$\rho = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad [1]$$

Dans l'ellipse dont l'équation est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \quad [2]$$

on a

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad [3]$$

d'où l'on tire

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y - xy'}{y^2} \right),$$

ou, en mettant pour x sa valeur tirée de [3] et réduisant

$$y'' = -\frac{b^2 + a^2 y'^2}{a^2 y}. \quad [4]$$

Mais si l'on substitue dans [2] cette valeur de x tirée de [3], on en déduit

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 y'^2}}.$$

Par suite

$$y'' = -\frac{(b^2 + a^2 y'^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2}. \quad [5]$$

L'expression du rayon de courbure devient donc

$$\rho = \frac{a^2 b^2 (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(b^2 + a^2 y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad [6]$$

Soit maintenant k la tangente de l'angle que fait la normale avec le grand axe, et m le rapport de la montée à la demi-ouverture; on aura

$$y' = -\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad b = am.$$

Substituant ces valeurs dans [6] et réduisant, on obtient enfin

$$\rho = am^3 \left(\frac{1+k^2}{1+m^2 k^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad [7]$$

Soit n le nombre des centres de l'anse de panier; on fera successivement

$$k = \tan \frac{\pi}{2n}, \quad k = \tan \frac{3\pi}{2n}, \quad k = \tan \frac{5\pi}{2n}, \quad \text{etc.},$$

et l'expression [7] donnera la valeur des rayons qu'il faut connaître. C'est ainsi que l'on a formé le tableau suivant, dans lequel r_1, r_2, r_3 désignent les rayons dans l'ordre où ils doivent être employés, rapportés à une demi-ouverture égale à l'unité.

COURBE A 5 CENTRES.

Valeurs de m .	Valeurs de r .	
0,72	0,556	} $k = \tan 18^\circ$.
0,70	0,530	
0,68	0,504	
0,66	0,477	
0,64	0,450	
0,62	0,423	
0,60	0,396	

COURBE A 7 CENTRES.

Valeurs de m.	Valeurs de r ₁ .	Valeurs de r ₂ .	
0,66	0,455	0,630	$k = \text{tang } \frac{\pi}{14}$ = tang (42° 51' 25" , 7), pour la colonne de r ₁ .
0,64	0,431	0,604	
0,62	0,406	0,578	
0,60	0,383	0,551	$k = \text{tang } \frac{3\pi}{14}$ = tang (38° 34' 17" , 1), pour la colonne de r ₂ .
0,58	0,359	0,525	
0,56	0,336	0,498	
0,54	0,312	0,472	
0,52	0,289	0,445	
0,50	0,265	0,419	

COURBE A 9 CENTRES.

Valeurs de m.	Valeurs de r ₁ .	Valeurs de r ₂ .	Valeurs de r ₃ .	
0,50	0,259	0,341	0,597	$k = \text{tang } 10^\circ$ pour r ₁
0,48	0,240	0,318	0,556	$k = \text{tang } 30^\circ - r_2$
0,46	0,222	0,296	0,535	$k = \text{tang } 50^\circ - r_3$
0,44	0,203	0,276	0,504	
0,42	0,185	0,251	0,474	
0,40	0,166	0,228	0,443	

(Nous avons cru devoir insister sur les valeurs de k qui donnent les nombres de la table, parce qu'on trouve à cet égard des indications fausses dans des ouvrages d'ailleurs estimés.)

M. Lerouge, ingénieur en chef des ponts et chaussées, a proposé un autre moyen de faire disparaître l'indétermination que nous avons signalée dans le tracé de l'anse de panier à plus de 3 centres : c'est de faire croître les rayons en progression arithmétique.

Concevons la courbe AB (fig. 4) tracée d'après ce système; les différences CD; DE, EF entre les rayons successifs seront égales; désignons par x le premier rayon AC et par y la différence CD; soit $\alpha = \frac{\pi}{n}$ l'angle que fait MD avec OA, l'angle de NE avec la droite OA sera 2α , l'angle de PF avec la même droite sera 3α , et ainsi de suite. Soit enfin a la demi-ouverture et b la montée. Projetez sur OA

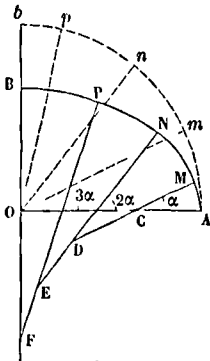


Fig. 4.

la ligne brisée CDEF, nous aurons :

$$y \cos \alpha + y \cos 2 \alpha + y \cos 3 \alpha \dots + y \cos \frac{(n-1) \alpha}{2} \\ = a - x,$$

et, en désignant par C la somme $\cos \alpha + \cos 2 \alpha + \cos 3 \alpha + \dots$, nous pourrions écrire :

$$Cy = a - x. \quad [8]$$

Projetez sur BF la même ligne brisée, il viendra

$$y \sin \alpha + y \sin 2 \alpha + y \sin 3 \alpha \dots + y \sin \frac{(n-1) \alpha}{2} \\ = \text{FB} - \text{OB} \\ = x + \frac{n-1}{2} y - b,$$

et, en désignant par S la somme $\sin \alpha + \sin 2 \alpha + \sin 3 \alpha + \dots$, nous écrirons :

$$Sy = x + \frac{n-1}{2} y - b. \quad [9]$$

Les équations [8] et [9], qui sont du premier degré en x et y , donneront aisément ces deux inconnues; on en tire

$$y = \frac{a-b}{S+C-\frac{1}{2}(n-1)} \quad \text{et} \quad x = a - Cy. \quad [10]$$

On connaît dans chaque cas particulier les longueurs a et b ; l'angle α est égal à $\frac{\pi}{n}$, n désignant le nombre des centres; on calculera aisément S et C, et par suite x et y ; les rayons successifs seront :

$$x, x + y, x + 2y, x + 3y, \dots x + \frac{n-1}{2} y.$$

M. Lerouge a calculé des tables des valeurs de x et de y pour des valeurs successives du rapport m entre la montée b et la demi-ouverture.

COURBES A 5 CENTRES.

Valeurs de m.	Valeurs du 1 ^{er} rayon x.	Valeurs de la différence y.	Valeurs de m.	Valeurs du 1 ^{er} rayon x.	Valeurs de la différence y.
0,70	0,245	0,228	0,86	0,381	0,107
0,72	0,262	0,213	0,88	0,398	0,091
0,74	0,279	0,198	0,90	0,416	0,077
0,76	0,296	0,183	0,92	0,432	0,061
0,78	0,313	0,167	0,94	0,449	0,046
0,80	0,330	0,152	0,96	0,466	0,030
0,82	0,347	0,137	0,98	0,483	0,015
0,84	0,364	0,122			

COURBES A 7 CENTRES.

Valeurs de m.	Premier rayon x.	Différence y.	Valeurs de m.	Premier rayon x.	Différence y.
0,66	0,1833	0,1813	0,84	0,3509	0,0853
0,68	0,2019	0,1706	0,86	0,3696	0,0747
0,70	0,2205	0,1600	0,88	0,3882	0,0640
0,72	0,2392	0,1493	0,90	0,4068	0,0533
0,74	0,2578	0,1386	0,92	0,4255	0,0427
0,76	0,2764	0,1280	0,94	0,4441	0,0320
0,78	0,2950	0,1173	0,96	0,4627	0,0213
0,80	0,3137	0,1067	0,98	0,4814	0,0107
0,82	0,3323	0,0960			

COURBES A 9 CENTRES.

Valeurs de m.	Premier rayon x.	Différence y.	Valeurs de m.	Premier rayon x.	Différence y.
0,64	0,1475	0,1481	0,82	0,3238	0,0741
0,66	0,1671	0,1399	0,84	0,3433	0,0659
0,68	0,1867	0,1317	0,86	0,3629	0,0576
0,70	0,2063	0,1235	0,88	0,3825	0,0494
0,72	0,2258	0,1152	0,90	0,4021	0,0412
0,74	0,2454	0,1070	0,92	0,4217	0,0329
0,76	0,2650	0,0988	0,94	0,4413	0,0247
0,78	0,2846	0,0905	0,96	0,4608	0,0165
0,80	0,3042	0,0823	0,98	0,4804	0,0082

On a fait usage pour le tracé des anses de panier de plusieurs autres méthodes aujourd'hui peu usitées. Nous nous bornerons à indiquer la suivante, qui a été employée au pont de Neuilly. Ayant

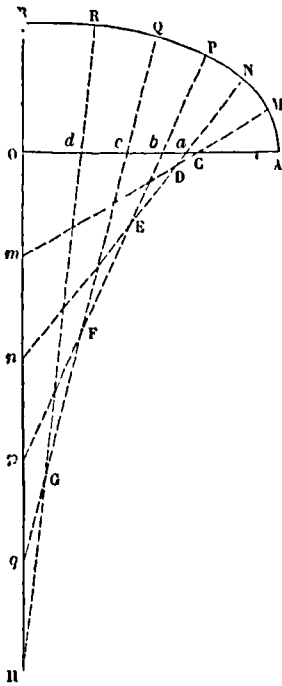


Fig. 5.

choisi arbitrairement sur OA (fig. 5) un point C (nous verrons tout à l'heure comment on peut le déterminer) on divise OC en 15 parties égales, et l'on prend successivement $Ca = 1$ partie, $ab = 2$ parties, $bc = 3$ parties, $cd = 4$ parties, $dO = 5$ parties. Sur le prolongement de BO on porte une longueur OH égale à 3 fois OC, et on la divise en 5 parties égales aux points m, n, p, q . On joint successivement les droites mC, na, pb, qc, Hd ; soient C, D, E, F, G, les points d'intersection des droites successives.

On décrit l'arc AM du point C, l'arc MN du point D, l'arc NP, du point E, l'arc PQ du point F, l'arc QR du point G, l'arc RB du point H; et en faisant une construction symétrique à gauche de OB on obtient une anse de panier à 11 centres. Si le point C est convenablement choisi, la distance OB résultant de la construction devra être précisément égale à la montée b . Mais, comme cela n'arrivera pas en général, voici comment on déterminera la véritable valeur de OC. Soit x cette valeur; en l'employant à la place de OC on formera au-dessous de OA une figure semblable à la figure OCH, et les lignes homologues des deux figures seront dans le rapport de x à OC. Pour abrégger, représentons OC par m ; soit S le développement de la ligne brisée CDEFGH dans l'ancienne figure, et S' le développement de la ligne brisée analogue dans la nouvelle. On devra avoir, en appelant toujours a la demi-ouverture,

$$S' + a - x = 3x + b. \quad [1]$$

Mais, à cause de la similitude, on aura aussi

$$S : S = x : m, \text{ d'où } S' = \frac{Sx}{m}.$$

Par conséquent, en substituant dans [1]

$$\frac{Sx}{m} + a - x = 3x + b, \text{ d'où } x = \frac{m(a-b)}{4m-S},$$

on trouve que le rapport de S à m est à très-peu près $3 \frac{1}{4}$ ou $\frac{13}{4}$; en mettant pour S la valeur $\frac{13}{4} m$,

et divisant par m , on obtient

$$x = \frac{4}{3} (a - b).$$

Ce tracé ne convient qu'à des anses de panier très-surbaissées.

ANTIPODES (du grec *ἀντί*, contre, et *ποῦς, ποδός*, pied), points situés aux deux extrémités d'un même diamètre de la sphère terrestre. Les latitudes de ces points sont égales et de sens contraires; leurs longitudes diffèrent de 180° . La durée du jour pour l'un de ces points est égale à la durée de la nuit pour l'autre, et *vice versa*; il est midi pour l'un lorsqu'il est minuit pour l'autre. Les saisons y sont également opposées: l'été pour l'un correspond à l'hiver pour l'autre, etc. L'existence des antipodes, démontrée d'une manière définitive par le voyage de Magellan (1519-1521), a été longtemps contestée; il répugnait à beaucoup d'esprits d'admettre qu'il pût y avoir des peuples marchant la tête en bas. L'erreur provenait du sens trop absolu attaché aux expressions *haut* et *bas*; pour tous les peuples le *bas* c'est le côté de la terre, vers laquelle les objets sont attirés par la pesanteur, le *haut* c'est le côté du ciel; ainsi deux peuples antipodes ont les pieds opposés, et marchent cependant tous deux la tête en haut. L'antipode de Paris est un point voisin de l'île *Antipode* située dans l'océan Pacifique, au sud-est de la Nouvelle-Zélande.

ANTISCIENS (du grec *ἀντί*, en opposition, et *σκία*, ombre), nom donné aux peuples qui à midi ont des ombres de sens opposé. Ce sont les peuples situés sous le même méridien, mais à des latitudes égales de part et d'autre de l'équateur. Au moment de l'équinoxe, ces ombres sont de plus égales.

Mais il faut bien remarquer que, si les latitudes considérées sont moindres que l'inclinaison de l'écliptique, les ombres sont de même sens aussitôt que la déclinaison du soleil est plus grande que la latitude.

APHÉLIE (du grec *ἀπό*, loin de, et de *ἥλιος*, soleil), point de l'orbite d'une planète qui est le plus éloigné du soleil; c'est le sommet de l'ellipse décrite par la planète, opposé au **PÉRIPHÉLIE** (*Voy.* ce mot). C'est à l'aphélie que la planète a la plus petite vitesse.

L'aphélie de l'orbite terrestre est, comme le périhélie, mobile dans le sens direct.

APLATISSEMENT, quotient que l'on obtient en divisant l'excès du rayon équatorial d'une planète sur son rayon polaire par ce même rayon équatorial. Pour la terre, le rayon équatorial étant 6376821^m et le rayon polaire 6355565^m , la différence 21256^m , divisée par le rayon équatorial, donne pour l'aplatissement

$$\frac{21256}{6376821}, \text{ ou environ } \frac{1}{300}.$$

L'aplatissement α est lié à l'excentricité e de l'ellipse méridienne par une relation très-simple. En appelant a et b les demi-axes de l'ellipse, on a pour l'aplatissement

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2},$$

d'où l'on tire $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$.

Comme α est très-petit, on peut dans les calculs prendre 2α pour la valeur de e^2 . (*Voy.* FIGURE DE LA TERRE, MÉTRÉ.)

APOGÉE (du grec *ἀπό*, loin de, et de *γῆ*, terre),

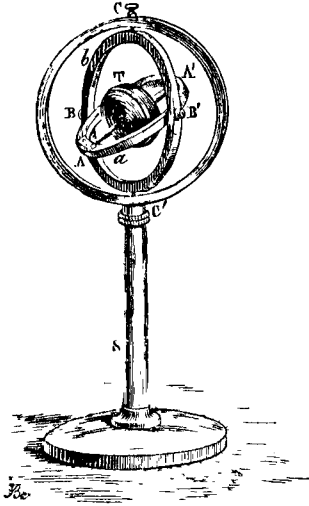
point de l'orbite apparente du soleil qui est le plus éloigné de la terre, c'est le sommet de cette orbite opposée au *périgée*. L'apogée, dans le mouvement apparent du soleil, répond à l'*aphélie* dans le mouvement réel de la terre. (Voy. PÉRIHÉLIE, APHÉLIE.)

On donne aussi le nom d'*apogée* au point de l'orbite lunaire qui est le plus éloigné de la terre; ce point est diamétralement opposé au *périgée* (Voy. ce mot).

APOTRES, nom donné dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot) aux deux ALLONGES D'ÉCUBIER placées de part et d'autre de l'ÉTRAVE. (Voy. les mots soulignés.)

APPAREIL, mode de subdivision d'une voûte en voussoirs. (Voy. VOUTES.)

APPAREIL DE BOHNENBERGER, appareil qui sert à produire un mouvement analogue à celui auquel est due la PRÉCESSION DES ÉQUINOXES (Voy. ce mot). Il se compose d'un sphéroïde, ou plus généralement d'un tore T, métallique et très-pesant, mobile autour d'un axe AA' dont les extrémités reposent sur un anneau AaA', mobile lui-même autour



d'un axe BB' perpendiculaire au premier, et dont les extrémités sont celles du diamètre horizontal d'un second anneau BbB' mobile autour d'un axe vertical CC'. Ce mode de suspension, analogue à celui qui est connu sous le nom de *suspension à la Cardan*, permet à l'axe AA' du tore de prendre dans l'espace toutes les directions imaginables. Si l'on donne au tore une vitesse de rotation rapide autour de son axe de figure AA', on observe que cet axe demeure immobile dans l'espace. Mais si l'on adapte en A une petite masse additionnelle m, on voit le cercle BbB' tourner lentement autour de la verticale CC', dans un sens contraire à celui de la rotation du tore. Il en résulte que l'axe AA' décrit un cône dont CC' est l'axe; et ce mouvement est une image sensible du mouvement de l'axe de la terre qui produit la précession. La masse m appliquée en A joue ici le rôle de l'attraction solaire sur le renflement équatorial. La théorie de cet appareil se trouve dans tous les traités de Mécanique rationnelle; mais on peut aussi la rattacher aux principes

sur le mouvement relatif, et assimiler l'appareil de Bohnenberger à la BALANCE GYROSCOPIQUE ou à la TOUPIE GYROSCOPIQUE (Voy. ces mots).

On peut aussi obtenir une image sensible de la nutation produite par l'action périodique de la lune. Pour cela, on frappe de petits coups près de la petite masse additionnelle m, et l'on voit chaque extrémité de l'axe AA' décrire une petite ellipse autour de la génératrice mobile du cône décrit dans le mouvement de précession. (Voy. GYROSCOPE.)

APPAREIL DE M. MORIN, appareil à indications continues pour démontrer expérimentalement les lois de la chute des corps. Cet appareil, construit par M. Morin sur les indications de M. Poncelet, se compose d'un cylindre AA (fig. 1) à axe vertical, qui reçoit un mouvement uniforme de rotation d'un mécanisme d'horlogerie à poids, régularisé par un pendule B. La surface de ce cylindre est recouverte d'une feuille de papier. Le long de cette surface peut se mouvoir un poids cylindro-conique en plomb d, qui est guidé par des tringles verticales peu distantes du cylindre; et il porte à sa partie supérieure un pinceau chargé d'une matière colorante, dont la pointe vient toucher la surface du cylindre. Ce poids cylindro-conique et son pinceau sont représentés en plus grand sur la figure 2. Au commencement de l'expérience, le poids d est retenu à la partie supérieure de l'appareil par une pince E. Lorsque le mouvement du cylindre est établi, et arrivé à l'uniformité, on tire un fil F qui fait ouvrir la pince; le poids d tombe alors verticalement en glissant le long de ses guides, et le pinceau laisse sur la surface du cylindre une trace qui constate les lois de la chute du mobile.

Si l'on déroule, en effet (fig. 3), la feuille de papier qui recouvre le cylindre, on y remarque deux traces colorées : l'une GQ, rectiligne et perpendiculaire à l'axe du cylindre; c'est celle que traçait le pinceau avant la chute du mobile; l'autre curviligne GMH, tangente à la droite GQ. Si par différents points de cette courbe, tels que M, m, on lui mène des tangentes; et que par les points, tels que T et t, où ces tangentes rencontrent la droite GQ, on leur élève des perpendiculaires, on reconnaît que toutes ces perpendiculaires vont passer par un même point F. Cette propriété caractérise la *parabole*; et le point de concours F des perpendiculaires TF, tF, est le *foyer* de cette courbe. Du point F on abaisse sur GQ une perpendiculaire GG'; c'est l'axe de la parabole; et le point G en est le *sommet*. C'est le point de départ du mobile, qu'il eût été difficile de discerner sans cette construction, attendu que ce point n'est déterminé que par le contact de la courbe avec la droite GQ. Considérons maintenant un point quelconque M de la courbe; menons ses coordonnées rectangulaires MQ et MP par rapport aux axes GG' et GQ. La verticale MQ est l'espace e parcouru par le mobile dans un certain temps t. L'horizontale MP est l'arc de cercle décrit dans le même temps par un point de la surface du cylindre; soit r le rayon du cylindre, ω sa VITESSE ANGULAIRE (Voy. ce mot) supposée constante; l'arc dont il s'agit a pour mesure ωrt. Mais puisque la courbe tracée est une parabole, on a, entre les coordonnées du point M, la relation

$$\overline{MP^2} = 2p. MQ, \quad [1]$$

en appelant p le demi-paramètre. Remplaçant MP' et MQ par leurs valeurs, on a donc

$$\omega^2 r^2 t^2 = 2pe,$$

$$d'où \quad e = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{p} t^2. \quad [2]$$

Cette équation exprime que les espaces sont proportionnels aux carrés des temps; le mouvement est donc uniformément accéléré. (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.)

La quantité p est le double de la distance GF du

sommet au foyer; en désignant cette distance par h on a donc

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2h} t^2,$$

et l'accélération due à la pesanteur est

$$g = \frac{\omega^2 r^2}{2h}. \quad [3]$$

On pourrait la calculer par cette relation; mais h ne peut être mesuré d'une manière assez précise pour que la valeur de g qu'on en pourrait déduire

Fig. 1.

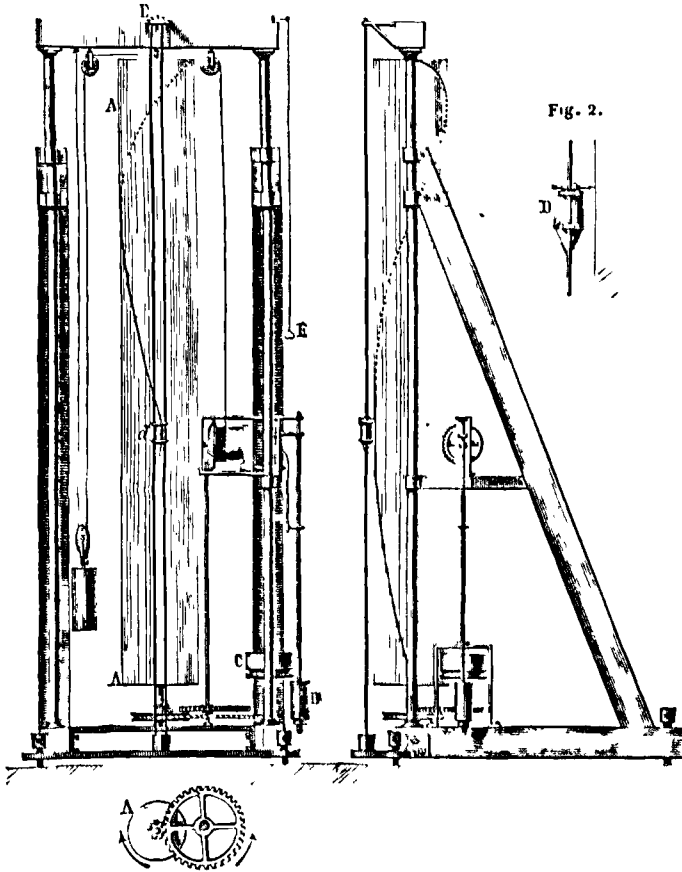


Fig. 2.

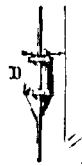
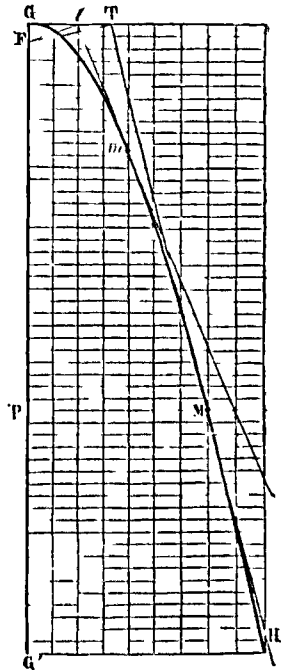


Fig. 3.



soit suffisamment approchée. Mais on tire de la relation [3], en remplaçant la vitesse ωr d'un point de la surface du cylindre par la lettre u ,

$$h = \frac{u^2}{2g}, \quad [4]$$

c'est-à-dire que la distance GF du sommet de la parabole au foyer est la hauteur due (Voy. ce mot) à la vitesse d'un point quelconque de la surface du cylindre. Le paramètre de la parabole est donc d'autant plus grand que le cylindre tourne plus vite.

La loi des vitesses se déduit de l'équation [2] en prenant la dérivée de e par rapport au temps, ce qui donne

$$v = \frac{\omega^2 r^2}{p} t; \quad [5]$$

ainsi les vitesses sont proportionnelles au temps.

On arrive à la même loi par des considérations géométriques. En effet, la courbe GMH tracée par le mobile lui-même est la courbe représentative du mouvement (Voy. COURBE DES ESPACES). En prenant GP pour axe des x et GG' pour axe des y , l'équation de la courbe est

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

Et le coefficient angulaire de la tangente, ou la dérivée de y , par rapport à x , est

$$y' = \frac{x}{p}. \quad [6]$$

Ce coefficient angulaire est proportionnel à la vitesse; or x est proportionnel au temps; donc la vitesse est proportionnelle au temps.

Mais l'équation [6] ne donnerait pas la valeur

exacte de la vitesse elle-même; puisque $x = \omega r t$, on aurait

$$y' = \frac{\omega r}{p} \cdot t,$$

valeur différente de l'expression [5]. Cela tient à ce que l'unité de temps et l'unité d'espace ne sont pas représentées ici par la même longueur, condition nécessaire pour que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces soit égal à la vitesse du mobile.

APPENTIS, comble à un égout. (Voy. COMBLE).

APPULSE, passage de la lune dans le voisinage d'une étoile, de telle sorte que les deux astres puissent être observés simultanément dans le champ de la lunette. Ce mot s'applique également aux planètes qui approchent de leur conjonction avec un autre corps céleste. L'observation des appulses sert à déterminer les erreurs des tables.

AQUEDUC, pont jeté sur une vallée pour conduire les eaux nécessaires à l'alimentation d'une ville ou d'une grande habitation. Il se compose d'un canal, ordinairement couvert, porté par des arches en maçonnerie. Le poids de l'eau doit évidemment entrer dans le calcul de la poussée des arches (Voy. POUSSÉE DES VOUTES). Les calculs sont d'ailleurs les mêmes que pour les ponts ordinaires. Un aqueduc est quelquefois formé de plusieurs étages d'arches superposées; tel est le célèbre pont du Gard, à peu de distance de Nîmes, et le bel aqueduc de Roquefavour qui conduit à Marseille les eaux de la Durance, et dont les arcades atteignent en certains points 80^m de hauteur.

ARBALÉTRIER, pièce de charpente qui, dans une ferme, est placée parallèlement à la ligne de plus grande pente du toit, et s'appuie, par son pied sur le tirant, et par sa tête sur le poinçon. (Voy. FERMES.)

Dans une **CROUPE** (Voy. ce mot) l'arbalétrier placé au-dessous de l'arétier porte le nom d'*arbalétrier d'arétier*; et l'on donne le nom d'*arbalétrier de noue* à celui qui est placé au-dessous d'une noue (Voy. ce mot).

ARBITRAGE, opération de banque qui consiste à choisir la voie la plus avantageuse pour faire passer des fonds d'une place dans une autre. Supposons, par exemple, qu'un banquier de Paris doive 1500 marcs-banco à Hambourg, et qu'à Paris le change avec Hambourg (Voy. CHANGE) soit à 190, et par conséquent au-dessus de pair. Supposons qu'au même moment le change avec Hambourg soit, à Londres, à 13,90, c'est-à-dire 13,90 marcs-banco pour 1 livre sterling, et par conséquent au-dessous du pair. Supposons enfin, pour simplifier d'abord, qu'entre Paris et Londres le change soit au pair, c'est-à-dire à 25^f,21 pour 1 livre sterling; et admettons qu'entre ces diverses places le cours du change soit réciproque. Le banquier de Paris, s'il voulait faire des remises directes à Hambourg, devrait acheter 1500 marcs-banco à Paris; mais il est clair qu'il y aurait avantage à les acheter à Londres; pour cela il pourra s'y prendre de la manière suivante. Il achètera à Paris du papier sur Londres, et il l'adressera à son correspondant de Londres, en lui donnant l'ordre d'acheter lui-même du papier sur Hambourg, et de l'adresser à son créancier de Hambourg. En d'autres termes, il fera des remises à son correspondant de Londres, en lui donnant

l'ordre de faire lui-même des remises à Hambourg. Pour se rendre compte du bénéfice que le banquier de Paris réalisera en suivant cette voie indirecte, il suffit d'écrire successivement les égalités qui expriment le cours du change entre les diverses places, en ayant soin que l'espèce d'unités qui figure au second membre de chacune, figure au premier membre de la suivante. Si l'on a écrit l'inconnue au premier membre de la première égalité, le second membre de la dernière exprimera des unités de même espèce. On multiplie ces égalités membre à membre, et l'on obtient une nouvelle égalité d'où l'on tire la valeur de l'inconnue. Dans l'exemple actuel, en appelant x le prix du marc-banco par la voie indirecte, on aura les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x \text{ francs} &= 1 \text{ marc-banco,} \\ 13,90 \text{ marcs-banco} &= 1 \text{ livre sterling,} \\ 1 \text{ livre sterling} &= 25,21 \text{ francs.} \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre, on obtient :

$$x \cdot 13,90 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 25^f,21,$$

en regardant comme abstraits tous les facteurs autres que des francs, ce qui est permis, vu l'homogénéité de la dernière relation. On en tire ainsi :

$$x = \frac{25^f,21}{13,90} = 1^f,81366 \dots$$

Si le banquier faisait des remises directes à Hambourg, il payerait le marc-banco 1^f,90. Il gagnera donc, en suivant la voie indirecte. 0^f,08633 par marc, ce qui fait pour les 1500 marcs 0^f,08633 \times 1500 ou 129^f,50 environ.

Si le change entre Paris et Londres n'avait pas été au pair, le résultat aurait pu être différent, mais la marche eût été la même. Si, par exemple, on suppose qu'à Paris le change avec Londres soit à 25^f,45, on devra écrire :

$$\begin{aligned} x \text{ francs} &= 1 \text{ marc-banco,} \\ 13,90 \text{ marcs-banco} &= 1 \text{ livre sterling,} \\ 1 \text{ livre sterling} &= 25^f,45; \end{aligned}$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \cdot 13,90 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 25^f,45$$

et

$$x = \frac{25^f,45}{13,90} = 1^f,8309.$$

Le bénéfice, dans ce cas, serait de 0^f,0691 par marc-banco, et pour les 1500 marcs, 0^f,0691 \times 1500 ou 103^f,65.

La place intermédiaire choisie dans les exemples précédents offrait, pour le calcul, une simplification particulière consistant en ce que, dans l'expression du change entre cette place et les deux autres, l'un des deux termes était l'unité, la livre sterling. Si cela n'a pas lieu, cela ne change rien à la méthode; mais le facteur 1 livre sterling se trouve remplacé par un facteur différent de l'unité. Prenons par exemple le problème suivant. Un banquier de Paris doit 1500 marcs-banco à Hambourg, et il peut s'acquitter directement ou par l'intermédiaire d'Amsterdam; on demande quelle est la voie la plus avantageuse, les les cours du change étant :

Entre Paris et Hambourg, 190 fr. pour 100 marcs-banco;

Entre Paris et Amsterdam, 214 fr. pour 100 florins;

Entre Amsterdam et Hambourg, 34 florins pour 40 marcs-banco;

Et les changes étant d'ailleurs supposées récipro-

ques. En appelant toujours x le prix du marc-banco par la voie indirecte, on devra écrire :

$$\begin{aligned} x \text{ francs} &= 1 \text{ marc-banco,} \\ 40 \text{ marcs-banco} &= 34 \text{ florins,} \\ 100 \text{ florins} &= 214 \text{ francs;} \end{aligned}$$

multipliant membre à membre, on obtient :

$$x \cdot 40 \cdot 100 = 1 \cdot 34 \cdot 214,$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{34 \cdot 214}{40 \cdot 100} = 1^{\text{f}}, 819.$$

Par la voie indirecte le bénéfice serait donc de 0^f,081 pour un marc-banco, et pour les 1500 marcs, de 0^f,081 \times 1500, c'est-à-dire 121^f,50.

Lorsqu'on se sert ainsi d'une place intermédiaire, on a quelquefois à payer une commission de tant pour 100, dont il est nécessaire de tenir compte dans le calcul de l'arbitrage, parce qu'elle modifie le taux réel du change. En ayant égard à cette circonstance, on est conduit à ces deux règles :

1^o Si la place débitrice donne l'incertain à la place intermédiaire (*VoY. CHANGE*), la commission doit être ajoutée à la valeur de l'inconnue.

2^o Si la place débitrice donne le certain à la place intermédiaire, la commission doit être retranchée de la valeur de l'inconnue.

Ces règles s'expliqueront par les exemples suivants :

I. Un banquier de Paris doit 1500 marcs-banco à Hambourg; il peut s'acquitter directement ou par la voie de Londres; on demande de déterminer la voie la plus avantageuse, en tenant compte d'une commission de 0,50 pour 100 à payer au banquier de Londres, les cours du change étant :

Entre Paris et Hambourg, 190 fr. pour 100 marcs-banco;

Entre Paris et Londres, 25^f,45 pour 1 livre sterling;

Entre Londres et Hambourg, 1 livre sterling pour 13,64 marcs-banco.

La somme à payer au banquier de Londres se trouve augmentée, par l'addition de la commission, dans le rapport de 100 à 100,5; c'est-à-dire que cette somme se trouve multipliée par $\frac{100,5}{100}$ ou par 1,005. Dans le calcul de l'arbitrage le

prix de la livre sterling, 25^f,45, devra donc être remplacé par $25^{\text{f}},45 \times 1,005$; et, par conséquent, on trouvera pour l'inconnue $x = \frac{25^{\text{f}},45}{13,90} \cdot 1,005$, ce qui

justifie la première des deux règles énoncées, et donne pour résultat 1^f,84. Par la voie directe, le prix x du marc-banco serait 1^f,90; le bénéfice par la voie indirecte serait donc de 0^f,06 par marc-banco, et pour les 1500 marcs de 0^f,06 \times 1500, ou de 90 fr.

II. Un banquier de Londres doit 1500 marcs-banco à Hambourg; il peut s'acquitter directement ou par l'intermédiaire de Paris; on demande de déterminer la voie la plus avantageuse, en tenant compte d'une commission de 0,50 pour 100 à payer au banquier de Paris, les cours du change étant :

Entre Londres et Hambourg, 12,90 marcs-banco pour 1 livre sterling;

Entre Londres et Paris 25^f,30, pour 1 livre sterling;

Entre Paris et Hambourg, 187 fr. pour 100 marcs-banco.

On pourrait traiter cette question comme la précédente; mais la comparaison veut s'établir d'une

manière plus commode, qui est usitée dans les maisons de banque, et qui consiste à prendre pour base le certain. Par la voie directe, le banquier de Londres aurait 12,90 marcs-banco pour 1 livre sterling. Soit y le nombre de marcs-banco qu'il aura pour ce même prix d'une livre sterling en suivant la voie indirecte. On aura :

$$\begin{aligned} y \text{ marcs-banco} &= 1 \text{ livre sterling,} \\ 1 \text{ livre sterling} &= 25,30 \text{ fr.,} \\ 187 \text{ fr.} &= 100 \text{ marcs-banco;} \end{aligned}$$

d'où, en multipliant et résolvant,

$$y = \frac{2530}{187} = 13,5293.$$

Il s'agit de tenir compte de la commission; pour cela on remarquera qu'elle a pour effet de diminuer dans le rapport de 100,5 à 100 le nombre de francs que le banquier peut obtenir pour 1 livre sterling; ce nombre de francs doit donc être multiplié par

$\frac{100}{100,5}$; ainsi le nombre 25,30 doit être remplacé par $\frac{25,30 \cdot 100}{100,5}$; et par conséquent la valeur de x devient

$$x = \frac{2530}{187} \cdot \frac{100}{100,5}.$$

Mais on peut obtenir un résultat plus simple, en remarquant que l'on a

$$(100 + 0,5)(100 - 0,5) = 100 \cdot 100 - 0,5 \cdot 0,5,$$

d'où l'on tire, en négligeant 0,5 \cdot 0,5 ou 0,25 vis-à-vis de 10000,

$$\frac{100}{100 + 0,5} = \frac{100 - 0,5}{100} = 1 - 0,005.$$

Par conséquent, la valeur de x devient

$$x = \frac{2530}{187} (1 - 0,005);$$

c'est-à-dire, qu'après avoir calculé la valeur de x sans tenir compte de la commission, il faut retrancher 0,5 pour 100 du résultat; ce qui justifie la seconde règle énoncée, et donne $x = 13,4617$ marcs.

On appréciera le bénéfice total obtenu par la voie indirecte en convertissant les 1500 marcs-banco en livres sterling successivement au cours de 12,90 et de 13,4617 marcs-banco pour 1 livre sterling, et faisant la différence. On la trouve de 4^{liv. 17 s.},8518 ou 4 livres sterlings 17 shillings environ.

Un banquier a toujours à sa disposition plusieurs places intermédiaires, et l'arbitrage consiste ordinairement à choisir entre la voie directe et plusieurs voies indirectes. On a à répéter plusieurs fois l'opération indiquée plus haut. Supposons, par exemple, qu'un banquier de Paris doive 1800 thalers à Berlin, et qu'il ait le choix de s'acquitter directement ou par l'intermédiaire soit de Londres, soit de Hambourg, soit d'Amsterdam. Admettons, pour abrégé, que les cours du change soient réciproques, savoir :

Entre Paris et Londres à 25^f,00.

— Hambourg à 187 fr.

— Amsterdam à 210 fr.

— Berlin à 366^f,25.

Entre Berlin et Paris à 80,87 thalers pour 300 fr.

— Londres à 6 thalers 25 silbergr. pour 1 liv. ster.

— Hambourg à 152,05 thalers pour 300 marcs-banco.

— Amsterdam à 143,54 thalers pour 250 florins

En tenant compte d'une commission de 0,5 pour 100 à Londres et à Amsterdam, et de 0,75 pour 100 à Hambourg, on trouvera, par des opérations analogues à celles qui ont été expliquées plus haut, que la valeur des 100 thalers en franc serait :

Par la voie de Londres..... 367^f,68
— de Hambourg..... 371^f,71
— d'Amsterdam..... 367^f,58

La voie directe serait donc dans ce cas la plus avantageuse, puisqu'elle permettrait d'avoir les 100 thalers pour 366^f,25.

Il peut arriver qu'il y ait avantage à se servir de deux places intermédiaires. Le calcul de l'arbitrage se fait alors comme dans le cas d'une seule, avec cette différence qu'on a à écrire une égalité de plus. Supposons, par exemple, qu'un banquier de Paris doive 3000 ducats à Naples, et qu'il ait le choix de s'acquitter directement, ou par l'intermédiaire de Hambourg, ou par celui de Vienne, ou à la fois par l'intermédiaire de Hambourg et de Vienne. Si les cours sont les suivants :

Entre Paris et Hambourg à 188^f,50 pour 100 marcs-banco.

— Vienne à 241 fr. pour 100 florins.

— Naples à 4^f,30 pour 1 ducat.

Entre Hambourg et Vienne à 149,5 florins pour 200 marcs-banco.

— Naples à 43 ducats pour 100 marcs-banco.

Entre Vienne et Naples à 57 ducats pour 100 florins. On fera les calculs suivants :

1^o Voie par Hambourg :

x francs = 1 ducat,
43 ducats = 100 marcs-banco,
100 marcs = 188,50 fr. ;

d'où $x = \frac{188^f,50}{43} = 4^f,38.$

2^o Voie par Vienne :

x francs = 1 ducat,
57 ducats = 100 florins,
100 florins = 241 francs ;

d'où $x = \frac{241^f}{57} = 4^f,22.$

3^o Voie par Hambourg et Vienne :

x francs = 1 ducat,
57 ducats = 100 florins,
149,5 florins = 200 marcs-banco,
100 marcs-banco = 188^f,50 ;

d'où $x = \frac{188^f,50 \cdot 200}{57 \cdot 149,5} = 4^f,42;$

4^o Voie par Vienne et Hambourg :

x francs = 1 ducat,
43 ducats = 100 marcs-banco,
200 marcs-banco = 149,5 florins,
100 florins = 241 francs ;

d'où $x = \frac{241^f \cdot 149,5}{43 \cdot 200} = 4^f,18.$

5^o La voie directe donne d'ailleurs 4^f,30.

La voie la plus avantageuse est donc celle par Vienne et Hambourg. (On remarquera que, dans le cas de plusieurs places intermédiaires, l'ordre des égalités doit être inverse de celui dans lequel les remises devront être opérées.)

On observe, en traitant du change direct (Voy. CHANGE), que lorsqu'un négociant est débiteur de l'un de ses correspondants, il peut, au lieu de lui faire

des remises, lui donner l'ordre de tirer sur lui. Cette remarque est applicable aux arbitrages. La méthode reste d'ailleurs la même. Nous n'avons traité jusqu'ici les arbitrages que dans le cas où il s'agissait d'acquitter une dette. S'il s'agit, au contraire, de recouvrer une créance, on peut également faire usage d'une ou plusieurs places intermédiaires, et l'arbitrage consiste toujours à déterminer la voie la plus avantageuse. Les calculs se font exactement de la même manière; il n'y a de différence que dans la conclusion à tirer des résultats. En effet, si un banquier de Paris doit un certain nombre de thalers à Berlin, son intérêt est de l'acheter au plus bas prix possible; le cours le plus bas est donc le plus avantageux. Mais si le banquier de Paris est au contraire créancier de Berlin pour un certain nombre de francs, il doit faire en sorte que son correspondant les paye le moins cher possible; le cours le plus avantageux est donc celui qui exige le plus petit nombre de thalers pour un même nombre de francs, ou, ce qui revient au même, celui qui exige le plus grand nombre de francs pour un même nombre de thalers; dans ce cas, on peut donc dire que le cours le plus élevé est le plus avantageux. (Voy. ORDRES DE BANQUE.)

ARBRE COUDÉ, axe de rotation interrompu par un double coude qui sert de manivelle. Un même arbre peut être interrompu ainsi plusieurs fois. (Voy. MANIVELLES MULTIPLES.)

ARBRES, pièces cylindriques ou prismatiques, sur lesquelles sont montées les roues des machines. Lorsqu'un arbre est horizontal, il repose sur des appuis par l'intermédiaire de tourillons. Lorsqu'il est vertical, il repose à la partie inférieure sur le fond d'une crapaudine (Voy. PIVOT) et il est maintenu par un ou plusieurs collets en différents points de sa hauteur. Un arbre horizontal d'une certaine longueur donnant le mouvement à diverses machines dépendant d'une même usine est ce que l'on appelle un *arbre de couche*. Les arbres des machines peuvent être soumis à la flexion et à la torsion.

Considérons d'abord un arbre horizontal qui n'éprouve qu'une torsion négligeable; on calculera ses dimensions transversales en le considérant comme une pièce posée sur deux appuis, ce qui pourra donner lieu à divers problèmes (Voy. FLEXION PLANE). Le plus souvent la roue est montée au milieu de l'arbre, et le poids de celui-ci est négligeable vis-à-vis de celui de la roue; on regarde alors la pièce comme uniquement chargée d'un poids en son milieu, et l'on applique la formule

$$R = \frac{v\mu}{l} = \frac{1}{4} \frac{vQl}{l} \quad [1]$$

en appelant Q le poids de la roue, et l la longueur de l'arbre. Si celui-ci est cylindrique, ce qui est le cas le plus fréquent, on a, en appelant r son rayon,

$$v = r \quad \text{et} \quad l = \frac{1}{4} \pi r^2,$$

par conséquent

$$R = \frac{Ql}{\pi r^3}, \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt[3]{\frac{Ql}{\pi R}}. \quad [2]$$

Si l'arbre est creux, comme cela a lieu quelquefois, notamment pour les roues hydrauliques, et que r et r' soient les rayons extérieur et intérieur, on a toujours

$$v = r, \quad \text{mais} \quad l = \frac{1}{4} \pi (r^2 - r'^2).$$

Il convient dans ces cas de faire $r' = \frac{3}{5} r$ ou $r' = 0,6r$, d'où résulte

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 \cdot 0,8704,$$

et, en substituant,

$$R = \frac{Ql}{0,8704 \pi r^3}, \text{ d'où } r = \sqrt[3]{\frac{Ql}{0,8704 \pi \cdot R}} \quad [3]$$

Si la section est octogone, on peut appliquer la formule [1] en calculant I; on peut encore calculer la section comme si elle devait être circulaire, et substituer ensuite au cercle l'octogone circonscrit.

Afin de prévenir les effets d'un choc imprévu, les constructeurs prennent pour R une valeur assez faible: par exemple R = 2700 000 pour le fer, R = 160 000 pour la fonte, R = 16000 pour le bois.

Considérons maintenant un arbre vertical qui n'éprouve aucune flexion, mais qui peut être soumis à une torsion notable. Si P est la force qui produit la torsion, p la distance de cette force à l'axe, r le rayon de l'arbre supposé cylindrique, I₀ le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe, et F la tension qu'il convient de ne pas dépasser, on aura (Voy. TORSION, formule [8]) :

$$F = \frac{r}{I_0} P p; \quad [4]$$

mais

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi r^4,$$

par conséquent

$$F = \frac{2 P p}{\pi r^3}, \text{ d'où } r = \sqrt[3]{\frac{2 P p}{\pi F}} \quad [5]$$

Si la section est annulaire, et que r' soit le rayon intérieur, on aura :

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi (r^4 - r'^4).$$

On fait généralement $r' = 0,6r$;

donc

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi^4 r \cdot 0,8704,$$

par suite

$$F = \frac{2 P p}{0,8704 \pi r^3}, \text{ d'où } r = \sqrt[3]{\frac{2 P p}{0,8704 \pi F}} \quad [6]$$

On prend pour F les mêmes valeurs que dans les formules précédentes.

Le moment P p qui tend à produire la torsion peut se déterminer connaissant le nombre de tours n que la roue fait par minute, et le nombre de chevaux N qui exprime le travail transmis par cette roue. Car le travail pour un tour est P.2πp; dans une minute le travail est donc P.2πp.n, et dans une seconde $\frac{P \cdot \pi p \cdot n}{30}$; ce travail doit être égal à 75^{km}.N; on doit donc avoir

$$\frac{P \cdot \pi p \cdot n}{30} = 75^{\text{km}} \cdot N, \text{ d'où } P p = \frac{2250 N}{\pi n} \quad [7]$$

Considérons enfin un arbre soumis à la fois à la flexion et à la torsion; les allongements résultant de ces deux causes s'ajouteront; on devra donc avoir

$$R = \frac{v \mu}{I} + \frac{r P p}{I_0} \quad [8]$$

Si la section est cylindrique, on aura

$$R = \frac{Ql}{\pi r^3} + \frac{2 P p}{\pi r^3}, \text{ d'où } r = \sqrt[3]{\frac{Ql + 2 P p}{\pi R}} \quad [9]$$

si la section est annulaire, on aura

$$R = \frac{Ql}{0,8704 \pi r^3} + \frac{2 P p}{0,8704 \pi r^3},$$

d'où

$$r = \sqrt[3]{\frac{Ql + 2 P p}{0,8704 \pi R}} \quad [10]$$

Prenons pour exemple un arbre creux en fonte supportant une roue hydraulique qui transmet un travail de 50 chevaux et qui fait 15 tours par minute. Soient Q = 4500^h, l = 0^m,6. On trouvera successivement :

$$Ql = 2700, Pp = \frac{2250 \cdot 50}{\pi \cdot 15} = 2387,3$$

$$Ql + 2 P p = 7474,6.$$

Prenons

$$R = 200000;$$

nous aurons

$$0,8704 \pi \cdot 200000 = 546889,7;$$

par conséquent

$$r = \sqrt[3]{\frac{7474,6}{546889,7}} = 0^m,239;$$

par suite

$$r' = 0^m,239 \cdot 0,6 = 0^m,143.$$

On a négligé dans ces calculs le poids de l'arbre lui-même; on pourrait pour y avoir égard regarder les résultats précédents comme une première approximation, en déduire le poids approximatif de l'arbre, et recommencer les calculs en y faisant entrer ce poids, c'est-à-dire en considérant l'arbre comme chargé, indépendamment du poids de la roue, appliqué en son milieu, d'un poids uniformément réparti égal au poids de l'arbre lui-même. Mais la première approximation, dans laquelle R a été pris fort au-dessous de la limite que ce coefficient peut atteindre, suffit ordinairement à toutes les exigences de la pratique.

ARCADE, ouverture cintrée pratiquée dans un mur ou dans un massif de maçonnerie. L'arcade la plus ordinairement employée est l'arcade à plein cintre, c'est-à-dire dont la partie supérieure est un demi-cercle qui se raccorde avec les arêtes des piédroits. La proportion la plus fréquente est celle qui est représentée fig. 1, et dans laquelle la hauteur totale MP est le double de la largeur AB ou CD; le centre O du plein cintre est alors placé

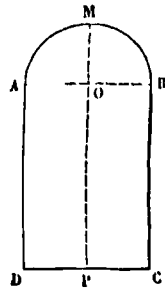


Fig. 1.

aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur, et son rayon est la demi-largeur. La hauteur doit rarement surpasser le double de la largeur; ce n'est guère que dans les viaducs et aqueducs que l'on s'écarte de cette règle; mais suivant la destination de l'édifice auquel appartient l'arcade, sa hauteur peut devenir beaucoup moindre; et l'entrée d'un bâtiment de douane, par exemple, peut offrir une arcade dont la hauteur ne surpasse la largeur que d'un dixième.

On appelle *arcades continues* celles qui se répètent à égales distances sur une certaine étendue. Les rues de beaucoup de villes présentent ainsi des arcades continues qui contribuent à la décoration des édifices, et s'ouvrent sur des galeries servant d'abri aux piétons.

Si les piédroits qui séparent les arcades sont ornés de colonnes, on a ce que l'on appelle un *PORTIQUE* (Voy. ce mot); les cintres sont alors ornés d'archivoltes qui reposent sur les impostes formant l'assise supérieure des piédroits.

Les arcades, au lieu d'être portées par des piédroits, peuvent être portées par des colonnes, soit simples, soit accouplées. Dans le premier cas (fig. 2), le cintre peut reposer directement sur le chapiteau. Dans le second cas (fig. 3), les colonnes sont réunies par une architrave qui reçoit les extrémités des archivoltas des arcades. Quelquefois même, cette archivoltas est remplacée par un entablement complet, analogue à celui de l'édifice, mais offrant des proportions, et surtout des saillies, moins importantes.

Beaucoup d'auteurs condamnent les *arcades sur colonnes*, qui n'ont commencé à être en usage qu'aux époques de décadence. Ils regardent, en particulier, une colonne simple comme un support insuffisant, du moins à l'œil, pour porter les retombées de deux arcades. Quoi qu'il en soit, cette

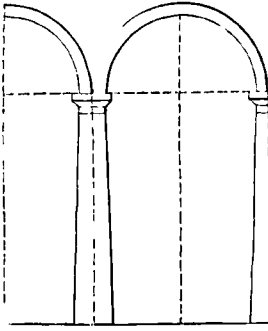


Fig. 2.

disposition, inconnue des Grecs et des architectes romains des époques classiques, n'est guère em-

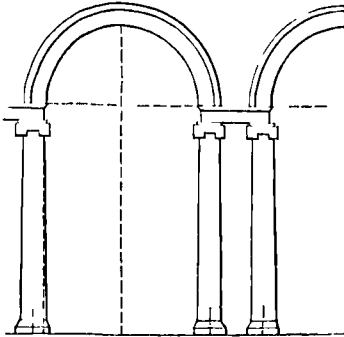


Fig. 3.

ployée que dans les constructions légères et élégantes qui n'exigent point un caractère de force et de solidité.

Les arcades peuvent être *alternatives*, c'est-à-dire qu'elles peuvent alterner avec des portes, avec des fenêtres, avec des niches, avec des entre-colonnements. Dans ce cas, les axes de ces diverses ouvertures ne sont point assujettis à être équidistants comme dans les arcades continues; ils ne sont soumis qu'à la loi de symétrie qui régit toutes les constructions.

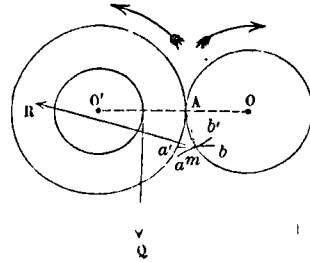
On cite, comme exemples d'arcades sur piédroits, dans l'antiquité : le cirque de Néron à Rome, le pont du Gard, près de Nîmes, les arènes à Nîmes

même; dans les temps modernes : la place Saint-Marc à Venise, la rue de Rivoli à Paris. Comme exemples d'arcades sur colonnes, on peut nommer : le palais de la Chancellerie à Rome; le cloître de la grande Chartreuse de Pavie; la basilique de Vicence reconstruite par Palladio, le passage Colbert à Paris.

Une arcade est dite *surbaissée* quand le demi-cercle ou plein cintre y est remplacé par une courbe moins élevée, comme une ANSE DE PANIER (Voy. ce mot); on en rencontre des exemples dans l'architecture de la Renaissance. Une arcade est au contraire *surhaussée* quand la hauteur de l'arc est plus grande que la demi-largeur de l'arcade; c'est à cette catégorie qu'appartiennent les arcades en ogive si fréquemment employées dans l'architecture dite *gothique*. (Voy. OGIVE.)

ARCASSE, construction qui forme la partie inférieure de la poupe d'un navire. Cette construction est supprimée dans les navires à poupe ronde. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

ARC-BOUEMENT, obstacle au mouvement relatif de deux roues dentées, qui peut se manifester quand le frottement est notable et que les dents entrent en prise à une trop grande distance de la ligne des centres. Soient OA et O'A les rayons des circon-



férences primitives (Voy. ENGRENAGES), amb et $a'mb'$ les courbes des dents en contact au point m . La roue OA étant la roue conductrice et O'A la roue conduite, le mouvement tend à se produire dans le sens des flèches. Pour qu'il ait lieu d'une manière uniforme, il faut que le moment de la réaction R exercée par la dent amb sur la dent $a'mb'$ soit égal et de signe contraire au moment de la résistance Q, appliquée à la roue O'A et qui agit à une certaine distance q de l'axe O'. Or, cette réaction R en vertu des lois du FROTTEMENT (Voy. ce mot), fait avec la normale ma un angle égal à l'angle du frottement, en sens inverse du mouvement relatif de $a'mb'$ par rapport à amb ; c'est-à-dire ici à gauche de la normale ma . Si donc il arrivait, comme sur la figure, que cette réaction R allait passer au delà du centre O', les moments des forces R et Q seraient de même sens; leur somme ne pourrait donc pas être nulle; ce qui revient à dire que le mouvement serait impossible. C'est cette impossibilité qui constitue l'arc-boutement. Elle est d'autant plus à craindre que d'une part l'angle de R avec la normale est plus grand, c'est-à-dire que le frottement est plus considérable; et que d'autre part la normale ma est plus inclinée par rapport à la ligne des centres, c'est-à-dire que le contact des dents a lieu plus loin de la ligne des centres. Le danger de l'arc-boutement est une des raisons pour lesquelles on réduit autant que possible le *pas* de l'engrenage.

ARC DE CLOITRE (VOÛTE EN). Voûte formée par la pénétration de deux berceaux cylindriques ayant même plan de naissance et même montée, et destinée à recouvrir une salle rectangulaire. Soit ABCD (fig. 1) le rectangle à recouvrir, et formant le plan de naissance des deux berceaux, menons les diagonales AC et BD. Sur A_1B_1 , égal et parallèle à AB, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence A_1MB_1 ; ce sera le rabattement sur le plan de naissance de la section droite d'un berceau ayant ses génératrices parallèles à AD et à BC. Sur B_1C_1 , égal et parallèle à BC, comme grand axe, construisons une demi-ellipse ayant pour petit axe le rayon du cercle A_1MB_1 ; ce sera le rabattement de la section droite d'un second berceau, ayant ses génératrices parallèles à AB et à DC. Ces deux surfaces cylin-

cesse d'être en équilibre d'elle-même, mais il faut,

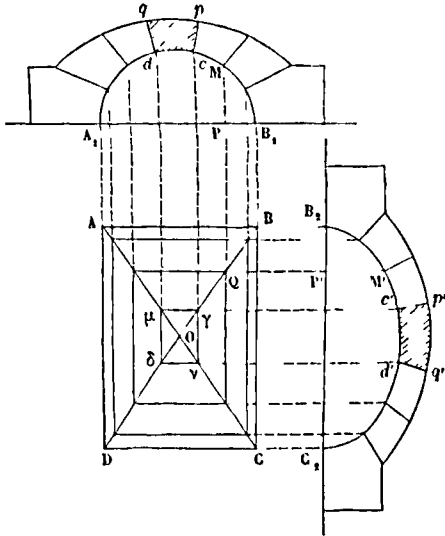


Fig. 1.

driques se couperont suivant deux demi-ellipses verticales qui se projeteront sur AC et sur BD (Voy. ARÊTIER); mais la voûte n'emprunte au premier berceau que les portions qui se projettent suivant AOD et BOC; et elle n'emprunte au second berceau que les portions qui se projettent suivant AOB et COD. Il en résulte que la voûte, vue d'en dessous, présente quatre demi-arêtiers à angles rentrants; et que, par conséquent, les voussoirs comprenant ces demi-arêtiers devront être taillés comme le voussoir U de la fig. 2 de l'article ARÊTIER. Les autres voussoirs se tailleront comme pour un berceau ordinaire (Voy. BERCEAU). La *clef*, projetée en $\gamma\mu\delta\nu$, se taillera en appliquant sur les faces latérales d'un parallélépipède rectangle les panneaux de tête $cdpq$ et $c'd'p'q'$, et en enlevant la pierre perpendiculairement à ces panneaux. La figure 2 représente en perspective la forme de cette clef.



Fig. 2.

Une voûte en arc de cloître recouvre souvent un espace rectangulaire qui doit être éclairé par le haut; on peut en effet supprimer la clef et même quelques assises de voussoirs, sans que la voûte

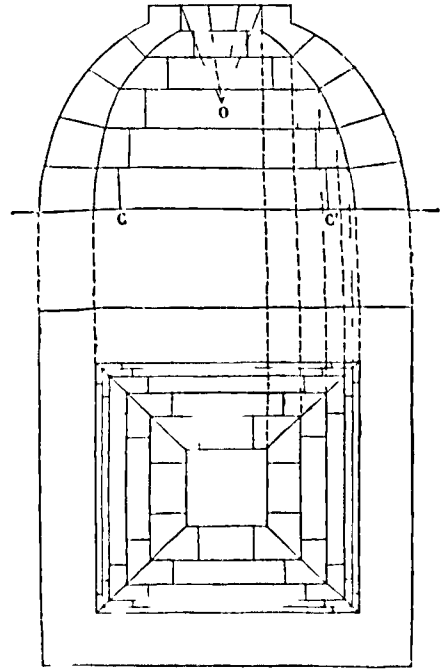


Fig. 3.

pour que les voussoirs de la dernière assise se soutiennent d'eux-mêmes, faire converger les joints

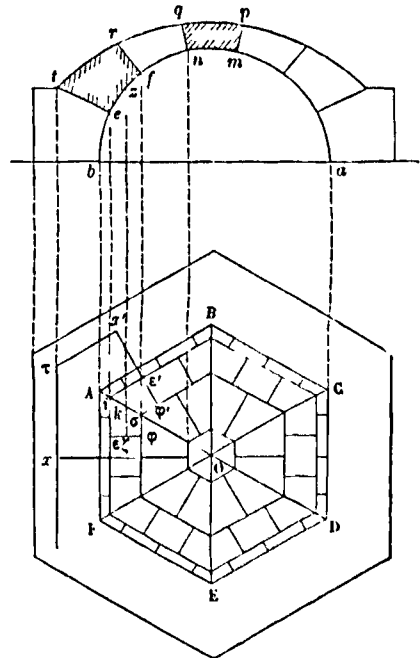


Fig. 4.

vers un même point, qui est ordinairement le som-

met du triangle équilatéral construit sur la longueur de cette assise, comme dans les PLATES-BANDES (Voy. ce mot). La figure 3 représente une voûte de ce genre, destinée à recouvrir une cage d'escalier. Les berceaux sont surhaussés; leur section droite est formée de deux arcs de cercle décrits des points C et C' comme centres. Les joints de la dernière assise convergent en un point O, situé comme il vient d'être dit. L'épure montre suffisamment la disposition de l'appareil.

On peut aussi, au lieu de laisser un jour à la partie supérieure, recouvrir l'orifice par une VOÛTE PLATE (Voy. ce mot) qui fait office de plafond.

Enfin on peut concevoir une voûte en arc de cloître formée par la pénétration de plus de deux berceaux. On peut, par exemple, recouvrir un hexagone régulier par une voûte formée de trois berceaux. La figure 4 représente cette disposition. Sur l'hexagone ABCDEF il faut concevoir trois surfaces cylindriques; l'une dont la section droite est *amb* et dont les génératrices sont parallèles à AF et à CD; une autre, ayant même section droite, mais ses génératrices parallèles à AB et à ED; une troisième, ayant toujours même section droite, mais ses génératrices parallèles à BC et à EF. Ces surfaces se coupent suivant 6 demi-arêtières projetés suivant OA, OB, OC, OD, OE, OF. Mais la voûte n'emprunte à la première surface cylindrique que les portions projetées en AOF et COD; à la seconde que les portions projetées en AOB et DOE; à la troisième que les portions projetées en BOC et EOF. L'épure montre suffisamment la disposition des voussoirs.

Pour tailler un de ceux qui contiennent une portion d'arêtière, par exemple celui qui a pour panneau de tête *efrt*, et qui se projette horizontalement suivant $\varphi\pi\pi'\varphi'\sigma$, on choisira un bloc qui soit capable de ce voussoir, c'est-à-dire dont la base puisse contenir $\varphi\pi\pi'\varphi'\sigma$, et dont la hauteur soit égale à la distance verticale des points *r* et *e*; on lui donnera la forme d'un prisme droit ayant $\varphi\pi\pi'\varphi'\sigma$ pour base, et sur les faces verticales correspondantes à $\varphi\pi$ et à $\varphi'\pi'$ on appliquera le panneau *efrt*, en faisant coïncider le point *e* avec *e*, le point *f* avec l'arête verticale projetée en φ , et le point *r* avec l'arête verticale projetée en π ; on opérera de même pour la face $\varphi'\pi'$; puis on enlèvera la pierre perpendiculairement à ces panneaux. L'opération n'offrira aucune difficulté pour les faces qui correspondent à *te* et à *tr*, attendu que ces faces répondent à des angles saillants; il faudra un peu plus de précautions pour les faces correspondantes à *rf* et à *ef* qui répondent à des angles rentrants. Pour éviter de dépasser, en enlevant la pierre, la ligne qui forme l'arête de l'angle rentrant, on pourra construire le panneau correspondant à *rf*; c'est un trapèze rectangulaire ayant pour bases $\pi\pi'$ et $\sigma\sigma'$, et pour côté perpendiculaire *rf*. On pourra construire également le panneau de douelle correspondant à *ef*; pour cela on prendra une droite égale au développement de *ef*; aux extrémités de cette droite on élèvera des perpendiculaires respectivement égales à *te* et à $\sigma\sigma'$; on déterminera un troisième point du côté curviligne en élevant au milieu du côté qui représente *ef* une perpendiculaire égale à *ke* (*k* étant le milieu de *ef*). On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour tailler le voussoir sans courir le risque de dé-

ter la pierre. La clef de la voûte se taillera d'une manière analogue, en préparant un prisme droit à base hexagonale sur les faces latérales duquel on appliquera le panneau *mnpq*, et en enlevant l'excédant de pierre perpendiculairement à ces faces.

ARC DE CLOÎTRE EN CHARPENTE. Ces voûtes se construisent d'après les mêmes principes que les voûtes de même nom exécutées en pierre. Les fermes qui sont dirigées suivant les médianes du rectangle à couvrir sont composées de deux poteaux réunis par une traverse supérieure horizontale qui soutiennent des aisseliers. C'est dans ces poteaux, ces aisseliers et cette traverse que s'assemblent les pièces cintrées qui ont la courbure de l'intrados de chaque voûte. Les fermes arêtières dirigées suivant les diagonales du rectangle sont composées de la même manière; mais elles offrent à leur partie inférieure une arête creuse en forme de noue (Voy. ce mot). Ces quatre fermes s'assemblent au centre de la voûte à l'aide de DÉJOUTEMENTS (Voy. ce mot) convenables, et sans le secours d'un poinçon. Les fermes arêtières sont reliées aux sablières correspondantes par des empanons courbes.

La disposition serait la même s'il s'agissait de couvrir par une voûte en arc de cloître l'espace compris entre une portion de voûte annulaire et une portion de voûte conoïde, comme dans les VOÛTES D'ARÊTE EN TOUR RONDE (Voy. ce mot).

Les voûtes en arc de cloître exécutées en charpente sont recouvertes d'un lattis sur lequel on étend un enduit, ou qu'on recouvre de panneaux en menuiserie.

ARCHE, voûte qui soutient un pont dans l'interval de deux piles ou d'une culée et d'une pile. (Voy. PONTS.)

ARCHITECTURE, art de construire, de disposer et d'orner les édifices (déf. de l'Académie). Considérée comme art, l'architecture, bien que ne relevant en définitive que du goût et de l'imagination, se rattache néanmoins à la Géométrie par les lois de symétrie qui président à l'ordonnance générale, par les proportions que l'observation des meilleurs modèles assigne aux diverses parties, et par le tracé des principaux ornements (Voy. ORDRES, MOULURES, TAILLOIR, VOLUTE, FRONTON, OVE, etc.). Considérée comme science, l'architecture embrasse toutes les connaissances relatives à l'art de bâtir; et elle emprunte à divers titres le secours des mathématiques. La COUPE DES PIERRES et la CHARPENTE contiennent la théorie des procédés à suivre pour donner aux diverses pièces qui entrent dans la composition d'un édifice, la forme qui leur est dévolue. La RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX fournit les règles d'après lesquelles on peut calculer les dimensions de ces pièces. La MÉCANIQUE sert de guide dans le choix des machines et appareils à employer pour amener ces différentes pièces à la place qu'elles doivent occuper. Enfin, c'est à la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE que l'architecture s'adresse pour la représentation des différentes parties d'un édifice, avec les OMBRES qu'elles projettent. (Voy. les mots soulignés.)

Tous les peuples ont eu leur architecture; mais aucune n'a laissé de traces plus profondes que celle des Grecs et de leurs imitateurs, les Romains. Aujourd'hui encore, et quoique les édifices modernes diffèrent complètement des constructions de l'antiquité les principales proportions de l'architecture.

grecque sont encore observées; et il suffit qu'une porte ou une fenêtre présente une simple moulure pour que, dans ce modeste ornement, on retrouve les formes caractéristiques que le génie de la Grèce a imprimées il y a vingt siècles aux monuments inimitables qu'elle nous a laissés. — Cependant, entre les Grecs et nous, une longue période s'est écoulée, pendant laquelle l'art de construire a subi les plus étonnantes vicissitudes. Le moyen âge a eu son architecture propre, remarquable par l'audace de ses proportions gigantesques, par la liberté de ses allures, et surtout par le sentiment religieux qui y est profondément empreint. Mais cette architecture n'a pas influé sur la nôtre; elle n'a pas trouvé place dans l'enseignement de nos écoles. Objet de vénération de la part des fidèles, ou de curiosité de la part des antiquaires, les monuments de l'architecture dite *gothique* n'ont point été reproduits dans nos grandes constructions civiles, qui, appropriées à des besoins nouveaux, conservent néanmoins comme un reflet de l'architecture de la Grèce et de Rome.

L'étude de l'architecture gothique est une étude toute spéciale qui ne pouvait trouver place dans ce Dictionnaire; il n'en est question qu'accidentellement. On trouvera aux articles cités plus haut, et à ceux auxquels ils renvoient, l'exposé de toutes les théories importantes relatives à l'art de bâtir, ainsi que le développement des préceptes qui nous ont été légués par les anciens. Il ne sera question dans le présent article que de quelques règles générales qui concernent les constructions modernes.

La façade d'un édifice quelconque doit être symétrique par rapport à un axe vertical; et cet axe doit toujours passer par le milieu d'une ouverture: par exemple, par le milieu d'une porte, qui dans ce cas devient principale, ou par le milieu d'une fenêtre, auquel cas les portes doivent être placées symétriquement.

La longueur d'une façade peut être égale à la hauteur quand il ne s'agit que d'un pavillon isolé.

Elle varie généralement de 1 fois $\frac{1}{2}$ à 3 fois la hauteur. Quand la destination de l'édifice exige une longueur plus grande, on soulage l'œil, et l'on rompt la monotonie des lignes, à l'aide d'avant-corps ou d'arrière-corps symétriquement placés, c'est-à-dire à l'aide de bâtiments en saillie ou en retraite par rapport à la façade principale. Si l'on ne peut avoir recours à ce moyen, il faut au moins diviser la longueur par des chaînes de pierres saillantes, coupant la façade dans toute sa hauteur. Les casernes, les ateliers, les magasins exigent souvent une longueur considérable; dans aucun cas cette longueur ne doit être supérieure à 10 fois la hauteur de l'édifice.

Un décret impérial du 27 juillet 1859 a fixé comme il suit la hauteur des bâtiments bordant les voies publiques, d'après la largeur de ces voies :

	Largeur de la voie.	Hauteur maximum des bâtiments.
Au-dessus de	7 ^m ,80.	11 ^m ,70
De	7 ^m ,80 à 9 ^m ,75.	14 ^m ,60
Au-dessus de	9 ^m ,75.	17 ^m ,55

Toutefois, dit l'art. 1^{er}, dans les rues ou boulevards de 20^m et au-dessus, la hauteur des bâtiments

peut être portée jusqu'à 20^m, mais à la charge par les constructeurs de ne faire, dans aucun cas, au-dessus du rez-de-chaussée, plus de cinq étages carrés, entre-sol compris.

Les bâtiments situés en dehors des voies publiques (art. 5), dans les cours et espaces intérieurs, ne peuvent excéder, sur aucune de leurs faces, la hauteur de 17^m,55 mesurée du sol. L'administration peut toutefois autoriser par exception des constructions plus élevées, pour des besoins d'art, de science ou d'industrie.

Le minimum de hauteur des étages est fixé à 2^m,60.

Le faîtage du comble ne peut excéder une hauteur égale à la moitié de la profondeur du bâtiment, y compris les saillies et corniches. Il en résulte que la pente du toit ne peut excéder 45°.

Les tuyaux de cheminées ne peuvent s'élever à plus de 0^m,60 au-dessus du faîtage; ils ne peuvent s'approcher du parement du mur de face de plus de 1^m,50.

Pour la division en étages, on suit généralement la règle suivante. Si le bâtiment ne doit avoir qu'un étage, on divise la hauteur totale en 12 parties; on en prend 7 pour le rez-de-chaussée, et 5 pour le premier étage. Si le bâtiment doit avoir deux étages, on divise la hauteur totale en 16 parties; on en prend 7 pour le rez-de-chaussée, 5 pour le premier étage et 4 pour le second: on diminue graduellement la hauteur des étages, à mesure qu'ils s'élèvent, sans tomber toutefois au-dessous du chiffre réglementaire de 2^m,60.

Manda: a indiqué, pour les maisons d'habitation, les hauteurs suivantes :

Caves.....	de 2 ^m ,27 à 2 ^m ,92	
Rez-de-chaussée.	3 ^m ,25	4 ^m ,22 et même 5 ^m ,20
Entre-sol.....	2 ^m ,27	2 ^m ,60
1 ^{er} étage.....	3 ^m ,25	3 ^m ,90 et même 5 ^m ,35
2 ^e	2 ^m ,92	3 ^m ,90
3 ^e	2 ^m ,60	2 ^m ,92
4 ^e	2 ^m ,27	2 ^m ,60

Mais il est clair que les hauteurs de 2^m,27 doivent être portées à 2^m,60, conformément aux règlements administratifs actuels.

Le même auteur indique, de la manière suivante, la superficie à donner aux diverses pièces d'un appartement petit, moyen ou grand :

Pièces.	APPARTEMENT					
	Petit.		Moyen.		Grand.	
	m ^q .	m ^q .	m ^q .	m ^q .	m ^q .	m ^q .
Salons.....	15,19	22,70	34,19	45,58	56,98	79,77
Salles.....	13,30	18,99	28,49	37,99	45,58	68,38
Chambres à coucher.....	11,40	15,70	24,69	30,39	37,99	56,98
Cages d'escalier.....	9,50	13,30	18,99	24,69	30,39	45,58
Antichambres et vestibules.	7,60	11,40	15,20	18,99	24,69	37,99
Cabinets.....	5,70	7,60	11,40	15,20	18,99	30,39

Il s'en faut que ces proportions soient généralement observées aujourd'hui.

Les cheminées, qui étaient très-vastes autrefois, diminuent de proportion de jour en jour, par suite de l'usage qui s'est introduit de les garnir d'une glace. On en voit qui n'ont que 0^m,80 de large sur 0^m,80 de haut; les plus grandes n'ont que 1^m,95 de

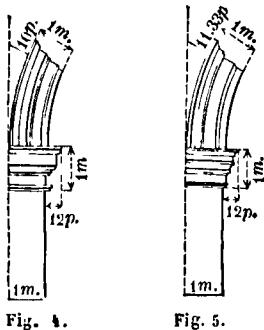
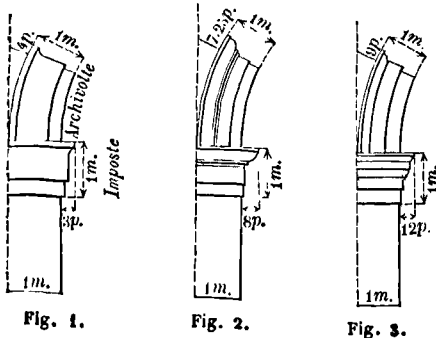
largeur sur 1^m,30 de hauteur. La largeur de la tablette varie de 0^m,27 à 0^m,43; et la profondeur de la cheminée varie de 0^m,45 à 0^m,80.

Nous ne pousserons pas plus loin ces généralités et nous renverrons aux divers articles de ce Dictionnaire relatifs à l'art de bâtir, ainsi qu'aux traités spéciaux d'architecture et de construction, parmi lesquels nous citerons : Vitruve, *De Architectura*; Palladio, *Traité d'Architecture*; Vignole, *Traité des cinq ordres*; Delorme (Philibert), *Nouvelles inventions pour bien bâtir et à petits frais*; Rondelet, *Art de bâtir*; Blondel, *Cours d'Architecture*; Durand, *Recueil et parallèle des édifices de tous genres*; Quatremère de Quincy, *Dictionnaire d'Architecture*; Thumeloup, *Leçons élémentaires d'Architecture*; Mary, *Cours de construction professé à l'École centrale des arts et manufactures*; Viollet-le-Duc, *Dictionnaire de l'Architecture française*, etc., etc.

ARCHITRAVE (ou **MAITRESSE POUTRE**), partie inférieure de l'entablement, qui, dans les constructions en pierre, représente la poutre principale supportant les solives du plancher dans les constructions en bois. Sa hauteur est de 1 module dans l'ordre toscan et dans l'ordre dorique, de 1 module $\frac{1}{4}$ dans

l'ordre ionique, de 1 module $\frac{1}{2}$ dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite. Ses détails varient suivant les ordres. (Voy. ORDRES.)

ARCHIVOLTE, moulure composée qui suit le contour d'une arcade, et va d'une imposte à l'autre.



L'archivolte reproduit dans ses détails les moulures simples de l'architrave. Sa largeur est d'un module dans tous les ordres. Les figures 1 à 5 représentent la naissance de l'archivolte dans les cinq or-

dres, et montrent en rabatement la saillie des moulures.

La saillie supérieure de l'archivolte est de 4 parties dans l'ordre toscan, de 7 parties $\frac{1}{4}$ dans l'ordre dorique, de 9 parties dans l'ordre ionique, de 10 parties dans l'ordre corinthien, et de 11 parties $\frac{1}{3}$ dans l'ordre composite.

On orne aussi d'archivoltes les portes et les fenêtres cintrées.

Quelquefois l'archivolte, au lieu de descendre jusqu'à l'imposte même, se recourbe à angle droit pour suivre l'imposte parallèlement jusqu'à l'arcade suivante; on dit alors que l'archivolte est *retournée*.

Quand l'édifice doit avoir un caractère de grande simplicité, l'archivolte se réduit à un simple bandeau circulaire sans moulures; dans ce cas il en est de même de l'imposte.

Voy. les art. ORDRES, MOULURES, ARCHITRAVE, IMPOSTE.

ARC RAMPANT, courbe qui forme la partie supérieure des arcades destinées à soutenir des rampes. Il se trace de la manière suivante. Soient AC et BD les droites qui limitent les *piédroits* de l'arcade, prolongées jusqu'à la ligne AB parallèle à la rampe, et à laquelle le cintre de l'arcade doit être tangent. On choisit d'ordinaire pour point de contact le milieu I de la droite AB. On élève

IE perpendiculaire à AB. On prend AM = AI et BN = BI. On élève en M et en N des perpendiculaires à AC et à BD; ces perpendiculaires rencontrent IE aux points V et O. Du point V comme centre, avec MV comme rayon, on décrit un arc de cercle; cet arc passera par le point I et sera tangent à AB en ce point; car si l'on joint AV, on voit que les deux triangles rectangles AMV et AIV sont égaux comme ayant l'hypoténuse AV commune et les côtés AM et AI de l'angle droit égaux par construction; donc IV = MV. De même, du point O comme centre, avec ON pour rayon, on décrit un arc de cercle, qui passera en I et sera tangent à AB en ce point. Les deux arcs MI et NI ainsi décrits se raccordent donc en I et forment l'arc rampant qu'il s'agissait de tracer.

On pourrait remplacer l'ensemble de ces deux arcs de cercle par une demi-ellipse ayant pour diamètres MN, et un diamètre conjugué IK parallèle à AC et à BD.

ARCS DE MÉRIDIEN (MESURE DES), opération géodésique qu'on a à effectuer dans l'étude de la FIGURE DE LA TERRE (Voy. ce mot). Elle a pour objet de trouver la longueur développée d'un arc de méridien terrestre, et de déterminer les latitudes de ses extrémités. (Voy. TRIANGULATION.) Connaissant la longueur de l'arc et le nombre de degrés dont il se compose, lequel n'est autre chose que la différence des latitudes extrêmes, on en déduit par une division la longueur moyenne de l'arc d'un degré

à la latitude moyenne. La longueur de l'arc peut être déterminée avec une précision plus grande que le nombre de degrés dont il se compose; car sur une étendue de 200 kil. on n'a à craindre qu'une erreur de quelques mètres, tandis qu'une erreur d'une seconde dans la mesure d'une latitude répond à un arc terrestre de 31 mètres environ. Il y a donc avantage à mesurer de grands arcs; car l'erreur à craindre sur les latitudes est indépendante de l'amplitude de ces arcs.

Au lieu de la méthode exposée à l'article triangulation, on peut, pour déterminer la longueur d'un arc de méridien, employer la méthode indiquée par Legendre, et qui consiste à projeter les côtés des triangles sur la méridienne par des arcs de grands cercles, et à calculer les triangles sphériques rectangles ainsi formés; la somme des projections sur la méridienne de ces côtés consécutifs est l'arc qu'il s'agissait de calculer.

On peut encore déterminer successivement les coordonnées géographiques des sommets de la chaîne; le rayon de la sphère transversalement osculatrice en un de ces points est précisément la grande normale à l'ellipse méridienne en ce point (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE; voyez aussi COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (calcul des)). Cette grande normale, multipliée par la différence entre la latitude du sommet considéré et celle du sommet suivant, donne la projection sur la méridienne du côté qui joint ces sommets. Il suffit, pour obtenir cette projection, de multiplier par N le second membre de la formule [5] établie à l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (calcul des). La somme des projections ainsi obtenues donne la longueur de l'arc de méridien.

C'est en employant cette dernière méthode pour vérifier les calculs de la méridienne de France et d'Espagne que M. Puissant a reconnu une erreur de 69 toises sur la longueur de l'arc compris entre Montjoux et Formentera.

ARCS DE PARALLÈLE (MESURE DES), opération géodésique que l'on a à effectuer dans l'étude de la FIGURE DE LA TERRE (Voy. ce mot). Elle a pour objet de déterminer, à une latitude donnée, la longueur développée d'un arc de parallèle terrestre, et de déterminer les longitudes de ses extrémités. On opère pour cela d'une manière analogue à celle qu'on emploie pour la mesure des arcs de méridiens. On dirige une chaîne de triangles dans le sens du parallèle; on calcule les côtés successifs de ces triangles, les azimuts de leurs côtés, et les coordonnées géographiques des sommets. Connaissant, par la formule [6] établie à l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (calcul des), la différence des longitudes des extrémités d'un côté géodésique, il suffit, pour en déduire la longueur de l'arc de parallèle correspondant à ces longitudes, à une latitude donnée l , de multiplier cette différence de longitude par le rayon du parallèle, lequel a pour valeur (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$r = \frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}},$$

a désignant le rayon équatorial et e l'excentricité de l'ellipse méridienne. Par cette multiplication a disparaît du premier terme de la formule [6] citée, attendu que ce terme contient au dénominateur la petite normale n dont la valeur renferme a en fac-

teur. Il en résulte que pour le calcul des arcs de parallèle il suffit de connaître des valeurs approchées de a et de e . La somme des arcs de parallèle ainsi calculés donne l'arc total qu'on se proposait d'obtenir. En même temps les longitudes de ses extrémités se trouvent déterminées; on peut donc en déduire la longueur de l'arc de 1° sur un parallèle déterminé; il suffit pour cela de diviser la longueur totale de l'arc obtenu par le nombre de degrés exprimant la différence entre les longitudes de ses extrémités.

Quand cette différence est donnée directement par des observations astronomiques, la longueur de l'arc de parallèle s'en déduit immédiatement. En désignant par S cette longueur, et par L et L' les longitudes des extrémités, on a

$$S = \frac{2\pi r}{360} (L' - L) = \frac{\pi (L' - L) \cdot a \cos l}{180 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}},$$

ce qui fournit une vérification. Lorsque la différence $L' - L$ a été ainsi déterminée avec soin par des observations directes, cette dernière formule, dans laquelle il faut alors supposer S obtenue par une triangulation, peut être employée pour faire concourir la mesure des arcs de parallèle à la recherche des valeurs de a et de e , et par suite à la détermination de la figure de la Terre.

ARCS DOUBLEAUX, nervures à section le plus ordinairement rectangulaire qui renforcent un berceau à son point de rencontre avec une autre voûte et particulièrement avec une voûte sphérique. (Voy. PENDENTIFS.)

ARCS HYDROPHORES (du grec ὕδωρ, eau, et φέρω, je porte), portions d'un tuyau hélicoïde, formant vis d'Archimède, qui peuvent recevoir de l'eau. (Voy. VIS D'ARCHIMÈDE.)

ARE, unité des mesures agraires dans le système métrique. C'est un carré de 10 mètres de côtés, équivalent par conséquent à 100 mètres carrés. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

ARÉOLAIRE, adjectif qui, appliqué au substantif *vitesse*, lui fait exprimer la limite du rapport entre l'accroissement de l'aire décrite par un rayon vecteur et l'accroissement du temps. Si u désigne l'aire décrite par ce rayon vecteur au bout du temps t , la dérivée $\frac{du}{dt}$ est la *vitesse aréolaire*. La dérivée de la vitesse aréolaire par rapport au temps est l'*accélération aréolaire*.

Dans le mouvement des planètes, par exemple, la vitesse aréolaire est constante, et l'accélération aréolaire est nulle.

ARÊTE DE DOUELLE, intersection de l'intrados d'une voûte (Voy. ce mot) par l'un des joints de lit.

ARÊTE DE REBOUSSEMENT, ligne à double courbure qui sépare en deux nappes une surface développable, et à laquelle toutes les génératrices sont tangentes. Dans les surfaces coniques, l'arête de rebroussement se réduit à un point. Ce point est situé à l'infini dans les surfaces cylindriques. (Voy. SURFACES COURBES.)

ARÊTIER, intersection plane de deux berceaux qui ont même plan de naissance et même montée. (Voy. BERCEAU). Pour que cette courbe soit plane, il faut qu'il y ait entre les sections droites des deux berceaux une certaine relation. On démontre aisément que si ces sections sont des ellipses, l'inter-

40. Après avoir divisé la demi-circonférence AB en un nombre impair de parties égales, aux points a, b, c, d, e, f , et mené les normales aM, bp, cq, dr, es, fN jusqu'à la rencontre de l'extrados MHN, on mènera par les points de division a, b, c, \dots , des perpendiculaires à AB, jusqu'à la rencontre de la projection horizontale CD de l'arêtier aux points a'', b'', c'', \dots , et par ces points des perpendiculaires à A'B' jusqu'à la rencontre de l'ellipse A'm'B' aux points a', b', c', \dots . Par ces points on mènera des normales $a'M, b'p', c'q', \dots$, à cette ellipse, terminées à la même hauteur au-dessus du plan de naissance que celles qui leur correspondent dans le premier berceau; cette condition déterminera l'extrados du second berceau, dont l'appareil se trouvera ainsi complètement défini; et il ne restera plus qu'à tailler les voussoirs. Il n'y a lieu de s'occuper que de ceux qui forment l'arêtier, les autres rentrant dans l'appareil ordinaire des berceaux (Voy. ce mot). Supposons qu'il s'agisse du voussoir V qui a pour panneau de tête sur la section droite du premier berceau la figure $abpM$, et sur celle du second berceau la figure $a'b'p'M'$. On choisira un bloc de pierre qui puisse contenir la projection horizontale $\mu\beta b''\beta'\mu'$ du voussoir, et qui ait une hauteur suffisante (la distance verticale des points a et p , ou a' et p'). Après avoir donné au bloc la forme d'un prisme droit ayant pour base $\mu\beta b''\beta'\mu'$, et dressé avec soin les faces correspondantes à $\mu\beta$ et à $\mu'\beta'$, on appliquera sur ces faces les panneaux de tête $abpM$ et $a'b'p'M'$, en faisant coïncider le sommet M avec l'arête verticale projetée en μ , le sommet b avec l'arête verticale projetée en β , le point a avec le point α déterminé à l'avance sur $\mu\beta$, et opérant de même pour la face $\mu'\beta'$. On n'aura plus qu'à tailler la pierre perpendiculairement aux faces $\mu\beta$ et $\mu'\beta'$, en suivant les contours des deux panneaux.

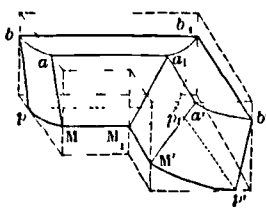


Fig. 3

La figure 3 montre le voussoir V renversé, afin de mieux faire voir les faces qui forment un angle rentrant. Les panneaux de tête $abpM, a'b'p'M'$ étant appliqués sur la pierre comme nous venons de le dire, on trace, perpendiculairement à ces faces, les horizontales aa_1 , et $a'a_1, bb_1$ et $b'b_1, pp_1$ et $p'p_1, MM_1$ et $M'M_1$. Les faces planes bpp_1b_1 et $b'p'p_1b'_1$ se taillent sans difficulté. Il en serait de même des faces planes aa_1M_1M et $a'a_1M_1M'$ s'il ne fallait pas procéder avec prudence de crainte d'enlever la pierre plus loin que l'arête a_1M_1 de l'angle rentrant, ce qui serait sans remède. Aussi a-t-on la précaution de construire le panneau aa_1M_1M , trapèze rectangulaire dont on a les bases aa_1 et MM_1 et le côté perpendiculaire aM ; on enlève la pierre avec précaution jusqu'à ce que ce panneau s'applique sur la face mise à nu. On a alors l'arête a_1M_1 , et la seconde face de l'angle dièdre rentrant se taille sans difficulté. Il serait facile de tailler les faces d'extrados pp_1M_1M et $p'p_1M_1M'$ en se servant d'une CERCE; mais on se contente de dégrossir ces faces, attendu qu'on ne s'astreint jamais à tailler l'extrados d'une

voûte, qui est presque toujours recouverte en maçonnerie. Quant aux douelles d'intrados abb_1a_1 et $a'b'b_1a_1$, elles doivent être taillées avec soin. Pour cela, on construit le panneau abb_1a_1 ; on prend une droite a_2b_2 (fig. 4) égale à l'arc ab de la figure 2, développé, et l'on élève les perpendiculaires a_2a_2 et b_2b_2 respectivement égales à $\alpha x''$ et à $\beta\beta''$. Un point intermédiaire x , pris sur ab , donne de même l'ordonnée x_2x_2 égale à $\zeta x''$; et les trois points a_2, x_2, b_2 , suffisent pour déterminer l'arc qui doit terminer le panneau. Cela fait, ayant appliqué le panneau $abpM$ sur la face opposée IK, et divisé l'arc ab et son correspondant sur la face opposée, en un même nombre de parties égales, on a tout ce qu'il faut pour construire la surface cylindrique qui a ces deux arcs pour directrices. On y applique le panneau $a_2a_2b_2b_2$, sur lequel on a déterminé à l'avance les points de l'arc a_2b_2 , qui correspondent aux divisions de a_2b_2 ; on trace l'arc a_1b_1 sur la pierre; et en divisant l'arc $a'b'$ en un même nombre de parties que l'arc ab , on a sur a_1b_1 et sur $a'b'$ les points de repère nécessaires pour vérifier à la règle la surface cylindrique qui doit réunir ces deux arcs. On taillera de la même manière le voussoir U qui a pour panneau de tête sur la section droite du premier berceau la figure $e'fN's$, et sur celle du second berceau la figure $e'f'N's'$. Il n'y aura de différence qu'en ce que, dans le voussoir V, l'angle rentrant était formé par les joints inférieurs et par les extrados, tandis que dans le voussoir U il sera formé par les joints supérieurs et par les intrados. L'inverse aura lieu pour l'angle saillant.



Fig. 4.

On a pu remarquer dans la figure 2 que le point i , projection horizontale du point de rencontre des génératrices des deux berceaux qui répondent aux joints M et M', n'est pas sur le prolongement de CD, projection de l'arêtier; il en résulte que l'intersection des plans de joint qui ont pour traces aM et $a'M'$, se projette horizontalement suivant une droite $a''i$, qui ne coïncide pas avec CD. On ferait une observation analogue pour l'intersection des joints supérieurs; et il en est de même pour le voussoir U.

On peut tailler les voussoirs de l'arêtier par une autre méthode, moins exacte, mais fréquemment employée parce qu'elle est un peu plus expéditive.

Supposons que l'on remplace provisoirement les arcs ab et $a'b'$ (fig. 2) par leurs cordes, et les douelles correspondantes à ces arcs par les plans menés par les génératrices qui aboutissent aux extrémités de ces cordes; on aura ce qu'on appelle les *douelles plates*. Les traces de ces douelles plates sur le plan de naissance seront deux droites IT et $I'T$, respectivement parallèles aux génératrices des deux cylindres, et qui se rencontreront en un point T situé sur le prolongement de CD; car les génératrices qui limitent ces douelles se rencontrent sur l'arêtier, aux points projetés en a'' et b'' , l'intersection des douelles plates se projette elle-même suivant $a''b''C$. Connaissant ainsi les traces horizontales des douelles plates, et les projections de leur intersection, on déterminera par la méthode ordinaire exposée en Géométrie descriptive (Voy. ANGLE DE DEUX PLANS) l'angle dièdre formé par ces douelles plates; et l'on pourra construire un BEUVEAU (Voy. ce mot) présentant une ouverture égale à cet angle dièdre. On

pourra aussi se procurer des panneaux ayant la forme des douelles plates; car il suffit de construire, d'une part, un trapèze rectangulaire ayant pour bases aa'' et $\beta\beta''$ et pour côté perpendiculaire la corde ab , d'autre part un second trapèze rectangulaire ayant pour bases $a'a''$ et $\beta'b''$ et pour côté perpendiculaire la corde $a'b'$. Cela posé, l'ouvrier, après avoir choisi un bloc capable, à vue, du voutsoir qu'il s'agit de tailler, y dressera une face plane sur laquelle il tracera l'une des douelles plates; soit aa_1b_1 (fig. 3) cette douelle. Par l'arête a_1b_1 il fera passer un plan faisant avec aa_1b_1 un angle dièdre égal à celui des deux douelles plates; et pour cela il aura soin d'appliquer le beuveau perpendiculairement à a_1b_1 ; puis, sur le plan ainsi obtenu, il tracera la seconde douelle plate $a_1a'b'b_1$. Par les arêtes ab et $a'b'$, et en s'aidant de l'équerre, il fera passer des plans respectivement perpendiculaires aux deux douelles plates; et sur ces plans il appliquera les panneaux de tête $abpM$, $a'b'p'M$. Il lui sera facile alors de tailler toutes les faces planes, qui se trouvent déterminées chacune par deux droites, en prenant toutefois, pour l'angle dièdre rentrant, les précautions indiquées plus haut. Il restera à creuser les douelles plates suivant les arcs ab et $a'b'$ pour les convertir en douelles cylindriques, ce qui pourra se faire au moyen d'une cerce taillée sur la courbure de l'arc ab , par exemple, que l'on posera sur les arêtes aa_1 , bb_1 des douelles en des points de repère marqués à l'avance à des distances égales du panneau de tête $abpM$. De même pour l'autre douelle. Quant aux surfaces d'extrados, on se contentera de les dégrossir.

La première des deux méthodes que nous venons d'indiquer est connue sous le nom de *Méthode par équarrissement*; la seconde est la *Méthode par beuveau*. (Voy. COUPE DES PIERRES.)

On étend le nom d'ARÊTIER à toutes les courbes résultant de la pénétration de deux voûtes ayant même plan de naissance et même montée. L'arétier est alors généralement une courbe à double courbure. Ainsi dans les VOUTES D'ARÊTES EN TOUR RONDE (Voy. ce mot) l'arétier résulte de la pénétration d'une voûte annulaire et d'un conoïde; et il se projette horizontalement suivant une spirale d'Archimède.

On étend même le nom d'ARÊTIER à l'intersection d'un berceau ou d'une voûte conique avec une voûte quelconque, plus élevée. (Voy. LUNETTE.)

ARÊTIER (Charpente), pièce de bois placée à l'intersection de deux combles de même hauteur formant un angle saillant. (Voy. GROUPE DROITE, GROUPE BIAISE.)

Lorsque deux combles cylindriques se rencontrent ainsi, ils donnent lieu à un arétier elliptique, soumis aux mêmes règles qu'un arétier droit, mais présentant la courbure d'une ellipse. On détermine ses arêtes par les procédés que fournit la Géométrie descriptive pour l'intersection des surfaces; et on le projette ensuite sur un plan parallèle à ses faces verticales; cette projection, reportée sur le bois même, sert à donner à chacune des pièces courbes qui entrent dans l'arétier la forme précise qu'elle doit avoir. (Voy. le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, n° 458 et suiv.)

ARITHMOMÈTRE. Voy. MACHINES A CALCULER.

ARMES RAYÉES, armes dont le canon présente à l'intérieur des cannelures qui servent à diriger le projectile. L'emploi des armes rayées est beaucoup

plus ancien qu'on ne se le figure d'ordinaire. L'invention de la carabine rayée est attribuée à Gaspard Zollner, qui vivait à Vienne en 1498; et celle des rayures en hélice à Koller, de Nuremberg, mort en 1520; il existe encore des carabines rayées fabriquées en Allemagne à la fin du quinzième siècle. Des armes de ce genre paraissent avoir été employées dans l'armée russe en 1520; les Polonais en ont fait usage en 1625, et les Bavares en 1645. (Voy. le *Traité d'Artillerie* de M. Plobert.)

Les rayures droites, c'est-à-dire parallèles à l'axe du canon, ne paraissent pas avoir d'avantage bien marqué; il n'en est pas de même des rayures en hélice. La balle, ordinairement en plomb, ayant été forcée d'une manière quelconque, c'est-à-dire aplatie d'avant en arrière, augmentée par cela même de diamètre et s'engage dans les rayures, qu'elle ne peut plus quitter qu'au sortir de l'âme. Il en résulte que tandis qu'elle s'avance dans le sens de l'axe, elle prend un mouvement de rotation rapide autour de cet axe. Si la droite autour de laquelle tourne ainsi le projectile est un de ses axes principaux d'inertie majeur ou mineur, celui par exemple par rapport auquel le moment d'inertie est le plus grand, cet axe reste fixe dans le corps; le mouvement de rotation devient stable (Voy. le *Traité de Mécanique* de Poisson, tome II, chap. IV); et c'est à la stabilité de ce mouvement que paraît due la plus grande portée et la plus grande justesse de l'arme. La balle dévie comme avec un canon lisse; mais la DÉVIATION (Voy. ce mot) a toujours lieu dans le même sens; en sorte que, cette déviation une fois connue, il est facile d'y remédier en modifiant convenablement la ligne de mire. L'avantage des rayures en hélice est mis en évidence par le tableau suivant, présentant les résultats du tir de plusieurs canons de fusils, de 1^m,08 de longueur, les uns rayés, les autres sans rayures; le projectile était la balle ordinaire de 16^{mm},3 de diamètre, et la charge de 4^r,5.

Distance du but.	Désignation du canon.	Nombre de balles qui, sur 100 coups, ont atteint un but carré d'un côté de			
		2 ^m ,0	1 ^m ,50	1 ^m ,0	0 ^m ,50
150 ^m	Sans rayures....	66,7	55,0	33,3	11,7
	Rayures en hélice....	92,5	81,7	56,7	20,0
200 ^m	Sans rayures....	41,7	31,7	18,3	3,3
	Rayures en hélice....	77,2	66,1	43,2	12,8
250 ^m	Sans rayures....	18,3	11,7	10,0	»
	Rayures en hélice....	58,6	40,8	22,4	4,6

C'est surtout pour les grandes distances que l'avantage des rayures en hélice devient considérable.

Les rayures présentent un autre avantage, c'est d'exiger une moindre charge de poudre, parce que le mouvement étant retardé dans les premiers instants par le frottement que la balle forcée éprouve de la part de l'âme, sur laquelle elle se moule, la poudre a le temps de s'enflammer en entier et de passer à l'état gazeux avant que le projectile se soit déplacé sensiblement; l'augmentation de tension qu'il en résulte permet d'obtenir les mêmes effets avec une charge moindre. Par contre, les rayures en hélice diminuent toujours la vitesse du projectile au sortir de l'âme; et il est nécessaire d'aug-

menter un peu l'angle de tir ou la hausse (Voy. POINTAGE) relative à la distance que l'on considère.

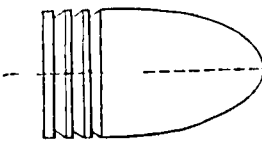
Dès 1793, et pendant une partie des guerres de l'Empire, les sous-officiers d'infanterie légère étaient armés d'une carabine rayée, dite *modèle de Versailles*.

C'est en 1842 qu'a été introduite dans l'armée la *carabine à percussion*, et en 1844 qu'a été adoptée la *carabine à tige*, portant au fond du canon une petite tige en acier autour de laquelle la charge est répartie, et qui offre un appui pour forcer la balle sans lui faire éprouver de déformation nuisible; cette carabine se tire avec des balles allongées; elle a une grande précision, comme le montre le tableau suivant :

Largeur du but de 2 ^m de hauteur.	Nombre des balles qui, sur 100 coups, ont atteint le but aux distances de									
	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
2 ^m	56,0	45,0	26,0	13,0	21,0	17,0	9,0	16,0	2,0	»
4 ^m	81,0	82,5	42,3	26,0	30,0	27,0	16,0	23,0	7,0	3,0
6 ^m	»	»	»	31,0	33,0	35,0	»	»	»	»
10 ^m	»	»	»	»	»	»	30,0	32,0	12,0	8,0

En même temps les balles de la carabine à tige ont une grande puissance; sur 42,3 qui touchent le but à 600^m, 41,3 traversent un premier panneau de peuplier de 22 millimètres d'épaisseur, 36,3 en traversent un deuxième, et 29,7 un troisième.

Enfin, le système des armes rayées portatives a été complété par l'adoption de la balle ogivale, Par



la forme aiguë de sa partie antérieure la résistance de l'air se trouve réduite aux deux tiers, ce qui contribue à

augmenter notablement les portées; et par les cannelures de sa partie postérieure cette même résistance contribue à maintenir l'axe de rotation parallèle à lui-même; car si, par exemple, la partie supérieure tend à se relever, la résistance de l'air augmente aussitôt sur la partie inférieure des cannelures, et tend ainsi à rétablir la balle dans sa direction primitive. Le tableau suivant donne le nombre moyen des balles qui, sur 100 coups, ont atteint un but de 2 mètres de hauteur. Il donne en même temps les hausses relatives aux diverses distances.

LARGEUR du but.	DISTANCES.	HAUSSES.	TIR des bataillons de chasseurs à pied.	TIRVECS de 1 ^{re} classe.
m.	m.			
0,5	150	10,0	41,5	54,5
»	200	13,0	»	»
1,0	250	16,1	37,7	40,3
1,0	300	18,2	31,9	46,5
1,5	350	21,2	35,2	49,0
1,5	400	24,3	33,9	46,8
2,0	450	27,8	29,7	36,0
2,0	500	31,5	24,9	29,7
2,5	600	39,8	21,9	26,5
3,0	700	49,2	20,9	18,8
4,0	800	60,0	20,0	19,7
5,0	500	72,0	19,6	23,9
» 3,0	1000	85,0	14,3	17,4

Le pas de l'hélice employée est ordinairement assez grand; si ce pas était trop faible, le frottement dans les rayures deviendrait si considérable que le plomb serait déchiré, et que la balle sortirait en débris, ou au moins tellement déformée qu'elle perdrait toutes ses propriétés. Dans la carabine à tige, modèle de 1846, le pas des hélices est de 2 mètres; et comme l'âme n'a que 0^m,868 de longueur, on voit que la balle ne peut faire un demi-tour entier dans l'intérieur du canon, ce qui ne l'empêche pas d'avoir au sortir de l'âme une vitesse de rotation de 50 à 60 tours par seconde. Le nombre des rayures est de 4.

Les rayures en hélice ont été appliquées au mousqueton de l'artillerie et au pistolet d'officier. Toutes les puissances étrangères font aujourd'hui usage des armes portatives à canon rayé, avec des projectiles de formes diverses.

Il était naturel de chercher à étendre aux bouches à feu l'avantage des rayures en hélice si bien démontré pour les armes portatives; la difficulté était d'y employer un projectile convenable. La dureté de la fonte de fer, par rapport au bronze des canons, ne permettait pas de faire pénétrer le boulet dans les rayures par simple pression; il fallait armer le projectile d'ailettes qui l'obligassent à suivre les rainures. Après divers essais on s'est arrêté en 1858 à un système d'ailettes composées chacune de deux boutons, en alliage moins dur que le bronze, mais suffisamment résistant; et ce système, appliqué en 1859, a obtenu un plein succès.

Les canons rayés s'emploient surtout dans le tir de plein fouet; ils ont une grande portée, 1500^m, 2000^m, 3000^m, 3500^m et même 4000^m suivant le calibre; et, la déviation étant toujours de même sens (vers la droite), il est facile d'en tenir compte. Le projectile, ayant la forme ogivale, éprouve moins de résistance de la part de l'air; ses PÉNÉTRATIONS (Voy. ce mot) sont plus profondes; et comme il marche toujours la pointe en avant, il peut être muni d'un artifice qui éclate quand il pénètre dans un massif à incendier.

Dans l'établissement des TABLES DE TIR (Voy. ce mot) pour les canons et obusiers rayés, il est important de tenir compte de la déviation, ce qu'on peut faire en assimilant la force déviatrice à une cause constante analogue à la pesanteur (Voy. DÉVIATION), ou mieux encore en consultant à cet égard l'expérience. (Voy. le *Traité de Balistique* de M. Didion, et le *Traité d'Artillerie* de M. Probert.)

ARMILLAIRE (SPHÈRE), globe terrestre muni de cercles ou *armilles*, qui figurent l'équateur, le méridien, l'horizon, l'écliptique, les deux colures, les tropiques et les cercles polaires. (Voy. GLOBES TERRESTRES.)

ARPENT, ancienne mesure agraire usitée en France. Sa valeur changeait d'une province à l'autre et souvent d'un lieu à l'autre dans une même province. L'arpent de Paris valait 34^m,19; l'arpent des eaux et forêts valait 51^m,07. L'arpent se subdivisait en 100 *perches*. (Voy. POIDS ET MESURES.)

ARPENTAGE, science pratique de la mesure des terres. Elle comprend trois parties: le lever des plans borné aux opérations les plus simples, la mesure des terres, ou arpentage proprement dit, et la division des héritages, ou PARTAGE DES TERRES (Voy.

ce mot). Dans les levés de plans faits en vue de l'arpentage, on ne recherche pas ordinairement une exactitude aussi rigoureuse que dans les opérations topographiques : le LEVER AU MÈTRE ET A L'ÉQUERRE est le procédé le plus souvent mis en usage par les arpenteurs ; mais ils se servent néanmoins quelquefois de la PLANCHETTE, de la BOUSSOLE, du GRAPHOMÈTRE, et dans quelques cas exceptionnels, de la LUNETTE STADIA (Voy. ces mots).

L'arpentage proprement dit a pour objet la mesure de la projection horizontale des terres, qu'on appelle aussi leur *base productive*, parce qu'on admet que, les végétaux croissant toujours verticalement, le produit d'une terre est proportionnel, non à son étendue réelle, mais à la surface de sa projection horizontale. L'opération qui substitue cette projection à la surface réelle porte le nom de *cultellation* (de *cultellare*, aplanir).

Lorsque le terrain qu'on veut mesurer affecte une forme géométrique, on obtient sa surface en appliquant les règles données par la Géométrie.

I. Si, par exemple, la forme du terrain est un triangle, on mesure l'un des côtés ; on abaisse du sommet opposé une perpendiculaire sur cette base ; on la mesure ; on fait le produit des nombres entiers ou fractionnaires de mètres obtenus ; on prend la moitié de ce produit ; et l'on a le nombre de mètres carrés, et fraction de mètre carré, contenus dans la surface cherchée. Il ne reste plus qu'à le convertir, s'il y a lieu, en hectares, ares et centiares.

Supposons que la base ait 239^m,4, la hauteur 197^m,5, on trouvera pour la moitié du produit 23640^m,75 ou 2 hectares 36 ares 41 centiares environ.

Si l'intérieur du triangle était inaccessible, on mesurerait les trois côtés, et l'on appliquerait la formule :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dans laquelle a, b, c désignent les côtés et p leur demi-somme. Supposons $a=280^m, b=199^m, c=105^m$; il en résultera $p=292^m$; par conséquent

$$S = \sqrt{292 \cdot 12 \cdot 93 \cdot 187} = 7806^m, \text{ ou } 78 \text{ ares } 6 \text{ cent.}$$

II. Lorsque le terrain a la forme d'un rectangle ou d'un parallélogramme, on élève une perpendiculaire commune à deux des côtés parallèles (aux plus grands ordinairement) ; on mesure l'un de ces côtés et la perpendiculaire, et l'on fait le produit des deux nombres obtenus.

III. Lorsque le terrain a la forme d'un trapèze, on élève une perpendiculaire commune aux deux bases ; on la mesure ainsi que ces bases, et l'on multiplie la demi-somme des bases par cette perpendiculaire. Si, par exemple, les bases ont respectivement 129^m et 97^m et que la hauteur ait 68^m, la surface demandée sera $\frac{1}{2}(129 + 97) 68$, c'est-à-dire 7684^m, ou 76 ares 84 centiares.

IV. Si le terrain a une forme polygonale quelconque ABCDEFGHI (fig. 1), on joint par une droite AF, nommée *directrice*, les deux sommets les plus éloignés ; et de tous les autres sommets on abaisse des perpendiculaires sur cette droite ; on mesure toutes ces perpendiculaires Bb, Cc, Dd, Ee, Gg, Hh, Ii, ainsi que les distances des points A, b, i, h, c, g, d, e, F à un même point O pris sur la directrice ;

d'où l'on déduit les longueurs Ab, Ai, ih, bc, hg, cd, de, eF, gF. La figure se trouve décomposée en triangles, rectangles et en trapèzes rectangulaires, dans lesquels on mesure les lignes nécessaires pour

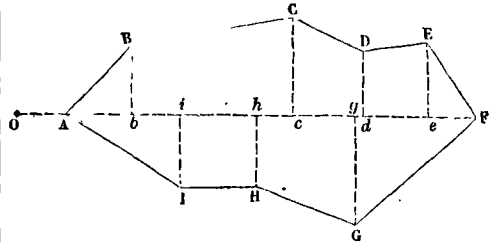


Fig. 1.

obtenir la surface. En désignant par S la surface totale, on aura donc

$$S = \frac{1}{2} Bb \cdot Ab + \frac{1}{2} (Bb + Cc) bc + \frac{1}{2} (Cc + Dd) \cdot cd + \frac{1}{2} (Dd + Ee) \cdot de + \frac{1}{2} Ee \cdot eF + \frac{1}{2} Gg \cdot gF + \frac{1}{2} (Gg + Hh) \cdot gh + \frac{1}{2} (Hh + Ii) hi + \frac{1}{2} Ii \cdot Ai.$$

Si, par exemple, on a trouvé :

Bb = 93^m ; Cc = 128^m ; Dd = 92^m ; Ee = 101^m ; Gg = 152^m ; Hh = Ii = 103^m ; Ab = 83^m ; bc = 206^m ; cd = 91^m ; de = 81^m ; eF = 69^m ; Fg = 152^m ; gh = 130^m ; hi = 98^m ; Ai = 150^m, on obtiendra : S = 94168^m,5 ou 9 hectares 41 ares 68 centiares $\frac{1}{2}$.

L'avantage de ce procédé consiste en ce que les lignes de division sont celles qui servent à la mesure de la surface : ce qui n'arriverait pas si l'on décomposait le polygone en triangles.

Il peut arriver que le terrain qu'on a à mesurer soit terminé en tout ou en partie par des lignes courbes. Si les sinuosités sont peu considérables, comme dans la figure 2, par exemple, on substitue aux diverses parties du contour des droites qui s'en éloignent peu ; on remplacerait ainsi le contour de la fig. 2 par le quadrilatère ABCD. Ce procédé, qui n'est point rigoureux, conduit cependant à une approximation suffisante quand il est mis en pratique par un arpenteur exercé. On l'appelle la *méthode des emprunts*, parce qu'on emprunte sur les propriétés voisines des portions de terrain, et qu'on leur en restitue d'autres, de manière à établir, autant qu'il est possible, une exacte compensation.

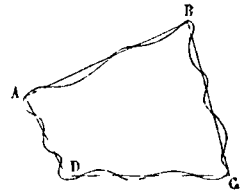


Fig. 2.

On peut employer un autre procédé, plus exact, mais plus long, qui consiste à prendre sur le contour curviligne un certain nombre de points assez rapprochés pour que les arcs de courbe qui les joignent puissent être considérés sensiblement comme des lignes droites ; on substitue alors au contour curviligne réel un contour polygonal qui a ces points pour sommets..

On pourrait encore, si l'on voulait pousser l'approximation plus loin, inscrire un polygone dans le contour proposé (fig. 3); mesurer l'aire de ce polygone, et évaluer les parties courbes excédantes par la formule de Th. Simpson. (Voy. QUADRATURE.)

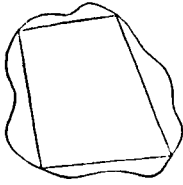


Fig. 3.

VI. Quand l'intérieur du polygone à mesurer est inaccessible, ou couvert, soit de constructions, soit de bois, qui empêchent d'y mener des rayons visuels, on inscrit ce polygone dans une figure qu'on sache mesurer, ordinairement dans un rectangle tel que MNOP (fig. 4); des sommets C, E, F, H, qui ne sont pas situés sur le contour

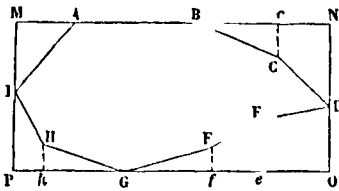


Fig. 4.

du rectangle, on abaisse, sur les côtés de ce rectangle les plus voisins, les perpendiculaires Cc, Ee, Ff, Hh. L'espace compris entre le polygone ABCDEFGHI et le rectangle MNOP se trouve ainsi décomposé en triangles rectangles, tels que AMI, BCc, GFf, GHh, et en trapèzes rectangulaires tels que NDCc, ODEe, eEFf, PIHh; on peut donc mesurer aisément cet espace; et, en retranchant sa superficie de celle du rectangle MNOP, on obtient pour reste celle du polygone proposé.

Ce procédé est celui qu'on emploie ordinairement pour évaluer la superficie des pièces d'eau, celle des bois ou des groupes d'habitations. On peut être obligé de combiner ce procédé avec la méthode des emprunts; c'est ce qui arriverait dans le cas de la

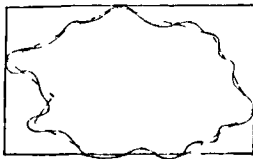


Fig. 5.

figure 5. On remplacerait d'abord ce contour curviligne par un contour polygonal, de manière à ne pas altérer sensiblement la superficie; on inscrirait ensuite le polygone dans un

rectangle, et l'on achèverait l'opération comme il a été dit ci-dessus.

ARRACHEMENT, se dit de la rencontre de deux corps, lorsque l'intersection de leurs surfaces forme une courbe unique, sans points multiples. Si l'un des corps était enlevé, il laisserait dans l'autre une cavité à un seul orifice plus ou moins contourné. (Voy. PÉNÉTRATION, INTERSECTIONS DE SURFACES.)

ARRIÈRE-VOUSSURE, voûte d'une nature particulière que l'on construit en arrière d'une porte cochère, pour couvrir l'espace dans lequel se développent les vantaux. On en distingue plusieurs espèces.

ARRIÈRE-VOUSSURE DE MARSEILLE. Dans un mur

dont les faces parallèles ont pour traces les droites C'Y et LZ (fig. 1) on veut ouvrir une porte cochère; on la compose de plusieurs parties. La première est un berceau à plein cintre (Voy. BERCEAU) dont la demi-section droite est représentée en C'D'. Le plan de cette section est pris pour plan vertical de projection; le plan de naissance est pris pour plan horizontal. La seconde partie est encore un berceau à plein cintre, dont l'arc de tête est projeté en AB, A'B'; ce second berceau n'a qu'une très-faible longueur AI, égale à la différence des rayons des deux cercles A'B' et C'B'; il forme la *feuillure* destinée à recevoir le vantail de la porte. La troisième est une surface gauche qui commence au cercle AB, A'B', et se termine à un nouvel arc de cercle HL, H'L', tracé dans la face HZ du mur, dont le centre est en ω et qui est terminée à l'arête LL', intersection de la face HZ avec le piédroit oblique AL qui forme l'ébrasement de la porte. Cette surface gauche est engendrée par une droite assujettie à rencontrer constamment le cercle HL, H'L', le cercle AB, A'B', et l'axe O'H des berceaux. Pour obtenir une génératrice de cette surface gauche, on n'a qu'à mener par l'axe O'H un plan quelconque; sa trace verticale sera une droite telle que O'r passant par le centre O'. Cette trace rencontre en a' et en b' les arcs A'B' et H'L'; si l'on projette le premier en a sur AB, et le second en b sur HL, et qu'on joigne ab, ce sera la projection horizontale de la génératrice dont a'b' est la projection verticale. On obtiendra de la même manière autant de génératrices qu'on voudra. La génératrice extrême ainsi obtenue sera celle qui a pour projections l'L', lL. On voit que l'espace projeté horizontalement en lAL n'est pas recouvert par la surface gauche que l'on vient de définir. Pour achever de le recouvrir, on substitue à l'arc de tête H'L' une courbe tracée dans le plan vertical d'ébrasement AL, et qui est représentée en projection verticale par A'L'. Nous dirons tout à l'heure comment on obtient cette courbe. Une droite assujettie à rencontrer la courbe AL, A'L', le cercle AB, A'B' et l'axe O'H du berceau, engendre une seconde surface gauche, qui est celle que l'on emploie pour recouvrir l'espace projeté en lAL. La courbe AL, A'L' n'est pas entièrement arbitraire; elle doit être choisie de façon que les deux surfaces gauches employées se raccordent suivant la génératrice commune lL, l'L'. On démontre en Géométrie descriptive (Voy. SURFACES GAUCHES, PLANS TANGENTS) que pour que deux surfaces gauches qui ont une génératrice commune se raccordent suivant cette génératrice, il faut et il suffit qu'elles aient trois plans tangents communs en trois points de cette génératrice. Or, cette condition est remplie au point l, l' pour les deux surfaces gauches que nous considérons; car pour chacune d'elles le plan tangent en ce point est déterminé par la génératrice lL, l'L' et par l'élément de la directrice AB, A'B'. La condition est pareillement remplie au point où lL rencontre l'axe O'H. Il reste donc à faire en sorte qu'elle soit remplie au point L, L'. Le plan tangent en ce point à la première surface gauche est déterminé par la génératrice lL, l'L' et par la tangente L'T, LH à l'arc de tête. Ce plan coupe donc le plan vertical AB suivant une parallèle à L'T passant par le point l, l'; soit l'φ sa projection verticale, terminée à la verticale du point A'. Si l'on joint φL', la droite ayant pour

projections AL et $\phi L'$ sera donc dans le plan tangent en L, L' à la première surface. Il suffira donc, pour que ce plan soit en même temps tangent à la seconde surface, que la directrice dont $A'L'$ est la projection soit tangente à la droite $AL, \phi L'$. Afin de remplir cette condition, faisons tourner le plan vertical d'ébrasement AL autour de la verticale du point A jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical de projection; dans ce mouvement, le point L, L' viendra en λ, L'' ; et le point ϕ n'ayant pas changé de place, la droite $AL, \phi L'$ prendra la position $A\lambda, \phi L''$. Le problème se réduit donc à tracer

une courbe tangente en A' à la droite $A'\phi$ et en L'' à la droite $\phi L''$. Ce problème peut être résolu de plusieurs manières; on pourrait, par exemple, se contenter de tracer un cercle tangent en A' à la verticale $A'\phi$ et se raccordant avec la droite $\phi L''$. Ordinairement, on forme la courbe de deux arcs de cercle; le premier décrit d'un point O situé sur XY à une distance $A'O$ égale au rayon $O'A'$, le second tangent en L'' à $\phi L''$ et se raccordant avec le premier. Pour obtenir ce dernier arc, on verra aisément qu'il faut, sur une perpendiculaire à $\phi L''$, prendre une longueur $L''e$ égale à $A'O$, joindre Oe ,

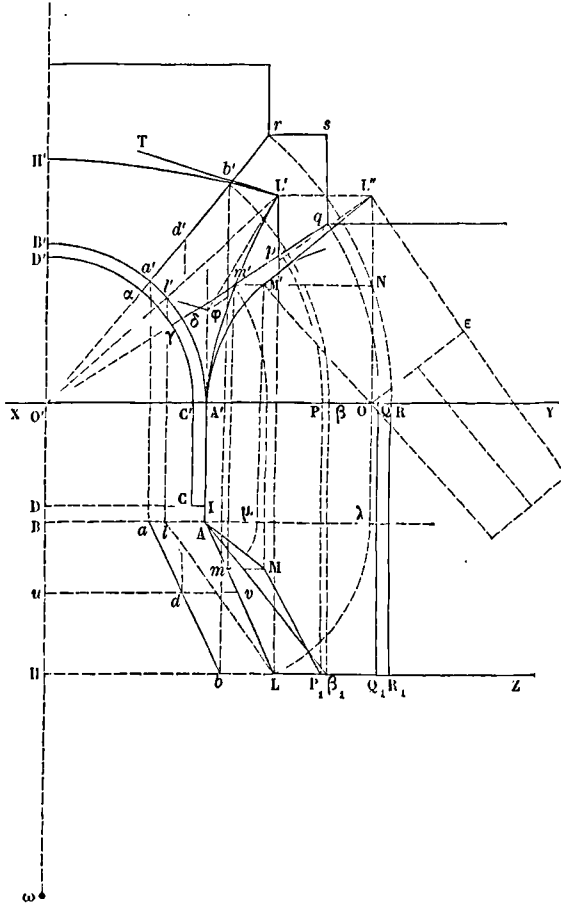


Fig. 1.

et sur le milieu de la ligne de jonction élever une perpendiculaire qui rencontrera le prolongement de $L''e$ au centre de l'arc demandé. On joindra ce centre au point O , on prolongera la ligne de jonction jusqu'en M ; ce sera le point de raccordement des deux arcs. Il faudra maintenant trouver la projection de la courbe $A'M'L''$ supposée ramenée dans le plan vertical AL . Pour cela on projettera M' en μ sur la droite $A\lambda$ parallèle à XY ; du point A comme centre on décrira l'arc μm ; par le point m on élèvera une perpendiculaire à la ligne de terre, et par le point M' on mènera une parallèle à cette

ligne; le point m' où ces deux droites se rencontreront sera la projection verticale du point μ , M' ramené dans le plan vertical AL . On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de la courbe $A'M'L''$.

Pour tracer l'appareil de la voûte, on divisera l'arc $C'D'$ en un nombre impair de parties égales, et, par les points de division, on mènera des rayons, tels que $O'\alpha$ et $O'\beta$, que l'on prolongera jusqu'à la rencontre des joints de lit des assises du mur. Puis, avant de procéder à la taille des voussoirs, il faudra se procurer les panneaux de joints

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du voussoir qui a pour panneau de tête dans le plan vertical HZ la figure $pqsrb'L'$, et dans le plan vertical XY la figure $\beta\gamma\epsilon\tau\gamma$. On supposera que les plans de joint tournent autour de l'axe O'H qui y est contenu, jusqu'à se rabattre sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, le point L, p viendra en P; le point dont la projection verticale est q viendra en Q; le point m, m' situé sur la génératrice qui va au point L, p, et sur la directrice AL, A'L', viendra en M; le point projeté en δ viendra en A, et le point projeté en γ viendra en C. Le contour du panneau de joint inférieur, qui n'est fermé que de lignes droites, sera donc C'CIAMP, Q, Q. On verra de même que le panneau de joint supérieur a pour contour C'CIA β , R, R. On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour appliquer le trait sur la pierre. On préparera un prisme droit ayant pour base la figure $\alpha\gamma qsr\alpha$ et pour hauteur l'épaisseur RR₁. Sur la base antérieure on appliquera le panneau $pqsrb'L'$, et sur les faces qui correspondent à γq et αr les panneaux de joints inférieur et supérieur. Le panneau $pqsrb'L'$ est représenté par les mêmes lettres sur la figure 2 qui donne la forme du voussoir; le pan-

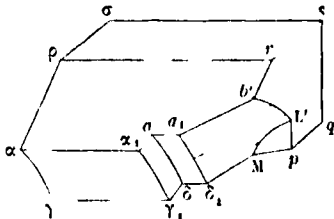


Fig. 2.

neau de joint supérieur est représenté en $\alpha\alpha, aa, b'rp$, et le panneau de joint inférieur est représenté en $\gamma\gamma, \delta\delta, Mpq$... La douelle cylindrique se taillera à l'aide d'une équerre que l'on tiendra normalement à la base $\gamma\alpha\rho\sigma$ en la faisant mouvoir le long de l'arc $\alpha\gamma$; on prolongera cette douelle d'une longueur égale à la distance C'C prise sur la figure 1, et l'on tracera à la règle ployante l'arc $\alpha_1\gamma_1$ égal et parallèle à $\alpha\gamma$; puis, à l'aide d'un calibre taillé sur le contour CIA de la figure 1, on taillera la feuillure $\alpha_1aa, \delta_1\delta\gamma_1$. Les droites L'p et Mp, appartenant l'une au panneau de tête et l'autre au panneau de joint inférieur, déterminent un plan que l'on taillera en fouillant la pierre avec précaution jusqu'à ce qu'on puisse y appliquer un panneau L'Mp taillé sur le triangle curviligne L'M'N de la figure 1. Il restera à tailler la douelle gauche; pour cela on se servira d'une règle appuyée d'une part sur l'arc $a_1\delta_1$, de l'autre sur les courbes $b'L'$ et L'M successivement. On aura soin de se procurer préalablement des points de repère; ils s'obtiennent aisément sur la figure 1, en menant par le point O' des droites qui rencontreront les courbes $a'\delta$ et $b'L'$, ou $a'\delta$ et L'm' en des points qu'il sera facile de reporter sur l'arc $a_1\delta_1$ de la figure 2 et sur les arcs $b'L'$ et L'M de cette même figure.

Si l'épaisseur RR, du mur était assez grande pour qu'il fût impossible de donner cette longueur aux voussoirs; on les diviserait par des plans perpendiculaires à l'axe O'H. Les plans de division

compris entre O'C et DC (fig. 1) ne donneraient lieu à aucune difficulté. Ceux qui seraient compris entre AB et HZ couperaient la douelle gauche, et il serait nécessaire d'avoir la projection verticale de l'intersection, parce qu'elle remplacerait les courbes H'L' et L'A'. Si uv (fig. 1) est la trace horizontale d'un de ces plans, il coupera la projection horizontale ab d'une génératrice quelconque, en un certain point d, qui, reporté en d' sur a'b' par une perpendiculaire à la ligne de terre, donnera un point de la projection verticale demandée. On en obtiendra de la même manière autant que l'on voudra.

Si l'arc de tête H'L' était trop bas, il pourrait arriver que le vantail de la porte en s'ouvrant rencontrerait par sa partie supérieure la douelle gauche et se trouverait ainsi arrêté dans son mouvement. Pour s'assurer que l'arc H'L' est placé assez haut, on coupe par un même plan horizontal la douelle gauche et la surface de révolution engendrée par l'arc A'B', AB en tournant autour de la verticale du point A. Les deux intersections s'obtiennent en projection horizontale sans aucune difficulté; et il faut, pour que la porte en tournant ne rencontre pas la douelle gauche, que les deux projections n'aient aucun point commun dans l'intérieur du trapèze ABHL. En répétant l'épreuve pour un certain nombre de plans horizontaux répartis entre les points O' et B', on s'assure ainsi que l'arc de tête H'L' est convenablement placé. En général, il sera à une hauteur convenable si la distance B'H' n'est pas inférieure à la moitié de la distance BH; et le rayon de l'arc H'L' sera suffisant s'il n'est pas inférieur à 5 fois cette même distance BH. Il existe au reste une méthode pour déterminer le minimum de hauteur à donner à l'arc H'L'. Elle consiste à couper par des plans menés suivant l'axe O'H (fig. 1) la surface engendrée par la révolution du cercle A'B' autour de la verticale du point A; à mener des tangentes aux courbes d'intersection par les points où ces divers plans coupent respectivement le cercle AB, A'B', et à chercher l'intersection du plan de tête et du plan d'ébrasement par la surface gauche qui a ces tangentes pour génératrices; on obtient ainsi une limite inférieure que l'arc H'L' ne doit pas dépasser.

Dans chaque plan sécant, en effet, la tangente menée comme on vient de le dire est la limite inférieure de la position que peut occuper la génératrice correspondante de la douelle gauche. Cette méthode est d'une exécution assez pénible à cause du grand nombre de courbes qu'il faut déterminer par points. (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, p. 234, et le *Traité de la coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 262.)

ARRIÈRE-VOUSSURE DE MONTPELLIER. Elle ne diffère de l'arrière-voussoir de Marseille qu'en ce que l'arc H'L' est remplacé par une droite horizontale. Les constructions et la taille des voussoirs sont d'ailleurs exactement les mêmes. Ce genre de voussoir s'emploie quelquefois pour les fenêtres cintrées.

ARRIÈRE-VOUSSURE CONIQUE. Les données restent les mêmes que dans le cas de l'arrière-voussoir de Marseille, on peut adopter au lieu de la douelle gauche une douelle conique que l'on déterminera comme il suit. Prenons pour plan vertical de pro-

jection le plan AB de la figure 1, et le même plan horizontal. Concevons qu'après avoir mené un plan vertical suivant $H'\omega$ (fig. 3) on le transporte d'a-bord parallèlement à lui-même en $h\omega'$, et qu'en-

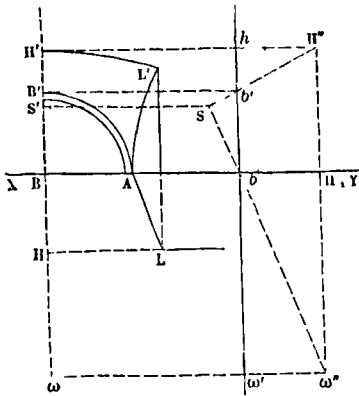


Fig. 3.

suite on le rabatte sur le plan vertical de projection en le faisant tourner autour de $h\omega'$. Dans ce mouvement, le point H' viendra en H'' , à une distance $H''h$ égale à la distance BH de la figure 1; le point ω viendra en ω'' . Joignons $H''b'$ et $\omega''b$, qui se couperont en un point s ; enfin ramenons s en s' sur $H'B$, par une parallèle à XY . Le point dont les projections sur le plan vertical primitif et sur le plan auxiliaire rabattu sont s' et s , sera le sommet d'une surface conique dont les cercles $H'L'$ et AB' seront des sections parallèles. Cette surface conique sera coupée par le plan d'ébrasement AL suivant une hyperbole dont AL' représente la projection verticale. Pour diviser la voûte en voussoirs, on se servira encore de plans menés par l'axe du berceau qui forme la porte; ces plans couperont la douelle cylindrique suivant des droites. Mais ils couperont la douelle conique suivant des hyperboles; pour cette raison l'arrière-voûture de Marseille offre plus d'avantage au point de vue pratique.

On a proposé plusieurs autres arrière-voûtures coniques, dont aucune n'est exempte de quelque inconvénient grave.

ARRIÈRE-VOÛTURE A GÉNÉRATRICES CIRCULAIRES. Les données étant supposées les mêmes que pour l'arrière-voûture de Marseille, on suppose les points B, B' et H, H' (fig. 4) joints par une droite, qui est rabattue sur le plan vertical en $B'h$. On décrit dans le plan d'ébrasement AL un arc de cercle, d'un rayon plus grand que celui du cercle de feuillure. Ce cercle est rabattu sur le plan vertical en $A'L'$; ramené dans le plan d'ébrasement, il a pour projection verticale l'ellipse $A'L'$. L'arc de tête $H'L'$ devra passer par ce point L' . Cela posé, si l'on mène un plan vertical quelconque MN parallèle au plan de tête, il coupera la droite en un point M, M' , et le cercle tracé dans le plan d'ébrasement en un point N, N' . Dans le plan MN concevons que l'on trace un arc de cercle, ayant son centre sur la verticale du point M , et passant par les points M, M' et N, N' ; ce sera une des génératrices de la voûte. Quand le plan mobile MN viendra coïncider avec HL , la génératrice se confondra avec l'arc de tête $HL, H'L'$;

quand au contraire le plan mobile viendra coïncider avec AB , la génératrice se confondra avec le cercle de feuillure. On appaile cette voûte en menant les plans de joints par l'axe $O'H$; on a donc

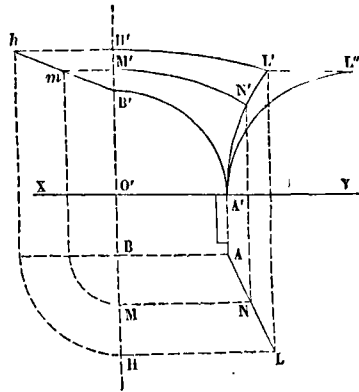


Fig. 4.

à déterminer leur intersection avec les diverses génératrices circulaires. Ce genre de voûte est peu employé.

ARRIÈRE-VOÛTURE DE SAINT-ANTOINE. Elle tire son nom de l'ancienne porte Saint-Antoine à Paris, où il existait une voûte de ce genre. La voûte n'était point motivée par le mouvement des vantaux, car la porte était rectangulaire, et terminée à sa partie supérieure par une PLATE-BANDE (*Voy. ce mot*). Nous prendrons le plan horizontal de projection à la hauteur de cette plate-bande. Soient $C'GAL$ et $E'EJFK$ (fig. 5) les contours des piédroits. Nous prendrons le plan vertical de projection parallèle

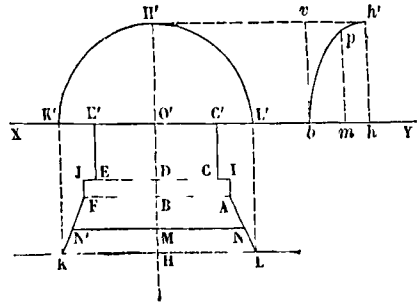


Fig. 5.

au plan de tête, dont la trace est KL . Dans ce plan de tête, imaginons une ellipse décrite sur KL comme grand axe; elle se projettera verticalement suivant $K'H'L'$. (Dans la voûte de la porte Saint-Antoine cette ellipse était remplacée par un cercle.) Dans le plan vertical dont la trace est BH imaginons une seconde ellipse; elle est rabattue sur le plan vertical en $bp'h'$. Concevons maintenant un plan vertical quelconque MN parallèle au plan de tête; il coupera en N la trace AL du plan d'ébrasement, et son intersection avec le plan vertical BH sera une verticale, qui rencontrera la seconde ellipse, et qui est rabattue en mp , si l'on suppose $bm = BM'$. Dans le plan vertical MN imaginons enfin une ellipse dont les demi-axes soient MN et

mp; ce sera la génératrice de la voûte. Quand le plan vertical mobile MN viendra coïncider avec KL, l'ellipse génératrice sera égale à K'H'L'; quand au contraire le plan mobile viendra coïncider avec AF, l'ellipse génératrice se réduira à la droite AF.

Si l'on prend pour axe des x la droite HL, pour axe des y la droite HB, et pour axe des z la verticale du point H, on trouve aisément que cette surface a pour équation

$$z^2 = h^2 \left[1 - \frac{x^2}{(py + q)^2} \right] \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right),$$

en représentant par h la longueur O'H', par l la longueur BH, par q la longueur AB, et par p la quantité

$$\frac{HL - AB}{BH}.$$

On appareille cette voûte en faisant passer les plans de joints par l'axe O'H'; on a à déterminer l'intersection de chacun d'eux avec les génératrices elliptiques. Les opérations sont longues, mais ne présentent pas de difficulté réelle. Du reste ce genre de voûte n'est plus qu'un objet de curiosité.

ARRIMAGE, disposition méthodique de la charge d'un vaisseau. La stabilité exige que le centre de gravité soit placé le plus bas possible (*Voy. STABILITÉ HYDROSTATIQUE*), et la facilité d'évolution (*Voy. ce mot*) ne s'acquiert qu'en rapprochant les parties pesantes du navire du milieu de sa longueur, tandis que pour adoucir les mouvements de ROULIS et de TANGAGE (*Voy. ces mots*) il conviendrait au contraire d'éloigner ces parties pesantes de la verticale du centre de gravité. Ne pouvant concilier ces deux règles contradictoires, on étend ordinairement les poids en longueur et en largeur par couches horizontales, en plaçant au fond du navire les matières les plus pesantes, sauf l'artillerie, dont la place est déterminée à l'avance. Le lest et les provisions les plus lourdes occupent la cale; les provisions plus délicates, les rechanges, les objets d'un usage fréquent, se placent dans l'entrepont; les manœuvres, les ancrs, les embarcations légères sont placées hors de la coque. La charge doit être distribuée symétriquement par rapport au longitudinal. On se réserve une portion de lest, appelée *lest volant*, et qui représente environ le dixième du lest total, pour changer au besoin la position du centre de gravité du navire et remédier aux défauts que sa marche aurait manifestés.

Le poids d'un vaisseau de 1^{er} rang à hélice, y compris sa charge, est d'environ 6466 tonneaux; celui d'une frégate de 1^{er} rang, de 3796 tonneaux; celui d'une corvette, de 1456 tonneaux; celui d'un aviso de 1^{re} classe, de 1091 tonneaux; celui d'une chaloupe canonnière, de 113 tonneaux environ (*Voy. DÉPLACEMENT*). On peut consulter sur l'arrimage les *Séances nautiques* de M. de Bonnefoux, et le traité de l'*Arrimage des vaisseaux* de Missiessy.

ARRIVER, obéir au vent, se dit d'un navire dont la direction, estimée dans le sens de sa marche, fait un angle de plus en plus grand avec celle d'où vient le vent.

ARTICULATION, liaison de deux pièces de machine qui, dans tous leurs mouvements, conservent soit un point commun, soit une droite commune. L'articulation est dite *sphérique* dans le premier cas; le *genou à coquilles* à l'aide duquel une plan-

chette ou un graphomètre est lié à son support, offre un exemple de ce premier genre d'articulation. L'articulation est dite *cylindrique* quand les deux pièces ont une droite commune; les *charnières*, les *tourillons* offrent des exemples de ce second mode. (*Voy. SYSTÈMES ARTICULÉS*.)

ARTIMON, ou *arbre de poupe*, mât le plus voisin du timon ou de la poupe. La voile basse adaptée à ce mât porte le nom de *voile d'artimon*.

ASCENSION DROITE, arc d'équateur céleste compris entre le POINT VERNAL (*Voy. ce mot*) et le méridien qui passe par le centre d'un astre. Les ascensions droites se comptent de zéro à 360° dans le sens du mouvement de rotation du globe, ou en sens inverse du mouvement diurne apparent de la sphère céleste. L'ascension droite s'observe à l'aide de la LUNETTE MÉRIDIENNE (*Voy. ce mot*) et d'une horloge réglée sur le temps sidéral, de manière à marquer 0° 0' lorsque l'équinoxe du printemps passe au méridien: l'heure que marque l'horloge au moment du passage d'un astre au méridien fait connaître immédiatement l'ascension droite; car puisque la sphère céleste tourne de 360° en 24 heures sidérales, il en résulte qu'elle tourne de 15° par heure, ou de 15' de degré par minute de temps, ou de 15" de degré par seconde de temps; l'heure marquée par l'horloge convertie en degrés, minutes et secondes d'après ces valeurs donne l'ascension droite. Quand il s'agit d'un astre ayant un diamètre apparent, comme le soleil ou la lune par exemple, on observe l'heure du passage de son bord occidental au méridien, puis l'heure du passage de son bord oriental; on prend la moyenne, qui est l'heure du passage du centre, d'où l'on déduit son ascension droite comme il vient d'être dit.

Les ascensions droites, au lieu d'être exprimées en degrés, sont souvent exprimées en heures, minutes et secondes de temps, comme l'observation les donne.

ASCIENS (du grec α , privatif, et de $\sigma\kappa\acute{\iota}$, ombre), peuples qui, à certaines époques de l'année, n'ont point d'ombre. Ce sont les habitants de la zone torride.

ASPECTS, nom donné par les anciens astronomes aux positions relatives d'un astre par rapport au soleil et à la terre. Ces positions relatives jouaient un grand rôle en astrologie. Aujourd'hui la dénomination d'aspects ne s'emploie plus guère que pour désigner par un terme commun les syzygies et les quadratures. (*Voy. PHASES*.)

ASSEMBLAGES, modes divers employés pour réunir deux pièces de bois. On peut avoir à fixer le bout d'une pièce sur la partie moyenne de l'autre; on peut avoir à réunir deux pièces bout à bout, ou par leurs parties moyennes, ou dans des positions parallèles; l'assemblage varie suivant ces divers cas.

1. Lorsqu'il s'agit de fixer le bout d'une pièce sur le corps d'une autre pièce, on peut les réunir par simple *entaille* à rai-bois, par *tenon et mortaise*, ou par *embrèvement*. Les entailles le plus fréquemment employées sont l'*entaille rectangulaire* et l'*entaille à queue d'hironde*. Dans l'entaille rectangulaire (fig. 1), l'extrémité de la pièce A a été entamée à mi-bois, de manière à former une saillie ayant la forme d'un parallélepède rectangle; dans la pièce B on a pratiqué une cavité précisément égale à

cette saillie; en sorte qu'en engageant la saillie A dans la cavité B, les deux pièces se trouvent assemblées. On consolide l'assemblage par des chevilles, des clous, ou par tout autre moyen bien connu.

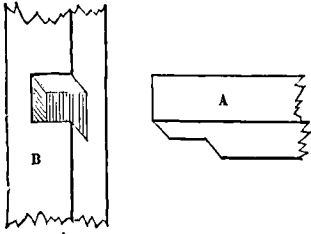


Fig. 1.

Cet assemblage n'est employé que dans les constructions légères. Dans l'entaille à queue d'hironde (fig. 2) la saillie ménagée à l'extrémité de la pièce A a la forme d'un trapèze $abcd$, dont la base cd , ap-

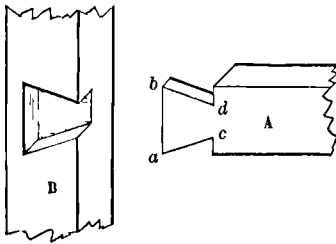


Fig. 2.

pelée *collet* ou *racine*, est plus petite que la base antérieure ab . La pièce B présente une cavité ayant exactement la forme de la saillie $abcd$; et en engageant la saillie de la pièce A dans la cavité de la pièce B les deux pièces se trouvent assemblées. Cet assemblage, plus solide que le précédent, se retrouve dans la plupart des constructions.

Dans l'assemblage par tenon et mortaise, l'une des pièces offre également une saillie, c'est le tenon, et l'autre pièce une cavité correspondante, c'est la mortaise. Le tenon (fig. 3) est une saillie

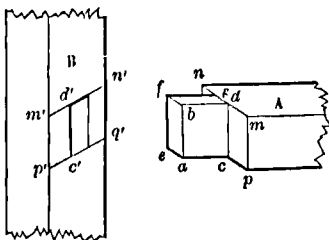


Fig. 3.

ayant la forme d'un parallépipède rectangle $abcd$, mais qui n'a que le tiers de l'épaisseur mn de la pièce A à l'extrémité de laquelle il est formé. La face $abfe$ est le *bout* du tenon; la face $abdc$ et son opposée sont les *joues*; la face $bdgf$ et son opposée sont les *faces d'épaisseur*; la partie gdc est la *racine*; la face $cdmp$ et son analogue de l'autre côté du tenon forment les *abouts* de la pièce A. La mortaise offre en creux les mêmes parties que le tenon; les

portions de bois comprises entre les joues de la mortaise et les faces extérieures correspondantes de la pièce B se nomment les *jouées*; l'espace $d'm'p'$ et son analogue de l'autre côté de la mortaise, sur lesquelles s'appliquent les abouts de la pièce A, forment ce qu'on appelle l'*occupation* ou la *portée* de la pièce B. On renforce quelquefois le tenon près de sa racine lorsque la pièce qui le porte doit supporter de grands efforts dans le sens perpendiculaire à sa longueur.

Lorsque la pièce A doit pénétrer obliquement dans la pièce B, le tenon et la mortaise devraient être des parallépipèdes obliques, ayant leurs arêtes latérales parallèles à celles de la pièce A, comme on le voit en $abcd$ (fig. 4); mais afin de ne pas affaiblir la pièce B en y pratiquant l'angle aigu rentrant abd , d'ailleurs difficile à exécuter

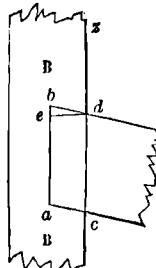


Fig. 4.

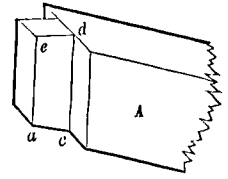


Fig. 5.

par refouillement, on tronque le tenon perpendiculairement aux arêtes latérales de la pièce B, comme on le voit en ed ; la figure 5 montre en perspective la pièce A et son tenon dégagé de la mortaise. Cet assemblage est dit à *tenon en about*.

Le tenon peut se réduire à un prisme triangulaire; c'est ce qui arrive quelquefois lorsqu'une pièce verticale A vient s'assembler avec une pièce oblique B. Le tenon abc (fig. 6) prend alors le nom de *houlice*.

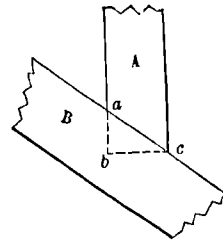


Fig. 6.

Enfin, il peut arriver que le tenon soit dirigé suivant le plan diagonal de la pièce A; c'est ce qui arrive dans le cas où la lisse d'appui d'une barrière est *déversée*, c'est-à-dire disposée de manière que l'un de ses plans diagonaux soit vertical (fig. 7); le potelet A qui la soutient doit alors avoir un de ses plans diagonaux confondu avec celui de la lisse; les deux pièces se touchent suivant deux faces triangulaires projetées en xuy , xvy ; et sur ces faces, formant le bout de la pièce A, le tenon $abcd$, $a'b'c'd'$ fait saillie. On se rend aisément compte de la disposition de la mortaise qui doit recevoir ce tenon. Cet assemblage est connu sous le nom d'*as-*

semblage à onglet ou à tenon et mortaise sur l'arête.

Quand les deux pièces doivent être assemblées obliquement, on donne plus de solidité à l'assem-

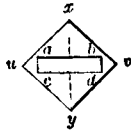
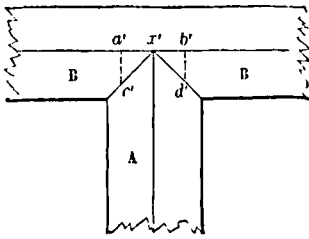


Fig. 7.

blage et on le met en état de mieux résister aux efforts qui tendent à s'exercer dans la direction de la pièce A, en pratiquant un *embrèvement*; c'est-à-dire qu'au lieu de se contenter de faire appuyer les abouts de la pièce A sur la portée de la pièce B, on fait pénétrer la première d'une petite quantité dans la seconde, de manière à produire un arc-boutement favorable à la résistance qu'on se propose d'obtenir. La figure 8 représente cette disposition; on voit que non-seulement le tenon *acde*, tronqué comme ci-dessus, s'engage dans une mortaise correspondante, mais que le corps même de la pièce A pénètre d'une petite quantité *dk* dans l'épaisseur de la pièce B, et qu'il se produit sur la face *dk* un

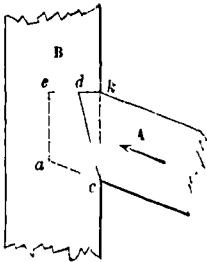


Fig. 8.

arc-boutement qui augmente d'une manière considérable la résistance aux efforts exercés dans le sens de la flèche. La figure 9 montre en perspective les pièces A et B séparées. La face *xyuv* de la pièce B est ce que l'on appelle le *pas* de l'embrèvement; et l'embrèvement proprement dit est la saillie triangulaire *cdk* de la pièce A qui pénètre dans la pièce B. L'embrèvement est dit *par encastrement* lorsque la pièce A a une épaisseur moindre que la pièce B. Lorsque la pièce A doit être assemblée sous un angle très-oblique avec la pièce B, la portée de celle-ci devenant considérable, on partage l'embrèvement en deux parties, comme l'indique la figure 10; on dit alors que l'embrèvement est *c*

deux crans. Dans ce cas on supprime quelquefois le tenon et la mortaise.

Les charpentiers anglais emploient un mode d'embrèvement dans lequel c'est la pièce B qui présente

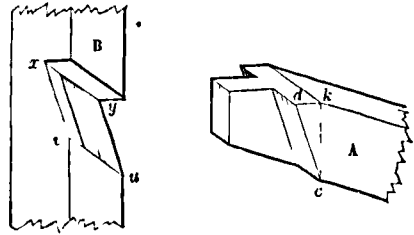


Fig. 9.

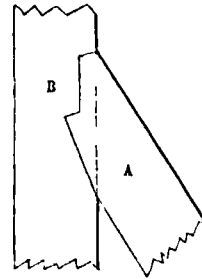


Fig. 10.

une saillie jouant le rôle de tenon, et la pièce A une cavité jouant le rôle de mortaise. Cet embrèvement est représenté en perspective sur la fig. 11. La pièce A offre deux saillies appelées *fourchons*, ayant la

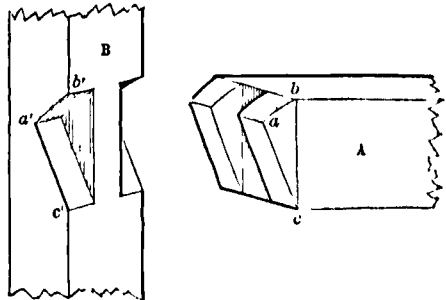


Fig. 11.

forme de prismes triangulaires droits dont la base *abc* est un secteur de cercle ayant le point *c* pour centre, et dont la hauteur est le tiers de l'épaisseur de la pièce A. Dans la pièce B sont pratiquées deux cavités égales à ces deux prismes; ces deux cavités laissent entre elles une partie pleine appelée *joint plat*, précisément égale à l'un des fourchons de la pièce A; et, entre les deux fourchons de la pièce A se trouve un espace vide précisément égal aussi. Il en résulte que, lorsqu'on rapproche les deux pièces, les deux fourchons produisent l'embrèvement, tandis que le joint plat de la pièce B pénétrant entre les deux fourchons produit l'effet d'un tenon pénétrant dans une mortaise. La forme circulaire

donnée aux lignes *ab*, *a'b'* a pour but de couper les fibres de la pièce A moins obliquement que le plan *dk* de la fig. 8, et de permettre à cette pièce de pivoter plus aisément autour du point *c*; mais cet assemblage est d'une exécution assez difficile, et il est important que les deux fourchons soient parfaitement égaux, afin que l'un d'eux ne soit pas exposé à supporter seul les efforts qui doivent se partager entre eux.

Il peut arriver que l'une des pièces B ne soit assemblée avec l'autre A que par un simple embrèvement sans tenon; dans ce cas la cavité pratiquée dans la pièce A pour recevoir le bout de la pièce B prend le nom de *cuvette*. Les *empanons* des combles sont ainsi assemblés avec les *sablères*. (Voy. CROUPE.)

II. Lorsqu'il s'agit de réunir deux pièces bout à bout, l'assemblage prend le nom d'*enture*. Les entures horizontales se font par simple *entaille à mi-bois*, comme l'indique la fig. 12; par *assemblage à*

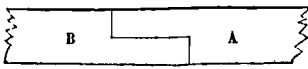


Fig. 12.

tenaille, comme le montre la fig. 13, assemblage qui a la plus grande analogie avec l'assemblage

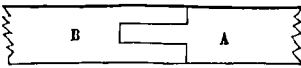


Fig. 13.

par tenon et mortaise; par *double queue d'hironde*, comme la fig. 14 le fait voir en perspective; et

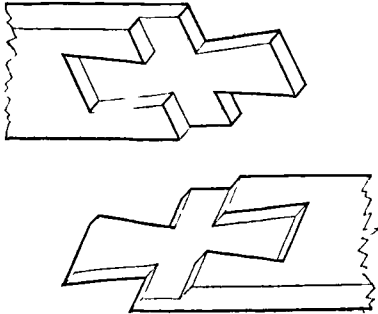


Fig. 14.

enfin par *assemblage à trait de Jupiter*, représenté par la fig. 15. Ces assemblages n'offrent aucune difficulté et se comprennent à simple vue. Dans l'assemblage à trait de Jupiter on laisse ordinairement assez de jeu pour pouvoir introduire après coup une clef *f* (fig. 15) qui serre les deux pièces l'une contre l'autre et consolide l'assemblage.

Les entures verticales pourraient se faire par des moyens analogues; mais comme elles ont le plus souvent pour objet de réunir deux pièces soumises à l'effet de la pesanteur, on adopte le plus souvent une des trois dispositions suivantes. Dans celle qui est représentée fig. 16 la pièce A porte un tenon, qui est projeté en C au bas de la figure, et qui a

en largeur la moitié de l'équarrissage de la pièce, et le tiers seulement en épaisseur. Dans celle qui est représentée fig. 17 le tenon est dit *chevronné*; il se compose de deux parallélogrammes

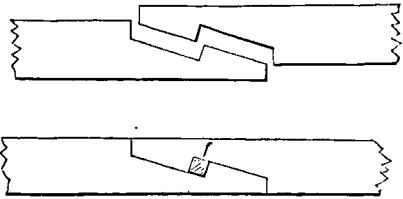


Fig. 15.

rectangles placés à angle droit. Dans celle de la fig. 18, le tenon est dit *croisé*; il se compose de deux tenons ordinaires qui se coupent rectangulairement par leur partie moyenne. Dans chacune

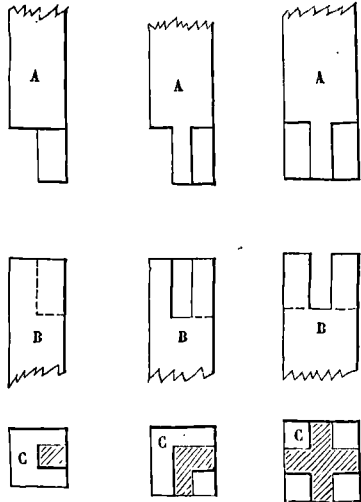


Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

de ces dispositions la pièce B présente une mortaise offrant une cavité exactement égale à la saillie du tenon.

Il existe des dispositifs plus compliqués; mais, à mesure qu'un assemblage prend une forme plus complexe, les difficultés de son exécution augmentent, et lui font perdre dans la pratique les avantages que promettait la théorie.

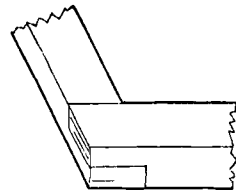


Fig. 19.

Lorsque les deux pièces doivent être assemblées bout à bout dans des directions différentes, on emploie le plus souvent une entaille à *mi-bois*, comme le montre la fig. 19, ou l'assemblage par

enfourchement, représenté par la fig. 20; la pièce B porte un tenon T, qui a le tiers de l'épaisseur du bois; et la pièce A porte deux fourchons F, F, ayant cette même épaisseur, et entre lesquels s'en-

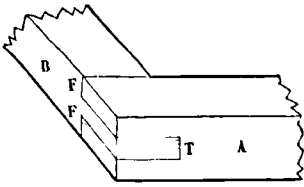


Fig. 20.

gage le tenon de la pièce B. Cet assemblage est le même au fond que l'assemblage à tenaille de la fig. 13.

III. Lorsque deux pièces doivent être assemblées par leur partie moyenne, elles ont ordinairement même épaisseur, et on les entaille l'une et l'autre à mi-bois afin que les parements affleurent bien. La fig. 21 représente en projection deux pièces

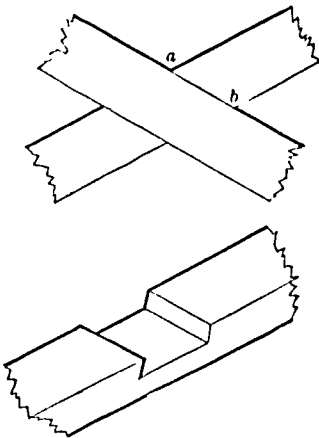


Fig. 21.

ainsi assemblées, et en perspective l'une d'elles prise à part. L'ensemble des deux pièces forme la *croix de Saint-André* que l'on rencontre assez fréquemment dans les constructions en bois. On peut consolider le système par une disposition qui rappelle l'embranchement, et qui est représentée fig. 22. Dans cette disposition, les deux pièces ne

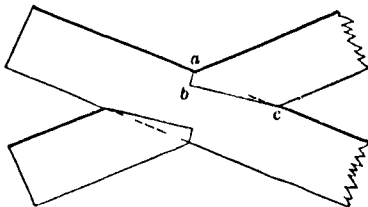


Fig. 22.

pénètrent pas seulement l'une dans l'autre dans le sens de leur épaisseur, par l'effet de l'entaille à mi-bois; elle pénètrent encore d'une petite quantité l'une dans l'autre dans le sens de leur longueur,

par l'effet du joint en ligne brisée *abc*, qui remplace le joint rectiligne *ab* de la fig. 21.

IV. Les planches qui doivent être placées parallèlement à côté l'une de l'autre, s'assemblent par *languette et rainure*, comme le montre la fig. 23; la languette est une saillie que l'on ménage tout le long de la planche, et qui n'occupe que le tiers de

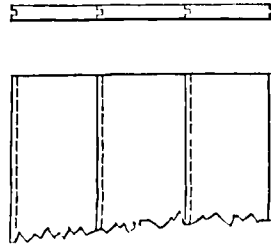


Fig. 23.

son épaisseur; la rainure est une cavité correspondante creusée le long de la planche suivante pour recevoir la languette. On voit que la languette joue le rôle de tenon et la rainure le rôle de mortaise ou de tenaille. Les pièces plus fortes qui doivent être assemblées parallèlement, auquel cas on dit qu'elles sont *jumellées*, se juxtaposent, et on les serre par

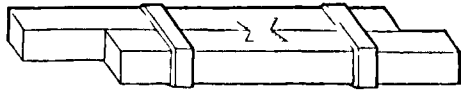


Fig. 24.

des liens en fer. Pour rendre le système plus rigide, on pratique dans les deux pièces deux cavités égales et correspondantes où l'on introduit de force une pièce de même forme en bois plus dur. La fig. 24 montre deux pièces assemblées de cette manière, par deux liens en fer, et par une double queue d'hironde en bois dur.

Souvent aussi les pièces à réunir sont disposées autour d'une pièce centrale contre laquelle elles sont serrées par des liens en fer. La fig. 25 montre cette disposition. Les pièces peuvent en outre être

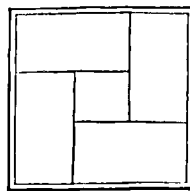


Fig. 25.

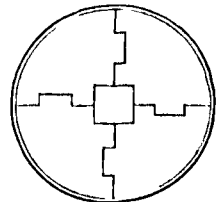


Fig. 26.

rattachées les unes aux autres par des entailles analogues à celles de la fig. 26.

V. Les divers modes d'assemblage que nous venons de décrire peuvent être variés de mille manières et groupés entre eux de toutes sortes de façons, qui ne pourraient être énumérées ici; nous nous contenterons de citer les assemblages à double tenon, à double queue d'hironde, à double trait de Jupiter, etc., etc. (*Voy.* pour plus de détails le *Traité de Stéréotomie* de J. Leroy, et le *Traité de Charpente* de J. Adhémar.)

On peut encore ranger parmi les assemblages les MOISES et les POUTRES ARMÉES (Voy. ces mots).

VI. Dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot) les procédés généraux d'assemblage sont les mêmes que dans les constructions de terre; mais dans la marine la solidité de la construction reposant en partie sur le mode de chevillage, les constructeurs de vaisseaux peuvent avoir recours à quelques assemblages spéciaux très-simples. Dans le langage de la construction navale, on appelle *écarts* les surfaces qui terminent les extrémités de deux pièces bout à bout; réunir ainsi ses deux pièces est ce que l'on appelle *écarver*. Les principaux assemblages par écart sont l'*écart à sifflet*: représenté fig. 27; l'*écart à mi-bois*,



Fig. 27.

c'est celui qui est représenté fig. 12; l'*écart à empièture*, représenté fig. 28, et l'*écart à dent* ou à

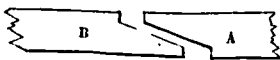


Fig. 28.

croc, qui n'est autre chose que l'assemblage à trait de Jupiter (fig. 15). Parmi les assemblages par entaille, il faut compter l'*entaille à sifflet*, représentée par la fig. 29; l'*entaille à queue d'aronde*, ou d'*hironde*: c'est l'assemblage de la fig. 14; l'*entaille à gueule de loup*, représentées par la fig. 30.

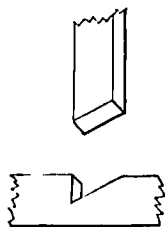


Fig. 29.

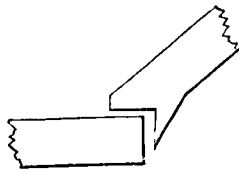


Fig. 30.

Dans les figures qui précèdent, nous avons fait principalement usage de la représentation en perspective; mais pour l'exécution des assemblages, il est souvent nécessaire d'employer les projections sur divers plans auxiliaires. On convient alors d'indiquer par des hachures les faces qui ne sont point parallèles à la direction des fibres du bois. Nous prendrons pour exemple l'assemblage par embrèvement, représenté plus haut par les fig. 8 et 9; au lieu d'employer la représentation en perspective de la fig. 9, on peut projeter la pièce A sur sa face inférieure, et la pièce B sur sa face verticale correspondante à la pièce A; on obtient alors la représentation indiquée par la fig. 31. Tous les assemblages peuvent être représentés par cette méthode, à laquelle il faut nécessairement avoir recours lorsqu'il s'agit d'exécuter les pièces (attendu que les dimensions exactes doivent pouvoir être prises sur l'épure), à moins qu'on ne fasse usage de la PERSPECTIVE ISOMÉTRIQUE (V. ce mot).

Nous n'avons parlé, dans ce qui précède, que des assemblages relatifs aux pièces droites. Mais les pièces courbes s'assemblent de la même manière. Ainsi la fig. 32 représente un chevron courbe

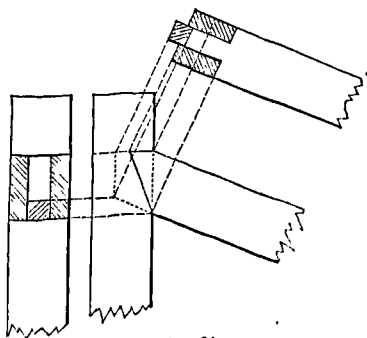


Fig. 31.

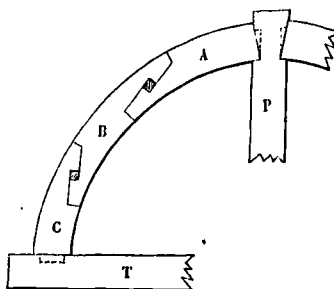


Fig. 32.

(Voy. FERME) et le poinçon sur lequel il s'appuie. les différentes parties A, B, C qui forment le chevron sont assemblées à *trait de Jupiter*, tandis que la tête A du chevron s'assemble avec le poinçon P par *tenon et embrèvement*, comme si le chevron était droit, et que le pied C du chevron s'assemble par un tenon simple avec le tirant T.

Les pièces courbes sont souvent moisées (Voy. MOISES); en un mot, elles peuvent être assemblées, soit avec les pièces droites, soit entre elles, par les mêmes moyens que les pièces droites.

ASSISE, couche horizontale de pierres taillées qui entre dans la construction d'un mur. Par extension, on donne aussi le nom d'*assises* aux *Cours de voussoirs* qui composent une voûte.

ASSURANCE, contrat par lequel une Compagnie s'engage, moyennant une rétribution annuelle, nommée *prime d'assurance*, à indemniser l'assuré de certains dommages aléatoires. Les assurances s'appliquent à des objets très-divers: il y a des assurances contre les risques maritimes, contre l'incendie, contre la grêle, contre les faillites, etc. Mais les principes sur lesquels elles reposent sont les mêmes. Il faut en excepter toutefois les ASSURANCES SUR LA VIE, les CAISSES DOTALES, les CAISSES DE RETRAITES, etc., et toutes les assurances fondées sur la considération de la durée probable de la vie humaine; ces assurances spéciales sont, dans ce Dictionnaire, l'objet d'autant d'articles spéciaux (Voy. les mots ci-dessus). Il ne sera question ici

que de ce qu'on peut appeler les *assurances sur les choses*. — Les assurances sont originaires d'Italie; elles se sont introduites en Hollande, en Suisse et en Angleterre vers la fin du dix-septième siècle; en France ce n'est que de 1816 à 1819 qu'elles ont réussi à s'établir d'une manière définitive.

I. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'assurances maritimes; et, afin de considérer d'abord le cas le plus simple, concevons qu'une Compagnie assure m navires ayant tous une même valeur V . Soit p le risque annuel d'un navire, ou la probabilité que ce navire se perdra dans le cours de l'année; désignons par q la probabilité contraire, de telle sorte qu'on ait $p + q = 1$ (*Voy. PROBABILITÉS*). Soit a la prime d'assurance; et appelons c la plus grande perte que la Compagnie consente à supporter.

Si l'on développe le binôme $(q + p)^m$, et que l'on fasse la somme des termes jusqu'à celui qui est affecté des facteurs $q^{m-n} p^n$ inclusivement, la somme exprimera la probabilité P que le nombre des sinistres ne dépassera pas n . Dans ce cas, la somme que la Compagnie aura à rembourser aux propriétaires des navires atteints sera nV ; d'un autre côté, la recette provenant des primes d'assurances sera ma ; il faut donc que la première de ces deux sommes ne surpasse pas la seconde de plus de c ; on peut donc poser

$$nV - ma = c, \text{ d'où } a = \frac{nV - c}{m}, \quad [1]$$

relation qui donne la valeur à laquelle la Compagnie doit élever la prime d'assurance pour ne pas dépasser la perte qu'elle consent à supporter.

Soit maintenant b le bénéfice que la Compagnie veut réaliser; il faudra pour cela que le nombre des sinistres descende à un nombre n' plus petit que n ; et l'on devra avoir

$$ma - n'V = b,$$

ou, en mettant pour a sa valeur tirée de [1],

$$nV - c - n'V = b, \text{ d'où } n' = n - \frac{b + c}{V}. \quad [2]$$

Connaissant n' , on calculera la somme des termes du développement de $(q + p)^m$ jusqu'au terme affecté de $q^{m-n'} p^{n'}$ inclusivement, et l'on verra si la probabilité P' exprimée par cette somme est suffisante pour asseoir l'entreprise sur cette base.

II. Admettons, comme exemple, que le nombre des navires assurés soit 1000, et que le risque annuel soit évalué à $\frac{1}{100}$; nous aurons $p = 0,01$, $q = 0,99$, $m = 1000$.

Si l'on fait le développement de $(0,99 + 0,01)^{1000}$, en calculant les termes à l'aide de logarithmes à 14 ou 15 décimales (table I de Callet), on formera le tableau suivant :

RANG.	TERMES.	SOMMES.
1	0,00004317	0,00004317
2	0,00043607	0,00047924
3	0,00220019	0,00267943
4	0,00739322	0,01007266
5	0,01861375	0,02868641
6	0,03745311	0,06613952
7	0,06273714	0,12887663
8	0,08998256	0,21886319
9	0,11282405	0,33168724

RANG.	TERMES.	SOMMES.
10	0,12561332	0,45730056
11	0,12574020	0,58304076
12	0,11430926	0,69735002
13	0,09516150	0,79251152
14	0,07305327	0,86556479
15	0,05202280	0,91758759
16	0,03454173	0,95212932
17	0,02147955	0,97360887
18	0,01255845	0,98616732
19	0,00692759	0,99309491
20	0,00361663	0,99671154
21	0,00179188	0,99850342
22	0,00084468	0,99934808
23	0,00037967	0,99972775
24	0,00016307	0,99989082
25	0,00006705	0,99995787
26	0,00002644	0,99998431
27	0,00001002	0,99999133
28	0,00000365	0,99999798
29	0,00000128	0,99999926
30	0,00000043	0,99999969

(Il faut bien remarquer que le rang de chaque terme est la valeur de n augmentée d'une unité.)

La probabilité P que sur 1000 vaisseaux assurés le nombre des sinistres ne dépassera pas 29 est exprimée par le 30^e terme du développement, c'est-à-dire par le nombre 0,99999969, très-voisin de l'unité; si l'on prend $n = 29$, et qu'on suppose que la perte que la Compagnie consent à supporter soit représentée par la valeur de 5 vaisseaux, on aura $c = 5V$. En mettant ces valeurs dans l'équation, [1] on trouve

$$a = \frac{29V - 5V}{1000} = 0,024V,$$

c'est-à-dire que dans ce cas la prime d'assurance doit être de $2\frac{2}{5}$ pour 100 de la valeur assurée. Si

maintenant la Compagnie consent à limiter ses bénéfices à la valeur de 3 vaisseaux, on aura $b = 3V$, et l'équation [2] donnera

$$n' = 29 - \frac{3V + 5V}{V} = 21.$$

Or, d'après le tableau ci-dessus, la probabilité P' correspondante à cette valeur de n' est le 22^e terme du développement ou 0,99934808, c'est-à-dire qu'il y a encore plus de 999 à parier contre 1 que le nombre des sinistres n'atteindra pas 22. L'entreprise se trouverait donc dans ce cas établie sur des bases à peu près certaines.

Afin de diminuer la prime on peut adopter pour n un nombre moindre, et admettre en même temps une limite de perte plus considérable. Si, par exemple, on fait $n = 24$, ce qui répond à une probabilité P exprimée par le 25^e terme du développement, ou 0,999957..., probabilité encore très-grande, et qu'on admette $c = 9V$, on aura

$$a = \frac{24V - 9V}{1000} = 0,015V,$$

c'est-à-dire que la prime ne serait plus que de $1\frac{1}{2}$ pour 100. En limitant de même le bénéfice b à la valeur d'un des vaisseaux assurés, on trouve

$$n' = 24 - \frac{(V + 9V)}{V} = 14.$$

La probabilité correspondante P' , exprimée par le 15^e terme du développement, est encore

0,917587.... c'est-à-dire qu'il y a encore plus de 9 à parier contre 1 que le nombre des sinistres ne dépassera par 14, et que par conséquent la Compagnie réalisera le bénéfice qu'elle s'est promis.

III. Au lieu de tirer de l'équation [1] la valeur de la prime, on peut au contraire la supposer donnée, et déduire de la même équation la valeur de la limite de perte *c*.

Si, en même temps, on se donne la probabilité *P* et le bénéfice *b*, et qu'on fasse croître *m*, ou le nombre des assurances, on trouve que *c* croît avec *m*, mais beaucoup moins rapidement que lui. D'autre part, la probabilité de gain *P'* augmente aussi. Il en résulte qu'il y a avantage pour l'assureur à multiplier ses entreprises.

IV. Lorsque *m* est très-grand, la sommation directe des termes du développement de $(q + p)^m$ devient impraticable, et les analystes ont cherché à substituer au calcul rigoureux un calcul approximatif plus facile.

Quand le produit *mp* est un nombre peu considérable, on peut se servir de la formule

$$P = e^{-pm} \left[1 + \frac{pm}{1} + \frac{p^2 m^2}{1.2} + \frac{p^3 m^3}{1.2.3} \dots + \frac{p^n m^n}{1.2.3 \dots n} \right], \quad [3]$$

donnée par Poisson dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements*.

Toutes les fois que *m* est au moins de l'ordre des centaines, la probabilité *P*₁ que le nombre des sinistres restera compris entre les limites *mp* + λ et *mp* - λ, λ étant un nombre arbitraire, est donnée par la formule

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \quad [4]$$

(intégrale définie dont les valeurs, réduites en table, sont données à l'art. PROBABILITÉ), la variable *t* étant donnée elle-même par la relation

$$t = \frac{\lambda}{\sqrt{2m \cdot pq}}. \quad [5]$$

Si, par exemple, on suppose *m* = 10 000, *p* = $\frac{1}{100}$,

d'où *q* = $\frac{99}{100}$, et λ = 4, on trouvera d'abord *t* = 2,700 ;

et la table de la fonction [4] donnera ensuite *P*₁ = 0,99986567. Ainsi, il y aurait plus de 4999 contre 1 à parier que le nombre des sinistres restera compris entre $10\,000 \times \frac{1}{100} + 4$ et $10\,000 \times \frac{1}{100} - 4$, c'est-à-dire entre 104 et 96. Dans l'hypothèse des formules [4] et [5] on a la probabilité *P*₁ que l'ensemble des indemnités que la Compagnie est exposée à payer restera comprise entre les limites *mpV* + λ*V* et *mpV* - λ*V*.

V. Nous avons supposé jusqu'ici, pour simplifier, que tous les navires assurés avaient une valeur commune *V*, et que le risque annuel *p* était le même pour chacun d'eux. En réalité il n'en est pas ainsi ; et les Compagnies sont dans l'usage de ranger les navires par catégories, suivant leur valeur et le danger qu'ils ont à courir. Dans ce cas, si *m*₁ est le nombre des navires de la valeur *V*₁, *m*₂ le nombre des navires de la valeur *V*₂, *m*₃ le nombre des navires de la valeur *V*₃, et ainsi de suite, et que *p*₁, *p*₂, *p*₃, etc., soient les valeurs du risque annuel correspondantes à ces diverses catégories, on

a la probabilité *P*₁ que la somme des indemnités annuelles restera comprise entre les limites

$$m_1 p_1 V_1 + m_2 p_2 V_2 + m_3 p_3 V_3 + \dots \pm L, \quad [6]$$

la variable *t* qui figure dans l'intégrale définie *P*₁ étant alors liée à *L* par la relation

$$L = t \sqrt{2[m_1 p_1 q_1 V_1^2 + m_2 p_2 q_2 V_2^2 + m_3 p_3 q_3 V_3^2 + \dots]}. \quad [7]$$

Cette quantité *L* est plus grande, pour une même valeur de *t* et par conséquent de *P*₁, que si toutes les valeurs *V*₁, *V*₂, *V*₃, etc. étaient égales, leur somme demeurant la même, ou que si toutes couraient un risque égal à la moyenne des risques *p*₁, *p*₂, *p*₃, etc. En d'autres termes, les oscillations dues au hasard sont plus grandes que dans le cas où toutes les valeurs assurées ont la même valeur et courent le même risque (*Voy. l'Exposition de la théorie des chances*, par M. Cournot, pages 341 et suiv.).

VI. Les assurances dont il vient d'être question sont dites à *prime fixe*. Il en existe une autre espèce à laquelle on donne le nom d'*assurances mutuelles*. C'est une simple association entre des propriétaires, qui supportent en commun les indemnités auxquelles donnent lieu les sinistres annuels, et de plus les frais d'administration. C'est la forme naturelle et primitive des assurances; elle convient aux sociétés naissantes, aux associations peu nombreuses. Mais lorsque le nombre des associés augmente, les oscillations de la charge commune tendent à rester comprises entre des limites de plus en plus étroites, et la contribution annuelle se rapproche de plus en plus d'une prime fixe. En même temps la bonne distribution du travail appelle l'intervention d'un administrateur spécial; et l'on voit naître la Compagnie d'assurance, qui n'est au fond qu'une assurance mutuelle réglée par l'intermédiaire d'une société de capitalistes qui peut, mieux que les membres de l'association générale, supporter les alternatives de gain et de perte auxquelles l'association donne lieu.

VII. Toutes les assurances sur les choses sont régies par les mêmes principes; mais le risque annuel a des valeurs très-diverses suivant la nature

de la valeur assurée. Ce risque est évalué à $\frac{1}{100}$

pour les vaisseaux baleiniers; il n'est guère évalué à plus de $\frac{1}{20\,000}$ pour les maisons en pierres cou-

vertes en ardoises. Dans tous les cas, ce risque est toujours une fraction fort petite. On pourrait la déterminer par l'emploi des formules relatives aux probabilités *a posteriori*, si l'on possédait sur ce point des données assez nombreuses. Jusqu'ici ce n'est que par tâtonnement que les Compagnies ont pu en fixer la valeur approximative.

Dans ce qui précède, il faut, pour plus de rigueur, ramener à une même époque les sommes *a* et *V* que doivent payer l'assuré et l'assureur; c'est-à-dire qu'il faut tenir compte des intérêts que ces sommes produiront jusqu'au moment où elles doivent être payées suivant les termes de la police d'assurance.

Mais il y a une circonstance qui affecte d'erreur toutes les formules. Ces formules supposent une indépendance absolue entre les chances de sinistres pour les diverses valeurs assurées. En réalité cette indépendance est loin d'avoir lieu. Une même tem-

pête peut atteindre à la fois un grand nombre de navires, ou ravager en même temps une vaste étendue de terrains en culture. Un même incendie peut compromettre à la fois un grand nombre d'habitations. L'espèce de solidarité qui s'établit ainsi entre un grand nombre de sinistres ne peut être ni prévue ni mesurée à l'avance; et cependant on sent bien qu'elle doit changer le mode d'évaluation des probabilités d'une manière souvent notable. Les formules habituellement employées ne doivent donc être regardées que comme approximatives, applicables aux cas ordinaires, mais insuffisantes dans les circonstances exceptionnelles dont nous venons de parler et qui déjouent tous les calculs.

(Voy. l'ouvrage de M. Cournot déjà cité, et le *Traité élémentaire des probabilités*, par M. Lacroix.)

ASSURANCES SUR LA VIE, contrats qui ont pour objet de procurer certains avantages aux héritiers de l'assuré ou à d'autres personnes désignées par lui. Le calcul des assurances sur la vie diffère du calcul des **RENTES VIAGÈRES** (Voy. ce mot) en ce que ce dernier dépend de l'espérance mathématique du rentier, tandis que le premier dépend de l'espérance mathématique de l'héritier, ou de la personne, quelle qu'elle soit, qui doit profiter de l'assurance.

I. Le cas le plus ordinaire et le plus simple est celui où l'assuré se propose de faire toucher à sa mort une somme déterminée S à l'un de ses héritiers. Soit P le capital que devra payer l'assuré et soit n son âge. On raisonne de la manière suivante :

La probabilité que l'assuré mourra dans la 1^{re} année est (Voy. **PROBABILITÉ**, **MORTALITÉ**)

$$1 - \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ ou } \frac{v_n - v_{n+1}}{v_n},$$

v_n désignant le nombre des survivants de l'âge n inscrit dans la table de mortalité; et l'espérance mathématique correspondante de l'héritier est, par conséquent,

$$\frac{S}{1+r} \cdot \frac{v_n - v_{n+1}}{v_n},$$

r désignant l'intérêt annuel de 1 fr.

La probabilité que l'assuré mourra dans la 2^e année, est le produit de la probabilité qu'il vivra au bout de la 1^{re} année, ou $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, par la probabilité qu'ayant vécu cette 1^{re} année il mourra dans le cours de la 2^e, c'est-à-dire par $1 - \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}$ ou $\frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_{n+1}}$, ce qui donne $\frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_n}$; et l'espérance mathématique correspondante de l'héritier sera

$$\frac{S}{(1+r)^2} \cdot \frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_n},$$

On trouvera de même que l'espérance mathématique de l'héritier correspondante à la 3^e année est

$$\frac{S}{(1+r)^3} \cdot \frac{v_{n+2} - v_{n+3}}{v_n},$$

et ainsi de suite. La somme de toutes ces espérances mathématiques, jusqu'aux limites de la table de mortalité, sera le capital P que l'on cherche.

Si l'on fait d'abord la somme des premiers termes, on trouve

$$\frac{S}{1+r} \cdot \frac{v_n}{v_n} + \frac{S}{1+r} \cdot \frac{1}{v_n} \left[\frac{v_{n+1}}{1+r} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ou, en désignant par A_n la valeur d'une rente viagère de 1^r sur la tête d'une personne de l'âge n (Voy. **RENTES VIAGÈRES**),

$$\frac{S}{1+r} + \frac{S}{1+r} A_n \text{ ou } \frac{S(1+A_n)}{1+r}.$$

Si l'on fait ensuite la somme des termes soustractifs, on obtient :

$$- \frac{S}{v_n} \left[\frac{v_{n+1}}{1+r} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ou $-S.A_n$; il vient donc

$$P = \frac{S(1+A_n)}{1+r} - S.A_n \text{ ou } P = S \cdot \frac{1-r.A_n}{1+r} \quad [1]$$

Si, par exemple, une personne de 60 ans veut assurer à sa mort une somme de 50 000 fr. à un héritier, les intérêts étant supposés à 4 p. 100, taux le plus ordinairement fixé par les Compagnies, la table des valeurs de A_n , d'après Duvallard, rapportée à l'art. **RENTES VIAGÈRES**, donnera $A_{60} = 8,3416$, et l'on aura

$$P = 50000 \frac{1 - 0,04 \cdot 8,3416}{1,04} = 32035^f,38.$$

II. La somme P porte le nom de *prime fixe*. Mais, au lieu d'une prime unique, l'assuré, ou la personne qui paye pour lui, préfèrent ordinairement payer une *prime annuelle* p jusqu'au décès. Pour trouver cette prime annuelle, il faut remarquer que c'est une véritable rente viagère constituée sur la tête de l'assuré au profit de la Compagnie qui assure; et que le capital équivalent à cette rente doit égaler la prime fixe, diminuée toutefois de la prime annuelle, attendu que si c'était une rente, le premier paiement aurait lieu à la fin de la première année, tandis que, dans le cas qui nous occupe, il doit avoir lieu au commencement de cette année même. Or, le capital équivalent à une rente viagère p sur une tête de l'âge n est $p.A_n$; on doit donc avoir

$$p.A_n + p = P, \text{ d'où } p = \frac{P}{1+A_n} \quad [2]$$

En reprenant l'exemple précédent, on trouverait ainsi :

$$p = \frac{32035^f,38}{1+8,3416} = 3429^f,32.$$

III. Une assurance peut être constituée sur deux têtes, et cela de trois manières principales. La Compagnie peut s'engager à payer une certaine somme S à l'une des deux personnes désignées, au moment du décès de l'autre, ou à payer cette somme à une tierce personne au premier décès de l'une des deux têtes désignées. Soient n et m les âges de ces deux têtes; la probabilité que l'une d'elles au moins sera éteinte dans la 1^{re} année est

$$1 - \frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m},$$

et l'espérance mathématique correspondante de l'héritier, ou de la tierce personne désignée, sera

$$\frac{S}{1+r} \left(1 - \frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m} \right)$$

ou
$$\frac{S}{1+r} \left(\frac{v_n \cdot v_m}{v_n \cdot v_m} - \frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m} \right).$$

La probabilité que l'une au moins des deux têtes s'éteindra dans la 2^e année est

$$\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m} \left(1 - \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{v_{n+1} \cdot v_{m+1}} \right)$$

ou le produit de la probabilité que les deux têtes vivront encore au bout de la première année, par la probabilité que l'une d'elles mourra dans le cours de la seconde. L'espérance mathématique correspondante sera donc

$$\frac{S}{(1+r)^2} \left(\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m} - \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{v_n \cdot v_m} \right).$$

On verrait de même que l'espérance mathématique correspondante à la 3^e année est

$$\frac{S}{(1+r)^3} \left(\frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{v_n \cdot v_m} - \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{v_n \cdot v_m} \right),$$

et ainsi de suite. La somme de ces espérances, poussée jusqu'aux limites de la table de mortalité, sera la prime fixe qu'il faut payer pour assurer la somme S.

Si l'on fait d'abord la somme des termes positifs, on trouve

$$\frac{S}{1+r} \cdot \frac{v_n \cdot v_m}{v_n \cdot v_m} + \frac{S}{(1+r)v_n \cdot v_m} \left[\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ou, en désignant par $A_{n,m}$ la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes âgées de n et de m années,

$$\frac{S}{1+r} + \frac{S}{1+r} \cdot A_{n,m} \quad \text{ou} \quad \frac{S(1+A_{n,m})}{1+r}.$$

Si l'on fait ensuite la somme des termes négatifs, on obtient de même

$$-S \cdot A_{n,m}.$$

On a donc

$$P = \frac{S(1+A_{n,m})}{1+r} - S A_{n,m} = S \cdot \frac{1-rA_{n,m}}{1+r}. \quad [3]$$

Si, par exemple, on a $S = 10\,000$, $r = 0,04$, $n = 51$, $m = 61$, et qu'on se serve de la table des valeurs de $A_{n,m}$, rapportée à l'art. RENTES VIAGÈRES, d'après Duvillard, on trouvera

$$A_{51,61} = 6,3553;$$

par suite

$$P = 10\,000 \text{ fr.} \cdot \frac{1-0,04 \cdot 6,3553}{1,04} = 7171,04.$$

Si l'on voulait convertir la prime fixe en une prime annuelle, on pourrait appliquer la formule [2] en y remplaçant A_n par $A_{n,m}$. Dans l'exemple actuel, on aurait ainsi

$$P = \frac{7171,04}{1+6,3553} = 974,94.$$

IV. Il peut être stipulé que la plus jeune des deux personnes que l'on considère touchera une somme S au décès de la plus âgée, si elle est encore vivante à cette époque. Soient n l'âge de la plus jeune et m celui de la plus âgée. La probabilité que la plus jeune sera vivante au bout de la

1^{re} année est $\frac{v_{n+1}}{v_n}$; la probabilité que la plus âgée mourra dans le courant de cette année est égale au nombre des décès de l'année pour les personnes de son âge, ou $v_m - v_{m+1}$, divisé par le nombre actuel des vivants de cet âge, ou v_m ; la probabilité que la plus jeune touchera la somme S

au bout de la 1^{re} année est le produit des deux probabilités précédentes, c'est-à-dire $\frac{v_{n+1}}{v_n} \left(\frac{v_m - v_{m+1}}{v_m} \right)$; et l'espérance mathématique correspondante a pour expression :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \left(\frac{v_m - v_{m+1}}{v_m} \right) \frac{S}{1+r}.$$

La probabilité que la plus jeune des deux personnes vivra encore à la fin de la 2^e année est $\frac{v_{n+2}}{v_n}$;

la probabilité que la plus âgée mourra dans le courant de cette année est égale au nombre $v_{m+2} - v_{m+3}$ des décès de l'année pour les personnes de son âge, divisé par le nombre actuel v_m des vivants de cet âge; la probabilité que la plus jeune touchera la somme S à la fin de la 2^e année est le produit des probabilités précédentes, ou $\frac{v_{n+2}}{v_n} \left(\frac{v_{m+1} - v_{m+2}}{v_m} \right)$; et l'espérance mathématique correspondante a pour expression

$$\frac{v_{n+2}}{v_n} \left(\frac{v_{m+1} - v_{m+2}}{v_m} \right) \frac{S}{(1+r)^2}.$$

On verrait de même que l'espérance mathématique, pour la plus jeune des deux personnes que l'on considère, de toucher la somme S au bout de la 3^e année a pour expression

$$\frac{v_{n+3}}{v_n} \left(\frac{v_{m+2} - v_{m+3}}{v_m} \right) \frac{S}{(1+r)^3},$$

et ainsi de suite. La somme de toutes ces espérances est la valeur de la prime fixe P à payer pour l'assurance.

Si l'on fait d'abord la somme des termes positifs, on trouve :

$$\frac{S}{v_n \cdot v_m} \left[\frac{v_{n+1} \cdot v_m}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+1}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+2}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ce qui revient à

$$S \cdot \frac{v_{m-1}}{v_m} \cdot A_{n,m-1}.$$

Si l'on fait ensuite la somme des termes sous-traitifs, on obtient

$$-\frac{S}{v_n \cdot v_m} \left[\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ce qui revient à

$$-S \cdot A_{n,m}.$$

Il vient donc

$$P = S \left(A_{n,m-1} \cdot \frac{v_{m-1}}{v_m} - A_{n,m} \right). \quad [4]$$

Si, par exemple, on reprend les données du problème précédent, en se plaçant dans les circonstances du problème actuel, on trouvera par interpolation, dans la table déjà citée, $A_{51,60} = 6,8313$, on a trouvé $A_{51,61} = 6,3553$; la table de mortalité de Duvillard donne d'ailleurs

$$v_{60} = 213\,567, \quad \text{et} \quad v_{61} = 204\,380,$$

d'où

$$\frac{v_{60}}{v_{61}} = 1,0449;$$

on aura donc :

$$P = 10\,000 \text{ fr.} (6,8313 \cdot 1,0449 - 6,3553) = 7827,28.$$

V. L'assurance peut être payable à une tierce

personne, ou à ses héritiers, au dernier décès des deux premières personnes considérées.

La formule qui donne dans ce cas la valeur de la prime fixe, est la même que la formule [3], mais la quantité A_n , qui représentait le prix d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de l'âge n , doit être remplacée par la quantité qui représente le prix d'une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes de l'âge n et m jusqu'au dernier décès (Voy. RENTES VIAGÈRES), c'est-à-dire par

$$A_n + A_m - A_{n,m}.$$

Avec les données de l'exemple précédent, et en se servant des mêmes tables, on trouverait

$$A_{57} = 10,7618, \quad A_{61} = 8,0652, \quad A_{57,61} = 6,3553,$$

d'où $A_{57} + A_{61} - A_{57,61} = 12,4717$

En mettant cette valeur dans la formule [3] on trouverait

$$P = 10\,000 \text{ fr. } \frac{1 - 0,04 \cdot 12,4717}{1,04} = 4818 \text{ fr. } 39.$$

VI. Une assurance peut être différée, c'est-à-dire qu'une Compagnie peut s'engager à payer une somme déterminée S au décès de l'assuré, à la condition que ce décès n'arrivera pas avant un nombre déterminé d'années t . Dans ce cas, la formule [1] doit être modifiée. Soit $n - t$ l'âge actuel de l'assuré; en raisonnant comme on l'a fait pour établir la formule [1], on reconnaît que les espérances mathématiques successives de la personne qui doit profiter de l'assurance sont exprimées par

$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n - v_{n+1}}{v_{n-t}} \quad \frac{S}{(1+r)^{t+2}} \cdot \frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_{n-t}},$$

$$\frac{S}{(1+r)^{t+3}} \cdot \frac{v_{n+2} - v_{n+3}}{v_{n-t}}, \text{ etc.}$$

Si l'on fait la somme des termes positifs, on obtient d'abord

$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} + \frac{S}{(1+r)^{t+2}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} \right]$$

$$+ \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3} + \dots]$$

ou
$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} (1 + A_n).$$

Si l'on fait ensuite la somme des termes soustractifs, on peut l'écrire :

$$- \frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3} + \dots \right],$$

ou
$$- \frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n.$$

On doit donc avoir, en appelant P la prime fixe,

$$P = \frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} (1 + A_n) - \frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n$$

$$= S \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{1 - r A_n}{(1+r)^{t+1}}. \quad [5]$$

Le second membre est celui de la formule [1], multiplié par $\frac{v_n}{v_{n-t}}$ et divisé par $(1+r)^t$.

Si, par exemple, on suppose qu'une Compagnie assure un capital de 50 000 fr. à la mort d'une personne actuellement âgée de 50 ans, à condition que cette mort n'arrivera pas avant 10 ans, les intérêts étant calculés à 4 p. 100, on prendra dans la table de Duvillard $v_{50} = 213567$ et $v_{60} = 297070$; on trouvera pour $(1,04)^{10}$ la valeur 1,48025; on a d'ailleurs ob-

tenu par l'application de la formule [1] une prime fixe de 32035', 38. On aura donc ici

$$P = \frac{32035,38 \cdot 213567}{1,48025 \cdot 297070} = 15558 \text{ fr. } 64.$$

VII. Au lieu d'assurer une somme fixe, on peut assurer une rente viagère. Supposons qu'une personne de l'âge n se propose d'assurer, à sa mort, une rente viagère a à un parent de l'âge m . La probabilité pour celui-ci de recevoir la somme a au bout de la 1^{re} année sera le produit de la probabilité que la personne dont il s'agit sera morte à

la fin de cette 1^{re} année, c'est-à-dire $1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}$,

par la probabilité qu'il sera lui-même vivant au bout de cette année, c'est-à-dire par $\frac{v_{m+1}}{v_m}$; et l'es-

pérance mathématique correspondante sera

$$\frac{a}{1+r} \cdot \frac{v_{m+1}}{v_m} \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right).$$

La probabilité pour le parent de recevoir la somme a à la fin de la 2^e année sera de même le produit de la probabilité que la personne dont il s'agit sera morte à la fin de cette 2^e année, c'est-à-dire $1 - \frac{v_{n+2}}{v_n}$, par la probabilité qu'il sera lui-même

vivant à cette époque, c'est-à-dire $\frac{v_{m+2}}{v_m}$; et l'espé-

rance mathématique correspondante sera exprimée

par
$$\frac{a}{(1+r)^2} \cdot \frac{v_{m+2}}{v_m} \left(1 - \frac{v_{n+2}}{v_n} \right).$$

On verrait de même que l'espérance mathématique correspondante à la 3^e année a pour valeur

$$\frac{a}{(1+r)^3} \cdot \frac{v_{m+3}}{v_m} \left(1 - \frac{v_{n+3}}{v_n} \right),$$

et ainsi de suite. La somme de toutes ces espérances, prolongée jusqu'aux limites de la table de la mortalité, exprimera la prime fixe P que l'on aura à payer pour obtenir cette assurance.

Or, on verra aisément que la somme des termes positifs est $a A_n$, et que la somme des termes soustractifs est $- a A_{n,m}$. On aura donc

$$P = a (A_n - A_{n,m}). \quad [6]$$

EXEMPLE. Un fils âgé de 37 ans voudrait, dans le cas où il viendrait à mourir, assurer à sa mère, âgée de 57 ans, et dont il est le seul soutien, une pension viagère de 1800 fr. Quelle prime fixe devra-t-il payer pour cela ?

Les tables d'après Duvillard donnent

$$A_{37} = 13,8586, \text{ et } A_{37,57} = 7,8056.$$

On aura donc

$$P = 1800' (13,8586 - 7,8056) = 10895' 40.$$

On remarquera la différence qui existe entre la manière d'évaluer les probabilités dans la question actuelle et dans celle qui a conduit à la formule [4]. Dans celle-ci il s'agissait d'une somme S à toucher une fois pour toutes, et l'un des facteurs de l'espérance mathématique correspondante à chaque année était la probabilité que la seconde des deux personnes considérées vint à mourir dans le courant de cette année; dans la question actuelle il s'agit au contraire d'une somme a à toucher chaque année, à la condition que la seconde personne soit morte, à une époque quelconque, antérieure à la fin de l'année que l'on considère.

Les rentes viagères de l'espèce que nous venons

d'étudier portent le nom de *rentes de survie* ou de *rentes en réversion*.

VIII. Lorsqu'on veut assurer une rente viagère, au lieu de payer une prime fixe P , on préfère ordinairement payer une prime annuelle p . Ce n'est autre chose qu'une rente viagère payée à la Compagnie pendant toute la durée de la vie de la personne dont l'âge est n ; seulement le paiement de cette prime commence un an plus tôt que si c'était une véritable rente. On appliquera donc l'équation [2]. En y remplaçant P par sa valeur [6], on aura

$$p = a \cdot \frac{A_n - A_{n,m}}{1 + A_n} \quad [7]$$

Dans l'exemple précédent on trouverait

$$p = \frac{10895',40}{1 + 13,8586} = 733',27.$$

Il est évident d'ailleurs que si la personne de l'âge m vient à mourir avant la personne dont l'âge est n , l'opération est annulée, et la Compagnie bénéficie des primes annuelles touchées jusqu'à cette époque.

IX. Au lieu d'assurer une rente viagère, on peut assurer une *rente perpétuelle*. Soit n l'âge de l'assuré; la probabilité pour les héritiers de recevoir la rente a au bout d'un an est $1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, et l'espérance mathématique correspondante a pour expression

$$\frac{a}{1+r} \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right).$$

La probabilité, pour ces mêmes héritiers, de recevoir la rente a au bout de la 2^e année est $1 - \frac{v_{n+2}}{v_n}$, et l'espérance mathématique correspondante a pour valeur

$$\frac{a}{(1+r)^2} \left(1 - \frac{v_{n+2}}{v_n}\right).$$

On verrait de même que l'espérance mathématique correspondante à la 3^e année est

$$\frac{a}{(1+r)^3} \left(1 - \frac{v_{n+3}}{v_n}\right)$$

et ainsi de suite. La somme de toutes ces espérances, prolongée jusqu'à l'infini, exprimera la valeur de la rente perpétuelle, et par conséquent de la prime d'assurance.

La somme des termes positifs est une progression géométrique décroissante, qui a pour limite $\frac{a}{r}$; et la somme des termes soustractifs équivaut à $-a A_n$.

On a donc
$$P = a \left(\frac{1}{r} - A_n\right) \quad [8]$$

EXEMPLE. Quelle prime faut-il payer pour assurer une rente perpétuelle de 1200 fr. à partir du décès d'une personne de 56 ans? La table d'après Duvillard donne $A_{56} = 9,4391$; et, si les intérêts sont calculés à 4 p. 0/0, la quantité $\frac{1}{r}$ équivaut à 25; on a donc

$$P = 1200 \text{ fr. } (25 - 9,4391) = 18673',08.$$

Pour convertir la prime fixe en prime annuelle, on emploierait la formule [2]. Dans l'exemple actuel on trouverait

$$p = \frac{18673',08}{1 + 9,4391} = 1788',76.$$

X. Un capital assuré peut être converti en une

rente perpétuelle. La prime fixe équivalente à un capital S assuré sur une tête de l'âge n est

$$P = \frac{S(1-rA_n)}{1+r}$$

et la prime fixe équivalente à une rente perpétuelle a sur la même tête est

$$P' = a \left(\frac{1}{r} - A_n\right) = \frac{a(1-rA_n)}{r}.$$

Si l'on suppose $P = P'$, il en résulte

$$\frac{S}{1+r} = \frac{a}{r}, \text{ d'où } a = \frac{Sr}{1+r}, \quad [9]$$

formule indépendante de n .

On voit que cette rente est plus petite que l'intérêt annuel rS du capital assuré; cela tient à ce que la rente a se paye au moment même du décès, et ensuite d'année en année, tandis que le capital S doit être supposé placé au moment même du décès pour ne produire d'intérêts qu'au bout d'un an.

XI. On peut encore rattacher aux assurances sur la vie le calcul des rentes viagères à *capital réservé*. Dans ce genre de transaction la Compagnie qui sert la rente viagère s'engage à restituer le capital déboursé par l'assuré, soit à la mort de celui-ci, soit à une époque déterminée d'avance, en supposant qu'il soit encore vivant à cette époque.

Dans le premier cas, si a représente la rente viagère, et n l'âge de l'assuré au moment de la signature de la police d'assurance, le capital équivalent à cette rente a pour expression $a \cdot A_n$. D'autre part, si C représente le capital qui doit être restitué, sa valeur, au moment de la transaction, est, en vertu de la formule [1],

$$C \cdot \frac{1-rA_n}{1+r}.$$

On doit donc avoir

$$a \cdot A_n + C \cdot \frac{1-rA_n}{1+r} = C, \text{ d'où } a = C \cdot \frac{r(1+A_n)}{A_n(1+r)},$$

formule que l'on peut écrire

$$a = C \cdot \frac{1 + \frac{1}{A_n}}{1 + \frac{1}{r}} \quad [10]$$

Ce mode de placement n'est avantageux que pour une personne d'un âge avancé. Si l'on veut, par exemple, que la rente viagère égale au moins l'intérêt à 5 p. 100 du capital déposé, il faut que $\frac{a}{C}$ soit au moins égal à $\frac{1}{20}$.

Or si $r = 0,04$, $1 + \frac{1}{r} = 26$; on doit donc avoir

$$1 + \frac{1}{A_n} \geq \frac{26}{20}, \text{ d'où } A_n \leq 3,33\dots$$

D'après la table de Duvillard ce n'est qu'à l'âge de 81 ans que cette condition est remplie. Si l'on voulait que l'intérêt réel du placement fût de 6 p. 100, on trouverait, par un calcul semblable, que l'assuré doit avoir dépassé 97 ans.

XII. Dans le cas où le capital C doit être restitué t années après l'époque du contrat, ce capital doit être égal à la valeur d'une rente viagère temporaire a pendant t années, plus à la prime fixe représentant l'assurance du capital C payable au bout des t années si l'assuré est encore vivant.

La valeur de la rente temporaire est, en désignant par $n - t$ l'âge actuel de l'assuré,

$$a \left[A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{A_n}{(1+r)^t} \right].$$

La valeur actuelle du capital remboursable C est d'ailleurs facile à obtenir; car la probabilité que l'assuré vivra encore au bout de t années est $\frac{v_n}{v_{n-t}}$; la valeur cherchée est donc $\frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{C}{(1+r)^t}$.

D'après ce qui a été dit ci-dessus on doit donc avoir $a \left[A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{A_n}{(1+r)^t} \right] + \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{C}{(1+r)^t} = C$, d'où l'on tire

$$a = C \cdot \frac{1 - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{1}{(1+r)^t}}{A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{1}{(1+r)^t}}. \quad [11]$$

Si, par exemple, on suppose $C = 20000$ fr., $n = 60$, $t = 10$, d'où $n - t = 50$, on trouvera $A_{50} = 11,0160$, $A_{60} = 8,3416$, $v_{50} = 297070$,

$v_{60} = 213567$; et, en effectuant les calculs, on obtiendra : $a = 147,71$.

XIII. — Les assurances sur la vie donnent lieu à beaucoup d'autres combinaisons, pour lesquelles nous renverrons aux ouvrages spéciaux; ce qui vient d'être dit peut suffire pour les cas les plus usuels.

(Voy. la *Théorie des annuités viagères et des assurances sur la vie*, par Francis Baily; la *Théorie élémentaire des annuités viagères et des assurances sur la vie*, par M. Maas, ancien élève de l'École normale supérieure; et le *Petit Traité de l'Assurance sur la vie*, de M. A. Guilmin.)

ASTRAGALE, sorte de moulure circulaire (Voy. MOULURES), placée à la partie inférieure du chapiteau d'une colonne; elle repose sur un filet que l'on comprend quelquefois dans l'astragale elle-même.

ATTAQUE DES PLACES. (Il n'est question ici que des opérations géométriques auxquelles l'attaque des places fortes donne lieu.) Après avoir investi la

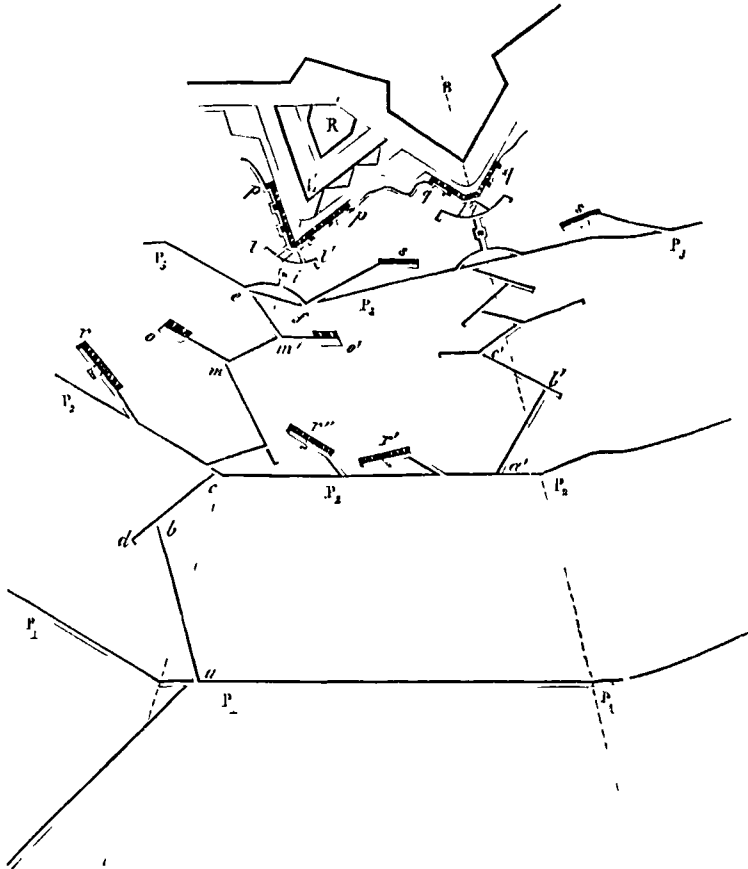


Fig. 1.

place, on détermine le point d'attaque, c'est-à-dire le bastion par lequel on se propose de pénétrer de vive force dans le corps de la place. Avant de forcer ce bastion, il est nécessaire de se rendre maître des

centes; les premiers travaux d'attaque doivent donc être dirigés simultanément sur ces demi-lunes et sur le bastion lui-même. Soit B (fig. 1) ce bastion et L l'une des deux demi-lunes considérées. Nous ne figurerons que les travaux d'approche dirigés sur

cette demi-lune et sur le bastion, ceux qui se rapportent à la seconde demi-lune devant être exactement semblables à ceux qui concernent la première. Ces travaux d'approche consistent en tranchées avec parapet, dans lesquelles l'assaillant peut cheminer à l'abri des feux rectilignes, et en batteries destinées soit à chasser l'assiégé des positions qu'il occupe, soit à faire brèche aux ouvrages de fortification qui protègent la place. La première chose à faire est de déterminer la capitale du bastion et de chaque demi-lune, c'est-à-dire la bissectrice de l'angle formé par les faces de chacun de ces ouvrages. Comme une grande exactitude n'est pas nécessaire dans cette opération, on peut procéder de la manière suivante. On détermine d'abord les prolongements des deux faces de l'ouvrage; pour cela on choisit l'instant où l'une d'elles est éclairée et l'autre dans l'ombre, afin que le saillant soit vu plus nettement; et l'on marche à peu près parallèlement à l'une des faces jusqu'à ce que l'autre disparaisse, on est alors dans le prolongement de cette dernière; et l'on plante un piquet dans la position où l'on se trouve; en s'alignant sur le saillant et sur ce piquet, il est ensuite facile de prolonger la direction ainsi déterminée. Cela fait, pour chaque face, on se place dans le prolongement d'une des faces, une boussole à la main, et l'on observe l'angle que ce prolongement fait avec la ligne nord et sud.

On opère de même pour le prolongement de la seconde face. La bissectrice de l'angle des deux faces fait avec la ligne nord et sud un angle qui est la demi-somme des angles observés si les deux faces sont d'un même côté de cette ligne, ou bien leur demi-différence si les faces sont de part et d'autre de la ligne nord et sud. On cherche alors par tâtonnement un point tel, que le rayon visuel mené de ce point au saillant fasse, avec la ligne nord et sud, un angle égal à cette demi-somme ou à cette demi-différence; le point ainsi obtenu appartient à la bissectrice cherchée; on y plante un piquet; et, en s'alignant sur le saillant et sur ce piquet, on a la direction de la capitale. On opère de même pour les deux autres.

On ouvre la tranchée à 600^m des saillants du chemin couvert des demi-lunes (Voy. FORTIFICATION), et on lui donne une direction qui fasse des angles égaux avec deux capitales consécutives; c'est ce que l'on appelle la première parallèle, P, P, P₁. Cette tranchée n'est d'abord qu'un fossé d'un mètre de profondeur et d'un mètre de largeur, dont la terre est rejetée du côté de la place, à une hauteur totale d'environ 2^m,30 au-dessus du fond du fossé; mais, dès le second jour, ou plus exactement dès la seconde nuit, la section de la tranchée prend la forme indiquée par la figure 2. Le fond de la tranchée a alors 3^m de large; les gradins qui permettent à l'as-

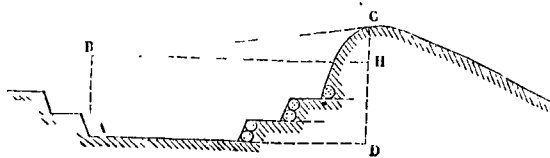


Fig. 2.

siégeant de monter sur la banquette pour faire le coup de feu sont soutenus par des fascines de 2^m de long sur 0^m,22 de diamètre. De distance en distance on établit quatre gradins au lieu de deux, afin d'avoir des espèces d'escaliers par lesquels l'assaillant peut franchir le parapet pour repousser les sorties. Aux extrémités de la première parallèle on élève des REDOUTES (Voy. ce mot) destinées à protéger les travaux, en couvrant les ailes. La première parallèle une fois établie, on s'avance vers la demi-lune L par des tranchées en zigzag dites *boyaux de tranchée*, abc. C'est dans le commencement du seizième siècle qu'on en a fait usage pour la première fois. On les dirige en zigzag pour qu'ils ne soient pas enfilés par le canon de la place; leur prolongement passe ordinairement à 20 ou 30 mètres du saillant qui domine les ouvrages. Voici comment on détermine cette distance: le boyau de tranchée a une largeur un peu moindre que la parallèle, soit 2^m,50; mais sa coupe est analogue à celle qui est représentée figure 2. Un homme qui longe le pied A du revers de la tranchée est à 3^m,10 environ de la crête C du parapet; en lui supposant une hauteur de 1^m,90 avec la coiffure, il est à 0^m,40 plus bas que le point C qui est à 2^m,30 au-dessus du fond du fossé. Pour qu'il ne soit pas atteint par un coup de feu rasant la crête du parapet, il faut que la direction de ce coup fasse avec l'horizon un angle plus petit que l'angle CBH, déterminé par BH = 3^m,10 et

CH = 0^m,40; c'est-à-dire que cet angle doit être moindre que celui qui a pour tangente $\frac{CH}{BH}$ ou $\frac{4}{31}$ ou environ $\frac{1}{8}$; on s'impose ordinairement la condi-

tion que cette tangente soit égale à $\frac{1}{10}$. Pour cela

il faut, si le terrain est supposé horizontal, que le boyau de tranchée passe à une distance du saillant qui le domine, égale à 10 fois la différence de cote entre ce saillant et la crête du parapet de la tranchée. Si, par exemple, la différence des cotes est de 2^m,80, on fera passer le boyau à 28^m du saillant. On y parviendra en décrivant du saillant considéré, comme centre, avec un rayon de 28^m, un cercle, auquel la projection horizontale de la crête du parapet devra être tangente. Pour ne pas donner aux boyaux de tranchée une longueur inutile, on les limite à deux droites que l'on détermine en prenant, sur la première parallèle, deux points à 70^m à droite et à gauche de la capitale, et sur la troisième capitale, dont il sera question plus loin, deux autres points à 25^m à droite et à gauche de cette même capitale. Chaque boyau de tranchée est prolongé de 10 à 12 mètres en arrière, comme on le voit en d, afin de dégager les tournants, et pour d'autres exigences de service. Des boyaux analogues sont pratiqués en arrière de la première parallèle afin de la mettre en communication avec les

dépôts de tranchée, placés ordinairement à 1500^m des ouvrages. Deux boyaux de tranchée consécutifs ne doivent pas faire un angle inférieur à 30°.

Lorsqu'on est arrivé à 280 mètres du saillant du chemin couvert, on ouvre la *deuxième parallèle* P₁P₂, dont la direction est parallèle à la première. Cette seconde parallèle étant à portée de la mitraille, et pouvant être remuée plus efficacement par les projectiles, on la trace à la *sape volante*, c'est-à-dire que l'épaulement est soutenu par des *gabions*, que les travailleurs remplissent de terre. Lorsqu'elle est terminée, cette parallèle a le profil indiqué par la figure 3; *g* représente la position des gabions. De distance en distance on double le nombre des gradins pour que les assaillants puissent franchir le parapet. En avant de la deuxième parallèle, on élève les *batteries à ricochet*, *r*, *r'*, *r''* (fig. 1), destinées à prendre en enfilade, savoir *r* et *r'* les faces de la demi-lune, *r''* et sa symétrique les faces du bastion; dans chaque batterie, la première pièce doit être dans le prolongement de la ligne de feu de l'ouvrage, les autres sont destinées à battre le terre-plein. Ces batteries ont été employées pour la première fois par Vauban, en 1688, au siège de Philippsbourg. Sous la protection de ces batteries, l'assiégeant continue à cheminer, à la sape volante, sur les capitales des demi-lunes: et il ouvre un

nouveau cheminement sur la capitale du bastion, en *a'V'c'* (fig. 1).

On n'ouvre la troisième parallèle qu'à 60 mètres des saillants du chemin couvert. Avant d'arriver à cette distance, on construit, si la défense est vigoureuse, des bouts de parallèles *mo* et *m'o'* (fig. 1), destinées à recevoir les corps qui doivent soutenir de plus près les travailleurs, et aux extrémités desquelles on élève des batteries d'obusiers *o* et *o'* ayant pour mission de chasser l'assiégé du chemin couvert.

La *troisième parallèle* est dirigée parallèlement à la droite qui joindrait les saillants des deux demi-lunes, P₁P₂P₃; elle est située au pied des glacis. A partir de cette parallèle, le travail se fait à la *sape pleine*; les gabions qui supportent l'épaulement sont couronnés de fascines; les vides formés par la courbure des gabions sont remplis par des sacs à terre; le travail se fait avec lenteur, mais avec beaucoup de soin, à cause de la proximité de l'assiégé. La tête de la sape est couverte par un gabion de 2^m,30 de long sur 1^m,30 de diamètre, qui est couché parallèlement à son axe, et qu'on appelle le *gabion farci*. Lorsqu'on peut se dispenser de l'emploi de ce gabion farci, la sape est dite *demi-pleine*. En avant de la troisième parallèle on élève des batteries d'obusiers, ou de mortiers destinés à chasser

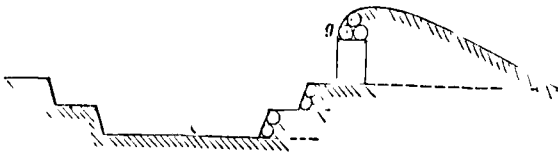


Fig. 3.

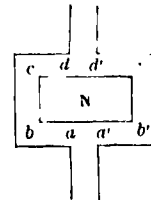


Fig. 4.

l'assiégé du chemin couvert et des places d'armes rentrantes, et à battre les faces du front d'attaque.

On débouche de la troisième parallèle par deux sapes pleines circulaires, partant de deux points *e* et *f* distants de 60 à 80 mètres; ces deux arcs de cercle se réunissent en *i*. On avance alors droit sur le saillant par une sape pleine double, c'est-à-dire que le boyau est pourvu d'un épaulement de chaque côté. On avance ainsi tant que le fond de la tranchée est suffisamment défilé du saillant que l'on attaque par l'épaisseur verticale du gabion farci. Quand cette condition n'est plus remplie, le boyau se bifurque par deux sapes simples *ab*, *a'b'* (fig. 4), puis deux sapes doubles *bc*, *b'c'*, puis encore deux sapes simples *cd*, *c'd'*; de manière à former, perpendiculairement à la direction de la capitale, une traverse *N* de 12 mètres de long et de 5 à 6 mètres d'épaisseur. Cette traverse a pour objet d'éviter l'enfilade. Au delà, les deux sapes simples se réunissent de nouveau en une sape double dans la direction de la capitale.

Arrivé à 30 mètres du saillant du chemin couvert, on ouvre à droite et à gauche une sape pleine circulaire, dont le saillant attaqué est le centre, et que l'on continue de part et d'autre jusqu'au prolongement de la ligne de feu du chemin couvert. Cet ouvrage circulaire est ce qu'on appelle le *T*. Perpendiculairement aux extrémités de l'arc on

prolonge les sapes de 10 à 12 mètres, pour établir les *cavaliers de tranchée*, gabionades élevées sur le glacis pour protéger les grenadiers chargés de chasser l'assiégé du chemin couvert par un feu nourri de mousqueterie, ou à l'aide de grenades à la main. Ces cavaliers retranchés ont été employés pour la première fois par Vauban, en 1684, au siège de Luxembourg.

Deux sapes parties du *T* convergent vers le saillant. Arrivées à 5 ou 6 mètres du chemin couvert elles se dirigent parallèlement à ce chemin, l'une à droite et l'autre à gauche, en ménageant de distance en distance des traverses pour éviter l'enfilade. C'est ce que l'on appelle *couronner le chemin couvert*. On pousse ce couronnement jusqu'à la deuxième traverse du chemin couvert (*Voy. TRAVERSE*). C'est sur l'emplacement ainsi occupé que l'artillerie élève les *batteries de brèche* de la demi-lune, *ppp* (fig. 1).

Des travaux analogues ont été exécutés en même temps contre le saillant du chemin couvert du bastion; et on y établit des batteries *qqq*, dites *contre-batteries*, destinées à contre-battre les flancs des bastions collatéraux. C'est en 1378, au siège de Saint-Malo, que parait avoir été faite pour la première fois l'application de l'artillerie à l'ouverture d'une brèche. Douze heures suffisent ordinairement pour rendre la brèche praticable. Quand le fossé est étroit et profond, on est obligé quelquefois

d'établir les batteries de brèche sur le terre-plein même du chemin couvert. Quelquefois aussi c'est en faisant jouer la mine que l'on fait brèche à l'ouvrage attaqué.

Lorsque la brèche est devenue praticable, on exécute la *descente du fossé*. Pendant le couronnement du chemin couvert et l'armement des batteries de brèche, le génie a construit une galerie souterraine, qui vient déboucher dans le fossé, et que l'on poursuit, par une sape pleine, jusqu'au pied de la brèche, si le fossé est à sec. Quand le fossé est plein d'eau, la descente du fossé débouche à 0^m, 40 au-dessus du niveau de l'eau; et, à l'aide de fascines, de pierres et de sacs à terre, on construit une digue de 8 mètres de large à sa partie supérieure, garnie d'un épaulement formé de deux rangs de gabions.

L'assaut donné à la demi-lune, l'assiégé se réfugie dans le réduit (*Voy. ce mot*), s'il y en a un; et il faut recommencer les mêmes opérations pour s'en emparer. Le réduit enlevé, on établit les batteries de brèche du bastion, et l'on prépare la descente de fossé, qui s'exécute comme pour la demi-lune. Si les fossés sont à sec, on peut arriver à la brèche du bastion par un cheminement en zigzag exécuté à la sape pleine dans le fossé de la demi-lune, comme le montre la figure 1.

Quand l'assiégeant s'est rendu maître du bastion, il peut arriver que l'assiégé se réfugie derrière un *RETRANCHEMENT* (*Voy. ce mot*), construit à l'avance ou pendant la durée du siège. Mais ce retranchement emporté, l'assaillant se prolonge sur les courtines et va ouvrir les portes à l'armée assiégeante. S'il y a une *CITADELLE* (*Voy. ce mot*), elle peut servir de dernier refuge à la garnison; c'est pourquoi l'attaque est ordinairement dirigée contre un bastion de la citadelle elle-même. Cette citadelle emportée, l'assiégé ne peut tenir dans la ville, et il est contraint à capituler (*Voy. le Traité de la défense des places, de Carnot; le Résumé de fortification, de Zaccone; les Principes de fortification, par le général Noiset*).

ATTERRAGE, arrivée d'un navire en vue de la terre, et reconnaissance des points principaux de la côte. On y ajoute la détermination exacte de la position du navire à l'aide de relèvements convenables (*Voy. RELÈVEMENTS*).

ATTICURQUES (de ἀττικός, attique, et ἔργον, travail), nom donné par les anciens aux portes dont les jambages, au lieu d'être verticaux, allaient en s'écartant vers le bas.

ATTIQUE, construction qui n'a que la hauteur du piédestal d'un ordre, et qu'on élève, en retraite, au-dessus de l'entablement d'un édifice, dans la largeur de sa façade, pour dissimuler une toiture. C'est aux Athéniens que cette construction a été empruntée. L'attique se réduit quelquefois à un simple mur sans ornements ni moulures; souvent, au contraire, il est garni de tablettes pour recevoir des inscriptions, ou décoré de balustres, de figures et ornements divers. Lorsque l'attique fait le tour de l'édifice, il reçoit le nom d'*attique continu*; il est appelé *attique circulaire* si l'édifice, et par conséquent son entablement, sont de forme circulaire eux-mêmes.

On donne aussi le nom d'attique, ou d'*étage en attique*, à un petit ordre que l'on élève en retraite

au-dessus de l'entablement d'un édifice principal. Cette construction, que son utilité peut faire excuser dans les habitations particulières, est condamnée par les hommes de goût dans les édifices publics.

ATTRACTION UNIVERSELLE. *Voy. GRAVITATION UNIVERSELLE*.

AUBES, palettes qui garnissent certaines *ROUES HYDRAULIQUES*. Elles peuvent être droites, brisées ou courbes. *Voy. ROUES EN DESSOUS, ROUES DE CÔTÉ, ROUES PONCELET.*

AULOFFÉE, terme de marine, action de *LOFER* (*Voy. ce mot*), ou de venir au vent.

AUNE, ancienne mesure de longueur usitée en France dans le commerce des étoffes, des rubans, etc. Cette mesure variait d'une contrée à l'autre. L'aune de Paris valait 3 pieds 7 pouces 10 lignes, et équivalait par conséquent à 1^m, 188. L'aune se subdivisait en demies, tiers, quarts, huitièmes.

AUTOMATES (du grec αὐτός, soi-même, et μάω, se mouvoir), machines qui imitent les mouvements naturels des animaux ou de l'homme, et dans lesquelles le mécanisme est ordinairement caché. La disposition de ces machines est extrêmement variable, et on y met en usage toutes les ressources de la cinématique et de l'horlogerie. Cependant on peut dire d'une manière générale que le principe de ces appareils consiste dans un mécanisme d'horlogerie principal, qui, à des instants déterminés, met en mouvement d'autres mécanismes d'horlogerie, dont chacun a une fonction particulière et produit un ou plusieurs mouvements particuliers. Les plus parfaites machines de ce genre sont sans contredit le célèbre *canard* de Vaucanson, que l'on a pu voir encore à Paris il y a quelques années, et le *joueur de flûte* du même auteur. On cite également le *joueur d'échecs* du baron de Kempelen, et plusieurs autres pièces remarquables, aujourd'hui tombées dans l'oubli. (*Voy. le Traité des machines imitatives de M. Borgnis, et l'Explication du joueur d'échecs de Kempelen.*)

AVAL (abrégé de *à valoir*), souscription apposée au bas d'une lettre de change ou d'un billet à ordre par un tiers, étranger ou tireur, et par lequel il s'engage solidairement à payer le montant du billet, dans le cas où il ne serait pas payé par celui qui l'a souscrit. Cette souscription consiste en une signature accompagnée des mots : *bon pour aval*.

AVAL (du latin *ad*, vers, et *vallis*, vallée), terme employé en hydraulique pour désigner le côté vers lequel se dirige un courant. Un point est dit *en aval* d'un autre point lorsque le courant va du second vers le premier.

AVANCE DE PAS, disposition donnée à l'hélice propulsive, et d'après laquelle la partie *avant* appartient à une surface hélicoïde d'un pas plus faible que la partie *arrière* (*Voy. PROPULSEURS HÉLIÇOÏDES*).

AVANCE DU TIROIR, quantité dont le tiroir de distribution d'une machine à vapeur a dépassé sa position moyenne au moment où le piston commence sa course. On sait que la distribution de la vapeur se fait généralement à l'aide d'un tiroir mû par un excentrique circulaire (*Voy. MACHINES A VAPEUR*). Dans les machines à basse pression, la vapeur se rend dans le cylindre en passant par l'intérieur du tiroir, et elle sort du cylindre pour se rendre au condenseur en passant en dehors du ti-

de la bielle, on trace un arc de cercle, le point où il coupera le prolongement de AB sera la position correspondante du point d'articulation du piston. La position moyenne de ce point étant déterminée, on en déduira la distance du piston à sa position moyenne, pour chaque position correspondante du bouton de manivelle. On opérera de la même manière pour obtenir la distance du tiroir à sa position moyenne; c'est-à-dire que, AB représentant alors la course du tiroir, on décrira du point *m* comme centre, avec un rayon égal à la longueur de la barre d'excentrique, comptée à partir du centre de la bague, un arc qui déterminera sur le prolongement de AB la position du point d'articulation de la barre, et par suite la distance du tiroir à sa position moyenne. On pourra dès lors tracer le lieu décrit par le point *M'* qui a pour coordonnées, par rapport aux axes OX et OY, les distances du piston et du tiroir à leur position moyenne. Cette courbe n'est plus une ellipse, mais une courbe fermée analogue, à laquelle on a donné le nom de *courbe en œuf* ou de *courbe de réglementation*.

Sur une machine déjà construite, on peut prendre directement les mesures nécessaires pour tracer la courbe de réglementation. Pour cela, après avoir ouvert la boîte à vapeur, on marque sur le tiroir un point de repère; on fait mouvoir la manivelle de quantités successives, et, dans chacune de ses positions, on mesure, d'une part la distance du piston à l'une des bases du cylindre, de l'autre la distance du point de repère du tiroir à l'une des arêtes des lumières. Il est facile de déduire de ces mesures les distances du piston et du tiroir à leur position moyenne; et, en multipliant ces dernières par le rapport entre la course du piston et celle du tiroir, on obtient les coordonnées d'autant de points de la courbe de réglementation, et par suite il devient facile de tracer cette courbe.

M. Morin a imaginé un appareil à l'aide duquel la machine elle-même trace la courbe de réglementation. Cet appareil se compose d'une planchette légère, recouverte d'une feuille de papier, et mobile entre des guides, parallèlement au piston; le milieu de son bord antérieur est lié à la tige du piston par un fil de cuivre passant sur une poulie de renvoi; et le milieu de son bord postérieur est sollicité par un contrepoids suspendu à l'extrémité d'un autre fil passant de même sur une poulie. La planchette reçoit ainsi un mouvement de va-et-vient dont la loi est précisément celle du piston. Une tige mobile entre des guides, dans une direction perpendiculaire à la première, reçoit, par un mécanisme semblable, un mouvement de va-et-vient dont la loi est celle du tiroir. A cette tige est fixé un style, ou un pinceau, qui trace sur la feuille de papier une courbe dont les coordonnées, parallèles aux deux mouvements dont il vient d'être question, sont les courses simultanées du piston et du tiroir, comptées si l'on veut à partir de leur position moyenne. Cette courbe est la courbe de réglementation.

La courbe de réglementation une fois obtenue, il est facile d'en déduire toutes les circonstances de la distribution, puisque, pour une position donnée quelconque du piston, on a la position correspondante du tiroir, par suite la disposition et le degré d'ouverture des lumières d'admission et d'échappement.

S'il s'agit d'une machine en projet, on peut, en traçant la courbe de réglementation pour diverses hypothèses sur l'avance angulaire du tiroir, déterminer la valeur la plus avantageuse de cette avance pour l'effet que l'on a en vue.

L'avance du tiroir produit un *échappement anticipé*; c'est-à-dire que la vapeur admise sous le piston s'échappe du cylindre avant que le piston revienne sur ses pas, ce qui diminue la pression motrice vers la fin de la course. L'avance produit en même temps une *admission anticipée*; c'est-à-dire que la vapeur est admise sur la face opposée du piston, avant que celui-ci ait atteint la fin de sa course; il en résulte ce qu'on appelle une *marche à contre-vapeur*, qui diminue d'une nouvelle quantité la pression motrice vers la fin de la course. Mais la contre-pression au commencement de la course suivante se trouve diminuée d'une manière notable par l'échappement anticipé; et en somme, le résultat final est plus avantageux. Mais il est clair qu'il ne faudrait pas exagérer l'avance, parce que, vers la fin de la course, la diminution de pression motrice due à l'échappement anticipé, et la pression en sens contraire due à l'admission anticipée, pourraient compenser l'avantage résultant de la diminution de la contre-pression au commencement de la course.

Pour les autres effets de l'avance du tiroir, voyez l'article DÉTENTE. (Voy. aussi les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, t. III, et le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet, t. II.)

AVANT-CORPS, partie d'un édifice qui fait saillie sur la façade. Les avant-corps peuvent être employés d'une manière symétrique, comme simple ornement, ou comme moyen d'ajouter à la solidité des constructions.

AXE CENTRAL DU MOUVEMENT, nom donné par M. Bélanger à l'axe autour duquel s'opère la rotation instantanée d'un corps solide en même temps qu'une translation instantanée à lieu parallèlement au même axe. Cet axe a été nommé par M. Poincaré *axe spontané glissant*. (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ.)

AXE D'OSCILLATION, droite menée parallèlement à l'axe de suspension d'un pendule composé par son *centre d'oscillation* (Voy. PENDULE COMPOSÉ). Cet axe et l'axe de suspension jouissent de la propriété d'être *réciproques*, c'est-à-dire que si l'on suspend le corps par son axe d'oscillation, l'ancien axe de suspension devient l'axe d'oscillation.

AXE DU MONDE, droite autour de laquelle s'exécute le mouvement de rotation de la terre. Cet axe est en réalité mobile dans l'espace; mais il paraît fixe par rapport à la SPHÈRE CÉLESTE (Voy. ce mot).

AXE INSTANTANÉ, axe autour duquel s'effectue la rotation instantanée d'un corps dans lequel il y a un point fixe (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ). Quelques auteurs l'appellent *axe spontané* de rotation.

AXE OPTIQUE, ligne de visée d'une lunette; elle est déterminée par le *centre optique* de l'objectif (Voy. LENTILLE), et par le point de croisement des fils du réticule placé au foyer. Cette direction ne dépend en aucune façon de la position de l'oculaire; et elle ne doit pas être confondue, soit avec l'axe de figure de la lunette, soit avec la droite qui joint le centre de l'objectif au centre de l'oculaire, bien que ces trois droites puissent accidentellement coïn-

cider. Le faisceau de lumière qui émane du point visé vient converger en un point qui est le *foyer conjugué* du premier, et qui est situé sur la droite qui joint ce point au centre optique de l'objectif; lors donc que le point de croisement des fils du réticule est placé au foyer et coïncide avec l'image du point visé, ce point de croisement et le centre de l'objectif déterminent une droite qui va passer nécessairement par le point visé; c'est l'axe optique de la lunette.

AXE SPONTANÉ GLISSANT, axe suivant lequel a lieu la translation instantanée d'un corps, et autour duquel s'effectue en même temps sa rotation instantanée. Cette dénomination est due à M. Poin-sot. (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ.)

AXES PRINCIPAUX, directions des axes de l'ellipsoïde que l'on détermine en menant par un même point d'un corps diverses droites, et en prenant sur chacune d'elles une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie du corps par rapport à cette droite (Voy. MOMENT D'INERTIE). On a plus particulièrement à considérer les axes principaux relatifs au centre de gravité; cependant la considération des axes principaux relatifs à un autre point peut être utile, notamment lorsque ce point est un point fixe dans le corps.

Les axes principaux relatifs au centre de gravité jouissent d'une propriété remarquable; c'est que si l'on prend un point sur l'un d'eux et que l'on considère les axes principaux relatifs à ce point, ils seront respectivement parallèles aux axes principaux relatifs au centre de gravité, et que par conséquent celui qui passe par le point considéré et par le centre de gravité sera commun aux deux systèmes. Prenons, en effet, pour axes coordonnés les axes principaux passant par le centre de gravité; on aura pour ces axes

$$\Sigma mxy = 0, \quad \Sigma myx = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Prenons un point sur l'un des axes, sur l'axe des x par exemple, à la distance a de l'origine, et transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point; les coordonnées y et z ne changeront pas, et si l'on nomme x' l'abscisse nouvelle d'un point dont l'abscisse ancienne était x , on aura $x = x' + a$. Par suite,

$$\Sigma mxy = \Sigma m(x' + a)y = \Sigma mx'y + a\Sigma my = 0.$$

Or l'origine étant le centre de gravité du corps, on a $\Sigma my = 0$; par conséquent il reste $\Sigma mx'y = 0$. On démontrerait de même qu'on a $\Sigma mx'z = 0$.

D'ailleurs on aura toujours $\Sigma myz = 0$, puisque y et z n'ont point changé. Donc les nouveaux axes seront les axes principaux relatifs au point pris sur l'axe des x . (Voy. les *Traité de Mécanique rationnelle*.)

AXONOMÉTRIQUE (PERSPECTIVE). Voy. PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE.

AZIMUT (mot dérivé de l'arabe), angle que fait avec le méridien le plan déterminé par la verticale du lieu, et par un point donné, une étoile par exemple. En astronomie et en géodésie, les azimuts se comptent sur l'horizon de 0 à 360°, à partir du sud, en allant vers l'ouest, c'est-à-dire dans le sens du mouvement apparent des astres. Ils se mesurent à l'aide du théodolite, en même temps que la distance zénithale.

Les marins comptent les azimuts de 0 à 180° seulement, toujours à partir du sud, mais en allant

vers l'est ou vers l'ouest. Il est facile de passer de l'une de ces manières de compter à l'autre; car si un azimut est compté du sud vers l'est, en le retranchant de 360° on aura l'azimut compté du sud vers l'ouest. En mer, les azimuts se mesurent avec le COMPAS DE VARIATION. (Voy. ce mot).

La détermination de l'azimut d'un signal est une opération importante en géodésie; elle sert, dans une TRIANGULATION (Voy. ce mot) à fixer la direction d'un premier côté, d'où l'on déduit par le calcul la direction de tous les autres; elle permet de vérifier directement quelques-unes des directions obtenues par le calcul; enfin, en hydrographie, elle sert de base aux *relevements* qui ont pour objet la construction des cartes marines. Il existe pour la détermination de l'azimut d'un signal un grand nombre de méthodes qui ont toutes un fond commun: mesurer, à un instant déterminé, l'angle que fait le plan vertical d'un astre avec le plan vertical du signal; calculer, à l'aide des données fournies par l'observation, l'azimut de l'astre, et en déduire l'azimut du signal par une soustraction.

1. Si la latitude du lieu a été exactement déterminée, si sa longitude est donnée approximativement, et si l'on dispose d'un chronomètre dont l'état et la marche soient bien connus, on pourra calculer à l'avance, pour une heure déterminée, la déclinaison du soleil, son ascension droite, et par suite son angle horaire. Dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith et le soleil, on connaîtra alors deux côtés, dont l'un est la distance zénithale du pôle, complément de la latitude λ , et l'autre la distance polaire du soleil, complément de sa déclinaison D ; on connaîtra en outre l'angle compris qui n'est autre que l'angle horaire A . On pourra donc calculer les deux autres angles, savoir l'angle au soleil, que nous désignerons par S , et l'angle au zénith, supplément de l'azimut A cherché. Par les analogies de Néper on aura :

$$\cot \frac{1}{2}(A - S) = \cot \frac{1}{2} A \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda - D)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda + D)},$$

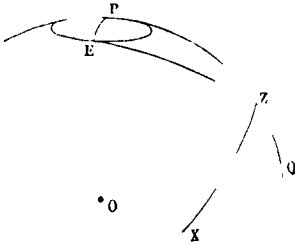
$$\cot \frac{1}{2}(A + S) = \cot \frac{1}{2} A \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda - D)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda + D)},$$

d'où l'on tirera A et S . On mesurera donc au théodolite l'angle du soleil et du signal à un instant quelconque; on calculera A pour cet instant; la différence donnera l'azimut du signal. Pour plus d'exactitude, on mesure l'angle du soleil au signal par une série de répétitions, en nombre pair, en se servant alternativement du bord oriental du soleil et de son bord occidental.

Si la durée des opérations ne dépasse pas 7 à 8 minutes, on peut admettre que l'angle varie proportionnellement au temps, ce qui permet de prendre la moyenne des temps comme le temps qui correspond à la moyenne des angles. Ce genre d'opération se fait de préférence quelques temps après le lever du soleil, ou quelques temps avant son coucher, pour que l'angle qu'on mesure ne varie pas trop rapidement.

Il est clair qu'on n'a à faire aucune correction de réfraction ni de parallaxe.

II Si la latitude est connue avec précision, mais que l'heure ne puisse être appréciée qu'approximativement, on emploie pour déterminer les azimuts l'observation de la polaire à l'instant de ses digressions. Soit P le pôle, E la position de l'étoile polaire



à l'instant de sa plus grande élongation vers l'ouest pour fixer les idées ; soit Z le zénith ; PZ le méridien, et ZE l'arc de grand cercle qui joint les points Z et E, lequel est tangent en E au petit cercle décrit par l'étoile. Si l'on mène l'arc de grand cercle PE, le triangle sphérique ZEP sera rectangle en E ; en sorte qu'en appelant λ la latitude, qui est le complément de PZ, D la déclinaison de l'étoile, qui est le complément de PE, α la distance zénithale EZ de l'étoile, A l'angle horaire EPZ, et enfin A l'azimut EZQ de l'étoile, on aura :

$$\text{pour déterminer } A, \text{ la relation } \cot D = \cot \lambda \cos A, \\ \frac{\alpha}{A} = \frac{\sin \lambda}{\cos D} = \frac{\sin D \cos \alpha}{\cos D \sin A \sin \alpha}$$

La valeur de A fait connaître l'heure à laquelle l'observation doit être faite ; il n'est pas nécessaire que cette heure soit déterminée avec une grande exactitude, parce qu'aux environs du point E l'étoile s'écarte très-peu de l'arc Ez, en sorte que l'angle en Z varie extrêmement peu ; une légère incertitude sur la marche du chronomètre ne serait donc pas un obstacle au succès de l'opération. La valeur de α fait connaître la hauteur de l'étoile polaire au moment de l'observation. Enfin A est l'azimut EZQ de l'étoile, d'où l'on déduira l'azimut QZX du signal, en mesurant l'angle EZX ; on a toujours le temps nécessaire pour exécuter cette mesure, parce que, comme on vient de le dire, la direction de EZ varie extrêmement peu, pendant un temps notable, aux environs de la digression.

On peut encore, dans le cas qui nous occupe, déterminer l'azimut d'un astre par l'observation de sa hauteur. Dans le triangle qui a pour sommets le pôle, le zénith et l'astre, on connaît alors les trois côtés, savoir la distance zénithale du pôle, ou $90^\circ - \lambda$; la distance zénithale α de l'astre ; et la distance polaire δ de cet astre, ou $90^\circ - D$.

On a donc, en appelant Z l'angle au zénith,

$$\cos \delta = \sin \lambda \sin h + \cos \lambda \cos h \cdot \cos Z,$$

d'où

$$\cos Z = \frac{\sin \lambda \sin h - \cos \delta}{\sin \lambda \sin h}.$$

On calcule $\cos \frac{1}{2} Z$; et en posant $2 S = \lambda + h + \delta$ on obtient :

$$\cos \frac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \cos (S - \delta)}{\sin \lambda \sin h}}.$$

De là l'angle Z, dont le supplément est l'azimut cherché.

A terre, l'instrument qu'on emploie pour cette observation est le théodolite ; la mesure de l'angle de l'astre au signal s'opère par des répétitions en nombre pair, comme il a été expliqué plus haut.

La méthode qui vient d'être exposée est applicable à la mesure de la DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE (Voy. VARIATION) : on observe alors à l'aide du sextant ou du cercle à réflexion.

III. Quand la latitude n'est pas connue, et que l'heure ne peut être obtenue avec précision, on détermine la direction du méridien par l'observation d'une étoile circumpolaire (Voy. MÉRIDienne). Si l'heure ne peut pas être déterminée avec précision, on emploie la méthode des hauteurs correspondantes, ou celle qui est fondée sur l'observation des ombres (même article).

Quand on applique au soleil la méthode des hauteurs correspondantes, il y a lieu de faire une correction, rendue nécessaire par la variation de déclinaison dans l'intervalle des observations, mais cette correction exige que la latitude soit connue, au moins approximativement. Dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith et le soleil, on a, en conservant les notations précédentes,

$$\sin D = \cos \alpha \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda \cos A.$$

Si l'on différentie par rapport à D et à A, et que l'on remplace les différentielles dD, dA par les accroissements finis $\Delta D, \Delta A$, ce qui est permis quand ces derniers sont très-petits, on trouve :

$$\Delta A = \frac{\cos D}{\sin \alpha \cos \sin \alpha} \cdot \Delta D.$$

Mais la proportionnalité entre les sinus des angles et les sinus des côtés opposés donne

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\cos D}{\sin \alpha'}$$

d'où $\sin \alpha \sin A = \cos D \sin \alpha'$; en faisant cette substitution et simplifiant, il vient

$$\Delta A = \frac{\Delta D}{\cos \lambda \sin \alpha'}.$$

On peut prendre pour α' l'expression

$$15 \cdot \frac{1}{2} (h + h'),$$

en désignant par h et h' les heures approchées des observations correspondantes.

Ces dernières méthodes sont surtout employées en topographie, où l'on n'a pas besoin d'une précision extrême.

Pour la détermination des azimuts des côtés successifs d'un réseau de triangles, voyez l'article CONVERGENCE DES MÉRIDiens.

AZIMUT (CORRECTION D'), correction qu'il faut faire subir aux positions des différents sommets d'un réseau de triangles (Voy. TRIANGULATION) et aux azimuts des divers côtés, par suite d'une erreur commise sur l'azimut de l'un d'eux. L'erreur commise est toujours très-petite et n'excède pas quelques secondes ; les erreurs qui en résultent sont du même ordre ; en sorte que, dans le calcul de ces erreurs il est permis de remplacer le rapport des différences finies par celui des différentielles ; c'est sur cette considération qu'est fondée la solution du problème.

Désignons par A le sommet sur l'horizon duquel une erreur d'azimut a été commise ; appelons M un autre sommet quelconque, et P le pôle. L'erreur

commise sur l'azimut mesuré au point A a eu pour effet de faire tourner tout le réseau autour de ce point d'une quantité angulaire égale à cette erreur. Par conséquent, si l'on considère le triangle sphérique qui a pour sommets les points A, M et P, on peut imaginer que le côté AM a tourné lui-même d'une quantité égale; et le problème revient à trouver l'erreur qui affecte la position du point M, par suite de l'erreur commise sur l'angle PAM, ou A, dans le triangle PAM où deux côtés sont restés constants, savoir PA égal à la latitude du point A qui n'a point changé, et AM qui n'a fait que tourner sans changer de grandeur. Appelons l la latitude du point A, l' celle du point M, φ la différence de longitude de ces points, et m le côté AM; la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnera

$$\sin l' = \sin l \cos m + \cos l \sin m \cos A. \quad [1]$$

Différentions par rapport à l' et à A, il viendra $\cos l' \cdot dl' = -\cos l \sin m \sin A \cdot dA$.

Mais la relation entre les sinus des côtés et ceux des angles opposés donne :

$$\frac{\sin m}{\cos l'} = \frac{\sin \varphi}{\sin A}$$

mettant dans la relation précédente la valeur de $\sin m$ tirée de celle-ci et simplifiant, on trouve

$$dl' = -\cos l \sin \varphi \cdot dA, \quad [2]$$

relation qui permettra d'apprécier l'erreur commise sur la latitude du point M par suite de celle qui a été commise sur l'angle A.

Le même triangle fournit la relation

$$\cos m = \sin l' + \cos l \cos l' \cos \varphi. \quad [3]$$

Différentions par rapport à l' et à φ , il vient

$$0 = dl' (\sin l \cos l' - \cos l \sin l' \cos \varphi) - \cos l \cos l' \sin \varphi d\varphi;$$

mettant pour dl' sa valeur [2] et simplifiant, on trouve :

$$d\varphi = -dA (\sin l - \cos l \operatorname{tang} l' \cos \varphi) = -dA \sin l (1 - \cot l \cdot \operatorname{tang} l' \cos \varphi), \quad [4]$$

relation qui permettra d'apprécier l'erreur com-

mise sur la longitude du point M par suite de celle qui a été commise sur l'angle A.

Enfin le même triangle donne encore :

$$\sin l = \sin l' \cos m + \cos l' \sin m \cos M, \quad [5]$$

en appelant M l'angle PMA. Différentions par rapport à l' et à M, il viendra

$$0 = dl' (\cos l' \cos m - \sin l' \sin m \cos M) - dM \cos l' \sin m \sin M.$$

Remplaçons le produit $\sin m \cos M$ par sa valeur tirée de [5], il viendra après réduction :

$$0 = dl' \left(\frac{\cos m - \sin l \sin l'}{\cos l'} \right) - dM \cos l' \sin m \sin M,$$

ou, en vertu de l'équation [3],

$$0 = dl' \cos l \cos \varphi - dM \cos l' \sin m \sin M;$$

mais la relation des sinus donne

$$\frac{\sin m}{\sin \varphi} = \frac{\cos l}{\sin M}, \quad \text{d'où } \sin m \sin M = \cos l \sin \varphi;$$

faisant cette substitution et supprimant le facteur $\cos l$, on obtient :

$$0 = dl' \cos \varphi - dM \cos l' \sin \varphi.$$

Mettant enfin pour dl' sa valeur [2] et simplifiant, on trouve :

$$0 = -dA \cos l \cos \varphi - dM \cos l',$$

$$\text{d'où } dM = -\frac{\cos l \cos \varphi}{\cos l'} dA, \quad [6]$$

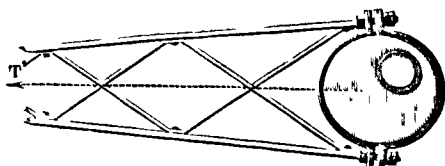
relation qui permettra de calculer l'erreur commise sur M et par conséquent sur l'azimut des côtés qui aboutissent au point M mesurés sur l'horizon de ce point, par suite de l'erreur commise sur A.

AZIMUT MAGNÉTIQUE, angle qu'une horizontale quelconque fait avec le *méridien magnétique*, c'est-à-dire avec le plan vertical qui passe par l'axe magnétique de l'aiguille de déclinaison. Cet angle pourrait être compté de 0 à 180° dans les deux sens est et ouest; mais afin d'éviter toute incertitude on convient de le compter de 0 à 360° vers l'ouest. Par conséquent si deux horizontales font avec le méridien magnétique, de part et d'autre de ce plan, des angles égaux à α , l'azimut de celle qui est à l'ouest sera α , et l'azimut de celle qui est à l'est sera 360° - α .

B

BABORD, partie d'un navire située à gauche du LONGITUDINAL (Voy. ce mot) pour un observateur qui regarde l'avant. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

BAGUE D'EXCENTRIQUE, anneau dans lequel glisse l'EXCENTRIQUE CIRCULAIRE (Voy. EXCENTRIQUE),



et auquel est adaptée la *barre d'excentrique* destinée à transmettre le mouvement de va-et-vient. La rotation de l'excentrique dans sa bague développe un frottement dont il est nécessaire de tenir compte, et qui représente un travail résistant fa-

cile à calculer. Soit T la tension ou la pression exercée par la barre d'excentrique; le frottement de la bague contre la circonférence de l'excentrique sera représentée par fT , f désignant le coefficient du frottement; si ds est l'élément de la circonférence intérieure de la bague, le travail élémentaire de la force T sera $fTds$; et son travail total pour un tour de l'excentrique aura pour expression

$$\int_0^{2\pi} fTds,$$

r désignant le rayon intérieur de la bague. Comme la force T n'est pas donnée analytiquement en fonction de s , il faut calculer cette intégrale définie par la formule approchée de Th. Simpson, en déterminant un nombre impair de valeurs de T répondant à des valeurs de s en progression arithmétique. Pour cela on tracera l'excentrique et sa barre dans un certain nombre de positions embras-

sant ensemble un tour entier de l'excentrique; pour chacune de ces positions on déterminera l'effort T et par suite le frottement fT ; en même temps on évaluera l'arc s de la circonférence intérieure de la bague compris entre le point de contact de la bague et de l'excentrique pour chacune des positions considérées, et le point de contact répondant à la position initiale. On tracera deux axes rectangulaires; on portera en abscisses les valeurs de s et en ordonnées les valeurs correspondantes de fT ; par les extrémités de ces ordonnées, on fera passer une courbe continue, dont l'aire exprimera le travail cherché. Si les valeurs de s ne sont pas en progression arithmétique, après avoir tracé la courbe comme il vient d'être dit, on divisera l'abscisse extrême, c'est-à-dire $2\pi r$, en un nombre pair $2n$ de parties égales; par les points de division on élèvera des ordonnées jusqu'à la rencontre de la courbe, et on les mesurera sur l'épure; ce sont ces ordonnées qui devront entrer dans la formule de Th. Simpson.

Le premier facteur de cette formule sera $\frac{2\pi r}{2n}$,

quantité proportionnelle à r ; il en résulte que le travail consommé par le frottement de la bague est d'autant plus grand que le rayon intérieur de la bague est plus grand lui-même. Aussi n'emploie-t-on ce mode de transmission que lorsqu'il s'agit d'efforts peu considérables, tels, par exemple, que ceux qui sont nécessaires pour faire mouvoir le tiroir de distribution dans les machines à vapeur.

BAGUETTE, sorte de moule circulaire (*Voy. MOULURES*).

BAJOYERS, ou JOUES, parois verticales du coursier dans lequel coule l'eau qui agit sur une roue hydraulique à axe horizontal.

BALANCE, instrument employé à mesurer le poids des corps. La *balance ordinaire* (fig. 1) est

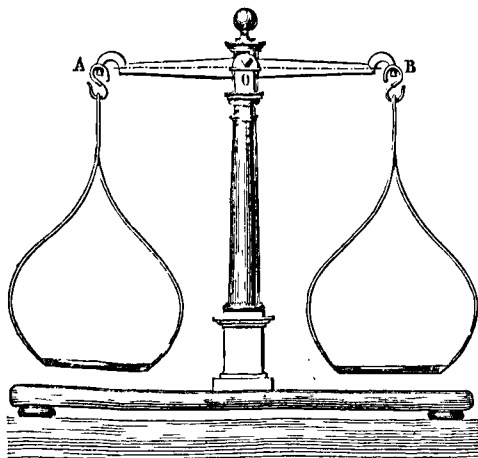


Fig. 1.

un levier du premier genre (*Voy. LEVIER*) auquel sont appliquées deux forces verticales également distantes du point fixe. Ces forces sont les poids placés dans les plateaux, augmentés du poids des plateaux eux-mêmes. Pour que ces deux forces se fassent équilibre sans que le fléau AB quitte sa position horizontale, il faut évidemment qu'elles soient

égales; et c'est sur cette condition qu'est fondé l'usage de cet instrument de mesure. Ceci suppose qu'on puisse se dispenser d'avoir égard au poids du fléau: pour cela, il faut que le moment de ce poids, par rapport au point fixe O, soit nul, et que, par conséquent, le centre de gravité du fléau soit dans la verticale du point fixe. On satisfait autant qu'il est possible à cette condition en rendant les deux bras aussi parfaitement égaux que les procédés d'exécution peuvent le permettre.

I. Au reste on peut peser les corps très-exactement avec une balance dans laquelle les bras du fléau offriraient une légère inégalité de longueur. On emploie pour cela la méthode dite des *doubles pesées*, qui peut être pratiquée de deux manières. Dans le premier procédé, dû à Borda, on place dans l'un des plateaux de la balance le corps qu'on se propose de peser; et on lui fait équilibre en mettant dans l'autre plateau du sable sec ou de la grenaille de plomb. On enlève alors le corps, et on le remplace par des poids marqués qui fassent équilibre au sable ou à la grenaille. L'ensemble de ces poids marqués exprime évidemment le poids du corps, puisque, placés dans des circonstances identiques, ces poids et le corps font équilibre au même poids auxiliaire. Le second procédé, qui n'est pas plus long, fait connaître en même temps le rapport des bras du fléau. On place le corps à peser dans l'un des plateaux de la balance, et on lui fait équilibre avec des poids marqués; soit P le poids ainsi obtenu. On recommence l'expérience en plaçant le corps à peser dans l'autre plateau; soit Q le poids nécessaire pour lui faire équilibre. Si Q est égal à P, ce poids est exactement celui du corps. Dans le cas contraire, soit x le poids du corps à peser, et soient a et b les longueurs des deux bras du fléau. On a, dans la première expérience:

$$x \cdot a = P \cdot b; \quad [1]$$

et dans la seconde:

$$x \cdot b = Q \cdot a. \quad [2]$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, et qu'on supprime les facteurs a et b devenus communs, on obtient

$$x^2 = PQ, \text{ d'où } x = \sqrt{PQ}; \quad [3]$$

c'est-à-dire que le poids réel du corps est la moyenne géométrique entre les poids accusés dans les deux expériences. On obtient de plus, en divisant membre à membre l'égalité [1] par l'égalité [2]:

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{b}{a}, \text{ ou } \frac{a^2}{b^2} = \frac{P}{Q}$$

$$\text{ou enfin } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}; \quad [4]$$

c'est-à-dire que les bras du fléau sont dans le rapport des racines carrées des poids qui, dans chaque expérience, ont été placés à l'extrémité du bras opposé. On déduit encore des relations [3] et [4]

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{Q} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{P}{x}$$

Si, par exemple, on a trouvé $P = 1^h,350$ et $Q = 1^h,362$, on obtiendra

$$x = 1^h,35598, \text{ ou à peu près } x = 1^h,356$$

et $\frac{a}{b} = 0,991188$, ou à peu près $\frac{a}{b} = 0,991$.

Pour qu'une balance soit juste, il ne suffit pas que deux poids égaux s'y fassent équilibrer, il faut encore que l'inégalité des poids entraîne la rupture de l'équilibre. Pour cela, il faut que le fléau n'éprouve aucune résistance dans sa rotation autour du point fixe, c'est-à-dire qu'il ne s'exerce aucun frottement entre les tourillons du fléau et les coussinets sur lesquels ils reposent ; car ce frottement rendrait l'équilibre possible avec une inégalité de poids d'autant plus grande que le frottement serait lui-même plus considérable. Aussi remplace-t-on, dans les balances un peu précises, les tourillons par des couteaux d'acier dont le tranchant repose sur des plans d'acier ou d'agate (fig. 2) On atténue ainsi, autant que possible, l'influence du frottement.



Fig. 2.

II. Indépendamment de ces conditions qui se rapportent à la justesse de la balance, il en est d'autres qui concernent sa sensibilité. Nous avons dit que, dans la position horizontale du fléau, son centre de gravité doit se trouver dans la verticale du point de suspension, ou, plus exactement, dans le plan vertical mené par l'arête des couteaux par lesquels le fléau repose sur ses supports. Mais il pourrait se trouver soit au-dessus de cette arête, soit sur l'arête même, soit au-dessous. Dans le premier cas (fig. 3), l'équilibre serait ce qu'on appelle in-

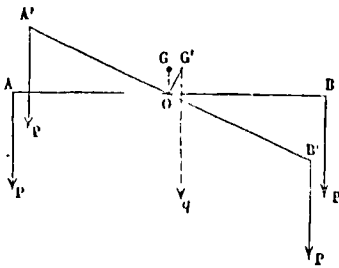


Fig. 3.

stable; c'est-à-dire que, pour peu qu'on dérangerait le fléau de sa position horizontale, il s'en écarterait de plus en plus. En effet, le poids du fléau pouvant être considéré comme appliqué à son centre de gravité G, on voit que si ce point est écarté de la verticale jusqu'en G' par un petit mouvement du fléau, il descendra, et l'action de la pesanteur tendant à l'abaisser de plus en plus, le fléau tendra à faire un quart de tour autour de l'axe de suspension O. On aurait dans ce cas ce qu'on appelle une *balance folle*. Dans le second cas, le poids du fléau pouvant être regardé comme appliqué sur l'axe de suspension, la balance resterait en équilibre dans toutes les positions du fléau, sous l'action de deux poids égaux placés dans les coupes. On aurait alors une *balance indifférente*, dont le vice consiste en ce qu'une très-faible inégalité entre les poids suffirait pour faire basculer le fléau d'un quart de tour. Dans le troisième cas, au contraire (fig. 4), c'est à

dire si le centre de gravité du fléau est situé au-dessous de l'axe de suspension, l'équilibre sera *stable*, c'est-à-dire que si le fléau est écarté de sa position horizontale, il tendra à y revenir. En effet, le

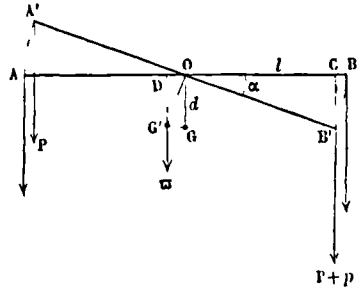


Fig. 4.

poids du fléau étant toujours considéré comme appliqué à son centre de gravité G, si ce point est écarté de la verticale jusqu'en G' par un petit mouvement du fléau, il s'élèvera; mais la pesanteur tendant toujours à le faire descendre, le fléau tendra à revenir à sa position primitive; et il y reviendra en effet par une suite d'oscillations (Voy. PENDULE). C'est donc cette troisième position qu'il convient d'adopter.

Mais il ne faut pas que le centre de gravité du fléau soit situé à une trop grande distance au-dessous de l'axe de suspension; car on aurait alors ce qu'on appelle une *balance paresseuse*, ou peu sensible. Il est facile de s'en rendre compte. Supposons les points de suspension A et B des plateaux placés sur une horizontale passant par le point de suspension O, ou, plus exactement, par le milieu de l'axe de suspension; nous verrons tout à l'heure l'utilité de cette disposition. Supposons qu'en A soit appliqué un poids P, et en B un poids P + p; soit q le poids du fléau, qui pourra être regardé comme appliqué en G. L'excès de poids p appliqué en B fera d'abord baisser le bras OB du fléau; mais si cet excès n'est pas trop considérable, le fléau ne tardera pas à atteindre une certaine position A'B', où il finira par demeurer en équilibre après quelques oscillations; et cette position peut être déterminée. Soit G' la nouvelle position du point G; menons l'horizontale G'I et les verticales A'C et B'D. En prenant le moment des forces par rapport au point O, et en ayant égard au sens de la rotation que chaque force tend à produire, on verra qu'on doit avoir

$$(P + p) \cdot OD = P \cdot OC + q \cdot G'I. \quad [5]$$

Mais A'O B' étant une ligne droite, ainsi que AOB, et les bras OA' et OB' du fléau étant égaux, il en résulte que OC est égal à OD; les termes P.O D et P.O C disparaissent donc de l'équation [5], et il reste

$$p \cdot OD = q \cdot G'I.$$

Or, si l'on nomme δ la distance GO ou G'O, b la longueur OB ou OA du bras du fléau, et α l'angle BOB', ou son égal GOG', on aura

$$OD = b \cos \alpha \quad \text{et} \quad G'I = \delta \sin \alpha.$$

La condition d'équilibre devient donc

$$p b \cos \alpha = q \delta \sin \alpha,$$

$$\text{d'où l'on tire} \quad \tan \alpha = \frac{p}{q} \cdot \frac{b}{\delta}.$$

[6]

On voit donc que si la distance GO ou δ était

trop grande, la valeur de $\tan \alpha$ et par suite celle de α , qui conviennent à l'équilibre, pour un même excès de poids p , pourraient être très-petites; c'est-à-dire que le fléau s'arrêterait à une position d'équilibre très-voisine de sa position primitive, et qui pourrait être facilement confondue avec elle; la balance ne serait donc pas assez sensible.

La grandeur de l'angle α pouvant être regardée comme la mesure de la sensibilité de la balance, on voit que cette sensibilité sera d'autant plus grande que le poids q du fléau sera plus petit, le bras b du fléau plus long, et la distance δ du centre de gravité du fléau à l'axe de suspension moins considérable. Dans les balances de précision on peut faire varier la distance du centre de gravité du fléau à l'axe de suspension. On obtient cet effet au moyen d'un écrou qui se meut le long d'une vis dont l'axe est perpendiculaire à la direction du fléau (fig. 2). L'angle décrit par le fléau est indiqué par une aiguille qui lui est également perpendiculaire, et dont l'extrémité parcourt un arc de cercle divisé. Pour le détail de toutes les autres dispositions qui sont adoptées dans les balances précises, nous renverrons aux Traités de Physique.

On peut voir maintenant que la disposition qui consiste à placer les points d'attache A et B des plateaux sur une horizontale passant par l'axe de suspension, a pour effet de rendre la sensibilité de la balance indépendante de la charge. C'est effectivement en vertu de cette disposition que les termes P.OD et P.OC disparaissent de l'équation des moments. Il n'en serait plus de même si le point O était au-dessus ou au-dessous de l'horizontale AB: les longueurs OD et OC ne seraient plus égales; le poids P resterait dans l'équation des moments; par conséquent l'angle α , et par suite la sensibilité de la balance, dépendraient de la charge commune des plateaux.

Pour éviter aussi complètement que possible l'influence du frottement, on suspend les plateaux à l'aide de crochets reposant sur des couteaux adaptés à l'extrémité du fléau, comme on peut le voir sur la figure 1.

III. La *balance romaine* (fig. 5) est encore un levier du premier genre. Les matières à peser se placent dans un plateau suspendu à l'extrémité B de l'un des bras du fléau, et l'équilibre est établi au moyen d'un curseur A qui glisse le long de l'autre bras. Si la suspension est établie de manière qu'on puisse négliger le frottement, c'est-à-dire à l'aide de couteaux, comme le montre la figure, et si le centre de gravité du fléau est dans la verticale du point de suspension O, on devra avoir pour l'équilibre, en appelant P le poids des matières à peser, et p celui du curseur,

$$P \cdot OB = p \cdot OA, \text{ d'où } P = p \cdot \frac{OA}{OB}.$$

Les quantités P et OA étant constantes, on voit que le poids Q est proportionnel à la distance OM entre le curseur et le point de suspension. Pour la commodité de l'instrument, on trace d'avance sur le bras OB du fléau des divisions équidistantes, portant chacune l'expression numérique du poids sus-

quel le curseur fait équilibre quand il est amené à cette division.

On reconnaîtrait comme ci-dessus que, pour que la balance romaine soit sensible, il faut que le centre de gravité du fléau soit situé à une petite distance au-dessous de l'axe de suspension.

La balance romaine a quelquefois deux anneaux de suspension et par conséquent deux systèmes de couteaux correspondants; on se sert de l'un ou de l'autre anneau selon la nature des matières à peser; pour des matières légères on se sert de l'anneau le plus éloigné du point B où est suspendu le plateau; pour des matières pesantes on emploie au contraire l'anneau le plus voisin du point B. Le bras OA porte alors deux systèmes de divisions correspondantes à ces deux manières d'employer l'instrument.

(Voy. PESON, PÈSE-LETRES, BALANCE DE ROBERVAL, BALANCE DE QUINTENZ.)

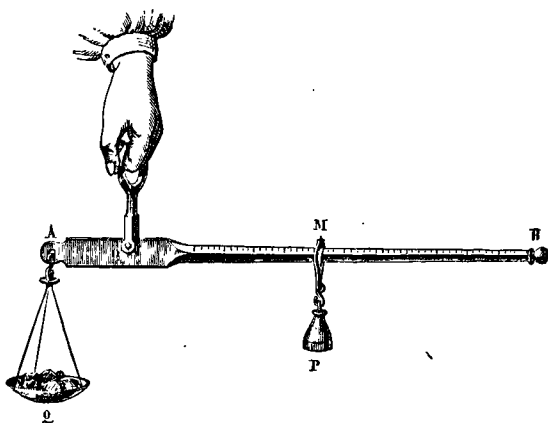


Fig. 5.

BALANCE, le 7^e signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

BALANCE, différence entre le *débit* et le *crédit* d'un compte, ou entre le *doit* et l'*avoir* (Voy. TENUE DES LIVRES).

BALANCE A MOMENTS, appareil imaginé par M. Didion pour mesurer directement le moment du poids d'un PENDULE BALISTIQUE (Voy. ce mot) par rapport à l'axe de suspension. Cet appareil a été adopté en 1857 pour les épreuves des poudres dans les poudreries. Il se compose d'un levier coudé BCD (fig. 1), dont les bras CB et CD sont égaux, et font entre eux un angle un peu plus grand qu'un angle droit. A l'extrémité B de l'un des bras est articulée, au moyen de couteaux, une tige inclinée T qui peut être articulée au pendule balistique; à l'extrémité D de l'autre bras est articulée, également au moyen de couteaux, une seconde tige supportant un plateau de balance que l'on peut charger de poids. Le levier coudé s'appuie en C, toujours au moyen de couteaux, sur un support M, que l'on peut fixer aux bâtis qui soutient le pendule, et que l'on peut déplacer un peu, soit parallèlement au bras CB, soit perpendiculairement à cette direction en faisant mouvoir les vis V ou V'.

Soit maintenant OA (fig. 2) la verticale du point de suspension du pendule balistique qui contient le centre de gravité G. Concevons qu'on ait amené la droite OGA dans la position OG'A', faisant avec la

verticale un petit angle α ; une tige A'B, articulée en A' avec le pendule et en B avec l'un des bras de la balance à moments, est placée perpendiculairement à OA', et fait par conséquent un angle α avec l'ho-

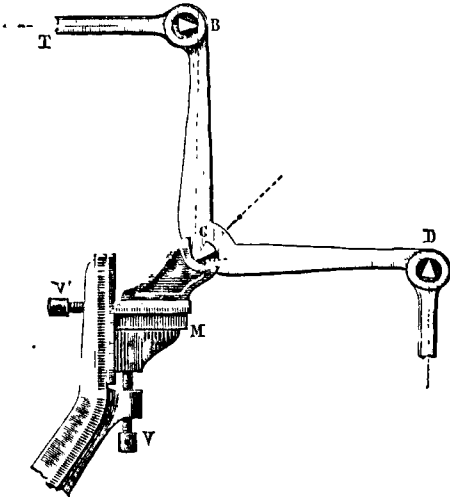


Fig. 1.

rizon; le levier coudé est construit de telle sorte que le bras CB étant placé parallèlement à OA', l'autre bras CD est horizontal, c'est-à-dire que l'angle BCD est égal $90^\circ + \alpha$; dans le plateau suspendu en D on

place le poids nécessaire pour que le système demeure en équilibre dans la position que nous venons d'indiquer; ce poids donnera la mesure du poids P du pendule, appliqué en G', par rapport au point de suspension O.

La théorie de cet appareil est facile à établir. Considérons d'abord l'équilibre du pendule, et prenons les moments, par rapport à l'axe projeté en O, des forces qui le sollicitent. La suspension se faisant à l'aide de couteaux, on peut regarder comme nul le moment de la réaction

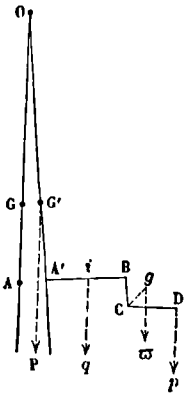


Fig. 2.

des appuis; il ne reste alors que le moment du poids P, et le moment de la réaction R exercée en A' par la tige, dans le sens A'B; si nous faisons OA = L et OG = l, nous aurons donc

$$Pl \sin \alpha = RL. \quad [1]$$

Considérons en second lieu l'équilibre de la tige A'B; soit R' la réaction exercée sur la tige, en B, par le levier coudé, et soit q le poids de la tige, appliqué en son centre de gravité i; si nous projetons les forces R, R' et q sur la direction A'B, nous obtiendrons

$$R + q \sin \alpha = R', \quad [2]$$

puisque la tige reçoit du pendule une réaction R égale et contraire à celle qu'elle exerce elle-même

sur ce pendule. Considérons enfin l'équilibre du levier coudé; et prenons les moments par rapport à l'axe projeté en C. Le levier reposant sur ses appuis au moyen de couteaux, le moment de la réaction de ces appuis peut être regardé comme nul; d'ailleurs les articulations en B et en D se faisant aussi au moyen de couteaux, il n'y a aucun frottement à considérer; il restera donc à égaliser le moment de la réaction R' qui s'exerce en B, de la part de la tige A'B, à la somme des moments du poids p du plateau suspendu en D et de sa charge, et du poids π des leviers, appliqué en son centre de gravité g. Soit λ la longueur du bras de levier CB, λ' celle du bras CD, très-peu différente de λ , et δ la distance gC; le point g étant sensiblement sur la bissectrice de l'angle BCD, on aura

$$R\lambda = p\lambda' + \pi\delta \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha). \quad [3]$$

Éliminant R et R' entre les relations [1], [2], [3], et tirant la valeur du moment cherché Pl, on trouve :

$$Pl = \frac{L}{\sin \alpha} \left[p \frac{\lambda'}{\lambda} + \pi \frac{\delta}{\lambda} \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \right] - qL. \quad [4]$$

Dans la balance à moments établie d'après les dessins de M. Didion, on a $\alpha = 5^\circ 44' 21''$, d'où $\sin \alpha = 0,1$ et $\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 0,6708$. On a d'ailleurs $\lambda = \lambda' = 0^m,2$; on trouve ainsi

$$Pl = 10L(p + 3,354\pi\delta) - qL. \quad [5]$$

Cet appareil donne le moment Pl à moins d'un dix-millième de sa valeur. Mais il est très-important que les bras de levier soient égaux ou que leur longueur soit exactement connue, car une erreur d'un dixième de millimètre sur l'estimation de l'une de ces longueurs donnerait une erreur d'environ un demi-millième sur l'évaluation du moment cherché. Pour s'assurer de l'égalité des bras de levier, on peut faire deux expériences en retournant le levier coudé de manière à faire prendre la position horizontale alternativement à chacun des deux bras; si les bras étaient inégaux, il faudrait deux poids différents p et p' pour établir l'équilibre dans les deux expériences. Dans ce cas M. Didion remplace p par $\sqrt{pp'}$, mais cette règle, qui est rigoureuse pour la balance ordinaire (Voy. BALANCE), n'est ici qu'approximative.

(Voy. le *Traité d'Artillerie* de M. Didion; le *Règlement* du 10 mars 1857 sur les épreuves des poudres; et l'*Instruction* du 17 août 1827 sur la mesure des moments.)

BALANCE DE QUINTENZ, ou **BALANCE A BASCULE**, balance employée dans les magasins, dans les gares de chemins de fer, et dans certaines maisons de commerce, pour peser les lourds fardeaux. Le fléau ABC (fig. 1) est mobile autour d'un axe horizontal projeté en O; à l'extrémité C est suspendu le plateau dans lequel on place le poids p destiné à faire équilibre au fardeau P. Celui-ci se place sur un tablier horizontal DE, auquel est adaptée, en avant, une paroi verticale EF, destinée à garantir la balance du choc des colis; à ce système est liée, par des pièces obliques GG, une traverse horizontale T, dont la figure ne montre que le bout, et qui est suspendue par une tringle verticale au point B du petit bras du fléau. Le tablier repose en outre en I sur un levier KL mobile autour du point I, et sus-

pendu par une tringle LA en un autre point A du même bras du fléau. Toute la partie inférieure de l'appareil est cachée par une caisse en bois qui l'enveloppe, et qui est supposée enlevée sur la fi-

principe du travail virtuel (*Voy. TRAVAIL VIRTUEL, ÉQUILIBRE*). Le travail virtuel de P sera + Ph, puisque le tablier s'est abaissé de h. Mais le point C se sera élevé de 10 h, puisque OC = 10.OB; le travail virtuel de p sera donc - 10 ph. Le travail virtuel des réactions exercées par les points d'appui I, K, O est d'ailleurs égal à zéro, si l'on néglige le frottement, attendu que ces réactions sont alors normales aux surfaces en contact; or, le contact se faisant par l'arête d'un couteau, le frottement est partout négligeable. D'ailleurs les autres forces qui agissent sur le système sont des forces mutuelles, deux à deux égales et de signe contraire, dont les travaux virtuels disparaissent d'eux mêmes quand on en fait la somme. Il reste donc

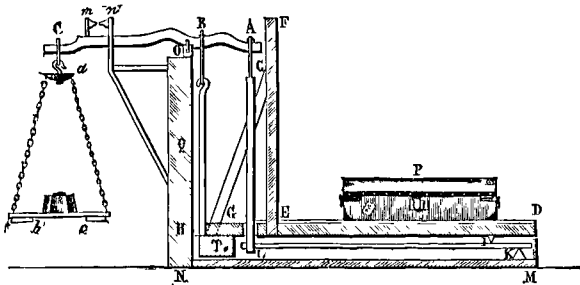


Fig. 1.

gure. Le plancher inférieur MN sert de support au couteau K autour duquel tourne le levier KL; et la paroi verticale NQ sert de support à l'axe de suspension du fléau. Dans l'état ordinaire, c'est-à-dire quand le tablier DE ne porte aucun fardeau, et que le plateau bc n'est chargé d'aucun poids, une pointe m fixée au bras OC du fléau doit se trouver exactement en regard d'une autre pointe n fixée au bâtis de l'appareil. Comme cela n'a pas ordinairement lieu, on obtient cet effet en plaçant dans une petite coupe a, suspendue en C, un poids convenable que l'on appelle la tare. Lorsqu'on veut peser un fardeau, on le place sur le tablier DE, et l'on charge de poids le plateau bc, de telle sorte que les pointes m et n se trouvent en regard. Le poids p placé alors dans le plateau est le dixième du poids P placé sur le tablier DE. Voici, en effet, la théorie de cet appareil.

Réduit à sa plus simple expression, il présente la disposition indiquée par la figure 2. Les dimen-

$$Ph - 10 ph = 0, \text{ d'où } p = \frac{P}{10},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

En réalité, les quatre points A, B, C, O (fig. 1) ne sont pas dans un même plan horizontal; mais si on les projette sur le plan horizontal passant par O, et que les points A, B, C de la figure 2 représentent ces projections, les raisonnements subsisteront.

BALANCE DE ROBERVAL, balance à deux fléaux, qui est connue depuis longtemps, mais dont l'usage ne s'est répandu dans le commerce que depuis quelques années. Voici en quoi consiste le principe de cette balance. Soit ABB'A' (fig. 1) un parallé-

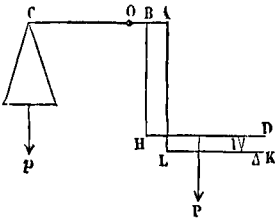


Fig. 2.

sions des différentes parties sont telles que l'on a la proportion

$$OB : OA = KI : KL = 1 : n. \quad [1]$$

Le rapport de OB à OC est ordinairement $\frac{1}{10}$.

Remarquons d'abord que si l'appareil vient à se mouvoir, le tablier DH demeure horizontal. Supposons, en effet, que les points B et H s'abaissent, par exemple, d'une petite quantité h; en vertu de la proportion [1] le point A s'abaissera de nh. Il en sera de même du point L; par conséquent, en vertu de la même proportion, le point I s'abaissera de h comme le point H; par conséquent IH, qui était horizontal par hypothèse, demeurera horizontal. Maintenant, appliquons à l'appareil le

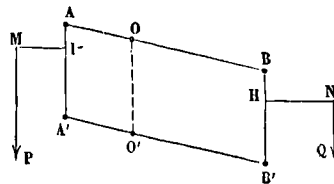


Fig. 1.

gramme articulé à ses quatre sommets. Supposons son plan vertical, les côtés AA' et BB' verticaux, et les côtés AB et A'B' mobiles autour de deux points O et O' situés sur une même verticale et par conséquent sur une parallèle aux côtés AA' ou BB'. Soit M un point quelconque lié au côté AA', et N un second point quelconque lié au côté BB'. Si le parallélogramme vient à se mouvoir, le côté AA' ne cessera pas d'être égal et parallèle à OO', c'est-à-dire vertical; tous ses points s'élèveront donc ou s'abaisseront de la même quantité; le point M s'élèvera ou s'abaissera de la même quantité que l'extrémité I de l'horizontale MI; par conséquent les chemins décrits dans le sens vertical par les points A et M seront les mêmes. On verrait semblablement que les points B et N s'élèvent ou s'abaissent aussi de quantités égales. Cela posé, supposons que l'on ait appliqué en M et en N deux forces verticales P et Q qui se fassent équilibre; la somme des travaux virtuels (*Voy. TRAVAIL VIRTUEL, ÉQUILIBRE*) de ces deux forces devra être nulle, car les travaux des réactions que les axes exercent en O et en O' sont nuls d'eux-mêmes, et la somme totale des travaux

des forces appliquées au parallélogramme doit être nulle pour l'équilibre. Si donc a et b désignent les chemins élémentaires décrits dans le sens vertical par les points M et N , ou, ce qui revient au même, par les points A et B , on devra avoir

$$Pa = Qb, \text{ d'où } \frac{P}{Q} = \frac{b}{a}. \quad [1]$$

Or, dans un déplacement infiniment petit, les points A et B décrivent de petits arcs semblables, c'est-à-dire proportionnels à leurs rayons OA et OB ; d'ailleurs ces petits arcs, perpendiculaires à AB , font des angles égaux avec la verticale; leurs projections sur la verticale sont donc proportionnelles aux arcs eux-mêmes, et par conséquent proportionnelles aux rayons; on a donc

$$\frac{b}{a} = \frac{OB}{OA}, \quad \frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}, \quad [2]$$

et, par suite,

c'est-à-dire que les forces P et Q sont dans le même rapport que si elles étaient directement appliquées aux extrémités A et B du levier AB , supposé mobile autour du point O , mais indépendamment des trois autres côtés du parallélogramme. Et cette conclusion reste la même, quels que soient les points M et N , pourvu qu'ils soient invariablement liés, l'un au côté AA' , l'autre au côté BB' . Du temps de Roberval, cette conclusion paraissait paradoxale, parce qu'on n'avait en vue que la théorie du levier; mais l'application du principe du travail virtuel fait disparaître le paradoxe.

Lorsque l'on applique ce principe à la construction d'une balance, on simplifie ordinairement les rapports en prenant les points O et O' au milieu

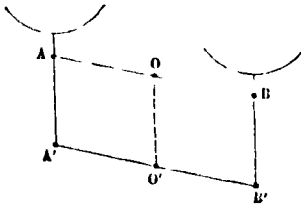


Fig. 2.

des côtés AB et $A'B'$; il faut alors pour l'équilibre que les forces P et Q soient égales. On dispose sur le prolongement des côtés AA' et BB' les plateaux destinés à recevoir les matières à peser et les poids qui doivent leur faire équilibre. Ce genre de balance offre le grand avantage que, les plateaux étant soutenus par dessous, on n'est pas gêné dans le maniement de la balance par les chaînes de suspension de ces plateaux comme dans les balances ordinaires. Cependant leur emploi ne s'est répandu que récemment, parce que le frottement des articulations tendait à les rendre peu sensibles; il a fallu pour les faire accepter que l'on trouvât le moyen de leur

donner une grande mobilité. On y est parvenu de la manière suivante. Le fléau supérieur est suspendu à l'aide de couteaux comme le fléau des balances ordinaires (*Voy. BALANCE*); et c'est également à l'aide de couteaux que les côtés AA' et BB' sont suspendus aux extrémités A et B de ce fléau. Mais pour le fléau inférieur la disposition est différente. La figure 3 représente l'extrémité de ce fléau, vue par-dessus. Les parties n, n sont deux couteaux, inclinés en sens contraire, et dont les arêtes ab et cd sont placées en ligne droite dans le plan inférieur du fléau. Cette extrémité entre

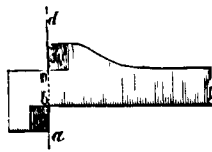


Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

dans un étrier formant le bout inférieur du côté AA' , et que la figure 4 représente en perspective, et la figure 5 en plan. Sa traverse inférieure est un couteau qui tourne son arête bc vers le haut; les deux montants m et m' sont disposés de telle sorte que cette arête se trouve dans le plan de la face antérieure de l'un m , et dans le plan de la face postérieure de l'autre m' . Lorsque le bout du fléau est assemblé avec l'étrier, l'arête ab du couteau n porte sur la face antérieure du montant m , l'arête cd du couteau n' porte sur la face postérieure du montant m' , et la face inférieure du fléau porte sur l'arête bc du couteau formant la traverse de l'étrier. Les arêtes des trois couteaux se trouvent ainsi dans le prolongement l'une de l'autre, et chacune d'elles porte sur une surface plane correspondante. Il en résulte que, dans toutes les positions du parallélogramme, le contact a lieu suivant cette même arête, qui forme ainsi l'axe de l'articulation, sans donner lieu à aucun frottement appréciable. Le bout opposé du fléau est articulé de la même manière avec l'étrier qui forme le bout inférieur du

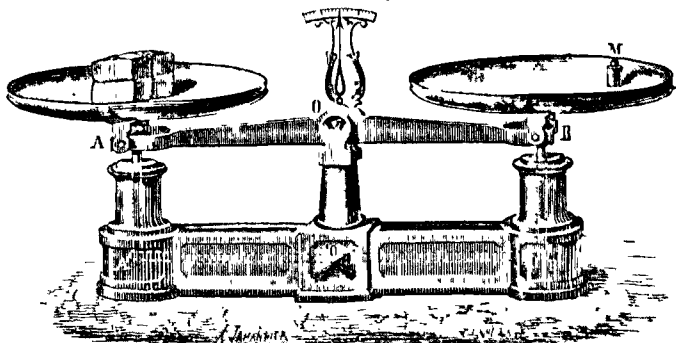


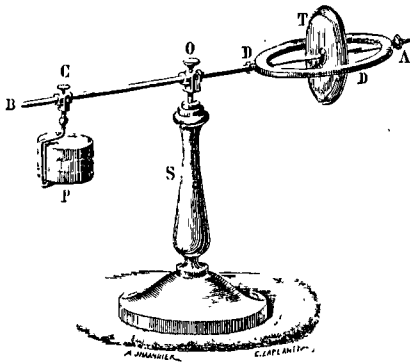
Fig. 6.

côté BB' . En O' l'articulation est encore de même nature, avec cette différence que l'étrier est fixe.

Ce système d'articulations donne au parallélogramme toute la mobilité désirable. Le fléau inférieur et la plus grande partie des côtés latéraux sont ordinairement cachés par le corps de la balance, comme le montre la figure 6. Les conditions de stabilité et de sensibilité sont d'ailleurs les mêmes que dans la balance ordinaire; il faut toujours que le centre de gravité de chaque fléau, et particulièrement du fléau supérieur, soit à une petite distance au-dessous de l'axe de suspension de ce fléau. (Voy. le Cours élémentaire de Mécanique de M. Delaunay.)

BALANCE DE SANCTORIUS. Voy. PONT A BASCULE.

BALANCE GYROSCOPIQUE, appareil imaginé par MM. Fessel et Plücker pour démontrer expérimentalement certaines propriétés relatives à la rotation des corps. Cette balance se compose d'un fléau AB, qui glisse dans un petit manchon *m*, où il peut



être fixé à l'aide d'une vis de pression. Ce manchon peut tourner autour d'un axe horizontal, disposé au sommet d'un support massif S. Il en résulte que le fléau AB peut se mouvoir dans un plan vertical. La tranche OA du fléau se termine par une chappe DD dans laquelle un tore métallique pesant T peut tourner librement autour d'un axe qui forme le prolongement du fléau. L'autre branche OB porte un curseur C, qui peut y être fixé en un point quelconque à l'aide d'une vis de pression, et qui supporte un étrier dans lequel on peut disposer des poids.

Si l'on met le fléau en équilibre en réglant convenablement le poids P et la position du curseur, et que l'on imprime au tore une vitesse de rotation rapide autour de son axe, le système demeure immobile. Mais si l'on augmente la charge P, ou si l'on éloigne le curseur du point de suspension, de manière que le centre de gravité de l'appareil, au lieu d'être sur la verticale du point de suspension O, se trouve entre O et B, le fléau s'incline de ce côté et se met à tourner lentement autour de la verticale, dans le sens opposé à la rotation du tore. Si au contraire on diminue le poids P, ou qu'on rapproche le curseur du point O, en sorte que le centre de gravité de l'appareil soit entre O et A, le fléau s'inclinant en sens inverse, se met à tourner en sens inverse aussi, c'est-à-dire dans le sens de la rotation du tore.

La théorie de cet appareil est la même que celle de la **TOUPIE GYROSCOPIQUE** (Voy. ce mot).

BALANCEMENT, opération que l'on exécute dans la **CONSTRUCTION NAVALE** (Voy. ce mot) pour s'assurer

que l'étrave, les couples et l'arcasse sont placés symétriquement par rapport au longitudinal. Pour balancer l'étrave, on cloue sur les faces latérales de la quille des règles qui en forment le prolongement; comme les faces latérales de l'étrave doivent être dans le même plan que celles de la quille, l'étrave sera en position si un fil à plomb, appliqué contre l'une quelconque de ses faces latérales, s'applique en même temps contre la règle qui correspond à cette face. Pour balancer un couple de levée, on cloue contre l'une de ses faces, la face d'avant par exemple, une planche dont le can supérieur répond à deux points symétriquement placés sur les deux branches; et l'on prend le milieu de cette planche, qui porte le nom de *planche d'ouverture*. Le couple est balancé si, en laissant tomber un fil à plomb du milieu de cette planche, l'extrémité du plomb correspond au milieu de la contre-quille. Les couples dévoyés peuvent être balancés de la même manière. Pour balancer les barres d'arcasse, on prend sur chacune d'elles deux points symétriques par rapport à son milieu, et on les joint par une règle; la barre sera balancée si un fil à plomb tombant du milieu de cette règle coïncide avec la ligne médiane du contre-étambot. Lorsque l'arcasse est dressée, on fait une nouvelle vérification qui consiste à joindre deux points symétriques de chaque barre avec un point pris au milieu de la contre-quille; les deux lignes de jonction doivent être égales si l'arcasse est bien balancée.

BALANCEMENT, méthode qu'on emploie dans le tracé des escaliers en partie droits et en partie courbes, pour répartir d'une manière moins brusque la diminution de la largeur des marches du côté de la rampe. Soit AB...HI (fig. 1) la *ligne de foulée* (Voy. ESCALIERS), parallèle à la courbe de la rampe. On la

divise en parties AB, BC, CD, etc., égales entre elles et à la largeur adoptée pour le giron. Les arêtes saillantes des marches devraient être dirigées suivant les normales Aa, Bb, Cc, Dd, à la courbe de la rampe; mais il en résulterait près de la rampe un changement brusque de pente au passage de la partie droite de l'escalier à la partie courbe, parce que la diminution de largeur des marches de ce côté se ferait d'une manière subite; et ce

changement serait incommode, et pourrait même devenir dangereux. Pour y remédier, on diminue graduellement la largeur des marches du côté de la rampe, en répartissant la diminution sur un nombre plus ou moins grand de marches; c'est dans cette répartition que consiste le *balancement*. Il peut s'effectuer par diverses méthodes.

On peut d'abord résoudre le problème par le

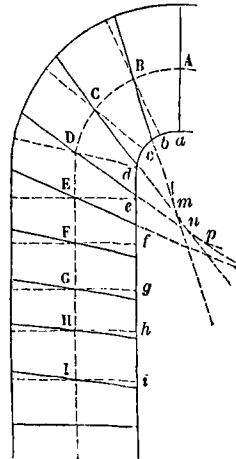


Fig. 1.

calcul. On fixe le minimum λ de largeur que l'on veut donner à la dernière marche de la partie courbe; on laisse inconnu le rang de la marche droite à partir de laquelle la répartition doit commencer; et l'on suppose qu'on opère la diminution d'une manière régulière, c'est-à-dire qu'on fasse décroître la largeur en progression arithmétique. Soit n le nombre des marches de la partie courbe dont la largeur primitive, près de la rampe, est l ; soit x le nombre des marches de la partie droite qui devront entrer dans le balancement, et dont la largeur primitive est L . La longueur de la projection horizontale de la rampe sur laquelle on aura à opérer sera exprimée par

$$Lx + nl.$$

Les largeurs des marches devront former une progression arithmétique, on aura, en appelant δ la raison de la progression,

$$L = \lambda + (x + n - 1) \delta \quad [1]$$

et
$$Lx + nl = \frac{(L + \lambda)(x + n)}{2} \quad [2]$$

Ces relations feront connaître x et δ . Supposons, par exemple, $L = 30^{\text{cent}}$, $l = 17^{\text{cent}}$, $n = 5$; et posons $\lambda = 20^{\text{cent}}$; les deux relations [1] et [2] deviendront

$$30 = 20 + (x + 4) \cdot \delta,$$

et
$$30x + 85 = \frac{47(x + 5)}{2}.$$

La dernière donne $x = 8$, et, en substituant dans la première, on en déduit $\delta = 0^{\text{cent}},8333\dots$. On obtient ainsi pour la largeur des marches successives les valeurs suivantes :

cent.	cent.
1°..... 20,000	8°..... 25,833
2°..... 20,833	9°..... 26,666
3°..... 21,666	10°..... 27,500
4°..... 22,500	11°..... 28,333
5°..... 23,333	12°..... 29,166
6°..... 24,166	13°..... 30,000
7°..... 25,000	

Le nombre total des marches qui entrent dans le balancement est bien de $5 + 8$, ou 13; la première a bien la largeur fixée, 20^{cent} , pour le minimum, et la dernière a bien la largeur 30^{cent} des autres marches de la partie droite.

Le même problème peut être résolu par une construction graphique, qui n'est que la traduction géométrique du calcul qu'on vient de faire. Sur une droite verticale AR (fig. 2) on porte une série de distances 0,1 — 1,2 — 2,3 — etc., égales à la hauteur commune des marches. On mène l'horizontale AN (égale au développement de la projection de la rampe. Par les points de division 1, 2, 3, etc., on mène des horizontales, sur lesquelles on porte des longueurs égales à la distance du point a de la figure 1 aux points successifs b, c, d , etc., primitivement marqués sur la courbe de la rampe. Tous les points répondant à la partie courbe de la rampe se trouveront sur une droite OL; et tous ceux qui répondent à la partie droite seront sur une autre ligne droite LN. Ces droites OL et LN exprimeront les

pendes de la rampe dans ces deux portions de l'escalier. Afin de rendre le changement de pente moins brusque, on opère le balancement de la manière suivante. Sur l'horizontale du point I on porte

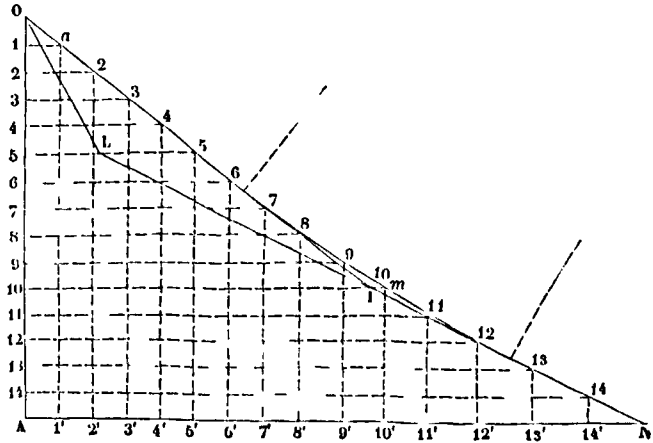


Fig. 2.

une longueur 1.a égale à la largeur minimum fixée pour les marches de la partie courbe. On tire la droite Oa , que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en I avec LN. Si le point I ne se trouvait pas sur une des horizontales tracées, on lui substituerait l'extrémité de l'horizontale la plus voisine, ce qui ne modifierait que très-peu la largeur 1.a de la marche minimum. Les horizontales prolongées jusqu'à la rencontre de la droite OI donneront pour les marches successives la distance du point a de la figure 1 aux extrémités des arêtes saillantes des marches. Il sera commode de porter d'abord ces horizontales sur AN (fig. 2) à partir du point A, afin de n'avoir à porter sur la figure 1 que les distances successives entre les points de AN ainsi déterminés.

Enfin, on peut rendre le changement de pente tout à fait insensible en substituant à la ligne brisée OIN une ligne composée d'une partie de OI, d'une partie de NI, et d'une courbe tangente qui raccorde ces deux lignes. Cette courbe, qui est ordinairement un arc de cercle, peut être tracée d'une infinité de manières; il suffit de prendre sur les deux droites IO et IN, à partir du point I, deux longueurs égales, et d'élever par les extrémités de ces longueurs des perpendiculaires à IO et à IN, dont la rencontre donnera le centre du cercle. Quel que soit l'arc de cercle employé, on prolongera les horizontales des points 2, 3, 4, etc., jusqu'à la ligne mixte $O m N$; les longueurs de ces horizontales exprimeront les distances, comptées sur la projection de la rampe, entre le point a (fig. 1) et les points successifs qui devront remplacer les points b, c, d , etc. On portera ces longueurs à partir du point a ; et on joindra leurs extrémités avec les points A, B, C, D, etc. Ces lignes de jonction, qui sont marquées pleines sur la figure, seront les projections des arêtes saillantes des marches. Elles ne seront plus normales à la courbe de la rampe; et par conséquent elles ne seront pas tangentes à sa développée (Voy. Vis A Jour); mais en les prolongeant on obtiendra une série de droites que l'on pourra regarder

comme les tangentes d'une certaine courbe *mnp*, qui tiendra lieu de la développée de la projection de la rampe, et qui jouera le même rôle pour la construction des marches et la détermination des joints.

Au lieu de porter à partir du point *a* (fig. 1) sur la projection de la rampe les longueurs des horizontales 1. *a*, 2. 2, 3. 3, 4. 4, etc., de la figure 2, il est plus commode de projeter d'abord les extrémités de ces horizontales en 1', 2', 3', 4', etc., sur la projection développée AN, et de porter sur la courbe de la rampe les longueurs successives A.1', 1'.2', 2'.3', 3'.4', et ainsi de suite.

Le balancement s'effectue encore, surtout dans la charpente, par la méthode que nous allons exposer. Soit AI (fig. 1 bis) la courbe de jour, et B*b* la dernière

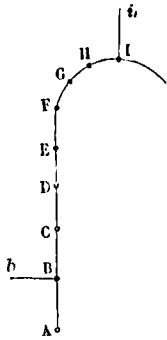


Fig. 1 bis.

arête que l'on veut conserver normale à cette courbe et à la ligne de foulée. Nous supposons que l'arête I*i*, passant par le milieu du demi-cercle qui forme l'échiffre, soit également normale. Soit *n* le nombre des marches comprises entre ces deux arêtes; il s'agit de diviser la ligne BI en *n* parties décroissantes, dont la première soit un peu moindre que AB, largeur des marches qui précèdent l'arête B*b*, et dont la dernière soit au moins égale à celle qu'on obtiendrait en

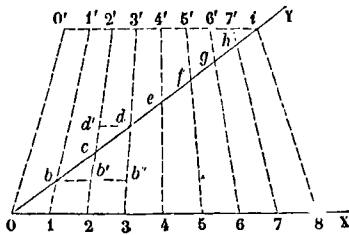


Fig. 2 bis.

n + 1 longueurs égales entre elles, mais arbitraires. Par le point O, on mènera une droite quelconque OY, sur laquelle on prendra les distances Ob et Oi respectivement égales aux longueurs AB et AI de la figure 1 bis, supposées rectifiées. Par le point *i*, on mènera une parallèle à OX, qui rencontrera en un point 1' la droite qui va du point *b* au premier point de division de OX; on divisera *i*1' en *n* parties égales, et l'on joindra les points de division qui portent les mêmes chiffres sur *i*.1' et sur O.8. Les droites ainsi menées couperont Oi en des points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. On portera sur la courbe de jour les longueurs successives *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, *gh*: ce qui donnera (fig. 1 bis) les points C, D, E, F, G, H, par lesquels on devra faire passer les projections des arêtes saillantes des marches.

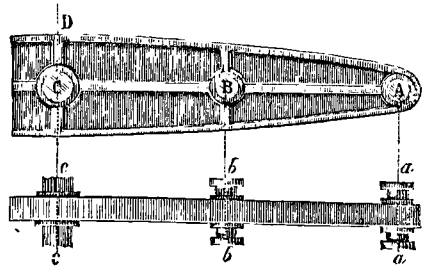
La construction précédente se justifie en remarquant que, si l'on prenait O'.1' égal à 1'.2' et qu'on joignit O'O', toutes les droites O'O', 1.1', 2.2', 3.3',

etc... 8.*i*, prolongées, iraient concourir en un même point; il en résulte que, les distances 1.2, 2.3, 3.4, etc. étant égales, les distances correspondantes *bc*, *cd*, *de*, etc., comptées sur l'oblique OY, doivent aller en diminuant.

En effet, menons *bb'* et *dd'* parallèles à OX; les longueurs *bb'* et *b'b''* seront égales; et *dd'*, menée parallèlement aux bases du trapèze *b'.b''.3'.2'*, sera comprise entre ces bases, et conséquemment moindre que la plus grande *b'b''*; donc on a *dd' < bb'*. Mais les triangles *bc'b'* et *acd'* sont semblables; donc *cd* est moindre que *bc*. On démontrerait de même que chacune des divisions de Oi est moindre que celle qui la précède.

Il faudra s'assurer toutefois que la dernière distance IH n'est pas au-dessous du minimum fixé plus haut; si cette condition n'était pas remplie, il faudrait faire porter le balancement sur un plus grand nombre de marches.

BALANCIER, levier mobile autour d'un axe horizontal passant par son milieu, et destiné à servir d'organe intermédiaire pour transformer un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement circulaire continu. La figure représente l'élevation laté-



rale et le plan d'un balancier en fonte. Il se compose d'un panneau que l'on nomme la *toile*, et auquel on donne la forme d'un SOLIDE D'EGALE RESISTANCE (Voy. ce mot), c'est-à-dire la forme de deux segments paraboliques égaux assemblés par la base. Ce panneau est renforcé sur tout son périmètre par une nervure dont la saillie est comprise entre l'épaisseur de la toile et les $\frac{2}{3}$ de cette épaisseur. Une autre

nervure latérale est dirigée suivant l'axe de la parabole. Au centre, le panneau est percé d'une ouverture cylindrique C, donnant passage à un manchon qui s'assemble avec l'axe *cc* du balancier; deux autres ouvertures analogues A et B correspondant aux axes *aa* ou *bb* auxquels s'articulent soit la bielle, soit les tiges de pompes auxquelles le balancier doit transmettre le mouvement. Ces diverses ouvertures portent le nom de *lumières*.

Voyez pour l'emploi du balancier l'article TRANSFORMATION DE MOUVEMENTS, *rectiligne alternatif en circulaire continu*, à l'aide du système parallélogramme, balancier, bielle et manivelle. Nous ne nous occuperons ici que du calcul des dimensions d'un balancier.

La demi-longueur L du balancier est déterminée par les conditions géométriques de la transmission; elle est comprise entre une fois et demie et deux fois la course du piston. Pour calculer la hauteur CD ou *h*, on considère le balancier comme une pièce encas-

trée dans le plan vertical mené suivant l'axe *cc*, et soumise à son extrémité à une force verticale *F*. Dans le calcul on ne tient pas compte des nervures, dont le rôle principal est de résister à la flexion latérale. On appliquera donc la formule (Voy. FLEXION PLANE)

$$R = \frac{v\mu}{I},$$

on aura ici $v = h$, $I = \frac{1}{3}eh^3$, en appelant e l'épaisseur de la *toile*, et $\mu = FL$; il viendra donc en substituant

$$R = \frac{3FL}{eh^2}.$$

On prend généralement $e = \frac{1}{6}h$ ou $\frac{1}{8}h$; cependant, lorsqu'il n'y a pas de nervure, ce qui arrive dans les balanciers des bateaux à vapeur, on prend quelquefois $e = \frac{1}{3}h$ et même $e = \frac{2}{5}h$. Soit k le rapport de e à h , on aura

$$R = \frac{3FL}{kh^3}, \text{ d'où } h = \sqrt[3]{\frac{3FL}{kR}}. \quad [1]$$

Pour calculer le diamètre des tourillons *cc* de l'axe du balancier, on peut considérer cet axe comme posé sur deux appuis et chargé d'un poids en son milieu; on néglige la torsion toujours très-faible dans le cas qui nous occupe. Soit *P* le poids du balancier, qu'il sera facile de calculer approximativement une fois ses dimensions principales déterminées, et soit *l* la distance des deux appuis; on aura pour la valeur du moment fléchissant

$$\mu = \frac{1}{4}Pl, \quad v = \rho,$$

et

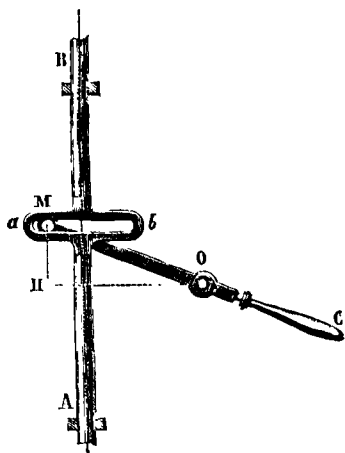
$$I = \frac{1}{4}\pi\rho^4,$$

en appelant ρ le rayon du tourillon; par suite

$$R = \frac{Pl}{\pi\rho}, \text{ d'où } \rho = \sqrt{\frac{Pl}{\pi \cdot R}}. \quad [2]$$

On donne au moyeu de l'axe un rayon égal à $1,2\rho$ et une longueur qui varie de 3 à 4 fois le rayon ρ . On détermine par des moyens semblables les dimensions des autres axes, tels que *aa* et *bb*.

BALANCIER A BOUTON, dispositif employé pour



transformer un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif. Une tige AB,

mobile entre des guides, présente à sa partie moyenne une coulisse *ab* perpendiculaire à sa direction; dans cette coulisse s'engage un bouton *M* formant l'extrémité d'un balancier *CM* mobile autour d'un axe *O* perpendiculaire à la direction de la tige. Si, en agissant sur la poignée *C*, on imprime au balancier un mouvement circulaire alternatif autour de l'axe *O*, le bouton *M* pressant sur les parois de la coulisse *ab* l'oblige à s'élever ou à s'abaisser, et la tige *AB* prend un mouvement rectiligne alternatif. Menons *MH* parallèle à *AB*, et *OH* perpendiculaire à *MH*; posons $OM = \lambda$, $MH = x$, $OH = y$, $MOH = \alpha$; soit v la vitesse du bouton *M* dans le sens de la tige, et u celle du bouton dans le sens de la coulisse. La vitesse v est la dérivée par rapport au temps de la longueur x , et u est la dérivée de y par rapport à la même variable; or le triangle *MOH* donne

$$x = \lambda \sin \alpha \text{ et } y = \lambda \cos \alpha.$$

On a donc

$$\frac{dx}{dt} = v = \lambda \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \lambda \omega \cos \alpha$$

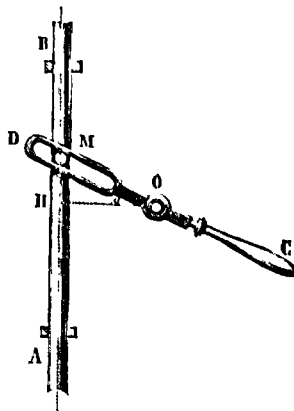
en appelant ω la vitesse angulaire du balancier,

$$\text{et } \frac{dy}{dt} = u = -\lambda \omega \sin \alpha.$$

On en conclut $u = -v \cdot \tan \alpha$.

Le maximum de v a lieu pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand le balancier a la position *OH*; ce maximum est $\lambda\omega$. Le minimum de u a lieu pour la même position, et il a pour valeur *zéro*. A mesure que l'angle α augmente, la vitesse v de la tige diminue, et la vitesse de glissement u du bouton dans la coulisse va en augmentant.

BALANCIER A COULISSE, dispositif employé pour transformer un mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif. Une tige *AB*, mobile



entre des guides, porte une cheville *M* qui s'engage dans une coulisse pratiquée dans la longueur d'un balancier *CD*, mobile autour d'un axe *O* perpendiculaire à la direction de la tige. Si, en agissant sur la poignée *C*, on donne au balancier un mouvement circulaire alternatif autour de son axe *O*, la cheville *M*, poussée par les parois de la coulisse, est forcée de s'élever ou de s'abaisser, et la tige *AB* prend un mouvement rectiligne alternatif. Abaissons du point *O* sur la direction *AB* la perpendiculaire *OH*; faisons, pour abrégér l'écriture, $OH = p$, $MH = x$,

OM = ρ , MOH = α . Soit v la vitesse de la cheville dans le sens AB, et soit u sa vitesse par rapport à la direction de la coulisse. La vitesse v est la dérivée de ρ par rapport au temps, et la vitesse u est la dérivée de ρ par rapport à la même variable. Or, dans le triangle MOH on a

$$\alpha = \rho \operatorname{tang} \alpha \quad \text{et} \quad \rho = \frac{p}{\cos \alpha}.$$

On en tire

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{p}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{p\omega}{\cos^2 \alpha}$$

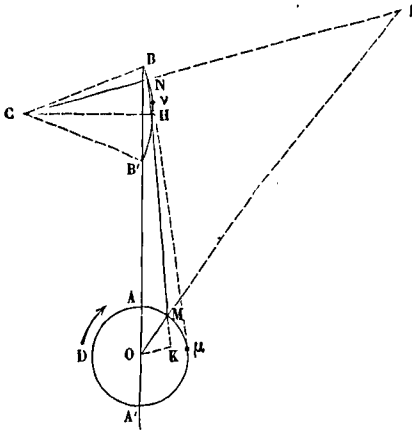
en appelant ω la vitesse angulaire du balancier,

$$\text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} = u = -\frac{p \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{p\omega \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Il en résulte $u = -v \sin \alpha$.

Le minimum de v a lieu pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand le balancier a la position OH; ce minimum est $p\omega$. Le minimum de u a lieu pour la même position du balancier, et sa valeur est *nulle*. A mesure que α augmente, la vitesse v de la tige augmente; il en est de même de la vitesse de glissement u de la cheville dans la coulisse.

BALANCIER, BIELLE ET MANIVELLE, dispositif employé pour transformer un mouvement circulaire alternatif en un mouvement circulaire continu (Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT). Soit CH



la position horizontale du balancier, dont une moitié seulement est représentée sur la figure, et soient CB et CB' les positions symétriques extrêmes qu'il prend au-dessus et au-dessous de cette horizontale dans son mouvement alternatif. Sur la verticale BB' prolongée est établi un axe de rotation O sur lequel est montée une manivelle OM (Voy. MANIVELLE), dont le rayon est la moitié de la distance BB'. Une bielle MN (Voy. BIELLE) s'articule d'une part avec le maneton M de la manivelle, et de l'autre avec l'extrémité N du balancier. Le mouvement circulaire alternatif de celui-ci se trouve ainsi transformé en un mouvement circulaire continu.

Supposons, en effet, que le bouton de manivelle soit en A et le point N en B; et concevons que le point N se mette en marche de B vers B'. Ce mouvement serait impossible si le bouton M n'était pas animé d'une vitesse initiale dans le sens de la flèche; mais en vertu de cette vitesse initiale, il parcourra la circonférence OM dans le sens AM μ A',

tandis que l'extrémité du balancier ira de B en B'. Quand il sera arrivé en B', le bouton de manivelle sera en A'. La vitesse dont il sera animé lui fera dépasser ce point; et l'extrémité du balancier revenant alors de B' vers B, obligera le bouton M à parcourir la seconde demi-circonférence A'DA. Revenu au point A, le maneton possédera une vitesse qui lui fera dépasser ce point; et le balancier revenant de la position CB à la position CB', obligera le maneton à parcourir de nouveau la demi-circonférence AM μ A'; et ainsi de suite.

Pour comparer la vitesse des points M et N on fait usage du THÉORÈME DE M. CHASLES (Voy. ce mot). Prolongeons le rayon OM jusqu'à sa rencontre en I avec le prolongement de la droite CN. Les droites IM et IN seront respectivement normales aux arcs élémentaires décrits simultanément par les points M et N; le point I sera donc le centre instantané de rotation de la bielle (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ); et par conséquent les vitesses des points M et N seront proportionnelles aux longueurs IM et IN. Par le point O menons une parallèle à CN, terminée à sa rencontre en K avec la direction de la bielle, prolongée si cela est nécessaire; les triangles MIN et MOK seront semblables. Si dont on nomme ω la vitesse angulaire de la manivelle, r son rayon OM, v la vitesse de l'extrémité N du balancier, et λ la longueur variable OK, on aura

$$\frac{\omega r}{v} = \frac{IM}{IN} = \frac{OM}{OK} = \frac{r}{\lambda}, \quad \text{d'où} \quad v = \omega \lambda, \quad [1]$$

relation qui donne l'une des quantités v ou ω lorsqu'on connaît l'autre.

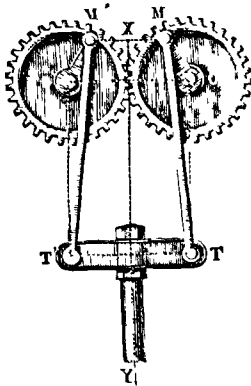
Supposons le mouvement de la manivelle uniforme, ce qui a sensiblement lieu quand il est régularisé par un VOLANT (Voy. ce mot), la vitesse v sera proportionnelle à λ . En discutant alors la relation [1] on voit que lorsque le maneton est en A, la vitesse du point N est nulle; à mesure que le point M s'avance de A vers μ , la vitesse v va en croissant; elle atteint son maximum quand le maneton est arrivé à la position μ pour laquelle la direction de la bielle est tangente à la circonférence OM; quand le point M marche de μ vers A', la vitesse du point N va en diminuant; et elle redevient nulle quand le maneton est arrivé en A'. Dans la seconde demi-révolution la vitesse du point N éprouve des variations analogues, mais en sens contraire.

Les positions A et A' du maneton, pour lesquelles le balancier a une vitesse nulle, sont ce que l'on appelle les *points morts*.

La transmission que nous venons d'étudier est employée dans les machines à vapeur à balancier, pour transformer en un mouvement circulaire continu le mouvement circulaire alternatif du balancier, lequel est lui-même produit par le mouvement rectiligne alternatif du piston. Cette même transmission est employée de temps immémorial dans la *pédale du remouleur*; la pédale joue le rôle du balancier; une bielle transmet son mouvement alternatif à une manivelle, sur l'axe de laquelle est montée la meule. Le même dispositif se rencontre dans le *souet des fileuses*.

BALANCIER DE CARTWRIGHT, système employé pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. A l'extrémité de la pièce P qui doit recevoir un mouvement rectiligne alternatif, est fixée une traverse

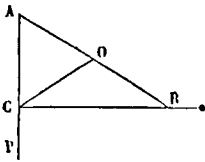
TT', perpendiculaire à la direction XY de ce mouvement rectiligne. Deux bielles égales TM, T'M' sont articulées d'une part aux extrémités de la traverse, de l'autre aux boutons de deux manivelles égales



OM, O'M', dont les axes O et O' sont symétriquement placés par rapport à la droite XY, à une distance l'une de l'autre égale à TT'. Sur les axes de ces manivelles sont montées deux roues dentées égales, qui engrènent ensemble, et qui par conséquent se meuvent en sens contraire avec des vitesses angulaires égales. Il résulte de cette disposition que tout est symétrique par rapport à XY, et que

par conséquent les points T et T' avancent ou reculent ensemble de quantités toujours égales, et qu'ainsi le mouvement rectiligne alternatif de la pièce P se trouve constamment assuré. Il est aisé de voir que la loi de ce mouvement est la même que s'il n'y avait qu'une manivelle OM et qu'une bielle MT, faisant mouvoir le point T dans la direction de la droite OT (Voy. BIELLE ET MANIVELLE). Le nom de *balancier* donné à ce dispositif est impropre; la traverse TT' se nomme un *joug*. Ce système a été employé dans le *Ventilateur de Fabry*, appliqué à l'aérage des mines. Il exige un montage très-précis (Voy. ROUES PNEUMATIQUES).

BALANCIER D'OLIVER EVANS, balancier à axe mobile employé par Oliver Evans, ingénieur des États-Unis, pour guider verticalement la tige du piston des machines à vapeur à haute pression qu'il a construites. Ce balancier est représenté en AB; son axe est projeté en O. Cet axe mobile est



relié à un axe fixe projeté en C, au moyen de deux brides égales projetées suivant OC. L'extrémité B est assujettie, à l'aide de galots, à se mouvoir suivant l'horizontale du point C; et la

tige du piston est articulée au point A. Les distances OA et OB sont égales entre elles et à la longueur de la bride OC. Il en résulte que, si l'on joint AC, le triangle variable ABC reste constamment rectangle en C, puisque ce point est sur la circonférence décrite du point O comme centre avec OC pour rayon. L'extrémité du rayon parcourt donc une verticale qui, en projection, passe par le point C.

Ce système, qui oblige à soulever sans utilité, à chaque demi-oscillation, un poids généralement considérable, est regardé comme vicieux, et n'a pas été imité. Oliver Evans est mort en 1819.

BALANCIER ET CONTRE-BALANCIER, dispositif employé pour assurer le mouvement rectiligne alternatif d'une tige. A l'extrémité d'un balancier,

représenté sur la figure 1 par la droite OA et mobile autour d'un axe horizontal projeté en O, sont articulées, de part et d'autre, deux bielles égales, ayant pour projection commune sur la figure la

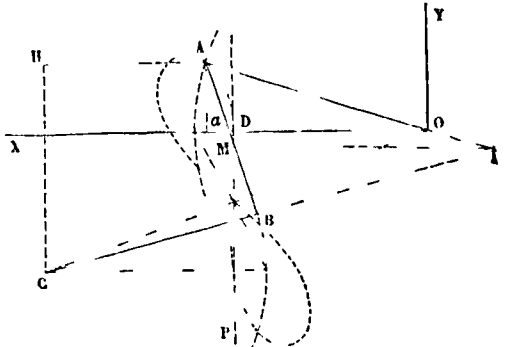


Fig. 1.

droite AB. Les extrémités de ces bielles qui correspondent au point B, sont articulées elles-mêmes avec deux brides égales projetées en BC, mobiles autour d'un axe horizontal projeté en C, et formant ce qu'on est convenu d'appeler un *contre-balancier*. Aux deux bielles est fixé vers leur milieu un axe horizontal projeté en M, auquel est articulée l'extrémité de la tige qu'il s'agit de guider. Pour se rendre compte du mouvement que peut prendre l'axe M, on voit qu'il suffit de considérer le lieu décrit par un point déterminé M d'une droite mobile AB assujettie à s'appuyer par ses extrémités sur deux circonférences dont les centres sont O et C et les rayons OA et CB. Ce lieu est connu sous le nom de *courbe à longue inflexion*; il a la forme d'un 8 allongé, dont le point multiple est situé sur la droite qui joint les centres O et C. La tangente en ce point se confond sensiblement avec la courbe dans une très-grande étendue; en sorte que, dans des limites convenables, le point M peut être considéré comme décrivant sensiblement une ligne droite; on verra tout à l'heure que l'erreur commise est tout à fait inappréciable dans la pratique. La courbe à longue inflexion peut aisément se construire par points; car, si l'on donne au balancier une position quelconque AO, le point B s'obtient par l'intersection de deux arcs de cercle décrits des points A et C comme centres avec des rayons respectivement égaux à la longueur de la bielle et à celle du contre-balancier; la position de la bielle étant ainsi obtenue, il ne reste plus qu'à y marquer le point M dont la distance au point A est connue. Il est facile en outre de construire la tangente au point M; car si l'on prolonge le rayon CB jusqu'à sa rencontre en I avec le rayon OA, le point I est le *centre instantané* du mouvement de la bielle (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ, THÉORÈME DE M. CHASLES); par conséquent, en joignant MI on a la normale en M à la courbe décrite; et en lui menant une perpendiculaire par le point M on obtient la tangente. On a cherché naturellement l'équation de la courbe à longue inflexion; M. de Prony, dans un mémoire inséré aux *Annales des Mines* en 1826, et M. Vincent, dans un mémoire inséré en 1837 au recueil de la Société de Lille, se sont par-

ticulièrement occupés de cette question. Mais l'équation dont il s'agit est du 6° degré, et ne peut être d'aucune utilité dans la pratique. Il est plus avantageux de calculer, comme l'a indiqué M. Bélanger, les coordonnées du point M pour une position donnée du balancier. Soient OX et OY deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical, menés par le point O; soient MD et OD les coordonnées y et x du point M par rapport à ces axes; soient $OA = R$, $CB = r$, $AB = l$, $AM = \lambda$, $AOX = \alpha$; menons AH parallèle à OX, Aa et CH parallèles à OY.

On a d'abord immédiatement

$$Oa = R \cos \alpha \quad \text{et} \quad Aa = R \sin \alpha.$$

On en déduit les distances CH et AH, et par conséquent l'hypoténuse AC du triangle rectangle AHC, et l'angle aigu CAH. Dans le triangle ABC on connaît alors les trois côtés; et l'on peut en déduire l'angle CAB par les procédés connus. La somme des angles CAH et CAB se trouve alors déterminée; c'est l'angle de AB avec l'axe OX; nous le représenterons par β . Dès lors on obtient, par la propriété fondamentale des projections :

$$x = R \cos \alpha + \lambda \cos \beta,$$

et

$$y = R \sin \alpha - \lambda \sin \beta.$$

Ce calcul est indispensable pour apprécier l'écart entre la courbe et la tangente au point multiple, qu'un dessin, même à grande échelle, ne saurait rendre sensible. On reconnaît ainsi qu'en allant du point multiple vers le haut, la courbe s'écarte d'abord à droite de la tangente au point multiple, et qu'elle s'en rapproche ensuite, et la coupe pour passer à gauche et former la boucle supérieure; de même on voit qu'en allant du point multiple vers le bas, la courbe s'écarte d'abord à gauche de la tangente au point multiple, puis s'en rapproche, et la coupe pour passer à droite et former la boucle inférieure.

Ordinairement on fait le balancier et le contre-balancier égaux, et on les dispose de la manière suivante, conformément aux règles établies par Watt. Soit OA la position horizontale du balancier

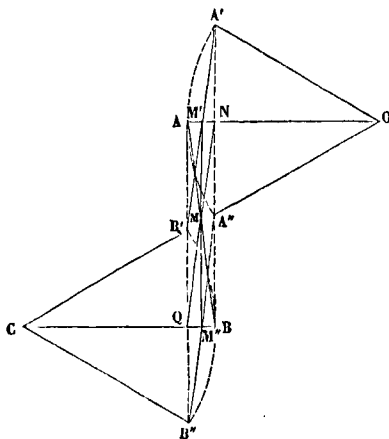


Fig. 2.

(fig. 2), et soient OA' , OA'' les positions extrêmes et symétriques qu'il prend dans son mouvement al-

ternatif. On fait l'angle AOA' égal au double de celui qui a pour tangente $\frac{1}{6}$; d'où l'on conclut que

le sinus de AOA' a pour valeur $\frac{12}{37}$, ce qui déter-

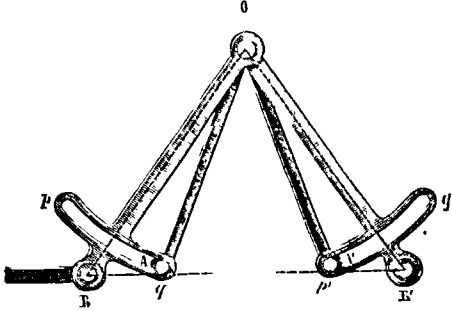
mine la longueur OA du balancier quand la longueur de la demi-corde $A'N$ est connue. (L'angle AOA' lui-même a pour valeur $18^{\circ}55'28''$.) On place le contre-balancier de manière que, dans sa position horizontale, son extrémité B se trouve sur le prolongement de la corde $A'A''$, et, comme les excursions du contre-balancier sont ici égales à celle du balancier, il en résulte que le point A est à son tour sur le prolongement de la corde $B'B''$ qui joint les points extrêmes de l'arc décrit par l'extrémité du contre-balancier. On met le point M au milieu de la bielle; il en résulte que le point M, correspondant à la position moyenne AB, et les points M' et M'' correspondant aux positions extrêmes $A'B'$ et $A''B''$, sont sur une même ligne droite, parallèle à la corde $A'A''$ et divisant AN en deux parties égales. En effet, la figure $A'B'B''A''$ est un parallélogramme, puisque $A'A''$ et $B'B''$ sont égaux et parallèles; la droite $M'M''$ qui joint les milieux des côtés $A'B'$ et $A''B''$ est donc parallèle à $A'A''$. D'un autre côté, la figure ANBQ est un rectangle; et $M'M''$ se confond avec l'une de ses médianes, puisqu'elle est à égale distance de $A'B'$ et de $A''B''$; donc le milieu M de la diagonale AB est sur $M'M''$. Enfin le point M est aussi le milieu de la diagonale NQ, qui est en même temps une des médianes du parallélogramme $A'B'B''A''$; donc le point M est le milieu de $M'M''$; et cette droite est égale à $A'A''$ ou à $B'B''$. Or $M'M''$ est la course de la tige à guider; la corde $A'A''$ doit donc être prise égale à cette course. Dans ce tracé, la longueur AB de la bielle reste arbitraire; mais Watt prescrit de la prendre égale à la corde $A'A''$

ou au moins aux $\frac{6}{7}$ de cette corde.

La courbe à longue inflexion, qui dans le cas actuel prend plus particulièrement le nom de courbe de Watt, passe, comme nous l'avons dit, à la droite de MM' , et revient en M' pour passer à gauche; mais le calcul montre que le plus grand écart entre la courbe et MM' , lequel a lieu vers les $\frac{3}{4}$ de cette distance en partant de M, n'atteint pas les 0,0003 du rayon OA; il en est de même de l'écart formé à gauche de M'' . On voit que cet écart est tout à fait insensible. M. Tchélycheff, dans un savant travail inséré dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg, a montré que les proportions adoptées par Watt ne sont cependant pas celles qui correspondent au minimum d'écart; mais on les adopte généralement à cause de leur simplicité. On a remarqué aussi qu'on pourrait diminuer l'écart en faisant la corde $A'A''$ plus grande que la course de la tige à guider; parce qu'alors le point d'articulation de la tige n'atteindrait pas, dans ses excursions, les positions qui correspondent au maximum d'écart. Mais on tomberait ainsi dans un autre inconvénient, qui consisterait à augmenter inutilement les dimensions et le poids du balancier. Les règles établies par Watt doivent donc être conservées, comme répondant le mieux aux conditions de la pratique. (Voy. PARALLÉLOGRAMME DE WATT, PENDULE DE WHITE, PARALLÉLOGRAMME DE REULAUX.)

Le système *balancier et contre-balancier* est quelquefois désigné sous le nom de *balancier à bride*.

BALANCIER INTERMITTENT, balancier dont les oscillations sont interrompues par des repos. Sur l'axe O du balancier OA peut tourner librement un

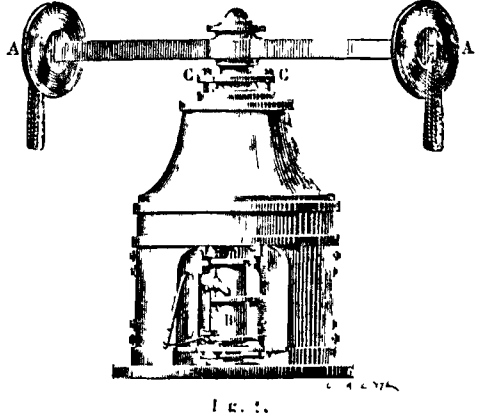


balancier auxiliaire OB, portant à son extrémité une coulisse circulaire *pq* dont le centre est sur l'axe O. Dans cette coulisse s'engage un bouton fixé à l'extrémité du balancier OA. Une manivelle et une bielle articulée en B communiquent au balancier auxiliaire un mouvement alternatif, dont la figure représente les positions extrêmes. Supposons le bouton A placé à l'extrémité droite de la coulisse, et concevons que le balancier auxiliaire passe de la position OB à la position OB'. Tant que l'extrémité gauche *p* de la coulisse n'aura pas atteint le bouton A, celui-ci demeurera immobile; mais quand l'extrémité *p* arrivera en A, le bouton sera poussé de gauche à droite par le balancier auxiliaire jusqu'en A'. A ce moment le balancier auxiliaire commencera à être ramené vers la gauche par la bielle; mais tant que l'extrémité *q'* de la coulisse n'aura pas atteint le bouton A', celui-ci demeurera immobile; quand l'extrémité *q'* arrivera en A, le bouton sera poussé de droite à gauche par le balancier auxiliaire jusqu'à la position A; et ainsi de même à chaque oscillation complète. On voit que le balancier OA oscillera de la position OA à la position OA'; mais qu'à chacune de ces positions extrêmes il y aura un repos correspondant au temps que la coulisse emploie à glisser contre le bouton sans le toucher par l'une ou l'autre de ses extrémités.

L'inconvénient de ce système est le choc qui se produit chaque fois que l'une des extrémités de la coulisse mobile vient saisir le bouton. Il ne doit être employé par conséquent qu'avec des vitesses peu considérables. Pour éviter les chocs, M. Bélanger a proposé un mécanisme dans lequel il introduit un troisième balancier et une seconde bielle. (Voy. le *Traité de Cinématique* de M. Bélanger, p. 256.)

BALANCIER MONÉTAIRE, machine servant à frapper les monnaies et les médailles. Elle se compose essentiellement d'une vis V (fig. 1), à axe vertical et à plusieurs filets, mobile dans un écrou fixe, et dont la tête est traversée par un levier horizontal AA, d'une assez grande longueur, terminé à ses extrémités par des masses de plomb de forme lenticulaire. Si, à l'aide de lanières en cuir adaptées aux extrémités de ce levier, plusieurs hommes agissent pour lui imprimer, dans le sens convenable, une grande vitesse de rotation autour de l'axe de la vis, celle-ci descendra rapidement dans son écrou;

et si son extrémité inférieure rencontre un obstacle, il en résultera un choc d'autant plus violent que la vitesse imprimée à l'appareil sera plus grande. Si le corps qui fait obstacle est assez peu compressible pour que la vis ne descende pendant la durée du



choc que d'une quantité *h* très-petite, l'effort moyen R exercé par cet obstacle, ou, ce qui revient au même, l'effort égal et contraire qu'il subira de la part de la vis, pourra être très-considérable. Si, en effet, ω désigne la vitesse angulaire donnée au système, et I son moment d'inertie, toute la puissance vive possédée par le balancier et la vis étant épuisée à la fin du choc, on aura, d'après le théorème de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot), et en faisant abstraction du frottement,

$$R h = \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ d'où } R = \frac{1}{2} \frac{I \omega^2}{h},$$

quantité qui pourra être très-grande si *h* est très-petite, et d'autant plus grande d'ailleurs que le moment d'inertie I est plus grand. C'est pour cela que l'on place des masses pesantes aux deux extrémités du levier. On utilise l'énorme pression ainsi produite dans un temps très-court, pour *frapper* les monnaies ou les médailles, c'est-à-dire pour faire prendre au flan métallique, pièce cylindrique destinée à devenir une monnaie ou une médaille, l'empreinte des coins d'acier qui présentent en creux les effigies ou les caractères que la pièce doit offrir en relief.

Le balancier monétaire paraît avoir été inventé sous Louis XIII, en 1641, par Nicolas Briot; il a été perfectionné depuis, particulièrement par M. Gingembre; et on s'en servait encore il y a peu d'années à la Monnaie de Paris pour frapper les monnaies. On lui a substitué récemment la presse MONÉTAIRE (Voy. ce mot) de M. Thonneller, qui agit d'une manière continue et sans choc; et il n'est plus employé qu'à frapper les médailles. Nous en donnons néanmoins la description sommaire.

Le flan est placé horizontalement sur le coin inférieur. Celui-ci ne repose pas directement sur le massif de la machine, mais sur une pièce d'acier appelée *rotule*, qui présente en dessous une surface sphérique, et s'embotte dans une surface creuse de même forme portée par le massif. Cette disposition a pour but de permettre au coin inférieur de se placer, au moment du choc, parallèlement au coin supérieur. Celui-ci n'est pas adapté directe-

ment à l'extrémité de la vis, car il ne doit pas tourner avec elle. Il est fixé à l'extrémité inférieure d'une pièce que l'on appelle la *boîte coulante B*, laquelle peut se mouvoir verticalement entre des guides, et qui participe au mouvement descendant ou ascendant de la vis. Pour cela, le noyau de la vis se prolonge inférieurement au delà de la partie filetée, et présente une rainure circulaire dans laquelle s'engage un anneau; c'est à cet anneau qu'est adaptée la boîte coulante. Il en résulte que la vis tourne dans l'anneau sans lui imprimer aucune rotation, mais que celui-ci, et par conséquent aussi la boîte coulante, descendent et montent du même mouvement que la vis elle-même.

Il ne suffit pas que le flan soit pressé entre les deux coins, il faut encore que sa circonférence ne puisse pas s'agrandir, et qu'elle prenne la forme, ou offre les caractères déterminés à l'avance. Pour obtenir cet effet, on place le flan dans un anneau en acier, formé de trois arcs égaux, que l'on appelle la *virole*, et dont la surface interne présente en creux la forme que la circonférence de la pièce doit offrir en relief. La surface externe de cette virole est légèrement conique, et s'emboîte dans une cavité de même forme, dont la plus grande base est en haut. Quand la vis est au haut de sa course, des ressorts placés au-dessous de la virole la font légèrement sortir au-dessus de la cavité tronconique. Mais quand la vis descend, en même temps que le flan est pressé sur ses deux faces entre les deux coins, il l'est aussi latéralement par la virole que le coin supérieur force à pénétrer dans la cavité tronconique. Il en résulte que le flan prend à la fois l'empreinte des coins et de la virole, et que la pièce de monnaie, ou la médaille, se trouve complètement frappée par un seul coup du balancier.

Quand une pièce a été frappée, il faut pouvoir la retirer et la remplacer par un nouveau flan. Cette double fonction est remplie par la machine elle-même : voici comment. Le noyau de la vis se prolonge un peu au-dessus de la partie filetée, à la partie supérieure. Cette partie est entourée d'un collier CC percé d'échancrures dans lesquelles les filets peuvent s'introduire. A cet anneau sont adaptées deux tiges verticales qui traversent toute la machine, et qui viennent se fixer à un plateau horizontal lié au coin inférieur. Quand on fait tourner la vis pour la faire remonter, le bout des filets vient s'appuyer contre le collier et le fait monter, ainsi que le plateau et le coin inférieur; mais d'une petite quantité seulement, parce que, la vis continuant à tourner, les filets s'engagent dans les échancrures du collier et cessent de l'entraîner. Mais ce petit mouvement a suffi pour élever la face inférieure de la pièce frappée jusqu'à la hauteur du plan supérieur de la virole.

Sur ce plan est placée une pièce à laquelle on donne le nom de *main-poseur*, et qui est représentée par la figure 2.

Elle porte une échancrure *a*, et un trou *b* pouvant contenir un flan; elle est liée à une colonne verticale, dont on voit la base en *O*, et qui est mobile autour de son axe; un crochet adapté en *c* et maintenu par un ressort tend à la ramener en sens inverse de la flèche *f* quand elle se déplace dans le sens de cette flèche. La partie inférieure et non filetée de la vis porte une sorte de came hélicoïde qui,

lorsque la vis monte, vient rencontrer une palette montée sur la colonne verticale dont il vient d'être parlé. Cette palette peut tourner autour de la colonne, mais dans un sens seulement; un arrêt l'empêche de céder à l'action de la came hélicoïde; elle est donc obligée de faire tourner la colonne verticale, et avec celle-ci la main-poseur, qui, marchant dans le sens

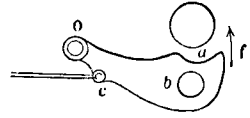


Fig. 2.

de la flèche *f*, chasse de dessus le coin inférieur, au moyen de l'échancrure *a*, la pièce qui vient d'être frappée, et y dépose un nouveau flan, contenu dans le trou *b*. Ce mouvement de rotation n'a qu'une médiocre amplitude, parce que la surface latérale de la came hélicoïde se termine par un cylindre concentrique à la vis, et que, pendant que ce cylindre passe sur l'arête de la palette, celle-ci ne tourne plus et ne fait plus tourner ni la colonne verticale ni la main-poseur. La vis, continuant à monter, la came se dégage tout à fait de la palette, et la main-poseur est ramenée à sa position primitive par le ressort qui agit sur le crochet *c*.

Lorsque la vis reprend un mouvement descendant, la saillie de sa tête fait descendre le collier qui l'entoure, et, par l'intermédiaire des deux tringlées qui y sont adaptées, le plateau lié au coin inférieur. Celui-ci vient donc se replacer sur la ro'ule. La came hélicoïde, en descendant avec la vis, rencontre de nouveau la palette; mais elle la pousse dans le sens où elle peut tourner autour de la colonne verticale, et par conséquent elle n'entraîne ni cette colonne ni la main-poseur. Le second flan se trouve donc frappé comme le premier, et le même jeu recommence.

La seule attention à avoir est de placer un flan dans le trou *b* chaque fois que la main-poseur est ramenée en arrière par le crochet *c*.

Tout le mécanisme est concentré dans un massif en fonte solidement établi, et qui sert d'écrou à la vis. (Voy. PRESSE MONÉTAIRE.)

BALISE, signal flottant qui sert à indiquer aux navigateurs les endroits dangereux. C'est le plus souvent une grosse boule de liège, attachée au fond de la mer par un cordage. On lui donne aussi la forme d'une pyramide, lorsqu'elle doit être de grande dimension. Elle porte souvent alors un pavillon pendant le jour, et un fanal pendant la nuit.

BALISTIQUE (du grec βάλω, je lance), science qui traite du mouvement des projectiles. Elle comprend la **BALISTIQUE INTÉRIEURE** (Voy. ce mot), qui étudie le mouvement des projectiles dans l'intérieur des bouches à feu, et la **BALISTIQUE EXTÉRIEURE** ou **Balistique** proprement dite, qui fait le sujet de cet article. Un grand nombre de physiciens et de géomètres se sont occupés de cette science. Galilée a démontré le premier que, dans le vide, la trajectoire serait une parabole. Jean Bernoulli a ramené le problème aux quadratures en tenant compte de la résistance du milieu, et dans l'hypothèse la plus générale sur la loi de cette résistance. Euler a donné l'expression finie de la longueur d'un arc de trajectoire, en supposant, d'après Newton, la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse; et il a obtenu les coordonnées des points de la tra-

jectoire en la divisant en petits arcs qu'il assimilait à des lignes droites. Legendre a repris la méthode d'Euler en substituant à ces lignes droites des arcs de cercles osculateurs. Lambert, Borda, Tempelhoff, Français, ont eu recours aux développements en série. Quelques-uns de ces géomètres, Legendre, Borda, Français, Bezout, ont cherché en même temps à rendre les intégrations possibles, en modifiant la loi de la résistance de l'air. L'étude de cette loi a été l'objet d'un grand nombre d'expériences faites à diverses époques par Torricelli, Newton, Robins, Borda, Hutton, et, dans ces derniers temps, par M. Thibault et par MM. Piobert, Morin et Didion. Enfin, M. Piobert a été conduit à représenter la résistance de l'air par une expression binôme, renfermant un terme proportionnel au carré de la vitesse, et un autre terme proportionnel au cube de cette même vitesse; et M. Didion, en se servant de cette expression, a imaginé une méthode qui permet de résoudre par le calcul, avec une exactitude suffisante, tous les problèmes de balistique qui peuvent offrir quelque intérêt dans l'application; cette méthode a été adoptée, en 1845, par le ministre de la guerre pour l'enseignement de l'école d'artillerie.

I. Quoiqu'on ne puisse pas en réalité négliger la résistance de l'air, cependant l'étude du mouvement des projectiles dans le vide sert de base à la balistique, parce que, d'une part, ce mouvement fournit dans certains cas une approximation dont on peut se contenter, et parce que, d'autre part, c'est un terme de comparaison auquel on a souvent recours. La recherche des lois du mouvement dans le vide n'offre d'ailleurs aucune difficulté. Soit v_0 la vitesse initiale du projectile, α l'angle que sa direction fait avec l'horizon, et que l'on appelle l'angle de tir. Si par cette direction on fait passer un plan vertical, la trajectoire du mobile devra être contenue tout entière dans ce plan, puisque, la pesanteur agissant verticalement, aucune cause ne tend à faire sortir le mobile du plan dont il s'agit. Dans ce plan menons par le point de départ O du projectile un axe horizontal OX et un axe vertical OY. Les équations du mouvement des projections du mobile sur ces deux axes seront :

$$\text{pour l'axe des } x \dots \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad [1]$$

$$\text{pour l'axe des } y \dots \frac{d^2y}{dt^2} + g = 0. \quad [2]$$

A l'origine du mouvement, la vitesse de la projection du mobile sur l'axe des x est $v_0 \cos \alpha$, et la vitesse de sa projection sur l'axe des y est $v_0 \sin \alpha$. Si donc on intègre les équations [1] et [2] en déterminant les constantes de manière à satisfaire à ces deux conditions, on trouvera, pour l'expression des vitesses des deux projections,

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \cos \alpha, \quad [3]$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \quad [4]$$

Intégrant de nouveau, en remarquant que pour $t = 0$ on doit avoir $x = 0$ et $y = 0$, on obtient :

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad [5]$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad [6]$$

Ces équations contiennent la solution du problème

Cherchons d'abord l'équation de la trajectoire; pour cela éliminons le temps t entre les relations [5] et [6], nous trouverons :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2. \quad [7]$$

Cette équation est celle d'une parabole dont l'axe est vertical. Elle passe par l'origine, comme on devait s'y attendre, et rencontre une seconde fois l'axe des x en un point B dont l'abscisse X s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation [7]; on trouve ainsi :

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Cette longueur OB est ce que l'on appelle l'amplitude ou la portée du jet; elle atteint son maximum, pour une même valeur de v_0 , ou pour une même charge, lorsque 2α est égal à 90° , ou α à 45° . Si l'on appelle h la hauteur due à la vitesse v_0 (Voy. HAUTEUR DUE À UNE VITESSE), on a alors $X = 2h$.

La parabole qui a pour équation l'équation [7] ayant un axe vertical, il en résulte que l'abscisse de son sommet est $\frac{1}{2} X$ ou $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; en mettant cette valeur pour x dans l'équation de la trajectoire, on trouve pour l'ordonnée Y du sommet :

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Dans le cas où le tir a lieu sous l'inclinaison initiale de 45° , on a $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, et la valeur de Y se réduit à $\frac{v_0^2}{4g}$, ou à $\frac{1}{2} h$.

On peut remarquer que pour deux valeurs de l'inclinaison α également distantes de 45° , l'amplitude du jet est la même. Car si, dans la valeur de X, on remplace α par $45^\circ \pm \epsilon$, ou 2α par $90^\circ \pm 2\epsilon$, $\sin 2\alpha$ est égal dans les deux cas à $\cos 2\epsilon$, et X reste le même.

Le temps employé par le projectile pour se transporter de l'origine au point qui a pour abscisse x , est donné par l'équation [5]; on trouve

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Si l'on prend pour x l'amplitude X, on trouve pour la durée T du trajet de O en B,

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Il est facile de s'assurer que le temps employé par le projectile pour aller du point O au point culminant A est précisément $\frac{1}{2} T$.

La vitesse du projectile au bout du temps t s'obtient en élevant au carré les relations [3] et [4], ajoutant et extrayant la racine carrée; on obtient ainsi, après réduction,

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot g t + g^2 t^2}. \quad [8]$$

Elle atteint son minimum pour $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{1}{2} T$, c'est-à-dire quand le projectile est arrivé au point culminant A; on a alors $v = v_0 \cos \alpha$. Pour $t = T$, c'est-à-dire quand le mobile est parvenu en B, on trouve $v = v_0$; ainsi la vitesse a repris sa valeur initiale. A des instants également distants de celui où le

mobile est arrivé au point culminant, sa vitesse est la même; car si l'on fait

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \theta,$$

la valeur de v prend la forme

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2},$$

quel que soit le signe de θ .

L'inclinaison i de la tangente à la trajectoire, au point qui a pour abscisse x , s'obtient en différenciant l'équation [7] par rapport à x ; on trouve

$$y' = \tan i = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x. \quad [9]$$

On reconnaît aisément qu'elle est nulle au point A, où $x = \frac{1}{2} X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. A cause de la symétrie de la courbe par rapport à son axe AI, il est clair qu'en deux points dont les abscisses diffèrent également de OI en plus et en moins, les tangentes sont également inclinées sur l'axe des x , l'une dans un sens et l'autre dans l'autre. Ainsi la tangente en B fait avec l'horizon le même angle que la tangente en O; mais ces droites sont symétriquement placées par rapport à l'axe.

Enfin il résulte de la relation $X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ que, pour une même inclinaison, les portées sont proportionnelles au carré des vitesses initiales, et que, vice versa, les vitesses initiales doivent être proportionnelles aux racines carrées des portées; pour une même vitesse initiale, les portées sont proportionnelles au sinus du double de l'angle de tir.

A l'aide des relations qui précèdent, on peut résoudre tous les problèmes qui se rapportent au tir; nous indiquerons la solution des principaux.

1° Le but étant donné, trouver la vitesse initiale du projectile ou bien l'angle de tir.

Les coordonnées x et y d'un point de la trajectoire étant connues, si l'angle de tir est donné, on déduit de l'équation [7] :

$$\frac{v_0^2}{2g} = h = \frac{4 \cos^2 \alpha (x \tan \alpha - y)}{x^2}.$$

On peut donner à cette expression une forme plus simple en posant $\frac{y}{x} = \tan \beta$; il vient alors

$$h = \frac{x}{4 \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \beta)} = \frac{x \cos \beta}{4 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}. \quad [10]$$

Si c'est la vitesse initiale qui est donnée, on remplace dans l'équation [7] $\cos^2 \alpha$ par sa valeur en fonction de la tangente; et l'équation qui donne $\tan \alpha$ peut s'écrire sous la forme

$$\tan^2 \alpha - \frac{4h}{x} \tan \alpha + \frac{4hy}{x^2} + 1 = 0,$$

$$\text{d'où } \tan \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h(h-y) - x^2}}{x}. \quad [11]$$

Il y a une relation remarquable entre les deux racines de cette équation, ou plutôt entre les angles dont ces racines sont les tangentes. Soient α' et α'' ces deux angles, les propriétés des coefficients de l'équation du second degré donnent

$$\tan \alpha' + \tan \alpha'' = \frac{4h}{x}$$

$$\text{et } \tan \alpha' \tan \alpha'' = \frac{4hy}{x^2} + 1,$$

$$\text{d'où } \tan(\alpha' + \alpha'') = -\frac{x}{y} = -\cot \beta,$$

par conséquent,

$$\alpha' + \alpha'' = 90^\circ + \beta, \quad \text{ou } \alpha'' - \beta = 90^\circ - \alpha'.$$

Cette relation montre que les directions OT' et OT'' (fig. 1), suivant lesquelles il faut tirer pour atteindre un but donné M, avec une même vitesse initiale, sont telles que l'on a, en menant OM,

TOY = T''OM, c'est-à-dire que l'une d'elles fait avec la verticale un angle égal à celui que l'autre fait avec la droite qui va au but.

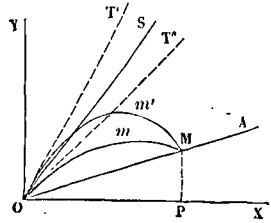


Fig. 1.

Dans le cas où l'équation [11] a ses racines égales, c'est-à-dire où l'on a $x^2 + 4hy - 4h^2 = 0$, ou $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2h$, les deux directions OT' et OT'' se confondent en une seule OS, qui est la bissectrice de l'angle YOM que fait la droite OM menée au but, avec la verticale OY. Cette bissectrice représente l'inclinaison qui donne la plus grande portée sur un plan perpendiculaire à YOX, et dont OMA serait la trace verticale. En effet, on a $OM = \frac{x}{\cos \beta}$, ou, en mettant pour x sa valeur tirée de la relation [10],

$$OM = \frac{4h \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta}.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée de cette expression par rapport à α , on trouve

$$\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

ou $\cos(2\alpha - \beta) = 0$, d'où $2\alpha - \beta = 90^\circ$,
et $\alpha = \frac{90^\circ + \beta}{2}.$

Cette valeur est précisément celle qui répond à la bissectrice OS de l'angle YOM.

2° Un projectile étant assujéti à passer par deux points donnés, trouver la vitesse initiale et l'angle de tir. On a à résoudre ce problème dans le cas où le projectile doit, par exemple, atteindre un point situé derrière un rempart, et raser auparavant la crête du parapet. Soient x', y' et x'', y'' les coordonnées des deux points donnés; ces coordonnées devront satisfaire à l'équation [7], et l'on en tirera facilement

$$\frac{x' \tan \alpha - y'}{x'^2} = \frac{x'' \tan \alpha - y''}{x''^2},$$

ou, en posant $\frac{y'}{x'} = \tan \beta'$ et $\frac{y''}{x''} = \tan \beta''$,

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta'}{x'} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta''}{x''},$$

$$\text{d'où } \tan \alpha = \frac{x' \tan \beta'' - x'' \tan \beta'}{x' - x''}.$$

L'angle α étant connu, on tirera v_0 de l'équation [10] après y avoir remplacé x par x' et β par β' .

3° Étant donnée la position du but et l'inclinaison sous laquelle le projectile doit l'atteindre, trouver la vitesse initiale et l'angle de tir.

Soient x et y les coordonnées du but et i l'inclinaison donnée de la trajectoire au point donné; les équations du problème seront les équations [7] et [9], que l'on peut mettre sous la forme

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{et } \operatorname{tang} i = \operatorname{tang} \alpha - \frac{x}{2h \cos^2 \alpha}.$$

Multipliant la première par 2, la seconde par x , et retranchant, on obtient :

$$2y - x \operatorname{tang} i = x \operatorname{tang} \alpha,$$

$$\text{d'où } \operatorname{tang} \alpha = 2 \frac{y}{x} - \operatorname{tang} i,$$

$$\text{u } \operatorname{tang} \alpha = 2 \operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} i,$$

représentant l'angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$. L'angle α étant connu par cette formule, on aura h par l'équation [10]; et, par suite,

$$r_0 = \sqrt{2gh}.$$

II. Nous ne pourrions, sans sortir des limites qui nous sont imposées, analyser ici tous les travaux relatifs au mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la résistance de ce fluide. Nous nous contenterons de faire connaître la méthode de M. Didion.

D'après les expériences faites par Hutton, par M. Thibault, et par MM. Piobert, Morin et Didion, M. Piobert a été conduit à représenter la résistance de l'air par l'expression

$$SAv^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right), \quad [12]$$

dans laquelle S désigne l'aire de la plus grande section du projectile perpendiculairement à la direction du mouvement, v la vitesse, et A et r des coefficients numériques dont les valeurs ont été fixées ainsi qu'il suit :

$$A = 0,027 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = 0,0023.$$

Si F désigne la résistance de l'air sur un projectile sphérique dont le rayon est R , on a donc

$$F = \pi R^2 A v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right),$$

et l'accélération due à cette force sera exprimée par $\frac{gF}{P}$, P désignant le poids du projectile; en appelant φ cette accélération, on aura donc

$$\varphi = \frac{gA \cdot \pi R^2}{P} \cdot v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right).$$

Nous écrivons, pour abrégier :

$$\varphi = kv^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right). \quad [13]$$

Cela posé, si nous remarquons que la force F , agissant tangentiellement à la trajectoire, fait avec les axes des angles dont les cosinus ont respectivement pour valeur $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, ds désignant l'élément de la courbe, nous aurons les équations du mouvement en ajoutant aux premiers membres des équations [1] et [2] les composantes de l'accélération φ , ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi \frac{dx}{ds} = 0 \quad [14]$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \varphi \frac{dy}{ds} + g = 0. \quad [15]$$

On déduit aisément de ces équations une relation indépendante de φ , c'est-à-dire de la résistance de l'air; pour cela, le plus simple est de différentier l'équation

$$dy = y' dx, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = y' \frac{dx}{dt}$$

par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + y' \cdot \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Mettant pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ et pour $\frac{d^2x}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations [14] et [15] et réduisant, on obtient

$$\frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + g = 0, \quad [16]$$

équation qui nous sera utile plus tard.

On pourrait aussi déduire des équations [14] et [15] une équation différentielle indépendante du temps; mais cette relation est trop compliquée pour qu'il soit possible d'en tirer un parti utile. Voici comment M. Didion procède.

Au lieu d'embrasser la trajectoire entière, il suppose qu'on n'en considère qu'un arc assez petit pour qu'il soit permis, dans le trajet de cet arc, de remplacer le rapport $\frac{ds}{dx}$ qui est variable, par sa

valeur moyenne, supposée connue, et que nous désignerons par σ ; on verra plus loin comment cette valeur moyenne peut être obtenue approximativement. L'équation [14] devient alors, en y mettant pour φ sa valeur,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\sigma} v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right) = 0;$$

mais en même temps il est permis, en mettant pour v sa valeur $\frac{ds}{dt}$, de remplacer ds par σdx , ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\sigma \left(\frac{dx}{dt}\right) \left[1 + \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{dx}{dt}\right] = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par une lettre u , représentant la composante horizontale de la vitesse,

$$\frac{du}{dt} + k\sigma u^2 \left(1 + \frac{\sigma}{r} u\right) = 0.$$

On élimine le temps à l'aide de la relation

$$dx = u dt;$$

et il vient, en divisant l'équation par u ,

$$\frac{du}{dx} + k\sigma u \left(1 + \frac{\sigma}{r} u\right) = 0. \quad [17]$$

M. Didion intègre sous cette forme; mais il est plus commode, tout en suivant la même marche, de faire $\frac{\sigma}{r} u = \omega$, d'où $u = \frac{r}{\sigma} \omega$, ce qui donne, en posant $k\sigma = n$,

$$\frac{d\omega}{dx} + n\omega (1 + \omega) = 0. \quad [18]$$

On en tire

$$\frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} + n dx = 0,$$

et, en intégrant,

$$\log' \frac{\omega}{1+\omega} + nx = \text{const.}$$

Si ω_0 est la valeur de ω qui répond à $x = 0$, c'est-à-dire $\frac{\sigma}{r} u_0$ ou $\frac{\sigma}{r} \cdot v_0 \cos \alpha$, on doit avoir

$$\log' \frac{\omega_0}{1+\omega_0} = \text{const.}$$

Par conséquent

$$\log' \frac{\omega(1+\omega_0)}{\omega_0(1+\omega)} + nx = 0,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{\omega_0}{(\omega_0 + 1)e^{nx} - \omega_0}$$

et par suite

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{r\omega_0}{(\omega_0 + 1)e^{nx} - \omega_0}.$$

Élevant au carré, et divisant l'équation [16] par celle qu'on obtient, on trouve

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{g}{u_0^2} [(\omega_0 + 1)e^{n\alpha} - \omega_0]^2.$$

Développant, multipliant par dx , intégrant, et déterminant la constante de manière que pour $x=0$ on ait $y' = \text{tang } \alpha$, il vient

$$y' = \text{tang } \alpha - \frac{g}{u_0^2} \left[\frac{(\omega_0 + 1)^2}{2n} (e^{2n\alpha} - 1) - \frac{2\omega_0(\omega_0 + 1)}{n} (e^{n\alpha} - 1) + \omega_0^2 \alpha \right]. \quad [19]$$

Multipliant par dx , et intégrant de nouveau, en déterminant la constante de manière que pour $x=0$ on ait $y=0$, il vient enfin pour l'équation de la trajectoire

$$y = x \text{ tang } \alpha - \frac{g}{u_0^2} \left[\frac{(\omega_0 + 1)^2}{4n^2} (e^{2n\alpha} - 2n\alpha - 1) - \frac{2\omega_0(\omega_0 + 1)}{n^2} (e^{n\alpha} - n\alpha - 1) + \frac{1}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \right].$$

Si l'on remplace u_0 par sa valeur $v_0 \cos \alpha$, que l'on mette x^2 en facteur devant la parenthèse, et que l'on pose pour abrégér :

$$\begin{aligned} \psi_b &= \frac{1}{2} (\omega_0 + 1)^2 \cdot \frac{e^{2n\alpha} - 2n\alpha - 1}{n^2 x^2} \\ &\quad - 4\omega_0 (\omega_0 + 1) \frac{e^{n\alpha} - n\alpha - 1}{n^2 x^2} + \omega_0^2, \end{aligned}$$

on peut écrire :

$$y = x \text{ tang } \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \cdot \psi_b, \quad [20]$$

et l'on voit que cette équation ne diffère de l'équation [7] de la trajectoire dans le vide qu'en ce que le dernier terme du second membre est multiplié par la fonction ψ_b . M. Didion a calculé avec 4 décimales les valeurs numériques de cette fonction pour des valeurs de $n\alpha$ croissant de centième en centième depuis 0 jusqu'à 1,25, et de 0,05 en 0,05 jusqu'à 1,95; et pour des valeurs de ω_0 croissant par intervalles de 0,05 depuis 0 jusqu'à 1,30 : limites suffisamment étendues pour les besoins de l'application.

L'équation [19] donne l'inclinaison de la tangente à la courbe au point qui a pour abscisse x . En mettant pour u_0 sa valeur, mettant x en facteur devant la parenthèse, et posant

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \frac{1}{2} (\omega_0 + 1)^2 \cdot \frac{e^{2n\alpha} - 1}{n\alpha} \\ &\quad - 2\omega_0 (\omega_0 + 1) \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{n\alpha} + \omega_0^2, \end{aligned}$$

on pourra l'écrire

$$y' = \text{tang } \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x \cdot \mathfrak{J}. \quad [21]$$

et l'on voit que cette équation ne diffère de l'équation [9], relative au mouvement dans le vide, qu'en ce que le dernier terme du second membre est multiplié par la fonction \mathfrak{J} , dont M. Didion a également calculé les valeurs numériques entre les limites ci-dessus indiquées.

Si l'on renverse la valeur de $\frac{dx}{dt}$ trouvée ci-dessus, on obtient

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u_0} [(\omega_0 + 1)e^{n\alpha} - \omega_0].$$

Multipliant par dx , intégrant, et déterminant la constante de manière que t s'annule avec x , on trouve

$$t = \frac{1}{u_0} \left[(\omega_0 + 1) \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{n} - \omega_0 \alpha \right].$$

Mettant x en facteur commun, remplaçant u_0 par sa valeur $v_0 \cos \alpha$, et posant

$$\textcircled{D} = (\omega_0 + 1) \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{n\alpha} - \omega_0$$

on obtient $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \cdot \textcircled{D} :$ [22]

c'est la valeur de la durée du trajet dans le vide, multipliée par la fonction \textcircled{D} , dont M. Didion a calculé les valeurs.

Enfin, en remplaçant u_0 par sa valeur dans l'expression de u trouvée plus haut, et posant

$$\textcircled{V} = (\omega_0 + 1) e^{n\alpha} - \omega_0,$$

on peut écrire $u = \frac{v_0 \cos \alpha}{\textcircled{V}} ;$

et, comme $u = v \cos i$, il vient

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\textcircled{V} \cdot \cos i}. \quad [23]$$

Dans le vide, on aurait simplement :

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos i},$$

puisque $v_0 \cos \alpha$ est la projection horizontale de la vitesse v , qui fait avec l'axe des x l'angle i ; par conséquent, la vitesse, dans le cas où l'on a égard à la résistance de l'air, est égale à celle qu'on aurait dans le vide, divisée par la fonction \textcircled{V} . M. Didion a calculé les valeurs numériques de cette fonction, entre les mêmes limites que les précédentes.

Les fonctions ψ_b , \mathfrak{J} , \textcircled{D} , \textcircled{V} ont entre elles des relations qui permettent de les déduire les unes des autres et qui facilitent le calcul de leurs valeurs numériques.

Les formules [20], [21], [22], [23] supposent connu le rapport σ de l'arc de trajectoire considéré à sa projection horizontale. Pour obtenir approximativement ce rapport, M. Didion se sert de la trajectoire dans le vide, qu'il substitue à la trajectoire dans l'air, entre les points où l'inclinaison de la tangente est α et celui où cette inclinaison est i ; on peut admettre, en effet, que les deux courbes différant peu l'une de l'autre, et les inclinaisons extrêmes étant les mêmes, l'inclinaison moyenne de l'une peut être substituée sans erreur sensible à celle de l'autre, et que par conséquent le rapport cherché est sensiblement le même pour l'une et pour l'autre. Or on a

$$s = \int dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

De l'équation [9] on tire $dy' = \frac{g dx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$,

d'où $dx = \frac{v_0^2 \cos \alpha}{g} dy' = 2h \cos^2 \alpha dy'$,

par conséquent $s = 2h \cos^2 \alpha \int dy' \sqrt{1 + y'^2}$,

l'intégrale étant prise entre les limites $y' = \text{tang } \alpha$ et $y' = \text{tang } i$. En effectuant l'intégration on obtient d'abord :

$$s = h \cos^2 \alpha [y' \sqrt{1 + y'^2} + \log' (y' + \sqrt{1 + y'^2})] + \text{const.},$$

ou $s = h \cos^2 \alpha [\text{tang } i \cdot \text{séc. } i + \log' \text{ tang } (45^\circ + \frac{1}{2} i)]$

+ const.,

ou, en désignant par $\psi(i)$ la fonction de i entre parenthèses,

$$s = h \cos^2 \alpha \cdot \psi(i) + \text{const.}$$

Entre les limites considérées on aura donc

$$s = h \cos^2 \alpha [\psi(i) - \psi(\alpha)] \dots \quad [24]$$

D'ailleurs de l'équation (9) on tire

$$x = 2h \cos^2 \alpha (\text{tang } i - \text{tang } \alpha).$$

Par conséquent

$$\sigma = \frac{s}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi(i) - \psi(\alpha)}{\text{tang } i - \text{tang } \alpha} \dots [25]$$

On trouve à l'aide de cette formule que pour des arcs variant de 5° en 5° depuis zéro jusqu'à 60°, limite des inclinaisons qu'on puisse avoir à considérer dans la pratique, σ prend les valeurs suivantes :

α	i	σ
60°	55°	1,8699
55	50	1,6485
50	45	1,4837
45	40	1,3589
40	35	1,2623
35	30	1,1870
30	25	1,1283
25	20	1,0831
20	15	1,0491
15	10	1,0247
10	5	1,0090
5	0	1,0013

Les valeurs moyennes de σ pour des valeurs croissantes de l'arc de trajectoire compté à partir de zéro sont les suivantes :

i	σ
5°	1,0013
10	1,0052
15	1,0118
20	1,0217
25	1,0351
30	1,0531
35	1,0760
40	1,1073
45	1,1478
50	1,2019
55	1,2758
60	1,3802

Pour déterminer la trajectoire, quand la vitesse initiale du projectile et l'angle de tir sont donnés, on procédera donc de la manière suivante. On supposera la courbe partagée en arcs tels que OA, AB, BC, etc. (fig. 2), dont les extrémités répondent aux points où l'inclinaison a les valeurs successives inscrites dans le tableau ci-dessus. Le rapport σ sera connu pour chacun de ces arcs partiels. Les inclinaisons extrêmes α

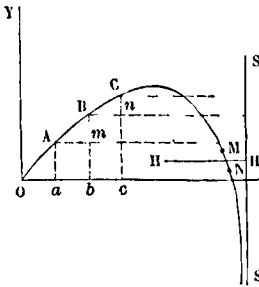


Fig. 2.

et i étant connues pour le premier arc OA, ainsi que la vitesse en O, on les substituera dans l'équation [21] qu'on peut écrire

$$x \cdot \delta = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } i}{y} [26]$$

On résoudra cette équation par rapport à x , soit par tâtonnements, soit à l'aide d'une table des valeurs numériques de la fonction $x \cdot \delta$ (M. Didion a calculé cette table pour la fonction $\pi x \cdot \delta$). Une fois x et σ connus, l'équation [20] donnera y ou $A\alpha$; l'équation [22] donnera la valeur t_1 du trajet, et l'équation [23] fera connaître la vitesse v_1 en A. On transportera alors l'origine au point A; connaissant les inclinaisons en A et en B, la vitesse en A, ainsi que la valeur de σ pour l'arc AB, on les substituera dans l'équation [25], d'où l'on tirera une valeur de x , qui représentera $A\alpha$ ou ab ; cette valeur, mise dans l'équation [20], donnera une valeur de y , qui représentera $B\alpha$; l'équation [22] donnera la durée t_2 du

trajet suivant AB; et l'équation [23] fera connaître la vitesse v_2 en B. On transportera l'origine au point B; la même méthode donnera l'abscisse $B\alpha$, l'ordonnée $C\alpha$, la durée t_3 du trajet, la vitesse v_3 en C; et ainsi de suite.

Les abscisses des points successifs ainsi obtenus seront :

$O\alpha, O\alpha + A\alpha, O\alpha + A\alpha + B\alpha, \text{ etc. ;}$

les ordonnées de ces mêmes points seront

$A\alpha, A\alpha + B\alpha, A\alpha + B\alpha + C\alpha, \text{ etc.}$

On prolongera l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne deux points consécutifs situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal qu'on veut atteindre. Soient HH' (fig. 3) ce plan, et M et N les extrémités du dernier arc; leurs coordonnées étant connues, ainsi que l'ordonnée de la droite HH' , on en déduira, par de simples soustractions, les distances Mp et Nq . La trajectoire étant sensiblement droite dans l'intervalle MN , on obtiendra l'abscisse OI du point i , où elle rencontre HH' , en ajoutant à l'abscisse OP du point M une quantité PI ou pi donnée par la relation

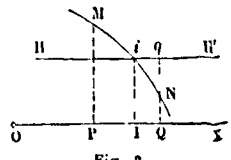


Fig. 3.

$$pi : pq = Mp : Mp + Nq, \text{ d'où } PI = PQ \cdot \frac{Mp}{Mp + Nq}$$

L'abscisse du point i étant ainsi connue, on aura l'inclinaison en i par la formule [21], la durée du trajet de M en i par la formule [22], la vitesse en i par la formule [23]. La durée totale du trajet sera la somme des durées partielles obtenues.

L'examen des trajectoires ainsi obtenues montre que, dans l'air, les deux branches de la courbe ne sont point symétriques; pour deux points ayant la même ordonnée, l'inclinaison est plus grande sur la branche descendante que sur la branche ascendante, et la branche descendante a une asymptote verticale SS (fig. 2). On reconnaît aussi que ce n'est pas au point le plus élevé de la courbe que correspond le minimum de vitesse. Par l'effet de la résistance de l'air, la vitesse continue à décroître pendant quelque temps après que le mobile a atteint le point culminant de la trajectoire, jusqu'à ce que, la pesanteur l'emportant sur la résistance, la vitesse recommence à croître.

On observe encore que, lorsqu'on fait varier l'angle de tir, ce n'est pas l'inclinaison de 45° qui donne le maximum de portée. Il est aisé de s'en rendre compte en remarquant que lorsque l'angle de tir s'élève au-dessus de 45°, la longueur de la trajectoire augmente, et que par cette raison la résistance a plus d'action pour diminuer la portée; lorsqu'au contraire l'angle de tir descend au-dessous de 45°, la longueur de la trajectoire diminue, la résistance de l'air a moins d'action sur la diminution de la portée; par conséquent l'angle de tir qui donne le maximum d'amplitude doit être au-dessous de 45°. C'est en effet entre 43° et 44°, mais plus près de 44°, que parait devoir être placé l'angle de plus grande portée.

Le calcul que nous venons d'indiquer est assez pénible; mais, dans la pratique, on a reconnu qu'il n'était pas nécessaire de multiplier beaucoup les divisions de la trajectoire. Dans les calculs relatifs au tir des bombes, par exemple, on se contente le

plus souvent de diviser la trajectoire en trois parties; si l'on tire sous l'angle de 45°, par exemple, on prendra pour le premier arc les limites + 45° et + 30°; pour le second, + 30° et - 30°; pour le troisième on partira de - 30°, mais il faudra aller un peu plus loin que - 45°, attendu que sur la branche descendante les inclinaisons augmentent rapidement à mesure que le projectile descend; on ira, par exemple, jusqu'à - 55°. On peut même, le plus souvent, embrasser dans un seul arc toute la trajectoire, en prenant pour σ sa valeur moyenne entre les limites dont nous venons de parler, ou entre des limites analogues. Il n'en résulte que de très-faibles différences pour la portée, pour l'inclinaison finale, et pour la durée du trajet.

Dans les calculs relatifs au tir des canons et des obusiers, on peut faire usage d'une autre simplification; elle consiste à remplacer simplement le rapport σ par l'unité, attendu que l'angle de tir est alors très-faible, puisqu'il atteint rarement 12°, et ne dépasse jamais 16°.

A l'aide des formules ci-dessus établies, on peut résoudre tous les problèmes de balistique que l'on rencontre dans les applications; mais les calculs sont naturellement un peu plus compliqués que dans le cas où l'on néglige la résistance de l'air.

1° Supposons, par exemple, que, *le but et l'angle de tir étant connus, on demande la vitesse initiale du projectile.*

On résoudra d'abord le problème sans avoir égard à la résistance de l'air; on se servira de la valeur obtenue pour la vitesse initiale comme d'une valeur approchée qui permettra de calculer ω_0 et par suite la fonction ψ , puisque x est donné. Cette fonction étant connue, on tirera de l'équation [20] la valeur de v_0 . — On pourra, si l'on veut, regarder cette valeur comme une nouvelle valeur plus approchée, qui permettra de calculer une valeur plus approchée de la fonction ψ , et de tirer ensuite de l'équation [20] une nouvelle valeur de v_0 ; mais le plus souvent le premier calcul suffira.

2° Supposons en second lieu que, *la vitesse initiale et le but étant connus, on demande l'angle de tir.*

Il faut remarquer alors que α entre implicitement dans ω , puisqu'on a

$$\omega_0 = \frac{\sigma}{r} v_0 \cos \alpha;$$

mais la différence entre la trajectoire dans le vide et la trajectoire dans l'air n'étant jamais très-considérable, on se servira de la première pour déterminer une valeur approximative de α , que l'on mettra dans ω_0 ; cette quantité étant connue, on connaîtra la fonction ψ ; et, à l'aide de l'équation [20], dans laquelle on aura remplacé $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ par $1 + \tan^2 \alpha$, on déterminera l'angle α . L'équation qui donne $\tan \alpha$ est

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h} \psi. (1 + \tan^2 \alpha).$$

Elle donne deux valeurs pour $\tan \alpha$; mais on ne devra prendre que celle qui correspond à la valeur approximative déduite de la trajectoire dans le vide. Si l'on veut obtenir une approximation plus grande, on regardera la valeur obtenue comme une première approximation, dont on se servira pour recommencer le calcul; mais, en général, la première valeur ainsi obtenue pourra être regardée comme suffisamment approchée.

3° Supposons encore que le projectile doive atteindre un but déterminé sous une inclinaison donnée, c'est-à-dire que, *connaissant le but et l'inclinaison de la trajectoire en ce point, on demande la vitesse initiale et l'angle de tir.*

On commencera par traiter le problème, comme nous l'avons indiqué plus haut, dans l'hypothèse où l'on néglige la résistance de l'air; on obtiendra pour v_0 et pour α des valeurs approchées, d'où l'on déduira une valeur approchée de ω_0 ; et comme x est connu, on en déduira la valeur des fonctions ψ et \mathcal{J} , au moyen des tables des valeurs numériques de ces fonctions. Éliminant alors $v_0 \cos \alpha$ entre les équations [20] et [21], où x , y et y' sont connus, on obtiendra

$$\tan \alpha = \frac{2 \mathcal{J} \cdot \tan \beta - \psi \cdot \tan i}{2 \mathcal{J} - \psi}. \quad [27]$$

Une fois α connu, on obtiendra v_0 au moyen de l'une des équations [20] ou [21]. On pourra, si l'on veut, ne considérer les valeurs obtenues pour α et v_0 par ce procédé, que comme des valeurs approchées dont on se servira pour calculer de nouvelles valeurs de ψ et \mathcal{J} , et recommencer le calcul.

4° Supposons enfin qu'on ait à résoudre ce problème : *Déterminer la vitesse initiale et l'angle de tir, de manière que le projectile passe par deux points donnés, dont les coordonnées sont x , y et x' , y' .*

On déterminera d'abord v_0 et α en négligeant la résistance de l'air; on pourra alors calculer les valeurs de la fonction ψ qui répondent à x et à x' ; désignons par ψ et par ψ' ces valeurs. En nommant β l'angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$ et β' l'angle dont la tangente est $\frac{y'}{x'}$, on aura, en vertu de l'équation [20]

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta &= \tan \alpha - \frac{g x}{4 h \cos^2 \alpha} \psi \\ \tan \beta' &= \tan \alpha - \frac{g x'}{4 h \cos^2 \alpha} \psi' \end{aligned} \right\} \quad [28]$$

Éliminant $h \cos^2 \alpha$ entre ces deux relations, on obtiendra

$$\tan \alpha = \frac{x' \psi' \tan \beta - x \psi \tan \beta'}{x' \psi' - x \psi}. \quad [29]$$

Une fois α connu, on obtiendra v_0 ou h au moyen de l'une des équations [28]. On pourra, si l'on veut, considérer les valeurs ainsi obtenues pour α et pour v_0 comme des valeurs approchées, dont on se servira pour obtenir de nouvelles valeurs de ψ et de ψ' , et recommencer le calcul.

Les tables des valeurs numériques des fonctions ψ , \mathcal{J} , \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' , à 4 décimales seraient trop étendues pour trouver place ici; on les trouvera dans le *Traité de Balistique* de M. le général Didion, p. 571 et suiv. Mais nous donnerons ici les tables à 3 décimales, insérées dans le même ouvrage, et qui suffiront pour les applications usuelles. Dans la table relative aux fonctions ψ et \mathcal{J} , les valeurs de $n x$ sont inscrites au haut de chaque colonne pour la fonction ψ , et au bas pour la fonction \mathcal{J} . Dans la table relative aux fonctions \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' , les valeurs de $n x$ sont également inscrites au haut de la page pour la fonction \mathcal{Q} , et au bas pour la fonction \mathcal{Q}' . On interpole par parties proportionnelles, comme dans les tables de logarithmes: seulement les différences ne sont pas calculées à l'avance.

I. — TABLE DES VALEURS NUMÉRIQUES DES FONCTIONS η , ET ζ . x p. η .

ω	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,00	1,017	1,034	1,052	1,070	1,089	1,108	1,128	1,148	1,169	1,190
0,05	1,018	1,036	1,055	1,074	1,093	1,114	1,134	1,156	1,177	1,200
0,10	1,019	1,038	1,057	1,077	1,098	1,119	1,141	1,163	1,186	1,210
0,15	1,020	1,039	1,060	1,081	1,103	1,125	1,148	1,171	1,195	1,220
0,20	1,020	1,041	1,063	1,085	1,107	1,130	1,154	1,179	1,205	1,231
0,25	1,021	1,043	1,065	1,088	1,112	1,136	1,161	1,187	1,214	1,241
0,30	1,022	1,045	1,068	1,092	1,117	1,142	1,168	1,195	1,223	1,252
0,35	1,023	1,046	1,071	1,096	1,121	1,148	1,175	1,203	1,232	1,262
0,40	1,024	1,048	1,073	1,099	1,126	1,153	1,182	1,211	1,241	1,273
0,45	1,025	1,050	1,076	1,103	1,131	1,159	1,189	1,219	1,251	1,283
0,50	1,025	1,052	1,079	1,107	1,135	1,165	1,196	1,227	1,260	1,294
0,55	1,026	1,053	1,082	1,110	1,140	1,171	1,203	1,235	1,269	1,303
0,60	1,027	1,055	1,084	1,114	1,145	1,176	1,209	1,244	1,279	1,315
0,65	1,028	1,057	1,087	1,118	1,149	1,182	1,216	1,252	1,288	1,326
0,70	1,029	1,059	1,090	1,122	1,154	1,188	1,224	1,260	1,298	1,337
0,75	1,030	1,060	1,092	1,125	1,159	1,194	1,231	1,268	1,308	1,348
0,80	1,031	1,062	1,095	1,129	1,164	1,200	1,238	1,277	1,317	1,359
0,85	1,031	1,064	1,098	1,133	1,169	1,206	1,245	1,285	1,327	1,370
0,90	1,032	1,066	1,101	1,137	1,173	1,212	1,252	1,294	1,337	1,382
0,95	1,033	1,067	1,103	1,141	1,178	1,218	1,259	1,302	1,346	1,393
1,00	1,034	1,069	1,106	1,144	1,183	1,224	1,266	1,310	1,356	1,404
1,05	1,035	1,071	1,109	1,148	1,188	1,230	1,273	1,319	1,366	1,415
1,10	1,036	1,073	1,112	1,151	1,193	1,236	1,281	1,328	1,376	1,427
1,15	1,037	1,075	1,114	1,155	1,198	1,242	1,288	1,336	1,386	1,438
1,20	1,037	1,076	1,117	1,159	1,203	1,248	1,295	1,345	1,396	1,450
1,25	1,038	1,078	1,120	1,163	1,207	1,254	1,303	1,353	1,406	1,461
1,30	1,039	1,080	1,123	1,167	1,212	1,260	1,310	1,362	1,416	1,473
ω	0,033	0,067	0,101	0,134	0,168	0,202	0,236	0,27	0,304	0,338
Correct. 0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

 x p. ζ .

Suite de la table I.

n x p. 1/5.

ω_0	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,00	1,212	1,234	1,257	1,281	1,305	1,330	1,355	1,382	1,409	1,437
0,05	1,223	1,247	1,271	1,296	1,322	1,348	1,375	1,403	1,432	1,461
0,10	1,234	1,259	1,285	1,311	1,339	1,366	1,395	1,425	1,455	1,486
0,15	1,246	1,272	1,299	1,327	1,356	1,385	1,415	1,447	1,479	1,512
0,20	1,258	1,285	1,314	1,343	1,373	1,404	1,436	1,469	1,503	1,538
0,25	1,269	1,298	1,328	1,359	1,390	1,423	1,457	1,491	1,527	1,563
0,30	1,281	1,311	1,343	1,375	1,408	1,442	1,477	1,514	1,551	1,590
0,35	1,293	1,325	1,357	1,391	1,425	1,461	1,499	1,536	1,576	1,616
0,40	1,305	1,338	1,372	1,407	1,443	1,481	1,520	1,559	1,601	1,643
0,45	1,317	1,351	1,387	1,423	1,461	1,500	1,541	1,583	1,626	1,670
0,50	1,329	1,365	1,402	1,440	1,479	1,520	1,563	1,608	1,651	1,697
0,55	1,341	1,378	1,417	1,457	1,498	1,540	1,584	1,630	1,677	1,725
0,60	1,353	1,392	1,432	1,473	1,516	1,560	1,606	1,654	1,703	1,753
0,65	1,365	1,406	1,447	1,490	1,535	1,581	1,629	1,678	1,729	1,781
0,70	1,378	1,420	1,463	1,507	1,553	1,601	1,651	1,702	1,755	1,810
0,75	1,390	1,433	1,478	1,524	1,572	1,622	1,674	1,727	1,782	1,839
0,80	1,403	1,447	1,494	1,542	1,591	1,643	1,696	1,751	1,809	1,868
0,85	1,415	1,462	1,509	1,559	1,610	1,664	1,719	1,776	1,836	1,897
0,90	1,428	1,476	1,525	1,577	1,630	1,685	1,743	1,802	1,863	1,927
0,95	1,440	1,490	1,541	1,594	1,649	1,706	1,766	1,827	1,891	1,957
1,00	1,453	1,504	1,557	1,612	1,669	1,728	1,789	1,853	1,919	1,987
1,05	1,466	1,519	1,573	1,630	1,688	1,749	1,813	1,879	1,947	2,017
1,10	1,479	1,533	1,590	1,648	1,708	1,771	1,837	1,905	1,975	2,048
1,15	1,492	1,548	1,606	1,728	1,728	1,793	1,861	1,931	2,004	2,079
1,20	1,505	1,563	1,623	1,684	1,749	1,816	1,886	1,958	2,033	2,111
1,25	1,518	1,578	1,639	1,703	1,769	1,838	1,910	1,985	2,062	2,142
1,30	1,531	1,593	1,656	1,721	1,790	1,860	1,935	2,012	2,091	2,174
ω_0	0,372	0,407	0,441	0,476	0,511	0,545	0,580	0,615	0,650	0,685
	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6

n x p. 3.

Suite de la table I.

π x p. 03.

ω ₀	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
0,00	1,465	1,494	1,523	1,556	1,588	1,621	1,654	1,689	1,725	1,762
0,05	1,492	1,523	1,555	1,588	1,622	1,657	1,693	1,730	1,768	1,808
0,10	1,519	1,552	1,586	1,621	1,657	1,694	1,732	1,772	1,812	1,854
0,15	1,546	1,581	1,620	1,654	1,692	1,732	1,772	1,814	1,857	1,902
0,20	1,573	1,610	1,649	1,688	1,728	1,770	1,813	1,857	1,903	1,950
0,25	1,601	1,640	1,681	1,722	1,765	1,809	1,854	1,901	1,949	1,999
0,30	1,629	1,670	1,713	1,757	1,802	1,848	1,896	1,945	1,996	2,049
0,35	1,658	1,701	1,746	1,792	1,839	1,888	1,938	1,990	2,044	2,100
0,40	1,687	1,732	1,779	1,827	1,877	1,928	1,981	2,036	2,093	2,151
0,45	1,716	1,763	1,812	1,863	1,915	1,969	2,025	2,083	2,142	2,203
0,50	1,745	1,795	1,846	1,899	1,954	2,011	2,069	2,129	2,192	2,256
0,55	1,775	1,827	1,881	1,936	1,993	2,053	2,114	2,177	2,242	2,310
0,60	1,805	1,859	1,915	1,973	2,033	2,095	2,159	2,225	2,293	2,364
0,65	1,836	1,892	1,950	2,011	2,073	2,138	2,205	2,274	2,345	2,419
0,70	1,866	1,925	1,986	2,049	2,114	2,182	2,251	2,323	2,398	2,475
0,75	1,897	1,958	2,021	2,088	2,155	2,226	2,298	2,373	2,451	2,532
0,80	1,929	1,992	2,058	2,127	2,197	2,270	2,346	2,424	2,505	2,589
0,85	1,960	2,026	2,095	2,166	2,239	2,315	2,394	2,475	2,560	2,648
0,90	1,992	2,061	2,132	2,206	2,282	2,361	2,443	2,527	2,616	2,707
0,95	2,025	2,096	2,169	2,246	2,325	2,407	2,492	2,580	2,672	2,766
1,00	2,057	2,131	2,207	2,287	2,369	2,454	2,542	2,633	2,728	2,827
1,05	2,090	2,167	2,246	2,328	2,413	2,501	2,593	2,687	2,786	2,888
1,10	2,124	2,203	2,284	2,370	2,458	2,549	2,644	2,742	2,844	2,950
1,15	2,157	2,240	2,323	2,412	2,503	2,597	2,695	2,797	2,903	3,013
1,20	2,191	2,276	2,363	2,454	2,548	2,646	2,748	2,853	2,963	3,076
1,25	2,225	2,313	2,403	2,497	2,594	2,696	2,801	2,909	3,023	3,141
1,30	2,260	2,350	2,443	2,540	2,641	2,746	2,854	2,966	3,084	3,206
ω ₀	0,721	0,756	0,792	0,827	0,863	0,899	0,934	0,970	1,006	1,043
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15

π x p. 3.

Suite de la table I.

n x p. 95.

ω_0	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
0,00	1,799	1,838	1,878	1,920	1,962	2,006	2,051	2,097	2,145	2,194
0,05	1,848	1,890	1,933	1,977	2,022	2,069	2,117	2,167	2,218	2,271
0,10	1,897	1,942	1,988	2,035	2,083	2,133	2,185	2,238	2,293	2,349
0,15	1,948	1,995	2,044	2,094	2,145	2,199	2,254	2,310	2,369	2,429
0,20	1,999	2,049	2,101	2,154	2,209	2,265	2,324	2,384	2,446	2,511
0,25	2,051	2,104	2,158	2,215	2,273	2,333	2,395	2,459	2,525	2,594
0,30	2,103	2,159	2,217	2,277	2,339	2,402	2,468	2,536	2,606	2,678
0,35	2,157	2,216	2,277	2,340	2,405	2,473	2,542	2,614	2,688	2,765
0,40	2,211	2,274	2,339	2,405	2,473	2,544	2,617	2,693	2,771	2,852
0,45	2,267	2,332	2,400	2,470	2,542	2,617	2,694	2,774	2,857	2,942
0,50	2,323	2,391	2,463	2,536	2,612	2,691	2,772	2,856	2,943	3,033
0,55	2,380	2,452	2,526	2,604	2,683	2,766	2,851	2,940	3,031	3,126
0,60	2,437	2,513	2,591	2,672	2,756	2,842	2,932	3,025	3,121	3,220
0,65	2,496	2,575	2,657	2,742	2,829	2,920	3,014	3,111	3,212	3,316
0,70	2,555	2,638	2,723	2,812	2,904	2,999	3,097	3,199	3,304	3,413
0,75	2,615	2,702	2,791	2,884	2,979	3,079	3,181	3,288	3,398	3,512
0,80	2,676	2,766	2,860	2,956	3,056	3,160	3,267	3,379	3,494	3,613
0,85	2,738	2,832	2,929	3,030	3,134	3,242	3,354	3,471	3,591	3,715
0,90	2,801	2,898	3,000	3,105	3,213	3,326	3,443	3,564	3,689	3,819
0,95	2,864	2,963	3,071	3,180	3,293	3,411	3,532	3,659	3,790	3,925
1,00	2,928	3,034	3,144	3,257	3,375	3,497	3,623	3,755	3,891	4,032
1,05	2,993	3,103	3,117	3,335	3,457	3,584	3,716	3,852	3,994	4,141
1,10	3,059	3,173	3,291	3,414	3,541	3,673	3,809	3,951	4,099	4,251
1,15	3,126	3,244	3,367	3,494	3,625	3,762	3,904	4,052	4,205	4,363
1,20	3,194	3,316	3,443	3,575	3,711	3,853	4,000	4,153	4,312	4,477
1,25	3,262	3,389	3,520	3,657	3,798	3,945	4,098	4,257	4,421	4,592
1,30	3,331	3,463	3,599	3,740	3,886	4,039	4,197	4,361	4,532	4,708
ω_0	1,079	1,115	1,152	1,188	1,225	1,261	1,298	1,335	1,372	1,409
	17	18	19	21	22	24	25	27	29	31

n x p. 5.

Les chiffres placés au bas de chaque colonne expriment des unités du troisième ordre décimal; ils représentent un coefficient de correction relatif au cas où c'est la fonction \mathfrak{J} que l'on cherche; on en fait usage de la manière suivante: on détermine d'abord la valeur approchée de \mathfrak{J} , par interpolation s'il est nécessaire, et sans avoir égard au coefficient de correction; on multiplie ensuite ce coefficient par l'expression $\omega_0(1 + \omega_0)$ et on retranche le produit de la valeur approchée qu'on avait obtenue.

II. — TABLE DES VALEURS NUMÉRIQUES DES FONCTIONS \textcircled{O} ET \textcircled{Q} .n x p. \textcircled{Q} .

ω_0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,00	1,051	1,105	1,162	1,221	1,284	1,350	1,419	1,492	1,568	1,649
0,05	1,054	1,110	1,170	1,233	1,298	1,367	1,440	1,516	1,597	1,681
0,10	1,056	1,116	1,178	1,244	-1,312	1,385	1,461	1,541	1,625	1,714
0,15	1,059	1,121	1,186	1,255	1,327	1,402	1,482	1,566	1,654	1,746
0,20	1,062	1,126	1,194	1,266	1,341	1,420	1,503	1,590	1,682	1,779
0,25	1,064	1,132	1,202	1,277	1,355	1,437	1,524	1,615	1,710	1,811
0,30	1,067	1,137	1,210	1,288	1,369	1,455	1,545	1,639	1,739	1,843
0,35	1,069	1,142	1,219	1,299	1,383	1,472	1,566	1,664	1,767	1,876
0,40	1,072	1,147	1,227	1,310	1,398	1,490	1,587	1,689	1,796	1,908
0,45	1,074	1,153	1,235	1,321	1,412	1,507	1,608	1,713	1,824	1,941
0,50	1,077	1,158	1,243	1,332	1,426	1,525	1,629	1,738	1,853	1,973
0,55	1,080	1,163	1,251	1,343	1,440	1,542	1,650	1,762	1,881	2,006
0,60	1,082	1,168	1,259	1,354	1,454	1,560	1,671	1,787	1,909	2,038
0,65	1,085	1,174	1,267	1,365	1,469	1,577	1,692	1,812	1,938	2,070
0,70	1,087	1,179	1,275	1,376	1,483	1,595	1,712	1,836	1,966	2,103
0,75	1,090	1,184	1,283	1,388	1,497	1,612	1,733	1,861	1,995	2,135
0,80	1,092	1,189	1,291	1,399	1,511	1,630	1,754	1,885	2,023	2,168
0,85	1,095	1,195	1,299	1,410	1,525	1,647	1,775	1,910	2,051	2,200
0,90	1,097	1,200	1,308	1,421	1,540	1,665	1,796	1,935	2,080	2,233
0,95	1,100	1,205	1,316	1,432	1,554	1,682	1,817	1,959	2,108	2,265
1,00	1,103	1,210	1,324	1,443	1,568	1,700	1,838	1,984	2,137	2,297
1,05	1,105	1,216	1,332	1,454	1,582	1,717	1,859	2,008	2,163	2,330
1,10	1,108	1,221	1,340	1,465	1,597	1,735	1,880	2,033	2,194	2,362
1,15	1,110	1,226	1,348	1,476	1,611	1,752	1,901	2,057	2,222	2,395
1,20	1,113	1,231	1,356	1,487	1,625	1,770	1,922	2,082	2,250	2,427
1,25	1,115	1,237	1,364	1,498	1,639	1,787	1,943	2,107	2,279	2,460
1,30	1,118	1,242	1,372	1,509	1,653	1,805	1,964	2,131	2,307	2,492
ω_0	0,198	0,393	0,586	0,776	0,962	1,145	1,327	1,506	1,683	1,857

n x p. \textcircled{O} .

Suite de la table II.

n x p. ∅.

ω_0	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
0,00	1,733	1,822	1,916	2,014	2,117	2,226	2,340	2,460	2,586	2,718
0,05	1,770	1,863	1,961	2,064	2,173	2,287	2,407	2,533	2,665	2,804
0,10	1,807	1,904	2,007	2,115	2,229	2,348	2,474	2,606	2,744	2,890
0,15	1,843	1,945	2,053	2,166	2,285	2,409	2,541	2,679	2,824	2,976
0,20	1,880	1,987	2,099	2,217	2,340	2,471	2,608	2,752	2,903	3,062
0,25	1,917	2,028	2,144	2,267	2,396	2,532	2,675	2,825	2,982	3,148
0,30	1,953	2,069	2,190	2,318	2,452	2,593	2,742	2,898	3,061	3,234
0,35	1,990	2,110	2,236	2,369	2,508	2,655	2,809	2,971	3,141	3,320
0,40	2,017	2,151	2,282	2,419	2,564	2,716	2,876	3,043	3,220	3,406
0,45	2,063	2,192	2,328	2,470	2,620	2,777	2,943	3,116	3,299	3,492
0,50	2,100	2,233	2,373	2,521	2,676	2,838	3,010	3,189	3,379	3,577
0,55	2,137	2,274	2,419	2,571	2,731	2,900	3,077	3,262	3,458	3,663
0,60	2,173	2,315	2,465	2,622	2,787	2,961	3,143	3,335	3,537	3,749
0,65	2,210	2,357	2,511	2,673	2,843	3,022	3,210	3,408	3,616	3,835
0,70	2,247	2,398	2,556	2,723	2,899	3,083	3,277	3,481	3,696	3,921
0,75	2,283	2,439	2,602	2,774	2,955	3,145	3,344	3,554	3,775	4,007
0,80	2,320	2,480	2,648	2,825	3,011	3,206	3,411	3,627	3,854	4,093
0,85	2,357	2,521	2,694	2,875	3,066	3,267	3,478	3,700	3,933	4,179
0,90	2,393	2,562	2,740	2,926	3,122	3,329	3,545	3,773	4,013	4,265
0,95	2,430	2,603	2,785	2,977	3,178	3,390	3,612	3,846	4,052	4,351
1,00	2,467	2,644	2,831	3,028	3,234	3,451	3,679	3,919	4,171	4,437
1,05	2,503	2,685	2,877	3,078	3,290	3,512	3,746	3,992	4,251	4,523
1,10	2,540	2,726	2,923	3,129	3,346	3,574	3,813	4,065	4,330	4,608
1,15	2,577	2,768	2,968	3,180	3,402	3,635	3,880	4,138	4,490	4,694
1,20	2,613	2,809	3,014	3,230	3,457	3,696	3,947	4,211	4,489	4,780
1,25	2,650	2,850	3,060	3,281	3,513	3,758	4,014	4,284	4,568	4,866
1,30	2,687	2,891	2,106	3,322	3,569	3,819	4,081	4,357	4,647	4,952
ω_0	2,030	2,200	2,369	2,536	2,701	2,864	3,026	3,186	3,344	3,502

n x p. (D).

Afin de donner des exemples de l'emploi de ces tables, nous calculerons d'abord la vitesse initiale du globe du *MORTIER-ÉPROUVETTE* (V. ce mot). On sait que ce globe (dans les modèles antérieurs à 1842) est une sphère de bronze de 0^m,1895 de diamètre, pesant 29^{kg},37; l'angle constant du tir est 45°; et la portée minimum, pour les poudres neuves, doit être de 223^m; nous adopterons cette valeur. On a, dans le cas qui nous occupe, d'abord

$$A = 0,027, \frac{1}{r} = 0,0023; \text{ ensuite } R = 0^m,09475; P = 29^k,37;$$

par suite

$$k = \frac{g \Lambda \cdot \pi R^2}{P} = \frac{9,81 \cdot 0,027 \cdot 3,1416 \cdot (0,09475)^2}{29,37} = 0,000254.$$

Le tir se faisant à 45°, on prendra la valeur de σ qui correspond à cette limite, c'est-à-dire $\sigma = 1,1478$; d'où $n = k\sigma = 0,00029$; et $n\alpha = n \cdot 225 = 0,065$.

On aura ensuite $\frac{\sigma}{r} = 1,1478 \cdot 0,0023 = 0,00264$. Si

l'on traite le problème proposé en faisant abstraction de la résistance de l'air, on trouve $v_0 = 46^m,978$. D'ailleurs $\alpha = 45^\circ$; $\cos \alpha = 0,7071$; par conséquent

$$\omega_0 = \frac{\sigma}{r} v_0 \cos \alpha = 0,0875; \text{ et } \omega_0 (1 + \omega_0) = 0,0951.$$

Entrant dans la table I avec $n\alpha = 0,065$ et $\omega_0 = 0,0875$, on trouve par interpolation $\eta\beta = 1,024$. La même table donne $\delta = 1,0375$ (la correction est nulle dans ce cas). La table II donne $\mathcal{Q} = 1,0555$ et $\mathcal{V} = 1,0555$. Dès lors l'équation [20], dans laquelle on fait $y = 0$ et $x = 225$, donne $v_0 = 47^m,539$. Cette valeur diffère très-peu de la première, il n'y a pas lieu de recourir à une nouvelle approximation. L'équation [21] donne ensuite $i = 45^\circ 44' 37''$; l'équation [22] donne $t = 7^m,06$; et l'équation [23] donne $v = 45^m,635$.

Comme second exemple, nous chercherons sous quelle inclinaison il faut tirer l'obusier de 22^{cm}, avec une charge de 3^k,50 qui donne une vitesse de 375^m, pour obtenir une portée de 2000^m. On a, dans ce cas, $P = 26^k,5$; $R = 0^m,11$; par conséquent $K = 0,00038$. Si l'on résout le problème en négligeant la résistance de l'air, on trouve $\alpha = 4^\circ 0' 40''$ environ (il est inutile de pousser très-loin l'approximation); on prendra donc la valeur de σ qui répond à la limite de 5°, c'est-à-dire $\sigma = 1,0013$, ou simplement 1. Il en résulte $n = k\sigma = 0,00038$; $n\alpha = n \cdot 2000 = 0,76$. On a ensuite $v_0 \cos \alpha = 374^m,08$;

$$\text{par suite } \omega_0 = \frac{\sigma}{r} v_0 \cos \alpha = 0,0023 \cdot 374,08 = 0,86.$$

Entrant dans la table I avec les valeurs $n\alpha = 0,76$ et $\omega_0 = 0,86$, on trouve par interpolation $\eta\beta = 1,625$; la même table donne, en considérant les valeurs de $n\alpha$ inscrites au bas des colonnes, la valeur 2,110 pour δ ; mais le coefficient de correction étant 0,007, il faut de cette valeur retrancher $\omega_0 (1 + \omega_0) \cdot 0,007$ ou 0,0112, ce qui donne $\delta = 2,0988$. La table II donne $\mathcal{Q} = 1,4028$ et $\mathcal{V} = 1,8607$. Dès lors on tire de la formule [20], mise sous la forme,

$$\text{tang}^2 \alpha - 2 \cdot \frac{v_0^2}{xy \eta\beta} \cdot \text{tang} \alpha + 1 = 0,$$

en y remplaçant v_0 , x , y , et $\eta\beta$ par leurs valeurs, $\text{tang} \alpha = 0,1198$, d'où $\alpha = 6^\circ 49' 53''$.

La formule [21] donne ensuite $180^\circ - i = 10^\circ 2' 52''$,6; la formule [22] donne $t = 7^m,53$; et la for-

mule [23] donne $v = 203^m,22$. Une deuxième approximation donnerait pour α , i , t et v des valeurs très-peu différentes.

III. Nous n'entrerons ici dans aucuns détails relatifs à l'hypothèse où la résistance de l'air serait proportionnelle au carré de la vitesse, quoique la plupart des géomètres qui se sont occupés de balistique se soient servis de cette hypothèse. Leurs travaux se rapportent beaucoup plus, en effet, aux mathématiques pures qu'aux mathématiques appliquées, et se recommandent bien plus par les efforts qu'ont faits les analystes pour intégrer les formules différentielles du mouvement que par le parti qu'ils ont tiré de leurs méthodes pour la solution pratique du problème. On trouvera dans le *Traité de Balistique* de M. Didion une analyse intéressante de ces travaux, et particulièrement de ceux de Français, travaux ingénieux et peu connus. On y trouvera aussi la liste des principaux ouvrages à consulter sur la matière; nous croyons devoir la reproduire ici :

La balistique de Nicolas *Tartaglia*, publiée en 1537 sous le titre : *la Science nouvelle*; traduite par Rieffel, 1845 et 1846;

Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air, ou dans un fluide quelconque, par *Euler* (Histoire de l'Académie royale des sciences de Berlin, 1753);

Mémoire sur la résistance des fluides avec la solution du problème balistique, par *Lambert* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1767);

Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes, en ayant égard à la résistance de l'air, par *Borda* (Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1769);

Cours de mathématiques de *Bezout*, à l'usage du corps royal de l'artillerie, 1788;

Dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Prusse pour le prix de 1782, par *Legendre*;

Mémoire sur le problème balistique, etc., par *Tempelhof* (Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 1788 et 1789);

Traité du mouvement des projectiles, etc., par *J. L. Lombard*, 1796;

Mémoire sur la théorie du mouvement des projectiles dans les milieux résistants, par le capitaine *Moreau* (Journal de l'École polytechnique, 11^e cahier, 1802);

Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants, par *F. Français*, an XIII (manuscrit appartenant à la bibliothèque de l'École d'application de Metz, mais dont copie a été adressée à l'Institut de France);

Balistique, etc., par *Obenheim* (Strasbourg, 1814);

Traité de mécanique de *Poisson*;

Cours de balistique de *M. Persy*, 1833;

Note sur la formule employée par *Lombard*, etc., par *M. Belencontre* (Aide-mémoire d'artillerie, 1844);

Formules balistiques et tables de tir, par *M. Chiniac* (Aide-mémoire d'artillerie, 1844);

Tables balistiques générales et théorie mathématique du tir à ricochet, par *Otto*, traduit de l'allemand par Rieffel (inséré au Journal des armes spéciales, 1844).

Mémoire sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie, par le comte de *Græwenitz* (Journal des armes suédoises, 1844);

Du mouvement des projectiles dans les milieux résistants, par *Paoli di San Roberto*; Turin, 1855.

IV. Indépendamment du problème général auquel répondent les formules précédemment établies, la balistique embrasse plusieurs questions particulières, qui sont l'objet d'articles spéciaux. *Voyez*: PENDULE BALISTIQUE, CANON-PENDULE, DÉVIATION DES PROJECTILES, DÉRIVATION, TRAJECTOIRES (Tracé des), POINTAGE, TABLES DE TIR, PROBABILITÉ DU TIR, ARMES RAYÉES, PÉNÉTRATION DES PROJECTILES.

BALISTIQUE INTÉRIEURE, partie de la BALISTIQUE (*Voy. ce mot*) qui traite du mouvement du projectile dans l'âme de la pièce; elle a pour objet principal la recherche des relations qui lient la charge avec la vitesse imprimée au projectile au sortir de l'âme, laquelle est la *vitesse de projection* ou la *vitesse initiale* du tir.

Dans la balistique intérieure, on étudie aussi la charge au point de vue de ses effets destructeurs sur l'âme de la pièce. La détermination du mouvement d'un boulet dans l'âme d'une pièce d'artillerie est un problème très-difficile, qui a occupé les géomètres les plus éminents. Daniel Bernoulli est le premier qui ait tenté de résoudre la question, à la suite de la X^e section de son *Hydrodynamique* (1738); mais il néglige la masse des gaz de la poudre, ne tient point compte du recul de la pièce, et suppose la force élastique des gaz proportionnelle à leur densité. Robins, dans les *Nouveaux principes d'artillerie* (1742), s'est occupé de la même question, en faisant les mêmes hypothèses. C'est Euler qui, dans ses *Remarques* sur l'ouvrage de Robins (1745), a reconnu qu'il fallait tenir compte de la masse des gaz, et que leur densité n'était pas uniforme dans toute l'étendue de l'âme; mais il renonce à introduire cette circonstance dans les calculs, et se contente de supposer que la moitié de la masse gazeuse est chassée avec le boulet, et que l'autre reste au fond du canon. Lagrange fit en 1793, à la demande du gouvernement, des *Recherches sur la force de la poudre*, dans lesquelles il attaque la question à un point de vue beaucoup plus général; il suppose seulement que les gaz sont formés avant l'origine du mouvement, et que leur tension, uniforme dans toute l'étendue de l'âme, peut être représentée par une puissance constante de la densité; mais, mécontent des résultats de son analyse, il ne donna aucune suite à son travail, qui ne fut mis au jour qu'en 1832 par Poisson. Ce savant géomètre essaya de rectifier une des formules de Lagrange, mais reconnut bientôt qu'il avait lui-même commis une erreur. Enfin, en 1860, M. Piobert a fait faire un nouveau pas à la question, en tenant compte de l'inégale distribution de la densité des gaz dans l'âme de la pièce; mais il reste encore à tenir compte de plusieurs circonstances, qui ont été négligées, et particulièrement de la formation successive des gaz pendant la déflagration.

I. Lorsqu'on suppose la densité des gaz uniforme dans tout l'espace qu'ils occupent à un même instant, la solution du problème n'offre pas de difficulté; soient m , M , μ les masses respectives du boulet, de la pièce avec son affût, et de la charge; soient v et V les vitesses absolues du projectile et

du canon. La masse gazeuse étant uniformément répartie dans l'espace qu'elle occupe, son centre de gravité aura une vitesse qui sera la moyenne arithmétique entre la vitesse v et $-V$ de ses extrémités, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(v - V)$ dans le sens du boulet. Si donc

on applique le principe sur le MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ (*Voy. ce mot*), comme le centre de gravité du système total était primitivement en repos, et qu'il doit rester immobile puisqu'il ne s'est développé que des forces intérieures mutuelles, la somme algébrique des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (*Voy. ce mot*) sera nulle, et l'on aura

$$mv - MV + \frac{1}{2} \mu (v - V) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad v = \frac{M + \frac{1}{2} \mu}{m + \frac{1}{2} \mu}. \quad [1]$$

Les vitesses des deux mobiles resteront ainsi dans un rapport constant.

Il est facile de reconnaître que, parmi les tranches de gaz, il y en a une qui demeure immobile pendant toute la durée du mouvement. Soit, en effet, AB (fig. 1) l'axe de la pièce, A la position du

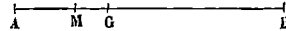


Fig. 1.

fond de l'âme, B celle du boulet, G le centre de gravité de tout le système, et M la position d'une tranche quelconque; pendant le déplacement des points A et B , les distances MA et MB demeureront proportionnelles; soit K leur rapport; faisons $MG = x$, $AG = \alpha$, $BG = \beta$; nous aurons :

$$\frac{\alpha - x}{\beta + x} = K, \quad \text{d'où} \quad (K + 1)x = \alpha - K\beta,$$

et par conséquent :

$$(K + 1) \frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - K \frac{d\beta}{dt}.$$

$$\text{Or} \quad \frac{d\beta}{dt} = v \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dt} = V,$$

$$\text{on aura donc} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{V - Kv}{K + 1},$$

et l'on voit que cette vitesse sera constamment nulle si l'on a $K = \frac{V}{v}$, c'est-à-dire que la tranche im-

mobile divise la longueur AB en parties proportionnelles aux vitesses des deux mobiles. Cette tranche est ordinairement très-voisine du fond de l'âme. Elle partage la masse μ de la charge en deux portions μ' et μ'' proportionnelles aux distances MB et MA , c'est-à-dire à v et à V ; on aura donc

$$\mu' = \mu \frac{v}{V + v} \quad \text{et} \quad \mu'' = \mu \frac{V}{V + v}.$$

Il est clair en outre que la vitesse d'une tranche quelconque est proportionnelle à sa distance à la tranche en repos.

Cela posé, on obtient une seconde relation entre les vitesses v et V en appliquant le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (*Voy. ce mot*). La puissance vive du boulet est $\frac{1}{2} m v^2$, celle de la pièce avec son affût

est $\frac{1}{2} M V^2$; il faut calculer celle de la masse gazeuse.

Soit u la vitesse d'une tranche située à la distance

z de la tranche immobile, et soit Z la distance du boulet à la tranche en repos; d'après la remarque ci-dessus on aura :

$$u = v \cdot \frac{z}{Z}.$$

Si a désigne la section de l'âme, et δ la densité des gaz, la puissance vive de la tranche considérée sera donc

$$\frac{1}{2} \delta a dx \cdot \frac{v^2 z^2}{Z^2},$$

$\int_0^Z \frac{1}{2} \delta a \frac{v^2}{Z^2} z^2 dz = \frac{1}{6} \delta a v^2 Z = \frac{1}{6} \mu' v^2 = \frac{1}{6} \mu \frac{v^3}{V+v}$
et la puissance vive de la masse μ' sera exprimée par

On trouvera de même pour la puissance vive de la masse μ'' :

$$\frac{1}{6} \mu \frac{V^3}{V+v}.$$

La puissance vive totale est donc

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{6} \mu \frac{v^3 + V^3}{v + V},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{3} \mu \right) v^2 + \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} \mu \right) V^2 - \frac{1}{6} \mu v v.$$

Il reste à évaluer maintenant le travail de la détente des gaz. Soit λ la longueur primitive de la charge, et l la longueur de la portion de l'âme que les gaz développés occupent à l'instant considéré; soit D le rapport du poids de la charge au poids de la quantité d'eau que contiendrait le volume de l'âme occupé primitivement par cette charge, la densité actuelle des gaz est

$$\delta = D \cdot \frac{\lambda}{l}.$$

Si l'on admet que la tension des gaz soit proportionnelle à la puissance n de la densité, on aura, en appelant K un coefficient numérique, et \mathcal{Q} la tension par unité de surface,

$$\mathcal{Q} = K \cdot \frac{D^n \lambda^n}{l^n}.$$

En appelant toujours a la section de l'âme, on aura pour l'expression du travail cherché

$$\int_{\lambda}^l a \mathcal{Q} dl = a K D^n \lambda^n \int_{\lambda}^l \frac{dl}{l^n} = \frac{a K D^n \lambda^n}{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^{n-1}} - \frac{1}{l^{n-1}} \right).$$

L'équation de l'effet du travail sera donc

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{3} \mu \right) v^2 + \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} \mu \right) V^2 - \frac{1}{6} \mu v v = \frac{a K D^n \lambda^n}{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^{n-1}} - \frac{1}{l^{n-1}} \right). \quad [2]$$

Les équations [1] et [2] résolvent le problème et donnent les vitesses v et V à un instant quelconque. On aura la vitesse du projectile au sortir de l'âme de la pièce en remplaçant l par la longueur L de l'âme.

D'après la définition de D , on a :

$$D = \frac{g \mu}{1000 \cdot a \lambda};$$

quant aux quantités K et n , on peut, dans les cas les plus ordinaires, faire $K = 10000^n$, et $n = 2$. Si l'on prenait $n = 1$, il faudrait remplacer le second membre de l'équation [2] par $a K D \lambda \log \frac{l}{\lambda}$.

II. M. Piobert a introduit dans la question la considération d'une densité variable d'une tranche à l'autre, qu'Euler avait indiquée, mais dont il n'avait pas fait usage; il a fait voir en outre qu'on

peut diviser le problème en deux problèmes identiques, l'un relatif au mouvement du projectile et l'autre au mouvement de la pièce. Il a appliqué sa méthode de solution à diverses hypothèses sur la loi qui lie les tensions aux densités, et sur la loi de décroissement des densités elles-mêmes. Les calculs sont trop longs et trop compliqués pour qu'ils puissent trouver place dans cet article; mais nous donnerons une idée de la méthode, en adoptant les hypothèses auxquelles M. Piobert a accordé la préférence.

Il remarque d'abord que la densité des gaz doit varier d'une tranche à l'autre; car la tranche en contact avec le projectile pousse le projectile devant elle, et doit avoir une tension suffisante; la tranche qui suit doit pousser le projectile et la première tranche; elle doit donc avoir une tension et par suite une densité un peu supérieure; la troisième tranche doit pousser les deux premières et le projectile; il faut donc qu'elle ait une tension, et par conséquent une densité un peu plus grande encore. La pression et la densité vont donc en augmentant ainsi à mesure que la tranche considérée s'éloigne du boulet. Mais ce qu'on vient de dire pour le projectile, on peut le dire pour la pièce; ainsi la densité et la pression augmentent aussi à partir du fond de l'âme. En sorte qu'il existe une certaine tranche où la densité est maximum, et à partir de laquelle la densité va en diminuant soit en allant du côté du boulet, soit en allant du côté du fond de l'âme. Ce mode de distribution des densités subsiste pendant toute la durée du mouvement; la tranche où la tension est maximum demeure immobile, parce qu'elle est également pressée en avant et en arrière; et toutes les autres ont des vitesses proportionnelles à leur distance à la tranche immobile, puisque le système n'a fait que se dilater en longueur, en conservant le même mode de distribution. On voit alors que les choses se passent comme si, au point où se trouve la tranche de tension maximum, se trouvait une cloison immobile partageant la masse gazeuse en deux parties, l'une μ' entre la cloison et le boulet, l'autre μ'' entre cette même cloison et le fond de l'âme. On peut donc diviser le problème en deux : considérer d'une part le mouvement des masses μ' et m , de l'autre celui des masses μ'' et M ; les calculs devant nécessairement être les mêmes dans les deux cas, la solution de l'un des problèmes donnera celle de l'autre; et il ne restera qu'à exprimer qu'au point où se trouve la cloison fictive la densité ou la tension sont les mêmes.

Il est naturel de prendre pour origine des espaces la position (pour le moment inconnue) de la tranche immobile. D'après le mode constant de distribution des densités, la distance d'une tranche à l'origine, sa vitesse et son accélération varient proportionnellement. La tension de chaque tranche doit être proportionnelle à la masse qu'elle a à faire mouvoir, et à l'accélération qu'elle lui imprime; mais, d'après ce qu'on vient de dire, on peut substituer les vitesses aux accélérations, et dire que la tension de chaque tranche est proportionnelle au produit de la masse à mouvoir par la vitesse dont elle est animée. Près du boulet, la tension est donc proportionnelle à mv . Près de la cloison, la tension est proportionnelle à $mv + \mu'v$, u désignant la

vitesse du centre de gravité de la masse μ' . Si α est la distance du boulet à la tranche immobile, la distance du centre de gravité de la masse μ' à cette même tranche pourra être représentée par $\epsilon\alpha$, ϵ étant un coefficient à déterminer, et la vitesse de ce centre de gravité pourra être représentée par ϵv , puisque v est celle du boulet. La tension maximum et la tension minimum seront donc proportionnelles aux quantités $m v + \mu' \epsilon v$ et $m v$, ou aux quantités $m + \epsilon \mu'$ et m .

On peut remarquer que la différence entre ces tensions extrêmes ne peut jamais être considérable, car la tension allant en diminuant du côté du boulet, le centre de gravité de la masse μ' est plus près de la cloison fictive que du boulet : ainsi ϵ est moindre que $\frac{1}{2}$; d'ailleurs μ' dépasse rarement

$\frac{1}{3} m$; par conséquent la tension maximum ne dépassera en général la tension minimum que d'une quantité inférieure au sixième de cette tension minimum.

M. Piobert admet que la loi de décroissement de la tension peut être représentée par l'ordonnée d'une parabole dont le sommet serait sur la cloison fictive; et il pose en conséquence

$$P = K \left[m + \epsilon \mu' \left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2} \right) \right], \quad [3]$$

z représentant la distance de la tranche dont la tension est P à l'origine, ou à la cloison. Il admet en outre, après plusieurs autres hypothèses, que la tension est proportionnelle au carré de la densité. Les densités maximum et minimum sont alors proportionnelles à $\sqrt{m + \epsilon \mu'}$ et à \sqrt{m} ; on peut donc poser, en désignant par δ la densité,

$$\delta = K' \left[\sqrt{m + \epsilon \mu'} - \left(\sqrt{m + \epsilon \mu'} - \sqrt{m} \right) \frac{z^2}{\alpha^2} \right], \quad [4]$$

formule qui donne $\delta = K' \sqrt{m + \epsilon \mu'}$ pour $z=0$, c'est-à-dire à la cloison, et $\delta = K' \sqrt{m}$ pour $z=\alpha$, c'est-à-dire près du boulet. On détermine le coefficient K' par la condition que la masse gazeuse considérée soit égale à μ' . On doit avoir

$$\int_0^\alpha a \delta dz = \alpha D \alpha_0,$$

en appelant α_0 la valeur primitive de α . Supprimant le facteur a , mettant pour δ sa valeur et intégrant, on obtient

$$K' = \frac{D \alpha_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{m + \epsilon \mu'} - \frac{1}{3} (\sqrt{m + \epsilon \mu'} - \sqrt{m})}. \quad [5]$$

Pour déterminer ϵ , on cherche le centre de gravité de la masse μ' , et l'on exprime que la distance de ce point à la cloison fictive est égale à $\epsilon \alpha$. Pour cela on prend les moments des différentes tranches par rapport à l'origine, et on égale la somme au moment de la masse totale μ' . On déduit de ce calcul

$$\epsilon = \frac{3 \sqrt{m + \epsilon \mu'} + 3 \sqrt{m}}{8 \sqrt{m + \epsilon \mu'} + 4 \sqrt{m}}, \quad [6]$$

relation qui permettra de calculer ϵ , lorsque μ' sera connu.

Des considérations et des calculs semblables s'appliquent à la masse μ'' située du côté de la pièce.

On aura pour la tension, que nous appellerons Q_1 ,

$$Q_1 = K'' \left[M + \epsilon_1 \mu'' \left(1 - \frac{z_1^2}{\beta^2} \right) \right], \quad [7]$$

en appelant ϵ_1 , z_1 et β les quantités analogues à ϵ , z et α . Le coefficient K'' se déterminera comme le coefficient K' . On aura ensuite pour déterminer ϵ_1 la relation

$$\epsilon_1 = \frac{3 \sqrt{M + \epsilon_1 \mu''} + 3 \sqrt{M}}{8 \sqrt{M + \epsilon_1 \mu''} + 4 \sqrt{M}}. \quad [8]$$

La tension devant être la même dans la tranche considérée comme cloison fictive, les équations [3] et [7] devront donner la même valeur pour P et pour Q_1 quand on y fera $z=0$ et $z_1=0$; on trouve ainsi

$$K' (m + \epsilon \mu') = K'' (M + \epsilon_1 \mu''). \quad [9]$$

Enfin on a $\mu' + \mu'' = \mu$. [10]

Les équations [6], [8], [9] et [10] donneront les valeurs des quatre inconnues ϵ , ϵ_1 , μ' et μ'' , au moyen d'approximations successives. Dans les circonstances ordinaires, ϵ diffère peu de 0,4875, et μ' ne s'éloigne pas sensiblement de 0,70 μ .

Les valeurs de ϵ et de μ' une fois déterminées, on se sert du principe de l'effet du travail pour déterminer la vitesse v du projectile. Dans l'hypothèse que nous avons admise sur la loi qui lie la tension à la densité, on trouve

$$\frac{1}{2} \cdot m + \left(\frac{1}{3} \mu' \right) v^2 = \alpha K' D \alpha_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha} \right). \quad [11]$$

Une équation semblable donnera la vitesse V . L'équation tirée du principe sur le mouvement du centre de gravité, laquelle est ici

$$(m + \epsilon \mu') v = (M + \epsilon_1 \mu'') V, \quad [12]$$

servira de vérification.

Nous renvoyons pour de plus amples détails au mémoire de M. Piobert, faisant partie de son *Traité d'Artillerie*, mais imprimé sous un format différent. (Mallet-Bachelier, 1860.)

III. Nous avons dit que la balistique intérieure s'occupe aussi des effets destructeurs de la poudre sur les parois intérieures des bouches à feu. On sait trouver, au bout d'un temps quelconque t , compté à partir de l'instant où le feu a été mis à la charge, la densité des gaz produits. [Voy. POUDEE (Propriété balistique de la)], formules 10, 11 et 12 du paragraphe X; et, à l'aide de la formule de RUMFORD ou de son équivalente (formules 13 et 14 de l'article cité), on peut déterminer la tension du gaz correspondante à chaque densité, et par conséquent à chaque valeur du temps t . On peut donc construire la courbe qui aurait pour abscisses les temps et pour ordonnées les tensions. On trouve qu'elle affecte une

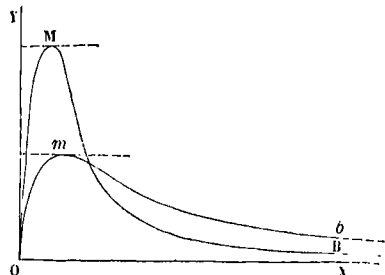


Fig. 2.

forme analogue à celle de la figure ci-contre, c'est-à-dire que la tension s'accroît avec une grande ra-

pidité dans les premiers instants de l'inflammation, et qu'elle atteint promptement son maximum, pour décroître ensuite avec une rapidité un peu moindre. C'est à cette circonstance que sont dues les propriétés Brisantes de la poudre et les effets destructeurs qu'elle exerce parfois sur l'âme de la pièce. Mais, à égalité de charge, la courbe n'est pas la même pour toutes les poudres et pour tous les modes de chargement; et l'on conçoit qu'il soit possible de disposer de ces données de telle sorte que la courbe DMB soit remplacée par une courbe telle que *Omb*, dans laquelle le maximum soit moins élevé, et dont l'aire totale soit néanmoins égale ou supérieure; c'est-à-dire qu'on peut ôter à la poudre ses qualités Brisantes et conserver au projectile la même vitesse au sortir de l'âme, ou lui imprimer même une vitesse plus grande. Pour cela, il faut avoir égard aux remarques suivantes.

Les poudres légères sont celles qui développent la plus grande quantité de gaz dans les premiers instants de la combustion, et cette quantité est d'autant plus grande que le diamètre des grains est plus petit. Toutes choses égales d'ailleurs, ce sont donc les poudres légères et à grains fins qui produisent la plus grande tension dans les premiers instants, et pour lesquelles la tension arrive le plus rapidement à son maximum. Mais la combustion arrive plus promptement à son terme; et, à mesure que le projectile avance dans l'âme de la pièce, la tension diminue avec une grande rapidité. Les poudres denses sont au contraire celles qui donnent le moins de gaz dans les premiers instants, et d'autant moins que les grains sont plus gros; ce sont donc celles pour lesquelles, toutes choses égales d'ailleurs, la tension arrive le plus lentement à son maximum et pour lesquelles ce maximum est le moins élevé. Mais aussi la combustion a une plus longue durée, et la tension diminue avec plus de lenteur pendant le mouvement du projectile. Les effets dépendent encore de la densité gravimétrique ou apparente de la poudre; le rapport de cette densité à celle des grains varie entre des limites peu éloignées; mais elle varie. Cela tient d'une part à ce que les grains ne sont point sphériques, et d'autre part à ce qu'ils sont de diamètres incgaux et que les plus petits se logent dans les intervalles des plus gros, surtout si la poudre est tassée. Lorsque la densité gravimétrique est faible, la charge occupe une plus grande place; l'espace occupé par les gaz dans les premiers instants étant plus considérable, la tension maximum est moindre. Cette tension maximum est au contraire plus élevée quand la densité gravimétrique est grande. Remarquons encore que, pour une même pression, l'accélération du projectile diminue quand le calibre du projectile augmente; la force accélératrice varie en effet comme la section transversale de l'âme, c'est-à-dire à peu près comme le carré du diamètre du projectile, tandis que le poids de celui-ci varie comme le cube de ce diamètre; le rapport de la force accélératrice à la masse du mobile varie donc, pour une même pression, en raison inverse du diamètre ou du calibre.

Ces observations permettent de se rendre compte de ce qui se passe dans les armes à feu. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'armes longues et dans lesquelles le projectile a un poids considérable, comme dans les pièces de siège. On voit aisément qu'on

évitera les effets destructeurs de la poudre sur la bouche à feu en employant des poudres dont les grains aient une grande densité et un diamètre suffisant, la densité gravimétrique étant en même temps la plus faible possible. Le mode de chargement adopté dans l'artillerie, depuis 1839, concourt d'ailleurs d'une manière notable au but qu'on se propose d'obtenir. La charge est cylindrique; mais, au lieu d'avoir un diamètre à peu près égal à celui de l'âme de la pièce, elle a un diamètre sensiblement moindre; le diamètre de la charge a été fixé à 130^{mm} pour la pièce de 24, dont l'âme a un diamètre de 152^{mm},7; et à 115^{mm} pour la pièce de 16, dont l'âme a un diamètre de 133^{mm},7; ce qui donne 0,85 ou 0,86 pour le rapport du diamètre de la charge à celui de l'âme. (La valeur de ce rapport qui donnerait la plus grande vitesse au projectile, paraît être d'environ 0,90). La section transversale de la charge étant ainsi diminuée, il a fallu, pour lui conserver son poids, qui est en général le tiers, et accidentellement la moitié, du poids du boulet, augmenter la longueur de la gargousse, ce qui a fait donner à ce mode de chargement le nom de *chargement allongé*. Il a pour effet d'éloigner le boulet du fond de l'âme, et d'agrandir ainsi l'espace dans lequel les gaz doivent se développer dans les premiers instants; en même temps il favorise l'inflammation, parce que le feu peut se communiquer latéralement sur toute la longueur de la gargousse. Le chargement allongé a fait ses preuves dans la campagne de Crimée; les pièces de 24 ont tiré en moyenne de 2500 à 2700 coups chacune, sans éprouver de détérioration sensible. En même temps que le chargement allongé ménage les bouches à feu, il donne des vitesses égales et même supérieures à celles que produit le chargement ancien. Ainsi dans une série d'expériences faites à Metz en 1836, à l'aide du PENDULE BALISTIQUE (*Voy. ce mot*), sur le boulet de 24, on a obtenu les résultats suivants :

A la charge du quart du poids du boulet, la gargousse ordinaire de 140^{mm} a donné en moyenne une vitesse de 480^m; la gargousse de 131^{mm} a donné une vitesse de 482^m.

A la charge du tiers du poids du boulet, la gargousse ordinaire a donné une vitesse de 527^m; la charge allongée a donné une vitesse de 534^m.

A la charge de la moitié du poids du boulet, le mode de chargement nouveau a donné également des vitesses supérieures à celles que donne le chargement ancien. De plus, les effets destructeurs produits ordinairement à cette charge ont été incomparablement moindres avec le chargement allongé.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse du fusil d'infanterie. Le projectile étant beaucoup plus léger, prend dès les premiers instants une accélération beaucoup plus grande, qui accroît rapidement l'espace dans lequel les gaz se développent. Il en résulte que non-seulement il y a moins d'inconvénient à employer des poudres plus légères et à grains plus fins, mais que ce sont même celles qui produisent les plus grandes vitesses. L'expérience montre, en effet, que les poudres dont les grains n'ont que 0^m,001 de diamètre moyen sont, sous ce point de vue, les plus avantageuses; et que, parmi les poudres de ce genre, celles qui l'emportent quant à la vitesse obtenue, sont celles dont les grains n'ont qu'une faible densité; c'est ce qu'indiqua le tableau suivant :

ensités	Vitesses obtenues
1,8.....	431 ^m
1,7.....	447
1,6.....	473
1,5.....	486
1,4.....	497
1,3.....	483

Pour les armes de longueur moyenne, et pour les armes courtes, il est également nécessaire d'employer des poudres moins denses que pour les pièces de gros calibre ; car les poudres denses produisant une tension moindre dans les premiers instants, il faut, pour obtenir une même vitesse, que l'action des gaz se prolonge davantage, c'est-à-dire que l'âme soit assez longue. En général, pour les armes de l'espèce dont nous parlons, ce sont les poudres de densité moyenne qui donnent les meilleurs effets. Le danger que pourrait offrir l'emploi d'une pareille espèce de poudre, au point de vue de la résistance de l'arme, se trouve notablement diminué par la légèreté du projectile, qui lui permet de se déplacer dès les premiers instants, de manière à offrir aux gaz qui se développent un espace assez grand pour que la tension n'atteigne pas la valeur qui pourrait occasionner la destruction de l'arme. La plupart des armes dont nous parlons présentent en outre une circonstance à laquelle il faut avoir égard ; elles sont à *chambre*, c'est-à-dire que le fond de l'âme présente une cavité de diamètre moindre, dans laquelle la charge est placée, et qui est indépendante du volume de cette charge. Il en résulte que lorsque le projectile est très-léger par rapport à la charge, et que l'âme est très-courte, les poudres de faible densité produisent plus d'effet que les poudres de densité moyenne.

On trouvera dans le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert (tome II, p. 386 et suiv.) le détail de toutes les expériences qui ont été faites sur le sujet qui nous occupe. Les grandes variations d'effet qui avaient été observées à différentes époques, et qui passaient pour des anomalies, s'expliquent ainsi par la manière dont se combinent la densité apparente de la poudre et la densité de ses grains ; en sorte que ces qualités physiques ont sur les résultats une influence beaucoup plus grande que le dosage ou le mode de fabrication.

L'expérience a indiqué, pour chaque bouche à feu ou pour chaque arme à feu portative, la longueur qu'il convient de donner à l'âme, afin d'utiliser la plus grande partie possible du travail développé par les gaz de la poudre, sans exagérer les dimensions de l'arme. Elle a fait connaître également la charge qui convient à chaque projectile. Nous réunissons dans le tableau suivant les données relatives à un certain nombre des principales armes à feu employées en France, et qui peuvent intéresser la balistique intérieure.

Il faut ajouter au poids des projectiles creux le poids de la poudre qu'ils peuvent contenir, savoir :

Projectiles	Poids de poudre		Charge de rupture
	qu'ils peuvent contenir		
	cent.	kil.	kil.
Obus de	12.....	0,28.....	0,15
—	15.....	0,52.....	0,275
—	16.....	0,70.....	0,35
—	22.....	2,21.....	0,65

Bombes de	22.....	2,20.....	0,65
—	27.....	3,00.....	1,85
—	32.....	5,50.....	1,90

NATURE de l'arme.	LONGUEUR de l'âme.	CALIBRE de l'âme.	CALIBRE du projectile.	POIDS du projectile.	POIDS de la charge.	VITESSE imprimée au projectile.
Fusil d'infanterie (modèle de 1842)...	^m 1,033	^m 0,0180	^m 0,0167	255 ^r , 5	9 ^r	446 ^m
Fusil de voltigeur...	1,029	Id.	Id.	Id.	Id.	Id.
Pièce de 8 (de campagne).....	1,745	0,1061	0,1038	4,02	$\frac{1}{3}$ du poids du boulet.	493 ^m
Pièce de 12 (de campagne).....	2,002	0,1213	0,1190	6,07	Id.	491
Pièce de 16.....	2,978	0,1337	0,1303	8,02	Id.	505
Pièce de 24.....	3,085	0,1527	0,1493	12,01	Id.	502
Obusier de 12 c. (dit de montagne).....	0,740	0,1205	0,1200	4,03	0 ^r , 27	264
Obusier de 15 c.....	1,485	0,1513	0,1500	7,21	0 ^r , 50 et 1 ^r , 00	276 ^m et 373
Obusier de 16 c.....	1,640	0,1655	0,1600	10,60	0 ^r , 75 et 1 ^r , 50	276 et 400
Obusier de 22 c.....	0,800	0,2230	0,2200	27,05	2 ^r	297 ^m
Mortier pour les bombes de 22 c.....	$\frac{1}{2}$ fois le diam. de la bombe.	0,2223	0,2200	21,67	1,16	498 ^m environ
Mortier de 27 c.....	Id.	0,2723	0,2700	49,34	3,67	Id.
Mortier de 32 c.....	Id.	0,3234	0,3200	73,41	5,40	234

Il est bon de remarquer que, dans les pièces de campagne de 8 et de 12, on a sacrifié, au besoin d'une plus grande légèreté, une partie du travail des gaz dont on aurait pu profiter en allongeant l'âme. Pour les obusiers et les mortiers, la longueur de l'âme est donnée abstraction faite de la chambre où est placée la charge.

Comme complément des notions exposées dans cet article, voyez l'article ARMES RAYÉES.

BALLAST, couche de sable et de cailloutage dont on recouvre les voies ferrées. (Voy. CHEMINS DE FER.)

BALUSTRADE, construction à hauteur d'appui (1 mètre environ) formée d'une série de piliers appelés *balustres*, qui portent sur un socle commun et supportent eux-mêmes une tablette d'appui. Une balustrade peut servir de couronnement à la façade d'un édifice, de terminaison à une terrasse, d'appui à un balcon, de clôture à une estrade ou à un sanctuaire, etc. Quand une balustrade couronne un édifice, il faut que son socle soit assez élevé pour que, par l'effet de la perspective, la corniche de l'entablement ne paraisse pas couper le bas des balustres. Quand une balustrade a une certaine longueur, elle est interrompue, de distance en distance, par des piédestaux sur lesquels on peut placer des vases ou des statues. Deux piédestaux sem-

blables terminent toujours les extrémités de la balustrade. Les moulures de ces piédestaux se reproduisent sur toute la longueur du socle et de l'appui de la balustrade; elles doivent toujours être en rapport avec l'ordre de l'édifice auquel appartient la balustrade; la forme des balustres elle-même dépend de l'ordre dont il s'agit.

Un balustre se compose de trois parties : un chapiteau, une tige, et un petit piédestal appelé *piédouche*. Le balustre est quelquefois à section carrée; mais le plus souvent toutes ses parties ont des surfaces de révolution, à l'exception de l'abaque de son chapiteau et du socle de son piédouche. La figure 1 représente une portion de balustrade d'ordre

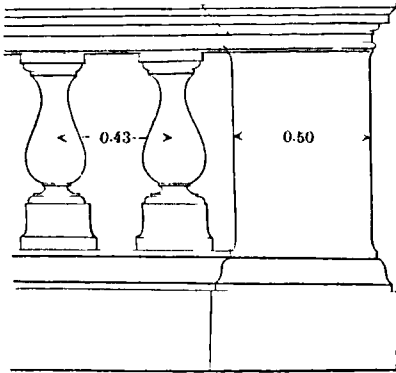


Fig. 1.

ionique; la figure 2 est une portion de balustrade dans le style corinthien.

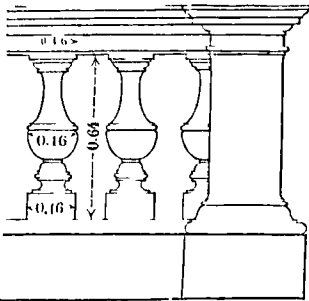


Fig. 2.

On emploie aussi les balustrades pour garnir les rampes des escaliers. La tablette d'appui, ou main courante, est alors inclinée; le piédestal peut suivre la même inclinaison, ou être disposé en escalier; mais les balustres restent verticaux en s'engageant par l'abaque de leur chapiteau ou par le socle de leur piédouche dans le plan incliné placé au-dessus ou au-dessous.

BANC A BROCHES, mécanisme employé dans les filatures pour tordre le fil et l'envider en même temps sur la bobine. L'organe qui produit ce double résultat est la *broche*; la pièce mobile qui porte une série de broches est le *banc à broches*; et c'est cette pièce qui donne son nom à tout le dispositif.

I. Avant d'entrer dans la description du mécanisme dont il s'agit, il faut d'abord bien faire comprendre en quoi consiste la fonction spéciale de la broche, et quels sont les mouvements qu'il est nécessaire de lui donner. La broche (fig. 1) se compose de deux ailettes équilibrées, *ab*, *a'b'*, mobiles autour d'un axe *AA*; l'une de ces ailettes est creuse; et le fil, entrant à la partie supérieure, près de l'axe, en sort par l'extrémité inférieure *b*. Ce fil s'enroule sur une bobine *B*, mobile autour de l'axe de la broche, mais indépendante du mouvement de celle-ci. Indépendamment du mouvement de rotation autour de son axe, la bobine peut prendre un mouvement de translation alternatif parallèle à cet axe.

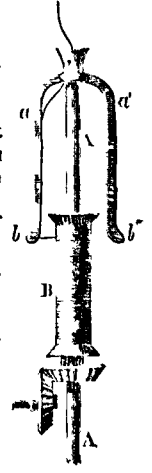


Fig. 1.

Nous verrons plus loin comment ces divers mouvements sont produits; voici à quels besoins ils répondent. Le fil fourni par les cylindres étireurs se compose de fibres parallèles; il s'agit d'abord de le tordre, c'est-à-dire de disposer ces fibres en hélices, pour donner au fil une résistance suffisante. Ce résultat est produit par la rotation de l'ailette autour de son axe; le fil faisant un tour sur lui-même à chaque tour de l'ailette, en même temps que le fil se tord, il faut qu'il s'enroule sur la bobine. Si celle-ci était fixée sur l'axe *AA* de la broche, le fil ne s'y enroulerait pas; il est donc nécessaire que la bobine ait un mouvement de rotation indépendant de celui de l'ailette. La différence de leurs vitesses angulaires, si elles tournent dans le même sens, ou la somme de ces vitesses, si elles tournent en sens contraires, doit être réglée de manière que la bobine puisse recevoir, dans un temps donné, tout le fil fourni par les cylindres étireurs. Supposons, par exemple, que l'ailette fasse 300 tours par minute, que les cylindres étireurs fournissent 3 mètres de fil dans le même temps, et que le rayon de la bobine soit 0^m,015. Si *n* désigne le nombre de tours de la bobine par minute, on devra avoir (la bobine et l'ailette tournant dans le même sens)

$$2\pi \cdot 0,015 (300 - n) = 3^m,$$

d'où l'on tire

$$n = 300 - \frac{3}{2\pi \cdot 0,015} = 300 - 31,8 = 268^{tours}, 2.$$

Ceci suppose que le rayon de la bobine reste constant; or il n'en est pas ainsi. En donnant à la bobine un mouvement vertical dans le sens de son axe, on peut bien faire en sorte que les tours successifs du fil s'y placent à côté les uns des autres; mais, lorsque le fil a été ainsi enroulé sur toute la hauteur, il faut que la bobine prenne un mouvement vertical en sens inverse pour que le fil puisse continuer à s'y enrouler. Mais alors le rayon de la bobine a augmenté de l'épaisseur de la couche de fil précédemment déposée. Pour que la quantité de fil enroulée dans un temps donné reste la même, il faut donc que la vitesse de la bobine change. Un pareil changement doit avoir lieu à chaque alternative du mouvement vertical de la bobine. Si, par exemple, après 1000 alternatives, le rayon de la bobine chargée

de fil est devenu égal à 0^m,04, le nombre de tours par minute devra être

$$n' = 300 - \frac{3}{2\pi \cdot 0,040} = 300 - 11,9 = 288^{\text{virs}}, 1.$$

En désignant par r le rayon initial de la bobine et par e l'épaisseur du fil, après N alternatives de la bobine, le rayon sera devenu $r + Ne$; si n est le nombre constant de tours de l'ailette par minute, l la longueur de fil fournie dans ce temps par les cylindres étireurs, et x le nombre de tours représentant la vitesse de la bobine après ces N alternatives, on devra avoir en général

$$2\pi (r + Ne) (n - x) = l,$$

d'où
$$x = n - \frac{l}{2\pi (r + Ne)}. \quad [1]$$

Telle est la loi suivant laquelle doit varier la vitesse de rotation de la bobine.

Quant à sa vitesse de translation verticale, elle doit être en raison inverse du rayon de la bobine (y compris les couches de fil dont elle est chargée). En effet, soit h la hauteur de bobine à renvider, $\frac{h}{e}$ sera le nombre de tours de fil nécessaires; et la

longueur de fil ainsi renvidée, à la $N + 1^{\text{ème}}$ alternative de la bobine, sera

$$2\pi (r + Ne) \cdot \frac{h}{e}.$$

Soit t la durée de cette $N + 1^{\text{ème}}$ alternative; la quantité de fil renvidée dans l'unité de temps pendant cette nouvelle alternative sera

$$\frac{2\pi (r + Ne) h}{t \cdot e}.$$

Or cette quantité doit être égale à une constante λ ; égalant donc à λ cette expression, on en tire

$$\frac{h}{t} = \frac{\lambda e}{2\pi (r + Ne)}. \quad [2]$$

Mais $\frac{h}{t}$ est la vitesse du mouvement vertical; on voit donc qu'elle est en raison inverse du rayon $r + Ne$.

Les formules [1] et [2] renferment tous les éléments nécessaires pour régler le mouvement de la bobine. Voici maintenant les dispositions adoptées pour réaliser ce mouvement; la fig. 2 ne doit être considérée que comme une figure théorique destinée à faire comprendre le mécanisme.

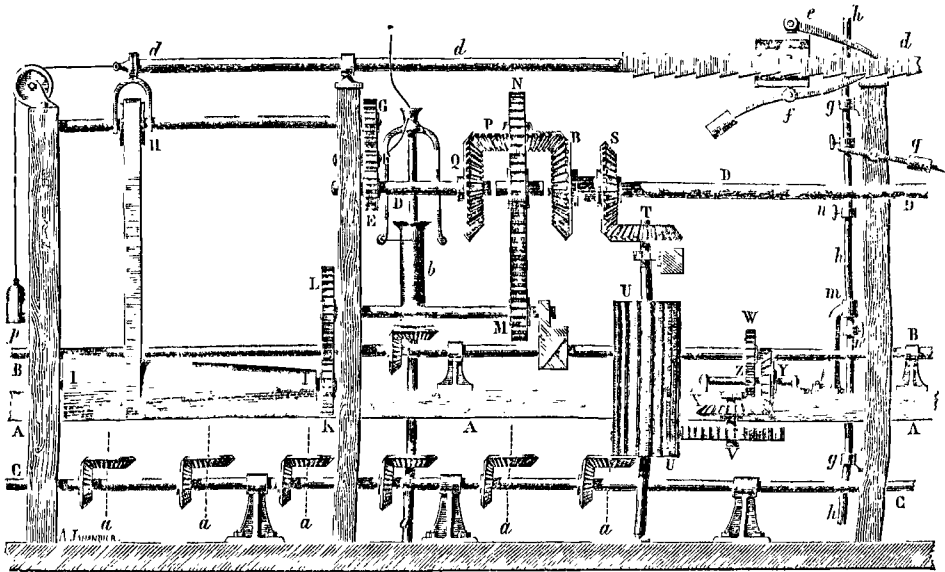


Fig. 2.

II. La pièce AAA est ce que l'on nomme le *charriot*; une roue dentée qui engène alternativement avec deux crémaillères parallèles (*Voy. TRANSFORMATIONS DES MOUVEMENTS, circulaire continu en rectiligne alternatif*), ou tout autre mécanisme équivalent, imprime à cette pièce horizontale un mouvement alternatif de translation uniforme dans le sens vertical. Cette pièce porte l'axe BBB, qui, par l'intermédiaire d'un engrenage hyperboloïde (*Voy. ENGRENAGES*), fait tourner chacune des bobines; l'une de ces bobines est représentée en b . L'axe de la broche repose sur un support fixe à sa partie inférieure, et reçoit son mouvement de rotation de l'axe CCC, par l'intermédiaire d'un engrenage analogue au précédent. Les autres broches ne sont re-

présentées que par leur axe géométrique a, a, a, a , et par l'engrenage hyperboloïde qui lui donne le mouvement.

L'arbre DDD qui reçoit directement son mouvement du moteur, fait mouvoir, par l'intermédiaire des roues dentées E, F, G, une poulie H, qui peut glisser à rainure et languette le long de son axe, et qui reçoit une courroie sans fin, passant sur le cône II. Celui-ci, par l'intermédiaire des roues dentées K, L, M, fait mouvoir une grande roue N, montée folle sur l'axe DDD, et portant elle-même une roue P, qui a pour axe une portion de rayon de la roue N, et qui est folle sur cet axe. La roue P engène d'une part avec une roue Q calée sur l'axe DDD, et avec une roue R liée à un manchon qui

enveloppe cet axe. Le système des roues N, P, Q, R forme un engrenage différentiel (Voy. TRAINS ÉPI-CYCLOÏDAUX) dont le mouvement se transmet, par l'intermédiaire des roues S et T, à un long pignon vertical UU. Ce pignon engrène avec une roue V, qui, par l'intermédiaire des roues X, Y, Z et W, fait tourner l'axe BBB qui donne le mouvement aux bobines. Tout ce système des roues V, X, Y, Z, W est porté par le banc mobile AAA; et par suite le mouvement alternatif de cette pièce, la roue ne cesse pas d'engrener avec le pignon UU.

La poulie H qui donne le mouvement au cône par l'intermédiaire de la courroie sans fin, est prise entre les branches d'une fourche, fixée à l'extrémité de la tige horizontale ddd. Cette tige est sollicitée d'une part par un contre-poids p passant sur une poulie de renvoi, et retenue de l'autre par un encliquetage, formé d'un peigne, à dents alternatives, entre lesquelles s'engagent les deux cliquets e et f. Une tige verticale hhh, maintenue entre des guides fixes g, g et un guide mobile m, et équilibrée par un contre-poids q, sert à faire jouer l'encliquetage. Lorsque les bobines sont au haut de leur course, le guide mobile m, qui s'est élevé avec le chariot AAA, vient soulever le curseur n fixé à la tige, et par conséquent la tige elle-même; un taquet, fixé à cette même tige, soulève le cliquet e, et le peigne, sollicité par le contre-poids p, échappe d'une dent. Quand les bobines sont au contraire au bas de leur course, le guide mobile m, qui s'est abaissé avec le chariot AAA, vient pousser vers le bas le curseur n fixé à la tige hhh, et par conséquent cette tige elle-même; un taquet fixé à cette tige abaisse le cliquet f, et le peigne, toujours sollicité par le contre-poids p, échappe d'une nouvelle dent; et ainsi de suite. On voit que le cliquet e retombe par son propre poids lorsqu'il a été soulevé; tandis que le cliquet f, lorsqu'il cesse d'être poussé vers le bas, remonte par l'effet du petit contre-poids placé à l'extrémité opposée.

Chaque fois que le peigne échappe d'une dent, la barre ddd avance du côté du contre-poids; la fourche placée à son extrémité fait marcher dans le même sens la poulie H; et la courroie se rapproche de la plus grande base du cône II. Il en résulte que ce cône, et par conséquent la roue N, marchent plus lentement; donc la roue R, qui est animée du mouvement différentiel, va plus vite, et par suite il en est de même du pignon UU, et finalement de la roue W et de l'axe BBB qui fait tourner les bobines.

On comprend qu'à l'aide de ce mécanisme ingénieux on puisse satisfaire, d'une infinité de manières, aux conditions exprimées par les équations [1] et [2]. Ce mécanisme peut présenter des différences d'un atelier à un autre; mais le principe en est toujours le même.

On ajoute un mécanisme accessoire pour rendre conique le bout des bobines renvidées. Voyez la description du banc à broches de M. Pihet, dans le tome VI de la *Publication industrielle* de M. Armengaud.

BANC A TIRER. Voy. FILIÈRE.

BANDEAU. Bande unie et placée en saillie sur le nu du mur, qui s'étend horizontalement le long d'une façade, à la hauteur des appuis de fenêtres, ou à la hauteur des planchers des divers étages.

Le chambranle des portes et des fenêtres est quelquefois remplacé, par une simple bande unie à laquelle on donne aussi le nom de bandeau. On donne le même nom à une bande circulaire qui remplace parfois l'archivolte, et à la bande horizontale qui remplace dans ce cas l'imposte. (Voy. FERNETRE, ARCADE, PORTIQUE.)

BANQUE. Établissement qui a pour objet le commerce de l'argent, et qui comprend l'escompte, le change, la négociation de toutes les valeurs de circulation, le commerce des métaux précieux. Les banquiers reçoivent, en outre, des dépôts d'argent, ouvrent des crédits, et se chargent, moyennant un droit de commission, de toutes les opérations qui ont pour but de suppléer à l'insuffisance du numéraire, ou à la difficulté de son transport.

BANQUETTE. Espace qui règne le long du talus intérieur d'un parapet, et sur lequel les défenseurs montent pour faire le coup de feu. Le chemin couvert est également muni d'une banquette. (Voy. FORTIFICATION.) La banquette d'un parapet a 0^m,70 pour un rang d'hommes, ou 1^m,70 pour deux rangs. La largeur de la banquette d'un chemin couvert doit comprendre en outre l'espace nécessaire pour placer la palissade dont cet ouvrage est ordinairement garni.

BANQUIÈRE. Virure qui précède chaque pont d'un navire, et sur laquelle reposent les BAUX (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE.)

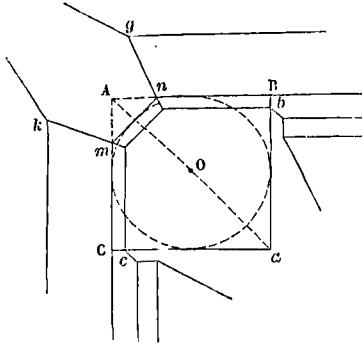
BAQUETAGE. Procédé employé dans les épuisements à de petites profondeurs. Il consiste à placer, dans le bassin à épuiser, des hommes munis de seaux en cuir ou en osier et toile imperméable, qui remplissent ces seaux et les vident dans une rigole qui conduit l'eau au dehors. On ne peut élever l'eau par ce procédé qu'à une hauteur de 1^m à 1^m,30. D'après Perronnet, un manoeuvre appliqué pendant 8 heures à ce genre de travail peut élever 46^m cubes d'eau à une hauteur de 1^m, ce qui répond à un travail journalier de 46 000^m. L'évaluation de ce travail varie beaucoup suivant les auteurs.

On donne aussi le nom de *baquetage* à la perte d'eau occasionnée dans les norias (Voy. NORIA) par le balancement latéral des chaînes, perte qui s'élève quelquefois jusqu'au dixième du volume d'eau élevé.

BARBACANE. Mur percé de meurtrières et servant à la défense d'une porte, d'un pont, ou de toute autre partie faible d'une enceinte fortifiée.

BARBETTE (TIR A). Tir dans lequel la bouche à feu, élevée sur une plate-forme, peut tirer, sans embrasure, et dans toutes les directions, par-dessus le parapet de la batterie ou de l'ouvrage fortifié qui la contient. Cette disposition expose les artilleurs, mais elle donne au tir un champ plus étendu. Toutes les pièces qui arment une BATTERIE DE CÔTÉ (Voy. ce mot) tirent à barbette. On emploie aussi ce genre de tir aux saillants des redoutes, des BASTIONS, des DEMI-LUNES (Voy. ces mots). La plate-forme sur laquelle est établie une pièce de campagne tirant à barbette est à 0^m,80 au-dessous de la ligne de feu. On détermine son emplacement en traçant un cercle de 3^m,50 de rayon, tangent aux projections AB et AC des lignes de feu de l'angle saillant; dans toutes les directions la pièce a ainsi 7^m à parcourir dans le sens de sa longueur. On brise la ligne de feu par un pan coupé mn tangent au

cercle et perpendiculaire à la capitale AO du saillant; et par ce pan coupé *mn* on conduit une plongée à 6 de base sur 1 de hauteur, qui coupe les plongées des faces *nB* et *mC* suivant des droites *ng*



et *mk* faciles à déterminer, puisqu'on a les échelles de pente de ces plans (Voy PLANS COTÉS). La plate-forme est terminée à l'intérieur par des droites *ab* et *ac* tangentés au même cercle, et par lesquelles on fait passer des talus à 1 sur 1. On accède à la plate-forme par une rampe inclinée à 4 ou 6 de base sur 1 de hauteur, suivant l'élevation de cette plate-forme au-dessus du terre-plein bas de l'ouvrage, la pente devant être d'autant plus douce que la hauteur à parcourir est plus grande; cette rampe, de 3^m de large, peut être dirigée soit parallèlement à l'une des faces AB ou AC, soit parallèlement à la capitale AO; on la termine latéralement par des talus à 1 sur 1. Les intersections de cette rampe et de ces talus avec le talus de la banquette, ou avec le talus du terre-plein haut, s'obtiennent sans difficulté, quand on connaît les échelles de pente de ces divers plans.

Lorsque l'ouvrage est défilé (Voy. DÉFILEMENT), ses crêtes n'étant plus généralement horizontales, il pourrait arriver que les canonniers placés en *b* ou en *c* ne fussent pas aussi bien couverts que ceux qui sont placés en *m* ou en *n*, attendu que la plate-forme reste toujours horizontale. Pour éviter cet inconvénient, on conserve aux crêtes *nB* et *mC* une direction horizontale; c'est l'intersection du plan horizontal passant par *n* ou par *m* avec le talus intérieur. L'extrémité de la barquette se termine toujours latéralement en B et en C, par un talus à 1 sur 1, qui va couper la plongée du parapet.

Pour les pièces de siège, la construction est analogue; mais la plate-forme est à une distance d'autant plus grande de la crête du parapet, que le calibre de la pièce est plus fort, et par conséquent sa hauteur au-dessus de la plate-forme plus grande; il en résulte que les canonniers sont mieux couverts, mais le service de la pièce présente plus de difficulté.

BAROMÈTRE (du grec βάρος, poids, et μέτρον, mesure), instrument destiné à mesurer la pression atmosphérique.

Si l'on remplit de mercure un tube de verre de 80 centimètres environ, fermé par un bout, et qu'on le plonge, en le retournant, dans une cuvette remplie du même liquide, on observe que le niveau du

mercure dans le tube reste à une certaine hauteur AB au-dessus du niveau dans la cuvette. D'après le principe des VASES COMMUNIQUANTS (Voy. ce mot), la pression doit être la même en A à l'intérieur et à l'extérieur du tube. Or, à l'intérieur, la pression est uniquement due au poids de la colonne de mercure; et en nommant \mathcal{P} la pression par mètre en ce point, *h* la hauteur AB, et Π le poids du mètre cube de mercure, on a

$$\mathcal{P} = \Pi h, \quad [1]$$

puisque'il n'y a rien dans le tube au-dessus du mercure. Pour l'équilibre il faut donc que la pression par mètre à l'extérieur ait une valeur égale. Mais, au-dessus du niveau dans la cuvette, il n'y a que l'air atmosphérique qui puisse exercer une pression; donc l'atmosphère presse sur le mercure; et sa pression par mètre a la valeur exprimée par l'équation [1]. La hauteur *h* est en moyenne de 0^m,76; et le poids du mètre cube de mercure à zéro est 13598^k; on a donc, pour la valeur de la pression atmosphérique rapportée au mètre carré, 13598^k × 0,76 ou 10334^k.

L'expérience que nous venons de rapporter est de Torricelli; mais l'idée de cette expérience paraît due à Galilée.

On conçoit que l'observation de la hauteur AB fasse connaître la pression atmosphérique dans tous les cas, en ayant égard à la variation de poids que subit le mètre cube de mercure quand la température vient à changer.

Si *h* est la hauteur observée à la température *t*, cette hauteur ramenée à la température zéro est

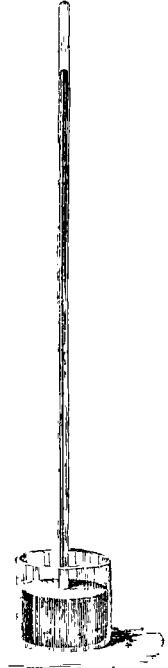
$$\frac{h}{1 + \frac{t}{5550}} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{1 + 0,00018 \cdot t}$$

et la pression atmosphérique correspondante est

$$\mathcal{P} = \frac{\Pi h}{1 + 0,00018 t} \quad \text{ou} \quad \frac{10334^k \cdot h}{1 + 0,00018 t \cdot 0,76}$$

Nous renverrons aux Traités de Physique pour la description complète du baromètre et pour la construction de cet instrument.

BAROMÈTRE (MESURE DES HAUTEURS PAR LE), méthode hypsométrique fondée sur la diminution de pression des couches atmosphériques à mesure qu'on s'élève, et par conséquent sur l'abaissement de la colonne barométrique qui accuse cette diminution de pression. L'idée d'employer le baromètre à la mesure des hauteurs est due à Pascal; dans ses expériences sur le Puy-de-Dôme, il avait remarqué que, jusqu'à une hauteur de 500 toises, un accroissement de hauteur de 5 toises répondait à un abaissement de 0,37 de ligne dans la colonne barométrique; ce qui, en mesures métriques, revient à un abaissement de



0^m,9 dans la colonne barométrique pour un accroissement de 10^m dans la hauteur. Mais c'est Halley qui a donné le premier une formule pour déduire la différence de hauteur de deux stations de l'observation du baromètre à ces deux stations. Il supposait la température uniforme entre les deux stations et l'air parfaitement sec. Dans ces hypothèses, si l'on suppose l'atmosphère décomposée entre les deux stations en un certain nombre *n* de couches d'égale épaisseur, la pression sur l'unité de surface au niveau supérieur de l'une de ces couches surpassera la pression sur l'unité de surface au niveau inférieur de la même couche d'une quantité égale au poids du volume d'air ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur l'épaisseur de la couche, ou d'une quantité égale à *h* · *Π*, en appelant *h* cette épaisseur et *Π* le poids du mètre cube d'air dans la couche considérée.

Pour exprimer cette diminution de pression en une colonne de mercure, il faut multiplier par 0^m,76 et diviser par 10334^h, ce qui donne

$$\frac{h \Pi \cdot 0,76}{10334}$$

Mais si *Π*₀ désigne le poids du mètre cube d'air sous la pression 0,76, et si l'on représente par *H* la pression sous laquelle le poids du même volume d'air est *Π*, on a

$$\Pi : \Pi_0 = H : 0,76,$$

par conséquent le produit *Π* · 0,76 peut être remplacé par *Π*₀ · *H*; et la diminution de pression de la partie inférieure d'une couche à sa partie supérieure se trouve exprimée par

$$\frac{h \Pi_0 \cdot H}{10334}$$

Cela posé, si *H*₀, *H*₁, *H*₂, ..., *H*_{*n*} désignent les pressions sur les surfaces consécutives qui limitent les couches, et par *n* le nombre de ces couches, on a successivement

$$H_1 = H_0 - \frac{h \Pi_0 H_0}{10334} = H_0 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10334} \right),$$

$$H_2 = H_1 - \frac{h \Pi_0 H_1}{10334} = H_1 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10334} \right),$$

$$H_3 = H_2 - \frac{h \Pi_0 H_2}{10334} = H_2 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10334} \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$H_n = H_{n-1} - \frac{h \Pi_0 H_{n-1}}{10334} = H_{n-1} \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10334} \right).$$

Multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$H_n = H_0 \cdot \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10334} \right)^n.$$

Pour *h* = 1^m, *n* exprime précisément la différence de niveau des deux stations. D'ailleurs *H*₀ = 1^h,299; et l'égalité peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{10334,000}{10332,701} \right)^n = \frac{H_0}{H_n}$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$n \log \left(\frac{10334,000}{10332,701} \right) = \log \frac{H_0}{H_n}$$

et, en tirant la valeur de *n* et effectuant les calculs,

$$n = 18328,4 \cdot \log \frac{H_0}{H_n}. \quad [A]$$

Cette relation peut suffire dans beaucoup de cas.

La formule dont on se sert généralement aujourd'hui est due à Laplace; on peut l'établir de la

manière suivante. Supposons l'atmosphère partagée entre les deux stations en couches infiniment minces; soit *x* la distance de l'une d'elles à la surface du globe, et *dx* son épaisseur. Soit *Q* la pression par unité superficielle à la partie inférieure de cette couche, *Π* le poids du mètre cube d'air sous cette pression. De la partie inférieure de la couche considérée, à sa partie supérieure, la pression *Q* aura diminué d'une quantité égale au poids d'une colonne d'air ayant pour base l'unité et pour hauteur *dx*; on aura donc

$$dQ = - \Pi dx. \quad [1]$$

Si *Π*₀ est le poids du mètre cube d'air à la température 0° et sous la pression normale 0^m,76, le poids d'un même volume d'air à la température *θ* de la couche considérée, et sous la pression *Q*, sera

$$\Pi_0 \cdot \frac{Q}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + a\theta},$$

en désignant par *a* le coefficient de dilatation des gaz, que l'on prend égal à 0,004 pour tenir compte autant que possible de la vapeur d'eau contenue dans l'air. Mais l'expression ci-dessus donne le poids à la station inférieure; pour l'avoir à la distance *x* au-dessus de cette station, il faut multiplier par le rapport inverse des carrés des distances, en nommant *R* la distance de la station inférieure au centre du globe, on aura donc

$$\Pi = \Pi_0 \cdot \frac{Q}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + a\theta} \cdot \frac{R^2}{(R + x)^2}.$$

Substituant dans [1], divisant par *Q*, et intégrant de 0 à *x*, on obtient, en désignant par *Q*₀ la pression à la station inférieure,

$$\log \frac{Q_0}{Q} = \frac{\Pi_0 R}{0,76 \cdot (1 + a\theta)} \cdot \frac{x}{R + x},$$

formule dans laquelle le logarithme qui figure dans le premier membre est un logarithme népérien. On tire de là

$$x = \frac{0,76 \cdot (1 + a\theta)}{\Pi_0} \cdot \log \frac{Q_0}{Q} \cdot \left(1 + \frac{x}{R} \right).$$

Les pressions *Q*₀ et *Q* sont entre elles en raison directe des hauteurs barométriques *h*₀ et *h* qui les expriment, et en raison directe de l'intensité de la pesanteur aux points où elles s'exercent, c'est-à-dire en raison inverse des carrés des distances de ces points au centre du globe; on a donc

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{h_0}{h} \cdot \frac{(R + x)^2}{R^2} = \frac{h_0}{h} \cdot \left(1 + \frac{x}{R} \right)^2.$$

Substituant dans la valeur de *x*, on trouve

$$x = \frac{0,76 (1 + a\theta)}{\Pi_0} \left[\log \frac{h_0}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{x}{R} \right) \right] \times \left(1 + \frac{x}{R} \right),$$

ou en remplaçant $\log \left(1 + \frac{x}{R} \right)$ par $\frac{x}{R}$, ce qui est permis attendu que *x* est toujours très-petit par rapport à *R*, et négligeant $\frac{x^2}{R^2}$,

$$x = \frac{0,76 (1 + a\theta)}{\Pi_0} \left[\left(1 + \frac{x}{R} \right) \log \frac{h_0}{h} + \frac{2x}{R} \right].$$

Le poids *Π*₀ se rapporte à la station inférieure, dont l'altitude est *h*; si on voulait le rapporter à la surface du globe, il faudrait multiplier par le rapport inverse des carrés des distances, c'est-à-dire qu'il faudrait multiplier *Π*₀ par $\left(\frac{R - h}{R} \right)^2$; mais *h* étant toujours très-petit par rapport à *R*, on néglige

cette correction. Il y en a une autre qu'on ne peut négliger : l'intensité de la pesanteur varie avec la latitude, et l'on démontre (Voy. PESANTEUR) qu'en nommant P le poids d'un corps à la latitude de 45°, le poids du même corps est exprimé par $P(1 - 0,00265 \cos 2 l)$ à la latitude l . Il faut donc multiplier H₀ par le facteur $1 - 0,00265 \cos 2 l$, ce qui revient à multiplier l'expression de x par $1 + 0,00265 \cos 2 l$. Enfin, pour simplifier, on remplace la température variable θ par la moyenne entre les températures t_0 et t des deux stations; le facteur $1 + a\theta$ devient alors $1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000}$, puisque $\alpha = 0,004$; et la valeur de x peut s'écrire

$$x = \frac{0,76}{H_0} \left[1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \right] \times \left[\left(1 + \frac{x}{R} \right) \log \frac{h_0}{h} + \frac{2x}{R} \right] (1 + 0,00265 \cos 2 l).$$

Si M désigne le module 0,4342945 des logarithmes népériens, on peut écrire l'expression de x sous la forme

$$x = \frac{0,76}{M H_0} \left[1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \right] \times \left[\left(1 + \frac{x}{R} \right) \log \frac{h_0}{h} + \frac{2Mx}{R} \right] (1 + 0,00265 \cos 2 l),$$

dans laquelle le logarithme est un logarithme vulgaire. Telle est la formule de Laplace. Dans cette formule la hauteur h n'est pas la hauteur barométrique directement observée à la station supérieure, mais cette hauteur réduite à la température de la station inférieure.

Le coefficient $\frac{0,76}{M H_0}$ peut être déterminé au moyen de la formule [B] elle-même, en l'appliquant à deux stations dont la différence d'altitude a été préalablement mesurée avec soin par un NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE (Voy. ce mot). C'est ainsi qu'a opéré, au commencement de ce siècle, Ramond de Carbonnières, habile naturaliste, à la suite de ses observations dans les Pyrénées pendant la Terreur; il a trouvé pour la valeur de ce coefficient le nombre 18 336. Ce coefficient peut aussi être déterminé directement; c'est ce qu'ont fait MM. Biot et Arago en 1806; et leurs recherches ont confirmé la détermination faite par Ramond. La formule définitive est donc

$$x = 18336 \left[1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \right] \times \left[\left(1 + \frac{x}{R} \right) \log \frac{h_0}{h} + \frac{2Mx}{R} \right] (1 + 0,00265 \cos 2 l).$$

L'inconnue x entrant dans le second membre, on procède par approximations successives : on commence par négliger les températures, ainsi que les quantités $\frac{x}{R}$ et $\cos 2 l$, et l'on écrit

$$x_1 = 18336 \cdot \log \frac{h_0}{h},$$

première valeur approchée, qui diffère peu de celle qu'on obtiendrait par la formule [A] de Halley. Mettant pour x cette valeur, et tenant compte cette fois des températures, on écrit

$$x_2 = x_1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} x_1.$$

Enfin cette valeur mise pour x dans les termes

négligés d'abord donne la valeur cherchée. On a ainsi

$$x = 18336 \log \frac{h_0}{h} + \frac{2(t_0 + t)}{1000} x_1 + x_2 \cdot 0,00265 \cos 2 l + (x^2 + 2 M \cdot 18336) \frac{x_2}{R}.$$

Les termes de cette formule ont été réduits en tables qui sont insérées avec le type du calcul dans l'Annuaire du Bureau des longitudes.

La théorie qui précède suppose une atmosphère calme. D'après les recherches de M. Montigny, les hauteurs barométriques sont influencées par les vents; et le sens des écarts dépend des vitesses relatives du vent aux deux stations.

BARRAGE, obstacle que l'on établit en travers d'un cours d'eau afin d'élever le niveau en amont, soit pour les besoins de la navigation, soit pour le service d'une usine. Lorsqu'on barre ainsi un cours d'eau, le niveau s'abaisse en aval en même temps qu'il s'élève en amont; l'eau passe au-dessus de la crête du barrage, s'écoule en DÉVERSOUR (Voy. ce mot), et le régime permanent finit par s'établir; c'est-à-dire que le volume d'eau qui s'écoule dans l'unité de temps au-dessus de la crête est alors le même que celui qui s'écoulait précédemment par la section du cours d'eau.

Le barrage est fixe lorsqu'il est construit en maçonnerie. Il est mobile lorsqu'il est composé de simples poutrelles superposées. L'avantage de cette seconde disposition est de pouvoir élever ou abaisser à volonté la crête du barrage. Les barrages à poutrelles donnent lieu à un phénomène digne de remarque.

Lorsqu'on veut exhausser le barrage, on amène, en la faisant flotter, une nouvelle poutrelle P (fig. 1) dans la position P', en l'appuyant contre les

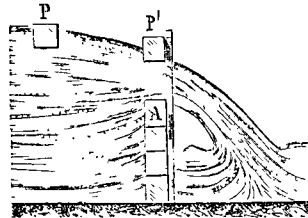


Fig. 1.

feuillures qui retiennent les poutrelles déjà placées. Aussitôt qu'elle est dans cette position, on la voit tomber d'elle-même sur la poutrelle A qui formait la crête du barrage. La théorie rend compte de ce curieux phénomène. Lorsque la poutrelle P est arrivée en P', l'intervalle compris entre les poutrelles P' et A forme un AJUTAGE (Voy. ce mot) par lequel l'eau est obligée de s'écouler; la pression dans cet ajutage devient inférieure à la pression atmosphérique, et la poutrelle P' tombe en vertu de la différence des pressions qui s'exercent sur ses faces supérieure et inférieure, augmentée du poids de la poutrelle elle-même.

Dans les circonstances ordinaires le niveau d'aval est au-dessous de la crête du barrage; mais dans les cours d'eau à régime variable il peut arriver que le niveau d'aval s'élève au-dessus de cette crête, comme le montre la figure 2. On dit alors

que le barrage est *noyé*. L'incertitude qui affecte la théorie de l'écoulement en déversoir, s'étend à plus forte raison aux barrages *noyés*. On peut néanmoins consulter sur ce sujet le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse (n° 262, tome II).

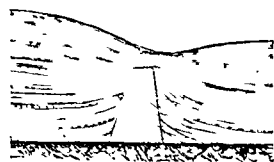


Fig. 2.

On emploie, dans quelques cas exceptionnels, les barrages dits à *fermettes mobiles*, qui permettent de supprimer presque instantanément le barrage sur tout ou partie de la largeur de la rivière, et de le rétablir à volonté. Ces systèmes est dû à M. Poirée. Il consiste en petites fermes, établies suivant le fil de l'eau, à une distance de 1 mètre environ l'une de l'autre; elles sont reliées les unes aux autres à la partie supérieure par des entretoises, et à la partie inférieure par un seuil en bois; sur ces entretoises et sur ce seuil s'appuient du côté d'amont les *aiguilles* ou madriers verticaux qui forment le barrage proprement dit. Les fermettes sont mobiles autour d'un axe horizontal placé à leur partie inférieure dans le sens du courant, et peuvent être abattues sur le fond du lit pour laisser aux eaux un libre cours. Elles sont reliées entre elles par une chaîne, à l'aide de laquelle on peut aisément les abattre et les relever en les faisant mouvoir toutes dans le même sens autour de leurs axes. (La dernière se rabat dans une niche spéciale pratiquée dans la culée). On peut, suivant les cas, les abattre toutes ou n'en abattre qu'une partie. (Voy. pour plus de détails le *Cours de Navigation intérieure* professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Mary.)

La navigation par les barrages à fermettes est sujette aux mêmes inconvénients que la navigation par les PERTUIS (Voy. ce mot); elle est un peu moins incommode, mais aussi dangereuse; et elle entraîne les mêmes lenteurs, par suite du temps nécessaire pour rétablir le niveau primitif après qu'un certain nombre de fermettes ont été abattues pour le passage des bateaux. Hors des cas tout à fait exceptionnels on préfère les ÉCLUSES A SAS (Voy. ce mot).

BARRE DE PONT, la seconde des barres d'arcasse. (Voy. BARRES D'ARCASSE, CONSTRUCTION NAVALE.)

BARRE D'HOURDI, la plus haute des BARRES D'ARCASSE. (Voy. ce mot et l'art. CONSTRUCTION NAVALE.)

BARRES D'ARCASSE, pièces de la membrure des navires à poupe carrée (Voy. CONSTRUCTION NAVALE), qui sont fixées par leur milieu à l'étambot, et par leurs extrémités à l'estain. La plus élevée est la *barre d'hourdi*, la suivante est la *barre de pont*; puis viennent des barres dites *intermédiaires* portant simplement des numéros d'ordre, jusqu'à la barre inférieure qui porte le nom de *fourcat*. On trouvera, à l'article cité, les détails relatifs au travail de la barre d'hourdi, qui est à double courbure. Les autres barres ont deux faces planes horizontales; les faces avant et arrière sont des surfaces réglées, engendrées par une droite qui se meut parallèlement au longitudinal en s'appuyant con-

stamment sur les arêtes courbes qui terminent les faces planes. Ces arêtes courbes sont données en projection sur le plan horizontal dans le devis de construction. Pour équerer les barres, on se sert des sections parallèles au longitudinal qui sont également données par le devis. Soit OX (fig. 1) la

ligne médiane de la quille, ML la trace horizontale d'une section parallèle au longitudinal, CD la projection de cette section sur ce plan diamétral. Soient OMB et M'H les projections de l'arête supérieure arrière d'une des barres; M et M' les projections du point de cette arête appartenant à la section longitudinale considérée. On mènera au point M' la tangente M'T à cette section; l'angle HM'T, relevé à la fausse

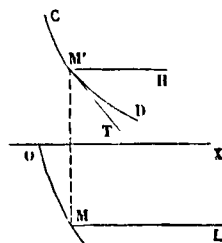


Fig. 1.

équerre, donnera la direction de la génératrice de la face arrière de la barre qui correspond au point MM'. On déterminera de la même manière les directions des autres génératrices; et il en sera de même pour la face avant de la barre. Le travail de la barre s'exécutera donc de la manière suivante: on commencera par lui donner deux faces planes parallèles, distantes de la quantité correspondante à l'épaisseur de la barre dans le sens vertical. Sur la face plane supérieure on portera un gabarit de la courbe OMB; on tracera cette courbe, ainsi que les directions telles que ML qui sont celles des sections longitudinales. Les angles relevés à l'équerre comme il a été dit plus haut, ayant été portés sur une planchette, on s'en servira pour déterminer les génératrices de la face arrière; pour cela, ayant ouvert l'équerre sous l'angle convenable, on portera le manche suivant ML par exemple, la direction de la lame sera alors celle de la génératrice correspondant au point M. On pourra déterminer de la sorte, sur la face plane inférieure, le point qui correspond à la génératrice du point M; et en faisant passer une courbe par tous les points ainsi déterminés sur cette seconde face plane, on aura l'arête inférieure arrière de la barre. Les arêtes avant, supérieure et inférieure, s'obtiendront de la même manière. On fera alors sauter à la scie ou à la hache le bois excédant entre les deux arêtes arrière et les deux arêtes avant; on aura ainsi les deux faces courbes, qu'il ne restera plus qu'à parer à l'herminette. Quant aux extrémités des barres, elles sont déterminées par les projections de l'estain qui sont fournies par le devis.

Quelques constructeurs substituent aux barres horizontales ou parallèles au dessus de quille des barres dites *relevées*, qui ont encore leurs faces planes, inférieure et supérieure, parallèles, mais faisant un certain angle avec le dessus de la quille. On trouve à ce système l'avantage d'une économie de bois et d'un meilleur mode de clouage. — Les barres parallèles relevées sont données dans le devis par leurs projections sur le longitudinal et sur le latitudinal. On ne détermine pas la projection horizontale qui est alors inutile; mais on déduit des deux projections données la projection oblique des

barres sur un plan parallèle à leurs faces planes, projection qu'on appelle quelquefois, mais improprement, le *rabattement* des barres. Voici comment cette projection se détermine. Soient a_1, b_2, c_3, d_4, f_5 (fig. 2) les projections sur le longitudinal des

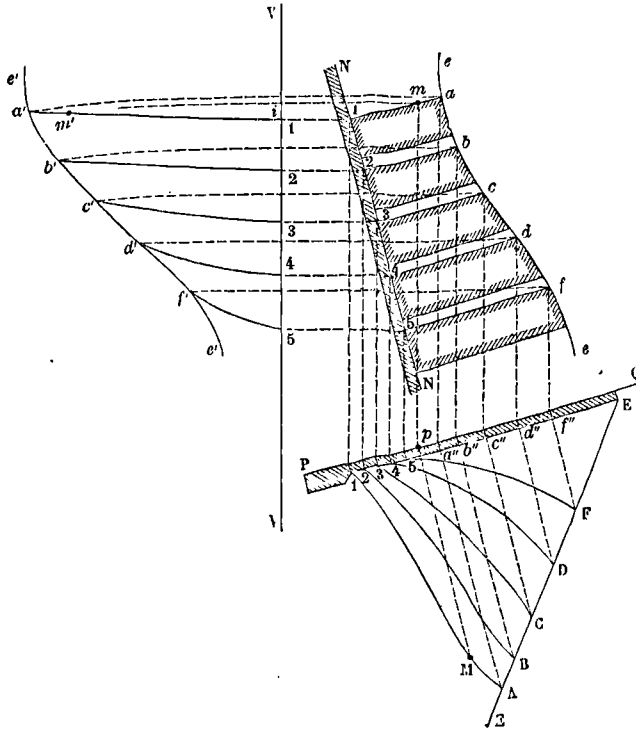


Fig. 2.

arêtes supérieures arrière des barres; $a'_1, b'_2, c'_3, d'_4, f'_5$ leurs projections sur le latitudinal; ee et $e'e'$ les projections de l'estain sur les mêmes plans verticaux; NN et VV celles de la ligne médiane antérieure de l'étambot. On mènera un plan perpendiculaire au longitudinal dont la trace PQ soit parallèle aux droites a_1, b_2, c_3 , etc. On projettera sur PQ, par des verticales, les points a, b, c, d, f et les points 1, 2, 3, 4, 5. Cela fait, on supposera que le plan PQ se rabatte sur le longitudinal en tournant autour de sa trace. On élèvera sur PQ les perpendiculaires $a''A, b''B, c''C, d''D, f''F$ respectivement égales aux distances horizontales des points a', b', c', d', f' de la projection latitudinale de l'estain à l'axe VV. Les points A, B, C, D, F ainsi déterminés appartiendront à l'intersection du plan de l'estain avec le plan PQ, et seront par conséquent en ligne droite. On aura ainsi les deux points extrêmes de l'arête supérieure arrière de chaque barre; il sera facile d'obtenir autant de points intermédiaires qu'on voudra. Si l'on veut, par exemple, un point intermédiaire sur la première barre, on déterminera les deux projections verticales m et m' d'un point de cette barre; on projettera m en p sur PQ par une verticale; puis on élèvera sur PQ une perpendiculaire pM égale à la distance $m'i$ de la projection latitudinale m' à l'axe VV; le point M

ainsi obtenu sera le point cherché sur la courbe AM1. On tracera de même les autres courbes B2, C3, D4, F5. On déterminera de la même manière les arêtes supérieures avant de chaque barre, et l'on prendra le gabarit de chacune des arêtes avant ou arrière. Le travail des barres se fera alors comme dans le cas où elles ont des faces horizontales. Pour équarrer les barres, on se servira, au lieu de plans horizontaux, de plans parallèles au plan PQ; et les angles à relever seront ceux que font les tangentes aux sections longitudinales avec les parallèles à PQ tracées dans ces sections.

BASCULE, nom qu'on donne par abréviation à la *balance à bascule* ou *BALANCE DE QUINTEZ*, et aussi aux *PONTS A BASCULE* (Voy. ces mots).

BASE, partie inférieure de la colonne. Sa hauteur est de 1 module dans l'ordre toscan, dans l'ordre dorique, dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite; dans l'ordre ionique seul elle a 1 module et 1 partie $\frac{1}{2}$. Ses détails varient suivant les ordres.

On donne aussi le nom de **BASE** à la partie inférieure du piédestal; elle a un demi-module dans l'ordre toscan, 10 parties ou minutes dans l'ordre dorique et dans l'ordre ionique, 12 parties dans l'ordre corinthien et l'ordre com-

posite. Ses détails varient également suivant les ordres (Voy. ORDRES)

BASE, LIGNE GÉODÉSIQUE (Voy. ce mot) dont la mesure exacte est le point de départ de tous les calculs d'une TRIANGULATION (Voy. ce mot). On en mesure au moins deux, dont une sert de vérification. La mesure d'une base est une opération très-délicate, et d'une grande importance, attendu que l'erreur commise sur la longueur de cette ligne se reproduit sur toutes les longueurs qui en sont déduites, proportionnellement à ces longueurs.

I. On a employé pour mesurer les bases des méthodes très-diverses, mais presque toutes fondées sur l'emploi d'une ou plusieurs règles bien étalonnées. On a d'abord employé des règles de bois; c'est ainsi que Bouguer, La Condamine et Godin ont mesuré la base qui a servi à calculer le degré du Pérou; leurs règles étaient étalonnées sur une règle en fer dont la longueur était exactement d'une toise à la température de 13° Réaumur; c'est cette toise que l'on désigne sous le nom de *toise du Pérou*. On a employé ensuite des règles métalliques; nous décrivons plus loin celles dont Delambre a fait usage dans la mesure de la méridienne qui a servi à la détermination du mètre. Le capitaine Mudge a employé des madriers en sapin et des tubes de verre de 20 pieds; le major Roy s'est

servi d'une chaîne d'acier de 100 pieds. On a fait usage de règles bimétalliques à compensation, de leviers coudés, de règles bimétalliques entre lesquelles on introduisait des coins de verre gradués, etc. Le major sarde Porro a employé une règle bimétallique avec laquelle il mesurait la distance entre les axes optiques de microscopes que l'on transportait successivement le long de la base. Enfin, MM. Ibañez et Saavedra ont opéré en Espagne avec un appareil du même genre, mais plus perfectionné, qui paraît susceptible d'une extrême précision.

II. Les règles de Borda dont se servait Delambre étaient au nombre de quatre, dont l'une, servant de *module*, avait à la température de 17°,6 centigrades une longueur précisément double de la toise du Pérou; les autres ne différaient du module que de quantités très-petites qui avaient été déterminées. Chacune de ces règles était double et se composait d'une règle principale en platine, et d'une seconde règle en cuivre, un peu plus courte, posée sur la première; elles étaient fixées ensemble par l'une de leurs extrémités et pouvaient se dilater librement par l'autre. La différence des dilatations aurait pu servir à déterminer la température, et par suite la longueur de la règle de platine. Cette différence était, en effet, accusée par des divisions tracées sur un tenon fixé à la règle de platine et mobile dans une rainure pratiquée le long de la règle de cuivre, sur le bord interne de laquelle on avait tracé un vernier dont les indications se lisaient avec un microscope fixé à la règle de cuivre. Mais

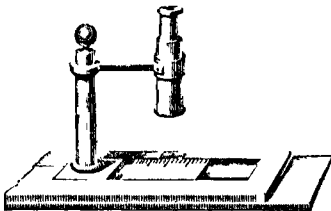


Fig. 1.

on préférerait déterminer directement la correction qu'il fallait faire subir à la longueur de la règle de platine d'après le nombre des divisions parcourues par le vernier. Les divisions du tenon étaient des 20000^{ièmes} de la longueur de la règle; et à l'aide du vernier on pouvait évaluer les 200000^{ièmes}; on avait reconnu par des expériences faites avec soin, qu'à la température zéro les verniers avançaient d'un nombre de ces parties dont la moyenne était 380,8, et que pour chaque partie dont avançait le vernier, la règle de platine s'allongeait de 0,9245 de partie; il en résulte qu'en appelant L la longueur de la règle de platine à zéro et P la moyenne des nombres de 200000^{ièmes} dont avançaient les verniers à une température quelconque, la correction à ajouter à la longueur de la règle était exprimée par la formule

$$\frac{(P - 380,8) \cdot 0,0245 \cdot L}{200000}$$

Afin de pouvoir rapporter les résultats à la toise du Pérou ou au *module* à 17°,6, on avait constaté par des expériences spéciales que 23,16 parties du

thermomètre métallique répondaient à 1° centigrade.

Les règles étaient enchâssées dans des madriers auxquels elles étaient liées par des briques qui les empêchaient de *charrier* dans le sens de leur longueur, sans les empêcher de se dilater librement. Les madriers reposaient eux-mêmes sur des supports à trois pieds, munis de vis qui permettaient de les abaisser ou de les élever. Les règles étaient recouvertes de petits toits portant à leurs extrémités des index verticaux qui servaient à les aligner. Afin d'éviter les chocs, on ne mettait pas directement les règles en contact; mais chacune était munie d'une languette en platine, sortant ou rentrant à coulisse au bout de la règle, et que l'on amenait en contact avec la règle suivante. (Voy. cette disposition à l'article VERNIER.) Chaque languette était divisée en parties qui étaient des 20000^{ièmes} de la longueur de la règle; et un vernier placé sur le bord interne de la coulisse permettait d'évaluer les 200000^{ièmes} en faisant la lecture avec un microscope établi sur la règle. On faisait subir aux longueurs mesurées sur ces languettes la même correction de température qu'aux règles. On ne s'astreignait pas à placer les règles horizontalement; on mesurait leur inclinaison avec un NIVEAU DE PENTE (Voy. ce mot), et on les réduisait à l'horizon (voir ce calcul à l'article CHAÎNE D'ARPENTEUR). On ne s'astreignait pas non plus à placer les règles en ligne droite dans la direction de la base à mesurer; quand une circonstance obligeait à dévier, on mesurait la déviation, et l'on calculait la projection de la longueur mesurée sur la direction de la méridienne. Enfin, la base mesurée, il restait à réduire la longueur obtenue au niveau de la mer. Soit B la base mesurée, B' la base réduite, R le rayon moyen du globe, h l'altitude moyenne dans l'étendue de la base, on a sensiblement

$$\frac{B'}{B} = \frac{R}{R + h'}$$

$$\text{d'où } B - B' = B \left[\frac{h}{R} - \frac{h^2}{R^2} + \frac{h^3}{R^3} - \dots \right].$$

Il n'est pas ordinairement nécessaire d'aller au delà des premiers termes de la série.

Beaucoup de bases ont été mesurées par la méthode qui vient d'être indiquée; malgré les erreurs d'étalonnage, de division, d'alignement, de lecture, etc., que l'on peut avoir à craindre, l'erreur finale ne paraît pas devoir s'élever au delà d'un 50000^{ième} de la longueur mesurée, et elle peut être beaucoup moindre.

III. L'appareil de MM. Ibañez et Saavedra se compose en premier lieu de deux règles superposées, d'environ 4^m de long sur 21^m de large et 5^m d'épaisseur. La règle supérieure est en platine, l'inférieure est en cuivre; il y a entre elles un intervalle de 6^m. Elles reposent sur des galets mobiles, dont les axes tournent dans des coussinets fixés à un banc, de même longueur que les règles, et porté par quatre supports à trois pieds. Elles sont fixées elles-mêmes à ce banc par leur milieu, mais peuvent se dilater librement par les deux bouts. La règle de platine est percée, à chacune de ses extrémités, d'une rainure longitudinale. La règle de cuivre porte, à chacune de ses extrémités, une bande de cuivre qui y est soudée par sa face inférieure, et qui est recouverte elle-même d'une bande de

platine; celle-ci n'est soudée à la bande de cuivre que par son bout le plus voisin du milieu des règles, et elle peut se dilater librement par l'autre bout. Cette bande de platine peut glisser dans la rainure de la règle supérieure; leurs bords portent des divisions qui sont des 40000^{èmes} de la longueur de la règle (ce sont des dixièmes de millimètre à la température de 6°,84 au-dessus de zéro). Ces divisions font partie d'un système général de division de la règle de platine. Il résulte de cette disposition que l'ensemble des deux règles forme un thermomètre métallique, dont les indications peuvent être lues dans les deux rainures que l'on vient de décrire; car la bande de platine fixée à la règle inférieure marche dans la rainure de la règle supérieure d'une quantité proportionnelle à la dilatation relative des deux règles; et la quantité dont elle a cheminé donne la température, comme il a été dit ci-dessus à l'occasion des règles de Borda. En effet, le coefficient de dilatation du platine étant 0,000083655, et celui du cuivre 0,000187785, la différence 0,000102130 est le coefficient de dilatation relative. Si L est la distance comprise, à zéro degré, entre le bout interne de la bande de platine et le milieu des règles, et si λ est la dilatation relative totale, accusée par la marche de ce même bout, $\frac{\lambda}{L}$ est la dilatation relative par unité de longueur; et, en la divisant par 0,00010213, on obtient le nombre de degrés exprimant la température.

Tout le long de la base à mesurer, mais un peu en dehors de cette base, on fait construire, à des distances successives, un peu moindres que la longueur des règles, des plates-formes en pierre de 130 à 140 kilogrammes; ces plates-formes sont destinées à recevoir les supports d'appareils spéciaux que MM. Ibañez et Saavedra désignent sous le nom de *cercles*. Chacun de ces cercles se compose, en effet, d'un limbe circulaire divisé, placé horizontalement, et dans l'intérieur duquel glisse un autre limbe concentrique, qui porte, aux extrémités d'un même diamètre, deux coussinets propres à recevoir les tourillons d'une lunette verticale, ou ceux d'un microscope. Chaque cercle a un support par lequel il repose sur une des plates-formes en pierre dont il a été question ci-dessus; mais il surplombe ce support de manière que son centre soit au-dessus de la base à mesurer; des vis de rappel servent à le faire mouvoir, par rapport à son support, de manière à le faire avancer ou reculer, soit dans le sens de la base, soit perpendiculairement. On dispose trois ou quatre de ces cercles sur autant de plates-formes consécutives. Le premier est amené exactement au-dessus d'un repère marqué sur le sol à la fin de la journée précédente, au point précis où la mesure s'est arrêtée. Pour cela, on place sur les coussinets du cercle une lunette verticale dont on rectifie l'axe optique avec soin (*Voy. LUNETTE*), et l'on fait mouvoir les vis de rappel de manière que l'image du repère vienne se placer sous la croisée du réticule; et, une fois la coïncidence obtenue, on s'assure, en faisant tourner le limbe intérieur qui porte les coussinets sur lesquels reposent les tourillons de la lunette, que, dans toutes les positions, cette coïncidence ne cesse pas d'avoir lieu. Les autres cercles sont installés de même, le centre au-dessus de la base; on vérifie leur alignement dans le sens de la base au moyen

d'une lunette horizontale avec laquelle on vise des mirettes spéciales placées sur les coussinets de chaque cercle.

Ces opérations préparatoires étant achevées, on amène le banc qui porte les règles dans la direction des centres de deux cercles consécutifs, de manière que les extrémités de la règle de platine soient au-dessous de ces centres, ce dont on s'assure à l'aide de microscopes que l'on place verticalement sur les coussinets de ces cercles; et on lit, à l'aide de ces mêmes microscopes, le numéro de la division de la rainure qui correspond à une division déterminée de la bande de platine glissant dans cette rainure. Pour faire cette lecture, on amène, à l'aide d'un MICROMÈTRE (*Voy. ce mot*) placé en avant de l'oculaire du microscope, l'image du trait que l'on veut observer, entre deux fils verticaux de ce micromètre, et l'on tient compte, dans l'évaluation de la longueur observée, du déplacement indiqué par le nombre de tours dont la vis micrométrique a tourné. On opère de même aux deux bouts de la règle.

On peut alors en déduire, par des calculs analogues à ceux qui ont été indiqués dans la méthode de Delambre, la longueur de la portion de la règle comprise entre les axes optiques des deux microscopes. On transporte le banc dans l'intervalle suivant, et l'on opère de la même manière. Pour déterminer l'inclinaison des règles par rapport à l'horizon, on se sert d'un niveau à bulle d'air muni d'un arc divisé, dont on trouvera la description à l'article NIVEAU (*Voy. ce mot*). On réduit la longueur mesurée à l'horizon, après lui avoir fait subir la correction de température; et on la corrige, s'il y a lieu, de la déviation, qui se mesure à l'aide d'une lunette et des cercles dont il a été question. Quand la base a été mesurée, on la réduit au niveau de la mer, comme dans la méthode précédente. Nous ne pourrions entrer ici dans les détails minutieux qu'exigeraient la description complète de cet appareil compliqué et l'exposition de la méthode à suivre pour l'employer utilement; nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage intitulé : *Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la carte d'Espagne*, traduit de l'espagnol par le colonel Laussedat. Tout paraît avoir été prévu, dans la construction de cet appareil, pour lui donner un degré de précision remarquable; et l'essai qui en a été fait pour la mesure de la base de Madridejos semble justifier toutes les espérances qu'on avait attachées à son emploi, puisque les deux mesures qui ont été faites de la section centrale de cette base, à trois mois d'intervalle, n'ont donné qu'une différence de 0^m,19 sur une longueur de plus de 2800^m.

Il est très-utile de recommencer ainsi, quand on le peut, la mesure entière d'une base, surtout en suivant une marche rétrograde; si l'on n'obtient pas de différence sensible, on peut avoir une foi entière dans le résultat des opérations.

IV. Les praticiens ne sont pas d'accord sur la question de savoir s'il est préférable de mesurer une base petite ou grande. Les partisans de la première opinion soutiennent que l'opération étant plus prompte, l'attention des opérateurs moins fatiguée, il y a moins de chances d'erreur; les partisans de l'opinion contraire répliquent qu'une erreur commise sur une petite base peut être du même ordre

que sur une grande, et que dès lors cette erreur est augmentée dans une proportion considérable par la grandeur relative des côtés des triangles liés à cette base. Bessel a mesuré près de Königsberg une base qui n'a que 1822^m; en France, au contraire, on a choisi des bases étendues : celle d'Ensisheim, dans le Bas-Rhin, a 19044^m,50.

Sept bases ont été mesurées en France : la première, près de Melun, par Delambre ; la seconde, près de Perpignan, par le même ; la troisième, à Ensisheim, par Henry ; la quatrième, près de Brest, par M. Bonne ; la cinquième, près d'Aix, par M. Delcros ; la sixième, près de Bordeaux, par M. Brousseau ; la septième, près de Dax, par M. Corabœuf. Elles ont été reliées depuis par des chaînes de triangles qui ont permis de les vérifier les unes par les autres ; ces vérifications n'ont constaté que des différences extrêmement faibles ; excepté pour la base de Perpignan, qui a été corrigée depuis (l'erreur était de 1^m,68), elles ne s'élèvent pas à 1 mètre, et sont souvent fort au-dessous. Bien qu'on n'ait pas atteint dans ces diverses mesures le degré de précision auquel paraît être arrivée dans ces derniers temps la Commission de la carte d'Espagne, néanmoins les résultats obtenus honorent les savants qui ont exécuté de pareils travaux.

V. La mesure directe d'une base est une opération longue et délicate ; il peut arriver qu'ayant à faire rapidement la triangulation d'un pays on n'ait ni le temps ni les moyens de mesurer une base par les procédés ci-dessus indiqués. Dans ce cas, on s'en procure une par le calcul en évaluant la distance de deux points dont les coordonnées géographiques sont connues (Voy. DISTANCES GÉOGRAPHIQUES).

Dans les opérations hydrographiques on peut avoir besoin de se procurer une base en mer ; on emploie pour cela quatre procédés : 1° *Par la mesure directe.* On peut se servir pour cela d'une forte ligne de sonde garnie de flotteurs, et dont la longueur a été exactement déterminée ; deux canots se transportent le long de la ligne à mesurer, en prenant pour repères des flotteurs garnis de plombs très-lourds ; ce procédé exige une mer calme ; il ne s'applique qu'à de petites distances, et n'est susceptible d'aucune précision. Si la distance à mesurer est considérable, on peut se servir de la marche du navire estimée à l'aide du LOCH (Voy. ce mot) ; cette méthode peut donner de bons résultats quand la vitesse dépasse 3 nœuds et qu'il n'y a point de courant. 2° *Par la hauteur de la mâture.* Le navire étant supposé en B, à l'extrémité de la base à me-

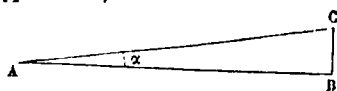


Fig. 2.

surer, soit BC la hauteur de sa mâture ; on se transporte en canot à l'autre extrémité A de la base, et l'on mesure avec un instrument à réflexion l'angle $\alpha = CAB$, sous lequel de ce point on aperçoit la hauteur BC ; en négligeant la hauteur de l'œil au-dessus du niveau de la mer, on peut regarder le triangle ABC comme rectangle en B ; on a donc

$$AB = \frac{BC}{\tan \alpha}$$

cette méthode ne peut être appliquée que lorsque

la base est peu considérable. 3° *Par la vitesse du son.* Deux observateurs se placent aux extrémités de la base ; ils font tirer quelques coups de canon, et chacun observe avec une montre à secondes le temps écoulé entre l'instant où il aperçoit la lumière de la pièce, et celui où il entend le bruit de l'explosion. Chacun d'eux est muni d'un thermomètre et d'un hygromètre. Si t désigne la température et f la tension de la vapeur qui répond aux indications de l'hygromètre, on a, en appelant V la vitesse de propagation du son,

$$V = 341^m,09 + 0^m,59 (t - 15^\circ) + 0,084f.$$

Cette vitesse peut être influencée par le vent ; mais en prenant la moyenne entre les valeurs trouvées, à un même instant, par les deux observateurs, on élimine l'influence du vent. Si V représente cette moyenne, T et T' les nombres de secondes comptées par les deux observateurs, la distance cherchée aura pour expression

$$\frac{1}{2} V (T + T').$$

Cette méthode ne convient que pour la mesure d'une base de grande étendue. 4° *Par des observations astronomiques.* On détermine astronomiquement les coordonnées géographiques des deux extrémités de la base, et l'on calcule la distance de ces deux points (Voy. DISTANCES GÉOGRAPHIQUES). Au lieu de prendre pour rayon celui de la sphère transversalement osculatrice en l'un des points donnés [Voy. COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des)], on peut prendre la grande normale au point de la base considérée qui répond à la moyenne des latitudes extrêmes. (Voy. le Cours de navigation et d'hydrographie de E. P. Dubois, p. 616.)

BASE (CORRECTION DE), correction qu'il faut faire subir aux coordonnées géographiques des différents sommets d'un réseau de triangle (Voy. TRIANGULATION), et aux azimuts des divers côtés, par suite d'une erreur commise sur la mesure de la base, ou sur le calcul d'une ligne géodésique quelconque. Une erreur commise sur la base affecte proportionnellement tous les côtés du réseau ; et par conséquent la distance de deux sommets quelconques. Soit A le premier sommet, M un sommet quelconque, P le pôle ; considérons le triangle sphérique qui a pour sommets les points A, M, P ; on suppose que le côté AM soit affecté d'une erreur ; et l'on demande la correction à faire subir aux coordonnées géographiques du point M , et de l'azimut des côtés qui aboutissent en ce point. Soit l la latitude du point A , l' celle du point M ; φ la différence de leur longitude, m le côté AM , A et M les angles qui ont pour sommets les points A et M .

On a d'abord, par la propriété des sinus,
 $\sin A \cdot \cos l = \cos l' \cdot \sin M. \quad [1]$

Différentiant, en regardant A et l comme constants, on trouve

$$0 = -\sin l' \sin M dl' + \cos l' \cos M dM, \quad [2]$$

d'où $dl' = \cot l' \cdot \cot M \cdot dM$.

On a ensuite, dans le triangle considéré,
 $\sin l = \sin l' \cos m + \cot l' \sin m \cdot \cos A. \quad [3]$

Différentiant dans la même hypothèse, on obtient $\cos l' dl' = -\sin l' \sin m dm + \cos l' \cos m \cos A dm$, ou, en remplaçant le produit $\cos l' \cos A$, par la valeur tirée de [3] et réduisant :

$$\cos l' dl' = -dm \left(\frac{\sin l - \sin l' \cos m}{\sin m} \right);$$

Mais on a, dans le même triangle,

$$\sin l = \sin l' \cos m + \cos l' \sin m \cdot \cos M; \quad [4]$$

à l'aide de cette relation, la précédente peut s'écrire, après réduction,

$$d l' = - \cos M d m. \quad [5]$$

Si l'on égale cette valeur à la valeur [2], on trouve en réduisant

$$d M = - \sin M \operatorname{tang} l' \cdot d m. \quad [6]$$

Le même triangle donne encore

$$\cos m = \sin l \sin l' + \cos l \cos l' \cos \varphi. \quad [7]$$

Différentiant en faisant varier m , l' et φ , on obtient

$$- \sin m d m = \sin l \cos l' d l' - \cos l \sin l' \cos \varphi d l' - \cos l \cos l' \sin \varphi d \varphi,$$

ou, en mettant pour $\cos l \cos l' \cos \varphi$ sa valeur tirée de [7],

$$- \sin m d m = d l' \left(\frac{\sin l - \sin l' \cos m}{\cos l'} \right) - \cos l \cos l' \sin \varphi d \varphi,$$

ou, en vertu de l'équation [4],

$$- \sin m d m = d l' \cdot \sin m \cdot \cos M - \cos l \cos l' \sin \varphi d \varphi.$$

Mais la relation des sinus donne

$$\sin \varphi \cos l = \sin m \sin M;$$

en substituant et supprimant le facteur $\sin m$, il vient

$$- d m = d l' \cdot \cos M - \cos l' \cdot \sin M \cdot d \varphi.$$

Remplaçant enfin $d l'$ par sa valeur [5] et simplifiant, on en tire

$$d \varphi = - \frac{\sin \varphi}{\cos l'} d m. \quad [8]$$

Les relations [5], [8] et [6] permettront de calculer les corrections à faire subir à la latitude du point M, à sa longitude, à l'azimut de AM sur l'horizon de M, et par suite aux azimuts des côtés qui aboutissent en M, connaissant l'erreur commise sur la longueur de A M.

Si l'erreur avait été commise sur l'un des côtés du réseau, on opérerait comme si ce côté était la base, en prenant pour le point A le premier sommet de ce côté dans l'ordre de la triangulation, et ne tenant point compte des côtés qui précèdent.

BASE PRODUCTIVE, projection horizontale d'une terre (Voy. ARPENTAGE).

BASTION, ouvrage de FORTIFICATION (Voy. ce mot) qui fait saillie sur le corps de la place. Il joue, dans le système de défense moderne, le rôle que jouaient les tours dans la fortification du moyen âge; les bastions ne sont qu'une transformation de ces tours. La forme des bastions est telle que deux bastions consécutifs se défendent mutuellement, en même temps qu'ils défendent l'un et l'autre la *courtine*, ou portion d'enceinte, qui les réunit.

Un bastion ABCDE (fig. 1) comprend deux *faces*

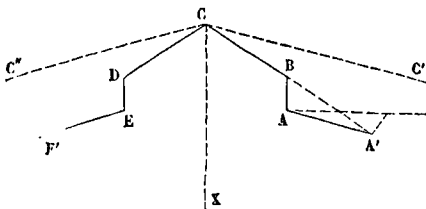


Fig. 1.

CB et CD et deux *flancs* AB et DE. Le point C est le *saillant* du bastion; l'angle BCD s'appelle l'*angle flanqué*; la bissectrice CX de cet angle est ce qu'on nomme la *capitale* du bastion. Le point B se nomme *épaule*, et ABC est l'*angle d'épaule*. L'intervalle AE

est la *gorge* du bastion. On appelle *angle diminué* l'angle C'CB que fait la face BC avec la droite CC' parallèle à la courtine AA', et formant le *côté extérieur* du polygone fortifié. Cet angle est ainsi nommé parce que c'est la quantité dont il faut diminuer le demi-angle C'CX du polygone extérieur pour obtenir la direction de la face CB du bastion. L'angle diminué ne doit pas dépasser 18 à 20 degrés; il est de 18° 26 environ dans le tracé de Cormontaigne. La face CB prolongée, et formant ce que l'on nomme la *ligne de défense*, vient en effet aboutir au sommet A' de l'angle rentrant du bastion voisin; et il faut qu'une pièce placée en ce point puisse battre indifféremment dans la direction A'C et dans la direction A'A, lesquelles directions font entre elles un angle égal à l'angle diminué; or, les dispositions adoptées pour les embrasures et pour la manœuvre des pièces ne permettent pas de faire tourner leur axe de plus de 20°; de là la limite fixée pour l'angle diminué. L'angle flanqué ne saurait être inférieur à 60° pour que le bastion présente une solidité suffisante. Du temps de Deville on s'astreignait à faire cet angle de 90°; aujourd'hui on a reconnu l'avantage de lui donner la plus grande valeur possible. Quant à l'angle d'épaule, il se trouve déterminé par la condition que le flanc soit perpendiculaire au prolongement de la face adjacente du bastion voisin. Le flanc doit avoir au minimum 15 mètres pour recevoir deux pièces d'artillerie pouvant manœuvrer à l'aise; mais sa valeur défensive augmente avec son étendue. Vauban lui donnait environ 50 mètres; Cormontaigne a réduit cette longueur à 40 mètres. Il y a avantage à diminuer la longueur des faces, afin de restreindre l'espace correspondant du chemin couvert sur lequel l'ennemi peut établir ses batteries de brèche; cependant il faut conserver au bastion une étendue suffisante et ne pas trop le rétrécir à la gorge. Dans le premier tracé de Vauban, le flanc était un arc de cercle AB (fig. 2) décrit du saillant du

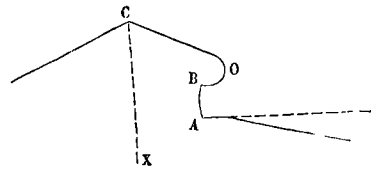


Fig. 2

bastion voisin comme centre. Cette disposition avait pour but de concentrer les feux sur le saillant à défendre. La partie antérieure B du flanc présentait en outre une saillie O appelée *orillon* destinée à abriter les pièces dont le flanc est armé. Enfin la courtine présentait en A une petite brique dirigée suivant la ligne de défense. Vauban a renoncé lui-même plus tard à ce tracé dispendieux, dont il n'était d'ailleurs pas l'auteur. Le flanc n'a pas, en effet, pour mission unique de défendre le saillant voisin; il faut qu'il puisse donner au besoin des feux à une certaine distance en avant de ce saillant; et l'orillon devient alors un obstacle. On y a renoncé pour adopter le tracé plus simple de la figure 1.

Un bastion peut être *vide* ou *plein*. Il est *vide* lorsque le terre-plein ne fait que contourner les

flancs et les faces, et que l'intérieur du bastion se trouve à un niveau plus bas. Il est plein quand tout l'intérieur du bastion est au même niveau. Chacune de ces deux dispositions a ses avantages et ses inconvénients : le bastion vide abrite mieux les défenseurs; mais le bastion plein se prête mieux à la construction des retranchements. Lorsque la position d'un bastion le désigne d'avance comme devant être un point d'attaque, il vaut mieux en faire un bastion plein, malgré le peu de sûreté qu'il offre aux défenseurs quand il n'y a encore ni traverse ni retranchement. Quand un bastion est, par sa position, à l'abri d'une attaque directe, il vaut mieux qu'il reste vide. Un bastion destiné à devenir un point d'attaque est dans les meilleures conditions lorsqu'il porte un CAVALIER (Voy. ce mot), ou lorsqu'on y a construit un retranchement à l'avance (Voy. RETRANCHEMENT).

Il arrive fréquemment que les flancs sont à une moindre hauteur que les faces au-dessus du fond du fossé; c'est ce qui a lieu particulièrement pour les flancs circulaires à orillons. Mais cette disposition n'est pas générale. Elle est favorable à la défense des fossés; mais elle nuit à l'efficacité des feux obliques que les flancs sont appelés à fournir en avant des saillants qu'ils protègent.

L'angle saillant d'un bastion est souvent défendu par une batterie à *barbette*, c'est-à-dire par une pièce de canon établie sur une plate-forme, qui lui permet de tirer, sans embrasure, par-dessus le parapet. Les servants de cette pièce sont très-exposés; mais la pièce peut agir sur un champ beaucoup plus étendu que si elle était placée dans une embrasure; et le saillant du bastion commande ainsi la campagne à une grande distance à droite et à gauche, en même temps qu'elle la domine en avant (Voy. BARBETTE).

BATEAU-DRAGUEUR. Voy. DRAGAGE.

BATEAUX A AIR, appareils employés pour exécuter des travaux au fond de l'eau. Leurs formes et leurs dispositions sont très-diverses; mais leur principe est le même. On amène, à l'aide d'un bateau, sur le lieu où l'on veut travailler, une sorte de cloche renversée, que l'on échoue; quelquefois le bateau lui-même est échoué ainsi. On comprime l'air dans la cloche pour en chasser l'eau. Les ouvriers d'abord placés dans un compartiment supérieur, que l'on a fermé hermétiquement, s'introduisent alors dans le compartiment inférieur et y exécutent le travail demandé; ils remontent ensuite dans le compartiment supérieur; on donne issue à l'air comprimé, l'eau rentre dans le compartiment inférieur, et la cloche peut être remontée.

On peut apprécier sommairement le travail nécessaire pour chasser l'eau, à l'aide des considérations suivantes. Soit V_0 le volume primitivement occupé par l'air dans la cloche, et V_1 le volume occupé par l'air comprimé quand l'eau a été entièrement chassée. Soit \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique, qui s'exerce d'abord dans l'espace V_0 , et soit \mathcal{P}_1 la pression de l'air comprimé. Soit h la hauteur primitive de l'eau dans la cloche, et x la quantité dont elle a descendu à un instant quelconque. Soit Ω le poids du mètre cube d'eau. Nous considérerons la cloche comme un prisme, dont nous représenterons la section par Ω . Le travail T à fournir se compose de deux parties, le travail T_1 , nécessaire pour re-

fouler l'eau, et le travail T_2 , nécessaire pour comprimer l'air. La pression exercée à un instant quelconque sur la surface de l'eau est le produit de la section Ω par la pression Πx exercée sur un mètre carré. Le travail élémentaire de cette pression est $\Omega \Pi x dx$; et son travail total a donc pour expression

$$T_1 = \Pi \Omega \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \Pi \Omega h^2$$

ou, comme $\Omega h = V_1 - V_0$,

$$T_1 = \frac{1}{2} \Omega h (V_1 - V_0).$$

Quant au travail nécessaire pour faire passer de la pression \mathcal{P}_0 à la pression \mathcal{P}_1 , une masse d'air dont le volume définitif est V_1 , il est exprimé, d'après le théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz (Voy. ELASTICITÉ), par

$$T_2 = V_1 \mathcal{P}_1 \log' \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0};$$

on a donc

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \Pi h (V_1 - V_0) + V_1 \mathcal{P}_1 \log' \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0}.$$

La pression \mathcal{P}_1 est évidemment égale à la pression qui s'exerce, extérieurement à la cloche, au fond de l'eau, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 + \Pi h$$

et par conséquent

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0} = 1 + \frac{\Pi h}{\mathcal{P}_0} = 1 + \frac{h}{H},$$

en désignant par H la hauteur d'eau (10^m,33 environ) qui mesure la pression atmosphérique. On peut donc écrire

$$T = \frac{1}{2} \Pi h (V_1 - V_0) + \Pi V_1 (H + h) \log' \left(1 + \frac{h}{H} \right).$$

Si t désigne la durée de cette opération, exprimée en secondes, et n le nombre de chevaux-vapeur exprimant la force de la machine employée, on aura, en supposant qu'on n'en utilise que les $\frac{2}{3}$,

$$\frac{2}{3} \cdot N \cdot 75 t = T,$$

d'où l'on tirera N si l'on se donne le temps t , savoir

$$N = \frac{1,5 \cdot T}{75 t} = 0,02 \frac{T}{t}.$$

(Voy. le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse, professé à l'École des ponts et chaussées.)

Cette théorie est applicable à l'*hydrostat sous-marin*, qui est un appareil du même genre.

BATTERIES A RICOCHET, batteries que l'assiégeant élève en avant de la deuxième parallèle (Voy. ATTAQUE DES PLACES) pour tirer à ricochet sur le chemin couvert du bastion d'attaque et sur ceux des demi-lunes collatérales. Ces batteries ont une direction perpendiculaire à celle du chemin que chacune d'elles doit prendre d'enfilade; elles peuvent rendre des services pendant une grande partie de la durée du siège. (Voy. RICOCHET.)

BATTERIES DE BRÈCHE, batteries que l'assiégeant établit sur la crête même du glacis, au saillant du chemin couvert, pour battre en brèche le saillant d'une demi-lune ou d'un bastion. Ces batteries s'étendent d'ordinaire depuis le saillant du chemin couvert jusqu'à la deuxième traverse. Quand le fossé est étroit et profond, on est obligé d'élever la batterie de brèche sur le terre-plein même du chemin couvert. (Voy. ATTAQUE DES PLACES.)

BATTERIES DE CÔTE, batteries armées de bouches à feu de gros calibre et qui sont destinées à défendre les ports, les rades, ou certains points du littoral, contre l'attaque des vaisseaux venant de la haute mer. Ce sont de simples épaulements de 6^m d'épaisseur entre les deux crêtes, et dont le talus extérieur se prolonge jusqu'à terre. On leur donne de 14 à 18 mètres de hauteur; trop basses, elles seraient exposées aux ricochets, et quelquefois même au tir plongeant de la mousqueterie; trop hautes, elles perdraient l'avantage du tir rasant qui est le meilleur contre les vaisseaux. La plongée, pour cette même raison, au lieu d'être inclinée à 6 sur 1, comme dans les parapets ordinaires, n'est inclinée qu'à 10 de base sur 1 de hauteur. Le talus intérieur est ordinairement revêtu en maçonnerie jusqu'à 0^m,60 au-dessous de la crête. Toutes les pièces dont une batterie de côte est armée doivent tirer à **BARBETTE** (Voy. ce mot) pour avoir le plus de champ possible. Les pièces, à moins que la place ne manque, doivent être espacées de 8^m, ou au moins de 7^m; lorsqu'elles sont à la distance convenable, on creuse entre les plates-formes des rigoles de 0^m,50 de profondeur, où les canonniers se tiennent, dans les intervalles de leur service.

Lorsque l'étendue de mer sur laquelle la batterie doit porter ses coups ne dépasse pas 90°, on la trace en ligne droite, perpendiculairement à la bissectrice du secteur que ses feux doivent embrasser. Si ce secteur dépasse 90°, on brise la batterie en deux ou trois faces. On les garantit de l'enfilade par deux épaulements en retour aux extrémités. Les batteries de côte doivent toujours être placées sur la terre ferme, mais le plus près possible du bord de la mer. Comme ces ouvrages ne se défendent pas par eux-mêmes contre une attaque par terre, il faut, si cette attaque est à craindre, y pourvoir par des moyens spéciaux. Lorsque la batterie est isolée, et ne peut être défendue ou secourue par un ouvrage de fortification voisin, on est obligé de lui donner un réduit, qui sert de refuge aux défenseurs, et d'abri aux vivres et aux munitions. Ce réduit varie de position, de forme et de dimensions suivant les circonstances locales; on en distingue trois types, l'un pour une batterie de 4 pièces, servie par 20 hommes, un autre pour une batterie de 8 pièces, servie par 40 hommes, et le troisième pour une batterie de 12 pièces, servie par 60 hommes. La forme la plus ordinairement adoptée pour le réduit est celle d'une tour à un étage surmontée d'une plate-forme défensive; quelquefois c'est un simple corps de garde n'ayant qu'un rez-de-chaussée, mais également surmonté d'une plate-forme. La muraille du réduit doit être crénelée; sa plate-forme doit être bordée d'un mur de 1^m,80 de hauteur percé également de créneaux. Dans de rares circonstances on arme la plate-forme d'un ou deux obusiers qui sont alors placés dans des embrasures. Le réduit se place derrière la batterie, assez près pour inspirer confiance aux défenseurs, mais pas assez pour que des éclats de pierre enlevés du réduit par le canon ennemi ne puissent blesser les hommes qui servent la batterie; une distance d'environ 30^m paraît être le minimum à adopter. Le réduit doit dominer la batterie de 0^m,50 ou 1^m, et voir tout son intérieur. Si le réduit n'est pas suffisamment couvert des deux côtés par les épaulements en retour il

peut être nécessaire d'y ajouter des **TRAVERSES**; mais ces traverses ont l'inconvénient de masquer en partie les vues du réduit sur la plage environnante.

Les bouches à feu généralement employées aux batteries de côte sont, en France, le canon de 30, l'obusier de 22 centimètres et le mortier de 32 centimètres. (Voy. pour plus de détails les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

BATTEUSE. Voy. MACHINES AGRICOLES.

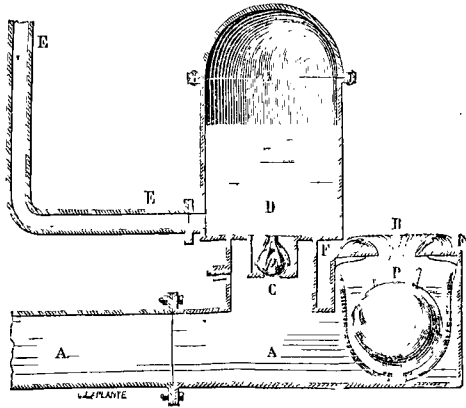
BAU, pièce de charpente qui relie les deux branches d'un couple et qui sert de soutien au pont d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Le bau a un bouge vertical, c'est-à-dire une courbure, par suite de laquelle le milieu est plus élevé au-dessus de la quille que les extrémités. Cette courbure se détermine par la méthode du **QUART DE NONANTE** (Voy. ce mot).

BEAUPRÉ (MÂT DE), mât incliné, couché sur l'éperon à la proue d'un navire. (Voy. MATURE.)

BÉLIER, le premier des signes du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

BÉLIER HYDRAULIQUE, machine employée à élever les eaux. Son invention est généralement attribuée à Montgolfier, qui a construit en 1796 le premier appareil de ce genre. Il paraît cependant qu'une machine établie d'après les mêmes idées aurait été construite en 1772 à Oulton, par un Anglais du nom de Whitehurst. Néanmoins M. Morin fait observer avec raison à ce sujet que Montgolfier doit être considéré comme l'inventeur du bélier hydraulique aux mêmes titres que Watt est regardé comme le véritable inventeur des machines à vapeur.

Quoi qu'il en soit, voici en quoi consiste la machine de Montgolfier. Un tuyau horizontal AA



amène l'eau d'un bassin, et la verse par un orifice circulaire B, qui peut être fermé par une soupape à boulet P (Voy. SOUPAPES), appelée *soupape d'arrêt*, mais qui, dans les premiers instants, est ouvert. Le tuyau AA communique par un autre orifice circulaire C, avec une capacité DD, dans laquelle s'abouche un tuyau d'ascension EE; l'orifice C peut s'ouvrir; mais, dans les premiers instants, il est fermé par une soupape à boulet p, appelée *soupape d'ascension*. L'écoulement qui s'opère par l'orifice B produit une contraction analogue à celle qui se manifeste dans les **AJUTAGES CYLINDRIQUES** (Voy. ce

mot), et il en résulte en B une diminution de pression. Par l'effet de la différence des pressions qui s'exercent alors au-dessus et au-dessous de la soupape P, celle-ci est soulevée et vient fermer l'orifice B. La masse d'eau en mouvement dans le tuyau AA, trouvant ainsi l'issue subitement fermée et perdant tout à coup toute sa puissance vive, exerce sur les parois de ce tuyau une pression considérable qui maintient l'orifice B fermé, soulève la soupape p; et le liquide s'élève dans la capacité DD, en comprimant l'air qu'elle contient. Mais, par suite de cet écoulement, la masse d'eau contenue dans le tuyau AA est bientôt ramenée au repos, la soupape p retombe par son poids et aussi par l'effet d'une contraction et d'une diminution de pression près de l'orifice C, analogues à celles dont nous avons parlé tout à l'heure à propos de l'orifice B. La pression du liquide en AA étant ainsi ramenée à sa valeur primitive, la soupape P se rouvre, et l'écoulement recommence. Les mêmes phénomènes se reproduisent ainsi périodiquement, et à chaque période une certaine quantité d'eau s'introduit par l'orifice C dans la capacité DD. Chaque fois que la soupape p est fermée, l'air comprimé dans cette capacité par le liquide affluent se détend et refoule l'eau par le tuyau d'ascension, dans un bassin supérieur, dont le niveau peut être beaucoup plus élevé que celui du bassin alimentaire. Chaque fois que la soupape P se ferme et chaque fois qu'elle retombe, elle produit un choc violent auquel on a donné le nom de *coup de bélier*, et c'est de là que vient le nom de *bélier hydraulique* donné à la machine dont nous nous occupons. Le tuyau AA se nomme le *corps* du bélier et la paroi FF, dans laquelle s'ouvre l'orifice B, est ce que l'on appelle la *tête*.

Plusieurs observateurs, particulièrement Bossut, en 1798, et plus tard Eytelwein, en 1822, ont étudié l'effet de cette machine. Il est d'abord évident que si q désigne le volume d'eau élevé par seconde dans le bassin supérieur, à une hauteur h au-dessus du bassin alimentaire, et h' le poids du mètre cube d'eau, le travail ou effet utile est exprimé par la formule

$$T_m = \Pi q h.$$

Si q' désigne le volume d'eau dépensé dans une seconde par l'orifice B, et h' la hauteur du niveau dans le bassin alimentaire au-dessus de cet orifice, le travail moteur fourni par l'écoulement de cette eau a pour valeur

$$T_m = \Pi q' h',$$

d'où résulte pour l'expression du rendement de la machine la formule

$$\frac{T_m}{T_m} = \frac{q h}{q' h'}. \quad [1]$$

Cela posé, l'observation du rendement dans diverses circonstances étudiées avec soin par Eytelwein a conduit aux conséquences suivantes :

La grandeur de l'orifice B, et de l'espace annulaire compris entre les bords de cet orifice et la soupape P supposée ouverte, doit être assez grande pour équivaloir à la section transversale du corps de bélier AA.

La soupape d'ascension p et la capacité DD, qui joue le rôle de réservoir d'air (Voy. ce mot), doivent être placés le plus près possible de la tête du bélier. Il y a intérêt à ne pas augmenter outre mesure le poids de la soupape d'arrêt; car le nombre des

coups de bélier par minute, et conséquemment le rendement de la machine, diminue quand le poids de cette soupape augmente. Eytelwein a étudié le mouvement de la soupape d'arrêt en y adaptant une tige verticale armée d'un pinceau qui traçait une courbe sur une bande de papier animée d'un mouvement uniforme dans le sens horizontal, l'un des premiers appareils d'indications continues dont on ait fait usage. Il a reconnu ainsi que la durée de l'ouverture de la soupape est à celle de la fermeture à peu près dans le rapport de 5 à 2, et que la vitesse de descente est beaucoup plus grande que la vitesse de montée, ce qui explique pourquoi le choc est plus violent quand la soupape retombe sur ses brides que lorsqu'elle vient fermer l'orifice B. Eytelwein conseille de donner au réservoir d'air une capacité au moins égale à celle du tuyau d'ascension, et il adopte, pour fixer la longueur L du corps de bélier, une formule qui revient à

$$L = h \left(1 + \frac{0,628}{h'} \right); \quad [2]$$

elle suppose le tuyau d'ascension vertical.

M. Morin a déduit des expériences d'Eytelwein la formule empirique suivante pour représenter le rendement de la machine :

$$\frac{T_m}{T_m} = 0,258 \sqrt{12,80 - \frac{h}{h'}}; \quad [3]$$

12,8 étant le maximum de la valeur qu'on puisse attribuer au rapport $\frac{h}{h'}$ entre la hauteur d'ascension et la chute. On voit par cette formule que le rendement descend de 0,885 à zéro, quand la hauteur d'ascension varie depuis h' jusqu'à 12,8 h' . Cette formule permet de déterminer le rapport des volumes ci-dessus représentés par q et q' ; car de la comparaison des formules [1] et [3], on conclut

$$\frac{q}{q'} = 0,258 \frac{h'}{h} \sqrt{12,80 - \frac{h}{h'}}. \quad [4]$$

Connaissant q' , on en déduirait le volume q d'eau élevée, et par suite le volume $q' - q$ d'eau perdue. De la connaissance des volumes q et q' , on déduira le diamètre du tuyau d'ascension et celui du corps du bélier, en limitant à 0^m,50 la vitesse de l'eau dans chacun de ces tuyaux, afin que, d'une part, l'eau arrive dans le bassin supérieur avec une faible vitesse, et que d'autre part les chocs ou coups du bélier ne prennent pas une intensité trop grande. On ne donne guère au corps du bélier un diamètre supérieur à 0^m,25, ni inférieur à 0^m,025.

La soupape d'arrêt peut être noyée par les eaux d'aval sans qu'il en résulte une diminution sensible dans le rendement de la machine.

On a proposé différentes modifications au bélier hydraulique de Montgolfier, principalement en vue de diminuer l'intensité des coups de bélier. Mais les machines destinées à réaliser cette amélioration donnent toutes un rendement inférieur à celui d'un bélier hydraulique ordinaire bien établi. MM. Easton et Amos établissent dans la tête du bélier, entre les soupapes d'arrêt et d'ascension, un petit réservoir d'air, muni d'une soupape qui laisse entrer l'air extérieur quand la soupape d'ascension s'abaisse; cette disposition atténue le choc de la soupape d'arrêt; de plus, l'air introduit ainsi dans le petit réservoir s'introduit sous la soupape d'ascension dans le grand, et renouvelle ainsi l'air qui a pu être

entraîné en dissolution dans l'eau. Ce dispositif est ingénieux et utile; mais il y a lieu de remarquer qu'il existe dans le béliet hydraulique établi par Montgolfier lui-même au château de la Celle-Saint-Cloud, près Paris. (Voy. l'ouvrage de M. Morin ayant pour titre : *Des machines et appareils destinés à l'élevation des eaux*. Voyez aussi, dans le *Cours élémentaire de Mécanique* de M. Delaunay, la description du béliet hydraulique de la Celle-Saint-Cloud.)

BERCEAU, voûte à intrados cylindrique, qui sert à recouvrir l'espace compris entre deux murs verticaux parallèles (Voy. VOÛTES). L'intervalle de ces murs est ce que l'on appelle le *débouché* de la voûte; le plan horizontal contenant les droites suivant lesquelles la surface du berceau se raccorde avec les murs est le *plan de naissance*; on appelle *montée* ou *hauteur sous clef* la distance entre le point le plus élevé de la voûte et le plan de naissance. Le berceau est dit en *plein cintre* lorsque la section droite de l'intrados est une demi-circonférence de cercle. Il est *surbaissé* lorsque la hauteur sous clef est moindre que la moitié du débouché; dans ce cas la section droite est ordinairement une demi-ellipse ou la courbe à plusieurs centres appelée ANSE DE PANIER (Voy. ce mot). Le berceau est *surhaussé* lorsque la hauteur sous clef est plus grande que la moitié du débouché; tel est le berceau en ogive (Voy. ce mot). Le berceau est en *arc de cercle*, lorsque la section droite de l'intrados est un arc de cercle moindre qu'une demi-circonférence. La section droite de l'extrados est le plus souvent un arc de cercle dont le centre est situé au-dessous de la clef, à une distance égale aux $\frac{2}{3}$ ou aux $\frac{3}{4}$ du débouché. Quelle que soit la surface de l'extrados, on déterminera l'appareil de la voûte en divisant la section droite de l'intrados, à partir

la voûte en prismes horizontaux à bases curvilignes et l'on subdivise ensuite chacun de ces prismes en parties nommées *voussoirs* par des plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre. Les voussoirs appartenant à un même prisme forment ce que l'on appelle une *cours de voussoirs* ou une *assise*. Dans la division des prismes en voussoirs, on a soin que les joints verticaux qui séparent les voussoirs appartenant à un même prisme correspondent à peu près au milieu des voussoirs appartenant au prisme immédiatement voisin. La figure 1 montre, en projections, l'appareil d'un berceau à plein cintre: AMB est la section droite de l'intrados, dont le centre est en O; A'M'B' est la section droite de l'extrados, dont le centre est en O'; les lignes telles que mn, pq, qui vont passer au point O, sont les traces verticales des plans de joint normaux à l'intrados; les lignes telles que hk, il, sont les traces horizontales des plans de joint verticaux qui séparent les voussoirs d'une même assise; mnqp est ce qu'on nomme le *panneau de tête* du voussoir V; les voussoirs C forment ce qu'on nomme la *clef* de la voûte. Les rectangles PQ et RS sont les projections horizontales des murs qui soutiennent le berceau. La figure 2 montre l'appareil d'un berceau

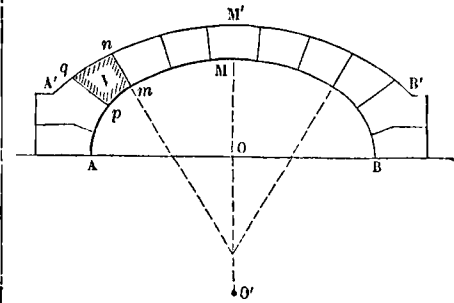


Fig. 2.

surbaissé; l'intrados est une anse de panier AMB; l'extrados est un arc de cercle A'M'B' décrit du point O' comme centre; les joints mn, pq, etc., sont normaux à la courbe d'intrados. La figure 3 montre l'appareil d'un berceau en ogive.

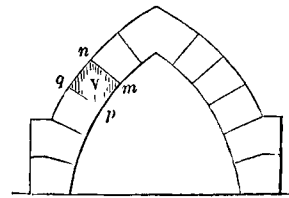


Fig. 3.

Pour tailler un voussoir, on prend une pierre capable du volume de ce voussoir et à laquelle on donne deux faces planes parallèles distantes de la longueur du voussoir dans le sens horizontal. Sur ces deux faces on applique le panneau de tête, de manière que les deux contours mnqp et m'n'q'p' (fig. 4) se correspondent, et l'on fait sauter l'excédant de pierre; les faces mnn'm' et pqq'p' doivent être planes, et perpendiculaires aux faces mnqp et m'n'q'p'; les deux autres faces doivent être cylin-

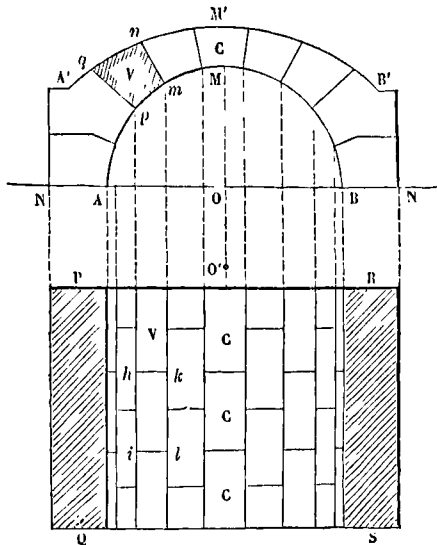


Fig. 1.

du plan de naissance, en un nombre impair de parties égales, et menant par les génératrices correspondantes aux points de division des plans normaux à la surface du cylindre. Ces plans divisent

driques ; on obtient celle qui répond à l'intrados en divisant les arcs mp et $m'p'$ en un même nombre de parties égales, et en enlevant la pierre de façon qu'une règle posée sur deux points de division cor-

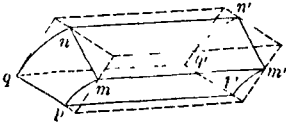


Fig. 4.

respondants s'applique toujours exactement sur la surface ; on opère de même avec les arcs nq et $n'q'$ pour obtenir la face appartenant à l'extrados. Il faut avoir soin que le lit de carrière (Voy. COUPE DES PIERRES) réponde à l'un des joints $pqq'p'$ ou $mnn'm'$, ou à une direction intermédiaire entre ces deux plans.

Pour élever une voûte en berceau on établit préalablement entre les deux murs qui doivent la soutenir, une série de constructions en charpente nommées CINTRES (Voy. ce mot). La première assise de voussoirs est posée sur le mur, la seconde sur la première et en même temps sur les cintres ; la troisième est posée sur la seconde et sur les cintres, et ainsi de suite jusqu'à la clef que l'on pose en dernier lieu. Quand la clef est posée, on retire les cintres (Voy. DÉCINTREMENT) et la voûte est abandonnée à l'action de la pesanteur. Dans les berceaux en arc de cercle, la première assise de voussoirs repose en partie sur le cintre et en partie sur le *sommier*, dernière assise du *piédroit*, c'est-à-dire du mur, qui présente à cet effet une face inclinée comme le montre la figure 5 en aa' (Voy. POUSSÉE

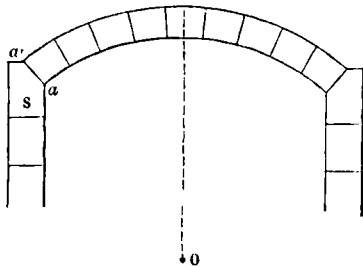


Fig. 5.

DES VOÛTES). La surface cylindrique d'un voussoir qui fait partie de l'intrados porte le nom de *douelle*, anciennement *douvelle*, par analogie sans doute avec les *douves* d'un tonneau. Par extension, on donne quelquefois le nom de douelle à l'intrados lui-même. Les droites suivant lesquelles l'intrados est coupé par les plans de joint se nomment les *arêtes de douelle*. Les berceaux en plein cintre, les berceaux surbaissés et les berceaux en arc de cercle sont d'une application fréquente dans la construction des arches de ponts (Voy. PONTS). Lorsqu'un berceau n'a qu'une très-faible longueur dans le sens de son axe, il forme ce qu'on appelle une PORTE (Voy. ce mot. Voyez aussi COUPE DES PIERRES et l'ARTICLE PONTS BIAIS).

BERCEAU GAUCHE. Voy. VIS SAINT-GILLES CARFÉE.

BERCEAU TOURNANT, voûte annulaire destinée à couvrir l'espace compris entre deux murs cylindriques ayant le même axe. La section méridienne de cette voûte peut être un cercle ou une ellipse ; dans le premier cas la surface est un *tore* ; c'est ce qui a lieu le plus ordinairement. Pour tracer l'appareil de cette voûte, on rabat la section méridienne sur le plan de naissance comme on le voit en Amb (fig. 1), et sur ce rabattement on fait le tracé de

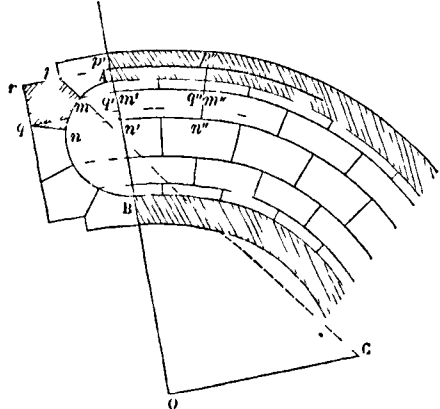


Fig. 1.

l'appareil comme s'il s'agissait d'un berceau cylindrique (Voy. BERCEAU). Puis on projette les différents points m, n, r, p, q , etc., de la figure, en m', n', p', q' , etc., sur la trace OA de la section méridienne ; et par ces nouveaux points on fait passer des circonférences ayant pour centre commun le point O , projection de l'axe du berceau tournant. Les circonférences $m'm'', n'n'',$ etc., seront les projections horizontales des arêtes de douelle. Suivant ces arêtes on imaginera des surfaces coniques ayant leur sommet sur l'axe vertical O ; ce seront les *joints de lit* de la voûte. Pour déterminer l'un d'eux, par exemple celui qui passe par m , on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en C avec la perpendiculaire à OA menée par le point O ; lorsqu'on relèvera la section méridienne Amb pour lui rendre la position verticale, le point C viendra se placer sur l'axe O ; ce sera le sommet de la surface conique dont mp est une génératrice, et qui passe par la circonférence projetée suivant $m'm''$, laquelle passe elle-même en m . On déterminera semblablement les autres surfaces coniques qui serviront de joints de lit. On divisera ensuite chaque assise en voussoirs au moyen de plans méridiens tels que $m'n''$, menés par l'axe vertical O ; on les choisit d'ordinaire de façon qu'ils fassent entre eux des angles dièdres égaux, et que les joints de chaque assise correspondent au milieu des voussoirs des assises supérieure et inférieure, ainsi que le montre la figure.

L'application du trait sur la pierre se fera de la même manière pour tous les voussoirs ; mais on emploie pour cela deux méthodes.

1° Supposons qu'il s'agisse du voussoir qui se projette horizontalement suivant le trapèze circulaire $n'p'p''n''$. On taillera d'abord un prisme droit ayant cette base, et pour hauteur la distance verticale des points m et q . Soit $H''P''P'H'/h''r''r'h'$ ce prisme, sur les bases duquel on suppose tracés les

arcs $m'm$ et $q'q'$ de la figure 1. Sur les faces planes verticales on appliquera le panneau de tête $mnqp$; de manière que le point m' de la figure 1 s'applique sur le point m de la figure 2, le point n' sur l'arête

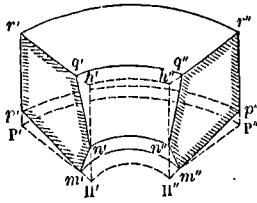


Fig. 2.

verticale $h'H'$, et par suite le point p' sur l'arête verticale $r'P'$; et de même pour l'autre face. Au moyen d'une règle flexible, on tracera les arcs de cercle $n'n''$ et $p'p''$. On taillera ensuite les joints coniques; pour cela, après avoir divisé $q'q''$ et $n'n''$ en un même nombre de parties égales, on enlèvera l'excédant de pierre de manière qu'une règle posée sur les points de division correspondants s'applique exactement sur la surface; on opérera de même avec les arcs $p'p''$ et $m'm''$. Il restera à tailler la douelle annulaire $m'n'n''m''$. On se servira pour cela d'une CERCE (Voy. ce mot) taillée sur la méridienne amb ; les arcs $m'm''$ et $n'n''$ étant supposés divisés en un même nombre de parties égales, on enlèvera l'excédant de pierre de manière que la cerce, posée sur les points de division qui se correspondent, s'applique exactement sur la surface. Cette méthode est la plus exacte; mais on ne l'emploie que pour les assises inférieures, parce qu'elle entraîne un grand déchet de pierre; pour les autres assises on fait usage de la méthode suivante:

2° Concevons que par le point m de la figure 1 on ait mené un plan horizontal, et projeté sur ce plan le voussoir que l'on considère; soit $p'n'n''p''$ (fig. 3) cette projection, et soit $Oabcd$ la trace du

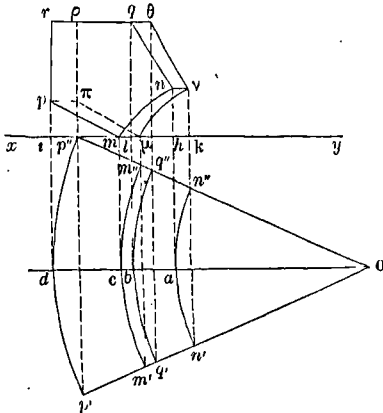


Fig. 3.

plan vertical de symétrie du voussoir. On commencera par projeter le voussoir sur un plan parallèle à ce plan de symétrie. Soit xy la trace de ce plan parallèle; par les points $m', m'', n', n'',$ etc., $a, b, c,$ etc., de la projection horizontale on abaissera sur xy des perpendiculaires, sur lesquelles on prendra, à partir de cette droite, des distances égales aux hauteurs des points $n, p, q, r,$ de la figure 1 au-dessus du point m . On obtiendra ainsi la projection verticale cherchée $m\mu\nu\theta rp$ (fig. 3).

On prendra cette projection pour base d'un prisme (droit (fig. 4) (sa base antérieure n'est pas représentée), sur les arêtes duquel on portera les longueurs rD et pD' , mC , μM , νN , $\nu N'$, θQ , $\theta Q'$, respectivement égales aux distances id ,

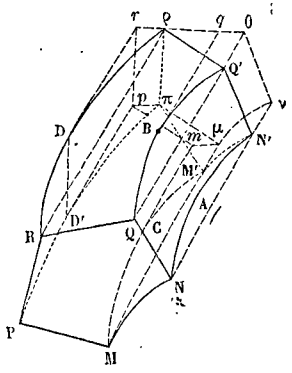


Fig. 4.

mc , $\mu m'$, $\mu m''$, kn' , kn'' , hq , hq' , de la figure 3. Les points ρ et q étant marqués sur $r\theta$, on mènera ρR parallèle aux arêtes du prisme et égale à $p'p''$ de la figure 3; on mènera de même qB parallèle à pR et égale à lb de la figure 3. On joindra RQ et $\rho Q'$, et l'on tracera les arcs de cercle ρDR et QBQ' : la figure $\rho Q'QR$

devra être égale au trapèze curviligne $q'q''p''p'$ de la figure 3, qui aurait pu fournir un panneau pour abréger l'opération. A l'aide d'une équerre on pourra tailler la surface cylindrique $\pi\rho RP$; et sur quelques-unes de ses génératrices on portera, à partir de l'arc ρDR des longueurs égales à RP , ce qui permettra de tracer à la règle ployante le cercle $\pi D'P$, égal à ρDR . On joindra QN , et par les droites RQ et QN , on conduira un plan, qui devra être perpendiculaire à la face $QQ'pR$; on joindra de même $Q'N'$, et par les droites $\rho Q'$ et $Q'N'$ on conduira un plan qui devra être perpendiculaire à cette même face $QQ'pR$. Sur les deux faces planes ainsi obtenues, on appliquera le panneau $mnqrp$ des figures 1 ou 3, ce qui donnera les contours $MNQRp$ et $MN'Q'p\pi$. On taillera alors le joint conique supérieur; pour cela, on divisera les arcs ρR et QQ' en un même nombre de parties égales, et sur les divisions correspondantes on appliquera l'une des branches d'un beveau ouvert suivant l'angle rqn de la figure 3; l'autre branche devra s'appliquer exactement sur la surface; et, en prenant sur les génératrices des longueurs égales à QN , on obtiendra des points par lesquels on fera passer l'arc NAN' , tracé à la règle ployante. On taillera de la même manière le joint conique inférieur $PMM'\pi$, à l'aide d'un beveau ouvert suivant l'angle rpm de la figure 3; et l'on tracera l'arc de cercle MCM' . Il ne restera plus à tailler que la douelle annulaire; les arcs NAN' et MCM' étant supposés divisés en un même nombre de parties égales, on posera sur les points de division correspondants une cerce taillée sur la section amn (fig. 1); dans toutes les positions elle devra coïncider avec la surface. Ce procédé, long à décrire, mais en réalité très-expéditif, a l'avantage d'économiser la pierre; mais, comme tous ceux où l'on fait usage du beveau, il offre moins de garanties au point de vue de l'exactitude.

Il serait facile de modifier les deux méthodes que nous venons d'exposer pour les appliquer au cas où la voûte annulaire serait extradossée au moyen d'une d'une surface de même espèce, ainsi qu'au cas où la section méridienne serait une courbe différente du cercle.

Il y a lieu de remarquer que, dans une voûte annulaire, toutes les assises posées du côté extérieur, c'est-à-dire de celui qui a le plus grand rayon, se maintiennent en équilibre d'elles-mêmes, parce que si les voussoirs descendaient, il faudrait en même temps qu'ils se rapprochassent, ce qui est impossible. Du côté intérieur, ou du plus petit rayon, au contraire, les voussoirs pourraient descendre librement puisqu'alors ils tendraient à s'écarter; les assises de ce côté ne se maintiennent donc pas d'elles-mêmes, et ce n'est que lorsqu'on a posé l'assise supérieure formant une clef de voûte continue, que les assises du côté intérieur se trouvent maintenues. (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, pag. 246.)

BERME, espace que l'on ménage entre la masse couvrante d'un ouvrage de fortification passagère et l'escarpe pour permettre aux hommes de relever les terres éboulées, et pour éloigner le poids des terres de l'escarpe. On lui donne de 0^m,50 à 1^m, suivant que les terres sont fortes ou légères. On la supprime généralement, après la construction de l'ouvrage, en prolongeant le talus extérieur du parapet. Elle a, en effet, pour défaut de favoriser l'escalade en coupant en deux la hauteur du relief, et elle permet aux assaillants qui y sont parvenus de s'étendre à droite ou à gauche pour choisir un point moins vivement défendu.

BEUVEAU, ou **BIVEAU**, instrument dont se servent les tailleurs de pierre pour obtenir une surface qui rencontre sous un angle donné une surface déjà exécutée. Le plus simple des beuveaux se compose de deux lattes droites assemblées sous un angle déterminé et constant ABC (fig. 1). Lorsque le même beuveau doit servir un grand nombre de fois dans une même construction, on l'exécute en métal. Un beuveau peut avoir une branche courbe, comme on le voit sur la figure 2; cela est nécessaire lorsque l'instrument est destiné à exécuter une surface réglée coupant une surface courbe déjà construite; la branche AB est alors taillée de manière à s'appliquer sur la surface courbe dans le sens déterminé par

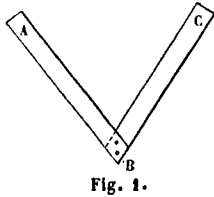


Fig. 1.

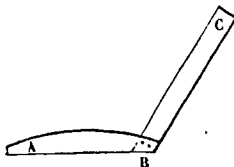


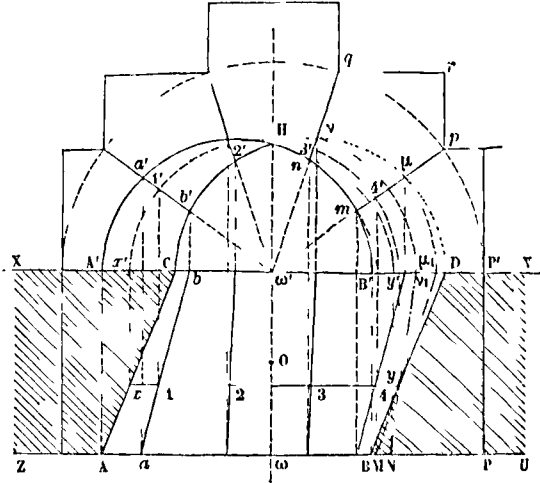
Fig. 2.

la nature du problème. (Voy. les divers articles relatifs à la *COUPE DES PIERRES*.)

Le beuveau a donné son nom à une méthode employée pour tailler la pierre, et appelée *taille par beuveau*; elle consiste à donner à la pierre une première face plane, et à en déduire toutes les autres faces par les angles qu'elles doivent faire avec la première et entre elles. Cette méthode n'a pas l'exactitude de la méthode par *ÉQUARRISSEMENT* (Voy. ce mot); mais elle est en général économique, expéditive; et les ouvriers, qui sont payés propor-

tionnellement à l'étendue des *parements rus* qu'ils exécutent, lui donnent ordinairement la préférence, parce qu'elle n'oblige pas à tailler des surfaces ou portions de surfaces qui doivent ensuite disparaître.

BLAIS PASSÉ, voûte recouvrant un passage biais pratiqué dans un mur droit. Nous prendrons pour plan horizontal de projection le plan de naissance de la voûte, et pour plan vertical la face postérieure



du mur. Ce mur sera donc représenté par les traces parallèles XY et ZU de ses deux faces; et les pénétrations du passage biais par les droites parallèles AC et BD. Les arcs de tête seront deux demi-circonférences verticales décrites sur AB et sur CD comme diamètres, et qui se projettent verticalement suivant A'HB' et CHD. Par le centre O du parallélogramme ABDC on mène une perpendiculaire ωω' à la ligne de terre. On prend pour surface d'intrados une surface gauche engendrée par une droite assujettie à rencontrer les deux arcs de tête et la droite ωω'. Pour avoir les projections d'une génératrice quelconque de l'intrados on mènera par la droite ωω' un plan quelconque; soit ωb'a' la trace verticale de ce plan; il coupe les arcs de tête aux points a', a et b', b; en joignant les points a et b par une droite, on aura donc la projection horizontale de la génératrice demandée; sa projection verticale est la droite a'b' elle-même. On opérera de même pour toutes les autres. Toutefois il faut remarquer que la perpendiculaire au plan vertical menée par le point H où les projections verticales des arcs de tête se rencontrent, est une génératrice de l'intrados, car elle rencontre ces deux arcs; et, comme elle est parallèle à ωω', on peut dire qu'elle rencontre cette droite à l'infini. Cette génératrice est la seule qui ne soit point donnée par la construction précédente. Cela posé, du point ω' comme centre, avec un rayon suffisamment grand, on décrit une demi-circonférence P'pq..., que l'on divise en un nombre impair de parties égales; on mène des rayons aux points de division; ces rayons mp, nq, etc., raccordés avec les joints des assises du mur, déterminent les panneaux de tête sur la face antérieure du mur; ils déterminent en même temps les panneaux de tête sur la face postérieure;

il suffit pour les distinguer d'employer pour les uns la circonférence $A'HB'$ et pour les autres la circonférence CHD . Ainsi $mpqrn$ est un panneau de tête antérieur, et μpqr le panneau postérieur correspondant au même voussoir. On prend pour plans de joints les plans menés par les rayons $\omega'm$, $\omega'n$, etc., et par la droite $\omega\omega'$; ces plans coupent l'intrados suivant des droites qui sont des génératrices de cette surface, et il est très-facile de se procurer les panneaux de joint en les faisant tourner autour de $\omega\omega'$ pour les rabattre sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, le point m vient en M , le point p en P , le point μ en μ_1 ; et le panneau de joint inférieur du voussoir considéré se trouve rabattu en $\mu_1 P'PM$. Le panneau de joint supérieur se rabat de même en $\nu_1 P'PN$. On a dès lors tous les éléments nécessaires pour procéder à la taille du voussoir. On prépare un prisme de pierre dont la base soit le panneau de tête $mpqrn$, et la hauteur PP' . Sur la face latérale correspondante à mp on applique le panneau de joint inférieur, et sur la face latérale correspondante à nq le panneau de joint supérieur. Il ne reste plus qu'à tailler la douelle gauche; pour cela on a eu soin de marquer des points de repère sur les arcs mn et $\mu\nu$ qui doivent servir de directrices; ces points de repère s'obtiennent très-simplement en coupant les deux arcs par une droite menée du point ω' ; en appliquant une règle sur les points de repère qu'on s'est ainsi ménagés, on taille la douelle presque aussi facilement que si elle était plane. Si la longueur du passage biais était trop considérable pour qu'il fut possible de remplir avec une seule pierre l'épaisseur du mur, on diviserait cette épaisseur par des plans parallèles au plan vertical de projection. Si xy est la trace d'un de ces plans, on voit qu'elle rencontre les projections horizontales des génératrices en des points $x, 1, 2, 3, 4, y$, qui, projetés sur les rayons correspondants en $x', 1', 2', 3', 4, y'$, déterminent la projection verticale de l'intersection de ce plan avec la surface de l'intrados. Il est à remarquer que toutes les projections analogues passent par le point H . Les courbes verticales telles que $xy, x'H y'$ remplaceront les arcs de tête pour les voussoirs qui s'arrêteront à ces courbes: ce seront les coupes des joints montants; mais elles devront être interrompues de deux en deux assises, pour que le joint montant qui sépare deux voussoirs d'une même assise corresponde à la partie moyenne d'un voussoir de l'assise inférieure.

Le biais passé, traité par la méthode que nous venons d'exposer, porte aussi le nom de *corne de vache*, sans doute en raison de la disposition que présentent sur l'épure les circonférences $A'HB'$ et CHD . Mais on donne aussi ce nom à un dispositif plus général (Voy. CORNE DE VACHE).

Le même problème peut être résolu par une autre méthode qui paraît plus simple au premier abord; elle consiste à prendre pour intrados la surface cylindrique engendrée par une droite parallèle à AC et s'appuyant sur les deux arcs de tête. Mais, en premier lieu, on ne peut pas alors prendre pour plans de joint des plans menés par l'axe de la surface, parce que ces plans ne seraient pas normaux à l'intrados, et que, n'étant pas non plus perpendiculaires aux plans de tête, les voussoirs tendraient à glisser vers l'une des deux faces du mur. Pour que les joints soient perpendiculaires aux plans de tête,

il faut qu'ils soient menés par une perpendiculaire commune à ces faces, par exemple par la droite $\omega\omega'$. Mais alors les arêtes de douelle ne sont plus des lignes droites: ce sont des ellipses allongées qu'il faut construire par points; dans les panneaux de joint les droites $\mu_1 M$ et $\nu_1 N$ se trouvent ainsi remplacées par des courbes. Du reste, les constructions sont tout à fait analogues aux précédentes et elles n'offrent aucune difficulté. Mais avec la surface gauche les opérations sont plus simples.

BIEF, ou *biés*. bassin ou canal parcouru par un cours d'eau. Tout BARRAGE (Voy. ce mot) partage un cours d'eau en deux *biés*, l'un supérieur appelé *bief d'amont*, l'autre inférieur appelé *bief d'aval*.

BIELLE, organe de machine employé dans la transformation du mouvement alternatif, rectiligne ou circulaire, en circulaire continu. C'est une longue tige qui s'articule par l'une de ses extrémités soit à la tige d'un piston, soit à l'extrémité d'un balancier, et de l'autre à l'extrémité du bras d'une MANIVELLE (Voy. ce mot). Une bielle AA' (fig. 1) a généralement plus de 5 fois la longueur du rayon de la manivelle avec laquelle elle s'articule. Ses extrémités sont cylindriques, mais elle est renforcée dans sa partie moyenne par des nervures, en sorte que sa section transversale a la forme d'une croix, comme l'indique la figure 2. Cependant on fait aussi des bielles entièrement cylindriques, soit pleines, soit creuses; et, d'après les expériences de M. Hodgkinson, habile physicien anglais, ces dernières seraient, à égalité de section, 2 fois au moins plus résistantes que les bielles à nervures. La tête supérieure de la bielle est double, de manière qu'elle puisse embrasser comme une fourche la tige ou le balancier qui la guide. A cette tige ou à ce balancier est adapté un axe qui pénètre dans les deux branches de la fourche, et dont on voit l'extrémité en B ; cette extrémité repose sur des coussinets, mobiles dans une ouverture pratiquée à la bielle, et que l'on peut serrer au moyen de deux coins appelés *clavettes*, l'un mobile, c'est la clavette proprement dite c , l'autre fixe, c'est la *contre-clavette*. En frappant sur l'un des bouts de la clavette on peut ainsi, pendant que la machine est en marche, serrer les coussinets ou les desserrer, pour diminuer à volonté le jeu qui existe entre les deux pièces d'un même coussinet et l'axe qu'elles embrassent. Une disposition analogue est adoptée pour l'articulation inférieure de la bielle avec la manivelle. Quelquefois l'assemblage est une clavette sim-

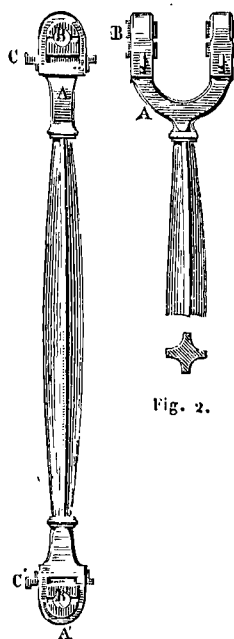


Fig. 1.

Fig. 2.

ple, terminée par une vis; un écrou extérieur permet de faire avancer ou reculer la clavette; et l'écrou est maintenu dans sa position par une goupille d'arrêt.

Les dimensions transversales d'une bielle se déterminent d'après l'effort variable qu'elle est destinée à transmettre. Les bielles s'exécutent en fonte ou en fer (les coussinets sont ordinairement en bronze). Dans les machines à basse pression on peut employer la fonte, et, d'après Watt, la section de la bielle doit être, au milieu, $\frac{1}{28}$ de celle du piston, et

aux extrémités $\frac{1}{35}$, ce qui répond à des charges de 28 kil. ou de 35 kil. par centimètre carré. Dans les machines à haute pression, on emploie préférentiellement le fer forgé, et la charge peut varier de 50 à 60 kilogrammes au milieu, et de 90 à 100 kilogrammes aux extrémités. Mais c'est d'après la charge des extrémités que les dimensions doivent être calculées, les nervures du milieu n'ayant en général pour but que de résister à la flexion.

Voici comment on peut déterminer la tension ou la pression supportée par une bielle communiquant à une manivelle le mouvement alternatif d'un balancier. Soit A (fig. 3) la projection de l'axe du ba-

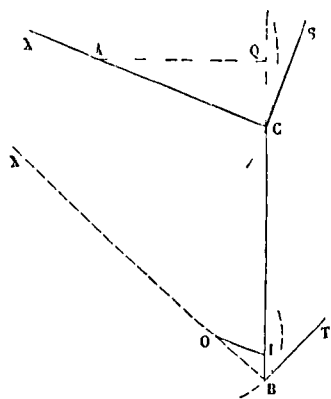


Fig. 3.

lancier, O celle de l'axe de la manivelle, soit CB la position de la bielle à un instant donné. Désignons par l la longueur de la bielle, par b la demi-longueur AC du balancier, par ρ le rayon OB de la manivelle; par ω la vitesse angulaire de cette dernière, par ω' celle du balancier.

Remarquons d'abord qu'il existe une relation très-simple entre ces deux vitesses. En effet, d'après le THÉORÈME DE M. CHASLES (Voy. ce mot), les vitesses des points B et C étant dirigées suivant les tangentes BT et CS aux circonférences décrites respectivement par ces points, le centre instantané de rotation de la bielle est au point de rencontre X des rayons OB et AC; par conséquent ces vitesses sont proportionnelles aux distances BX et CX. Mais si l'on mène OI parallèle à AC, le triangle OIB sera semblable au triangle XCB; les deux vitesses considérées sont donc proportionnelles aux côtés OB et OI et l'on a

$$\omega\rho : \omega'b = OB : OI = \rho : l,$$

en désignant par λ la droite OI. On tire de cette relation

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\lambda}{b}. \tag{1}$$

Cela posé, soit F la force mouvante qui agit à l'autre extrémité du balancier, a sa distance à l'axe A, T la tension ou pression exercée sur le balancier par la bielle, q la distance AQ de cette force à l'axe, M la masse du balancier et R son rayon de gyration, on aura (Voy. ACCÉLÉRATION ANGULAIRE)

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{Fa - Tq}{MR^2}. \tag{2}$$

Or, le mouvement de la manivelle étant ordinairement régularisé par un volant, la vitesse ω n'éprouvera que des variations très-faibles, et peut être remplacée par sa valeur moyenne, c'est-à-dire par une constante; on a donc en différentiant l'équation [1] par rapport aux temps

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{\omega}{b} = \frac{d\lambda}{dt}. \tag{3}$$

La plus grande variation de λ a lieu dans les positions de la bielle répondant aux points morts. Soit CK (fig. 4) la direction de la bielle correspondante

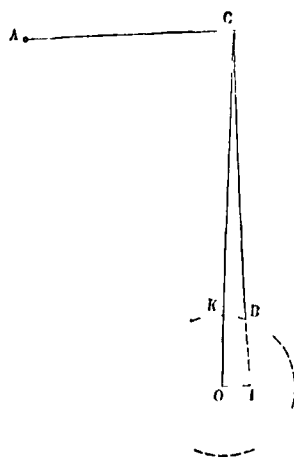


Fig. 4.

à un point mort, et CB une position infiniment voisine. La droite infiniment petite OI, parallèle à AC, sera la valeur de $d\lambda$, attendu que λ est nul au point mort. Désignons par dx l'arc infiniment petit KB, nous aurons

$$dx = \omega\rho dt, \text{ d'où } dt = \frac{dx}{\omega\rho},$$

et, en mettant pour dt cette valeur dans l'équation [3], il viendra

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{\omega^2\rho}{b} \cdot \frac{d\lambda}{dx}. \tag{4}$$

Mais, dans le triangle COI, on a
OI : OC = sin C : sin I,

d'où

$$d\lambda = (l + \rho) \frac{\sin C}{\sin I};$$

et, dans le triangle CKB, qu'on peut regarder comme rectiligne et rectanglo en K, on a

$$KB = CK \cdot \text{tang } C \text{ ou } dx = l \text{ tang } C.$$

Par conséquent

$$\frac{d\omega'}{dt} = \omega^2 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \frac{l + \rho}{l} \cdot \frac{\sin C}{\tan C} \cdot \frac{1}{\sin I},$$

ou, comme $\sin C = \tan C$, puisque l'angle C est infiniment petit, et que d'autre part l'angle I a le même sinus que l'angle ACI, ou ACO qui en diffère infiniment peu,

$$\frac{d\omega'}{dt} = \omega^2 \cdot \frac{\rho}{b} \left(1 + \frac{\rho}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sin ACO} \quad [5]$$

Si l'on tire de l'équation [2] la valeur de Tq, et qu'on y remplace $\frac{d\omega'}{dt}$ par sa valeur [5], on trouvera

$$Tq = Fa - MR^2 \omega^2 \frac{\rho}{b} \left(1 + \frac{\rho}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sin ACO}.$$

Remarquant enfin que $b \sin ACO$, ou $AC \cdot \sin ACO$, est précisément égal à la distance q du point A à la direction OC, on tirera de cette équation

$$T = F \cdot \frac{a}{q} - MR^2 \frac{\omega^2 \rho}{q^2} \left(1 + \frac{\rho}{l}\right); \quad [6]$$

c'est d'après cette valeur T que l'on calculera la section de la bielle. (Voy. le Cours de Mécanique professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Bélanger.)

Si l'on ne veut pas charger la bielle de plus de 100 kil. par centimètre carré, soit 1 000 000 kil. par mètre carré, on posera, en appelant d son diamètre,

$$1000000 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 = T, \text{ d'où } d = \frac{1}{500} \sqrt{\frac{T}{\pi}}.$$

On opérera d'une manière analogue si la bielle est directement articulée avec la tige du piston, sans l'intermédiaire d'un balancier. Dans ce cas, le centre O (fig. 5) de la manivelle est situé, en projection sur la droite OZ décrite par le point d'articulation C de la bielle avec la tige du piston. Soit v la vitesse du point C sur cette droite. Le centre instantané de rotation de la bielle sera situé à la rencontre X du rayon OB avec la perpendiculaire à OC élevée au point C; et les vitesses des points B et C seront proportionnelles à BX et à CX. Mais si l'on mène OI perpendiculaire à OC, les droites OB et OI seront proportionnelles à BX et à CX; on aura donc, en désignant par λ la longueur

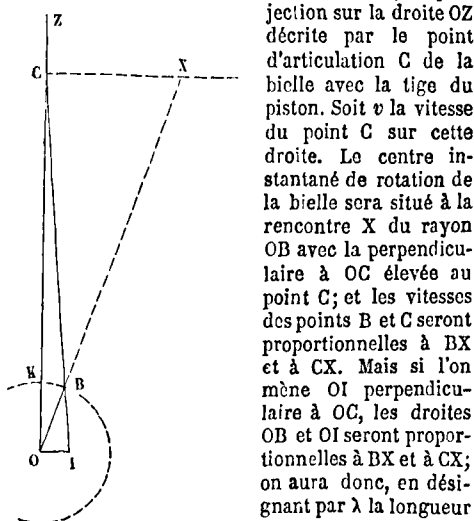


Fig. 5.

et en regardant ω comme constant, on en tirera

$$\frac{dv}{dt} = \omega \frac{d\lambda}{dt}. \quad [8]$$

Mais le mouvement du piston étant un mouvement de translation, on a, en appelant M la masse de ce

piston et de sa tige et F la force mouvante dirigée suivant OC (Voy. ACCÉLÉRATION),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - T \cos BOC}{M}. \quad [9]$$

Par des considérations analogues à celles qui ont été employées ci-dessus, et en conservant les mêmes notations, on trouve que l'équation [8] peut être remplacée par

$$\frac{dv}{dt} = \omega^2 \rho \cdot \frac{d\lambda}{dx}. \quad [10]$$

Si K est le point mort, et que la direction CB soit très-peu différente de OC, on aura

$$d\lambda = OI = (l + \rho) \cdot \frac{\sin BOC}{\sin I}$$

et $dx = KB = l \tan BOC$;

par suite, la relation [10] deviendra

$$\frac{dv}{dt} = \omega^2 \rho \cdot \left(1 + \frac{\rho}{l}\right) \cdot \frac{\cos BOC}{\sin I},$$

et, en substituant dans l'équation [9], tirant la valeur de T, et remarquant que $\cos BOC$ peut être remplacé par l'unité,

$$T = F - M \omega^2 \rho \left(1 + \frac{\rho}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sin I}, \quad [11]$$

relation qui donnera la tension T, d'où l'on déduira comme ci-dessus la section de la bielle.

Le frottement de la bielle contre le bouton de manivelle, ou contre l'axe de l'articulation qui la lie soit à la tige du piston soit à l'extrémité du balancier, se calcule comme pour une BAGUE D'EXCENTRIQUE (Voy. ce mot), avec cette différence que dans ce second cas le point de contact ne décrit pas une circonférence entière, mais seulement une portion de circonférence, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre à chaque demi-oscillation.

On donne aussi le nom de *bielle* à une sorte de poinçon dont on arme les poutres à la Polonceau. (Voy. POUTRES ARMÉES, FERMES. Voyez aussi BIELLE ET MANIVELLE; BALANCIER, BIELLE ET MANIVELLE.)

BIELLE ET MANIVELLE, dispositif employé pour transformer un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement circulaire continu (Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT) ou vice versa.

Soit AX la direction suivant laquelle s'opère le mouvement rectiligne alternatif. En un point O de cette direction est établi un axe de rotation sur lequel est montée une manivelle OM (Voy. MANIVELLE). Une bielle MN (Voy. BIELLE) s'articule d'une part avec le maneton M de la manivelle, et de l'autre avec l'extrémité N de la pièce animée du mouvement alternatif; ce mouvement alternatif, suivant OX, se trouve ainsi transformé en un mouvement circulaire autour de l'axe O. Supposons, en effet, que le bouton de manivelle soit à l'extrémité A du diamètre AA', et le point N en B, à une distance AB, égale à la longueur MN de la bielle; et concevons que le point N se mette en marche dans la direction BB'. Ce mouvement serait impossible si le bouton M n'était pas animé d'une certaine vitesse initiale dans le sens de la flèche; mais en vertu de cette vitesse initiale, il parcourra la circonférence OM dans le sens AM μ A', tandis que l'extrémité N, de la pièce animée d'un mouvement rectiligne, parcourra la droite BB'. Quand cette extrémité sera arrivée en B', à une distance du point A' égale à la longueur de la bielle, le mouvement rectiligne ne

oscillation; elle cesse alors de reposer sur le cylindre, et le mouvement de la bielle continue sans que le cylindre soit entraîné.

BILLET A ORDRE, engagement que prend une personne de payer à une autre, à une échéance déterminée, une somme dont elle reconnaît avoir reçu la valeur, en espèces, en compte, en marchandises, etc. Un billet à ordre est ordinairement rédigé comme dans cet exemple :

Paris, le 5 janvier 1864.

Au 27 mars prochain, je payerai à M. Urbain, ou à son ordre, la somme de huit cent vingt francs, valeur en marchandises.

GILBERT.

Les mots *ou à son ordre*, expriment que Urbain, au lieu de toucher lui-même, peut céder ses droits à une troisième personne par voie d'endossement, c'est-à-dire en écrivant au dos :

Payez à M...., ou à son ordre, valeur en marchandises.

Paris, le...

URBAIN.

Le billet peut ainsi recevoir plusieurs endossements successifs. Le dernier concessionnaire, en touchant à l'échéance, écrit à la suite du dernier endossement les mots : *pour acquit*, suivis de sa signature.

BISSEXTILE (ANNÉE), année de 366 jours, ainsi nommée parce que les Romains comptaient deux fois le sixième jour avant les calendes de mars, pour ajouter un jour à l'année ordinaire. Les années bissextiles sont celles pour lesquelles les deux derniers chiffres à droite du millésime forment un nombre divisible par 4; comme 1864, 1868, 1872, etc. Il y a exception pour les années séculaires dans lesquelles les centaines du millésime ne sont pas divisibles par 4; ainsi 1700, 1800 ont été des années communes; il en sera de même de 1900; mais l'année 2000 sera bissextile. (Voy. CALENDRIER.)

BLINDAGE, couverture épaisse formée de poutres, de fascines, et de terre, qui sert à mettre à l'abri de la bombe une batterie ou un établissement militaire quelconque.

BLOCHET, pièce de bois horizontale qui, dans une ferme, relie la jambe de force à la sablière. (Voy. FERMES.)

BLOCKHAUS, fortin détaché construit en bois. Quelquefois ce n'est qu'une enceinte palissadée avec fossé. Plus souvent c'est une construction à deux étages et sans fossé; l'étage supérieur surplombe le rez-de-chaussée, et permet de défendre celui-ci par des ouvertures pratiquées dans la partie saillante du plancher. Quelquefois aussi le blockhaus n'a pas d'entrée extérieure, et communique par une voie souterraine avec un ouvrage plus important.

BOBINE, treuil à larges rebords ou joues, sur lequel s'enroule une corde plate qui se recouvre elle-même à chaque tour. Ce genre de treuil est d'un emploi fréquent dans les mines. Si l'on considère un de ces treuils isolément, il donne lieu à deux problèmes : 1° calculer le raccourcissement de la corde après un nombre donné n de tours du treuil; 2° évaluer le moment de la charge après ce même nombre de tours.

1° Soit r le rayon du treuil et e l'épaisseur de la corde. Pendant le premier tour, la longueur de

corde enroulée est $2\pi r$. A cet instant, on peut regarder le rayon du treuil comme ayant augmenté de e ; et, pendant le second tour, la longueur de corde enroulée est $2\pi(r + e)$. Le rayon du treuil ayant de nouveau augmenté de e , la longueur de corde enroulée pendant le troisième tour est $2\pi(r + 2e)$. En continuant ainsi, on voit aisément que la longueur de corde enroulée pendant le $n^{\text{ième}}$ tour est $2\pi[r + (n - 1)e]$. Le raccourcissement total de la corde au bout de n tours est donc la somme des quantités

$$2\pi r, 2\pi(r + e), 2\pi(r + 2e), 2\pi(r + 3e), \dots, 2\pi(r + (n - 1)e).$$

Or, ces quantités forment une progression arithmétique de n termes, dont le premier est $2\pi r$ et dont la raison est $2\pi e$; la somme de ces quantités est donc :

$$\frac{[2\pi r + 2\pi(r + (n - 1)e)]n}{2}$$

$$\text{ou } 2\pi n \left[\left(r - \frac{1}{2}e \right) + \frac{1}{2}en \right]. \quad [1]$$

On peut aussi supposer que l'accroissement du rayon a lieu d'une manière continue et que, par conséquent, la corde affecte la forme d'une spirale d'Archimède; en calculant par approximation la longueur de corde enroulée au bout d'un nombre fractionnaire de tours n , on obtient une formule qui ne diffère de la formule [1] que parce qu'elle contient r au lieu de $r - \frac{1}{2}e$. Nous emploierons la formule [1], en y regardant n comme pouvant varier d'une manière continue; mais nous négligerons $\frac{1}{2}e$ devant r , et nous écrirons en conséquence

$$2\pi n \left(r + \frac{1}{2}en \right). \quad [2]$$

On peut remarquer que si, au lieu de partir de l'instant où la corde commence à s'enrouler, on partait de l'instant où elle s'est déjà enroulée d'un certain nombre de tours, on parviendrait, pour la longueur de corde enroulée après n nouveaux tours, à la même formule [1], dans laquelle r représenterait le rayon de la bobine, augmenté des épaisseurs de corde résultant de l'enroulement déjà effectué.

On peut remarquer encore que si, au lieu d'enrouler la corde, on la déroulait, c'est-à-dire si on faisait faire à la bobine n tours en sens contraire, les longueurs de corde déroulées à chaque tour seraient, r désignant le rayon primitif,

$$2\pi r, 2\pi(r - e), 2\pi(r - 2e), 2\pi(r - 3e), \dots, 2\pi(r - (n - 1)e),$$

et la longueur totale de corde déroulée après les n tours aurait pour expression

$$2\pi n \left[\left(r + \frac{1}{2}e \right) - \frac{1}{2}en \right]. \quad [3]$$

Nous négligerons encore $\frac{1}{2}e$ devant r , et nous écrirons :

$$2\pi n \left(r - \frac{1}{2}en \right). \quad [4]$$

2° Lorsque le rayon est r , la distance du point d'application de la charge à l'axe de rotation est $r + \frac{1}{2}e$. Lorsque le rayon est devenu $r + e$, cette distance est devenue $r + \frac{1}{2}e + e$. Quand le rayon est devenu $r + 2e$, la distance dont il s'agit est

devenue $r + \frac{1}{2}e + 2e$. En continuant ainsi, on voit qu'après n tours la charge agit à une distance de l'axe marquée par $r + \frac{1}{2}e + (n-1)e$, ou

$$\left(r - \frac{1}{2}e\right) + ne, \text{ ou simplement } r + ne.$$

Si Q représente la charge, et q le poids de la corde par mètre courant; et si l représente la longueur de corde non enroulée à l'instant où le rayon est r , au bout de n tours, cette longueur de corde aura diminué d'une quantité exprimée par [2]; la charge effective sera devenue par conséquent

$$Q + q \left[l - 2\pi n \left(r + \frac{1}{2}en \right) \right],$$

et, par suite, le moment de cette charge aura pour expression

$$\left\{ Q + q \left[l - 2\pi n \left(r + \frac{1}{2}en \right) \right] \right\} (r + ne). \quad [5]$$

Si l'on suppose les n tours effectués en sens contraire, la longueur l de corde non enroulée se sera accrue d'une quantité exprimée par [4]; en sorte que la charge effective sera devenue

$$Q + q \left[l + 2\pi n \left(r - \frac{1}{2}en \right) \right].$$

D'ailleurs, on verra facilement que la distance du point d'application de cette charge à l'axe est devenue $r - ne$; le moment de la charge est donc devenu lui-même :

$$\left\{ Q + q \left[l + 2\pi n \left(r - \frac{1}{2}en \right) \right] \right\} (r - ne). \quad [6]$$

3° Dans l'exploitation des mines, on accouple toujours deux bobines égales, de manière que le mouvement qui enroule la corde de l'une déroule la corde de l'autre. De cette façon, quand l'une des bobines fait monter une benne chargée de minerai, l'autre fait descendre une benne vide.

Le problème qu'on cherche à résoudre dans ce cas consiste à régler les dimensions de l'appareil de manière que la somme algébrique des moments des deux charges totales reste comprise, pendant la durée totale d'une ascension, entre les limites les plus étroites possibles. Cette question, déjà traitée par M. Combes, a été présentée sous une forme élégante par M. Haton de la Goupillière, dans son *Traité des mécanismes*.

Nous supposons que le rayon r se rapporte à l'instant précis où les deux bennes, l'une ascendante, l'autre descendante, se rencontrent, à une distance l au dessous de l'axe des bobines. Soit P le poids de la charge de minerai, et p celui de la benne vide. Le moment, du côté de la benne ascendante, sera donné par l'expression [5], en y remplaçant Q par $P + p$; et le moment, du côté de la benne descendante, sera donné par l'expression [6], en y remplaçant Q par p . Si l'on fait ces substitutions et qu'on retranche le second moment du premier, on obtient pour résultat :

$$Pr + (P + 2p + 2ql - 4\pi qr^2)n - 2\pi qe^2 n^2.$$

En posant

$$P + 2p + 2ql - 4\pi qr^2 = A \text{ et } 2\pi qe^2 = B,$$

on peut écrire cette somme de moments :

$$Pr + An - Bn^2. \quad [7]$$

On voit qu'elle surpasse le moment de la charge utile à l'instant de la rencontre des bennes, c'est-à-dire Pr , d'une quantité variable avec n ; il s'agit

de limiter autant que possible les variations de cette quantité. Posons

$$u = An - Bn^2.$$

Cette fonction s'annule pour $n = 0$, et pour

$$n = \sqrt{\frac{A}{B}};$$

dans l'intervalle, elle passe donc par un maximum. On trouve, par les méthodes ordinaires, que ce maximum répond à $n' = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A}{B}}$.

$$\text{et a pour valeur } \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot A \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Soit N le nombre de tours nécessaires pour enrouler la longueur l de corde, c'est-à-dire pour amener la benne chargée au haut de sa course.

Pour $n = N$, la fonction u prend la valeur $AN - BN^2$. On réglera donc la marche de l'appareil de la manière la plus avantageuse si l'on fait en sorte que cette valeur soit égale et de signe contraire au maximum trouvé plus haut; puisque, depuis le point de rencontre des bennes jusqu'à l'arrivée de la benne chargée au haut de sa course, la somme des moments aura varié de quantités égales en plus et en moins, par rapport à sa valeur initiale Pr . On remarquera de plus que la fonction u changeant de signe avec n , la somme des moments passera par les mêmes valeurs avant et après la rencontre, et qu'ainsi on aura obtenu la plus grande régularité possible.

On satisfera donc aux conditions les plus avantageuses en posant

$$AN - BN^2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} A \sqrt{\frac{A}{B}},$$

équation que l'on peut écrire :

$$N^3 - \frac{A}{B} N - \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{A}{B} \sqrt{\frac{A}{B}} = 0.$$

Cette équation n'admet qu'une racine réelle et positive :

$$N = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A}{B}}. \quad [8]$$

Telle est donc la relation qu'il faut établir entre les quantités N , A et B .

Il s'agit maintenant d'en conclure les dimensions de l'appareil. Si, dans les expressions [2] et [4], on remplace n par N , ce qui revient à supposer la benne chargée au haut de sa course et la benne vide au bas de la sienne, la somme de ces expressions devra être égale à la profondeur h du puits; on aura donc

$$\pi N r = h; \quad [9]$$

d'où

$$N = \frac{h}{4\pi r}.$$

Or on a, conformément à l'expression [2],

$$l = 2\pi N \left(r + \frac{1}{2}eN \right),$$

ou, en mettant pour N sa valeur,

$$l = \frac{h}{2} + \frac{eh^2}{16\pi r^2}. \quad [10]$$

Cette valeur de l portée dans la valeur de A donne

$$A = (P + 2p + qh)e + \frac{qe^2 h^2}{8\pi r} - 4\pi qr^2. \quad [11]$$

Si maintenant on met pour A et B leurs valeurs dans la relation [8] élevée au carré, on arrive à l'équation

$$6q h^2 e^2 - 64 (P + 2p + qh) \pi e r^2 - 8q e^2 h^2 + 4.64 \pi^2 q r^4 = 0,$$

que l'on peut écrire :

$$r^4 - \frac{(P + 2p + qh)}{4\pi q} \cdot \frac{r^2}{e} - \frac{h^2}{128\pi^2} = 0. \quad [12]$$

Cette équation bicarrée n'admet qu'une racine réelle positive pour l'inconnue $\frac{r}{\sqrt{e}}$; si on la désigne par k , on a donc

$$r = k \sqrt{e}, \quad [13]$$

relation qui montre que le rayon r correspondant à la rencontre des bennes est proportionnel à la racine carrée de l'épaisseur de la corde.

Soient maintenant R le rayon maximum et r_0 le rayon minimum; il est clair qu'on aura

$$R = r + Ne;$$

mais s'il faut N tours pour amener la benne chargée du point de rencontre au point supérieur de sa course, ce nombre représente aussi le nombre de tours nécessaire pour amener la benne vide du même point de rencontre au point le plus bas; on a donc

$$r_0 = r - Ne.$$

En mettant pour N sa valeur, et en remplaçant ensuite r par la sienne, on peut écrire

$$R = r + \frac{he}{4\pi r} = \sqrt{e} \left(k + \frac{h}{4\pi k} \right),$$

et
$$r_0 = r - \frac{he}{4\pi r} = \sqrt{e} \left(k - \frac{h}{4\pi k} \right),$$

relations qui montrent que les rayons maximum et minimum sont aussi proportionnels à la racine carrée de l'épaisseur de la corde.

On peut remarquer que la valeur n' de n , qui correspond au maximum de u , c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A}{B}}$,

est précisément la moitié de N ; par conséquent, d'après la manière dont l'appareil se trouve ainsi réglé, les positions pour lesquelles la somme des moments s'écarte le plus de sa valeur moyenne Pr dans un sens ou dans l'autre, sont séparées par un même nombre de tours de la bobine, ce qui répare l'oscillation d'une manière très-simple.

BOCARD, machine employée dans les usines métallurgiques à pulvériser le minerai pour le débarrasser de sa gangue. Un bocard est formé d'une série de **PILONS** (Voy. ce mot) que fait mouvoir un même arbre à cames, mis lui-même en mouvement par une roue hydraulique. Les pistons et les cames sont ordinairement en fonte. Les pilons sont rangés, sur une même ligne parallèle à l'arbre, au-dessus d'une auge dans laquelle on place le minerai. Chaque pilon est soulevé par un certain nombre de cames, 4 par exemple, placées dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation de l'arbre; en sorte que, pendant un tour de la roue hydraulique, chaque pilon est soulevé 4 fois. Mais les cames qui répondent aux différents pilons ne sont pas alignées sur l'arbre dans le sens de son axe; tous les pilons seraient alors soulevés en même temps, et il en résulterait une trop grande inégalité dans la résistance, qui passerait brusquement de zéro à une valeur considérable. On dispose les cames en hélice sur l'arbre, de manière que les pilons soient soulevés successivement et non simultanément; on obtient ainsi une résistance plus uniforme et un mouvement plus régulier. Ordinairement on divise la série des pilons en un certain

nombre de **batteries** distinctes, dont chacune comprend un petit nombre de pilons, 4 par exemple.

Un courant d'eau traversant l'auge dans toute sa longueur entraîne les matières pulvérulentes, et, passant à travers une grille qui retient le minerai non pulvérisé, va déposer ces matières dans un bassin spécial.

BOISSEAU, ancienne mesure de capacité pour les matières sèches. Sa valeur changeait d'une contrée à l'autre. Le boisseau de Paris valait 13^{lit},01. Le boisseau se subdivisait en 16 litrons.

BORDAGES, planches épaisses qui forment le **bordé** ou revêtement extérieur de la coque d'un navire. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

BORDÉ, revêtement extérieur de la coque d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Il se fait au moyen de pièces appelées **bordages** que l'on place bout à bout et formant des files appelées **virures**. Un bordage a quatre faces latérales; celle qui doit être appliquée sur la membrure et celle qui lui est opposée sont les **faces de placage**; les deux autres, par lesquelles les bordages appartenant aux virures voisines doivent se toucher, sont les **faces de joint**. Les limites entre lesquelles chaque bordage doit être appliqué, sont des courbes tracées à l'avance sur la coque, et qui suivent en général la direction des lisses. La face de placage interne du bordage peut être considérée comme une surface réglée, engendrée par une droite qui se mouvrait en s'appuyant sur ces deux limites et en restant dans des plans normaux à la coque. Il en résulte qu'un bordage dont les faces sont planes ne peut s'appliquer sur la coque sans subir en général une torsion à laquelle on donne le nom de **dévirage**, et les génératrices de la face de placage portent, pour cette raison, le nom de **lignes de dévirage**. Cette torsion peut être obtenue par un séjour plus ou moins prolongé à l'étuve, quand le bordage n'a pas une trop grande épaisseur; il suffit alors de faire les faces de placage planes, et comprises entre les limites voulues. Pour tracer ces limites sur les faces de placage, on opère de la manière suivante. Soient LL et $L'L'$ (fig. 1) les limites

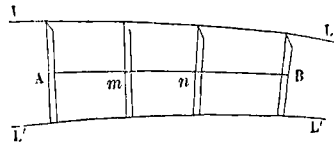


Fig. 1.

tracées sur la coque. On prend entre ces limites deux points A et B , situés à peu près au milieu de leur intervalle; on y fixe les extrémités d'un cordeau bien tendu; en le pinçant on obtient sur la coque une trace $AmnB$ qui représente la plus courte distance des points A et B sur la surface de la coque. En différents points A, m, n, B de cette courbe AB on mène des normales à cette courbe, et l'on mesure les distances, sur ces normales respectives, des points A, m, n, B aux deux limites. Ces points ayant été marqués sur le cordeau, on le détache et on y introduit entre les torons de petites broches en bois ayant exactement, de part et d'autre du cordeau, les longueurs qui ont été mesurées; de telle sorte que leurs extrémités coïncideraient avec les limites LL et $L'L'$, si le cordeau

était de nouveau tendu entre les points A et B. Cela fait, on porte le cordeau sur la face plane du bordage; on le tend, et, en ayant soin de maintenir les broches normales à la direction du cordeau, on marque les points correspondants aux extrémités de ces broches; et par ces points on fait passer deux courbes qui coïncideront avec les limites LL et L'L' quand le bordage sera en place. On peut, au lieu d'un cordeau, employer une règle pliante, et remplacer les broches par des ouvertures de compas prises sur la coque et reportées sur le bordage. Les faces de joint se déterminent par des équerrages, c'est-à-dire au moyen de l'angle que chaque génératrice de la face de placage, ou chaque ligne de dévirage, fait avec la génératrice correspondante de la face de joint. Cette dernière devant être normale à la coque, l'équerrage se fait comme il suit. Si, au point *m* considéré, la surface de la coque est concave, comme dans la figure 2, on place au point *m* deux fausses équerrés, égales, le manche de chacune appuyé sur la surface, dans le sens du plan mené normalement à la coque par la ligne de dévirage que l'on considère et dont l'extrémité est en *m*, les deux lames réunies, de manière à former des angles égaux avec leurs manches respectifs.

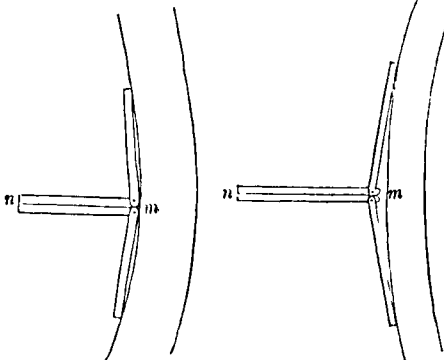


Fig. 2.

Fig. 3.

L'angle ainsi obtenu sera celui sous lequel la face de joint devra être travaillée au point *m*; car la droite *mn* est alors une normale à la coque. Si au point *m* la coque présentait une surface convexe, les manches des deux équerrés devraient être tangents à la surface, comme dans la figure 3; mais la manière d'opérer serait la même. Les bordages dont nous venons de parler, et dans lesquels les surfaces de placage primitivement planes sont ensuite gauchies par l'action de la chaleur, portent le nom de *bordages droits*.

Lorsque le bordage a trop d'épaisseur pour pouvoir être suffisamment gauchi à l'étuve, il faut donner à l'avance la forme voulue à la surface de placage interne; on dit alors que c'est un *bordage de tour*. Pour travailler le bordage dans ce cas, on commence par se procurer le gabarit d'une ligne courbe plane tracée sur la coque entre les deux limites. Pour cela, on bat au cordeau comme ci-dessus une ligne de plus courte distance sur la surface de la coque, et en différents points A, B, C, D, E (fig. 4) de cette ligne on fixe, normalement à la coque, de longs clous à tige quadrangulaire et à

têtes plates, qu'on dispose de manière que leurs faces supérieures et leurs têtes soient dans le plan de la courbe ABCDE. On s'en a sure au moyen d'un cordeau lâche, dont les bouts sont fixés aux extrémités

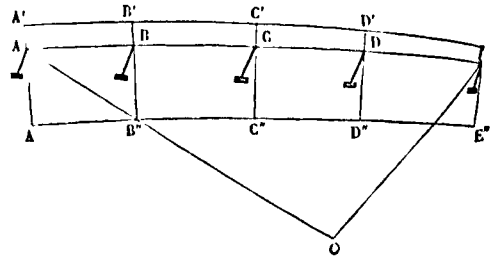
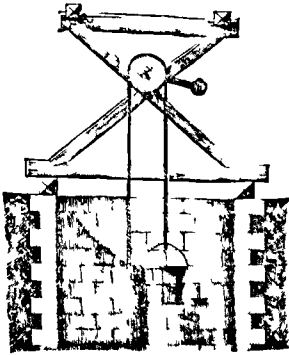


Fig. 4.

A et E de la courbe; on tend ce cordeau suivant la ligne brisée AOE, de manière qu'en visant dans le plan des deux brins, la courbe et les surfaces supérieures des clous soient cachées par le cordeau. Sur cette rangée de clous on établit alors une planche mince et l'on prend le gabarit de la courbe plane ABCDE (*Voy. GABARIT*). On mesure ensuite les angles que font les normales à cette courbe, tracées sur la coque, avec le plan de la courbe elle-même; pour cela, si A'A'' est, par exemple, la normale relative au point A, on pose le manche de la fausse équerré sur A'A'', le sommet de l'angle en A, et la lame dans le plan déterminé par les surfaces des clous; on opère de même pour le point B, etc.; et l'on reporte tous ces angles sur le bord d'une planchette. On mesure les distances AA', BB', CC', etc.; et les distances A'A'', B'B'', C'C'', etc.; et l'on en prend note sur la même planchette. Enfin on mesure les angles que font les droites A'A'', B'B'', C'C'', etc., avec les normales à la coque aux points A', B', C', D', etc. Pour cela, s'il n'y a point encore de bordage placé le long de la courbe A'B'C'D'E', on suit la marche indiquée par les figures 2 et 3; s'il y a un bordage placé le long de cette courbe, on place le manche de la fausse équerré sur A'A'', son plan normalement à la coque, et la lame en contact avec la face de joint du bordage déjà placé. On opère de même aux points A'', B'', C'', D'', E''. On a ainsi les éléments nécessaires pour travailler le bordage de tour. A cet effet, après avoir choisi au magasin des bois une pièce ayant à peu près la forme du bordage demandé, on commence par lui donner une face plane sur laquelle on place le gabarit de la courbe ABCDE; on y trace cette courbe; et à l'aide des équerrages pris aux points A, B, C, D, E, on travaille le bordage sur sa face de placage interne. On place alors la pièce, cette face interne en haut, et la face plane verticalement. On tend un cordeau à une certaine distance de la face plane, et parallèlement à cette face; puis, à l'aide du fil à plomb, on obtient sur la surface de placage déjà travaillée un certain nombre de points, qui réunis donnent une seconde courbe plane très-peu différente de celle qui a été obtenue par gabarit. On peut d'ailleurs s'en assurer à l'aide du gabarit lui-même, et y reporter les points A, B, C, D, E. Par ces points on mène les normales A'A'', B'B'', C'C'', etc.; et l'on y reporte les points A', B', C', etc., ainsi que les points A'', B'', C'', etc. Ensuite, à l'aide des équerrages pris

vement par une manivelle de 0^m,40 de rayon ; sur ce treuil s'enroule une corde qui supporte deux paniers dont la capacité est de 0^m,033 pour chacun. Le treuil porte par ses tourillons sur deux



montants en X, reliés en bas et en haut par des entretoises.

Il faut 5 hommes pour manœuvrer cette machine : 1 pour remplir le panier, 2 pour tourner la manivelle, 2 pour décrocher le panier et le vider ; ces deux derniers alternent avec les deux précédents.

Le bourriquet s'élève de 5^m en 20^s et redescend en 15^s ; on compte 20^s pour accrocher un panier plein et décrocher le panier vide, 25^s pour décharger le panier plein. — Il résulte de ces données que pour élever 0^m,033 de terre à 5^m de hauteur, il faut 80 secondes ; on en déduit aisément que, pour élever 1^m,033 de terre à la même hauteur, il faut 2424 secondes ou 40^m 24^s. Cette hauteur de 5^m représente à très-peu près 3 rails de 1^m,65 chacun. (Voy. TRANSPORT DES TERRES.)

On donne le nom de *bourriquet à cheval* à un appareil ayant la même destination, mais qu'un cheval met en mouvement. Le treuil à manivelle est remplacé par une grande poulie sur laquelle s'enroule une corde ; à l'une des extrémités de cette corde est suspendu un plateau contenant dans plusieurs paniers la terre à élever ; l'autre extrémité s'enroule, à l'étage inférieur, sur un tambour horizontal ; et sur l'axe de ce tambour s'enroule une seconde corde, à laquelle le cheval est attelé. En tirant sur la corde, le cheval la déroule, fait tourner le tambour, et élève le fardeau à l'aide de la poulie. En 10 heures de travail, un cheval peut élever ainsi, à une hauteur de 14 mètres, 96 fois 132^m de terre, et fournit ainsi par jour un travail total de 177 408^m. L'inconvénient de ce système, d'ailleurs économique, est que, le cheval marchant en ligne droite, il lui faut une piste de 40 à 45 mètres, et qu'on ne peut pas toujours disposer d'un espace aussi grand. — Lorsque l'espace manque, on attelle le cheval à un manège, qui fait mouvoir deux tambours verticaux placés l'un au-dessus de l'autre ; une corde s'enroulant sur l'un de ces tambours et se déroulant sur l'autre fait tourner un treuil horizontal, lequel, à l'aide d'une ou plusieurs poulies, élève les terres comme dans le cas précédent. L'appareil ainsi disposé prend le nom de *bourriquet à manège*. (Voy. les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin.)

BOUSSOLE, instrument qui sert à mesurer les

angles sur le terrain. Sa partie principale est une aiguille aimantée AB (fig 1) reposant, au moyen d'une chape en agate, sur un pivot d'acier établi au centre d'un cercle divisé. Ce cercle est placé à la base inférieure d'une cavité cylindrique pratiquée dans le fond d'une boîte carrée en bois ; cette cavité est fermée à la partie supérieure par une glace

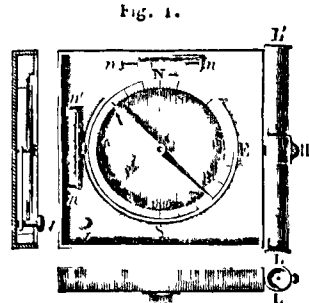


Fig. 2.

très-rapprochée de l'aiguille, en sorte que, lorsqu'on renverse la boîte, l'aiguille ne quitte pas son pivot. Un couvercle à coulisse sert à fermer la boîte. — Cette boîte est portée par un support à trois branches au moyen d'un *genou à coquilles* (fig. 2) semblable à celui du *GRAPHOMETRE* (Voy. ce mot) ; mais elle peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan du cercle divisé. — Le limbe de ce cercle porte des degrés et demi-degrés ; les points 0, 90°, 180°, 270° sont placés aux extrémités de deux diamètres parallèles aux côtés de la boîte, et correspondent respectivement aux points cardinaux Nord, Est, Sud, Ouest. La ligne 0-180° est ce que l'on appelle la *ligne de foi*. — A côté de la boîte, et parallèlement à la ligne NS, est établie une lunette LL', qui sert à viser les signaux, et dont l'objectif est muni d'une croisée de fils qui détermine l'axe optique (Voy. ce mot). Cette lunette est mobile autour d'un axe horizontal H parallèle à la ligne EO ; en sorte que, lorsque le limbe est horizontal, et la ligne NS dirigée effectivement du nord

au sud, l'axe optique de la lunette peut décrire un plan parallèle au méridien.

Deux NIVEAUX A BULLE D'AIR (Voy. NIVEAU) nn' et $n'n'$ (fig. 1), placés parallèlement aux deux côtés consécutifs de la boîte, permettent de donner au limbe une position parfaitement horizontale. Pour que l'aiguille ne fatigue pas inutilement son pivot quand on n'opère pas, on a établi à la hauteur du limbe un petit levier l que l'on fait mouvoir soit à l'aide d'une vis V , comme l'indique la figure, soit à l'aide d'un dispositif fondé sur l'emploi du plan incliné; quand le levier est mis en mouvement, son extrémité qui embrasse le pivot par une fourche ou même par un anneau, soulève l'aiguille et l'appuie contre le verre. Ce mécanisme sert aussi, au moment des observations, à arrêter les oscillations de l'aiguille vers sa position moyenne afin d'en diminuer l'amplitude et d'amener plus rapidement l'équilibre.

Dans les boussoles d'arpenteur, la lunette est ordinairement remplacée par un tuyau en bois, à section rectangulaire, terminé à ses deux bouts par des plaques de cuivre présentant exactement la disposition des pinnules d'une ALIDADE (Voy. ce mot).

— D'autres fois, au contraire, la lunette est munie d'un arc de cercle qui sert à évaluer l'angle qu'elle fait avec l'horizon; l'instrument repose sur un support à vis calantes, et l'on y trouve des verniers et des vis de rappel comme dans un CERCLE RÉPÉTITEUR (Voy. ce mot); mais ce luxe d'accessoires ne convient guère à un instrument dont les indications ne sont pas en définitive susceptibles d'une grande précision.

Enfin, le limbe lui-même peut avoir un mouvement propre; pour cela on le fixe à une roue dentée sur une partie de sa circonférence et qui engrène avec un pignon que l'on peut faire mouvoir du dehors. Ce dispositif a principalement pour objet de pouvoir, dans certains cas, faire coïncider la ligne NS ou 0-180° avec le méridien magnétique. Pour cela, on place la boussole de manière que l'axe de la lunette soit dans le méridien du lieu; on fait alors mouvoir le pignon jusqu'à ce que la ligne de foi vienne coïncider avec la direction que prend alors l'aiguille.

Pour mesurer un angle horizontal, on établit l'instrument de manière que le limbe soit parallèle à l'horizon, et que son centre soit à peu près dans la verticale du sommet de l'angle à mesurer. On dirige la boîte de manière qu'en visant par la lunette on aperçoive le signal placé dans la direction de l'un des côtés de l'angle, et on lit sur le limbe l'AZIMUT MAGNÉTIQUE (Voy. ce mot) de ce côté. On fait ensuite tourner la boîte autour de son axe vertical, jusqu'à ce qu'en visant de nouveau par la lunette on aperçoive le signal placé dans la direction du second côté, et on lit de même sur le limbe l'azimut magnétique de ce second côté. La différence de ces deux azimuts exprime la valeur de l'angle cherché; car la ligne NS, parallèlement à laquelle est dirigé le plan de la lunette, a évidemment tourné d'un angle égal à l'angle qu'on mesure; et puisque l'aiguille a conservé une position fixe dans l'espace, son extrémité a marché sur le limbe, ou, ce qui revient au même, le limbe s'est déplacé par rapport à cette extrémité, d'un nombre de degrés qui est la mesure demandée. D'après la

convention établie pour la mesure de l'azimut, il ne peut jamais y avoir d'ambiguïté.

Il est aisé de voir ce qu'il y aurait à faire pour faire en un point donné d'une droite horizontale un angle dont la mesure serait donnée. (Voy. GRAPHOMÈTRE.)

La boussole peut servir à orienter un plan. (Voy. ORIENTATION.)

Avant de se servir d'une boussole, il est nécessaire de la vérifier. 1° La première chose à faire est de voir si l'axe de figure de l'aiguille, c'est-à-dire la grande diagonale du losange qu'elle forme, coïncide avec l'axe magnétique. Pour s'en assurer, on établit le limbe horizontalement, on vise un point éloigné, et on lit sur le limbe l'azimut de la direction du rayon visuel mené à ce point. On enlève la glace qui recouvre le limbe, on retourne l'aiguille sur elle-même, de manière qu'elle repose sur son pivot par l'autre côté de sa chape; on vise le point déjà visé, et on fait une seconde lecture. Si les deux angles obtenus sont égaux, on en conclut qu'il y a coïncidence entre l'axe magnétique et l'axe de figure; s'il y a une différence, elle exprime le double de l'erreur de pointé dans chaque opération. Comme cette erreur est nécessairement constante, on peut, en en tenant compte, se servir d'une boussole défectueuse au point de vue dont il s'agit; mais il sera toujours préférable de faire corriger le défaut. 2° La seconde chose à faire est de s'assurer que l'axe optique de la lunette est bien parallèle à la ligne NS. Pour cela, on vise un objet éloigné X;



Fig. 3.

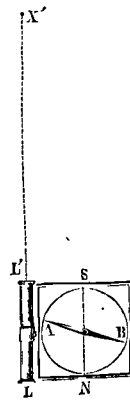


Fig. 4.

on fait faire à la boîte un demi-tour complet autour de son axe vertical, et en même temps on fait également faire un demi-tour complet à la lunette autour de son axe horizontal; puis on vise le même point que tout à l'heure; les deux azimuts indiqués par l'aiguille devront différer exactement de 180°; car les droites $LL'X$ dans les figures 3 et 4 doivent être considérées comme parallèles à cause de l'éloignement du point X que l'on vise. 3° Il faut encore s'assurer que le centre de rotation de l'aiguille coïncide avec le centre du limbe; on emploiera pour cela la méthode indiquée à l'art. GRAPHOMÈTRE (Voy. ce mot) et qui consiste à mesurer deux angles adjacents. 4° Enfin, il y a lieu de vérifier si le mouvement de rotation de la boîte s'exécute bien autour d'un axe perpendiculaire au plan du limbe. Il

suffit pour cela de placer le limbe horizontalement et de voir si, en faisant tourner la boîte, le limbe conserve son horizontalité, c'est-à-dire si les bulles des niveaux ne quittent pas leurs points de repère.

La boussole ne peut pas fournir des indications d'une grande précision. Indépendamment des oscillations continuelles de l'aiguille qui rendent la lecture difficile, la déclinaison est sujette à des variations diurnes qui peuvent aller jusqu'à près d'un quart de degré dans la belle saison, c'est-à-dire précisément à l'époque ordinairement consacrée aux opérations topographiques. Il en résulte qu'avec cet instrument il est impossible de répondre d'un angle à moins d'un quart de degré près, puisque les erreurs de lecture peuvent s'ajouter à l'erreur provenant des variations de déclinaison.

La déclinaison de l'aiguille aimantée est donnée dans la *Connaissance des temps*; elle est en ce moment de 20° 6' Ouest. On peut la déterminer avec la boussole même quand on connaît la méridienne du lieu; il suffit en effet de faire coïncider l'axe optique de la lunette, ou, ce qui revient au même, la ligne NS, avec cette méridienne; l'aiguille indique alors elle-même, sur le limbe, la déclinaison demandée.

La boussole, telle que nous venons de la décrire, exige un établissement fixe. On a cherché, en vue des *levés expéditifs* et des reconnaissances militaires, à donner à l'instrument une disposition qui permit

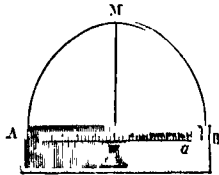


Fig. 5.

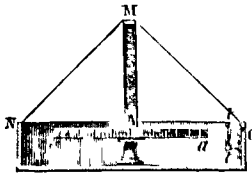


Fig. 6.

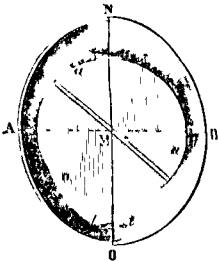


Fig. 7.

née par un crin OMN, fixé par ses deux bouts aux deux extrémités d'un diamètre de la boîte, et que l'on tend au moyen d'un arc elliptique AMB, qui pivote autour des points A et B et peut à volonté

de s'en servir en le tenant simplement à la main, et dispensat d'une mise en station. L'appareil ne donne à la vérité qu'une approximation assez grossière, mais qui suffit dans les circonstances où l'on en fait usage.

Nous citerons la *boussole de Burnier*, la *boussole à réflexion* ou *boussole du capitaine Kater*, et la *boussole d'Hossard*, fondée également sur les propriétés des miroirs plans.

La *boussole de Burnier*, contenue dans une boîte elliptique, se compose d'une aiguille aimantée portant une bande cylindrique très-mince *aaa*, fig. 5, 6 et 7, qui sert de limbe et sur laquelle on a tracé des divisions verticales. La ligne de visée est déterminée

prendre la position verticale qui sert à tendre le fil, ou bien se rabattre dans la boîte. Les divisions du limbe vertical se lisent par un orifice circulaire O pratiqué à la boîte dans le plan du crin tendu; cet orifice est muni d'une loupe *ll* pour faciliter la lecture. En même temps qu'on vise un point éloigné, en se servant du crin comme alidade, on lit par le trou oculaire le numéro de la division du limbe vertical qui apparaît devant l'œil; c'est la mesure de l'angle que la ligne de visée fait avec le méridien magnétique.

Dans la *boussole du capitaine Kater* (fig. 8 et 9),

Fig. 8.

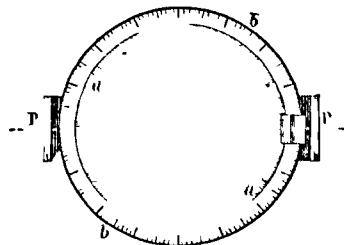


Fig. 9.

l'aiguille *aa* porte un limbe horizontal divisé *bbb*; en même temps qu'on vise un objet au moyen des pinnules PP, l'œil peut apercevoir par double réflexion totale, à travers un prisme *mnpq*, (fig. 10),

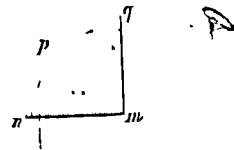


Fig. 10.

comme dans la chambre claire de Wollaston (*Traité de Physique* de M. Pouillet, t. II, n° 406), le numéro de la division du limbe qui se présente au-dessous du prisme dans le plan vertical de la ligne de visée. On remplace souvent le prisme par un miroir plan incliné à 45° et qui produit le même effet.

Dans la *boussole d'Hossard* (fig. 11 et 12) le limbe est fixé à la boîte; celle-ci porte un couvercle qui s'ouvre à charnière, et dont la face interne est un miroir. Dans le plan vertical de symétrie de ce miroir on a tracé une ligne bien visible *ab*; et au milieu du bord opposé de la boîte s'élevé une tige verticale *tt*, qui peut se rabattre horizontalement quand on veut fermer la boîte. Pour viser un objet, il faut lui tourner le dos, et faire en sorte que son image soit coupée verticalement par la tige *tt*, par

UF on élève la perpendiculaire LL', elle contiendra le centre du cercle cherché. Pour déterminer ce centre, on joindra le point F avec le point M où LL' rencontre HH'; et d'un point quelconque P pris sur LL' on abaissera sur HH' une perpendiculaire PI; du point P comme centre avec PI pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera MF en un point N; on joindra PN, et par le point F on lui mènera une parallèle, qui rencontrera LL' au centre C de la circonférence demandée. Car la similitude des triangles CKM et PIM donne :

$$CK : PI = CM : PM.$$

La similitude des triangles CMF et PMN donne d'un autre côté : $CM : PM = CF : PN$.

Par conséquent $CK : PI = CF : PN$; mais PI égale PN par construction; donc $CK = CF$. Ainsi la circonférence décrite du point C avec CK pour rayon passera par le point F. Comme C est sur LL', cette circonférence passera aussi par le point U; elle sera tangente à HH' en K; et, d'après ce qu'on a vu plus haut, elle sera tangente en T au cercle donné OA.

Dans les canons postérieurs à 1838, la droite AF est parallèle à l'axe de la pièce; il en résulte que LL' est perpendiculaire à HH', et que les trois points K, I et M se confondent; le point de contact K se trouve ainsi immédiatement déterminé; et l'on peut déterminer le centre C en élevant une perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint le point K au point F.

BOYAUX DE TRANCHÉE, communications en zigzags, entre les dépôts de tranchée, les parallèles et le point d'attaque. (Voy. ATTAQUE DES PLACES.)

BRAS DE ROUES DENTÉES. Leur nombre doit, autant que possible, être un sous-multiple exact du nombre des dents. (Voy. ENGRENAGES.)

Leur section transversale se détermine en les considérant comme encastés dans le moyeu, et soumis au moment où ils passent sur la ligne des centres, à un effort perpendiculaire égal à la réaction mutuelle F des dents en contact. Si r est le rayon de la roue, on a donc (Voy. FLEXION PLANE) :

$$\mu = Fr, \text{ et par suite } R = \frac{v}{1} Fr.$$

Si la section du bras est un rectangle dont la base parallèle à l'axe de la roue est a, et la hauteur égale à b, on a $v = \frac{1}{2} b$, $I = \frac{1}{12} ab^3$, et par suite

$$R = \frac{6Fr}{ab^2}.$$

On fait généralement $a = 0,2 \cdot b$; il en résulte

$$R = \frac{30Fr}{b^3}, \text{ d'où } b = \sqrt[3]{\frac{30Fr}{R}}.$$

On ajoute ordinairement une nervure pour s'opposer à la flexion latérale; l'épaisseur de cette nervure est 0,1 b.

La section peut avoir la forme elliptique; si a désigne le petit axe, parallèle à l'axe de la roue, et b le grand axe, perpendiculaire au premier, on a

$$v = \frac{1}{2} b, \text{ et } I = \frac{\pi ab^3}{64};$$

par suite

$$R = \frac{32Fr}{\pi ab^2}.$$

On fait alors $a = \frac{1}{2} b$; il vient dans ce cas

$$R = \frac{64Fr}{\pi b^3}, \text{ d'où } b = \sqrt[3]{\frac{64Fr}{R}}.$$

Ayant déterminé les dimensions de la section voisine du moyeu, on en prend les $\frac{2}{3}$ pour avoir les dimensions correspondantes de la section voisine de la couronne.

BRAS DE VOLANT, bras qui relie l'anneau ou la jante d'un volant au moyeu. Ces bras ont à supporter un effort longitudinal provenant de la force centrifuge de l'anneau. D'après un théorème de M. Poncelet (Voy. FORCE CENTRIFUGE), la résultante des forces centrifuges de la portion de la jante soutenue par chaque bras est la même que si la masse de cette portion de jante était réunie en son centre de gravité. Si P est le poids total de la jante, et n le nombre des bras, le poids de la portion de jante qui agit sur un bras sera $\frac{P}{n}$. Soit ω la vitesse angulaire du volant, et λ la distance de l'axe au centre de gravité de la portion d'anneau considérée, on aura $\frac{P}{gn} \cdot \omega^2 \lambda$ pour la force longitudinale

dont il s'agit. Si donc Ω désigne la section du bras, et R la tension par mètre carré que le métal peut supporter au maximum, on devra avoir (Voy. ALLONGEMENT)

$$\Omega R = \frac{P}{gn} \omega^2 \lambda, \text{ d'où } \Omega = \frac{P \lambda \omega^2}{Rgn}. \quad [1]$$

La section du bras devra donc être d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que la vitesse angulaire du volant sera plus considérable.

Mais cette section doit remplir en outre une autre condition : si, par une cause quelconque, l'axe de rotation venait à s'arrêter brusquement, il faut que la puissance vive de la jante ne produise pas sur les bras une flexion qui entraîne leur rupture, ni même qui dépasse la limite d'élasticité de la matière. Désignons par F l'effort exercé, en vertu de cette puissance vive acquise, à l'extrémité d'un bras. Ce bras pouvant être considéré comme encasté dans le moyeu et soumis à l'autre extrémité à la force perpendiculaire F, on doit avoir (Voy. FLEXION PLANE)

$$R = \frac{v}{1} F \rho. \quad [2]$$

D'autre part, on trouve que sous l'effort F le bras prend une flèche exprimée par

$$f = \frac{F \rho^3}{3EI};$$

le travail de la force F est donc $Ff = \frac{F^2 \rho^3}{3EI}$. Ce travail, répondant à l'instant où la puissance vive du volant est épuisée, on doit avoir (Voy. EFFET DU TRAVAIL)

$$\frac{F^2 \rho^3}{3EI} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \omega^2 \rho \cdot \frac{1}{n}, \quad [3]$$

n désignant le nombre des bras. De l'équation [2]

on tire $F = \frac{RI}{v \rho}$ et en substituant cette valeur dans [3], il vient

$$\frac{R^2 I \rho}{3E v^3} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \omega^2 \frac{\rho}{n}, \text{ ou } \frac{R^2 I}{3E v^2} = \frac{P \omega^2}{2gn}.$$

Cette équation donnera la valeur de la section du bras. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que cette section soit carrée et que x soit son côté, on aura

$$I = \frac{1}{12} x^4, \quad v^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

par conséquent

$$\frac{I}{v^2} = \frac{x^2}{3},$$

par suite

$$\frac{R^2 x^2}{E} = \frac{P \omega^2}{2 g n^2},$$

$$\text{d'où } x = \sqrt{\frac{P \omega^2 E}{2 g n R^2}} = \frac{\omega}{R} \sqrt{\frac{P E}{2 g n}}. \quad [4]$$

On prendra pour la section du bras la plus grande des deux valeurs ainsi obtenues par des considérations distinctes.

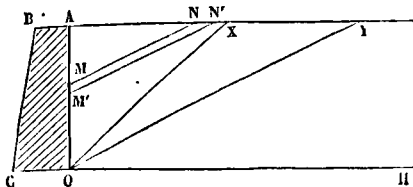
Dans ces formules, on peut prendre $R = 1600000$, ou même 2000000 , si la fonte est de bonne qualité.

BRASSE, mesure de longueur usitée dans la marine, principalement pour coter les sondes sur les cartes hydrographiques. La brasse vaut 5 pieds ou $1^m,624$; elle se divise en pieds et pouces.

BRIGANTINE, voile trapézoïde, grée à l'arrière du grand mât ou du mât d'artimon, et qui s'étend le long d'une vergue en arc-boutant appelée *cur* ou *BÔME*.

BURDINE, roue hydraulique à axe vertical, analogue à la TURBINE D'EULER, et par conséquent à la TURBINE FONTAINE (*Voy. ces mots*), mais n'offrant pas les perfectionnements de cette dernière. Elle doit son nom à l'ingénieur Burdin, qui l'a proposée en 1824.

BUTÉE DES TERRES, résistance que les terres soutenues opposent à une action horizontale tendant à les rompre. Soit OABC la section d'un mur à paroi interne verticale soutenant un massif de terre ter-



miné par un plan horizontal OX. Il peut arriver que, par l'effet d'une pression horizontale extérieure, comme la poussée d'une voûte ou la pression d'un fluide, le mur presse à son tour les terres qu'il soutient, et tende à les rompre suivant un certain plan OY, nommé *plan de rupture*, et à faire glisser le prisme AOY en montant le long de ce plan. La résistance que les terres opposent à cette action horizontale est ce que l'on nomme la *butée*. Pour la déterminer, concevons que le prisme AOY soit sur le point de monter. Soit h la hauteur OA du terre-plain, $AOX = \alpha$ l'angle que fait avec la verticale le TALUS NATUREL DES TERRES (*Voy. ce mot*), et $AOY = x$ l'angle que fait le plan de rupture avec la verticale. Désignons par Π le poids du mètre cube de terre, et par l la longueur du mur, qui est celle du prisme AOY. Le poids P de ce prisme a pour expression :

$$P = \frac{1}{2} \Pi l h^2 \tan \alpha. \quad [1]$$

Soit F la force horizontale qui tend à faire monter ce poids le long du plan OY, et R la réaction que ce plan exerce sur le prisme. Si l'on néglige le frottement des terres contre le mur, et si l'on remarque que le coefficient de frottement des terres sur elles-mêmes est précisément $\tan(90^\circ - \alpha)$, c'est-à-dire $\cot \alpha$, on aura pour exprimer l'équilibre du prisme

les deux équations suivantes, obtenues en projetant successivement les trois forces F , P et R sur le plan OY et sur une perpendiculaire à ce plan :

$$\begin{aligned} F \sin x - P \cos x - R \cos \alpha &= 0, \\ F \cos x + P \sin x - R \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad [2]$$

Éliminant R entre ces deux équations, on en tire

$$F(\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha) + P(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} F &= -P \tan(\alpha + x) \\ &= -\frac{1}{2} \Pi l h^2 \tan \alpha \tan(\alpha + x). \end{aligned} \quad [3]$$

Pour que cette expression soit positive, il faut que $\alpha + x$ soit un angle obtus. La plus petite valeur de F qui puisse produire la rupture, s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de $\tan x \tan(\alpha + x)$ par rapport à x . On arrive ainsi à l'équation

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin(\alpha + x) \cos(\alpha + x) = 0,$$

ou

$$\sin 2x + \sin 2(\alpha + x) = 0,$$

ce qui exige que les angles $2(\alpha + x)$ et $2x$ donnent en somme 360° ; on doit donc avoir

$$2(\alpha + x) + 2x = 360,$$

ou

$$2x + \alpha = 180^\circ,$$

ou enfin

$$x = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha. \quad [4]$$

Le prisme de plus petite butée sera donc déterminé en menant une ligne OY qui fasse avec l'horizontale OH un angle égal à la moitié de α , ou à la moitié de celui qui fait avec la verticale le talus naturel des terres.

La relation [4] donne

$$x + \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha,$$

et par suite

$$F = + \frac{1}{2} \Pi l h^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha. \quad [5]$$

Cette force prise en sens contraire exprime la résistance horizontale que les terres opposent à la rupture; c'est donc l'expression de la butée.

Pour les applications qu'on a à faire de cette théorie, il est nécessaire de déterminer le point d'application de la butée sur la ligne OA. Pour cela, cherchons d'abord la butée ψ sur une hauteur $AM = z$; nous aurons d'après la formule [5]

$$\psi = \frac{1}{2} \Pi l z^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha = A z^2,$$

en représentant, pour abrégier, par A l'ensemble des facteurs multipliant z^2 . Si l'on différencie cette expression par rapport à z , on obtient

$$d\psi = 2 A z dz;$$

c'est l'expression de la butée élémentaire que les terres exercent sur une bande horizontale du mur ayant pour longueur l et pour hauteur dz . Le moment de cette force élémentaire par rapport à l'axe projeté en A est $2 A z dz \times z$, ou $2 A z^2 dz$. La somme de tous les moments analogues, depuis le point A jusqu'au point O, est égale au moment de la force F par rapport au même axe, c'est-à-dire au produit de F par la distance cherchée Z de son point d'application au point A; on a donc (*Voy. MOMENTS*)

$$FZ = \int_0^h 2 A z^2 dz = \frac{2}{3} A h^3,$$

ou, en mettant pour F et A leurs valeurs

$$\frac{1}{2} \Pi l h^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \Pi l \cot^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot h^3,$$

d'où

$$Z = \frac{2}{3} h.$$

Ainsi le point d'application de la butée est situé sur la droite OA, aux deux tiers de cette droite à partir du point A, ou au tiers à partir du point O. Il en résulte qu'en appelant μ le moment de cette butée, on a

$$\mu = \frac{1}{2} \Pi h^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} \Pi h^3 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha. \quad [6]$$

Si le terre-plein s'élevait au-dessus du mur, on déterminerait la butée en suivant une marche analogue à celle que l'on suit dans la recherche de la ROUSSEE DES TERRES (Voy. ce mot); mais le cas que nous venons de traiter suffit dans la plupart des applications. (Voy. le *Mémoire de M. Poncelet sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations.*)

BUT EN BLANC (PORTÉE DE), distance de la bouche d'un canon, ou, plus généralement, d'une bouche à feu ou d'une arme à feu quelconque, au point où la trajectoire du projectile rencontre pour la seconde fois la ligne de mire naturelle formée par les crans de mire. Voici les valeurs de la portée de but en blanc pour les canons chargés au tiers du poids du boulet.

		mètres
Canon de côte	de 48.....	820
id.	36.....	800
id.	24.....	750
Canon de siège	de 24.	720
id.	16.....	690

Canon de place de 12..... 650 mètres
 Canon de campagne de 12..... 540 à 550
 id. 8..... 500 à 510.

Le nouveau canon de 50, de la marine, chargé de 6^h, a une portée de but en blanc de 910^m; chargé de 8^h il a une portée de but en blanc de 970^m.

Voici maintenant les valeurs de la portée de but en blanc des obusiers pour les charges habituelles :

	CHARGES	PORTÉES de but en blanc.
	kl'.	mèt.
Obusier de côte de 22 cent.....	3,50	572
	2,00	469
— de place de 22 cent.....	3,00	465
	2,00	400
— de siège de 22 cent.....	2,00	260
	1,50	225
— de campagne de 16 cent.	1,50	435
	1,00	310
— — 15 cent.	1,00	380
	0,50	250
— de montagne.....	0,27	200

Pour le fusil, modèle de 1840, la portée de but en blanc est de 150^m. (Voy. POINTAGE.)

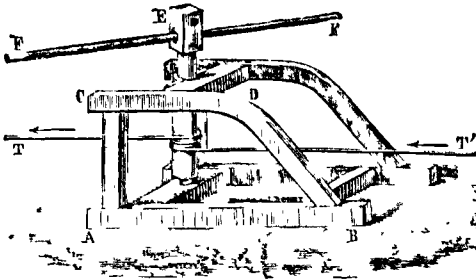
Voyez le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert.

BUTFOIR. Voy. MACHINES AGRICOLES.

C

CABESTAN, treuil à axe vertical, employé principalement dans les ports et sur les vaisseaux pour exercer de grands efforts dans le sens horizontal.

Le cabestan des ports est représenté fig. 1. La charpente qui supporte le treuil se compose de deux parties, dont l'une ABCD est indiquée sur la figure,



et qui sont assemblées par quatre traverses, une à la partie supérieure, et trois à la partie inférieure; c'est dans la traverse supérieure et dans la traverse inférieure intermédiaire que sont pratiqués les orifices qui donnent passage aux tourillons du treuil. Le tourillon supérieur se prolonge et porte une tête qui est traversée par de longues barres horizontales en nombre pair, également espacées, sur lesquelles des manœuvres agissent perpendiculairement pour faire tourner le cabestan. La charpente est simplement posée sur le sol, et retenue par des cordages à des piquets fixes en nombre suffisant. La corde qui s'enroule sur l'arbre vertical n'y est pas fixée par son extrémité. Comme le cabestan

doit opérer des mouvements souvent considérables, l'arbre n'aurait pas la hauteur suffisante pour que la corde pût s'y enrouler. On lui fait faire seulement quelques tours autour du cylindre, et le brin libre est tendu par un manœuvre et déroulé au fur et à mesure que l'autre brin s'enroule.

Dans les vaisseaux, le corps du cabestan est établi sur le troisième pont, ou gaillard; mais un long tourillon appelé *mèche* traverse le troisième et le deuxième pont, et va s'appuyer par un pivot sur une crapaudine en bronze logée dans une pièce de chêne, qui porte sur deux baux du premier pont, et qui est soutenue en dessous par une éponille. Le cabestan se manœuvre à l'aide de barres que l'on introduit dans des cavités spéciales creusées tout autour de sa tête.

La théorie du treuil est applicable au cabestan (Voy. TREUIL). Soit F l'une des forces, en nombre 2n, qui agissent par couples sur les barres, de longueur b à partir de l'axe; soit T la tension que doit avoir le câble pour obtenir l'effet qu'on se propose, et T₁ la tension exercée par le manœuvre qui déroule la corde; soit r le rayon du treuil, ρ le rayon d'un de ses tourillons, P le poids du cabestan, ρ₁ le rayon du pivot (Voy. PIVOT) ou le rayon moyen de la couronne circulaire de contact formant l'épaulement. Si R' et R'' désignent les réactions exercées sur les tourillons, T' et T'', T'₁ et T''₁, les composantes parallèles des forces T et T₁ dans le plan horizontal médian de chaque tourillon, on aura

$$R' = T' - T'_1 \quad \text{et} \quad R'' = T'' - T''_1,$$

attendu que les forces F sont deux à deux égales et de sens contraire, qu'il en est de même de leurs

composantes dans les plans de chaque tourillon, et que par conséquent il doit en être de même des forces R' et $T' - T'_1$ d'une part, R'' et $T'' - T''_1$ de l'autre. L'équation [5] (Voy. TRÈUIL) devient donc ici, en ayant égard au frottement du pivot ou de l'épaulement,

$$2 n F b = (T - T_1) r + \frac{1}{2} (A + B T) + f_1 \rho (T - T_1) + \frac{2}{3} f P \rho_1 \quad [1]$$

si l'arbre porte sur un pivot de rayon ρ_1 , ou

$$2 n F b = (T - T_1) r + \frac{1}{2} (A + B T) + f_1 \rho (T - T_1) + f P \left(\rho_1 + \frac{1}{3} \frac{e^2}{\rho_1} \right) \quad [2]$$

si l'arbre porte sur un épaulement dont ρ_1 représente le rayon moyen et e la demi-épaisseur. (Voy. PIVOT.)

Ces formules supposent les rayons des tourillons égaux; il serait facile de les modifier si les rayons des tourillons étaient différents. Le terme $f_1 \rho (T - T_1)$ se trouverait alors remplacé par les deux termes

$f_1 \rho' (T' - T'_1) + f_1 \rho'' (T'' - T''_1)$, ρ' et ρ'' désignant les rayons des deux tourillons.

CABINET D'EAU, conduit fermé par lequel on est quelquefois obligé de faire passer l'eau d'une chute pour l'amener sur une roue hydraulique. Ce dispositif doit être évité, parce qu'il a pour effet d'augmenter les frottements de l'eau contre les parois et de diminuer la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue. (Voy. ROUES HYDRAULIQUES).

CADRAN AZIMUTAL, cadran solaire horizontal dont le style est placé verticalement; il est ainsi nommé parce que les lignes horaires donnent l'azimut du soleil aux différentes heures du jour. On construit le cadran azimutal pour un jour déterminé, par exemple pour le jour de l'équinoxe, et c'est par le déplacement du style qu'on le fait servir pour les autres époques de l'année.

Voyons d'abord comment on trace le cadran pour le jour de l'équinoxe. Soit NOSE le cercle sur le-

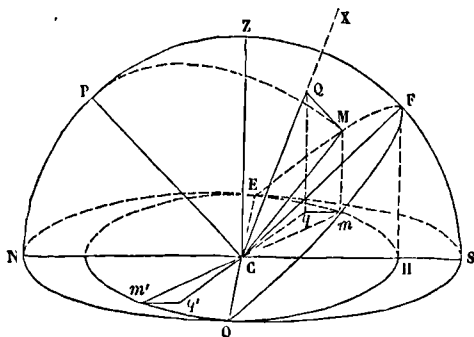


Fig. 1.

quel on se propose de tracer le cadran; soit NS la méridienne et EO sa perpendiculaire menées par le centre C du cercle. Imaginons une sphère décrite du point C comme centre avec CN pour rayon. Soit CZ une verticale; NZS l'intersection de la sphère par le plan du méridien; soit CP une parallèle à l'axe de la terre; et OFE un grand cercle de la sphère perpendiculaire à CP et parallèle à l'équateur. Concevons la circonférence de ce cercle divisée en

24 parties égales à partir du point F situé dans le méridien; les points de division appartiendront aux points horaires. Soit M un de ces points de division; joignons CM. L'ombre du style CZ au moment où le soleil sera dans la direction CM, c'est-à-dire à l'heure à laquelle répond le point de division M, sera la trace horizontale du plan vertical qui contient le point M; cette trace s'obtiendra en abaissant du point M sur le plan du cadran la perpendiculaire Mm, et tirant m C m'. La ligne horaire répondant au point M sera donc Cm'.

Les points tels que m étant les projections des points M d'un même cercle seront sur une ellipse ayant pour grand axe OE et pour demi petit axe la projection CH du rayon CF. Pour tracer le cadran on opérera donc de la manière suivante. Par le centre C on mènera une droite CA faisant avec CS

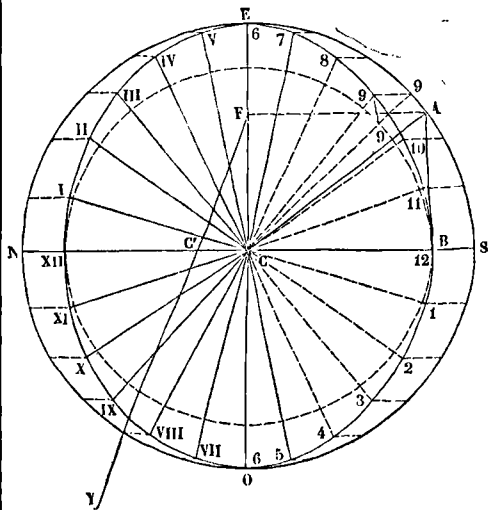


Fig. 2.

un angle égal au complément de la latitude du lieu; et l'on abaissera sur CS la perpendiculaire AB. Les longueurs CO et CB seront les demi-axes d'une ellipse que l'on construira par les procédés connus; on divisera le cercle NOSE en 24 parties égales, à partir du point S. On divisera de la même manière le cercle décrit du point C comme centre avec CB pour rayon. Par les points de division correspondants des deux cercles on mènera une parallèle à NS et une parallèle à OE, dont la rencontre donnera le point correspondant de l'ellipse. Cette construction est indiquée sur la figure pour le point 9. Les points ainsi obtenus étant numérotés comme la figure le montre, on joindra les lignes C₁, C₂, C₃, etc.; C₁₁, C₁₀, C₉, etc., dont les prolongements C₁, C₁₁, C₁₀, etc., CXI, CX, CIX, etc., seront les lignes horaires. Il résulte en effet de la construction que les points 1, 2, 3, etc., 11, 10, 9, etc., sont les projections horizontales des points de division d'un cercle ayant OE pour diamètre et qui serait incliné sur l'horizon d'un angle égal à la latitude du lieu.

Mais le cadran construit ainsi pour le jour de l'équinoxe ne serait plus exact un autre jour de l'année. Soit, en effet (fig. 1), CX un rayon mené du point C au centre du soleil, à la même heure que

le rayon CM , mais à une époque différente de l'année, la déclinaison du soleil étant alors mesurée par l'angle XCM . Menons par le point M une parallèle à l'axe CP , laquelle rencontrera CX en un point Q . Si l'on projette le point Q en q sur le plan du cadran, et qu'on joigne qC , cette droite sera la trace du plan vertical contenant le centre du soleil au moment considéré; l'ombre du style vertical OZ sera donc Cq' , différent de Cm' ; ainsi la ligne horaire ne serait plus la même qu'à l'équinoxe. Mais on peut remédier à cet inconvénient. Soient m et m' (fig. 3) les deux points diamétralement opposés

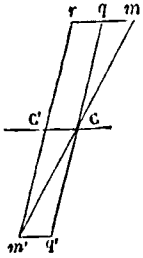


Fig. 3.

de l'ellipse horizontale qui sont dans le plan vertical du point M ; soit qq' la nouvelle ligne d'ombre; prenons $Cq' = Cq$ et joignons $m'q'$; les deux droites $m'q'$ et mq seront égales et parallèles. Prenons sur la méridienne, du côté du nord, une longueur CC' égale à mq ou à $m'q'$; et imaginons que le style soit transporté au point C' . A cause de l'éloignement du soleil, l'ombre de ce nouveau style sera parallèle à qq' , et passera par conséquent

par le point m' . Si donc on a inscrit en m' , sur l'ellipse, l'heure correspondante au point M de la fig. 1, l'heure indiquée par le nouveau style sera la même; ainsi lorsque le soleil est dans la direction CQ , l'ombre du style placé en C' donne la même heure que donnait le style placé en C quand le soleil était dans la direction CM . Or, la quantité CC' dont il a fallu déplacer le style sur la méridienne ne dépend point de l'heure que l'on a considérée; cette quantité est égale à $m'q'$ et par conséquent à mq projection de MQ . Or, on a $MQ = CM \tan QCM$ ou $MQ = R \tan D$, en appelant R le rayon du cadran et D la déclinaison du soleil au jour que l'on considère; d'ailleurs $mq = MQ \cos \lambda$, en désignant par λ la latitude du lieu; il en résulte

$$mq = R \tan D \cos \lambda,$$

quantité constante. Le déplacement du style de C en C' aura donc pour effet de faire passer les lignes d'ombres aux mêmes points horaires indiqués sur l'ellipse qu'à l'époque de l'équinoxe. On se procure aisément le point C' . Pour cela, par le foyer F (fig. 2) de l'ellipse, on mène une droite FY faisant avec le grand axe CE un angle CFY égal à la déclinaison du soleil pour le jour considéré; le point C' où la droite ainsi menée rencontre le petit axe, est le point cherché. En effet, d'après la construction de l'ellipse, on a $CB = CA \sin \lambda$; par conséquent

$$\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 (1 - \sin^2 \lambda) \text{ ou } \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 \cos^2 \lambda;$$

mais $CF = AB$; donc

$$CF = R \cos \lambda.$$

Or, dans le triangle $C'CF$, on a

$$CC' = CF \tan CFY = CF \tan D;$$

donc $CC' = R \cos \lambda \tan D$.

Ainsi C' est bien le point cherché. On peut déterminer à l'avance la position du point C' pour toutes les époques de l'année, soit en calculant CC' par la formule ci-dessus, soit en construisant l'analemme (Voy. ce mot), dont F serait alors le sommet et FC l'axe de symétrie.

Pour réaliser le déplacement du style, le moyen le plus simple est de le fixer à une plaque mobile dans une rainure dirigée suivant la méridienne. On détermine à l'avance les positions de la plaque correspondantes aux diverses époques de l'année, de 5 jours en 5 jours, par exemple, ou à des intervalles plus rapprochés encore, suivant la grandeur du cadran. On détermine la longueur du style par la condition qu'à l'époque où le soleil atteint sa plus grande hauteur, c'est-à-dire au solstice d'été, l'extrémité de l'ombre atteigne encore l'ellipse, ce qui n'offre aucune difficulté.

Malgré quelques avantages, le cadran azimutal n'est qu'un objet de curiosité. L'obligation de déplacer sans cesse le style en rendrait l'usage extrêmement incommode.

CADRAN LUNAIRE, appareil qui donne les heures, pendant la nuit, par la position qu'occupe sur une surface donnée l'ombre d'un style exposé à la lumière de la lune. Les **CADRANS SOLAIRES** (Voy. ce mot), dans lesquels le style est parallèle à l'axe du globe, peuvent servir de cadrans lunaires, puisque la rotation diurne apparente de la lune s'effectue autour de cet axe. Mais alors les heures indiquées sont des heures lunaires, comptées à partir du passage de la lune au méridien. Pour traduire cette indication en temps solaire, il faut connaître l'âge de la lune, c'est-à-dire le nombre de jours écoulés depuis la dernière néoménie. Comme la lune retarde chaque jour sur le soleil de $50''28,3$, il faut d'abord multiplier ce nombre par le nombre des jours qui forment l'âge de la lune; puis au produit il faut ajouter l'heure indiquée par le cadran, convertie en temps solaire à raison de $1^h2^m6,2$ par heure lunaire. (Voy. JOUR LUNAIRE.) Supposons, par exemple, qu'un cadran lunaire indique 2^h30^m , et qu'il y ait 15 jours écoulés depuis la dernière néoménie; on trouvera d'abord que le produit de $50''28,3$ par 15 est $12^h37^m4,5$; on trouvera ensuite que 2^h30^m de temps lunaire valent $2^h35^m15,5$ de temps solaire; ajoutant les deux produits obtenus, on aura $15^h12^m20^s$; ou, en retranchant 12 heures, $3^h12^m20^s$. Telle est l'heure solaire correspondante à l'heure lunaire indiquée.

CADRAN POLAIRE, cadran solaire dont le plan est perpendiculaire au méridien et parallèle au style. Les lignes horaires, dans cette espèce de cadran, sont des parallèles au style. (Voy. CADRANS SOLAIRES.)

CADRANS SOLAIRES, appareils qui indiquent l'heure par la position qu'occupe sur une surface donnée, soit l'ombre d'un style, soit l'image produite par la lumière solaire en traversant un petit orifice pratiqué au centre d'une plaque. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse de l'ombre d'un style. Si l'on donne à ce style une direction parallèle à l'axe du globe, les dimensions de celui-ci étant négligeables vis-à-vis de la distance qui nous sépare du soleil, on pourra imaginer que, dans son mouvement diurne, cet astre tourne uniformément autour du style. Si l'on conçoit un plan mené par le centre du soleil et par le style, il coupera la surface du cadran suivant une certaine ligne, avec laquelle l'ombre du style coïncidera; et toutes les fois que l'ombre viendra reprendre cette position, le plan contenant le centre du soleil et le style aura repris la sienne. Imaginons 24 plans analogues,

faisant entre eux des angles de 15 en 15 degrés, à partir du méridien, ce seront les *plans horaires*; et leurs traces sur la surface du cadran seront les *lignes horaires*; l'heure sera indiquée par la coïncidence de l'ombre du style avec l'une ou l'autre de ces lignes. Tel est le principe des cadrans solaires. Quand la surface du cadran est plane, la projection du style sur cette surface se nomme la *sous-style*.

Le plus simple des cadrans solaires est le cadran *équatorial* ou *équinoxial*, dont le plan est parallèle à l'équateur, et par conséquent perpendiculaire à l'axe autour duquel tourne le soleil. Il est clair que, dans ce genre de cadran, les traces des plans horaires sont des droites faisant entre elles des angles de 15 en 15 degrés, à partir de l'intersection du cadran avec le méridien. Malgré sa simplicité, ce cadran n'est point en usage; et il ne sert que d'intermédiaire pour arriver à la construction des cadrans solaires horizontaux ou verticaux.

CADRAN HORIZONTAL. Remarquons d'abord que le

style devant être parallèle à l'axe du globe doit faire avec la méridienne un angle égal à la latitude du lieu. Soit, en effet, PCP' (fig. 1) le méridien

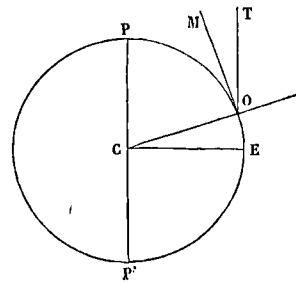


Fig. 1.

d'un lieu O, CP l'axe du globe, CE la trace de l'équateur sur le méridien, OM la méridienne, et OT la direction du style supposée parallèle à CP. Les

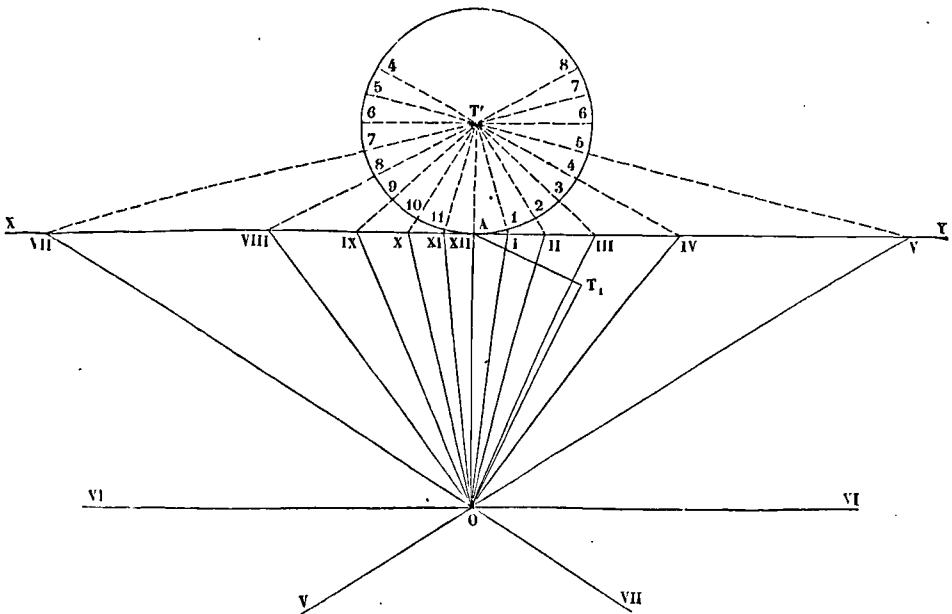


Fig. 2.

angles OCE et MOT seront égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; savoir : MO perpendiculaire à la verticale OC du lieu, puisque c'est une horizontale, et OT perpendiculaire à CE, comme étant parallèle à CP. Or l'angle OCE mesure la latitude du lieu; l'angle MOT est donc égal à cette latitude.

Cela posé, soit (fig. 2) O le pied du style, et OA la méridienne. Appelons T l'extrémité du style. Si l'on rabat sur le plan horizontal le plan vertical qui contient le style, celui-ci viendra se rabattre en OT₁, en faisant avec OA un angle OAT₁ égal à la latitude du lieu. Imaginons par le point T, extrémité du style, un plan perpendiculaire à la direction de ce style, et par conséquent parallèle à l'équateur; sa trace horizontale sera une droite XY

perpendiculaire à la méridienne; et il coupera le plan vertical du style suivant une droite qui dans le rabattement viendra prendre la position AT₁, perpendiculaire à OT. Concevons que l'on ait pris le point T pour centre d'un cadran équatorial, et que nous rabattions ce cadran sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace XY; le point T viendra en T' sur le prolongement de la méridienne OA, à une distance du point A égale à AT₁. Décrivons donc du point T' comme centre un cercle ayant AT' pour rayon; divisons sa circonférence en arcs de 15 degrés en 15 degrés, à partir du point A, et menons aux points de division les rayons T'1, T'2, T'3, etc. Ces rayons seront les lignes horaires du cadran équatorial. Prolongeons-les jusqu'à la rencontre de XY, nous obtiendrons leurs traces ho-

O' XII; il sera 1 heure quand elle coïncidera avec O'I; 2 heures quand elle coïncidera avec O'II, et ainsi de suite. — Il peut arriver qu'une ou plusieurs des lignes horaires du cadran horizontal ne rencontrent le mur qu'en dehors de la surface sur laquelle on opère : c'est ce qui a lieu dans la figure pour la ligne O VII; cette circonstance n'empêche pas de mener par le point O' une droite qui aille concourir avec les deux premières O VII et XY; c'est un problème de Géométrie descriptive facile à résoudre. Pour cela, on déterminera la projection verticale O'K du style; par un point quelconque *m* de la ligne horaire O VII, on mènera une parallèle *mn* à la méridienne, et une perpendiculaire *mp* au mur; au point *n* on élèvera une verticale *nq*; et par le

point *p* on mènera une parallèle à O'K, qui rencontrera cette verticale en un point *q*; on joindra O'q; ce sera la ligne horaire O' VII du cadran vertical, correspondante à la ligne horaire O VII du cadran horizontal. Car il résulte de la construction que la droite dont les projections sont *mn* et *pq*, est parallèle au style; or sa trace horizontale *m* est dans le plan horaire OO' VII; sa trace verticale *q* est donc aussi dans le même plan, et par conséquent sur la ligne horaire O' VII.

Au lieu de se servir comme auxiliaire du cadran horizontal, on peut rabattre directement le cadran équatorial sur le plan du mur. Soient, comme ci-dessus, OA et O'K (fig. 5) les projections du style. Rabattons le triangle O'KO sur le plan du mur; pour cela, élevons en K une perpendiculaire à la

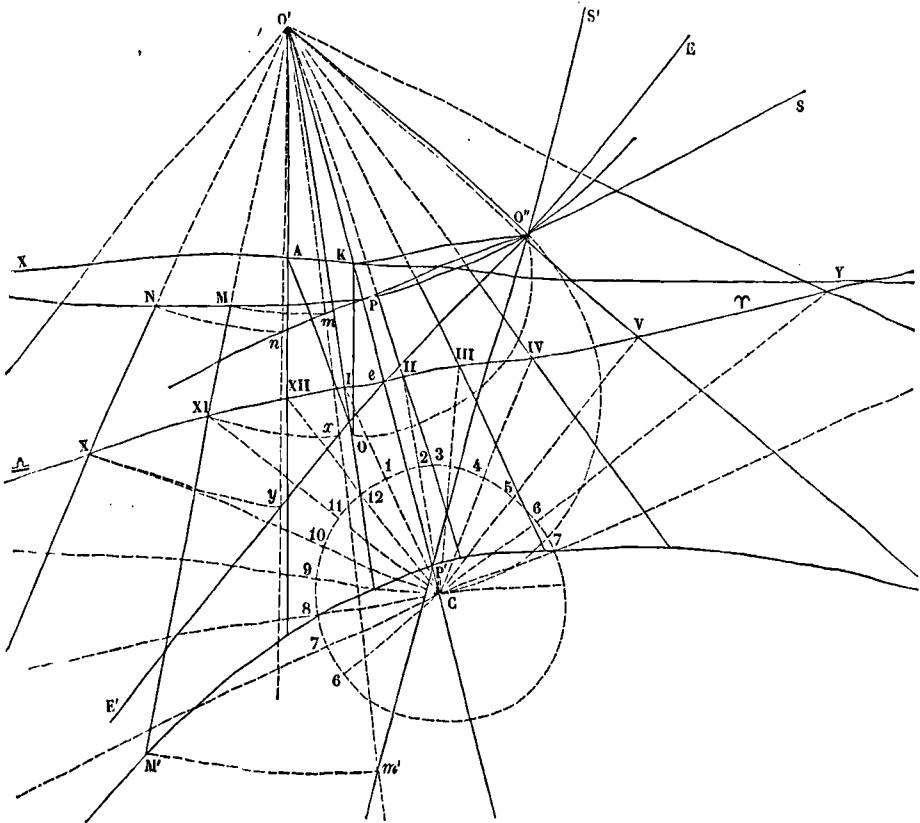


Fig. 5.

sous-style O'K, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur KO'' égale à KO. Concevons par le point O un plan perpendiculaire au style; il coupera le plan O'KO suivant une droite qui, dans le rabattement, viendra prendre la position O''e, perpendiculaire à O'O''. Le point *e* où cette perpendiculaire rencontre le prolongement de la sous-style O'K, est un point de la trace verticale du plan perpendiculaire au style; cette trace est donc une droite γ menée par le point *e*, perpendiculaire à la projection verticale O'K du style. On la nomme l'équinoxiale, parce que c'est la ligne que

décrit, au moment de l'équinoxe, l'extrémité de l'ombre du style, supposé terminé en O. En effet, à ce moment de l'année, la droite menée du point O au centre du soleil décrit un plan parallèle à l'équateur et par conséquent perpendiculaire au style; l'intersection de ce plan avec le plan du mur est donc le lieu décrit par l'ombre du point O. — Concevons maintenant un cadran équatorial dont le point O soit le centre, et rabattons-le sur le plan du mur en le faisant tourner autour de sa trace verticale, c'est-à-dire autour de l'équinoxiale; le point O' ou O se rabattra en C, sur la sous-style

laire, à une distance Ce égale à $O'e$. Remarquons que la verticale $O'A$ du point O est l'intersection du plan du mur avec le méridien ; le point XII, où elle rencontre l'équinoxiale, appartient donc au méridien, et par conséquent au plan horaire qui répond à l'heure de midi. La ligne $C XII$ est donc le rabattement de la ligne de midi sur le plan équatorial. Du point C comme centre, décrivons une circonférence avec un rayon quelconque, et divisons-la en arcs de 15 en 15 degrés à partir du point 12 situé sur $C XII$; puis menons les lignes horaires $C1, C2, C3$, etc., qui viendront rencontrer l'équinoxiale aux points I, II, III, etc. Enfin joignons les droites $O'I, O'II, O'III$, etc., ce seront les lignes horaires du cadran tracé sur le mur. On les arrêtera au cadre comme nous l'avons expliqué tout à l'heure. Si l'une des lignes horaires du cadran équatorial ne rencontre pas l'équinoxiale dans l'étendue de la surface sur laquelle on opère, ce qui arrive sur la figure pour les lignes $C9, C8, C7$, on obtiendra les lignes horaires correspondantes du cadran vertical, en faisant pour chacune d'elles une construction analogue à celle qui a été indiquée plus haut dans une circonstance semblable.

Lorsque, comme dans l'exemple de la figure, le mur vertical sur lequel on trace le cadran solaire n'est pas perpendiculaire au méridien, le cadran solaire porte le nom de *cadran déclinant*, parce que l'angle que fait le mur avec la ligne Est et Ouest, lequel est le complément de son azimut, s'appelle la *déclinaison* du mur.

Toutes les lignes horaires ne sont pas nécessaires ; et l'on ne trace que celles qui répondent à la période du jour pendant laquelle le plan du cadran est éclairé, et que l'on nomme pour cette raison la durée de l'*illumination du cadran*. Pour les cadrans horizontaux, cette période est la durée même du jour (*Voy. COUCHER*). Mais pour les cadrans verticaux déclinants, elle est limitée par l'azimut du cadran : si cet azimut est moindre que 90° , auquel cas on dit que le cadran décline vers l'est, l'illumination dure depuis le lever du soleil jusqu'à l'instant où cet astre traverse le plan du cadran prolongé ; si, au contraire, l'azimut est supérieur à 90° , auquel cas on dit que le cadran décline vers l'ouest, l'illumination dure depuis l'instant où le soleil traverse le plan du cadran jusqu'au coucher de cet astre. L'instant où le soleil se trouve dans le plan du cadran est facile à déterminer : si l'on considère à cet instant le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P , le zénith Z et le centre du soleil S , on y connaît le côté PZ égal au complément de la latitude du lieu, le côté PS égal au complément de la déclinaison du soleil, et l'angle en Z , supplément de l'azimut du mur ; on peut donc calculer l'angle en P , qui n'est autre chose que l'*angle horaire* (*Voy. ce mot*) ; en le convertissant en temps, à raison de 15° par heure, on aura l'intervalle de temps compris entre midi et l'instant que l'on considère. La connaissance de cet instant, pour l'époque du solstice, déterminera les lignes horaires qui doivent servir de limites au cadran.

Sur les cadrans ordinaires, on se contente de tracer les lignes horaires ; mais sur les cadrans plus soignés on trace aussi les *lignes de déclinaison* ou *lignes zodiacales* : on nomme ainsi les lignes dé-

clines chaque jour par l'extrémité de l'ombre du style. Nous avons déjà dit que le jour de l'équinoxe la ligne ainsi décrite est une droite, l'équinoxiale. Aux autres époques de l'année, et dans les latitudes moyennes, les lignes de déclinaison sont des hyperboles, au moins approximativement ; et, d'une manière plus générale, ces lignes sont approximativement des sections coniques. En effet, la déclinaison du soleil variant très-peu dans l'espace d'un jour, on ne commet, en négligeant cette variation, qu'une erreur de l'ordre de celles qu'entraînent les constructions graphiques nécessaires pour tracer le cadran. Si donc on considère le soleil comme décrivant dans l'espace d'un jour un parallèle de la sphère céleste, un rayon lumineux émané du centre de l'astre et passant par l'extrémité du style décrit autour de l'axe du monde, ou, ce qui revient au même à cause des faibles dimensions du globe, autour du style prolongé, un cône de révolution dont l'intersection avec le plan du cadran est précisément la ligne de déclinaison pour le jour considéré. Cette ligne de déclinaison est donc une section conique. En considérant, pour fixer les idées, un mur vertical perpendiculaire au méridien, on reconnaîtra sans peine que, pour les lieux situés dans les zones tempérées ou dans les zones glaciales, le plan du mur coupe les deux nappes du cône et que par conséquent les lignes de déclinaison sont des hyperboles, sauf à l'époque de l'équinoxe. Sous le tropique, on aurait une parabole au moment du solstice et des ellipses tout le reste de l'année. Entre les tropiques, il y a toujours une époque où la ligne de déclinaison est une parabole : c'est celle où la déclinaison du soleil est égale à la latitude du lieu ; quand la déclinaison est plus grande, on a une hyperbole ; quand elle est moindre, on a une ellipse.

Au pôle, le style étant toujours supposé parallèle à l'axe du globe, deviendrait parallèle au plan du cadran, ce qui a fait donner le nom de *cadrans polaires* aux cadrans qui présentent cette particularité. Les lignes de déclinaison seraient encore des hyperboles. (*Voy. CADRAN POLAIRE.*)

Nous montrerons comment on trace la ligne de déclinaison correspondante au solstice d'hiver ; la construction serait analogue pour les autres époques de l'année. Pour cela, il faut chercher sur chaque ligne horaire l'extrémité de l'ombre du style à l'époque considérée. Cherchons d'abord cette extrémité sur la ligne horaire qui se confond avec la sous-style $O'e$. Pour cela, faisons au point O'' un angle $EO''S$ égal à l'obliquité de l'écliptique, soit $23^\circ 27' 1/2$ environ (exactement $23^\circ 27' 14''$ au 1^{er} janvier 1867) ; cette ligne prolongée viendra rencontrer la sous-style en un point P' qui sera le point cherché ; car $SO''P'$ est la génératrice du cône considéré contenue dans le plan qui projette le style sur le mur. Ce point P' sera en même temps le sommet de la branche d'hyperbole correspondante, puisque la génératrice $SO''P'$ dont il s'agit est contenue dans un plan perpendiculaire au plan coupant, c'est-à-dire au plan du mur. Supposons que l'on veuille obtenir le point de la même ligne de déclinaison situé sur la ligne horaire $O'XI$; on remarquera d'abord que le triangle de l'espace dont les sommets sont O, O' et XI , est rectangle en O , puisque $O XI$ est contenu dans le

plan du cadran équatorial perpendiculaire au style OO' . D'ailleurs le côté OO' est égal à $O'O''$; si donc on décrit du point O' comme centre, sur le plan du mur, un arc de cercle passant au point XI , et terminé en x à la droite EE' ou $O''e$, le triangle $O'O''x$ sur le mur sera égal au triangle $O'O XI$ dans l'espace, car ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal. Si maintenant on prolonge SP jusqu'à la rencontre de $O'x$ en m , le triangle $O'O''m$ sur le mur sera égal à celui que forment dans l'espace la ligne horaire $O'XI$, le style OO' , et la génératrice du cône qui va rencontrer $O'XI$; car ces triangles auront $O'O'' = O'O$, et les angles égaux chacun à chacun. Si donc, du point O' comme centre, on trace sur le mur un arc de cercle qui passe sur le point m , le point M où cet arc rencontrera la ligne horaire $O'XI$, sera l'extrémité de l'ombre du style sur cette ligne horaire à l'époque considérée. Pour obtenir l'extrémité de l'ombre sur une autre ligne horaire, $O'X$ par exemple, on décrira du point O' comme centre, avec $O'X$ pour rayon, l'arc Xy terminé à la droite EE' ; on joindra $O'y$; on déterminera le point de rencontre n de la ligne $O'y$ avec la droite SP ; puis, du point O' comme centre, avec $O'n$ pour rayon, on décrira un arc de cercle; le point N où il rencontrera la ligne horaire $O'X$ sera l'extrémité de l'ombre du style sur cette ligne horaire à l'époque considérée. Tous les autres points de la même branche de courbe s'obtiendront de la même manière. Pour obtenir la seconde branche, qui répond au solstice d'été, il faudra remplacer la ligne $O''S$ par la ligne $O''S'$, faisant avec $O''E$ un angle égal, mais de l'autre côté de cette ligne. — On obtiendrait la ligne de déclinaison relative à un jour quelconque de l'année, en remplaçant les droites $O''S$ ou $O''S'$ par des droites faisant avec $O''E$ un angle égal à la déclinaison du soleil pour le jour considéré.

Le tracé des lignes de déclinaison qui correspondent aux deux solstices est toujours nécessaire pour déterminer l'emplacement du cadran; il faut en effet, pour qu'il soit utile toute l'année, qu'il renferme, au moins aux environs de la ligne horaire correspondante à midi, des arcs suffisamment étendus de toutes les lignes de déclinaison; il suffit pour cela qu'il renferme des arcs des lignes de déclinaison relatives aux solstices, parce que toutes les autres sont intermédiaires entre ces deux-là.

Le tracé des lignes de déclinaison, ou du moins d'un certain nombre d'entre elles répondant à des époques qui se suivent de mois en mois, ou de 15 jours en 15 jours, est indispensable pour déterminer ce qu'on appelle la *courbe du temps moyen*. Dans tout ce qui précède, on a pris pour point de départ le passage du soleil au méridien, c'est-à-dire le *midi vrai*. Il peut être utile pour les usages civils que le cadran donne le *midi moyen*; pour cela il faut avoir égard à l'équation du temps (Voy. ce mot).

On tracera, par exemple, les lignes de déclinaison qui correspondent au 6 et au 21 de chaque mois; pour cela, sur chacune d'elles on portera, à partir de la ligne de midi, et dans le sens convenable, une longueur correspondante à l'équation du temps pour le jour auquel chaque ligne de déclinaison se rapporte. Les points ainsi déterminés appartiendront à la courbe du midi moyen, qu'il sera dès

lors facile de tracer. Il sera midi moyen quand l'extrémité de l'ombre du style viendra coïncider avec la courbe. Il est clair que l'équation du temps devra être portée à gauche lorsqu'elle est positive, parce qu'alors le midi moyen précède le midi vrai, puisque l'équation du temps n'est autre chose que l'heure moyenne à midi vrai; l'équation du temps devra au contraire être portée à droite lorsqu'elle est négative; on sait que la *Connaissance des temps* donne alors son complément à 12 heures. La courbe du midi moyen a la forme d'un 8, comme l'indique la figure 6. Elle coupe la ligne de midi en quatre

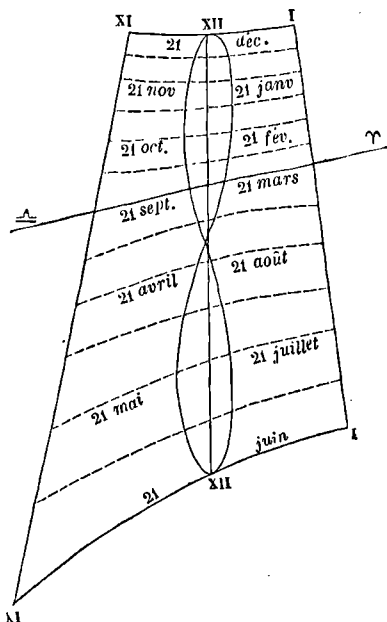


Fig. 6.

points, qui répondent à peu près au 15 avril, au 15 juin, au 31 août et au 24 décembre, époques où l'équation du temps est nulle. Le nœud du 8 répond à peu près à une déclinaison australe de 9° , c'est-à-dire à des époques voisines du 30 août et du 16 octobre. — On pourrait tracer de même la courbe du temps moyen pour une heure quelconque, en calculant par interpolation l'équation du temps pour cette heure; mais on se contente ordinairement de tracer la courbe du midi moyen.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'heure était donnée par l'ombre d'un style. A ce style qu'il faut installer dans une direction parallèle à l'axe du monde, on substitue le plus souvent, surtout dans les cadrans verticaux, une plaque métallique percée d'un petit trou central, et établi à une certaine distance du mur. L'image produite sur le cadran par la lumière solaire qui passe au travers de cette ouverture, joue le rôle de l'extrémité du style. On y trouve en outre cet avantage d'éviter en partie l'effet de la pénombre, et d'obtenir plus exactement la position de l'image du trou, que celle de l'extrémité de l'ombre d'un style. Mais il faut alors déterminer le point où le cadran serait rencontré par un style fictif ayant pour extrémité le trou pratiqué dans la plaque.

Il est clair que le problème des cadrans solaires, au lieu d'être résolu par des constructions graphiques, pourrait être traité par le calcul. Mais comme il faudrait toujours en venir aux constructions graphiques pour traduire les résultats du calcul, on préfère employer sur-le-champ la règle et le compas.

La construction des cadrans solaires peut donner lieu à un grand nombre de problèmes particuliers, pour lesquels nous renvoyons aux traités spéciaux de *Gnomonique* (Voy. ce mot).

CADRATURE, ensemble de pièces, ordinairement placées sous le cadran, qui forme le mécanisme de répétition dans les montres et pendules, ou qui sert à obtenir certaines indications particulières, telles que le quantième, l'équation du temps, dans les horloges, etc. (Voy. *MONTRE A RÉPÉTITION*, *HORLOGE A ÉQUATION*.)

CAGNARDELLE, machine soufflante à laquelle M. Cagniard de Latour a donné son nom. C'est une vis d'ARCHIMÈDE (Voy. ce mot) qui, au lieu de fonctionner dans l'eau, fonctionne dans l'air. Elle tourne en sens inverse de la vis d'Archimède ordinaire; en vertu de ce mouvement, l'air descend dans les canaux formés par la vis, et s'écoule dans un tuyau disposé à la partie inférieure. Cette machine, d'un très-faible rendement, est aujourd'hui à peu près abandonnée. (Voy. *VENTILATEUR A VIS*.)

CAISSE D'AMORTISSEMENT. Caisse où sont déposées les sommes annuellement affectées par un État à l'amortissement de la dette publique. Les sommes versées dans cette caisse y sont considérées comme placées à intérêts composés. (Voy. *AMORTISSEMENT*.)

CAISSE D'ÉPARGNE, établissement de prévoyance fondé en France en 1818, à l'imitation des institutions analogues de Suisse et d'Angleterre.

I. La Caisse d'épargne reçoit, tous les dimanches, les dépôts qui lui sont confiés, et qui, pour chaque déposant, ne peuvent être inférieurs à 1 fr., ni supérieurs à 300 fr. Ces dépôts commencent à porter intérêt à partir du dimanche suivant; le taux de l'intérêt a été fixé à 4 pour 100 par la loi du 7 mai 1853, mais la Caisse retient 1/2 pour 100 pour frais d'administration. Dans le calcul des intérêts on suppose l'année de 52 semaines exactement. Si, par exemple, on veut savoir ce que rapportera une somme de 75 fr. au bout de 38 semaines à partir du dépôt, on aura à chercher l'intérêt de 75 fr. à 3 1/2 pour 100 pendant 37 semaines. En appelant x cet intérêt, on aura donc (Voy. *INTÉRÊTS*)

$$x = \frac{75 \cdot 0,035 \cdot 37}{52} = 1,86,$$

c'est-à-dire que pour l'obtenir il faut multiplier la somme déposée par l'intérêt annuel de 1 fr., et par le nombre de semaines diminué d'une unité, et diviser le produit par 52.

II. Les intérêts produits par un versement, depuis le dimanche qui suit le dépôt jusqu'à la fin de l'année, c'est-à-dire jusqu'au dernier dimanche, portent, dans la comptabilité des Caisses d'épargne, le nom d'*intérêts anticipés*, parce qu'on les inscrit au compte du déposant au moment du dépôt. Lorsqu'un déposant retire une somme déposée, les intérêts de cette somme cessent de courir le dimanche même où se fait la demande de remboursement. Mais on appelle *intérêts rétrogrades* les intérêts

qu'aurait produits cette somme depuis le dimanche qui suit la demande en remboursement jusqu'au dernier dimanche de l'année. Pour faire le compte des intérêts quand un déposant retire ses fonds, on n'a qu'à retrancher la somme des intérêts rétrogrades de la somme des intérêts anticipés.

Supposons, par exemple, qu'une personne ait déposé 235 fr. à la Caisse d'épargne, 11 semaines après le commencement de l'année, et qu'elle les retire 33 semaines plus tard. Les intérêts anticipés devront être calculés pour 52 — 12 ou 40 semaines, ce qui donnera

$$\frac{235 \cdot 0,035 \cdot 40}{52} \quad \text{ou} \quad 6,32.$$

Les intérêts rétrogrades devront être calculés pour 52 — 44, ou 8 semaines, ce qui donnera

$$\frac{235 \cdot 0,035 \cdot 8}{52} \quad \text{ou} \quad 1,26.$$

Les intérêts à ajouter au capital retiré seront la différence 5',06.

Ainsi le déposant touchera

$$235 + 5,06 \quad \text{ou} \quad 240,06.$$

III. D'après la loi du 30 juin 1851, aucun versement nouveau n'est admis lorsque le compte du déposant a atteint la somme de 1000 fr. Si son compte vient à dépasser cette somme, par suite du règlement des intérêts qui se fait à la fin de chaque année, et qu'il laisse passer trois mois sans demander de remboursement, la Caisse d'épargne lui achète d'office 10 fr. de rentes. Les intérêts continuent à courir jusqu'au moment de l'achat de cette rente; mais les centimes qui accompagnent la somme en francs ne portent aucun intérêt.

Si, par exemple, par suite du règlement annuel des intérêts, le compte du déposant s'élève à 1009',15, les 1009 fr. continueront à porter intérêt pendant 3 mois ou 13 semaines, ce qui donnera 8',82 à ajouter au compte, lequel s'élèvera ainsi à 1017',97. Supposons qu'à ce moment la rente 4 1/2 pour 100 soit à 94',50, le prix de 10 fr. de rentes sera (Voy. *RENTE*).

$$\frac{94,50 \times 10}{4,5} \quad \text{ou} \quad 210 \text{ fr.}$$

Il restera donc au compte du déposant

$$1017,92 - 210, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 807,92.$$

CAISSE DE RETRAITES POUR LA VIEILLESSE, établissement de prévoyance fondé par la loi du 18 juin 1850, complétée elle-même par la loi du 28 mai 1853, par le décret du 18 août de la même année et enfin par la loi du 4 mai 1864.

I. Cette Caisse offre à l'ouvrier prévoyant le moyen de s'assurer une rente viagère qui peut aller jusqu'à 1500 fr. L'entrée en jouissance peut commencer, au choix du déposant, à 50 ans, 51 ans, 52 ans, etc., jusqu'à 65 ans; et, dans ces limites, il a le droit de reculer l'âge qu'il avait primitivement fixé pour l'entrée en jouissance de la rente, pourvu que la déclaration de cette intention nouvelle soit faite au plus tard dans le trimestre qui précède l'époque primitivement fixée.

Le plus faible versement qui puisse être opéré est de 5 fr. pour un célibataire, ou de 10 fr. pour un homme marié; et les versements annuels ne peuvent dépasser 4000 fr. Les intérêts sont calculés à 2 1/4 pour 100 par semestre, et ils se capitalisent par trimestre. Ils commencent à courir le premier

jour du trimestre qui suit le versement. La rente viagère commence à courir le premier jour du trimestre qui suit l'époque où le titulaire a accompli l'âge auquel il a fixe lui-même l'entrée en jouissance. L'âge d'un déposant se calcule comme s'il était né le premier jour du trimestre qui a suivi la date de sa naissance. Il ne peut être fait de dépôt au nom d'un enfant âgé de moins de 3 ans. — Les rentes viagères servies par la Caisse des retraites se calculent d'après les mêmes principes que les autres (Voy. RENTES VIAGÈRES). Mais il faut tenir compte d'une circonstance particulière : c'est que, d'après l'usage du Trésor public, la Caisse, en cas de décès du titulaire de la rente, doit payer aux parents du défunt une partie du dernier trimestre commencé, mais non échu; partie variable suivant la date du décès, mais que, dans le calcul de la rente, on évalue en moyenne à la moitié d'un trimestre.

II. Quelques calculs préliminaires sont indispensables avant d'exposer la théorie des rentes viagères dont il s'agit.

En premier lieu, il est nécessaire de déterminer l'intérêt trimestriel r de 1 fr. et la quantité $1+r$. Pour cela, remarquons que l'intérêt de 1 fr. par semestre étant $2\frac{1}{4}$ ou 0,0225, on doit avoir au bout d'un semestre, a désignant un versement quelconque,

$$a(1+r)^2 = a \cdot 1,0225,$$

d'où $\log(1+r) = \frac{1}{2} \log 1,0225.$

Il est utile d'avoir ce logarithme après 10 décimales. Pour cela, on fera usage de la table I qui suit, dans Callet, la table des logarithmes des nombres de 1 à 108000, et qui donne avec 20 décimales ceux des nombres de 1 à 1200. On remarque que le nombre 10225 est le produit de 409 par 25. Or, la table I donne, en ne prenant que les 11 premières décimales :

$$\log 409 = 2,61172330800\dots$$

$$\log 25 = 1,39794000867\dots$$

d'où $\log 1,0225 = 4,00966331667\dots$

et $\log 1,0225 = 0,00966331667\dots$

et $\frac{1}{2} \log 1,0225 = 0,00483165833\dots$

On peut écrire, en ne gardant que les 10 premières décimales,

$$\log(1+r) = 0,0048316583.$$

Pour obtenir $1+r$, il sera plus commode d'extraire simplement la racine de 1,0225, ce qui donne

$$1+r = 1,01118742;$$

d'où $r = 0,01118742.$

La table ordinaire donnera ensuite

$$\log r = \bar{2},0487300.$$

III. La table de mortalité de Deparcieux (Voy. MORTALITÉ), qui, d'après la loi de 1850, doit servir de base au calcul des rentes viagères, ne donne les nombres de survivants que par années; il a fallu faire une hypothèse pour avoir ces nombres par trimestre. On a supposé pour cela que les morts de l'année se distribuaient uniformément par trimestre. Ainsi, par exemple, la table de Deparcieux donne pour l'âge de 40 ans 657 survivants, et pour l'âge de 41 ans, 650 survivants; c'est-à-dire que le nombre des morts dans l'année est 7. Si ces

morts sont distribués uniformément par trimestre.

Il y en aura $\frac{7}{4}$ ou 1,75 pour chacun. Les nombres de survivants pour les divers trimestres seront donc :

A 40 ans	657
40 ans 3 mois,	657 — 1,75, ou 655,25
40 ans 6 mois,	655,25 — 1,75, ou 653,50
40 ans 9 mois,	653,50 — 1,75, ou 651,75
41 ans,	651,75 — 1,75, ou 650.

On opérerait de même pour tous les intervalles d'une année.

IV. Dans les questions relatives à la Caisse des retraites, on a constamment besoin de la quantité

$$\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} \dots + \frac{v_w}{(1+r)^w},$$

dans laquelle $v_{m+1}, v_{m+2}, v_{m+3}$, etc., désignent le nombre des survivants au bout de $m+1$ trimestres, $m+2$ trimestres, $m+3$ trimestres, etc.; et v_w le nombre des survivants au dernier trimestre inscrit dans la table de mortalité, et qui correspond à 94 ans 9 mois, puisqu'à 95 ans le nombre des survivants est zéro.

Nous désignerons la somme de ces termes par Z_m .

Pour former le tableau des valeurs de cette quantité, on commencera par multiplier par 12 le logarithme de $(1+r)$, afin d'avoir le log. de $(1+r)^{12}$; le nombre 12 est le plus petit nombre de trimestres à inscrire dans la table, puisque le minimum d'âge des déposants est 3 ans ou 12 trimestres. En ajoutant successivement le log $(1+r)$, on obtiendra successivement les logarithmes des quantités $(1+r)^{13}, (1+r)^{14}, (1+r)^{15}$, etc.; et ainsi de suite, jusqu'à $(1+r)^{379}$; le nombre 379 est le plus grand nombre de trimestres à inscrire dans la table, puisqu'il répond à 94 ans et 3 trimestres, ou 9 mois.

Ayant à sa disposition la table de mortalité de Deparcieux, complétée par trimestre comme nous l'avons indiqué ci-dessus, on prendra les logarithmes des nombres de survivants successifs. — En retranchant du logarithme de v_{379} le logarithme de

$$(1+r)^{379}, \text{ on aura le logarithme de } \frac{v_{379}}{(1+r)^{379}} \text{ ou de } Z_{378},$$

et par suite ce nombre lui-même. En retranchant du logarithme de v_{378} le logarithme de

$$(1+r)^{378}, \text{ on aura le logarithme } \frac{v_{378}}{(1+r)^{378}}, \text{ et par}$$

suite le nombre correspondant à ce logarithme; en l'ajoutant à Z_{378} on obtiendra Z_{377} . Retranchant du logarithme de v_{377} le logarithme de $(1+r)^{377}$, on aura le logarithme de $\frac{v_{377}}{(1+r)^{377}}$, et par suite le

nombre correspondant à ce logarithme; en l'ajoutant à Z_{377} , on obtiendra Z_{376} . On continuera ainsi, en remontant toujours dans la table de mortalité jusqu'à ce qu'on ait obtenu Z_{12} .

On formera ainsi le tableau suivant des valeurs de Z_m correspondantes à chaque trimestre :

m	Z_m	m	Z_m	m	Z_m	m	Z_m
12	60337,219	13	59462,195	14	58603,341	15	57760,409
16	56923,149	17	56121,319	18	55323,022	19	54538,060
20	53766,235	21	53007,351	22	52260,426	23	51525,287
24	50801,766	25	50089,695	26	49388,342	27	48697,557
28	48017,191	29	47347,098	30	46686,773	31	46036,082
32	45194,891	33	44763,071	34	44140,320	35	43526,513
36	42921,530	37	42225,250	38	41737,221	39	41157,340
40	40585,493	41	40021,574	42	39465,163	43	38916,160

m	Z _m	m	Z _m	m	Z _m	m	Z _m
44	38374,471	45	37840,001	46	37312,353	47	36791,442
48	36277,183	49	35769,494	50	35268,291	51	34773,493
52	34285,020	53	33802,792	54	33326,731	55	32856,760
56	32372,802	57	31934,781	58	31482,623	59	31036,255
60	30595,603	61	30160,596	62	29731,163	63	29307,233
64	28888,738	65	28475,608	66	28067,899	67	27665,540
68	27268,463	69	26876,600	70	26489,886	71	26108,252
72	25731,636	73	25359,971	74	24993,196	75	24631,246
76	24274,061	77	23921,579	78	23573,739	79	23230,483
80	22891,751	81	22557,486	82	22227,780	83	21902,427
84	21581,516	85	21264,942	86	20982,647	87	20684,575
88	20340,672	89	20040,882	90	19745,152	91	19533,428
92	19165,659	93	18881,793	94	18601,777	95	18325,562
96	18053,099	97	17784,337	98	17519,228	99	17257,725
100	16999,780	101	16745,346	102	16494,377	103	16246,828
104	16002,653	105	15761,809	106	15524,251	107	15289,936
108	15058,822	109	14830,867	110	14606,028	111	14384,265
112	14165,637	113	13949,805	114	13737,028	115	13527,168
116	13320,186	117	13116,945	118	12914,706	119	12716,133
120	12520,289	121	12327,131	122	12136,644	123	11943,772
124	11763,488	125	11580,758	126	11400,547	127	11222,822
128	11047,550	129	10874,699	130	10704,236	131	10536,131
132	10370,350	133	10206,865	134	10045,643	135	9886,6552
136	9729,8723	137	9575,2644	138	9422,8027	139	9272,4185
140	9124,2037	141	8978,0105	142	8833,8513	143	8691,6991
144	8551,5271	145	8413,3088	146	8277,0183	147	8142,6297
148	8010,1177	149	7879,4572	150	7750,5758	151	7623,4501
152	7498,0571	153	7374,3740	154	7252,3782	155	7132,0476
156	7013,3603	157	6896,2947	158	6780,8294	159	6666,9433
160	6554,6156	161	6443,8258	162	6334,5535	163	6226,7788
164	6120,4819	165	6015,6432	166	5912,2435	167	5810,2639
168	5709,6856	169	5610,4900	170	5512,6588	171	5416,1761
172	5321,0180	173	5227,1728	174	5134,6213	175	5043,3463
176	4953,3308	177	4864,5583	178	4777,0121	179	4690,6761
180	4605,5341	181	4521,5703	182	4438,7691	183	4257,1150
184	4276,5928	185	4197,1874	186	4118,9159	187	4041,7629
188	3965,7133	189	3890,7520	190	3816,8643	191	3744,0337
192	3672,2516	193	3601,4981	194	3533,7201	195	3463,1133
196	3395,4534	197	3328,7962	198	3263,1299	199	3198,3347
200	3134,7031	201	3071,9197	202	3010,0982	203	2949,2248
204	2889,2862	205	2830,2691	206	2772,1860	207	2715,0235
208	2658,7684	209	2603,4075	210	2548,9279	211	2495,3170
212	2442,5622	213	2390,6510	214	2339,5713	215	2289,3111
216	2239,8584	217	2191,2015	218	2143,3513	219	2096,2958
220	2050,0235	221	2004,5224	222	1959,7814	223	1915,7893
224	1872,5342	225	1830,0072	226	1788,1955	227	1747,0891
228	1706,6766	229	1666,9506	230	1627,9175	231	1589,5678
232	1551,8911	233	1514,8773	234	1478,5162	235	1442,7981
236	1407,7130	237	1373,2514	238	1339,4037	239	1306,1607
240	1273,5130	241	1241,4516	242	1209,9674	243	1179,0517
244	1148,6957	245	1118,8008	246	1089,6285	247	1060,0004
248	1032,6985	249	1005,0144	250	977,8558	251	951,21464
252	925,08263	253	899,45181	254	874,31429	255	849,66229
256	825,48815	257	801,78430	258	778,54300	259	755,75781
260	733,42060	261	711,52454	262	690,07630	263	669,06866
264	648,49449	265	628,34678	266	608,63171	267	589,34217
268	570,47117	269	552,01180	270	533,96980	271	516,33820
272	499,14012	273	482,27879	274	465,84953	275	449,81551
276	434,17000	277	418,00636	278	404,02953	279	389,53281
280	375,40962	281	361,65342	282	348,25793	283	335,21675
284	322,52372	285	310,17272	286	298,16824	287	286,50412
288	275,17429	289	264,17279	290	253,49291	291	243,13137
292	233,07995	293	223,33388	294	213,87663	295	204,73577
296	195,87295	297	187,29385	298	178,90312	299	170,96623
300	163,20754	301	155,71231	302	148,46687	303	141,46661
304	134,70699	305	128,18355	306	121,89187	307	115,82785
308	109,98660	309	104,36454	310	98,957340	311	93,760926
312	88,771299	313	83,984521	314	79,389029	315	74,981174
316	70,757368	317	66,714078	318	62,847826	319	59,155191
320	55,277350	321	52,277350	322	49,078536	323	46,033306
324	43,138653	325	40,391619	326	37,782567	327	35,308780
328	32,967586	329	30,756590	330	28,659622	331	26,675139
332	24,800674	333	23,034035	334	21,360762	335	19,779006
336	18,286946	337	16,882792	338	15,588897	339	14,313656
340	13,145492	341	12,052851	342	11,028578	343	10,071293
344	9,1796394	345	8,3522820	346	7,5812545	347	6,8691937
348	6,2111351	349	5,6072129	350	5,0460129	351	4,5266633
352	4,0483071	353	3,6101004	354	3,2062891	355	2,8361658
356	2,4990343	357	2,1942100	358	1,9163090	359	1,6647731
360	1,4390527	361	1,2386075	362	1,0584007	363	0,8950089
364	0,7570157	365	0,6350116	366	0,5272846	367	0,4335337
368	0,3534627	369	0,2867806	370	0,2297092	371	0,1801681
372	0,1398597	373	0,1079698	374	0,0803749	375	0,0569848
376	0,0377078	377	0,0224569	378	0,0111463	379	0,0038876

V. Cherchons maintenant le capital nécessaire pour obtenir une rente viagère trimestrielle. Soit a la rente ; soit n le rang, à partir de la naissance du déposant, du trimestre qui suit immédiatement celui où le versement s'opère ; et soit m le rang, à partir de la naissance, du trimestre où la rente doit commencer à courir. Désignons en général par v_n le nombre des survivants au commencement du trimestre de rang n .

Si l'on n'avait pas égard au décompte que la Caisse est dans l'usage de faire à l'époque du décès, la rente considérée serait une rente viagère différée ordinaire, ayant pour valeur (Voy. RENTES VIAGÈRES)

$$\frac{a}{(1+r)^{m-n}} \cdot \frac{v_n A_m}{v_n}$$

expression dans laquelle A_m représente la valeur d'une rente viagère immédiate de 1 fr. En mettant pour A_m sa valeur, on peut écrire

$$\frac{a}{(1+r)^{m-n}} \cdot \frac{1}{v_n} \left[\frac{v_{m+1}}{1+r} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

ou encore

$$\frac{a(1+r)^n}{v_n} \left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \dots \right]$$

ou, d'après la notation adoptée dans cet article,

$$\frac{a(1+r)^n}{v_n} \cdot Z_m. \quad [1]$$

Maintenant, pour avoir égard au décompte, on raisonnera de la manière suivante : Le nombre des morts du trimestre $m+1$ est $v_m - v_{m+1}$; la probabilité que le déposant mourra dans ce trimestre est donc $\frac{v_m - v_{m+1}}{v_n}$; et l'espérance mathématique pour

ses héritiers de toucher la somme $\frac{1}{2} a$ sera exprimée par

$$\frac{1}{2} a \frac{(v_m - v_{m+1})}{(1+r)^{m-n+1} \cdot v_n}$$

en ramenant la somme $\frac{1}{2} a$ à sa valeur au moment du versement. En raisonnant de même, on verrait que pour les trimestres $m+2$, $m+3$, etc., l'espérance mathématique prend les valeurs

$$\frac{1}{2} a \frac{(v_{m+1} - v_{m+2})}{(1+r)^{m-n+2} \cdot v_n}, \quad \frac{1}{2} a \frac{(v_{m+2} - v_{m+3})}{(1+r)^{m-n+3} \cdot v_n}, \dots$$

et la somme de ces espérances devra être ajoutée à la valeur de la rente différée.

La somme des termes positifs peut s'écrire

$$\frac{1}{2} a \frac{(1+r)^n}{v_n (1+r)} \left[\frac{v_m}{(1+r)^m} + \frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \dots \right]$$

ou

$$\frac{1}{2} a \frac{(1+r)^n}{v_n} \cdot \frac{Z_{m-1}}{1+r}. \quad [2]$$

La somme des termes soustractifs peut s'écrire

$$\frac{1}{2} a \frac{(1+r)^n}{v_n} \left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \dots \right]$$

ou

$$\frac{1}{2} a \frac{(1+r)^n}{v_n} \cdot Z_m.$$

quantité qui se réduit avec l'expression [1] et donne

$$\frac{1}{2} a(1+r)^n + \frac{Z_m}{v_n} \cdot Z_m. \quad [3]$$

La valeur de la rente trimestrielle, en ayant égard au décompte à l'époque du décès, est donc la somme des expressions [2] et [3], c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} a(1+r)^n + \frac{Z_m + \frac{Z_{m+1}}{1+r}}{v_n};$$

mais $\frac{v_n}{(1+r)^n}$ n'est autre chose que $Z_{n-1} - Z_n$; en appelant P la valeur de la rente trimestrielle, on a donc

$$P = a \cdot \frac{\frac{1}{2} \left[Z_m + \frac{Z_{m+1}}{1+r} \right]}{Z_{n-1} - Z_n}. \quad [4]$$

EXEMPLE. Un déposant, né le 12 mars 1834, se présente le 19 décembre 1865 pour faire le versement du capital d'une rente, et il déclare fixer à l'âge de 60 ans l'époque de l'entrée en jouissance. Quelle somme devra-t-il verser pour se constituer à cet âge une rente annuelle de 750 francs ? Puisqu'il est né le 12 mars 1834, son âge doit être calculé comme s'il était né le 1^{er} avril de la même année. Au 1^{er} avril 1865 il a donc eu 1865 - 1834 ou 31 ans. Son versement commence à porter intérêt à partir du 1^{er} janvier 1866. Il doit donc être considéré comme âgé de 31 ans et 9 mois, ce qui représente 127 trimestres; ainsi on a $n = 127$. Il sera considéré comme ayant 60 ans le 1^{er} avril de l'année 1834 + 60 ou 1894, et c'est à cette date que commencera à courir la rente viagère; il aura droit au premier quartier de la rente le 1^{er} juillet de la même année. Les 60 ans font 240 trimestres; on prendra donc $m = 241$. La table donnera

$$Z_{127} = 11400,547; \quad Z_{241} = 11222,822;$$

$$Z_{240} = 1273,5130; \quad Z_{241} = 1241,4516.$$

D'ailleurs, on a ici $a = \frac{750^f}{4} = 187^f,50$; et l'on a trouvé $1+r = 1,01118742$. Il viendra donc

$$P = 187^f,50 \cdot \frac{\frac{1}{2} \left(1241,4516 + \frac{1273,5130}{1,01118742} \right)}{11400,547 - 11222,822},$$

en effectuant les calculs on trouvera $P = 1319^f,21$.

La formule [4] servirait à résoudre le problème inverse dans lequel, la somme versée P étant connue, on demanderait la rente trimestrielle a.

VI. Puisque chaque versement particulier est susceptible de produire une rente à une époque déterminée, on pourrait se constituer une rente viagère trimestrielle, non plus par un versement unique P, mais par une série de versements trimestriels égaux p. Pour déterminer la somme p, on remarquera que ce n'est autre chose qu'une rente viagère temporaire, que le déposant payerait depuis l'époque de son premier versement jusqu'à celle de l'entrée en jouissance de la rente a. Seulement, le premier payement aura lieu 3 mois plus tôt que s'il s'agissait d'une véritable rente, puisqu'il devra avoir lieu au commencement de chaque trimestre, tandis que la rente n'est payée qu'à la fin du trimestre, et le dernier payement aura lieu au com-

mencement du trimestre du rang m. Si donc on appelle A_n^m la valeur d'une rente temporaire de 1 fr. payée depuis le trimestre n jusqu'au trimestre m, la valeur de la rente temporaire p étant $p A_n^m$, on devra avoir

$$p A_n^m + p = P, \text{ d'où } p = \frac{P}{1 + A_n^m}. \quad [5]$$

Or il est facile d'évaluer A_n^m en fonction des valeurs de Z. En effet, la rente temporaire est la différence entre une rente immédiate et une rente différée. La rente immédiate a pour valeur

$$\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3} + \dots,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(1+r)^n}{v_n} \left[\frac{v_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^{n+2}} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^{n+3}} + \dots \right],$$

ou $\frac{(1+r)^n}{v_n} Z_n$.

La rente différée a pour valeur

$$\frac{v_{m+1}}{v_n(1+r)^{m-n+1}} + \frac{v_{m+2}}{v_n(1+r)^{m-n+2}} + \frac{v_{m+3}}{v_n(1+r)^{m-n+3}} + \dots,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(1+r)^n}{v_n} \left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \dots \right]$$

ou $\frac{(1+r)^n}{v_n} Z_m$.

La valeur de A_n^m est donc

$$\frac{(1+r)^n}{v_n} (Z_n - Z_m).$$

Mais on a vu que $\frac{v_n}{(1+r)^n}$ est égal à $Z_{n-1} - Z_n$;

on a donc $A_n^m = \frac{Z_n - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n}$

et $1 + A_n^m = 1 + \frac{Z_n - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n} = \frac{Z_{n-1} - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n}$.

Par conséquent,

$$p = P \cdot \frac{Z_{n-1} - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n},$$

ou, en mettant pour P sa valeur [4],

$$p = a \cdot \frac{\frac{1}{2} \left[Z_m + \frac{Z_{m+1}}{1+r} \right]}{Z_{n-1} - Z_m}. \quad [6]$$

Dans l'exemple ci-dessus, on trouverait $p = 23^f,07$.

VII. Nous avons supposé jusqu'ici que les sommes versées à la Caisse de retraites étaient placées à fonds perdus; mais cette caisse offre aux déposants une autre combinaison dans laquelle le capital est réservé, et rendu aux héritiers du titulaire de la rente au moment de son décès.

Pour obtenir la valeur de la rente trimestrielle dans ces conditions, il faut tenir compte des capitaux restitués aux héritiers des titulaires de rentes successivement décédés. Et pour cela, on supposera qu'un nombre v_n de déposants aient versé chacun la somme P à la même époque. Le nombre des survivants au bout du premier trimestre étant v_{n+1} , le nombre des décès du trimestre est $v_n - v_{n+1}$; et la probabilité qu'ils aient lieu est $\frac{v_n - v_{n+1}}{v_n}$; l'espérance mathématique, pour les héritiers de chacun

des déposants, de toucher la somme P au bout du trimestre est donc

$$\frac{P}{1+r} \cdot \frac{v_n - v_{n+1}}{v_n}$$

Pendant le second trimestre, le nombre des décès est $v_{n+1} - v_{n+2}$; et la probabilité qu'ils aient lieu est $\frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_n}$; l'espérance mathématique correspondante de toucher la somme P à la fin de ce second trimestre est donc

$$\frac{P}{(1+r)^2} \cdot \frac{v_{n+1} - v_{n+2}}{v_n}$$

On verrait de même que l'espérance mathématique, pour les héritiers des déposants, de toucher la somme P à la fin du troisième trimestre est

$$\frac{P}{(1+r)^3} \cdot \frac{v_{n+2} - v_{n+3}}{v_n}$$

et ainsi de suite, la somme P étant ramenée chaque fois à sa valeur actuelle.

La somme de toutes ces espérances, divisée par le nombre v_n des déposants, doit être retranchée du premier membre de l'équation [4] dans le cas où le capital est réservé.

Si l'on fait cette soustraction, on trouvera d'abord une série de termes positifs,

$$P + \frac{P}{v_n} \cdot \frac{v_{n+1}}{1+r} + \frac{P}{v_n} \cdot \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{P}{v_n} \cdot \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots$$

puis une série de termes soustractifs,

$$-\frac{P}{1+r} - \frac{P}{v_n} \cdot \frac{v_{n+1}}{(1+r)^2} - \frac{P}{v_n} \cdot \frac{v_{n+2}}{(1+r)^3} - \dots$$

Ces termes se réduisent deux à deux avec les précédents, et donnent pour résultat

$$\frac{rP}{1+r} + \frac{rP}{v_n} \cdot \frac{v_{n+1}}{(1+r)} + \frac{rP}{v_n} \cdot \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{rP}{v_n} \cdot \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots$$

somme que l'on peut écrire

$$\frac{rP}{v_n} \cdot \frac{(1+r)^n}{1+r} \left[\frac{v_n}{(1+r)^n} + \frac{v_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^{n+2}} + \dots \right]$$

ou
$$\frac{rP}{1+r} \cdot \frac{(1+r)^n}{v_n} \cdot Z_{n-1}$$

Or on a vu que $\frac{v_n}{(1+r)^n}$ équivaut à $Z_{n-1} - Z_n$; le premier membre de l'équation [4] ainsi modifiée pourra donc s'écrire

$$\frac{rP}{1+r} \cdot \frac{Z_{n-1}}{Z_{n-1} - Z_n}$$

et l'équation elle-même, en supprimant le dénominateur commun $Z_{n-1} - Z_n$, deviendra

$$\frac{rP \cdot Z_{n-1}}{1+r} = a \cdot \frac{1}{2} \left[Z_n + \frac{Z_{n-1}}{1+r} \right],$$

d'où
$$P = a \cdot \frac{\frac{1}{2} [Z_{n-1} + (1+r)Z_n]}{rZ_{n-1}} \quad [7]$$

Si l'on reprend l'exemple ci-dessus dans l'hypothèse du capital réservé, on trouvera

$$P = 187^f, 50 \cdot \frac{\frac{1}{2} [1273, 5130 + 1, 01118742 \cdot 1241, 4516]}{0,01118742 \cdot 11400, 547}$$

ou
$$P = 1858^f, 82.$$

VIII. Pour les rentes à capital réservé, comme pour les rentes à capital aliéné, on peut remplacer un versement unique par des versements trimestriels égaux. Il suffit, comme on l'a vu, pour trouver la

valeur de ce versement trimestriel p , de multiplier le versement unique P par la quantité $\frac{Z_{n-1} - Z_n}{Z_{n-1} - Z_m}$.

Dans l'exemple précédent, cette quantité aurait pour valeur

$$\frac{11400, 547 - 11222, 822}{11400, 547 - 1241, 4516} \text{ ou } 0,01749.$$

Ainsi le versement trimestriel devrait être égal à $1858^f, 82 \times 0,01749$, c'est-à-dire à $32^f, 51$.

IX. Un déposant qui a fait un ou plusieurs versements pour obtenir une rente viagère à capital réservé, peut, s'il le juge convenable, faire plus tard l'abandon de son capital pour augmenter sa rente. Il suffit pour cela qu'il en fasse la déclaration au plus tard dans le trimestre qui précède l'entrée en jouissance de la rente.

Un déposant âgé de plus de 65 ans obtient, en faisant son versement, une rente viagère immédiate; mais cette rente ne peut surpasser celle qu'il aurait obtenue à 65 ans même.

En cas de blessures graves, ou d'infirmités prématurées, entraînant incapacité absolue de travail, la rente viagère peut être liquidée avant que le titulaire ait atteint 50 ans.

CAISSES DOTALES, associations formées par des pères de famille qui veulent assurer une dot à leurs enfants au moment où ils atteignent leur 20^e année. Elles reçoivent des enfants de tout âge au-dessous de 10 ans; mais tous ceux qui sont nés dans la même année forment une association particulière et qui est gérée à part. Les intérêts sont calculés à 4 pour 100.

Le capital social se forme des mises des associés et de leurs intérêts composés. Quand les enfants qui forment une association sont parvenus à l'âge de 20 ans, le capital et les intérêts sont partagés entre les survivants.

Les caisses dotales sont donc des TONTINES (Voy. ce mot), et les questions qui s'y rapportent se traitent de la même manière.

Au lieu d'une mise unique, les sociétaires payent ordinairement une mise annuelle, comme cela a lieu ordinairement aussi dans les tontines.

CAISSONS, compartiments réguliers et profonds qui divisent un plafond ou une voûte. Les caissons peuvent recevoir des ornements très-variés.

CALCUL PAR LE TRAIT, ensemble des procédés graphiques qui peuvent, au besoin, remplacer des opérations de calcul.

Toute quantité peut être représentée par une longueur, l'unité de l'échelle adoptée représentant l'unité de la quantité que l'on considère. Ainsi un poids pourra être représenté par un certain nombre de centimètres, par exemple, si le centimètre représente l'unité de poids. Les opérations à effectuer sur des grandeurs quelconques peuvent donc toujours être ramenées à des opérations sur des longueurs.

I. On sait comment les longueurs peuvent être ajoutées ou soustraites; comment une longueur peut être répétée un certain nombre de fois, ou divisée en un certain nombre de parties égales.

On a vu en Géométrie élémentaire comment on construit une quatrième proportionnelle à trois longueurs données, a, b, c , c'est-à-dire une longueur x qui satisfasse à la relation

$$a : b = c : x,$$

d'où $x = \frac{bc}{a}$. [1]

Si l'on suppose que a soit l'unité linéaire, il reste $x = bc$. Ainsi l'opération qui sert à trouver une quatrième proportionnelle, peut être appliquée au calcul d'un produit.

Si dans la relation [1] on suppose au contraire que l'unité linéaire soit c , il reste $x = \frac{b}{a}$. Ainsi cette même opération peut aussi être appliquée au calcul d'un quotient.

II. Les puissances successives d'un nombre peuvent être construites par un procédé analogue. Soit a la longueur qui représente la quantité proposée, et u l'unité linéaire. Traçons deux droites OX , OY (fig. 1) sous un angle quelconque. Prenons

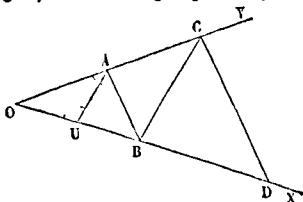


Fig. 1.

sur ces droites, à partir du sommet O , une longueur OU égale à u , et une longueur OA égale à a . Au point A faisons l'angle OAB égal à l'angle OUA ; la longueur OB représentera la seconde puissance de a . Car on a, par des similitudes évidentes,

$$OU:OA = OA:OB \text{ ou } u:a = a:OB,$$

d'où $OB = \frac{a^2}{u}$, ou simplement $OB = a^2$.

Par le point B menons BC parallèle à UA ; la longueur OC représentera la troisième puissance de a ; car, les triangles OBC et OUA étant semblables, on aura $OC:OB = OA:OU$ ou $OC:a^2 = a:1$, d'où $OC = a^3$.

Par le point C menons CD parallèle à AB ; la longueur OD représentera la quatrième puissance de a ; et ainsi de suite.

III. Le calcul d'une racine carrée peut être remplacé par plusieurs tracés différents. Si le nombre donné peut être décomposé en 2 facteurs a et b , le calcul de la racine carrée du produit de ces facteurs revient à la recherche d'une moyenne proportionnelle, quantité que la Géométrie élémentaire apprend à construire. Si le nombre donné est premier, on peut toujours le mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est l'unité; en sorte que le tracé de la moyenne proportionnelle est encore applicable. Si le nombre était un peu considérable, ce procédé ne pourrait plus être employé; mais on ramènerait l'opération à une moyenne proportionnelle en divisant et en multipliant le nombre par un carré. Soit, par exemple, à extraire la racine carrée du nombre 2357; on le mettra d'abord sous la forme $100 \times 23,57$; on pourra écrire sa racine

$$10 \sqrt{1 \times 23,57},$$

c'est-à-dire que l'on construira la moyenne proportionnelle entre l'unité et 23,57; et, quand on l'aura obtenue, on la multipliera par 10. Ce procédé n'est point susceptible d'une grande exactitude.

Quand le nombre proposé est la somme ou la dif-

férence de deux carrés, les propriétés du triangle rectangle fournissent un moyen simple d'en obtenir la racine. Si, par exemple, le nombre est de la forme $a^2 + b^2$, sa racine est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit sont a et b . S'il est de la forme $a^2 - b^2$, sa racine est un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est a , et dans lequel le second côté de l'angle droit est b . La Géométrie élémentaire donne le moyen simple de construire le triangle dans l'une ou l'autre de ces deux hypothèses.

Le nombre donné peut être la combinaison, par voie d'addition ou de soustraction, de plusieurs carrés. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du nombre 21; on pourra l'écrire

$$16 + 4 + 1 \text{ ou } 16 + 9 - 4.$$

Sous la première forme on obtiendra sa racine en construisant deux triangles rectangles, dont le premier aura pour côtés de l'angle droit 4 et 3; le second aura pour côtés de l'angle droit l'hypoténuse du premier et l'unité.

Sous la seconde forme, on construira d'abord un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit 4 et 3; on construira en second lieu un triangle rectangle ayant la même hypoténuse que le premier, et pour l'un des côtés de l'angle droit 2; le second côté de l'angle droit de ce second triangle représentera la racine cherchée.

IV. Il serait facile de déduire de la construction de la figure 1 un procédé pour extraire par tâtonnements les racines de degré quelconque. Mais il existe une méthode plus générale pour calculer les puissances et les racines. Ce procédé, indiqué par M. Cousinery, ingénieur en chef des ponts et chaussées, dans son ouvrage ayant pour titre *le Calcul par le trait*, est fondé sur l'emploi de deux spirales, que l'on suppose avoir été tracées une fois pour toutes.

La première Oab (fig. 2) est une spirale d'Archimède ayant pour équation

$$\rho_1 = a \omega. \quad [2]$$

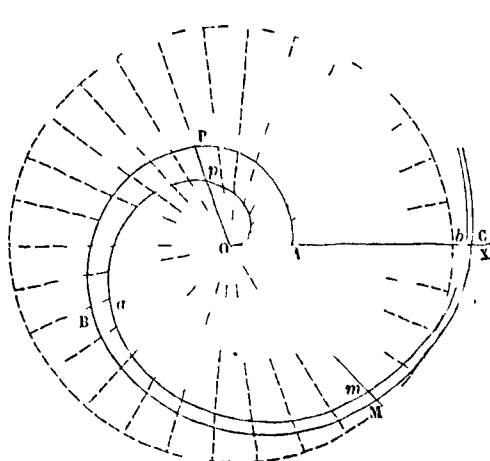


FIG. 2.]

La seconde ABC est une spirale logarithmique représentée par la relation

$$\rho_2 = b^{\omega} \quad [3]$$

Supposons que $\rho_2 = OM$ représente un nombre donné quelconque, et qu'il s'agisse d'élever ce nombre à une puissance n entière ou fractionnaire. On aura

$$\rho_2^n = b^{n\omega}. \quad [4]$$

Mais si l'on multiplie par n les deux membres de l'équation [2], on obtient

$$n\rho_1 = a.n\omega. \quad [5]$$

Il en résulte que les rayons vecteurs ρ_1 et ρ_2 correspondent à la même direction représentée par l'angle polaire ω , les rayons vecteurs $n\rho_1$ et ρ_2^n correspondent aussi à une même direction, représentée par l'angle $n\omega$. De là la construction suivante. Considérez le rayon vecteur Om de la spirale d'Archimède, qui répond au rayon vecteur donné OM sur la spirale logarithmique. Multipliez Om par l'indice n de la puissance entière ou fractionnaire donnée; avec $n.Om$ pour rayon décrivez, du point O comme centre, un arc de cercle qui coupera la spirale d'Archimède en un point p ; joignez Op ; prolongez ce rayon vecteur jusqu'à la rencontre en P avec la spirale logarithmique; le rayon OP représentera la puissance cherchée du nombre représenté par OM . Supposons, par exemple, qu'un nombre donné soit représenté par OM , et qu'il s'agisse d'en extraire la racine cubique; on prendra le tiers de Om ; on décrira avec ce tiers pour rayon un arc qui coupera la spirale d'Archimède en p ; le rayon vecteur correspondant OP sur la spirale logarithmique représentera la racine cubique du nombre représenté par OM .

On remarquera que l'ensemble des deux spirales équivalait à une table de logarithmes. Car si l'on fait croître ω suivant une progression arithmétique commençant par zéro, le rayon vecteur ρ_1 de la spirale d'Archimède croîtra aussi suivant une progression arithmétique commençant par zéro; mais le rayon vecteur ρ_2 de la spirale logarithmique croîtra suivant une progression géométrique commençant par l'unité. Les rayons vecteurs de la spirale d'Archimède sont donc les logarithmes des rayons vecteurs de même direction dans la spirale logarithmique.

Pour tracer la spirale d'Archimède, on décrit, du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, une circonférence que l'on divise en un assez grand nombre de parties égales; on mène des rayons à tous les points de division; et sur ces rayons on porte, à partir du point O , des longueurs égales à 1 fois, 2 fois, 3 fois, etc., une même longueur, un millimètre, par exemple; et par les extrémités de toutes les longueurs ainsi portées, on fait passer une courbe continue.

Pour tracer la spirale logarithmique, on prend d'abord OA égal à l'unité linéaire adoptée d'après l'échelle du plan, et l'on porte cette longueur sur la direction initiale des rayons vecteurs de la première spirale, répondant à $\omega = 0$. Au point A on fait un angle égal à un angle arbitrairement choisi α ; par le point où le second côté de cet angle coupe le rayon correspondant à la première division du cercle, on mène une droite faisant avec ce rayon l'angle α ; par le point où la droite ainsi menée coupe le rayon correspondant à la deuxième division du cercle, on mène une droite faisant avec ce rayon l'angle α , et ainsi de suite. Par les points

ainsi obtenus sur les rayons successifs, on fait passer une courbe continue. Il est commode, pour l'exécution de ce tracé, de se servir d'un patron en carton ou en papier, taillé suivant l'ouverture de l'angle α .

V. On peut résoudre graphiquement le problème de l'interpolation. (Voy. INTERPOLATION GRAPHIQUE.)

On peut aussi, par un tracé, résoudre les équations numériques; et cette méthode est fréquemment employée dans les applications, où l'on a affaire à des équations compliquées, souvent transcendantes, et où la nature même des problèmes ne comporte pas une solution rigoureuse.

Soit $f(x) = 0$ l'équation à résoudre. On pose

$$y = f(x).$$

Cette équation représente une courbe que l'on peut construire par points, en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées; on les prend ordinairement équidistantes. Si la courbe ainsi tracée rencontre l'axe des x , les abscisses des points de rencontre sont les racines réelles de l'équation proposée, puisque pour ces valeurs de x on a $y = 0$, et par conséquent $f(x) = 0$.

On peut remarquer qu'au lieu de prendre des coordonnées rectilignes comme nous l'avons supposé, on pourrait prendre des coordonnées polaires. Si l'on désigne par ω l'inconnue, et que $\varphi(\omega) = 0$ soit l'équation numérique à résoudre, on posera

$$\rho = \varphi(\omega).$$

On construira par points la courbe représentée par cette équation; les valeurs de ω pour lesquelles le rayon vecteur ρ s'annule, c'est-à-dire pour lesquelles la courbe passe par le pôle, seront les racines réelles de l'équation proposée.

Si l'on a à résoudre un système de deux équations numériques à deux inconnues, on construit séparément la courbe représentée par chacune des deux équations proposées; les coordonnées des points communs aux deux courbes ainsi tracées sont les racines des équations qu'il s'agissait de résoudre.

La considération des intersections de courbes peut être utile pour la résolution d'une équation isolée. Pour en donner un exemple, nous rappellerons la méthode de résolution de l'équation du troisième degré par l'intersection d'une parabole et d'un cercle, parce que les équations du troisième degré se rencontrent fréquemment. On commence par faire disparaître le second terme et mettre l'équation sous la forme

$$x^3 + px + q = 0. \quad [6]$$

On multiplie par x , et l'on pose ensuite

$$x^2 = y. \quad [7]$$

Cette équation est celle d'une parabole facile à construire. L'équation proposée devient ainsi

$$y^2 + py + qx = 0. \quad [8]$$

Et la proposée peut être regardée comme résultant de l'élimination de y entre les équations [7] et [8]. Ajoutant les équations [7] et [8], on obtient une équation représentant une courbe qui passe par les points communs aux courbes [7] et [8]; or, cette courbe est un cercle

$$x^2 + y^2 + (p-1)y + qx = 0,$$

dont le centre a pour coordonnées

$$\alpha = -\frac{q}{2}, \quad \beta = -\frac{p-1}{2},$$

et qui passe par l'origine. Ce cercle est donc facile

à tracer. Les coordonnées des points où il coupe la parabole [7] sont les racines des équations [7] et [8]; par conséquent, les abscisses de ces points sont les racines de l'équation [6], à l'exception de la racine $x=0$ qui a été introduite en multipliant par x . La parabole [7], construite avec soin une fois pour toutes, peut servir à la résolution de toutes les équations du troisième degré. Quand les coefficients p et q sont très-grands, le centre du cercle peut sortir du cadre dans lequel on opère; on pose alors $x = Kx'$, d'où

$$x^3 + \frac{p}{K^2}x' + \frac{q}{K^3} = 0 \text{ ou } x'^3 + p'x' + q' = 0. \quad [9]$$

En prenant K suffisamment grand, on peut ramener les coefficients de l'équation [9] dans les limites convenables pour l'exécution du tracé. Une fois les racines obtenues, on les multiplie par K pour avoir celles de la proposée.

VI. On peut, par des moyens graphiques, suppléer dans certains cas à l'emploi si pénible de la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot).

Supposons que deux grandeurs variables x et y soient liées entre elles par une relation de la forme

$$y = ax + b,$$

et qu'il s'agisse de déterminer les coefficients a et b d'après une série d'expériences. Si ces expériences étaient rigoureuses, deux couples de valeurs de x et de y suffiraient pour calculer a et b . Mais les expériences peuvent être entachées d'erreur; les résultats qu'elles donnent ne sont qu'approximatifs; et si l'on n'a aucune raison pour suspecter l'une plus que l'autre, il est rationnel de les faire concourir toutes à la détermination des coefficients inconnus. C'est à quoi on parvient par l'application de la méthode des moindres carrés, qui a en outre l'avantage de conduire aux résultats les plus probables. Mais, afin d'éviter des calculs laborieux, on peut, si l'on ne tient pas à une scrupuleuse exactitude, ou si la nature du problème ne la comporte pas, arriver plus promptement au but à l'aide des considérations géométriques suivantes.

Soient $x_1, y_1 - x_2, y_2 - x_3, y_3, \dots$, etc., les couples de valeurs de x et de y fournis par l'expérience. On devrait avoir

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b, \\ y_2 &= ax_2 + b, \\ y_3 &= ax_3 + b, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \text{et ainsi de suite.} \end{aligned} \right\} \quad [10]$$

Les quantités x_1, y_1, x_2, y_2 , etc., étant des constantes données, considérons, dans ces équations, a et b comme des variables. Les équations ci-dessus représenteront des droites, et nous pouvons les écrire

$$\left. \begin{aligned} b &= -x_1a + y_1 \\ b &= -x_2a + y_2 \\ b &= -x_3a + y_3 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \text{et ainsi de suite.} \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

Ces droites sont faciles à construire, en faisant alternativement $a=0$ et $b=0$. Si les expériences étaient exactes, les équations [10] devraient être satisfaites par un même système de valeurs de a et de b ; et par conséquent les droites représentées par les équations [11] devraient se couper en un même point dont a et b seraient les coordonnées. Cela n'arrivera pas en général. Mais il y aura une région du plan dans laquelle les intersections mu-

tuelles de ces droites deux à deux seront très-rapprochées, et formeront, par suite de l'épaisseur même du trait, une sorte de tache d'une teinte plus foncée que le reste du plan. On s'éloignera peu de la vérité en prenant pour le point qui devrait être commun à toutes ces droites, le centre de cette espèce de tache. Les coordonnées du point choisi de la sorte à vue pour le centre de la tache seront les valeurs approchées de a et de b . Ce procédé expéditif peut être d'une grande utilité dans certains cas.

VII. Le calcul d'une intégrale définie peut toujours être ramené, par un tracé, à celui de l'aire comprise entre une courbe, l'axe des x et deux ordonnées extrêmes (Voy. QUADRATURES). Et cette méthode est applicable à une foule de cas : calcul de l'aire d'une surface, du volume d'un corps, détermination du centre de gravité ou du centre de pression, calcul du travail d'une force, de son impulsion totale, calcul du moment d'inertie d'un corps, etc., etc.

Enfin on peut, par un tracé, intégrer approximativement les équations différentielles du premier ordre. Supposons que l'équation différentielle d'une courbe (et toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe) soit donnée sous la forme

$$f(x, y, y') = 0,$$

y' représentant la première dérivée de la fonction y par rapport à la variable indépendante x . Admettons que l'équation puisse être résolue par rapport à y' , et qu'on en ait tiré

$$y' = \varphi(x, y). \quad [12]$$

Traçons une série d'ordonnées indéfinies assez rapprochées pour que, dans l'intervalle de deux ordonnées consécutives, la courbe cherchée puisse être considérée comme droite. Attribuons à x et à y des valeurs initiales, par exemple $x=0$ et $y=y_0$. L'équation [12] donnera pour y' une certaine valeur y'_0 . Ayant construit le point A (fig. 3) qui a

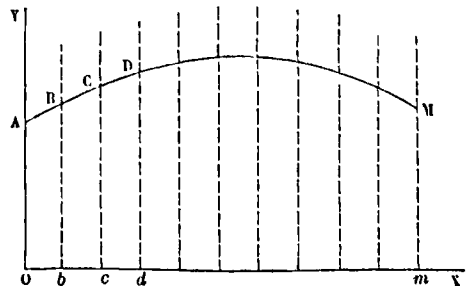


Fig. 3.

pour coordonnées 0 et y_0 , menons par le point A une droite dont l'inclinaison par rapport à l'axe des x ait pour tangente trigonométrique y'_0 ; et soit AB cette droite. D'après ce que nous avons admis, cette droite pourra être regardée comme un premier élément de la courbe dont on a l'équation différentielle. Mesurons sur l'épure les coordonnées du point B; portons-les à la place de x et de y dans l'équation [12], et soit y'_1 la valeur qui en résulte pour y' . Menons par le point B une droite BC dont l'angle avec OX ait pour tangente y'_1 ; la droite BC pourra être regardée comme un second élément de la

courbe cherchée. Mesurons sur l'épure les cordonnées du point C; portons-les dans [12] à la place de x et de y , et soit y'_2 la valeur de y' correspondante. Menons une droite CD qui fasse avec OX un angle dont la tangente soit y'_2 ; cette droite CD pourra être considérée comme un troisième élément de la courbe cherchée. (En continuant ainsi on obtiendra une ligne brisée ABCD...M, qui approchera d'autant plus de la courbe cherchée que les ordonnées OA, bB, cC, dD, etc., seront plus rapprochées.

Au lieu d'une équation différentielle de la forme $f(x, y, y') = 0$ ou $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, on pourrait avoir une équation de la forme

$$f(x, y, \frac{ds}{dx}) = 0,$$

ds désignant la longueur de l'élément de courbe correspondant à l'intervalle dx de deux ordonnées consécutives. On tirerait de cette équation une formule de la forme

$$ds = \varphi(x, y) dx. \quad [13]$$

On opérerait sur cette équation comme sur l'équation [12]; avec cette différence que pour avoir le point B on décrirait un arc de cercle du point A comme centre avec un rayon égal à la valeur de ds . Cet arc de cercle rencontrerait l'ordonnée suivante en un point qui serait le point B. De même pour les éléments suivants. Chaque arc décrit rencontrant en général l'ordonnée suivante en deux points, il faudrait avoir égard à cette circonstance.

Quoique la ligne brisée obtenue comme on vient de le dire pour le cas de l'équation [12] et pour le cas de l'équation [13] ne représente la courbe cherchée qu'avec une approximation assez grossière, elle suffit néanmoins, dans beaucoup de cas, pour donner une idée de l'allure de la courbe véritable, et par conséquent de la fonction que l'ordonnée de cette courbe représente.

Voy. l'article TABLES GRAPHIQUES.

CALENDRIER (du latin *calendar*, nom donné par les Romains au premier jour du mois), tableau des jours de l'année, avec leurs divisions en semaines et en mois; les fêtes religieuses y sont mentionnées; on y joint d'ordinaire l'indication des phases de la lune, et quelquefois l'heure du lever et du coucher du soleil, et divers renseignements d'un intérêt secondaire. Pris dans un sens plus général, le mot *Calendrier* signifie l'ensemble des conventions adoptées pour régler la division du temps. Presque tous les peuples ont cherché dans les phénomènes astronomiques le moyen naturel d'effectuer cette division; et c'est d'après les mouvements de la lune ou du soleil que les calendriers ont été établis. Mais l'année solaire ne coïncidant pas avec un nombre exact de révolutions de la lune, il en résulte pour tous les peuples qui ont adopté un calendrier lunaire, l'inconvénient de voir les mêmes travaux correspondre successivement avec toutes les époques de l'année, ou les mêmes fêtes tomber successivement dans toutes les saisons. C'est ce qui avait lieu chez les Juifs, chez les Grecs, chez les Romains avant César, et ce qui a encore lieu aujourd'hui chez les Turcs. Les Égyptiens paraissent être les premiers qui aient adopté un calendrier solaire; les inondations périodiques du Nil coïncidant avec le solstice d'été, on conçoit que l'attention de ce peuple ait été appelée sur un

phénomène astronomique qui pour lui ramenait chaque année l'abondance. Ils avaient adopté une année de 12 mois, de 30 jours chacun; après le 12^e mois ils ajoutaient 5 jours complémentaires, ce qui portait la durée de l'année à 365 jours exactement. Cette année égyptienne a été nommée *année vague*. La durée de l'ANNÉE TROPIQUE (Voy. ce mot) étant de 365,242217, on voit que les Égyptiens négligeaient chaque année un peu moins d'un quart de jour. Lorsque, 46 ans avant J.-C., Jules César entreprit de remédier à la confusion introduite dans la mesure du temps par le calendrier lunaire de Numa, et par l'arbitraire des pontifes, Sosigène, astronome d'Alexandrie, chargé de la partie scientifique de ce travail, adopta une année de 365 1/4; mais comme l'année civile doit être nécessairement composée d'un nombre entier de jours, on convint de faire les années ordinaires de 365 jours, et de reporter sur chaque quatrième année l'erreur d'un jour résultant des quatre quarts négligés, en sorte que cette quatrième année fut de 366 jours. Cette addition d'un jour est ce qu'on nomme *l'intercalation*. Pour des raisons religieuses, le jour intercalaire fut placé après le sixième jour avant les calendes de mars, c'est-à-dire avant le 1^{er} mars; et comme ce sixième jour, dans la manière de compter des Romains, était désigné par les mots *sexto ante calendas*, ou simplement *sexto-calendas*, le jour intercalaire prit le nom de *bissexto-calendas*, d'où le nom de *bissextille* donné à chaque année de 366 jours. Dans le calendrier Julien, on voit que chaque année dont le millésime est divisible par 4 est une année bissextille. Ce calendrier, adopté par tous les peuples civilisés jusqu'à la réforme Grégorienne, est encore en usage en Russie. Quant à la division en mois, reste du calendrier lunaire, elle fut réglée par Jules César comme elle l'est encore aujourd'hui; le seul mois de février resta de 28 jours, comme il l'était du temps de Numa, par respect pour les dieux infernaux au culte desquels ce mois avait été consacré. Cette division en mois est la suivante :

Janvier.....	31 jours.	Juillet.....	31 jours.
Février.....	28 »	Août.....	31 »
Mars.....	31 »	Septembre.....	30 »
Avril.....	30 »	Octobre.....	31 »
Mai.....	31 »	Novembre.....	30 »
Juin.....	30 »	Décembre.....	31 »

Les noms de ces quatre derniers mois rappellent l'époque où les Romains, du temps de Romulus, commençaient l'année au mois de mars. L'origine de l'année a souvent varié : c'est depuis 1564 que l'année commence en France le 1^{er} janvier.

La réforme julienne avait réalisé une grande amélioration; mais en faisant l'année de 365,25 on commettait une erreur en plus de 0,007736 qui, en s'accumulant, devait finir par ramener du désordre dans l'évaluation du temps. Le concile de Nicée, en réglant la fête de Pâques, avait supposé que l'équinoxe du printemps devait revenir tous les ans le 21 mars, comme en 325, époque de ce concile; or, en 1582, c'est-à-dire, 1257 ans après, l'erreur était devenue

$$0,007736 \times 1257 \text{ ou } 9,72417,$$

et l'équinoxe eut lieu le 11 au lieu du 21. Pour rectifier l'erreur, le pape Grégoire XIII décida d'abord que le lendemain du 4 octobre 1582 serait le 15; et pour empêcher l'erreur de se reproduire dans la

suite des temps, on convint de supprimer 3 bissextiles tous les 400 ans, en faisant années communes ou de 365 jours, les années séculaires, sauf celles dans lesquelles les centaines du millésime seraient divisibles par 4. Ainsi 1600 a été bissextile, 1700 et 1800 ont été communes : il en sera de même de 1900; mais l'année 2000 sera bissextile; et ainsi de suite. Ce système revient à supprimer 3 jours en 400 ans; or, l'erreur du calendrier Julien étant de 0,007736 par an, serait de $0,007736 \times 400$ ou de 3,0944 en 400 ans; si l'on retranche 3 jours, il ne reste au bout de ces 400 ans qu'une erreur de 0,0944, ce qui réduit l'erreur annuelle à $\frac{0,0944}{400}$

ou à 0,000236. Pour que l'erreur en s'accumulant s'élevât à 1 jour, il faudrait donc un nombre d'années marqué par $\frac{1}{0,000236}$, c'est-à-dire plus de 4237

ans. On la corrigerait en partie en supprimant une bissextile tous les 4000 ans; mais d'ici là il est à présumer qu'on connaîtra plus exactement la longueur de l'année tropique, point de départ de tous ces calculs. Tel qu'il est, le calendrier Grégorien répond à tous les besoins actuels.

On peut remarquer toutefois qu'à une époque fort antérieure à la réforme grégorienne, les Persans avaient résolu d'une manière plus simple et plus rigoureuse le problème de l'intercalation. Ils considèrent une période de 33 ans; pendant les 28 premiers ils intercalent, comme dans le calendrier Grégorien, un jour tous les 4 ans; puis, dans les 5 dernières années de la période, ils n'ajoutent un jour qu'à la cinquième; c'est-à-dire que les années

de 366 jours portent dans la période les numéros d'ordre suivants :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 33.

De cette manière, la période de 33 ans se compose d'un nombre de jours marqué par $365 \times 33 + 8$

et la durée moyenne de l'année est $365\frac{8}{33}$ ou

$365,242424$, au lieu de $365,242264$. L'erreur n'est que de 0,00016, et ne peut, en s'accumulant, produire un jour qu'au bout de 6250 ans.

En 1793, la France adopta un calendrier particulier, connu sous le nom de *calendrier républicain*, qui, en conservant la réforme grégorienne, revenait à la division égyptienne en 12 mois de 30 jours chacun, avec 5 *jours complémentaires* dans les années communes et 6 dans les années bissextiles. L'année commençait à l'équinoxe d'automne (22 septembre, à minuit) : les mois portaient les noms de *Vendémiaire, Brumaire, Frimaire, Nivôse, Pluviôse, Ventôse, Germinal, Floréal, Prairial, Messidor, Thermidor, Fructidor*. Ils se divisaient chacun en 3 *décades*; et les jours portaient les noms de *primidi, duodi, tridi, etc.*, jusqu'à *décadi*. Les noms des saints, mis en regard des jours de l'année dans les calendriers ordinaires, étaient remplacés par des noms de plantes, de produits agricoles, d'animaux ou d'objets utiles, etc. Ce calendrier a été en vigueur pendant 13 ans. L'ancien calendrier a été rétabli le 1^{er} janvier 1806.

Voici le tableau de la concordance du calendrier républicain avec le calendrier grégorien (l'an I est purement fictif.)

	AN II 1794-1794	AN III 1794-1795	AN IV 1795-1796	AN V 1796-1797	AN VI 1797-1798	AN VII 1798-1799	AN VIII 1799-1800	AN IX 1800-1801	AN X 1801-1802	AN XI 1802-18 3	AN XII 1803-1804	AN XIII 1804-1805	AN XIV 1805-1806
1 ^{er} Vendémiaire.	22 Sept.	22 S.	22 S.	22 S.	22 S.	22 S.	23 S.	23 S.	23 S.	23 S.	24 S.	23 S.	23 S.
1 ^{er} Brumaire.	22 O. tobre.	22 O.	23 O.	22 O.	22 O.	22 O.	23 O.	23 O.	23 O.	23 O.	24 O.	23 O.	23 O.
1 ^{er} Frimaire.	21 Nov.	21 N.	22 N.	21 N.	21 N.	21 N.	22 N.	22 N.	22 N.	22 N.	23 N.	22 N.	21 N.
1 ^{er} Nivôse.	21 Déc.	21 D.	22 D.	21 D.	21 D.	21 D.	22 D.	22 D.	22 D.	22 D.	23 D.	22 D.	22 D.
1 ^{er} Pluviôse.	20 Janvier.	20 J.	21 J.	20 J.	20 J.	20 J.	21 J.	21 J.	21 J.	21 J.	21 J.	21 J.	»
1 ^{er} Ventôse.	19 Février.	19 F.	20 F.	19 F.	19 F.	19 F.	20 F.	20 F.	20 F.	20 F.	21 F.	21 F.	»
1 ^{er} Germinal.	21 Mars.	21 M.	21 M.	21 M.	21 M.	21 M.	22 M.	22 M.	22 M.	22 M.	22 M.	22 M.	»
1 ^{er} Floréal.	20 Avril.	20 A.	20 A.	20 A.	20 A.	20 A.	21 A.	21 A.	21 A.	21 A.	21 A.	21 A.	»
1 ^{er} Prairial.	20 Mai.	20 M.	20 M.	20 M.	20 M.	20 M.	21 M.	21 M.	21 M.	21 M.	21 M.	21 M.	»
1 ^{er} Messidor.	19 Juin.	19 J.	19 J.	19 J.	19 J.	19 J.	20 J.	20 J.	20 J.	20 J.	20 J.	20 J.	»
1 ^{er} Thermidor.	19 Juillet.	19 J.	19 J.	19 J.	19 J.	19 J.	20 J.	20 J.	20 J.	20 J.	21 J.	20 J.	»
1 ^{er} Fructidor.	18 Août.	18 A.	18 A.	18 A.	18 A.	18 A.	19 A.	19 A.	19 A.	19 A.	19 A.	19 A.	»
1 ^{er} j. complémentaire.	17 Sept.	17 S.	17 S.	17 S.	17 S.	17 S.	18 S.	18 S.	18 S.	18 S.	18 S.	18 S.	»

Dans les pays catholiques, le calendrier contient, outre les éléments que nous avons énumérés, certaines indications relatives à ce que l'on appelle le **COMPUT ECCLESIASTIQUE**, c'est-à-dire au calcul des

fêtes mobiles : ce sont le NOMBRE D'OR, l'ÉPACTE, le CYCLE SOLAIRE, l'INDICTION ROMAINE, la LETTRE DOMINICALE (Voy. ces mots).

CALENDRIER PERPÉTUEL, ou *Calendrier ecclésiastique*, donnant, pour une année quelconque, les jours de la semaine, les phases de la lune, et

JANVIER.			FÉVRIER.			MARS.			AVRIL.		
Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.
1	A.	*	1	D.	XXIX.	1	D.	*	1	G.	XXIX.
2	B.	XXIX.	2	E.	XXVIII.	2	E.	XXIX.	2	A.	XXVIII.
3	C.	XXVIII.	3	F.	XXVII.	3	F.	XXVIII.	3	B.	XXVII.
4	D.	XXVII.	4	G.	XXVI.	4	G.	XXVII.	4	C.	XXVI.
5	E.	XXVI.	5	A.	XXV-XXIV.	5	A.	XXVI.	5	D.	XXV-XXIV.
6	F.	XXV.	6	B.	XXIII.	6	B.	XXV.	6	E.	XXIII.
7	G.	XXIV.	7	C.	XXII.	7	C.	XXIV.	7	F.	XXII.
8	A.	XXIII.	8	D.	XXI.	8	D.	XXIII.	8	G.	XXI.
9	B.	XXII.	9	E.	XX.	9	E.	XXII.	9	A.	XX.
10	C.	XXI.	10	F.	XIX.	10	F.	XXI.	10	B.	XIX.
11	D.	XX.	11	G.	XVIII.	11	G.	XX.	11	C.	XVIII.
12	E.	XIX.	12	A.	XVII.	12	A.	XIX.	12	D.	XVII.
13	F.	XVIII.	13	B.	XVI.	13	B.	XVIII.	13	E.	XVI.
14	G.	XVII.	14	C.	XV.	14	C.	XVII.	14	F.	XV.
15	A.	XVI.	15	D.	XIV.	15	D.	XVI.	15	G.	XIV.
16	B.	XV.	16	E.	XIII.	16	E.	XV.	16	A.	XIII.
17	C.	XIV.	17	F.	XII.	17	F.	XIV.	17	B.	XII.
18	D.	XIII.	18	G.	XI.	18	G.	XIII.	18	C.	XI.
19	E.	XII.	19	A.	X.	19	A.	XII.	19	D.	X.
20	F.	XI.	20	B.	IX.	20	B.	XI.	20	E.	IX.
21	G.	X.	21	C.	VIII.	21	C.	X.	21	F.	VIII.
22	A.	IX.	22	D.	VII.	22	D.	IX.	22	G.	VII.
23	B.	VIII.	23	E.	VI.	23	E.	VIII.	23	A.	VI.
24	C.	VII.	24	F.	V.	24	F.	VII.	24	B.	V.
25	D.	VI.	25	G.	IV.	25	G.	VI.	25	C.	IV.
26	E.	V.	26	A.	III.	26	A.	V.	26	D.	III.
27	F.	IV.	27	B.	II.	27	B.	IV.	27	E.	II.
28	G.	III.	28	C.	I.	28	C.	III.	28	F.	I.
29	A.	II.				29	D.	II.	29	G.	*
30	B.	I.				30	E.	I.	30	A.	XXIX.
31	C.	*				31	F.	*			

par suite la date des fêtes mobiles, pourvu que l'on connaisse, pour cette année, la LETTRE DOMINICALE et l'ÉPACTE (Voy. ces mots). Ce calendrier ne ren-

ferme que trois colonnes ; la première donne la date, la seconde les jours de la semaine au moyen de la lettre dominicale, la troisième les

phases de la lune au moyen de l'épacte. La date des fêtes mobiles se déduit ensuite de ces éléments par les règles indiquées à l'article COMPUT ECCLESIASTIQUE (Voy. ce mot). La première colonne ne donne lieu à aucune observation. La seconde renferme les 7 premières lettres de l'alphabet indéfiniment ré-

MAI			JUIN.			JUILLET.			AOÛT.		
Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Lettres dom.	ÉPACTES.
1	B.	XXVIII.	1	E.	XXVII.	1	G.	XXVI.	1	C.	XXV-XXIV.
2	C.	XXVII.	2	F.	XXVI.	2	A.	XXV.	2	D.	XXIII.
3	D.	XXVI.	3	G.	XXV-XXIV.	3	B.	XXIV.	3	E.	XXII.
4	E.	XXV.	4	A.	XXIII.	4	C.	XXIII.	4	F.	XXI.
5	F.	XXIV.	5	B.	XXII.	5	D.	XXII.	5	G.	XX.
6	G.	XXIII.	6	C.	XXI.	6	E.	XXI.	6	A.	XIX.
7	A.	XXII.	7	D.	XX.	7	F.	XX.	7	B.	XVIII.
8	B.	XXI.	8	E.	XIX.	8	G.	XIX.	8	C.	XVII.
9	C.	XX.	9	F.	XVIII.	9	A.	XVIII.	9	D.	XVI.
10	D.	XIX.	10	G.	XVII.	10	B.	XVII.	10	E.	XV.
11	E.	XVIII.	11	A.	XVI.	11	C.	XVI.	11	F.	XIV.
12	F.	XVII.	12	B.	XV.	12	D.	XV.	12	G.	XIII.
13	G.	XVI.	13	C.	XIV.	13	E.	XIV.	13	A.	XII.
14	A.	XV.	14	D.	XIII.	14	F.	XIII.	14	B.	XI.
15	B.	XIV.	15	E.	XII.	15	G.	XII.	15	C.	X.
16	C.	XIII.	16	F.	XI.	16	A.	XI.	16	D.	IX.
17	D.	XII.	17	G.	X.	17	B.	X.	17	E.	VIII.
18	E.	XI.	18	A.	IX.	18	C.	IX.	18	F.	VII.
19	F.	X.	19	B.	VIII.	19	D.	VIII.	19	G.	VI.
20	G.	IX.	20	C.	VII.	20	E.	VII.	20	A.	V.
21	A.	VIII.	21	D.	VI.	21	F.	VI.	21	B.	IV.
22	B.	VII.	22	E.	V.	22	G.	V.	22	C.	III.
23	C.	VI.	23	F.	IV.	23	A.	IV.	23	D.	II.
24	D.	V.	24	G.	III.	24	B.	III.	24	E.	I.
25	E.	IV.	25	A.	II.	25	C.	II.	25	F.	*
26	F.	III.	26	B.	I.	26	D.	I.	26	G.	XXIX.
27	G.	II.	27	C.	*	27	E.	*	27	A.	XXVIII.
28	A.	I.	28	D.	XXIX.	28	F.	XXIX.	28	B.	XXVII.
29	B.	*	29	E.	XXVIII.	29	G.	XXVIII.	29	C.	XXVI.
30	C.	XXIX.	30	F.	XXVII.	30	A.	XXVII.	30	D.	XXV.
31	D.	XXVIII.				31	B.	XXVI.	31	E.	XXIV.

pétées dans l'ordre A, B, C, D, etc. Dans la troisième colonne sont inscrits, en chiffres romains, les nombres 30, 29, 28 ..., etc., 3, 2, 1, 30, 29, 28, etc., et ainsi de suite. Mais au lieu d'écrire 30, on écrit *xéro*, remplacé par un astérisque *. Il résulte de cette disposition que tous les jours mar-

qués du chiffre qui exprime l'épacte de l'année sont des jours de *nouvelle lune* (ecclésiastique). Si, par exemple, l'épacte est XVIII, tous les jours marqués

du chiffre XVIII seront des jours de *neuve lune*. En effet, dire que l'épacte est XVIII, c'est dire que la lune est âgée de 18 jours au 1^{er} janvier, ou

SEPTEMBRE.			OCTOBRE.			NOVEMBRE.			DÉCEMBRE.		
Dates.	Letres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Letres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Letres dom.	ÉPACTES.	Dates.	Letres dom.	ÉPACTES.
1	F.	XXIII.	1	A.	XXII.	1	D.	XXI.	1	F.	XX.
2	G.	XXII.	2	B.	XXI.	2	E.	XX.	2	G.	XIX.
3	A.	XXI.	3	C.	XX.	3	F.	XIX.	3	A.	XVIII.
4	B.	XX.	4	D.	XIX.	4	G.	XVIII.	4	B.	XVII.
5	C.	XIX.	5	E.	XVIII.	5	A.	XVII.	5	C.	XVI.
6	D.	XVIII.	6	F.	XVII.	6	B.	XVI.	6	D.	XV.
7	E.	XVII.	7	G.	XVI.	7	C.	XV.	7	E.	XIV.
8	F.	XVI.	8	A.	XV.	8	D.	XIV.	8	F.	XIII.
9	G.	XV.	9	B.	XIV.	9	E.	XIII.	9	G.	XII.
10	A.	XIV.	10	C.	XIII.	10	F.	XII.	10	A.	XI.
11	B.	XIII.	11	D.	XII.	11	G.	XI.	11	B.	X.
12	C.	XII.	12	E.	XI.	12	A.	X.	12	C.	IX.
13	D.	XI.	13	F.	X.	13	B.	IX.	13	D.	VIII.
14	E.	X.	14	G.	IX.	14	C.	VIII.	14	E.	VII.
15	F.	IX.	15	A.	VIII.	15	D.	VII.	15	F.	VI.
16	G.	VIII.	16	B.	VII.	16	E.	VI.	16	G.	V.
17	A.	VII.	17	C.	VI.	17	F.	V.	17	A.	IV.
18	B.	VI.	18	D.	V.	18	G.	IV.	18	B.	III.
19	C.	V.	19	E.	IV.	19	A.	III.	19	C.	II.
20	D.	IV.	20	F.	III.	20	B.	II.	20	D.	I.
21	E.	III.	21	G.	II.	21	C.	I.	21	E.	*
22	F.	II.	22	A.	I.	22	D.	*	22	F.	XXIX.
23	G.	I.	23	B.	*	23	E.	XXIX.	23	G.	XXVIII.
24	A.	*	24	C.	XXIX.	24	F.	XXVIII.	24	A.	XXVII.
25	B.	XXIX.	25	D.	XXVIII.	25	G.	XXVII.	25	B.	XXVI.
26	C.	XXVIII.	26	E.	XXVII.	26	A.	XXVI.	26	C.	XXV.
27	D.	XXVII.	27	F.	XXVI.	27	B.	XXV-XXIV.	27	D.	XXIV.
28	E.	XXVI.	28	G.	XXV.	28	C.	XXIII.	28	E.	XXIII.
29	F.	XXV-XXIV.	29	A.	XXIV.	29	D.	XXII.	29	F.	XXII.
30	G.	XXIII.	30	B.	XXIII.	30	E.	XXI.	30	G.	XXI.
			32	C.	XXII.				31	A.	XX.

que depuis la dernière lune il s'est écoulé 18 jours. Pour atteindre la nouvelle lune suivante, il faut donc avancer de 30 moins 18, ou de 12 jours. Or si l'on compte 12 en *décomptant*, à partir du chiffre XXIX, on tombera sur un jour marqué du chiffre XVIII; car on dira 1 pour le jour mar-

qué XXIX, puis 2 pour le jour marqué XXVIII, et ainsi de suite, en sorte que le nombre énoncé en comptant sera toujours l'excès de 30 sur le chiffre romain auquel on est arrivé; quand on comptera 12, on sera donc arrivé au chiffre romain répondant à 30—12, c'est-à-dire au chiffre XVIII, qui est précisément celui de l'épacte. Tous les jours marqués du même chiffre XVIII seront des jours de nouvelle lune; ces phases se retrouveraient à 30 jours d'intervalle, si, en raison de ce que la lunaison n'est que de 29 $\frac{1}{2}$, on n'avait eu soin de réduire l'intervalle à 29 jours, de 2 mois en 2 mois, en inscrivant les chiffres XXV et XXIV en regard de la même date. Les mois dans lesquels on cumule ainsi deux chiffres romains sur la même date se nomment mois *caves*, par opposition aux autres qui sont des mois *pleins*.

Pour avoir les dates des pleines lunes, il faut ajouter 13 aux dates des nouvelles lunes, qui ne sont pas les nouvelles lunes astronomiques, mais les nouvelles lunes ecclésiastiques, en retard de 2 jours sur les premières (Voy. ÉPACTES).

CAMES, saillies curvilignes établies à la circonférence d'un arbre tournant pour transformer le mouvement circulaire continu en un mouvement intermittent, soit rectiligne, soit circulaire.

Dans le premier cas, qui est celui des cames destinées à soulever les **PILONS** (Voy. ce mot), la came agit ordinairement sur une barre horizontale, fixée à la tige du pilon, et qu'on appelle le *mentonnet*; la figure 1 montre cette disposition. Si l'on voulait que le pilon fût soulevé uniformément, il faudrait que la courbe *ab* de la came fût tracée d'après les mêmes principes que dans le cas d'une roue dentée engrenant avec une crémaillère (Voy. CRÉMAILLÈRE, ENGRÈNAGES); c'est-à-dire que cette courbe devrait être une développante de cercle. Mais la condition dont il s'agit n'étant pas en général nécessaire, la courbe de la came peut être une courbe convexe quelconque, que l'on tracera de la manière suivante. Soit *mn* (fig. 2) la position du mentonnet où il doit être saisi par la came, et *m'n'* sa position la plus élevée. Supposons, ce qui a lieu ordinairement, que le centre *O* du cercle qui figure l'arbre tournant soit sur le prolongement de *mn*. La courbe de la came devra être tangente au rayon *OA*.

Soit *n* le nombre des cames, également espacées, montées sur l'arbre tournant; et soit *h* la *levée* *nn'*. Le

temps employé par le pilon à retomber de la hauteur *h* sera $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES); au moment où la came quittera le mentonnet, le rayon *OA* devra donc avoir parcouru un angle exprimé par

$$\frac{2\pi}{n} - \omega \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

en appelant ω la vitesse angulaire de l'arbre à cames, et même un angle un peu moindre, afin que le pilon ait produit son effet avant d'être saisi par la came suivante. Soit *OA'* sa position à cet instant; on tracera une courbe convexe tangente en *m'* à la droite *m'n'* et tangente en *A'* au rayon *OA'*: cette courbe sera celle de la came. On limitera la came de l'autre côté par une ligne *m'B'*, droite ou courbe, choisie de manière que la came puisse résister à l'effort exercé par le poids du pilon.

La disposition qu'on vient de décrire offre l'inconvénient d'occasionner un frottement assez considérable de la tige du pilon contre les prisons (Voy. GUIDES [Frottement des]). Pour l'éviter, on pratique dans la tige du pilon une ouverture dans laquelle passe la came; celle-ci agit alors sur la paroi supérieure de l'ouverture, ou mieux sur un rouleau disposé à cet effet, comme le montre la figure 3. Si l'on ne veut pas affaiblir la tige, on peut encore la faire passer entre deux cames jumelles qui agissent sur les extrémités d'une même barre transversale traversant la tige parallèlement à l'axe de la rotation.

Le second cas, où le mouvement intermittent à produire est un mouvement circulaire, est celui des cames destinées à soulever les **MARTEAUX** (Voy. ce mot). S'il était nécessaire que le marteau fût soulevé uniformément, la courbe de la came devrait être déterminée comme dans le cas d'un engrenage à flanc, c'est-à-dire que cette courbe devrait être une épicycloïde; mais cette condition n'est pas ordinairement nécessaire, et la courbe peut être tracée par un procédé analogue à celui que nous avons indiqué pour le cas du pilon. On peut, sans inconvénient, calculer dans ce cas la durée de la chute du marteau en ne tenant compte que du marteau proprement dit, c'est-à-dire de sa tête.

On désigne quelquefois sous le nom de *cames* les excentriques autres que l'excentrique circulaire (Voy. EXCENTRIQUES). Voy. aussi l'art. ONDES (Came à).

CAMP RETRANCHÉ, étendue de terrain environnée de lignes continues ou d'intervalles (Voy. LIGNES) et pouvant servir momentanément de retraite à une armée.

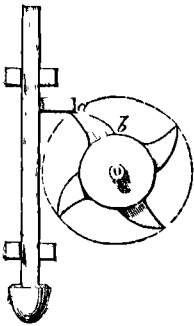


Fig. 1.

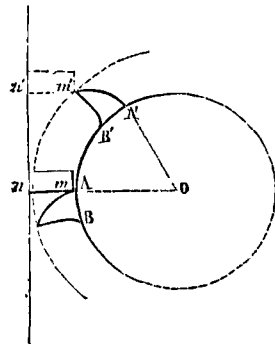


Fig. 2.

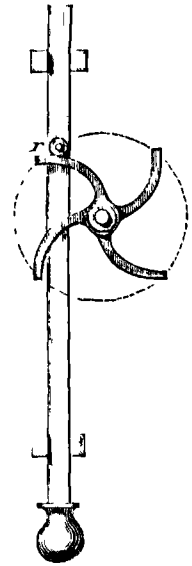


Fig. 3.

CAMPANE, forme qu'affecte le corps du chapiteau corinthien ou du chapiteau composite, quand il est dégariné de ses feuilles d'acanthé et de ses volutes. Cette forme est, en effet, celle d'une cloche dont l'ouverture serait en haut. Le bord supérieur de cette espèce de cloche, formant saillie à l'extérieur, est ce qu'on appelle la *lèvre* de la campana. On donne aussi à la campana le nom de *case*.

CANAL DE FUITE, canal découvert, ordinairement rectangulaire, que l'on place en avant de l'orifice d'une vanne pour recevoir la veine liquide. On ne lui donne en général que la pente strictement nécessaire pour conserver au liquide la vitesse qu'il possédait en sortant de l'orifice.

On applique aussi le nom de *canal de fuite* à un canal placé à l'aval d'une roue hydraulique, et servant à l'écoulement de l'eau qui vient d'agir sur la roue. (*Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES, CANAUX DÉCOUVERTS, ROUES HYDRAULIQUES.*)

CANAUX, voies artificielles de navigation intérieure. On en distingue deux espèces. Lorsqu'une rivière ne se prête qu'imparfaitement à la navigation, et que les travaux nécessaires pour régulariser son cours seraient trop difficiles ou trop dispendieux, on préfère ordinairement creuser à côté de cette voie naturelle une voie artificielle que l'on nomme un *canal latéral*. Sa pente est dans le même sens que celle du cours d'eau naturel, et il lui emprunte les eaux nécessaires à son alimentation. — Lorsqu'on veut établir une communication entre deux rivières, séparées par une chaîne de montagnes ou de collines plus ou moins élevées, il faut que la voie artificielle, partant de l'une de ces rivières, s'élève jusqu'au point le plus bas du faite à franchir, et qu'elle redescende sur l'autre versant pour aller rejoindre la seconde rivière. Cette voie artificielle à double pente est ce qu'on appelle un *canal à point de partage*; il ne peut être alimenté que par les eaux réunies au point où il franchit le faite, dans un réservoir auquel on donne le nom de *bassin de partage*.

I. Le tracé et l'alimentation d'un canal latéral n'offrent pas en général de grandes difficultés; il suit les mêmes vallées que le cours d'eau principal, et lui emprunte généralement les eaux dont il a besoin; elles sont ordinairement amenées par un aqueduc de prise d'eau qui passe sous la digue du cours d'eau principal. Le canal franchit chacun des affluents de ce cours d'eau sur un pont auquel on donne le nom de *pont-canal*. Comme la pente est généralement faible, les écluses peuvent être peu nombreuses et établies à d'assez grandes distances les unes des autres. La largeur d'un canal est toujours un peu plus du double de celle des bateaux qui doivent le fréquenter; elle excède rarement 10 à 12 mètres. La profondeur dépend du tirant d'eau des bateaux; elle varie de 1^m,50 à 2 mètres. Les talus ont ordinairement 1/2 de base pour 1 de hauteur. On établit souvent, à la hauteur du niveau de l'eau, une petite berme de 0^m, 25 à 0^m, 50 de large, sur laquelle on plante des glayeurs pour empêcher les dégradations causées par le clapotement de l'eau. On peut remplacer ce moyen par un revêtement en planches ou en maçonnerie. Les digues sur lesquelles sont établis les chemins de halage ont de 3 à 6 mètres de large, suivant la cohésion des terres; et elles s'élèvent de 0^m,50 à 1 mètre au-dessus des

eaux, selon que le niveau de celles-ci est constant ou variable.

II. Le tracé d'un canal à point de partage présente au contraire de grandes difficultés et exige toute l'attention de l'ingénieur, à cause des conditions multiples auxquelles il doit satisfaire. Indépendamment de celles qui se rapportent au choix des points à desservir, aux travaux d'art que le tracé exigera et aux dépenses qui en résulteront, conditions qui sont de même ordre que dans le cas où il s'agit du tracé d'une route, il y a à remplir une condition spéciale, qui est celle de l'alimentation, laquelle dépend du point qui sera choisi pour franchir le faite des montagnes. Plus ce point est bas, et plus il devient facile d'y réunir les eaux en quantité suffisante; mais plus en même temps on allonge en général le parcours du canal, et par conséquent on accroît les dépenses. Ce n'est donc que par une étude attentive que l'ingénieur peut se décider.

III. Le volume d'eau à fournir journallement au canal résulte de plusieurs causes.

En premier lieu, chaque fois qu'un bateau franchit une écluse, il dépense un volume d'eau exprimé par $Ah + Q$ en montant, et par $Ah - Q$ en descendant, A représentant la section horizontale du sas, h la différence des niveaux en amont et en aval de l'écluse, et Q le volume déplacé par le bateau. (*Voy. ÉCLUSES A SAS.*)

Dans le cas le plus favorable, où un bateau descend aussitôt après qu'un autre bateau est monté, le volume d'eau dépensé au passage de chaque écluse est $2Ah$. Il faut multiplier ce nombre par la moitié du nombre des bateaux qui fréquentent habituellement le canal et par le nombre moyen des écluses qu'ils peuvent franchir en 24 heures. — On peut remarquer que si les bateaux montaient à vide pour prendre charge au point culminant et redescendre chargés, la dépense d'eau serait très-différente. Soit, en effet, q le volume d'eau que déplace le bateau montant à vide; la dépense d'eau à la montée sera $Ah + q$, et à la descente $Ah - Q$; la dépense totale pour le passage du bateau par une même écluse sera donc $2Ah - (Q - q)$. Le terme $Q - q$ représente le volume d'eau dont le poids serait égal à la charge du bateau; si ce volume approchait de $2Ah$, la dépense d'eau pourrait être très-faible; mais cela n'arrive pas en général. — Il y a une autre circonstance digne d'attention, c'est celle des écluses accolées. Dans le cas d'une pente considérable on a quelquefois, surtout dans les canaux anciens, placé plusieurs écluses immédiatement à la suite les unes des autres, et disposées en étages. Cette disposition n'altère pas la dépense d'eau à la descente; car s'il faut une écluse pour faire entrer le bateau dans le sas supérieur, cette même écluse versée dans le sas suivant y fait descendre le bateau sans nouvelle dépense; cette même écluse versée dans le troisième sas y fait de même descendre le bateau, et ainsi de suite. La dépense d'eau est donc la même que s'il n'y avait qu'un seul sas. Il en serait de même à la montée si tous les sas étaient remplis à l'avance, à l'exception du plus bas; car le bateau une fois entré dans ce sas inférieur, en y versant l'eau du second on y ferait monter le bateau; puis, en versant dans le second l'eau du troisième, le bateau monterait dans ce tri-

sième, et ainsi de suite. En sorte que la dépense se réduirait au remplissage du sas supérieur. Mais il n'en est pas ainsi : lorsqu'un bateau vient de descendre, tous les sas sont vides, et s'il se présente un bateau pour monter, il faut d'abord les remplir tous, à l'exception du plus bas. Si le nombre des sas étagés est n , la dépense d'eau pour la montée est donc d'abord $(n-1)Ah$, à quoi il faut ajouter $Ah + Q$; en tout par conséquent $nAh + Q$; tandis qu'à la descente la dépense n'est que de $Ah - Q$. La montée et la descente réunies occasionnent ainsi une dépense totale exprimée par $(n+1)Ah$.

Mais il faut bien remarquer que si les n sas eussent été séparés, la dépense totale pour le passage d'un bateau, en y comprenant la montée et la descente, eût été de n fois $2Ah$, ou de $2nAh$, quantité supérieure à $(n+1)Ah$. Si l'on a renoncé à construire des sas accolés, ce n'est donc pas pour économiser l'eau, comme on l'a dit, mais bien pour éviter les pertes de temps auxquelles ce système donne lieu.

IV. Les autres causes de dépense d'eau sont l'évaporation, les filtrations, les pertes par les écluses, et le remplissage du canal après la mise à sec pour les réparations annuelles.

L'évaporation est évaluée à une hauteur $0^m,004$ par jour dans les temps de sécheresse. Il faut multiplier cette hauteur par la surface des biefs immédiatement alimentés par le bassin de partage. Quant aux autres biefs, comme ils vont en s'abaissant, la facilité d'y amener l'eau augmente.

Les infiltrations varient avec la nature du sol. On évalue la perte due à cette cause au double de celle que produit l'évaporation.

En somme, les pertes dues à l'évaporation et aux filtrations varient de 350 à 500 mètres cubes par jour et par kilomètre suivant la nature du terrain.

Les pertes par les écluses varient avec leur bonne ou mauvaise exécution, et avec leur état d'entretien. Cette perte atteint rarement 600 ou 800 mètres cubes en 24 heures.

La perte par le remplissage, après la mise à sec, pourrait se calculer aisément s'il n'y avait pas d'infiltrations, puisqu'il est facile de calculer le volume d'eau contenu dans le canal; mais en général il faut augmenter beaucoup la quantité d'eau ainsi calculée.

V. Le premier canal à point de partage qui ait été construit est le canal de Briare, qui unit la Loire à la Seine. Commencé sous le règne de Henri IV, puis abandonné, il ne fut repris qu'en 1638, sous Louis XIII. Plusieurs écluses à portes busquées construites à cette époque existent encore. Ce canal est alimenté par 18 étangs présentant une superficie de 480 hectares et pouvant fournir 22 millions de mètres cubes d'eau, et par une prise d'eau dans le Loing. La branche qui va à la Loire présente un développement de 14 514 mètres, et une pente totale de $38^m,25$, répartie entre 12 écluses. La branche qui va à la Seine a une longueur de 34 670 mètres, avec une pente totale de $78^m,77$, répartie entre 28 écluses. Le bassin de partage a 5966 mètres de long.

Parmi les autres canaux construits en France, il faut citer le canal du Midi, qui joint la Garonne à la Méditerranée; le canal des Ardennes, qui unit l'Aisne et la Meuse; le canal du Berry, qui, pre-

nant son origine sur le Cher à Montluçon, se divise en deux branches, dont l'une va gagner la Loire entre Nevers et la Charité, et l'autre rejoint le Cher à Saint-Aignan; le canal du Centre, qui unit la Saône à la Loire; le canal de Bourgogne, qui joint la Saône à la Seine; le canal de la Sambre à l'Oise, etc., etc.

(Voy. le Cours de Navigation intérieure de M. Minard, et le cours professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Mary)

CANAUX DÉCOUVERTS (MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES). On suppose que le mouvement soit arrivé à l'état permanent (Voy. MOUVEMENT PERMANENT); mais il peut être uniforme ou varié.

I. Les divers filets fluides parallèles à la direction générale du mouvement ne sont pas animés des mêmes vitesses; ceux qui sont en contact avec la paroi éprouvent de sa part une résistance qui tend à les ralentir; ils retardent à leur tour les filets voisins, et ainsi de suite; en sorte que le maximum de vitesse a lieu près de la surface et vers le milieu du courant, tandis qu'elle va en diminuant depuis ce point jusqu'à la paroi. Dans les questions usuelles, on n'a point égard à ces différences de vitesse, et l'on ne considère que la vitesse moyenne, c'est-à-dire celle qui, multipliée par la section transversale, donnerait la dépense effective, ou le volume de liquide écoulé par cette section dans l'unité de temps. Cette vitesse moyenne U est liée, d'après Dubuat, à la vitesse maximum, par la relation

$$\frac{U}{V} = \frac{V + 2,37}{V + 3,15} \quad [1]$$

Dans les cas les plus ordinaires, on peut prendre $U = 0,80 V$. Mais dans les cours d'eau d'une grande profondeur le coefficient 0,80 s'abaisse à 0,75 et même à 0,62; et lorsque le fond est tapissé de joncs, ce coefficient descend à 0,60 et au-dessous. D'après les expériences faites en petit par Dubuat, on aurait, en nommant W la vitesse au fond ou près de la paroi,

$$U = \frac{1}{2}(V + W), \quad [2]$$

relation qui, lorsqu'on suppose

$$U = 0,80 V,$$

donne

$$W = 0,60 V,$$

et par suite

$$U = 1,33 W.$$

Dans les canaux, il ne faut pas que la vitesse de fond dépasse une certaine limite, au-dessus de laquelle le fond serait dégradé par les eaux. L'expérience a donné à cet égard les indications suivantes :

Tableau des valeurs de W et de U au-delà desquelles le fond des canaux commence à être entraîné.

NATURE DU TERRAIN.	W	U
Terres détrempées, brunes.....	0,076	0,101
Argiles tendres.....	0,132	0,203
Sables.....	0,305	0,407
Graviers.....	0,609	0,812
Cailoux.....	0,614	0,819
Pierres cassées, pilées.....	1,220	1,630
Poudingues, schistes tendres...	1,520	2,026
Roches stratifiées.....	1,830	2,440
Roches dures.....	3,050	4,066

Ces nombres, en le comprend, ne sauraient être regardés comme absolus; d'ailleurs la formule [2] donnée par Dubuat ne peut être considérée elle-même comme rigoureuse, et diverses considérations théoriques conduisent à penser qu'elle est inexacte, et que, dans les cours d'eau d'une grande largeur par rapport à la profondeur, elle devrait être remplacée par la relation

$$U = \frac{1}{3} \cdot (2V + W). \quad [3]$$

On peut remarquer, en effet, que W étant nécessairement compris entre 0 et V, le rapport $\frac{U}{V}$ serait,

d'après cette relation, compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, valeurs dont la moyenne est 0,833..., laquelle s'accorde avec les résultats moyens des observations. (Voy. nos *Recherches sur le mouvement uniforme des eaux, etc., en ayant égard aux différences de vitesse des filets*, mémoire approuvé par l'Académie des sciences.)

On peut encore faire une autre remarque qui vient à l'appui de la première et contribue à justifier l'adoption de la formule [3] au lieu de la formule [2]. M. Defontaine a fait, sur un bras du Rhin, une série d'expériences d'après lesquelles la loi de décroissement de la vitesse, dans une même verticale, au milieu du fleuve, peut être représentée par la relation

$$v = 1^m,266 - 0,25247 \cdot y^2,$$

v représentant la vitesse à la profondeur y. Cette relation donne, pour la vitesse de fond, c'est-à-dire pour $y = 1^m,50$, la valeur $W = 0^m,698$. Or cette valeur est peu supérieure à la moitié de la vitesse $1^m,266$ à la surface; substituée dans la formule [3], elle donne

$$\frac{U}{V} = 0,85,$$

valeur peu supérieure à celle que donnerait la relation [1].

II. MOUVEMENT UNIFORME. Lorsque le cours d'eau est rectiligne, que la section transversale du lit est constante, et que la pente a une valeur convenable, le mouvement de l'eau peut être uniforme; c'est ce qui arrive ordinairement pour les canaux, et fréquemment pour les rivières, au moins dans quelques parties de leur cours. La relation entre la vitesse moyenne, la pente, la section et le périmètre mouillé, se déduit alors sans difficulté du théorème de la QUANTITÉ DE MOUVEMENT (Voy. ce mot).

Considérons une portion du courant comprise entre deux sections transversales quelconques AB et

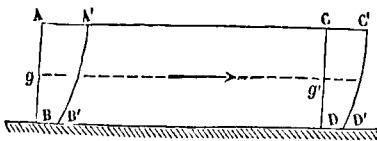


Fig. 1.

CD (fig. 1). Soient g et g' les centres de gravité de ces sections, π la différence de niveau de ces deux points, L la distance des deux sections considérées, \mathcal{P} la pression moyenne par mètre dans la section

AB, \mathcal{P}' la pression dans la section CD. Désignons par Π le poids du mètre cube d'eau. Le mouvement étant supposé uniforme, les filets se meuvent parallèlement au lit, avec une vitesse constante pour chacun d'eux; la section transversale du fluide est partout la même; nous la désignerons par Ω , et nous appellerons χ le périmètre mouillé, c'est-à-dire la section transversale de la partie du lit occupée par le fluide. Concevons que dans un temps très-court θ la masse fluide considérée se soit déplacée d'une petite quantité; que les molécules qui étaient dans la section AB soient venues se placer sur une certaine surface courbe A'B', et celles qui étaient dans la section CD sur une surface courbe C'D'. Chaque filet étant animé d'un mouvement uniforme, il n'y a pas de variation de quantité de mouvement; il en résulte que si l'on projette sur la direction du courant toutes les forces auxquelles la masse fluide est soumise, la somme algébrique de ces projections devra être égale à zéro. La pression exercée sur AB est une force normale à cette section exprimée par $\mathcal{P}\Omega$; la pression exercée sur CD a de même pour expression $\mathcal{P}'\Omega$; mais $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, car, le mouvement étant uniforme, les pressions peuvent être évaluées d'après les règles de l'hydrostatique; par conséquent les pressions sont les mêmes dans les sections AB et CD, puisque la pression atmosphérique peut être regardée comme la même en A et en C. Les deux projections qu'on vient d'évaluer disparaissent donc d'elles-mêmes en faisant la somme. Le poids du fluide ABCD a pour expression $\Pi\Omega L$; cette force verticale fait avec la direction du courant un

angle dont le cosinus a pour valeur $\frac{\pi}{L}$; la projection de cette force est donc

$$\Pi\Omega L \cdot \frac{\pi}{L} \text{ ou } \Pi\Omega\pi.$$

Les réactions normales de la paroi ne donnent point de projections; les actions mutuelles des filets les uns sur les autres disparaissent comme étant deux à deux égales et opposées. Il reste donc à évaluer la résistance longitudinale du lit. L'expérience a montré que cette résistance est proportionnelle d'une part à l'aire de la paroi mouillée, c'est-à-dire à χL , et de l'autre à une fonction de la vitesse moyenne, que nous représenterons par $\varphi(U)$; la résistance dont il s'agit sera donc représentée en valeur absolue par $\chi L\varphi(U)$; en ayant égard à son sens on aura donc

$$\Pi\Omega\pi - \chi L\varphi(U) = 0,$$

d'où

$$\frac{\Omega}{\chi} \cdot \frac{\pi}{L} = \frac{1}{\Pi} \varphi(U)$$

Le rapport $\frac{\Omega}{\chi}$ de la section au périmètre mouillé a reçu le nom de *rayon moyen*, et on le désigne habituellement par R. Le rapport $\frac{\pi}{L}$ entre la différence de niveau des centres de gravité des deux sections extrêmes et la distance de ces sections, est ce qu'on nomme la *pente par mètre*; on la désigne par la lettre I, initiale du mot *inclinaison*. Le nombre Π est sensiblement égal à 1000. La relation ci-dessus peut donc s'écrire

$$RI = 0,001 \cdot \varphi(U). \quad [4]$$

III. M. de Prony a adopté pour la fonction $0,001 \cdot \varphi(U)$ la forme

$$aU + bU^2,$$

et pour satisfaire aux expériences de Dubuat, au nombre de 31, qu'il avait à sa disposition, il a donné aux coefficients a et b les valeurs

$$a = 0,000044 \text{ et } b = 0,000309.$$

Plus tard, Eytelwein, ajoutant aux expériences de Dubuat celles de Brünings, de Woltmann et de Funck, a déduit de 91 expériences les valeurs

$$a = 0,000024 \text{ et } b = 0,000366,$$

qui sont généralement adoptées.

M. de Saint-Venant a proposé pour la fonction $0,001 \cdot \varphi(U)$ une autre forme; et il pose (*Annales des Mines*, 4^e série, t. XX)

$$RI = 0,000401 \cdot U^{2\frac{1}{11}}. \quad [5]$$

Nous donnons ci-dessous une table qui, pour des valeurs de U croissant de 5 en 5 centimètres, depuis 0^m,05 jusqu'à 3 mètres, donne les valeurs correspondantes de la fonction $aU + bU^2$ calculées avec les coefficients d'Eytelwein, et celles

de la fonction $0,000401 \cdot U^{2\frac{1}{11}}$. Afin de rendre l'interpolation plus facile, nous avons inscrit dans la table les différences premières, qui expriment des unités du 7^e ordre.

U	$aU + bU^2$	Diff.	$0,000401 \cdot U^{2\frac{1}{11}}$	Diff.
0,05	0,0000021	39	0,0000013	36
0,10	0,0000061	58	0,0000049	58
0,15	0,0000118	76	0,0000107	79
0,20	0,0000194	94	0,0000186	90
0,25	0,0000289	113	0,0000284	119
0,30	0,0000401	131	0,0000403	138
0,35	0,0000532	149	0,0000541	156
0,40	0,0000682	168	0,0000697	176
0,45	0,0000849	186	0,0000873	195
0,50	0,0001035	204	0,0001068	213
0,55	0,0001239	222	0,0001281	231
0,60	0,0001462	241	0,0001512	250
0,65	0,0001701	259	0,0001762	278
0,70	0,0001960	277	0,0002030	286
0,75	0,0002239	296	0,0002316	303
0,80	0,0002534	314	0,0002616	322
0,85	0,0002848	332	0,0002941	339
0,90	0,0003181	351	0,0003280	356
0,95	0,0003531	369	0,0003636	374
1,00	0,0003900	387	0,0004010	392
1,05	0,004287	405	0,0004402	408
1,10	0,0004693	424	0,0004810	427
1,15	0,0005116	442	0,0005237	443
1,20	0,0005558	460	0,0005680	460
1,25	0,0006019	479	0,0006140	478
1,30	0,0006497	497	0,0006618	494
1,35	0,0006994	515	0,0007112	511
1,40	0,0007510	534	0,0007623	528
1,45	0,0008043	552	0,0008151	546
1,50	0,0008595	570	0,0008697	561
1,55	0,0009165	588	0,0009258	579
1,60	0,0009754	607	0,0009837	595
1,65	0,0010360	625	0,0010432	612
1,70	0,0010985	643	0,0011044	628
1,75	0,0011629	662	0,0011672	645
1,80	0,0012290	680	0,0012317	651
1,85	0,0012970	698	0,0012978	678
1,90	0,0013669	717	0,0013656	694
1,95	0,0014385	735	0,0014350	712
2,00	0,0015120	753	0,0015062	726
2,05	0,0015873	771	0,0015788	744
2,10	0,0016645	790	0,0016532	759
2,15	0,0017434	808	0,0017291	776
2,20	0,0018212	823	0,0018067	792
2,25	0,0019069	845	0,0018859	808
2,30	0,0019913	863	0,0019667	825
2,35	0,0020776	881	0,0020492	840

U	$aU + bU^2$	Diff.	$0,000401 \cdot U^{2\frac{1}{11}}$	Diff.
2,40	0,0021658	900	0,002132	857
2,45	0,0022557	918	0,0022189	872
2,50	0,0023475	936	0,0023061	888
2,55	0,0024411	954	0,0023949	904
2,60	0,0025366	973	0,0024853	921
2,65	0,0026338	991	0,0025774	936
2,70	0,0027329	1009	0,0026710	953
2,75	0,0028339	1028	0,0027663	968
2,80	0,0029366	1046	0,0028631	974
2,85	0,0030412	1064	0,0029615	1000
2,90	0,0031477	1083	0,0030615	1016
2,95	0,0032559	1101	0,0031631	1030
3,00	0,0033660	1119	0,0032661	1042

On voit, d'après ce tableau, que les deux fonctions présentent un accord assez satisfaisant, mais que la fonction adoptée par M. de Saint-Venant donne en général des valeurs plus petites.

On a proposé d'autres expressions pour représenter la valeur de RI. Des ingénieurs italiens ont proposé, par exemple, l'expression très-simple

$$0,001 U^2,$$

qui ne diffère guère de celle adoptée par M. de Saint-Venant qu'en ce que l'exposant $\frac{21}{11}$ y est remplacé par l'exposant 2. Cette expression peut être adoptée quand on n'a besoin que d'une approximation, et qu'il s'agit d'une opération rapide. Dans les circonstances ordinaires, il vaut mieux recourir à la table ci-dessus.

IV. On peut, à l'aide de cette table, résoudre les divers problèmes auxquels peut donner lieu l'hypothèse du mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.

1. Étant données la pente du canal et sa section, on peut avoir à déterminer la dépense. Connaissant la section, et par conséquent aussi le périmètre mouillé, on en déduit le rayon moyen; dans l'équation [4], le premier membre est donc connu. La table donnera la vitesse moyenne U , et en la multipliant par la section, on aura la dépense. Soit, par exemple, $I = 0,0008$; $\Omega = 6^m$, $X = 3^m,60$; on en déduira d'abord $R = \frac{6}{3,60} = 1,6667\dots$, d'où

$RI = 1,6667 \cdot 0,0008$ ou $RI = 0,0013333$. La table donne par interpolation, en adoptant la fonction $aU + bU^2$, $U = 1^m,876$; on a donc $Q = 6^m \cdot 1^m,876 = 11^m,256$.

2. Étant données la section et la dépense, on peut avoir à déterminer la pente. Connaissant la section, on en déduit le rayon moyen; connaissant la section et la dépense, en divisant la dépense par la section on obtient la vitesse moyenne U . La table donne la valeur de $aU + bU^2$ ou de RI ; en divisant par R , on obtient la pente I demandée. Soit proposé, par exemple, de disposer un canal de 10^m de section, et 7^m de périmètre mouillé, qui débite un volume de 5^m par seconde. On aura $R = \frac{10^m}{7}$;

et $U = \frac{5}{10} = 0^m,50$. La table donne $aU + bU^2 = 0,0001035$. Divisant par $\frac{10}{7}$, ou, ce qui revient au même, multipliant par $0,7$, on obtient pour la pente demandée $I = 0,0001035 \cdot 0,7 = 0,0007255$.

3. Connaissant la pente et la dépense, on peut avoir à déterminer la section. Dans ce cas, la section transversale du lit étant connue, le problème consiste à trouver la *ligne d'eau*, c'est-à-dire l'intersection de cette section transversale indéfinie avec le plan que forme le niveau supérieur du liquide. En général, ce problème se résout par tâtonnements. On fait une hypothèse sur la position de la ligne d'eau; la section et la pente étant alors connues, on en déduit la dépense; c'est le premier problème résolu ci-dessus. Si la dépense ainsi obtenue était précisément la dépense donnée, la ligne d'eau choisie serait la solution de la question. Mais cela n'arrive pas, en général. Si l'on a obtenu une dépense trop grande, il faudra abaisser un peu la ligne d'eau; il faudra l'élever, au contraire, si l'on a obtenu une dépense trop faible. Après quelques tâtonnements, on obtiendra la position de la ligne d'eau qui répond à la dépense donnée. Supposons, par exemple, que la pente soit de 0,0005, la dépense de 12^m cub, et que la section du lit ait un fond horizontal de 4^m, et des parois inclinées à 45°. Soit AB (fig. 2) la ligne d'eau, que nous supposons

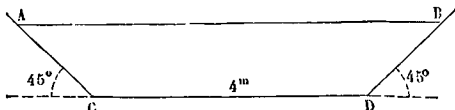


Fig. 2.

d'abord à 2^m au-dessus du fond. D'après la forme du trapèze ABCD, on aura AB = CD + 2^m × 2 = 8^m. L'aire du trapèze sera donc 2^m × $\frac{8^m + 4^m}{2}$ = 12^m q. Le périmètre mouillé a pour valeur 4^m + 2^m.√2.2 = 9^m,656. On a donc R = $\frac{12}{9,656}$ = 1,2427; et par suite RI = 1,2427 × 0,0005 = 0,00062135. La table donne pour cette valeur de aU + bU², U = 1^m 27. Par conséquent, il en résulte Q = 12^m q × 1,27 = 15^m c, 24, nombre supérieur à la dépense donnée. Il faut donc abaisser la ligne d'eau. — Supposons-la à 1^m,80 au-dessus du fond, nous aurons

$$\Omega = 1,80. \frac{4 + 1,8 \times 2 + 4}{2} = 10^m \text{ q}, 44;$$

$$\chi = 4 + 2.1,8\sqrt{2} = 9^m,0904,$$

d'où $R = \frac{10,44}{9,0904} = 1,1483;$

et RI = 1,1483 × 0,0005 = 0,00057415.

La table donne alors U = 1^m,22; et par suite on a Q = 10^m q, 44 × 1^m,22 = 12^m c, 7368, valeur un peu trop grande encore. — Par une suite de tâtonnements analogues, on trouvera par la hauteur de la ligne d'eau au-dessus du fond ... 1^m,743, ce qui répond à Ω = 10^m q, 01, χ = 8^m,929 et U = 1^m,2072.

C'est encore par cette méthode de tâtonnements qu'il faut résoudre le problème dans le cas d'une section rectangulaire; la section, le périmètre mouillé et la vitesse moyenne pourront alors, à la vérité, s'exprimer facilement en fonction de la hauteur h de la ligne d'eau au-dessus du fond; mais l'équation en h est du 3^e degré, et l'on ne peut éviter les tâtonnements.

V. L'emploi du principe des quantités de mouvement fait disparaître du calcul les actions mutuelles des filets. Si l'on veut y avoir égard, il faut appli-

quer à la masse fluide que l'on considère le théorème de l'EFFET DU TRAVAIL (*Voy.* ce mot). Le mouvement étant uniforme, l'accroissement de puissance vive est nul. Les travaux des pressions d'amont et d'aval sont égaux et de signe contraire. Il faut donc que le travail de la résistance du lit et des actions mutuelles des filets soit égal et opposé au travail de la pesanteur. Or, celui-ci a pour expression dans le temps θ :

$$\Pi Q U \theta . z.$$

D'ailleurs, d'après l'équation fournie par la considération des quantités de mouvement, on a

$$\Pi \Omega x = \chi L \varphi (U).$$

Le travail des actions mutuelles et de la résistance du lit est donc exprimé par

$$- \chi L \varphi (U) . U \theta.$$

Le travail de la résistance du lit, considéré isolément, serait

$$- \chi L \varphi (U) W \theta;$$

par conséquent le travail des actions mutuelles des filets a pour valeur

$$- \chi L \varphi (U) . (U - W) . \theta.$$

VI. Tout ce qui précède suppose que le profil transversal du lit ne présente pas de sinuosités trop marquées. Si le fond se rapprochait brusquement de la ligne d'eau en quelque point, comme on le voit en B (fig. 3), on ne pourrait plus appliquer les

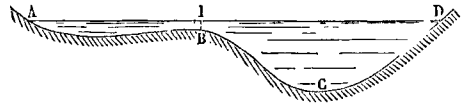


Fig. 3.

formules précédentes, fondées sur l'observation de courants à lit régulier. On imagine alors en B une cloison fictive BI, et l'on regarde le courant total comme décomposé en deux courants partiels ABI et IBCD. En appliquant la formule [4] à chacun de ces courants, et faisant la somme des dépenses obtenues, on aurait la dépense totale beaucoup plus exactement qu'en appliquant cette même formule au courant tout entier. Le cas que nous considérons se présente dans les cas d'inondation où un courant sort de son lit habituel pour envahir une partie des rives. Mais c'est un cas exceptionnel.

VII. MOUVEMENT VARIÉ. Le mouvement de l'eau dans un canal ou dans une rivière ne peut plus être uniforme si la section du lit varie, si la pente est variable, si elle est nulle ou, à plus forte raison, si elle se change en contre-pente, c'est-à-dire si le lit va en se relevant de l'amont vers l'aval. Il en est de même si l'on établit en travers du courant un barrage qui oblige les eaux à s'élever vers l'aval pour franchir l'obstacle. Mais quand le mouvement est varié, on suppose toujours qu'il soit parvenu à l'état permanent. La relation qui lie la vitesse moyenne avec la pente de la surface et avec la section transversale s'obtient en appliquant à une portion du courant le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (*Voy.* ce mot). Soient AB et CD (fig. 4) deux sections transversales du courant, que l'on pourra toujours considérer comme sensiblement verticales, attendu que la pente de la surface de l'eau est toujours extrêmement faible. Les filets qui traversent la section AB n'ont pas tous la même vitesse; soit v la vitesse du filet qui passe en a, à une distance y au-dessous du point A; et ω la section de ce filet. Pendant un

tuelle des filets, on trouve que le travail total de la résistance du lit est exprimé par

$$- \int_0^s \chi ds \cdot \varphi(U) \cdot U \theta,$$

s représentant la longueur développée du fond BD du lit. En mettant pour U sa valeur $\frac{Q}{\Omega}$ dans le dernier facteur, on peut écrire

$$- Q \theta \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} \varphi(U) ds. \quad [5]$$

L'équation de l'effort du travail devient donc, dans le cas qui nous occupe,

$$1,1 \frac{\Pi Q \theta}{2g} (U_1^2 - U_2^2) = \Pi Q \theta z - Q \theta \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} \varphi(U) ds,$$

d'où

$$z = 1,1 \left(\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right) + \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} 0,001 \cdot \varphi(U) ds. \quad [6]$$

Telle est l'équation du mouvement varié de l'eau dans les canaux et rivières.

VIII. Si l'on veut, à l'aide de cette équation, obtenir la pente z de la surface, il faut faire un certain nombre de sections transversales, mesurer pour chacune l'aire Ω , le périmètre mouillé χ , et calculer la vitesse moyenne U ; on trace ensuite deux axes rectangulaires; on porte en abscisses les distances s entre la section AB et celles où l'on a fait les mesures indiquées; on porte en ordonnées les valeurs de $\frac{\chi}{\Omega} \cdot 0,001 \varphi(U)$; on fait passer une courbe par les extrémités de ces ordonnées; l'aire de cette courbe représente l'intégrale qui figure dans le second membre; on a donc aisément la valeur de z .

Si l'on veut, à l'aide de la même équation, évaluer la dépense, la pente z étant supposée connue, on remplace U en fonction de Q et de Ω , et l'on résout l'équation par rapport à Q ; cette méthode est développée à l'article JAUGEAGE DES COURS D'EAU.

IX. Il y a une autre question, qui se présente plus fréquemment dans les applications et qui peut encore être résolue à l'aide de l'équation [6]. On suppose constante la section transversale du lit et sa pente uniforme; on connaît la dépense, et la position de la ligne d'eau dans une section déterminée, CD par exemple; et l'on demande la position de la ligne d'eau dans une autre section déterminée AB. On a, par exemple, à résoudre cette question, lorsque l'on veut étudier l'effet d'un barrage qu'on se propose d'établir, et apprécier jusqu'à quelle distance en amont le gonflement produit par ce barrage doit se faire sentir.

Pour résoudre cette question, il faut, comme l'a fait M. Bélanger, introduire dans la relation [6] la pente du lit. Soit MKLIN (fig. 5) la section constante du lit, et KI une horizontale fixe, inférieure dans toutes les sections à la ligne d'eau variable MN. Désignons par x la longueur MN et par h la distance des horizontales MN et KI. Considérons maintenant un point quelconque M (fig. 4) de la surface AC du courant. Menons par ce point M une section transversale MP, et menons une section transversale infiniment voisine M'P'. Par le point M menons l'horizontale MH et la droite ML parallèle

à PP'. On aura $ML = PP' = ds$; et si i est la pente par mètre du lit, le triangle HML donnera $HL = i \cdot ML = ids$. Mais $HL = HM' + M'L$; or HM' est la pente infiniment petite dz de la surface entre

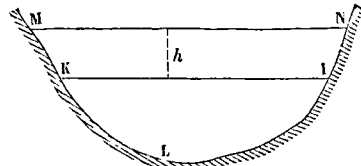


Fig. 5.

M et M'; et M'L est l'accroissement de hauteur de la ligne d'eau par rapport au fond, accroissement que l'on peut représenter par dh , d'après la signification attribuée à h (fig. 5). On a donc

$$ids = dz + dh. \quad [7]$$

Maintenant appliquons l'équation [6] entre les sections MP et M'P'; il faudra remplacer z par sa différentielle dz , le terme $1,1 \left(\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right)$ par la différentielle de $1,1 \frac{U^2}{2g}$, c'est-à-dire par $\frac{1,1 U dU}{g}$, et l'intégrale par la quantité sous le signe \int , ce qui donne

$$dz = 1,1 \frac{U dU}{g} + \frac{\chi}{\Omega} 0,001 \varphi(U) ds. \quad [8]$$

On peut mettre pour dz sa valeur tirée de la relation [7]. On peut remarquer ensuite que de la relation $U = \frac{Q}{\Omega}$ on tire

$$dU = -Q \frac{d\Omega}{\Omega^2}, \text{ et } U dU = -Q^2 \frac{d\Omega}{\Omega^3} = -U^2 \frac{d\Omega}{\Omega}.$$

Mais (fig. 4) $d\Omega = x dh$; donc

$$U dU = -\frac{U^2 x dh}{\Omega}.$$

A l'aide de ces valeurs, on écrit l'équation [8] sous la forme

$$ids - dh = -\frac{1,1 \cdot U^2 x dh}{g \Omega} + \frac{\chi}{\Omega} \cdot 0,001 \cdot \varphi(U) ds,$$

d'où l'on tire

$$ds = \frac{1 - 1,1 \frac{U^2 x}{g \Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} \cdot 0,001 \cdot \varphi(U)} dh. \quad [9]$$

Cette équation servira à résoudre le problème proposé. Connaissant la valeur h_1 de la hauteur h dans une section faite à une petite distance en amont du barrage, on veut connaître à quelle distance s en amont de cette section la hauteur h sera réduite à une valeur h_2 n'excédant plus que de 1 ou 2 centimètres par exemple celle qu'avait la ligne d'eau avant l'établissement du barrage. On tirera de l'équation [9]

$$s = \int_{h_2}^{h_1} \frac{1 - 1,1 \frac{U^2 x}{g \Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} \cdot 0,001 \cdot \varphi(U)} dh. \quad [10]$$

On calculera le second membre par la formule de Th. Simpson (Voy. QUADRATURE), en donnant à h des valeurs équidistantes et en nombre impair, de h_2 à h_1 . Pour chacune de ces valeurs de h on con-

naîtra Ω , χ , par suite U , et $\varphi(U)$; enfin on connaîtra aussi x ; on pourra donc calculer les multiplieurs de dh ou les ordonnées qui entrent dans la formule de Simpson, et par suite déterminer s .

X. En général, quand on fait ce calcul, on trouve pour s une valeur de plus en plus grande à mesure que h_0 diffère moins de la hauteur qui convient au régime uniforme, et qui annulerait le dénominateur de l'expression [9] puisqu'on aurait alors

$$\frac{\Omega}{\chi} i = 0,001 \cdot \varphi(U)$$

(voir l'équation [4] plus haut). Il en résulte que le rapport $\frac{dh}{ds}$ tend vers zéro, et que par conséquent la surface du liquide, telle qu'elle résulte de l'établissement du barrage, a un raccordement asymptotique avec celle qu'il affecte dans le mouvement uniforme. Mais il y a un cas d'exception : c'est celui où, parmi les valeurs de h comprises entre h_0 et h_1 , il y en a une qui annule le numérateur $1 - 1,1 \cdot \frac{U^2 x}{g\Omega}$. Pour

cette valeur on a $\frac{dh}{ds} = \infty$; résultat incompatible avec les hypothèses sur lesquelles on a fondé l'équation [6]; ce qui montre que cette formule cesse d'être applicable. On se trouve, en effet, alors dans le cas exceptionnel du RESSAUT (Voy. ce mot).

L'équation du mouvement permanent varié des eaux dans les canaux découverts a été établie à peu près à la même époque (1828) par M. Bélanger, dans un mémoire publié sous le titre d'Essai sur le mouvement permanent des eaux courantes, et par M. Poncelet dans son cours à l'École d'application de Metz. Le même sujet a été traité depuis par Navier, par M. Vauthier et par Coriolis. Enfin on trouvera dans le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse, à l'École des ponts et chaussées, une intéressante discussion relative au problème dont il vient d'être question.

CANCER, le quatrième des signes du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

CANEVAS TRIGONOMÉTRIQUE. Voy. TRIANGULATION.

CANNELURES, cavités à section circulaire pratiquées du haut en bas sur le fût d'une colonne ou d'un pilastre. L'ordre toscan ne comporte point cet ornement. Dans l'ordre dorique, les cannelures sont à arêtes vives, c'est-à-dire qu'elles se succèdent sans intervalles autour du fût; elles sont au nombre

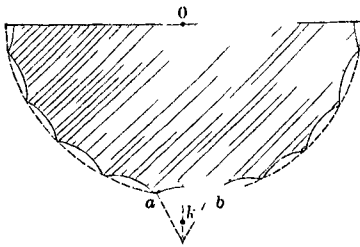


Fig. 1.

de 20, et leur section droite est un arc de 60°. Pour les tracer, on partagera donc (fig. 1) la circonférence de la section de la colonne en 20 parties égales. Soit ab l'une de ces parties. Sur la corde de cet arc on élèvera un triangle équilatéral aib ; et du

point i comme centre on décrira un arc de cercle passant par les points a et b . On répétera la même construction pour tous les arcs partiels. On donne quelquefois aux cannelures de l'ordre dorique une profondeur un peu plus grande, en prenant pour centre, au lieu du point i , un point k plus rapproché, et distant de la corde ab d'une quantité égale à sa moitié. L'arc ainsi obtenu est marqué en points sur la figure 1.

Dans les ordres ionique, corinthien et composite, les cannelures sont à côtes, c'est-à-dire qu'elles laissent entre elles, sur le fût de la colonne, des intervalles, dont la largeur est le tiers de celle de la cannelure elle-même. Ces cannelures sont au nombre de 24, et elles sont beaucoup plus profondes. Leur section droite a pour centre le milieu de l'arc qu'elles interceptent sur la circonférence de la colonne. Pour les tracer, on opérera donc de la manière suivante. On divisera (fig. 2) la circonférence

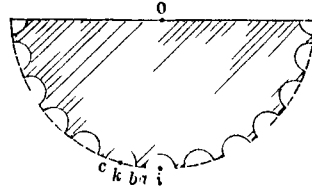


Fig. 2.

du fût en 24 parties égales, et de chaque point de division i comme centre on décrira des arcs dont le rayon soit les $\frac{3}{8}$ de la distance de deux points de division consécutifs i et k comptée sur la circonférence du fût. En effet, si ia est les $\frac{3}{8}$ de ik , et si kb en est aussi les $\frac{3}{8}$, il restera pour la distance ab la différence entre ik et ses $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ de ik , quantité qui est le tiers de la distance bc ou de la largeur de la cannelure.

Dans l'ordre dorique, les arêtes vives qui séparent les cannelures se raccordent à leur extrémité supérieure et à leur extrémité inférieure au moyen d'un arc de cercle. Dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite, les arêtes des côtes qui limitent une cannelure se raccordent de même par le haut et par le bas au moyen d'un arc de cercle; en sorte que la cavité présente à ses deux bouts une surface creuse analogue à un quart de sphère. Quelquefois dans l'ordre ionique la cannelure ne se termine ainsi qu'à son extrémité supérieure; par le bas la cavité est limitée par un plan perpendiculaire à l'axe de la colonne; en sorte qu'en projection verticale, les arêtes des deux côtes ne sont point raccordées, mais coupées par une perpendiculaire commune. La figure 3 montre ces dispositions diverses.

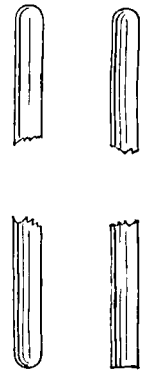


Fig. 3.

Les cannelures des pilastres se tracent de la même manière; mais dans ce cas c'est une simple ligne droite que l'on a à diviser en parties égales. Le nombre des cannelures est alors généralement de 7, dont une occupe le milieu de la largeur du pilastre; il ne dépasse jamais 9.

CANON-PENDULE, canon suspendu comme le **PENDULE BALISTIQUE** (*Voy.* ce mot) et placé en face du récepteur de cet appareil, de manière que leurs axes soient dans le prolongement l'un de l'autre; il est muni à la partie inférieure d'une tige horizontale qui parcourt un arc divisé sur lequel glisse un curseur, comme dans le pendule balistique. Au moment de l'explosion, le canon, pressé par les gaz de la poudre, s'écarte de sa position d'équilibre; le curseur est poussé jusqu'à un certain point de l'arc divisé; l'arc ainsi parcouru, qu'on peut lire à $\frac{1}{10}$

de minute près au moyen d'un vernier dont le curseur est muni, donne l'amplitude α de la première oscillation, d'où l'on déduit la quantité de mouvement Q développée par les gaz pendant la durée de l'explosion. En effet, on remarque d'abord que l'action des gaz se développe dans un temps très-court θ , au bout duquel le canon-pendule ne s'est pas encore déplacé d'une manière sensible, quoiqu'il ait pris une certaine vitesse angulaire; on remarquera en second lieu que pendant le temps θ le poids du système étant une force verticale passant par le centre de gravité, cette force rencontre l'axe de suspension, puisque la position d'équilibre n'a pas été sensiblement altérée; d'autre part, en négligeant le frottement, qui est très-faible, on peut considérer les réactions des appuis comme normales aux surfaces arrondies des couteaux de suspension, et par conséquent elles rencontrent également l'axe. Si donc nous appelons ω la vitesse angulaire du canon-pendule au bout du temps t après le commencement de l'explosion, F la résultante des forces exercées par les gaz sur le fond de l'âme de la pièce, résultante que l'on peut regarder comme horizontale, et ρ la distance de cette force, ou de l'axe de l'âme, à l'axe de suspension, on aura, en écrivant que l'**ACCELERATION ANGULAIRE** (*Voy.* ce mot) est égale à la somme des moments des forces divisée par le moment d'inertie I du système,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F\rho}{I},$$

ou, en intégrant de 0 à θ et appelant ω' la vitesse angulaire au bout du temps θ ,

$$\omega' = \frac{\rho}{I} \int_0^\theta F dt = \frac{\rho}{I} Q. \quad [1]$$

Le pendule, partant de sa position d'équilibre avec la vitesse angulaire ω' , s'écarte de cette position, et son centre de gravité s'élève d'une quantité h ; en sorte qu'en appelant P le poids du système, on a, en vertu du théorème de l'**EFFET DU TRAVAIL** (*Voy.* ce mot),

$$\frac{1}{2} \omega'^2 I = Ph.$$

Mais si L est la distance du centre de gravité à l'axe de suspension, on a

$$h = L - L \cos \alpha = 2L \sin^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

L'équation précédente donne donc

$$\omega' = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{PL}{I}}; \quad [2]$$

et, en égalant les seconds membres des relations [1] et [2], on obtient

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{PLI}}{\rho}.$$

On fait disparaître le moment d'inertie I de cette formule, en remarquant que si l désigne la longueur du pendule simple qui oscillerait comme le canon-pendule, longueur qui peut être déterminée en faisant osciller le pendule, on a

$$l = \frac{I\rho}{PL}, \quad \text{d'où } I = \frac{PLl}{\rho};$$

en substituant cette valeur de I dans l'expression de Q , on obtient

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha PL}{\rho} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad [3]$$

La connaissance de cette quantité de mouvement permet d'apprécier l'effet du recul. Elle peut même donner une indication sur la vitesse du projectile; car, en négligeant la masse des gaz développés, on a approximativement

$$Q = \frac{p}{g} v, \quad \text{d'où } v = \frac{gQ}{p}, \quad [4]$$

en nommant p le poids du projectile et v sa vitesse. (*Voy.* pour la relation exacte qui lie ces quantités l'art. **BALISTIQUE INTÉRIEURE**.)

La formule [3] n'est elle-même qu'approximative; car elle suppose que pendant la première demi-oscillation du pendule les gaz développés par la poudre n'agissent plus sur l'âme de la pièce, ce qui n'est pas tout à fait exact, quoique, le boulet une fois sorti de l'âme, les gaz s'échappent très-rapidement.

(*Voy.* le *Traité d'Artillerie* de M. Didion, et le *Cours de Mécanique appliquée*, professé par M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures (lithographié.)

CANONS RAYÉS. *Voy.* ARMES RAYÉES.

CAPITAL, somme d'argent qui produit intérêt. (*Voy.* INTÉRÊT SIMPLE, INTÉRÊT COMPOSÉ, AMORTISSEMENT.)

CAPITALE, bissectrice de l'angle saillant d'un BASTION, d'une DEMI-LUNE, d'une LUNETTE, d'un REDAN, d'une REDOUTE, et en général d'un ouvrage de FORTIFICATION quelconque (*Voy.* ces mots). On trouvera à l'article **ATTAQUE DES PLACES** le moyen de déterminer sur le terrain la capitale d'un bastion ou d'une demi-lune.

CAPONNIÈRE, passage à ciel ouvert, mais à l'abri des feux rectilignes, servant à traverser les fossés d'une place forte. La caponnière est simple lorsqu'elle n'a d'épaulement que d'un côté; elle est double quand les deux côtés du passage sont protégés par un épaulement. C'est par une caponnière simple qu'on traverse le fossé d'une demi-lune pour aller de cet ouvrage à l'une des places d'armes rentrantes. On détermine la hauteur de sa ligne de feux par la double condition qu'elle soit à 1^m, 20 au-dessous du prolongement de la plongée du corps de place, afin que les hommes ne soient pas incommodés par le vent du boulet, et qu'une droite menée d'un point de cette ligne de feux au saillant du chemin couvert de la demi-lune, d'où peuvent partir les corps de l'ennemi, passe à 2^m, 50 au-dessus du point de circulation. Soit AB (fig. 1) le fond du fossé, C le

point de circulation, CD une verticale ayant 2^m,50, et DH une droite menée du point D au saillant du chemin couvert de la demi-lune, la ligne de feux de la caponnière devra rencontrer DH, afin d'inter-

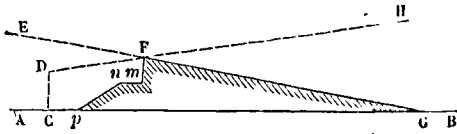


Fig. 1.

cepter les coups partis de ce saillant. Soit EG une droite menée parallèlement à la plongée du corps de la place, à 1^m,20 au-dessous de cette plongée, elle devra aussi rencontrer la ligne de feux cherchée. Cette ligne de feux sera donc une droite perpen-

diculaire au plan de la figure et menée par le point d'intersection F des droites HD et EG. Ce point F obtenu, on tracera aisément le talus intérieur, Fm incliné à 1 de base pour 3 de hauteur, la banquette mn, à 1^m,30 au-dessous du point F, et ayant 0^m,70 de large, puis le talus np de la banquette, incliné à 2 de base pour 1 de hauteur; la ligne FG prolongée en glacis terminera le profil de la caponnière.

C'est une caponnière double qui conduit de la courtine ou de la tenaille à la demi-lune. On lui donne 2^m de large, et l'on détermine la hauteur de sa ligne de feux par la condition qu'une droite joignant un de ses points au saillant du chemin couvert de l'un des bastions adjacents, d'où peuvent partir les coups de l'ennemi, passe à 2^m,50 au-dessus du milieu du passage. Soit AB (fig. 2) la lar-

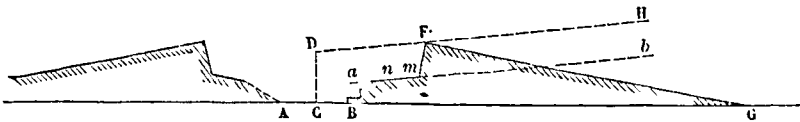


Fig. 2.

geur du passage, CD une verticale élevée au milieu C et ayant 2^m,50, DH une droite menée du point D au saillant du chemin couvert du bastion. Parallèlement à DH, et à une distance de 1^m,30, on mènera la droite ab; par le point B on mènera une droite Bn inclinée à 2 de base pour 1 de hauteur; elle rencontrera ab en un point n; on prendra sur ab une longueur nm de 0^m,70 pour la banquette; on mènera mF incliné à 1 de base pour 3 de hauteur, et l'on aura la ligne de feu F; on terminera le profil par un glacis FG incliné à 6 de base sur 1 de hauteur. On fera la même construction de l'autre côté, et l'on aura le profil de la caponnière.

Au lieu d'un simple talus Bn on peut disposer des marches qui conduisent à la banquette.

CAPRICORNE, le dixième des signes du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

CARAT, unité employée pour évaluer le poids des diamants. (Voy. KARAT.)

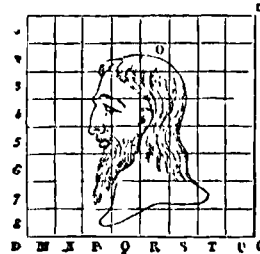
CARENE, partie de la coque d'un navire qui est destinée à être immergée. Elle constitue ce qu'on appelle les ŒUVRES VIVES. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

CARLINGUE, pièce longitudinale placée sur les VARANGUES. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

CARREAUX (MÉTHODE DES), méthode employée, dans les arts du dessin, pour copier une figure en la réduisant dans un rapport donné. On enveloppe la figure à copier d'un carré ABCD, que l'on partage par des parallèles aux côtés en un certain nombre de carrés égaux. S'il s'agit de réduire toutes les lignes de la figure dans le rapport de 5 à 3, par exemple, on prend une droite ab égale aux $\frac{3}{5}$

de AB; et l'on construit sur cette droite un carré abcd, que l'on partage en autant de carrés égaux que le premier. Pour éviter la confusion, on numérote les bandes horizontales ainsi formées, des mêmes numéros sur les deux figures, et l'on désigne de même les bandes verticales soit par des chiffres, soit par des lettres semblables. Si l'on veut

maintenant fixer sur la copie la position d'un point O du modèle, on remarque que ce point est situé dans un carré qui appartient à la fois à la colonne S et à la bande 2. Ce point devra donc être figuré sur la co-



pie dans le petit carré qui appartient à la colonne s et à la bande 2; et si les carrés ne sont pas trop grands, il suffit d'un peu d'habitude et de coup d'œil pour fixer sans erreur sensible la position de ce



point. On obtient de la même manière tous les autres points de la copie. Le résultat est d'autant plus exact que les lignes de division sont plus nombreuses.

Lorsque l'on ne peut pas tracer de lignes sur le dessin à copier, on les remplace par des fils tendus.

La méthode des carreaux est souvent employée pour réduire les cartes de géographie.

CARRELAGE, disposition des carreaux qui forment le pavé des vestibules, des salles d'attente,

des salles à manger, etc. On peut employer des carreaux d'un seule forme et d'une seule couleur, ou des carreaux de couleurs et de formes différentes, pour obtenir des assemblages réguliers dont l'effet est agréable aux yeux.

On peut d'abord donner aux carreaux la forme d'un polygone régulier. Mais tous les polygones réguliers ne sont pas propres au carrelage. La somme de tous les angles formés autour d'un même point étant égale à 4 angles droits, il faut, pour qu'on puisse recouvrir une aire avec des polygones réguliers égaux, que l'angle de chacun de ces polygones soit une partie aliquote de 4 angles droits. C'est ce qui a lieu pour le triangle équilatéral; car son angle, qui vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, est la sixième partie de 4 angles droits. Cela a lieu également pour le carré, puisque son angle étant droit, est le quart de 4 angles droits. Cela a lieu encore pour l'hexagone régulier, parce que son angle, qui vaut $\frac{4}{3}$ d'angle droit, est le tiers de 4 angles droits. On peut donc former un carrelage avec des triangles équilatéraux assemblés 6 à 6 (fig. 1); avec des carrés assemblés 4 à 4 (fig. 2 et 3); ou avec des hexagones réguliers assemblés 3 à 3 (fig. 4).

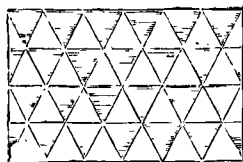


Fig. 1.

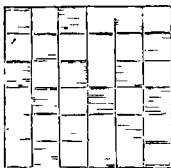


Fig. 2.

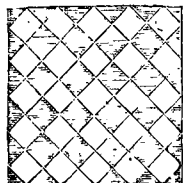


Fig. 3.

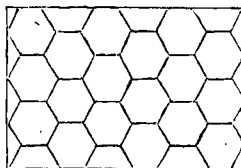


Fig. 4.

On ne pourrait pas employer des pentagones réguliers, parce que l'angle de ces polygones, qui vaut $\frac{6}{5}$ d'angle droit, n'est pas une partie aliquote de 4 angles droits. On le pourrait encore moins

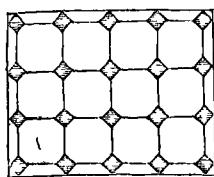


Fig. 5.

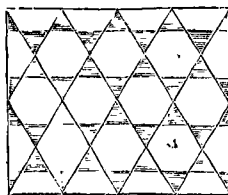


Fig. 6.

avec des polygones réguliers d'un nombre de côtés supérieur à 6, parce qu'alors 3 angles de ces polygones seraient une somme plus grande que 4 angles droits. Mais on obtient de nouvelles dispositions

en associant plusieurs espèces de polygones réguliers. Ainsi, l'on recouvre une aire avec des octogones et des carrés (fig. 5); avec des hexagones et des triangles équilatéraux (fig. 6); avec des dodécagones et des triangles équilatéraux (fig. 7).

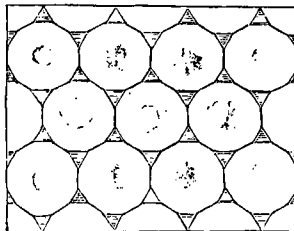


Fig. 7.

On peut aussi combiner des polygones réguliers avec d'autres polygones qui ne le sont point, mais qui sont seulement disposés avec régularité. C'est ainsi que l'on forme un carrelage avec des hexa-

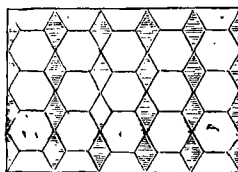


Fig. 8.

gones réguliers et des lozanges (fig. 8); ou avec des octogones, des carrés et des trapèzes rectangulaires (fig. 9).

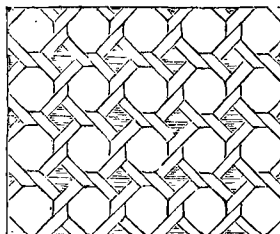


Fig. 9.

On conçoit que le nombre des combinaisons de ce genre soit indéfini, et qu'elles ne soient déterminées que par le goût de l'architecte et par la nature des matériaux dont il dispose.

CARTE CÉLESTE, représentation sur un plan de la sphère céleste dans son ensemble ou dans quelque-une de ses parties. Le choix du plan et le mode de représentation se rattachent aux mêmes principes que pour les CARTES GÉOGRAPHIQUES (Voy. ce mot). Pour les MAPPEMONDES ou PLANISPHERES célestes, on fait ordinairement usage de la projection stéréographique. Cependant pour une carte de la zone équatoriale ou de la zone zodiacale on emploie souvent le développement de Mercator (Voy. CARTES MARINES). Les différents points de la sphère céleste sont rapportés sur la carte au moyen de leur déclinaison et de leur ascension droite, comme les points de la surface terrestre sont rapportés au moyen de leur latitude et de leur longitude géographiques. La

CARTE CÉLESTE.

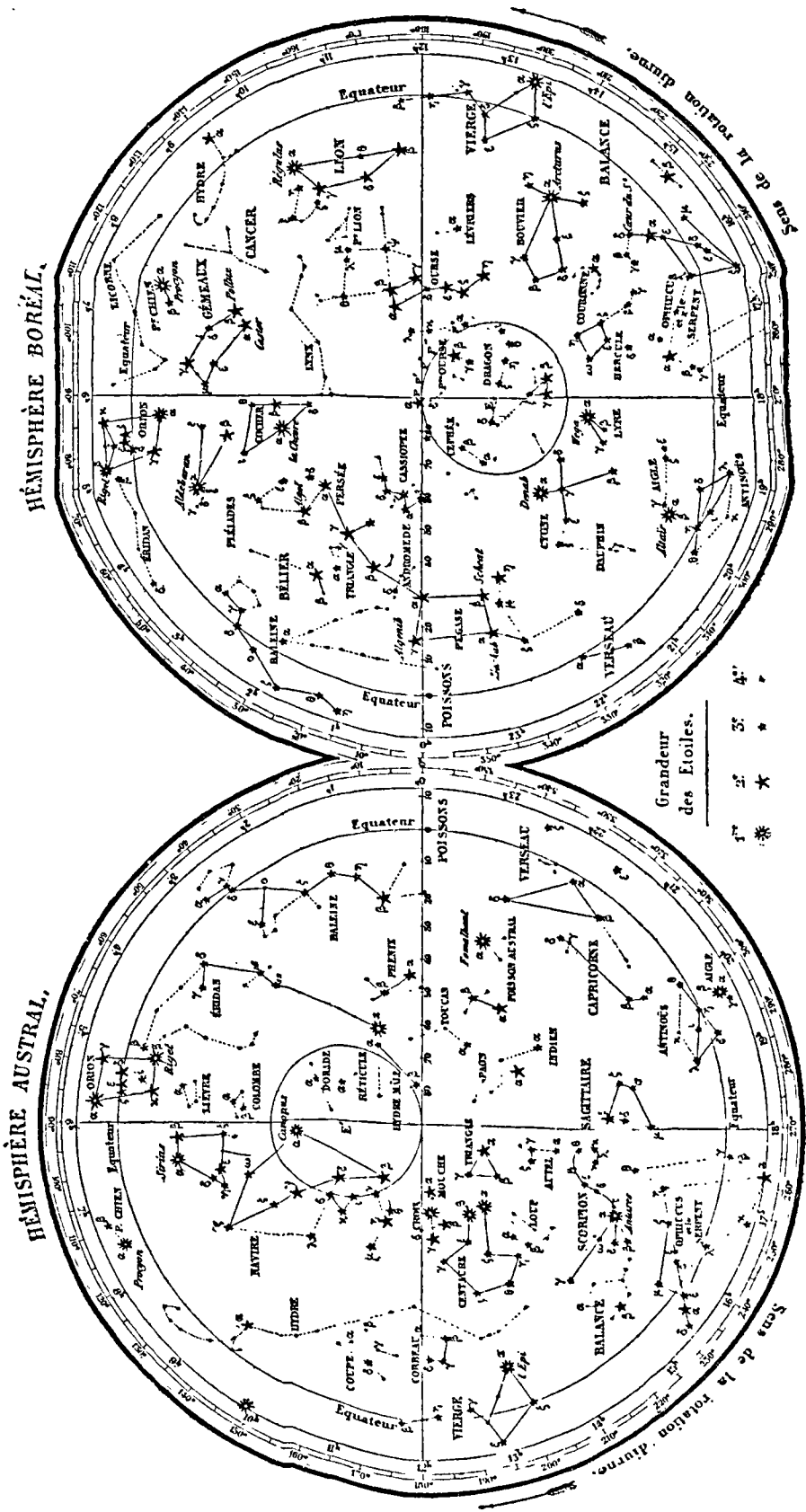


figure ci contre est une mappemonde céleste ; la projection y est faite sur le plan de l'équateur, mais on a prolongé la carte de chaque hémisphère un peu au delà de l'équateur pour pouvoir montrer dans leur entier les constellations qui s'étendent dans les deux hémisphères.

Les cartes de la lune ou des planètes sont des projections orthographiques (*Voy. SÉLÉNOGRAPHIE*) ; c'est en effet le seul mode de projection qui puisse nous montrer ces astres tels que nous les voyons.

CARTES FIGURATIVES, cartes géographiques destinées à rendre sensibles les résultats de certaines recherches statistiques. Ainsi, les routes peuvent être indiquées par des lignes dont la largeur variable est proportionnelle au nombre des voyageurs qui les parcourent annuellement ; les ports peuvent être représentés par des cercles ayant une surface proportionnelle au tonnage des navires qui les fréquentent, etc., etc. On peut consulter, sur ce sujet, la *Notice* de M. Minard, inspecteur général des ponts et chaussées, ayant pour titre : *Des Tableaux graphiques et des Cartes figuratives*.

CARTES GÉOGRAPHIQUES, représentation sur un plan de la surface de la terre ou d'une portion de cette surface. Les éléments qui doivent entrer dans une carte diffèrent suivant sa destination. Les *cartes physiques* ne donnent que la configuration et le relief d'un pays, les mers qui en baignent les côtes, avec les îles qui en dépendent, les cours d'eau, les lacs, et généralement tous les accidents naturels. Les *cartes politiques* s'attachent aux circonscriptions politiques, aux chaînes de montagnes ou aux cours d'eau qui servent de limites à ces circonscriptions ; elles donnent les villes principales, et surtout celles qui servent de chefs-lieux ou qui ont figuré dans les événements politiques de quelque importance. Les *cartes itinéraires* sont consacrées à l'indication des routes, des cours d'eau navigables, des voies ferrées et de tous les moyens réguliers de communication. Les *cartes militaires, administratives, scientifiques*, etc., négligent tout ce qui n'a pas rapport à la spécialité pour laquelle elles sont construites, mais elles doivent fournir avec abondance tous les renseignements qui se rattachent à cette spécialité.

Quels que soient les éléments qui doivent entrer dans une carte, il faut que tous les points principaux destinés à y figurer soient déterminés par leurs COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (*Voy. ce mot*), et que les points secondaires puissent être rapportés aux points principaux par leurs distances à quelques-uns d'entre eux, à défaut de leurs coordonnées. On imagine alors que la contrée qu'on veut représenter sur la carte soit traversée par une série de méridiens équidistants, et de parallèles également équidistants ; on représente ces méridiens et ces parallèles sur la carte par des lignes droites ou courbes suivant le mode de représentation adopté ; leur ensemble forme ce qu'on appelle le *canavas* de la carte. Il devient facile alors de placer sur la carte les points principaux dont les coordonnées géographiques sont connues, et d'y rattacher les points secondaires. La partie importante du tracé d'une carte géographique est donc la construction du *canavas*. Il existe pour cela diverses méthodes géométriques, qui consistent généralement en *projections* et en *développements*. La surface du globe terrestre n'étant point exacte-

ment développable, on ne peut conserver à la fois la similitude des figures et le rapport des surfaces ; il faut sacrifier l'un ou l'autre, au moins dans une certaine mesure ; de là les divers systèmes adoptés.

Les projections sont principalement employées pour la construction des *mappemondes* ou *planisphères*, qui représentent, sur une même carte, la surface entière du globe partagée en deux hémisphères ; les seules usitées sont la *projection orthographique* (du grec *ὀρθός*, droit, et *γράφω*, j'écris) et la *projection perspective*.

Dans la *projection orthographique* on imagine qu'après avoir partagé le globe en deux hémisphères par un grand cercle, on abaisse de tous les points d'un même hémisphère des perpendiculaires sur le plan de ce grand cercle ; les pieds de ces perpendiculaires sont la représentation sur la carte des points correspondants du globe. Si la projection se fait sur un méridien, les autres méridiens sont représentés par des ellipses, sauf le méridien central, qui est représenté par une ligne droite ; l'équateur et les parallèles sont représentés par des droites parallèles entre elles et perpendiculaires à celle qui représente le méridien central. Si la projection se fait sur l'équateur ou sur un plan parallèle, les méridiens sont représentés par des droites partant du pôle, et les parallèles par des cercles qui ont le pôle pour centre. C'est le seul cas où la projection orthographique soit avantageuse ; on en fait quelquefois usage pour représenter les contrées polaires ; mais les parties qui se rapprochent de l'équateur sont alors de plus en plus déformées, parce qu'elles sont vues en raccourci. La projection orthographique sur un méridien est rarement employée, à cause de la forme elliptique qu'il faut donner aux méridiens. Cependant c'est le mode de projection en usage pour les cartes de la lune (*Voy. SÉLÉNOGRAPHIE*) et des planètes, parce que c'est celle qui nous montre ces astres tels que nous les voyons. En effet, les rayons visuels menés aux différents points de leur disque peuvent, à cause de l'éloignement, être considérés comme des droites parallèles entre elles ; ce disque nous apparaît donc comme une projection de la surface de l'astre sur un plan perpendiculaire à la direction commune des rayons visuels.

Dans les *projections perspectives* la surface du globe est représentée telle qu'on la verrait d'un certain point appelé *point de vue*, sur un certain plan, supposé transparent, qu'on appelle le *plan du tableau*. On a quelquefois pris pour point de vue le centre de la sphère, et pour plan du tableau un plan tangent ; mais on ne peut représenter ainsi qu'une portion très-limitée du globe, parce qu'à mesure qu'on s'éloigne du centre de la carte, c'est-à-dire du point de contact du plan tangent, les parties qu'on veut représenter vont en se dilatant de plus en plus. Lahire a proposé de prendre pour plan du tableau un plan diamétral, et de placer le point de vue sur le diamètre perpendiculaire à ce plan, en dehors de la sphère et à une distance de sa surface égale à $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$, R désignant le rayon de la sphère. Les rapports des surfaces sont alors mieux conservés, mais les méridiens et les parallèles sont représentés par des ellipses. De toutes les projections perspectives, la plus avantageuse est la

projection stéréographique (du grec στερεός, solide, et γράφω, j'écris), dans laquelle le plan du tableau est un plan diamétral, et le point de vue l'extrémité du diamètre perpendiculaire à ce plan. Cette projection a été répandue par Mercator. Les avantages de ce mode de projection résultent des deux propriétés géométriques suivantes : 1° *La projection stéréographique d'un cercle quelconque de la sphère est un cercle*; 2° *Si deux courbes se coupent sur la surface de la sphère sous un certain angle, leurs projections stéréographiques se coupent sous le même angle*. Pour démontrer la première propriété, il faut se rappeler que la section antiparallèle d'un cône oblique à base circulaire est un cercle. Ceci étant admis, soit O (fig. 1) le point de vue, AmB le plan

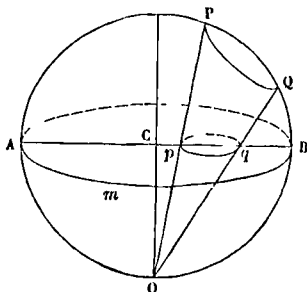


Fig. 1.

du tableau, PQ le diamètre d'un cercle tracé sur la sphère, APQBO le plan mené par ce diamètre et par le centre C de la sphère. Ce plan coupera le plan du tableau suivant une droite AB. Les rayons visuels menés du point O aux différents points de la circonférence PQ forment un cône oblique à base circulaire, qui a pour plan de symétrie le plan APQBO, et qui est coupé par le plan du tableau suivant une courbe pq. Or, l'angle pqO a pour mesure $\frac{1}{2}(AO + BQ)$; l'angle OPQ a pour mesure

$\frac{1}{2}OQ$ ou $\frac{1}{2}(OB + BQ)$; et comme $OA = OB$, il s'ensuit que l'angle pqO est égal à l'angle OPQ. La section faite dans le cône par le plan AmB est donc une section antiparallèle; donc cette section est un cercle.

Pour démontrer la seconde propriété, on commence par substituer aux deux courbes deux arcs de grands cercles tangents; il reste donc à démontrer la propriété pour l'angle de ces deux grands cercles, puisqu'il est le même que celui des courbes.

Considérons d'abord le cas où le plan d'un de ces grands cercles passe par le point de vue; soit AMB (fig. 2) ce cercle; soit MD le second arc de grand cercle; soient MT et MS leurs tangentes en M. Ces tangentes déterminent un plan perpendiculaire au rayon CM, et par conséquent au plan AMBO qui contient ce rayon. Il coupe donc le plan du tableau AmB suivant une droite ST perpendiculaire au plan AMBO, et par suite aux droites MT et AT. Joignons MO, qui coupera AB en un point N, et tirons NS. Les deux triangles MTS et NTS sont rectangles en T, et ont le côté TS commun. De plus, $NT = MT$; car

l'angle NMT a pour mesure $\frac{1}{2}MBO$ ou $\frac{1}{2}(MB + OB)$;

l'angle MNT a pour mesure $\frac{1}{2}(MB + OA)$; or $OB = OA$; donc les deux angles sont égaux, le triangle MNT est isocèle, et $NT = MT$. Il résulte de là

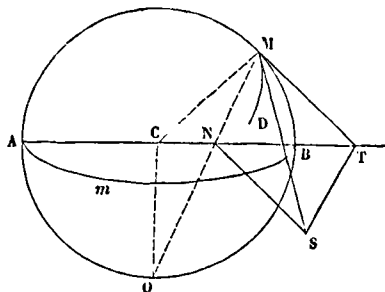


Fig. 2.

que les deux triangles MTS et NTS sont égaux, et que par conséquent l'angle SNT est égal à l'angle SMT. Or le dernier est l'angle des deux tangentes, et le premier est sa projection stéréographique. La seconde propriété se trouve donc démontrée pour le cas que nous venons de considérer. Mais il est facile d'y ramener un cas quelconque; car, quels que soient les deux arcs de grand cercle considérés, on peut toujours par le diamètre suivant lequel leurs plans se coupent, mener un plan qui passe par le point de vue; ce plan auxiliaire coupera la sphère suivant un arc de grand cercle qui fera avec chacun des deux premiers un angle qui sera dans le cas que nous venons de traiter; l'angle proposé sera donc la somme ou la différence de deux angles compris dans ce premier cas; et par conséquent la propriété qui vient d'être démontrée pour chacun d'eux s'étendra à leur somme ou à leur différence.

Des deux propriétés qui viennent d'être démontrées on tire cette conséquence, qu'une figure quelconque, mais très petite, tracée sur la surface de la sphère, a pour projection stéréographique une figure semblable; car les côtés étant supposés très-petits peuvent être remplacés par des arcs de grands cercles; et si on décompose la figure proposée en triangles, sa projection se composera d'un même nombre de triangles ayant leurs angles respectivement égaux à ceux des triangles tracés sur la sphère, et qui leur sont par conséquent semblables chacun à chacun. Ces propriétés importantes étant démontrées, voici comment on trace un canevas stéréographique.

Supposons d'abord que la projection se fasse sur un méridien ABCD (fig. 3), auquel cas le point de vue est à l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce plan, et situé par conséquent sur le grand cercle perpendiculaire au plan de la figure, et qui a pour diamètre BD. Supposons qu'après avoir divisé la circonférence de ce cercle en parties égales, de 10° par exemple, on le rabatte sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de BD; le point de vue viendra se placer en A; et les rayons visuels menés aux points de division de la circonférence viendront prendre les positions Am, An, Ap, Aq, etc.,

et couperont le diamètre BD aux points a, b, c, d , etc.; ce seront les perspectives des points de division correspondants; elles appartiendront par conséquent aux perspectives des parallèles; et

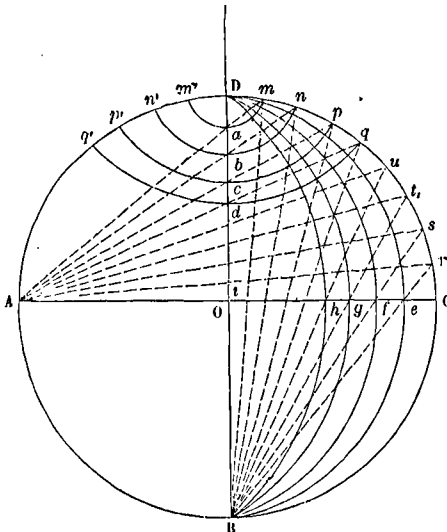


Fig. 3.

comme ces parallèles passent par les points m, n, p, q , etc., ou m', n', p', q' , etc., on aura 3 points m, a, m' pour tracer le cercle perspective du premier parallèle, 3 points n, b, n' pour tracer le cercle perspective du second parallèle; et ainsi de suite; ce qui se fera, soit au compas si le centre n'est pas trop éloigné, soit à la RÈGLE PLOYANTE (Voy. ce mot), dans le cas contraire. On peut aussi remarquer qu'en vertu de la seconde propriété de la projection stéréographique, les cercles mam', nbn' , etc., qui représentent les parallèles, doivent rencontrer à angles droits la circonférence ABCD, et que par conséquent les rayons de ces cercles ne sont autre chose que les tangentes à cette circonférence menées aux points m, n , etc., et terminées au prolongement de OD. Le point de vue appartient aussi au cercle perpendiculaire au plan du tableau et ayant AC pour diamètre. Après avoir divisé la circonférence de ce cercle en parties égales, de 10° par exemple, rabattons-le sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de AC; le point de vue viendra en B; et les rayons visuels menés aux points de division prendront les positions Br, Bs, Bt, Bu, etc., et couperont AC aux points e, f, g, h , etc.: ce seront les perspectives des points r, s, t, u , etc.; ils appartiennent donc aux perspectives des méridiens correspondants; et comme ces méridiens passent par les points B et D, on aura 3 points pour tracer le cercle perspective de chaque méridien; savoir, B, e, D pour le premier, B, f, D pour le second, et ainsi de suite. Ces cercles se traceront au compas ou à la règle ployante, suivant l'éloignement de leur centre. Le canevas stéréographique se trouvera ainsi obtenu et la carte se tracera sans difficulté.

On peut aussi, pour tracer les méridiens par points, s'appuyer sur la propriété des angles inscrits.

Tous les angles inscrits dans le segment Bhd, par exemple, étant égaux, on obtiendra un point quelconque de l'arc Bhd en menant par les points B et D deux droites faisant entre elles un angle égal à celui des droites Bh et Dh. Le même procédé pourrait être appliqué au tracé des parallèles.

D'après les propriétés, ci-dessus démontrées, de la projection stéréographique, la similitude des contours sera conservée; mais le rapport des surfaces sera notablement altéré. Car il est aisé de voir qu'au centre de la carte une longueur comptée sur la sphère se trouve représentée par une longueur moitié moindre, tandis que vers les bords elle est représentée par une longueur sensiblement égale; d'où il résulte qu'une même aire évaluée sur la sphère se trouve représentée par une aire 4 fois moindre ou par une aire sensiblement la même, selon qu'elle se projette vers le centre de la carte ou vers les bords. La figure montre en effet que Oi est sensiblement la moitié de Cr , tandis que Ce est sensiblement égal à Cr .

Supposons maintenant que la projection se fasse sur l'horizon d'un lieu dont la latitude est donnée. Dans ce cas, le lieu dont il s'agit occupe le centre O de la carte (fig. 4); le méridien du lieu est représenté par une droite XX' ; et le point de vue est situé sur ce méridien à l'extrémité du rayon perpendiculaire à l'horizon. Rabattons le méridien sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de sa trace XX' . Le point de vue viendra prendre la position A; l'axe du globe la position PP' ; et les rayons visuels menés aux deux pôles se rabattront suivant les droites AP et AP' , qui coupent XX' aux points p et p' ; ces points seront les perspectives des pôles. Si l'on veut tracer un parallèle, on prendra sur la circonférence $APBP'$, de part et d'autre du point P, deux arcs égaux Pm, Pm' , de 10° par exemple; on joindra Am et Am' ; les points a et a' où les lignes de jonction rencontrent XX' , seront les perspectives de deux points diamétralement opposés sur le parallèle qui est à 10° du pôle; on obtiendra donc la perspective de ce parallèle en décrivant un cercle sur aa' comme diamètre. Pour avoir la perspective du parallèle situé à 20° du pôle, on prendra les arcs Pn et Pn' égaux à 20° ; on joindra An et An' , qui couperont XX' en b et en b' ; sur bb' comme diamètre on décrira une circonférence, qui sera la perspective demandée; et ainsi de suite. Quand le centre de l'arc à tracer sera trop éloigné, on le tracera à la règle ployante. Pour obtenir les perspectives des méridiens, de 10° en 10° par exemple, on remarquera que ces cercles se coupent au pôle P sous des angles de 10° , et que par conséquent, en vertu de la seconde propriété de la projection stéréographique, leurs perspectives doivent se couper en p sous des angles de 10° . On mènera donc par le point p une série de droites pM, pN, pQ , etc., faisant des angles consécutifs de 10° ; les méridiens cherchés devront être tangents à ces droites; d'ailleurs ce seront des cercles, passant par les points p et p' ; leurs centres sont donc situés sur la droite YY' élevée perpendiculairement au milieu I de pp' . Par le point p on mènera donc des droites pM', pN', pQ' , etc., respectivement perpendiculaires à pM, pN, pQ , etc., et des points où ces perpendiculaires couperont YY' , avec les rayons $M'p, N'p, Q'p$, etc., on décrira des arcs de cercle

1.p.1, 2.p.2, 3.p.3, etc.; ce seront les méridiens demandés.

On peut faire une remarque analogue à celle qui a été faite ci-dessus relativement à la conservation de la forme des figures et à l'altération du rapport des surfaces; c'est toujours au centre de la carte que cette altération est la plus grande.

phique (du grec *δμολός*, plan ou semblable, et de *γράφω*, j'écris), dû à M. Babinet. Le *canevas de Lorgna*, imaginé à la fin du dernier siècle, convient surtout pour la représentation des contrées polaires. On décrit un cercle d'un rayon supposé égal à la corde qui sous-tend un arc de 90° dans le grand cercle de la sphère. Le centre de ce cercle représente le pôle. Les méridiens sont représentés par des droites concourant au pôle; chaque secteur circulaire compris entre deux de ces droites équivaut en surface au demi-fuseau qui lui correspond sur la sphère; car le cercle décrit a pour aire

$$\pi (R\sqrt{2})^2 \text{ ou } 2\pi R^2,$$

c'est-à-dire la surface de l'hémisphère; ses sous-multiples équivalent donc aux sous-multiples correspondants de la sphère. Les parallèles sont représentés par des cercles ayant le pôle pour centre commun; et on donne pour rayon à chacun d'eux la corde de l'arc générateur de la calotte sphérique qui a ce cercle pour base. Il en résulte que l'aire de chaque cercle ainsi décrit équivaut à l'aire de la calotte correspondante: et que par conséquent l'aire de la couronne circulaire comprise entre deux cercles consécutifs équivaut à

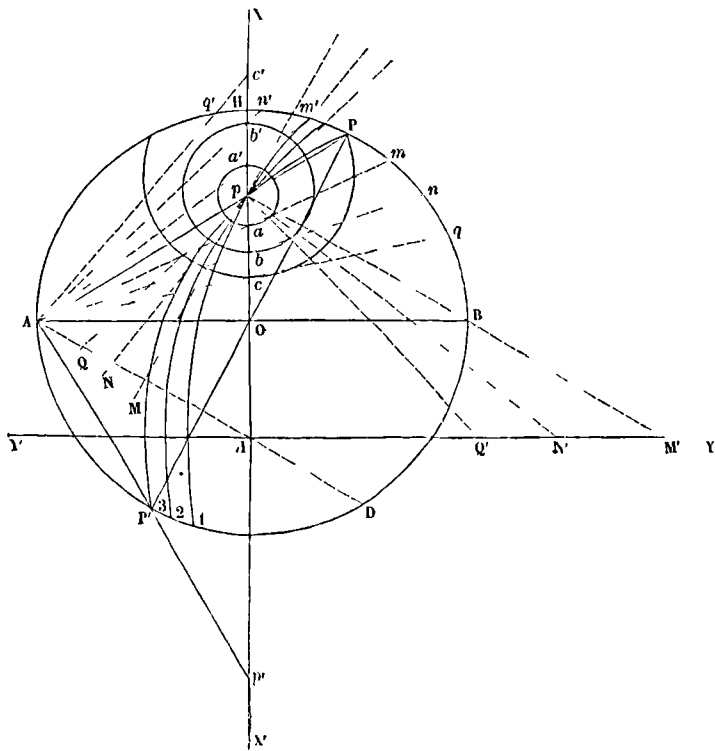


Fig. 4.

On peut faire une autre remarque sur cette projection: c'est qu'il y a toujours un parallèle qui est représenté par une ligne droite. Ce parallèle est celui qui passe par le point de vue, et dont la latitude est par conséquent égale et de signe contraire à celle du lieu sur l'horizon duquel se fait la projection perspective.

On remarquera enfin que le point I peut être obtenu sans le secours du point p', qui peut être parfois trop éloigné. Il suffit de prendre, à partir du point B, un arc BD égal au double de PH, c'est-à-dire au double de la latitude du lieu, et de joindre AD; cette droite passe par le point I. On le démontrera en cherchant par la trigonométrie les valeurs de pp' et de pO; on trouvera

$$OI = \frac{1}{2} pp' - pO = R \tan \lambda,$$

en appelant R le rayon du cercle et λ la latitude PH. Or cette formule conduit immédiatement à la construction que nous venons d'indiquer.

La projection stéréographique a principalement pour objet de conserver la forme des figures. Mais il existe des *canevas* qui ont au contraire pour but de conserver le rapport des aires. Les principaux sont le *canevas de Lorgna* et le *canevas homogra-*

phique (du grec *δμολός*, plan ou semblable, et de *γράφω*, j'écris), dû à M. Babinet. Le *canevas de Lorgna*, imaginé à la fin du dernier siècle, convient surtout pour la représentation des contrées polaires. On décrit un cercle d'un rayon supposé égal à la corde qui sous-tend un arc de 90° dans le grand cercle de la sphère. Le centre de ce cercle représente le pôle. Les méridiens sont représentés par des droites concourant au pôle; chaque secteur circulaire compris entre deux de ces droites équivaut en surface au demi-fuseau qui lui correspond sur la sphère; car le cercle décrit a pour aire

$$\pi (R\sqrt{2})^2 \text{ ou } 2\pi R^2,$$

c'est-à-dire la surface de l'hémisphère; ses sous-multiples équivalent donc aux sous-multiples correspondants de la sphère. Les parallèles sont représentés par des cercles ayant le pôle pour centre commun; et on donne pour rayon à chacun d'eux la corde de l'arc générateur de la calotte sphérique qui a ce cercle pour base. Il en résulte que l'aire de chaque cercle ainsi décrit équivaut à l'aire de la calotte correspondante: et que par conséquent l'aire de la couronne circulaire comprise entre deux cercles consécutifs équivaut à

l'aire de la zone comprise entre les parallèles que ces cercles représentent. On déduit de cette construction que les aires des quadrilatères curvilignes compris entre deux méridiens et deux parallèles sur la sphère et sur la carte sont égaux. Et comme toutes les figures peuvent être décomposées en quadrilatères de ce genre, avec tel degré d'approximation qu'on le désire, le rapport des aires se trouve exactement conservé. Mais la forme des régions est de plus en plus altérée à mesure qu'elles s'approchent davantage de l'équateur.

Le *canevas homographique* de M. Babinet est fondé sur un autre principe. L'équateur et les parallèles y sont représentés par des lignes droites parallèles entre elles; et leurs distances sont calculées de telle sorte que la portion de l'aire de la carte comprise entre deux de ces droites soit au cercle entier dans le même rapport que l'aire de la zone sphérique comprise entre les parallèles correspondants est à l'aire de la sphère entière. Soit APB (fig. 5) le demi-cercle destiné à représenter la moitié d'un hémisphère; l'équateur est représenté par une droite AB; et le parallèle répondant à la latitude λ devra être représenté par une droite MN parallèle à AB, et qu'il s'agit de déter-

miner. Menons OP perpendiculaire à MN, en son milieu H; joignons OM, et soit α l'angle AOM. L'aire comprise entre les parallèles AB et MN se compose de deux fois le secteur AOM, plus deux fois

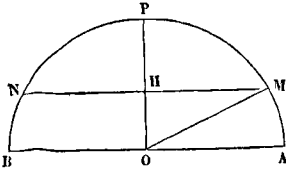


Fig. 5.

le triangle OHM; en appelant r le rayon de la carte, l'aire dont il s'agit sera donc exprimée par

$$2 \left(\frac{1}{2} r^2 \alpha + \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \text{ ou } \frac{1}{2} r^2 (2\alpha + \sin 2\alpha);$$

son rapport au cercle entier, dont la mesure est πr^2 , a donc pour valeur

$$\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\pi}$$

Mais si R représente le rayon du globe, la hauteur de la zone correspondante à l'espace ABNM aura pour valeur $R \sin \lambda$; l'aire de cette zone aura donc pour expression $2\pi R^2 \sin \lambda$; et son rapport à l'aire de la sphère entière aura pour valeur

$$\frac{2\pi R^2 \sin \lambda}{4\pi R^2}, \text{ ou } \frac{\sin \lambda}{2}.$$

Les deux rapports que nous venons d'évaluer devant être égaux, on aura

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin \lambda, \quad [1]$$

relation qui donnera les valeurs de α , et par suite celle de OH ou $r \sin \alpha$, pour toutes les valeurs de λ . Comme l'équation [1] ne peut être résolue directement par rapport à α , il est plus commode de faire varier α de 0 à 90°, de tirer de [1] les valeurs correspondantes de λ , et de procéder ensuite par interpolation pour obtenir les valeurs de α et de $\sin \alpha$ qui correspondent aux valeurs de λ de degré en degré. Nous donnons ci-dessous les valeurs de OH, en parties du rayon de la carte, pour toutes les latitudes, de degré en degré.

λ	OH	λ	OH	λ	OH	λ	OH	λ	OH
0°	0,000	18°	0,245	36°	0,481	54°	0,697	72°	0,880
1	0,014	19	0,259	37	0,493	55	0,708	73	0,889
2	0,027	20	0,272	38	0,506	56	0,719	74	0,898
3	0,041	21	0,285	39	0,518	57	0,730	75	0,906
4	0,055	22	0,299	40	0,531	58	0,741	76	0,914
5	0,068	23	0,312	41	0,543	59	0,752	77	0,922
6	0,082	24	0,325	42	0,556	60	0,762	78	0,930
7	0,096	25	0,338	43	0,568	61	0,773	79	0,938
8	0,110	26	0,352	44	0,580	62	0,783	80	0,945
9	0,123	27	0,365	45	0,592	63	0,794	81	0,952
10	0,137	28	0,378	46	0,604	64	0,804	82	0,959
11	0,150	29	0,391	47	0,616	65	0,814	83	0,966
12	0,164	30	0,404	48	0,628	66	0,824	84	0,972
13	0,178	31	0,417	49	0,640	67	0,834	85	0,978
14	0,191	32	0,430	50	0,651	68	0,843	86	0,984
15	0,205	33	0,443	51	0,663	69	0,853	87	0,989
16	0,218	34	0,455	52	0,674	70	0,862	88	0,994
17	0,232	35	0,468	53	0,686	71	0,873	89	0,997

Les nombres inscrits dans cette table peuvent être calculés avec une approximation suffisante pour les

besoins de la pratique, au moyen de la formule empirique

$$d = 0,014918 \cdot \lambda - 0,0000423 \cdot \lambda^2,$$

dans laquelle d est la distance OH, et λ la latitude.

Les parallèles une fois tracés, on les divise ainsi que l'équateur en un même nombre de parties égales; et par les points de division correspondants on fait passer des courbes qui représentent les méridiens. D'après les propriétés connues de l'ellipse, il est facile de voir que ce sont des courbes de ce genre que l'on obtient; elles ont pour grand axe commun la droite qui représente le méridien central, c'est-à-dire PP' (fig. 6).

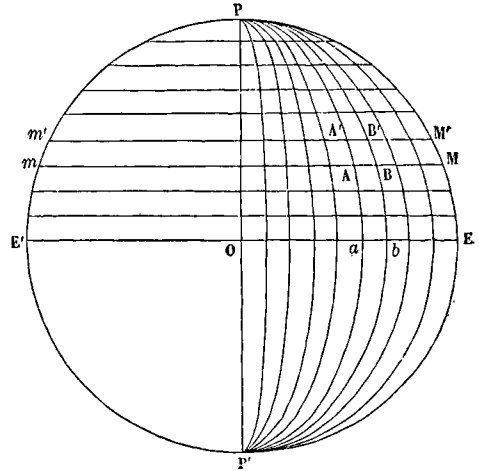


Fig. 6.

Il résulte de ce tracé que les rapports des aires sont fidèlement conservés.

Considérons, en effet, le trapèze curviligne $AA'B'B$ (fig. 6) déterminé par les deux méridiens PaP' , PbP' , et par les deux parallèles Mm , $M'm'$. Ce trapèze est la dix-huitième partie du trapèze $Mm m' M'$, puisque ces trapèzes, qui ont même hauteur, sont entre eux comme les demi-sommes de leurs bases, ou comme leurs bases homologues, attendu que celles-ci sont proportionnelles. Or, le trapèze $Mm m' M'$ représente une certaine fraction $\frac{1}{n}$ du cercle entier; donc le trapèze $ABB'A'$ est la fraction $\frac{1}{18n}$ de ce cercle. D'un autre côté, sur la surface du globe, la demi-zone correspondante à $Mm m' M'$ est la fraction $\frac{1}{n}$ de la demi-sphère; et le trapèze qui répond à $ABB'A'$ est la dix-huitième partie de cette demi-zone, puisque toutes les zones sont divisées en parties égales par des méridiens équidistants; la portion de la surface de la sphère qui répond au trapèze $ABB'A'$ est donc la fraction $\frac{1}{18n}$ de la surface de la demi-sphère représentée par le cercle $EPE'P'$. Le raisonnement serait évidemment le même pour tout trapèze compris entre deux méridiens et deux parallèles aussi rapprochés qu'on voudra; et comme toute figure tracée sur la sphère peut être décomposée en trapèzes de ce genre, avec

veau trapèze $ABba$ égal au premier. On opérera de même de l'autre côté de Yy pour obtenir le trapèze $CDdc$. A la suite de ces trapèzes on en construira d'autres par le même procédé, et l'on aura une série de points D, C, A, B , etc., situés sur un même parallèle, qu'on pourra tracer à la règle ployante; puis une autre série de points d, c, a, b , etc., situés sur un autre parallèle qu'on tracera de même.

Il résulte de la construction que les droites Aa, Bb, Cc, Dd , etc., sont des droites concourantes; elles représenteront les méridiens, et l'on déterminera les autres parallèles en portant sur ces méridiens, à partir des points A, B, C, D , etc., ou a, b, c, d , etc., des longueurs représentant les différences de latitude. Cette construction suppose uniquement que les arcs AC, AB, CD , etc., sont assez petits pour se confondre sensiblement avec leurs cordes. Mais il faut bien remarquer qu'en opérant comme nous venons de le dire, ce n'est plus le cône tangent au parallèle moyen que l'on développe, mais bien le cône, en partie intérieur à la sphère et en partie extérieur qui passe par les parallèles répondant aux points A, B, C, D , etc., et a, b, c, d , etc.

L'idée de substituer à la sphère un cône en partie inscrit et en partie circonscrit appartient au géomètre anglais Murdoch; il s'imposait en outre la condition que la portion de l'aire du cône comprise dans la carte fût équivalente à la zone sphérique ainsi représentée. Cette méthode a été adoptée par quelques géographes, et particulièrement par l'astronome Delisle dans sa grande carte de Russie. Dans ce mode de représentation, il y a contraction pour les parties situées dans la zone comprise entre les deux cercles communs à la sphère et au cône; il y a dilatation pour les parties situées en dehors de cette zone; le rapport des surfaces n'est sensiblement conservé qu'aux environs des deux parallèles situés sur le cône. Quant aux angles, ils ne sont pas notablement altérés, parce que les méridiens et les parallèles se coupent à angles droits sur la carte comme sur la sphère.

Ptolémée sentit lui-même le premier les inconvénients du développement conique pur, lorsqu'il voulut l'appliquer à la représentation du monde connu de son temps; et il fut conduit à y apporter une modification qui contient en germe les méthodes usitées aujourd'hui; elle consiste à remplacer les méridiens rectilignes concourants par des courbes. Dans le tracé indiqué par Ptolémée, ces courbes sont des arcs de cercle déterminés chacun par trois points en portant les degrés de longitude sur trois parallèles concentriques: le parallèle de Thulé, le tropique du Cancer, et le parallèle de Méroé; mais les dimensions adoptées par Ptolémée sont arbitraires, et choisies uniquement de manière à ne pas trop altérer les formes des continents.

On emploie souvent un tracé qui est une modification plus rationnelle du développement conique, et qui se rapproche de la méthode adoptée pour la carte de France, méthode dont il sera question plus loin. On considère deux parallèles situés l'un au tiers, l'autre aux deux tiers de la hauteur de la carte, et on leur applique la construction indiquée ci-dessus (fig. 8). Ces deux parallèles une fois tracés, on en déduit leur centre commun, duquel on trace tous

les autres parallèles, en les faisant passer par les points de division du méridien central en degrés de latitude. Sur ces différents parallèles on porte ensuite des longueurs successives proportionnelles à la valeur du degré de longitude pour chacun des parallèles que l'on considère; et par les points qui portent le même numéro d'ordre sur ces parallèles, on fait passer des courbes qui représentent les méridiens. Ce canevas, connu sous le nom impropre de *projection conique altérée*, ou sous le nom plus inexact encore de *projection de Ptolémée*, et qu'il conviendrait de nommer *développement conique altéré*, est celui dont on se sert de préférence pour le tracé des cartes qui s'étendent beaucoup en longitude, comme la carte d'Europe ou la carte d'Asie, quoique les déformations soient très-sensibles dans les parties extrêmes, c'est-à-dire à l'est et à l'ouest de la carte.

Dans la *Méthode de Flamsteed*, le méridien central est représenté par une ligne droite AB (fig. 9),

que l'on divise en parties proportionnelles aux degrés de latitude. Par tous les points de division, m, n, p, q, r , on élève des perpendiculaires à AB ; elles représentent les parallèles. Sur ces droites mm, nn, pp , etc., on porte des longueurs successives proportionnelles à la valeur du degré de longitude pour chaque latitude considérée; et par les points de même rang, on fait passer des courbes AC, AD, AE, AF , qui représentent les méridiens. Ce canevas conserve le rapport des surfaces; mais les formes sont d'autant plus altérées que les parties considérées sont plus éloignées du méridien central AB .

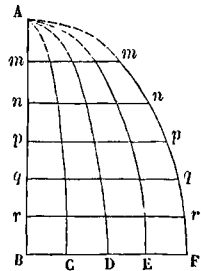


Fig. 9.

La méthode employée pour tracer le canevas de la *Carte de France* du Dépôt de la Guerre est une combinaison des méthodes qui viennent d'être exposées. Elle paraît due à Bonne, ingénieur hydrographe de la marine. On conçoit un cône tangent au globe terrestre suivant le parallèle qui répond à une latitude de 45° ; la portion de sa génératrice comprise entre le sommet et ce parallèle est égale au rayon même du globe, attendu que $\cot 45^\circ = 1$. On projette les cercles de latitude sur ce cône, et on le développe sur un plan. Le méridien central, qui est le méridien de Paris, est représenté par une ligne droite. D'un point pris sur ce méridien, et avec le rayon qui représente celui du globe, on décrit le parallèle moyen, et successivement tous les autres parallèles, en conservant le même centre, et en faisant passer les arcs décrits par les points de division du méridien central, sur lequel on a préalablement porté des longueurs successives proportionnelles aux projections des degrés de latitude, ou plutôt à ces degrés eux-mêmes, car ils se confondent sensiblement avec leurs projections. Sur chacun des parallèles ainsi obtenus, on porte, à partir du méridien central, des longueurs représentant, à l'échelle de la carte, la longueur du degré de longitude pour chacune des latitudes consi-

dérées; et par les points de division correspondants aux mêmes longitudes, on fait passer des courbes qui représentent les méridiens. La carte de France du Dépôt de la Guerre a été exécutée à l'échelle de $\frac{1}{80000}$; elle se compose de 259 feuilles et présente une superficie de 82 mètres carrés. On conçoit qu'avec de pareilles dimensions la construction du canevas ne puisse s'effectuer par des moyens purement graphiques. Les différents points du sol de la France sont rapportés sur la carte au moyen de leurs coordonnées rectangulaires relatives à deux axes, qui sont, l'un le méridien de Paris, l'autre la tangente au parallèle moyen. Ces coordonnées s'obtiennent aisément des coordonnées géographiques du point que l'on veut marquer sur la carte. Soit M (fig. 10) ce point, l sa latitude, L sa longitude, $x = AP$ et $y = MP$ ses coordonnées rectangulaires relatives au méridien central AS et à la tangente AT au parallèle moyen. Soit $AS = R$ le rayon de l'arc de cercle qui représente le parallèle moyen, et ρ celui de l'arc BM qui représente le parallèle du point M. On aura d'abord

$$AB : \pi R = l - 45^\circ : 180,$$

d'où

$$AB = \frac{\pi R (l - 45^\circ)}{180^\circ}; \quad [1]$$

par conséquent

$$\rho = AS - AB = R - \frac{\pi R (l - 45^\circ)}{180^\circ}. \quad [2]$$

On aura ensuite

$$BM = \omega \rho = L \cdot R \cos l,$$

puisque $R \cos l$ est le rayon du parallèle du point M sur le globe; on en tire

$$\omega = \frac{L \cdot R \cos l}{\rho}. \quad [3]$$

La figure donnera enfin

$$x = \rho \sin \omega \quad \text{et} \quad y = R - \rho \cos \omega. \quad [4]$$

Telles sont les formules qui permettront de calculer x et y dans l'hypothèse où le globe terrestre serait une sphère de rayon R . Mais on peut tenir compte de la forme elliptique du méridien. Pour cela, il faut remplacer l'ellipsoïde par la sphère transversalement osculatrice, et le rayon R par la grande normale

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}$$

[Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE, et COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des)]. Dans cette formule, a représente le rayon équatorial, et e l'excentricité de l'ellipse méridienne. L'expression [1] de AB qui convient à la sphère devra être remplacée par l'expression S de l'arc d'ellipse méridienne en fonction des latitudes extrêmes (Voy. FIGURE DE LA TERRE, équation [4]). Il résultera de ces deux changements

$$\rho = N - S.$$

Enfin le rayon du parallèle qui contient le point M sur l'ellipsoïde ayant pour valeur

$$r = N \cos l.$$

(Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE.)

La relation [3] devra être remplacée par

$$\omega = \frac{L \cdot N \cos l}{\rho}$$

et les formules [4] donneront encore x et y . Ces formules ont été réduites en tables par Plessis, ingénieur géographe, de décigrade en décigrade, depuis le 30° jusqu'au 70° grade de latitude, et entre deux méridiens faisant entre eux un angle de 40 grades. Ce sont ces tables qui ont été adoptées pour la construction du canevas de la carte de la France, le plus beau travail de ce genre exécuté jusqu'ici.

Dans le système de la carte de France, le rapport des surfaces est rigoureusement conservé; car si l'on considère deux éléments correspondants, sur la terre et sur la carte, compris entre deux méridiens et deux parallèles déterminés, on peut les assimiler à des trapèzes rectilignes, qui auraient évidemment même mesure. Les angles ne sont pas rigoureusement conservés; mais l'altération est peu considérable. Pour s'en rendre compte, il suffit d'évaluer l'angle sous lequel un méridien coupe un parallèle, et de voir combien il diffère de 90° . La différence est l'angle TMS (fig. 10) que la tangente MT au méridien fait avec le rayon vecteur MS. Or si, dans l'équation [3] ci-dessus, on chasse le dénominateur et qu'on différentie, on obtient

$$\rho d\omega + \omega d\rho = -R \sin l \cdot dl.$$

D'ailleurs de la relation [2] on tire

$$d\rho = -\frac{\pi R}{180^\circ} dl.$$

Tirant de cette dernière la valeur de dl pour la porter dans la précédente, on obtient

$$\frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{180^\circ L \cdot \sin l}{\pi} - \omega. \quad [5]$$

Le premier membre est, comme on le sait, l'expression de tang TMS. On reconnaît d'après la valeur du second membre, que cette tangente diminue avec l ; et l'on constate que, dans les limites de la carte, l'angle TMS n'atteint pas 18° .

Nous ne pouvons terminer cet article sans dire un mot de la Carte de France de Cassini (César-

François). Cette carte, exécutée à l'échelle de $\frac{1}{86400}$,

fut terminée sous le règne de Louis XVI. Pour déterminer sur le globe la position des différents points considérés, Cassini employait des coordonnées géographiques particulières, connues sous les noms de *distances à la méridienne*, et de *distances à la perpendiculaire*. Les axes de ce système étaient le méridien de Paris, et le grand cercle perpendiculaire à ce méridien, mené également par l'Observatoire de Paris. Si d'un point quelconque de la surface terrestre on imagine qu'on abaisse sur le méridien un arc de grand cercle perpendiculaire, ce point sera déterminé par la longueur de cet arc de grand cercle, et par la distance de son pied à l'origine des coordonnées. Toutes les perpendiculaires à la méridienne vont concourir au pôle du méridien (Voy. PERPENDICULAIRE À LA MÉRIDienne). Sur la carte, ces coordonnées étaient remplacées par des coordonnées rectangulaires rapportées à deux axes rec-

tilignes dont l'un représentait le méridien de Paris, et l'autre *ra* perpendiculaire au méridien. Cassini négligeait donc la convergence des perpendiculaires à la méridienne; cependant il n'en résultait pas d'erreur notable, et les déformations sont même un peu moins sensibles sur cette carte que sur la carte du Dépôt de la Guerre. Mais les méridiens et les parallèles ne pourraient pas être tracés d'une manière simple sur la carte de Cassini; et il serait plus difficile d'y tenir compte de la forme elliptique du méridien.

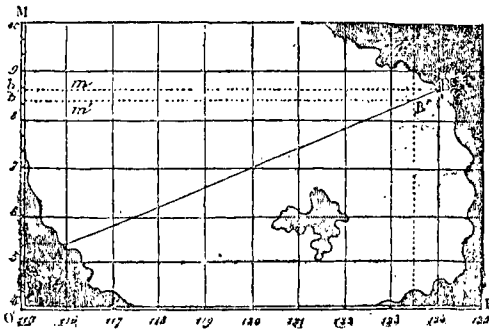
On peut consulter sur la construction des cartes géographiques, la *Description géométrique de la France*, par Cassini; le *Traité de géodésie*, de Puissant; le *Précis de la géographie universelle*, de Malle-Brun; le *Cours élémentaire d'astronomie de l'École polytechnique*; le *Mémorial topographique et militaire*, publié par le *Dépôt de la Guerre*; l'ouvrage ayant pour titre: *Geometrical construction of maps and globes*, par A. Arrowsmith; la notice insérée en tête de l'*Atlas* de M. Babinet; enfin l'ouvrage intitulé: *Construction et dessin des cartes géographiques*, par M. Perrot (*Encyclopédie Rortt*).

CARTES MARINES, cartes géographiques dans lesquelles les méridiens, les parallèles et les arcs de LOXODROMIE (*Voy.* ce mot) sont représentés par des lignes droites, et dont les marins se servent pour résoudre graphiquement les *Problèmes des routes* [*Voy.* *Routes* (problèmes des)]. On leur donne aussi le nom de *Cartes réduites* ou *Cartes de Mercator*, du nom du géographe flamand qui les a imaginées dans le seizième siècle. Voici le principe de leur construction. Supposons, pour fixer les idées, que la carte doive embrasser 10 degrés de longitude et 6 degrés de latitude. On commencera par tirer une horizontale PO, de la longueur qu'on veut donner à

tique log' un logarithme népérien. Si la ligne OP représente le parallèle répondant à une latitude de 4°, et qu'on veuille obtenir les parallèles qui répondent aux latitudes de 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°; on prendra dans la table des latitudes croissantes (ou l'on calculera directement) les quantités $\varphi(4^\circ)$, $\varphi(5^\circ)$, $\varphi(6^\circ)$, $\varphi(7^\circ)$, $\varphi(8^\circ)$, $\varphi(9^\circ)$, $\varphi(10^\circ)$, et on en prendra les différentes successives

$$\begin{aligned} &\varphi(5^\circ) - \varphi(4^\circ), \\ &\varphi(6^\circ) - \varphi(5^\circ), \\ &\varphi(7^\circ) - \varphi(6^\circ), \\ &\varphi(8^\circ) - \varphi(7^\circ), \\ &\varphi(9^\circ) - \varphi(8^\circ), \\ &\varphi(10^\circ) - \varphi(9^\circ). \end{aligned}$$

Ces différences représenteront les intervalles successifs des parallèles cherchés, en prenant pour unité la longueur du degré de longitude comptée sur l'échelle PO. On opérerait d'une manière analogue si l'on voulait déterminer les parallèles de minute en minute, ou de 10' en 10', et ainsi de suite. Par la nature même de la fonction φ , les différences ci-dessus écrites vont en augmentant avec la latitude; il en résulte que les longueurs successives qui représentent le degré ou la minute de latitude vont en croissant avec la latitude, ce qui a fait donner le nom de *latitudes croissantes* aux valeurs de la fonction φ . On appelle *parties méridionales* les minutes comptées sur le méridien, dans les cartes marines. Cette construction a pour effet de déformer les continents; et la déformation est d'autant plus grande qu'on s'éloigne davantage de l'équateur. Mais cette déformation est sans inconvénient, parce que les cartes marines n'ont point pour objet de faire connaître la véritable figure des terres, mais seulement d'offrir au navigateur un moyen commode de résoudre graphiquement les problèmes des routes. Or c'est à quoi les cartes de Mercator se prêtent en effet on ne peut mieux. Soit A le point de partance ou de départ, B le point d'arrivée, l_1 et L_1 les coordonnées géographiques du premier de ces points, l_2 et L_2 celles du second, et s la distance en milles qui les sépare. La droite AB qui les joint sur la carte, coupant tous les méridiens sous un même angle, représente l'arc de loxodromie qui joint ces points sur la surface du globe; et l'angle BAM est l'azimut constant Z de la route du navire (*Voy.* *Route*). Menons les parallèles Aa et Bb, ils intercepteront sur l'échelle OM des latitudes un certain nombre de minutes; prenons une ouverture de compas interceptant sur l'échelle OP le même nombre de minutes, et portons-la de A en m' ; puis menons l'horizontale $m'B'$. Le triangle $Am'B'$ donnera la relation



la dimension transversale de la carte; et on y portera 10 longueurs égales, qui représenteront des degrés, et que l'on subdivisera en minutes. La ligne PO ainsi divisée servira d'échelle pour les opérations graphiques, et représentera le parallèle le plus bas de la carte. Par les points de division, on élèvera des perpendiculaires qui représenteront les méridiens. Les parallèles seront représentés par des droites perpendiculaires aux méridiens; leurs distances successives se déterminent au moyen de la *Table des latitudes croissantes* considérée à l'article LOXODROMIE, et qui donne les valeurs de la fonction

$$\varphi(l) = \log' \tan\left(45^\circ + \frac{l}{2}\right), \quad [1]$$

dans laquelle l exprime la latitude, et la caractéris-

bre de minutes, et portons-la de A en m' ; puis menons l'horizontale $m'B'$. Le triangle $Am'B'$ donnera la relation

$$Am' = AB' \cos BAM \text{ ou } l_1 - l_2 = AB' \cos Z.$$

En comparant cette relation à l'équation [3] de l'article LOXODROMIE, on voit que $AB' = s$, c'est-à-dire que AB' représente, à l'échelle OP, le nombre de milles qui séparent le point de départ du point d'arrivée. Le triangle ABm donne ensuite

$$mB = mA \tan Z.$$

Or, d'après la construction de la carte,

$$mA = ab = \varphi(l_1) - \varphi(l_2),$$

par conséquent

$$mB = \tan Z [\varphi(l_1) - \varphi(l_2)].$$

En comparant cette relation à l'équation [6] de

l'article cité, on reconnaît que $mB = L_1 - L_2$. Et comme les équations [3] et [6] résolvent tous les problèmes des routes, la solution graphique de ces problèmes se réduira à la construction des deux triangles $AB'm'$ et ABm . Nous supposerons le point A donné, et nous aurons à traiter les six cas suivants :

1. On donne Z et s, c'est-à-dire la direction et la longueur (à l'échelle OP) de la route parcourue. Le point B' est donc déterminé, et par suite le point m'. On portera sur l'échelle OP une ouverture de compas égale à Am' ; elle interceptera un certain nombre de minutes; on comptera ce nombre de minutes sur l'échelle OM, de a en b, ce qui fera connaître la latitude du point d'arrivée; par le point b on mènera une parallèle à OP, qui rencontrera en B le prolongement de AB' , le point B sera le point d'arrivée, et la ligne mB mesurera à l'échelle OP la différence des longitudes de A et de B.

2. On donne les coordonnées géographiques du point d'arrivée. C'est-à-dire que le point B est donné. On tirera AB, et l'angle BAm sera la valeur de Z. On prendra sur OP une ouverture de compas égale au nombre de minutes qui séparent les points A et m, ou plutôt a et b; on la portera de A en m', et l'on mènera m'B' parallèle à mB; la longueur AB' mesurera à l'échelle OP le nombre de milles qui séparent les points A et B, c'est-à-dire la valeur de s.

3. On donne l'angle Z et la latitude l_1 du point d'arrivée. On fera au point A un angle mAB égal à Z, et le point B où la droite ainsi menée rencontrera le parallèle Bb répondant à la latitude donnée l_1 , sera la position du point d'arrivée sur la carte. La ligne mB exprimera la différence des longitudes des points A et B, et la distance s en milles s'obtiendra comme dans le cas précédent.

4. On donne l'angle Z et la longitude L_1 du point d'arrivée. On fera au point A un angle mAB égal à Z; et le point B où la droite ainsi menée rencontrera le méridien répondant à la longitude donnée L_1 , sera le point d'arrivée. En menant la parallèle Bb à OP, on aura sur l'échelle OM l'expression de la latitude du point B, la distance s des points A et B en milles s'obtiendra comme dans les deux cas précédents.

5. On donne en milles la distance s des points de départ et d'arrivée, et la latitude de ce dernier. On connaît ainsi le point b. On portera sur l'échelle OP une ouverture de compas qui embrasse un nombre de minutes égal à celui qui sépare les points a et b, on la portera de A en m' sur le méridien du point de départ, et l'on mènera la droite m'B' indéfinie, parallèle à OP. On prendra ensuite sur OP une ouverture de compas égale au nombre de minutes ou de milles qui expriment la distance donnée s, et du point A comme centre, avec cette ouverture de compas, on décrira un arc de cercle qui coupera m'B' en un point B'. On joindra AB' qui, prolongée, viendra rencontrer le parallèle bB en un point B; ce sera le point d'arrivée. La ligne mB donnera sa longitude, et l'angle BAm sera l'angle Z.

6. On donne la distance s en milles et la longitude du point d'arrivée. Ce problème ne peut être résolu que par tâtonnements. On attribue une valeur à l_1 ; on rentre ainsi dans le cas du problème 2;

ayant déterminé s, on examine si sa valeur diffère de la distance donnée; la grandeur et le sens de la différence font voir comment il faut modifier l'hypothèse faite sur l_1 pour se rapprocher de la vérité. Les marins prennent souvent pour point de départ l'hypothèse qui consiste à admettre que AB, mesuré sur l'échelle OM à partir de a, donne le même nombre de minutes que AB' mesuré sur l'échelle OP; cette hypothèse donne le point b, par suite B; enfin B' comme dans le problème 2. Mais le cas qui nous occupe ne se rencontre que très-rarement dans la pratique.

Les Anglais attribuent l'invention des cartes réduites à leur compatriote Edward Wright. Mais l'ouvrage où il en a développé la théorie a été publié 30 ans après la carte de Mercator, qui date de 1569.

CARTES RÉDUITES, ou cartes de Mercator (*Voy. CARTES MARINES*). Les cartes réduites sont ainsi nommées parce que les arcs de méridien y sont réduits, ou plutôt augmentés d'après une certaine loi, afin de conserver sur la carte le rapport qui existe en réalité, à chaque latitude, entre le degré du méridien et le degré du parallèle. (*Voy. LATITUDES CROISSANTES*.)

CATARACTE, appareil qui, dans les machines atmosphériques ou dans les machines de Cornouailles (*Voy. MACHINES A VAPEUR*), employées à l'épuisement des mines, sert à régler le nombre de coups de piston qui doivent être donnés dans une minute. Ces machines n'étant, en effet, destinées qu'à produire un mouvement vertical alternatif, qui ne saurait être régularisé par un volant, un appareil spécial est nécessaire pour régler la vitesse du piston, principalement pendant sa montée. Cet appareil est la cataracte. Le premier appareil de ce genre a été appliqué par Smeaton aux machines de Newcomen perfectionnées; il est représenté figure 1. Un robinet R amène l'eau d'un réservoir

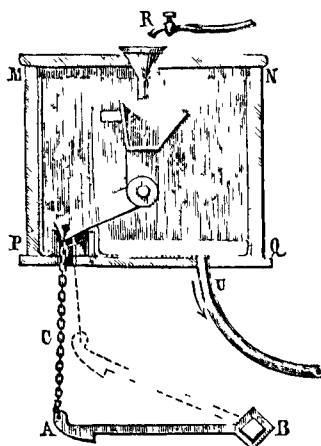


Fig. 1.

voir supérieur dans un vase V, mobile autour d'un axe O, auquel est adapté un levier L. Ce vase est disposé de manière que lorsqu'il est plein d'eau, son poids le fait tourner autour de l'axe O, en entraînant le levier L, jusqu'à ce que, ayant pris la position ponctuée sur la figure, il se vide; et alors le poids du levier L ramène le système à sa posi-

tion primitive. Ce levier est lié par une chaîne C à un loquet AB, qui se soulève en tournant autour du point B lorsque le levier L s'élève lui-même. En se soulevant, le loquet AB laisse tomber un poids qui ouvre la soupape d'injection de la machine, et reprend sa première place. On voit qu'en variant l'ouverture du robinet R, on fait varier le temps pendant lequel la soupape d'injection reste fermée, ou, ce qui revient au même, le temps pendant lequel la vapeur agissant sur la face inférieure du piston, celui-ci reste soulevé. On peut donc régler ainsi le nombre de coups de piston que la machine doit donner par minute. L'eau qui tombe du vase V est reçue dans une boîte rectangulaire MNPQ, où est contenu le système du vase V et du levier L. Le fond de la boîte est disposé de telle sorte que l'eau introduite reste du côté P; elle s'échappe au dehors par le tuyau U.

La cataracte moderne, appliquée aux machines de Cornouailles, est un peu plus compliquée; elle est représentée par la figure 2. Dans une bêche AA

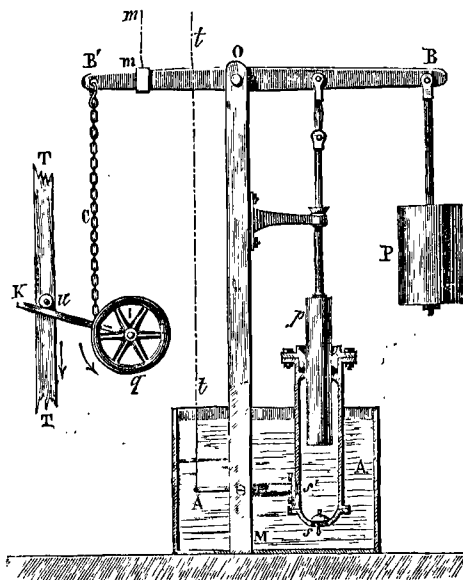


Fig. 2.

contenant de l'eau, est installée une petite pompe aspirante et foulante à piston plongeur *p*. Au bas du corps de pompe est placée une soupape *s* s'ouvrant de bas en haut; et latéralement une autre soupape *s'* s'ouvrant de dedans en dehors dans un tuyau latéral dont l'ouverture est réglée par un diaphragme que l'on manœuvre à l'aide de la tringle *tt*. La tige du piston *p* est articulée à un petit balancier BB', mobile autour de l'axe horizontal O reposant sur deux montants MM (dont un seul est visible sur la figure). A l'extrémité B de ce balancier est suspendu un contre-poids P. A l'autre extrémité B' est attachée une chaîne C qui s'enroule sur une poulie *q* mobile autour de l'axe horizontal I. A cet axe est fixé un bras IK, qui passe très-près de la tige verticale TT de la pompe à air. Un taquet *u* est en saillie sur cette tige. La tringle *mm*, fixée en un autre point du balancier, du côté B', sert à manœuvrer la soupape d'admission de la vapeur.

Voici maintenant le jeu de l'appareil. Lorsque la vapeur est admise sur la face supérieure du piston, elle le fait descendre, ainsi que la tige TT. Le taquet *u*, rencontrant le bras IK, l'abaisse, fait tourner la poulie *q* dans le sens de la flèche, et enroule la chaîne C. Il en résulte que l'extrémité B' du balancier s'abaisse, tandis que l'extrémité B se relève, en entraînant le contre-poids P et le piston plongeur *p*. L'eau de la bêche est aspirée dans le corps de pompe par la soupape *s*, tandis que la soupape latérale *s'* reste fermée. Lorsque au contraire le piston remonte sous l'action du poids de la maîtresse tige des pompes d'épuisement, la tige TT remonte aussi, avec le taquet *u*. L'action du contre-poids P fait remonter l'extrémité B' du balancier, déroule la chaîne, et fait tourner la poulie *q* en sens inverse de la flèche, en maintenant le bras IK en contact avec le taquet *u*. En même temps, le piston plongeur *p* descend avec le contre-poids; la soupape *s* se ferme, la soupape *s'* s'ouvre, et l'eau contenue dans le corps de pompe retourne dans la bêche en traversant le tuyau latéral. Quand la tringle *mm* est arrivée au bout de sa course, elle fait ouvrir la soupape d'admission, et le piston à vapeur recommence une course descendante. Or, la durée de la descente du piston *p* dépend évidemment du temps que l'eau contenue dans le corps de pompe emploie à retourner dans la bêche; et ce temps, on peut le faire varier en ouvrant ou fermant, à l'aide de la tringle *tt*, l'orifice du tuyau latéral. On est donc maître de faire durer la descente du piston plongeur *p*, et par suite la montée du piston à vapeur, autant qu'il est nécessaire pour que le nombre de coups de piston par minute soit égal à celui qu'on s'est imposé à l'avance, d'après le volume des eaux à extraire de la mine. (Voy. le *Traité de la machine à vapeur* de M. de Pambour.)

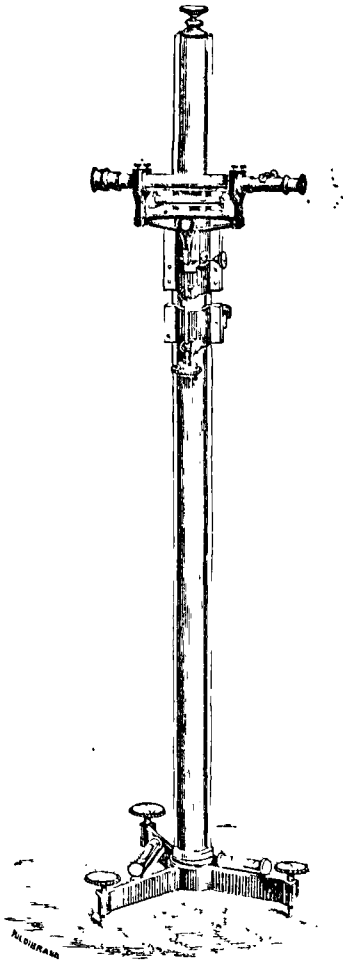
CATHÉTOMETRE (du grec καθήτος, perpendiculaire, et μέτρον, mesure), instrument de précision destiné à mesurer les différences de niveau. Il se compose d'un prisme triangulaire (ou d'un cylindre elliptique) en cuivre fondu, mobile autour d'un axe en acier, sur lequel il est suspendu à sa partie supérieure par une pointe de vis, et autour duquel il peut tourner à frottement très-doux. L'axe en acier repose lui-même sur un support à trois vis calantes. — Le long du prisme peut glisser à frottement doux une boîte, que l'on peut fixer à une hauteur quelconque à l'aide d'une vis de pression, et qui porte une lunette dont l'axe optique est perpendiculaire à l'axe de rotation de l'instrument. Une des faces du prisme est divisée en demi-millimètres. La course de la boîte peut aller jusqu'à un mètre. La boîte BB porte un vernier qui donne les cinquantièmes de millimètre. Le vernier est quelquefois remplacé par un microscope à fil mobile, avec lequel on peut apprécier les centièmes de millimètre. — Sur les collets de la lunette repose un niveau à bulle d'air.

Avant de se servir de l'instrument, il y a plusieurs vérifications à faire.

Il faut d'abord s'assurer que le plan supérieur des collets de la lunette est parallèle au plan de la bulle du niveau. Pour cela, on amène d'abord la bulle entre ses repères au moyen des vis calantes du support. Puis on retourne le niveau bout pour bout sur les collets; si la bulle s'est déplacée, on

corrige la moitié de la différence à l'aide de la vis de rappel qui soulève le niveau par l'une de ses extrémités.

Il faut s'assurer en second lieu que l'axe de fi-



gure de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation du prisme. Pour cela on fait tourner tout le système de 180° autour de l'axe du prisme. Si la bulle a quitté les repères, on la ramène de la moitié de son écart, à l'aide d'une vis de rappel qui fait varier l'inclinaison du support de la lunette par rapport à l'axe du prisme.

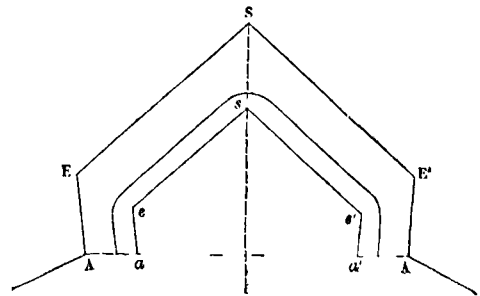
Il faut enfin s'assurer que l'axe optique de la lunette coïncide avec son axe de figure. Pour cela, après avoir amené le prisme dans une direction verticale à l'aide des vis calantes, ce que l'on reconnaît lorsque en faisant tourner le système de la lunette et du niveau de 90° , la bulle ne quitte pas ses repères, on vise avec la lunette un objet quelconque, et l'on observe le point qui se trouve sous la croisée des fils. On fait alors tourner la lunette de 180° autour de son axe de figure ; si la croisée des fils ne répond plus au même point, on rétablit la coïncidence au moyen des vis de rappel qui font mouvoir le réticule.

Ces vérifications étant faites, on peut procéder à la mesure de la différence de niveau de deux points donnés. Pour cela, on desserre la vis de la boîte ; on fait glisser celle-ci, et tourner le prisme autour de son axe jusqu'à ce que l'un des points observés vienne se placer sous la croisée des fils de la lunette ; on lit les demi-millimètres sur l'arête du prisme, et la fraction de demi-millimètre à l'aide du vernier ou du microscope. On obtient ainsi un premier nombre. On opère de la même manière pour le second point à observer ; et l'on obtient un second nombre. La différence de ces deux nombres exprime la différence de niveau cherchée.

On peut ne pas s'imposer la condition que l'axe de la lunette soit exactement parallèle au niveau ; mais il faut alors faire deux pointés et deux lectures pour chacun des deux points observés. On amène la bulle du niveau entre ses repères, et l'on dirige la lunette de manière que le premier point observé soit sous la croisée des fils ; on fait ainsi une première lecture. On retourne la lunette de 180° autour de son axe, puis on retourne tout le niveau sur les collets de la lunette ; on ramène la bulle entre les repères ; on dirige la lunette de manière que le point observé tombe sous la croisée des fils, et l'on fait une seconde lecture. La moyenne des deux lectures donne le nombre que l'on cherche.

CAULICOLES, sortes de tiges charnues, et garnies de feuilles imparfaitement développées, d'où naissent les volutes du chapiteau corinthien (Voy. CHAPITEAU).

CAVALIER, sorte de batterie élevée qui domine toutes les autres défenses d'une place, et qui plonge sur des parties du terrain extérieur imparfaitement vues de la place même. C'est ordinairement sur les bastions qu'on établit les cavaliers, surtout lorsque ces bastions ont une grande capacité, comme dans le système de Cormontaigne, à qui l'on doit cette disposition (Voy. FORTIFICATION). La figure 1 re-



présente le tracé *aeae'* d'un cavalier établi sur un bastion AESE'A' ; il a, comme le bastion, deux faces et deux flancs, généralement parallèles aux faces et aux flancs du bastion. Dans le tracé de Cormontaigne, les faces *es* et *es'* sont à 35° des faces du bastion ; les flancs *ae* et *a'e'* sont à 25° des flancs AE et A'E' ; un fossé de 10° sépare le cavalier du terre-plein du bastion. Le relief du cavalier est analogue à celui de tous les ouvrages de fortification ; il faut que la crête du parapet soit à 3° au moins au-dessus de celle du bastion, ce qui donne en géné-

ral 17^m pour la cote de la ligne de feux du cavalier, au-dessus du fond du fossé de la place. La figure 2 donne le profil du bastion et de son cavalier, avec les principales cotes. Comme le cavalier ne doit

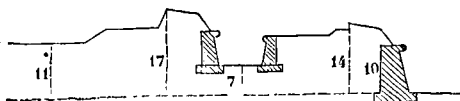


Fig. 2.

porter que de l'artillerie, on ne lui donne pas ordinairement de banquette. A cause de son grand commandement, on est dispensé de le défilier (Voy. DÉFILEMENT). L'escarpe n'est pas toujours revêtue en maçonnerie, surtout aux flancs. — Le général Noizet conseille de ne pas tracer les faces et les flancs du cavalier parallèlement à ceux du bastion, afin qu'ils ne puissent pas être pris d'enfilade par une même batterie; pour cela, il recommande d'ouvrir un peu l'angle saillant *s*, et de faire faire aux flancs *ae* et *a'e* un angle légèrement obtus avec les lignes de défense, c'est-à-dire avec les prolongements des faces des bastions adjacents.

La disposition que nous venons de décrire s'applique surtout aux bastions qui avoisinent un bastion d'attaque; s'il s'agissait d'un bastion destiné à devenir lui-même bastion d'attaque, il faudrait que le cavalier fût organisé en RETRANCHEMENT (Voy. ce mot).

Un cavalier peut, comme un bastion, être plein ou vide; mais on n'emploie la première disposition que lorsque l'espace manque. Un cavalier vide sert souvent à abriter un magasin à poudre, ou quelque autre établissement militaire. Les cavaliers ont des avantages incontestables; ils redoublent les feux du bastion, permettent de fouiller dans la campagne, et garantissent les courtines de l'enfilade. Mais ils sont d'une construction dispendieuse, et ils encomrent et gênent les communications.

Quoique les cavaliers soient ordinairement élevés sur les bastions, on en rencontre cependant à d'autres places, notamment sur les portes, qu'ils protègent de la bombe. Ils n'ont dans ce cas que trois faces, dont l'une parallèle à la courtine, battant l'intérieur de la demi-lune, et les deux autres obliques, qui portent des feux sur les capitales des bastions. Il existe aussi des cavaliers élevés en arrière du corps de place; ils doivent être alors d'autant plus élevés qu'ils sont plus loin de l'enceinte; mais ces cavaliers ne sont employés que dans des circonstances exceptionnelles, soit pour garantir un front des coups de revers, soit pour tirer parti de la forme même du terrain lorsqu'il va en s'élevant vers l'intérieur de la place, soit pour utiliser d'anciennes portions d'enceinte.

Enfin il arrive quelquefois qu'une portion seulement du saillant d'un bastion reçoit un fort relief, et qu'à une certaine distance du sommet ses faces se brisent pour former un rentrant dans lequel on peut établir deux étages de flancs. Mais cette disposition ne constitue pas un cavalier proprement dit. (Voyez pour plus de détails les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

CAVALIERS DE TRANCHÉE, gabionnades élevées aux extrémités du T (Voy. ATTAQUE DES PLACES), pour enfilier le chemin couvert et en chasser les défenseurs. Les Turcs en ont fait usage en 1683, au siège de Vienne. Les cavaliers de tranchée sont établis à 30^m du saillant du chemin couvert, c'est-à-dire sur le glacis; ils sont occupés par des compagnies d'élite, qui font un feu de mousqueterie continu contre le chemin couvert, et particulièrement sur le défilé de la première traverse.

CAVET, sorte de moulure (Voy. MOULURES).

CEINTURE, moulure qui a le même profil que le LISTEL (Voy. ce mot), mais qui appartient à une surface de révolution (Voy. MOULURES). La ceinture est souvent appelée *orle*.

CENTIARE, centième partie de l'*are* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le centiare équivaut à 1 mètre carré.

CENTIGRAMME, centième partie du *gramme* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le centigramme équivaut au poids de 10 millimètres cubes d'eau distillée.

CENTILITRE, centième partie du *litre* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le centilitre équivaut à 10 centimètres cubes.

CENTIME, centième partie du *franc* (Voy. MONNAIES FRANÇAISES). La pièce de 1 centime est en cuivre et son poids est de 1 gramme.

CENTIMÈTRE, centième partie du *mètre* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le centimètre carré est la dix-millième partie du *mètre carré*. Le centimètre cube est la millièmième partie du *mètre cube*.

CENTRE DE CARÈNE, centre de gravité du volume d'eau déplacé par un navire qui flotte. C'est le point d'application de la *poussée* verticale que le fluide exerce sur la carène; la considération de ce point joue un rôle important dans l'étude des conditions de stabilité de l'équilibre du bâtiment. Lorsque le navire est en repos, le plan de symétrie appelé *longitudinal* ayant alors la position verticale, le centre de carène est évidemment dans ce plan; et, pour le déterminer, tout se réduit à trouver sa hauteur au-dessus de la quille, et sa distance à une verticale connue située dans le longitudinal, par exemple à la *perpendiculaire avant*, c'est-à-dire à la verticale du point où le plan de flottaison rencontre la râblure d'étrave (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). C'est par l'application du théorème des moments que l'on détermine ces deux distances. Soit U l'aire d'une section horizontale faite à une hauteur *y* au-dessus de la quille; Udy représentera le volume d'une tranche horizontale infiniment mince ayant U pour base; le centre de gravité de cette tranche étant à une hauteur au-dessus de la quille qui ne peut différer de *y* que d'un infiniment petit, le moment du volume Udy par rapport à la quille sera exprimé par Udy.y, en négligeant un infiniment petit du second ordre. Si l'on suppose le volume immergé de la coque décomposé de la sorte en tranches horizontales infiniment minces, la somme de leurs moments par rapport à la quille sera représentée par l'intégrale

$$\int_0^H U y dy,$$

en désignant par H le tirant d'eau. Si donc on représente par V le volume déplacé et par Y la hau-

teur du centre de carène au-dessus de la quille, on devra avoir

$$VY = \int_0^H Uy dy,$$

relation qui fera connaître Y quand le second membre sera calculé. On peut appliquer à ce calcul la formule approximative de Th. Simpson, en regardant le produit Uy comme l'ordonnée d'une courbe. On divisera la hauteur H en un nombre pair 2n de parties égales; on mènera par les points de division des sections horizontales; soient U₀, U₁, U₂, U₃, ..., U_{2n+1} les aires de ces sections, et y₀, y₁, y₂, y₃, ..., H leurs distances à la quille, on aura pour la valeur approchée de l'intégrale définie ci-dessus

$$\frac{H}{6n} [U_0 y_0 + 4U_1 y_1 + 2U_2 y_2 + 4U_3 y_3 \dots + U_{2n+1} H] \quad [1]$$

et, en divisant par le volume V que l'on sait calculer (Voy. DÉPLACEMENT), on obtiendra la distance Y.

Pour obtenir la distance du centre de carène à la perpendiculaire avant, on considérera des tranches perpendiculaires à la quille: et par un raisonnement identique au précédent, on reconnaîtra qu'en appelant S une section quelconque parallèle au latitudinal, par x sa distance à la perpendiculaire avant, et par X la distance du centre de carène à cette même perpendiculaire, on devra avoir

$$VX = \int_0^L Sx dx,$$

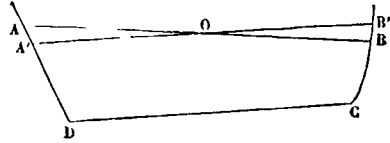
en désignant par L la longueur du navire. Pour calculer le second membre, on divisera L en un nombre pair 2n de parties égales; par les points de division, on mènera des sections parallèles au latitudinal; si S₀, S₁, S₂, S₃, ..., S_{2n+1} représentent les aires de ces sections, et x₀, x₁, x₂, x₃, ..., L leurs distances à la perpendiculaire avant, on aura pour la valeur approchée de l'intégrale

$$\frac{L}{6n} [S_0 x_0 + 4S_1 x_1 + 2S_2 x_2 + 4S_3 x_3 \dots + S_{2n+1} L] \quad [2]$$

et en divisant par V, on aura la distance X. — Il est bon de remarquer que, dans la formule [1], y₀ est nul; et que, dans la formule [2], S₀ et S_{2n+1} sont également nuls, ce qui n'empêche point l'application de ces formules. Mais il faut remarquer en outre que ces calculs ne donnent que le centre de gravité du volume immergé de la coque, abstraction faite de la quille, et des portions immergées de l'étrave et de l'étambot; il faut donc, pour plus d'exactitude, ajouter aux expressions [1] et [2] les moments de ces parties, lesquels s'obtiennent sans difficulté.

Nous avons supposé le navire sans différence, c'est-à-dire que nous avons admis le même tirant d'eau à l'avant et à l'arrière. Lorsque cela n'a pas lieu, la formule [2] est encore applicable, les lettres S₀, S₁, S₂, ..., S_{2n+1}, désignant toujours les aires des sections perpendiculaires à la quille, pourvu que L représente alors non plus la largeur du navire de la perpendiculaire ayant à la perpendiculaire arrière, mais bien la projection parallèlement à la quille de la longueur de la ligne de flottaison. Quant à la formule [1], elle cesse d'être directement applicable; mais on y ramène le calcul par la considération suivante. Soit AB la ligne de flottaison. On sait mesurer le volume immergé ABCD (Voy. DÉPLACEMENT). Supposons qu'on ait l'ÉCHELLE DE SOLIDITÉ du navire (Voy. ce

mot); cette échelle donnera le tirant d'eau sans différence qui répondrait au déplacement calculé; et pourra donc tracer parallèlement à la quille une droite A'B' qui serait la ligne de flottaison si le



navire était sans différence; et, par conséquent, on saura déterminer la distance Y du centre de carène répondant à cette ligne d'eau fictive, au-dessus de la quille CD; il faudra pour cela appliquer la formule [1]. Concevons maintenant qu'on ait déterminé le volume commun v des portions AOA', BOB', que l'on nomme des onglets, et les distances y et y' de leurs centres de gravité à la quille. Soit enfin V le volume immergé et Y' la distance du centre de carène cherché au-dessus de la quille. Le volume ABCD étant égal à A'B'CD, augmenté de AOA' et diminué de BOB', on aura, en prenant les moments par rapport à CD,

$$VY' = VY + vy - v'y';$$

$$\text{d'où} \quad Y' = Y + \frac{v}{V}(y - y'), \quad [3]$$

formule à l'aide de laquelle on déterminera facilement Y'.

Pour déterminer le volume v des onglets, et la distance y et y' de leurs centres de gravité à la quille, on décompose ces onglets de diverses manières; la plus simple consiste à mener des plans parallèles au longitudinal, et assez rapprochés pour que la tranche comprise entre deux de ces plans consécutifs puisse être considérée comme un prismatien triangulaire, ou comme une pyramide triangulaire tronquée; on mesure aisément le volume de chaque prisme; leur somme donne le volume v de l'onglet; on détermine aisément aussi le centre de gravité de chaque prisme; et, en prenant les moments par rapport à la quille, on obtient les distances y et y'. Le calcul n'offre d'autre inconvénient que sa longueur.

Si l'on n'avait pas l'échelle de solidité du navire, on mènerait la parallèle A'B' à la quille d'une manière arbitraire; les volumes des onglets ne seraient plus égaux, appelons-les v et v'; appelons Q le volume A'B'CD, qu'il faudrait déterminer directement; on aurait alors

$$V = Q + v - v',$$

$$\text{et} \quad VY' = QY + vy - v'y',$$

d'où l'on tirerait

$$Y' = \frac{QY + vy - v'y'}{Q + v - v'}, \quad [1]$$

formule un peu moins simple que la formule [3].

Voici, pour quelques bâtiments à hélice, la position du centre de carène, quand le navire est sans différence.

Espèce des navires.	Coordonnées du centre de carène.	
	Distance au-dessus de la quille.	Distance en avant de la verticale au milieu de la flottaison.
Vaisseau de 1 ^{er} rang.....	4 ^m ,312	1 ^m ,411
Vaisseau de 2 ^e rang.....	4, 090	1, 460

Espèce des navires.	Coordonnées du centre de carène.	
	Distance au-dessus de la quille.	Distance en avant de la verticale au milieu de la flottaison.
Vaisseau de 3 ^e rang	4,095	1,770
Frégate de 1 ^{er} rang.....	3,313	1,447
Frégate de 2 ^e rang.....	3,274	1,354
Frégate de 3 ^e rang.....	2,632	1,637
Corvette de 400 chevaux....	2,495	0,350
Aviso de 1 ^{re} classe.....	1,900	0,190
Aviso de 2 ^e classe.....	1,638	1,060
Aviso de flottille, en fer....	1,388	0,720
Canonnière à vapeur.....	1,096	0,152
Chaloupe canonnière.....	0,489	0,517
Transport de 1200 tonneaux.	2,758	0,282
Batterie cuirassée.....	1,190 ¹	0,990 ²

CENTRE DE GRAVITÉ, centre des forces parallèles dues à la pesanteur. Les poids des molécules qui composent un même corps solide sont des forces verticales dirigées de haut en bas; leur résultante (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*) est le poids total du corps; et le centre des forces parallèles prend le nom de *centre de gravité*. A la vérité, on ne peut pas ici faire varier la direction commune des forces; mais on peut, ce qui revient au même, faire varier la position du corps par rapport à la verticale; et le centre de gravité est le point par lequel passe constamment la résultante du poids de toutes les molécules, quelle que soit la position que l'on donne au corps. Si le centre de gravité est un des points du corps solide, on peut concevoir qu'on remplace les poids de toutes les molécules par une force verticale unique égale à leur somme et appliquée au centre de gravité. Si le centre de gravité est situé hors du corps, cette substitution ne peut plus se concevoir qu'en supposant le point invariablement lié au système, fiction qui n'est qu'un moyen de simplifier les démonstrations, les données ou les formules, mais à laquelle on ne doit attacher aucune idée de réalité. C'est également pour simplifier les énoncés et les formules qu'on étend quelquefois la notion du centre de gravité à un système qui n'est pas solide; il n'existe dans ce cas aucune force capable de produire à elle seule l'effet des poids des diverses molécules qui composent le système; mais il est souvent commode d'introduire dans les calculs la résultante qu'auraient ces poids si le système devenait instantanément solide, et par suite de considérer le point par lequel elle passerait constamment si le système, sans changer de forme, venait à changer de position par rapport à la verticale, c'est-à-dire le centre de gravité de ce système. Dans tout ce qui va suivre on raisonnera comme s'il s'agissait d'un corps solide.

Les corps sont composés en réalité de molécules séparées les unes des autres; mais, dans la recherche du centre de gravité, on les considère comme formés d'une matière continue; cette manière de voir n'a d'autre effet que de déplacer de quantités infiniment petites les points d'application des forces verticales considérées, et les résultats n'en sont point altérés.

1. Sur bordé de fond. — 2. En arrière.

I. Si p, p', p'', \dots , etc., désignent les poids des éléments de volume du corps, $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, etc., leurs coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires, P le poids total du système, et X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité, on a, en prenant les moments successivement par rapport aux trois plans coordonnés (*Voy. MOMENTS*)

$$PX = px + p'x' + p''x'' + \dots = \Sigma px,$$

$$PY = py + p'y' + p''y'' + \dots = \Sigma py,$$

$$PZ = pz + p'z' + p''z'' + \dots = \Sigma pz,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{\Sigma px}{P}, \quad Y = \frac{\Sigma py}{P}, \quad Z = \frac{\Sigma pz}{P}, \quad [1]$$

formules qui déterminent la position du centre de gravité quand on connaît le poids total du système, et que l'on sait calculer les sommes qui figurent aux numérateurs de ces expressions.

II. Lorsque le corps que l'on considère est *homogène*, c'est-à-dire quand ses parties, quelque petites qu'on les suppose, ont des poids proportionnels à leur volume, la position du centre de gravité dans le corps devient indépendante de la nature de ce corps; et sa recherche n'est plus qu'une question de géométrie. En effet, si l'on appelle v, v', v'', \dots , les volumes des divers éléments du corps, V le volume total, et Π le poids de l'unité de volume de la matière dont le corps est formé, on aura

$$p = \Pi v, \quad p' = \Pi v', \quad p'' = \Pi v'', \quad \dots, \quad P = \Pi V,$$

et les formules [1] deviendront, en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur commun Π ,

$$X = \frac{\Sigma vx}{V}, \quad Y = \frac{\Sigma vy}{V}, \quad Z = \frac{\Sigma vz}{V}, \quad [2]$$

formules qui ne dépendent plus de la nature du corps, mais seulement de sa forme géométrique.

Si l'une des dimensions du corps était infiniment petite par rapport aux deux autres, de telle sorte que le corps se réduisît à une surface, les quantités v, v', v'', \dots , désigneraient les éléments de cette surface et V son aire totale. Si deux dimensions étaient infiniment petites par rapport à la troisième, de telle sorte que le corps se réduisît à une ligne, il faudrait entendre par v, v', v'', \dots , les éléments de cette ligne, et par V sa longueur totale.

Les formules [2] subsisteraient encore si v, v', v'', \dots , au lieu de représenter les éléments infiniment petits du volume, de l'aire, ou de la longueur exprimés par V , représentaient les parties finies de ce volume, de cette aire, ou de cette longueur, pourvu que x, y, z , fussent alors les coordonnées du centre de gravité de $v; x', y', z'$, les coordonnées du centre de gravité de $v';$ et ainsi de suite; car on peut considérer le poids de chaque partie comme une force verticale appliquée à son centre de gravité, par conséquent le moment du poids total est égal à la somme des moments des poids partiels; et, dans le cas des corps homogènes, le moment du volume total est égal à la somme des moments des volumes partiels, si l'on entend par moment d'un volume par rapport à un plan le produit de ce volume par la distance de son centre de gravité à ce plan. En appliquant ce théorème aux trois plans coordonnés successivement et divisant par le volume total V , on retomberait donc sur les équations [2].

III. Pour simplifier la recherche du centre de gravité des corps homogènes, on peut s'appuyer sur les propositions suivantes:

1. Si le corps peut se décomposer en diverses parties dont les centres de gravité soient sur un même plan ou sur une même droite, le centre de gravité du corps entier sera aussi sur ce plan ou sur cette droite. En effet, le poids de chaque partie peut être supposé appliqué au centre de gravité de cette partie; on a donc à composer un système de forces parallèles et de même sens dont les points d'application sont situés, par hypothèse, dans un même plan ou sur une même droite. Or, d'après la construction qui détermine le centre des forces parallèles (Voy. COMPOSITION DES FORCES), ce point sera lui-même situé dans ce plan ou sur cette droite; et ce point n'est autre chose que le centre de gravité du corps total.

2. Si le corps a un plan de symétrie, son centre de gravité est dans ce plan. Il est clair, en effet, que les centres de gravité des deux parties du corps séparées par le plan de symétrie sont symétriquement placés par rapport à ce plan. Or, ces centres de gravité peuvent être considérés comme les points d'application des poids des deux parties, c'est-à-dire de deux forces égales, parallèles et de même sens. La résultante de ces deux forces passe donc par le milieu de la droite qui joint leurs plans d'application, et cela, quelle que soit la position du corps par rapport à la verticale; ce milieu n'est donc que le centre de gravité du corps. D'ailleurs il est évident que ce milieu est dans le plan de symétrie.

3. Si le corps a un axe de symétrie, son centre de gravité est sur cet axe; car un axe de symétrie est toujours l'intersection de deux plans de symétrie au moins.

4. Si le corps a un centre de figure, son centre de gravité est en ce point; car un centre de figure est l'intersection de deux axes de symétrie au moins.

5. On peut remplacer les éléments de volume, d'aire, ou de longueur, qui composent le système considéré, par d'autres éléments de volume, d'aire, ou de longueur qui leur soient proportionnels, pourvu qu'ils aient leurs centres de gravité aux mêmes points; car le centre des forces parallèles ne change pas quand on remplace les forces données par d'autres forces proportionnelles appliquées aux mêmes points.

IV. Nous passerons à la recherche du centre de gravité des principales figures, en commençant par les lignes.

LIGNE DROITE. Le centre de gravité d'une ligne droite est en son milieu; car ce milieu est dans le plan de symétrie perpendiculaire à la droite.

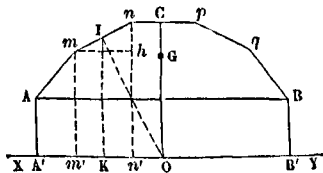


Fig. 1.

LIGNE BRISÉE RÉGULIÈRE. Soit $AmpqB$ (fig. 1) une ligne brisée régulière, AB sa corde, O le centre de la circonférence inscrite, OC son axe de symétrie. D'abord le centre de gravité cherché G sera sur OC ; il reste

à trouver la distance GO . Pour cela, menons par le centre une parallèle XY à la corde AB ; et projetons sur cette parallèle les sommets de la ligne brisée, à l'aide des perpendiculaires $AA', mm', nn', \dots BB'$. Soit I le milieu d'un côté quelconque mn ; joignons IO ; menons IK perpendiculaire à XY , et mh parallèle à cette ligne. Soit x la distance IK du centre de gravité I du côté mn à la droite XY , et X la distance OG . Si nous prenons les moments par rapport à un plan mené suivant XY perpendiculairement au plan de la ligne brisée, nous aurons, d'après les formules [2],

$$X = \frac{\sum vx}{V} \text{ ou } X = \frac{\sum mn \cdot IK}{V}$$

Or, les triangles semblables IKO et mhn donnent $mn : IO = mh : IK$, d'où $mn \cdot IK = IO \cdot mh$, par conséquent

$$X = \frac{\sum IO \cdot mh}{V};$$

ou, attendu que IO , rayon de la circonférence inscrite, est un facteur commun à tous les termes du numérateur, et que mh peut être remplacé par $m'n'$,

$$X = \frac{IO \cdot \sum m'n'}{V}$$

Mais $\sum m'n'$, ou la somme des projections des côtés de la ligne brisée sur XY , n'est autre chose que $A'B'$, lequel est égal à AB ; et V est ici la longueur $AmpqB$ de la ligne brisée; on peut donc écrire

$$OG = \frac{IO \cdot AB}{AmpqB},$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité d'une ligne brisée à son centre est une quatrième proportionnelle à la longueur de cette ligne brisée, à sa corde, et au rayon de la circonférence inscrite.

ARC DE CERCLE. La proposition précédente est indépendante du nombre des côtés de la ligne brisée; elle subsiste donc encore si ce nombre devient infiniment grand, c'est-à-dire si la ligne brisée devient un arc de cercle. Si l'on nomme L la longueur de l'arc développé, C sa corde, et R le rayon du cercle inscrit, qui se confond alors avec celui de l'arc lui-même, on a

$$X = \frac{R \cdot C}{L}$$

On peut donc dire que : le centre de gravité d'un arc de cercle est sur son axe de symétrie, et sa distance au centre est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde, et au rayon.

Pour une demi-circonférence, on aurait

$$X = \frac{R \cdot 2R}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R.$$

COURBE QUELCONQUE. Si la courbe est plane, soit $y = f(x)$ son équation par rapport à deux axes rectangulaires tracés dans son plan, et soit ds un élément de la courbe, répondant aux coordonnées x et y ; les équations des moments donneront, en appelant s la longueur développée de la courbe depuis le point dont l'abscisse est x_0 , jusqu'au point dont l'abscisse est x_1 ,

$$s \cdot X = \int_{x_0}^{x_1} x ds \text{ et } s \cdot Y = \int_{x_0}^{x_1} y ds.$$

Mais on a $ds = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$;

par conséquent il viendra, en tirant les va.eurs de X et de Y,

$$X = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

et

$$Y = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

Si la courbe est à double courbure, soient $x = \varphi(z)$ et $y = \psi(z)$ ses équations rapportées à trois axes rectangulaires; soit toujours s la longueur développée de la courbe, depuis $z = z_0$ jusqu'à $z = z_1$, on aura par le théorème des moments

$$sX = \int_{z_0}^{z_1} x ds, \quad sY = \int_{z_0}^{z_1} y ds, \quad sZ = \int_{z_0}^{z_1} z ds;$$

mais ici $ds = dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}$; en tirant donc les valeurs de X, Y, Z, il viendra

$$X = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \varphi(z) dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}{\int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}$$

$$Y = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \psi(z) dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}{\int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}$$

$$Z = \frac{\int_{z_1}^{z_0} z dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}{\int_{z_1}^{z_0} dz \sqrt{1 + [\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2}}$$

V. Passons à la recherche du centre de gravité des figures planes.

RECTANGLE. Le centre de gravité d'un rectangle est son centre de figure, c'est-à-dire le point d'intersection de ses médianes, qui sont des axes de symétrie.

PARALLÉLOGRAMME. Soit ABCD (fig. 2) le parallélogramme proposé. Menons la diagonale BD, qui le divisera en deux triangles égaux.

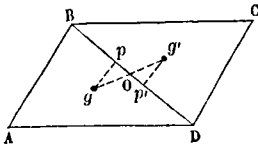


Fig. 2.

Sans connaître la position des points g et g' par rapport aux deux triangles auxquels ils se rapportent, on peut admettre que, comme ces triangles sont égaux, leurs centres de gravité coïncide-

raient si on venait à superposer les triangles. On a donc

$$gp = g'p' \quad \text{et} \quad Op = Op',$$

par conséquent les angles pOg et $p'Og'$ sont égaux, et $gO = g'O$. Donc gOg' est une ligne droite, et le point O en est le milieu. Mais les poids des triangles ABD et BDC peuvent être considérés comme appliqués en g et g' ; le point d'application de leur résultante, c'est-à-dire le centre de gravité du parallélogramme, est donc situé au milieu de la droite gg' , c'est-à-dire au point O , milieu de la diagonale BD . Ainsi le centre de gravité d'un parallélogramme est au milieu des diagonales, qui est aussi le point de rencontre des deux médianes.

TRIANGLE. Soit ABC (fig. 3) le triangle proposé. Menons la médiane AI; menons bc et de parallèles à BC; puis bb', cc', dd', ee' parallèles à la médiane. La droite AI, passant par le milieu de bc et par le milieu de de passe aussi par le milieu de $b'e'$ et par le milieu de $d'e'$; car on a $b'd = bd'$ et $ec' = e'c$. Le centre de gravité du parallélogramme $bb'b'c'$ est donc situé sur la droite AI, au milieu O de la partie de cette droite comprise entre bc et de . De même, le centre de gravité du parallélogramme $d'dee'$ est situé sur AI, au milieu de la portion de cette droite comprise entre bc et de , c'est-à-dire au même point O. Mais plus les droites bc et de seront rapprochées, plus la différence des parallélogrammes $bb'b'c'$ et $d'dee'$ sera petite par rapport à chacun d'eux; plus par conséquent ils tendent à se confondre l'un avec l'autre, et avec le trapèze $bdec$ qui reste compris entre eux. Donc, lorsque la distance des droites bc et de sera infiniment petite, on pourra dire que le trapèze $bdec$ se confond avec l'un quelconque de ces parallélogrammes, et a, par conséquent, son centre de gravité au même point O sur la médiane AI. Il en résulte que, si l'on conçoit le triangle décomposé par des parallèles à BC en trapèzes infiniment minces, tous ces trapèzes pourront être considérés comme ayant leurs centres de gravité sur la médiane AI. Donc, en vertu du principe I établi plus haut, le centre de gravité du triangle ABC est situé sur cette même médiane.

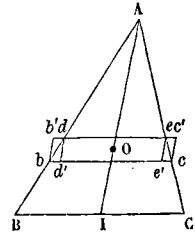


Fig. 3.

Cela posé, comme on en pourrait dire autant pour une autre médiane en prenant un autre côté pour base, il en résulte que le centre de gravité d'un triangle est au point de rencontre de ses trois médianes. Soient AI et BH (fig. 4) deux de ces médianes, G leur point de rencontre. Joignons IH. Les triangles IGH et AGB étant semblables, on aura la proportion

$$IG : AG = IH : AB.$$

Mais les triangles ICH et BCA étant aussi semblables, on aura

$$IH : AB = IC : BC = 1 : 2,$$

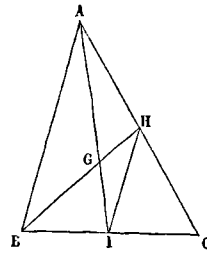


Fig. 4.

donc, à cause du rapport commun,

$$IG : AG = 12,$$

d'où l'on tire

$$IG : IG + AG = 1 : 1 + 2,$$

ou

$$IG : AI = 1 : 3,$$

c'est-à-dire que IG est le tiers de AI. Ainsi le centre de gravité d'un triangle est situé sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base, au tiers de cette droite à partir de la base.

Le centre de gravité d'un triangle jouit d'une propriété qu'il est utile de connaître. Imaginons qu'aux trois sommets soient appliquées trois forces égales, parallèles et de même sens, dont nous représenterons l'intensité commune par P; et cherchons en quel point du triangle passe la résultante de ces trois forces. On peut d'abord composer les deux forces P appliquées en B et en C, ce qui donnera une force 2P appliquée au milieu I de BC. On aura ensuite à composer cette force 2P appliquée en I avec la force P appliquée en A. Pour cela il faudra diviser la distance AI dans le rapport inverse de ces forces, c'est-à-dire dans le rapport inverse des nombres 2 et 1, ce qui donnera précisément le point G. Par conséquent le centre de gravité d'un triangle peut être regardé comme le point d'application de la résultante de trois forces égales, parallèles et de même sens appliquées respectivement aux trois sommets.

TRAPÈZE. Soit ABCD (fig. 5) le trapèze proposé. Prolongeons les côtés non parallèles jusqu'à leur rencontre en S; joignons ce point au milieu I de la base AC; la ligne de jonction passera aussi par le milieu H de la base BD. Par les considérations employées plus haut on fera voir que le centre de gravité du trapèze doit se trouver sur la droite IH. Mais si l'on tire la diagonale AD, et que l'on détermine les centres de gravité g et g' des deux

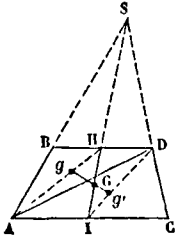


Fig. 5.

triangles ABD et ADC dans lesquels le trapèze se trouve décomposé, le centre de gravité du trapèze devra aussi se trouver sur la droite gg' , puisque le poids du trapèze est la résultante des poids des deux triangles. Le centre de gravité demandé est donc en G à l'intersection des droites IH et gg' .

On peut remarquer que la droite gg' est divisée au point G dans le rapport inverse des poids ou des surfaces des deux triangles; mais ces triangles ont même hauteur; la droite gg' est donc divisée dans le rapport inverse des bases AD et BC.

On peut avoir intérêt à connaître aussi le rapport des segments GI et GH de la médiane IH; pour cela on procédera comme il suit. Le rapport demandé est le même que le rapport des distances du point G aux deux bases. Soient x et y ces distances, et $h = x + y$ la hauteur du trapèze. Désignons AC par B et BD par b . Appliquons au poids du trapèze et aux poids des deux triangles BAD et ACD le théorème des moments, en prenant d'abord pour plan des moments un plan mené suivant AC perpendiculairement au plan du trapèze. Les distances des

centres de gravité g et g' au plan des moments, ou, ce qui revient au même, à AC, seront $\frac{1}{3}h$ pour le

triangle DAC et $\frac{2}{3}h$ pour le triangle BAD; nous aurons donc en remplaçant les poids par les aires qui leur correspondent :

$$ABDC \cdot x = DAC \cdot \frac{1}{3}h + BAD \cdot \frac{2}{3}h,$$

ou

$$ABDC \cdot x = \frac{1}{6}h^2(B + 2b).$$

En prenant les moments par rapport à un plan mené suivant BD perpendiculairement au plan du trapèze, et observant que la distance des points g et g' à BD est $\frac{1}{3}h$ pour le premier, et $\frac{2}{3}h$ pour le second, on aura de même

$$ABDC \cdot y = DAC \cdot \frac{2}{3}h + BAD \cdot \frac{1}{3}h,$$

ou

$$ABDC \cdot y = \frac{1}{6}h^2(2B + b).$$

Si l'on divise membre à membre les deux équations ainsi obtenues, on trouve

$$\frac{x}{y} \text{ ou } \frac{GI}{GH} = \frac{B + 2b}{2B + b}.$$

Cette formule conduit à la construction suivante : Prolongez DA (fig. 6) d'une quantité AM égale à

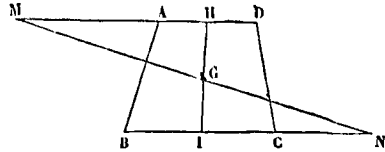


Fig. 6.

BC; prolongez BC en sens contraire d'une quantité CN égale à AD; joignez MN, qui coupera la médiane IH au centre de gravité G. On aura, en effet :

$$\frac{GI}{GH} = \frac{IN}{MH} = \frac{\frac{1}{2}B + b}{B + \frac{1}{2}b} = \frac{B + 2b}{2B + b},$$

comme l'exige la formule.

Si les bases B et b différaient infiniment peu l'une de l'autre, $B + 2b$ serait sensiblement égal à $2B + b$, et l'on aurait sensiblement $GI = GH$, c'est-à-dire que le point G serait au milieu de la médiane. C'est ce qui arrive pour les trapèzes élémentaires considérés dans la démonstration relative au centre de gravité du triangle.

QUADRILATÈRE QUELCONQUE. Soit ABCD (fig. 7) le quadrilatère proposé. Tirons les deux diagonales, qui se couperont en un certain point E. Soit I le milieu de la diagonale AC; joignons DI et BI; prenons sur ces droites les points g et g' au tiers de leur longueur à partir du point I; ces points seront les centres de gravité des triangles ADC et ABC. Par conséquent, si on les joint par une droite gg' , le centre de gravité du quadrilatère sera sur cette droite, et la divisera en raison inverse des surfaces des deux triangles. Or, ces triangles, qui ont même base AC, sont entre eux comme leurs hauteurs, ou comme les droites DE et BE qui leur sont propor-

tionnelles. On devra donc avoir, si G est le point cherché,

$$Gg : Gg' = BE : DE.$$

Pour remplir cette condition, il suffit de prendre BH égal à DE, et de joindre le point H au point I par une droite qui coupera gg' au point demandé G. Car on aura

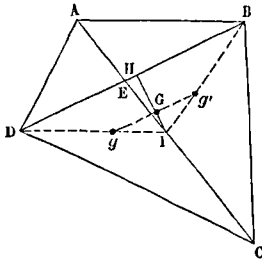


Fig. 7.

$Gg : Gg' = DH : BH = BE : DE.$
On peut remarquer qu'on a aussi $IG : IH = Ig : ID$, et que, par conséquent, IG est le tiers de IH. De là cette construction : Tirez les deux diagonales AC et BD, qui se coupent en E; prenez sur l'une d'elles la longueur BH égale au segment DE; joignez le point H ainsi obtenu au milieu I de l'autre diagonale, et prenez le tiers de IH à partir du point I; le point G ainsi obtenu sera le centre de gravité du quadrilatère.

POLYGONE QUELCONQUE. Pour obtenir le centre de gravité d'un polygone quelconque, on le divisera en triangles; on déterminera l'aire et le centre de gravité de chacun d'eux; et l'on appliquera la construction qui donne le centre des forces parallèles. (Voy. COMPOSITION DES FORCES.)

POLYGONE RÉGULIER. Le centre de gravité d'un polygone régulier est son centre de figure.

CERCLE. Le centre de gravité d'un cercle est son centre.

SECTEUR CIRCULAIRE. Soit AOB (fig. 8) un secteur circulaire; concevons qu'on ait divisé l'arc AB qui lui sert de base en un très-grand nombre de parties égales, et qu'on ait mené des rayons à tous les points de division; la surface du secteur se trouvera divisée en un très-grand nombre de secteurs élémentaires égaux, tels que MON, et, comme les arcs tels que MN

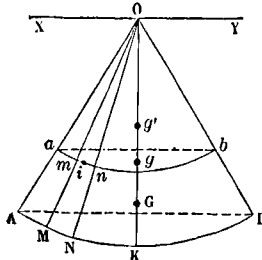


Fig. 8.

sont supposés très-petits, ces secteurs peuvent être regardés comme des triangles rectilignes. Du point O comme centre, avec un rayon égal aux $\frac{2}{3}$ du rayon OA, décrivons l'arc ab ; cet arc se trouvera divisé par les rayons, tels que OM et ON, menés aux points de divisions de l'arc AB, en un même nombre de parties égales, telles que mn ; lesquelles pourront être considérées comme des droites parallèles aux éléments correspondants de l'arc AB. Le centre de gravité du triangle MON est au milieu i de la droite mn menée parallèlement à la base aux $\frac{2}{3}$ de la distance entre le sommet et cette base; car ce point i appartient à la médiane qui serait menée du point O, et aux $\frac{2}{3}$ de cette médiane à partir du sommet. Or, ce point i

est aussi le milieu de mn ; et l'on pourrait en dire autant pour les autres triangles élémentaires. En vertu du principe V établi plus haut, on peut donc remplacer les éléments de surface tels que MON par les éléments de ligne tels que mn , puisqu'ils leur sont proportionnels et qu'ils ont leurs centres de gravité aux mêmes points. Il en résulte que le centre de gravité du secteur circulaire est le même que celui de l'arc ab décrit du centre O avec les $\frac{2}{3}$ du rayon. Ce centre de gravité est donc sur la bissectrice de l'angle AOB, à une distance ρ du centre marquée par l'expression

$$\rho = \frac{Oa \cdot ab}{amb}.$$

Or, $Oa = \frac{2}{3} OA$, $ab = \frac{2}{3} AB$, $amb = \frac{2}{3} AMB$;

on peut donc écrire

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \cdot AB}{AMB},$$

c'est-à-dire que pour obtenir le centre de gravité d'un secteur circulaire, il suffit de déterminer le centre de gravité de l'arc qui lui sert de base, de joindre ce point au centre, et de prendre les deux tiers de la ligne de jonction, à partir du centre.

Pour un demi-cercle de rayon R, on aurait

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot 2R}{\pi R} \text{ ou } \rho = \frac{4}{3\pi} \cdot R.$$

TRAPÈZE CIRCULAIRE. Soit ABba (fig. 8) un trapèze circulaire; appelons R et r les rayons OA et Oa, et α l'angle AOB. Le centre de gravité cherché G sera sur la bissectrice OK de l'angle AOB; car le centre de gravité g du secteur aOb et le centre de gravité g' du secteur AOB sont sur cette droite, et le poids du secteur AOB est la résultante du poids du secteur aOb et du poids du trapèze ABba. Par le point O menons un plan perpendiculaire à OK; et soit XY la trace de ce plan sur le plan du trapèze; en prenant les moments par rapport à ce plan, on aura

$$AOB \cdot Og = aOb \cdot Og' + ABba \cdot OG,$$

d'où $OG = \frac{AOB \cdot Og - aOb \cdot Og'}{AOB - aOb}.$

Or, $AOB = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, $aOb = \frac{1}{2} r^2 \alpha$,

$$Og = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot 2R \sin \frac{1}{2} \alpha}{R \alpha}, \quad Og' = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 2r \sin \frac{1}{2} \alpha}{r \alpha};$$

substituant, et réduisant, on obtient

$$OG = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha},$$

ou $OG = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha}.$

Si l'on désigne par ρ la demi-somme des rayons R et r et par e leur demi-différence, ce qui donne

$$R = \rho + e \text{ et } r = \rho - e,$$

on peut mettre l'expression ci-dessus sous la forme

$$OG = \left(\rho + \frac{e^2}{3\rho} \right) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha},$$

qui est souvent commode à employer, notamment

dans la recherche du centre de gravité des voûtes d'un berceau en plein-cintre ou en arc de cercle. (Voy. VOÛTES.)

FIGURE TERMINÉE PAR UNE COURBE QUELCONQUE. Considérons d'abord un trapèze ABDC (fig. 9), ter-

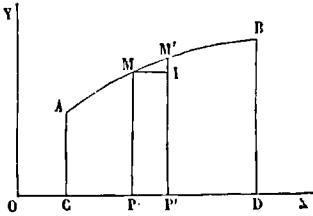


Fig. 9.

miné par une courbe quelconque AB, dont l'équation est donnée, par l'axe des x et par deux ordonnées AC et BD répondant aux abscisses a et b . On peut considérer ce trapèze comme composé d'une infinité de rectangles, tels que MPP'I, ayant pour hauteur l'ordonnée MP ou y , et pour base l'accroissement infiniment petit PP' de l'abscisse, ou dx . La distance du centre de gravité de ce rectangle à

l'axe des y est égale à $x + \frac{1}{2} dx$, et sa distance à l'axe des x est $\frac{1}{2} y$; on aura donc, en appelant A l'aire du trapèze ABDC, et négligeant $\frac{1}{2} dx$ devant x ,

$$A \cdot X = \int_a^b xy dx \quad \text{et} \quad A \cdot Y = \int_a^b \frac{1}{2} y^2 \cdot dx$$

d'ailleurs $A = \int_a^b y dx$.

En mettant pour y sa valeur en x et effectuant les intégrations, on aura les coordonnées X et Y du centre de gravité cherché.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de l'aire comprise entre deux courbes AB et A'B' (fig. 10)

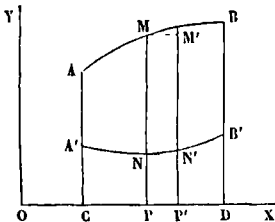


Fig. 10.

dont on a les équations, et les ordonnées répondant aux abscisses OB = a et OD = b . On considérera l'aire proposée comme composée d'une infinité de rectangles tels que MNN'M', ayant pour base l'accroissement infiniment petit PP' ou dx de l'abscisse, et pour hauteur la différence MN entre les ordonnées MP = y et M'P' = y' des deux courbes répondant à la même abscisse x . La distance du cen-

tre de gravité de ce rectangle à l'axe des y sera encore $x + \frac{1}{2} dx$, ou simplement x ; et sa distance à l'axe des x sera $\frac{1}{2} (MP + NP)$ ou $\frac{1}{2} (y + y')$. On aura donc, en appelant A l'aire AB'BA',

$$A \cdot X = \int_a^b x (y - y') dx$$

et $A \cdot Y = \int_a^b \frac{1}{2} (y + y') \cdot (y - y') dx$;

d'ailleurs $A = \int_a^b (y - y') dx$.

En mettant pour y et y' leurs valeurs en x et effectuant les intégrations, on obtiendra les coordonnées X et Y. Ce calcul est évidemment applicable au cas où la courbe A'B' serait une seconde branche de la courbe AB, et par conséquent à la détermination du centre de gravité de l'aire comprise sous une courbe fermée dont on a l'équation.

S'il s'agit d'une aire fermée par une courbe irrégulière ou dont on n'a pas l'équation, on peut employer la méthode suivante. On mène des parallèles

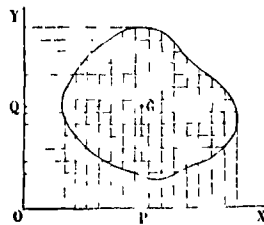


Fig. 11.

aux axes, à des distances égales assez petites pour que les portions du contour comprises entre deux parallèles consécutives puissent être considérées comme sensiblement rectilignes. La figure totale se trouve ainsi décomposée en carrés, en trapèzes rectangulaires et en triangles rectangles, figures dont on sait déterminer l'aire et le centre de gravité. En prenant les moments de ces aires partielles par rapport aux deux axes et faisant la somme, on aura donc les moments de l'aire totale; et comme cette aire totale est la somme des aires partielles, en divisant les moments obtenus par cette aire totale on aura les coordonnées du centre de gravité avec une approximation d'autant plus grande que les parallèles seront plus rapprochées.

VI. Nous avons maintenant à déterminer le centre de gravité des surfaces courbes.

SURFACES DE RÉVOLUTION. Soit OX (fig. 9) l'axe de révolution, et AB la génératrice dont l'équation est supposée donnée; et soient OC = a et OD = b les abscisses des plans perpendiculaires à l'axe OX qui servent de limites à la surface. On décompose cette surface par des plans MP, M'P' perpendiculaires à l'axe de révolution, en zones infiniment petites, que l'on peut considérer comme des surfaces de tronc de cône. Soient x et y les coordonnées du point M, et s l'arc AM de la génératrice, on aura

pour l'expression de la surface du tronc de cône engendrée par l'élément MM' ou ds

$$\frac{1}{2} (2\pi y + 2\pi (y + dy)) \cdot ds \text{ ou } 2\pi y ds,$$

en négligeant l'infiniment petit dy devant la quantité finie y .

Le centre de gravité de cette zone élémentaire est situé sur l'axe de révolution, entre les points P et P' , et par conséquent sa distance au point O est exprimée par $x + \epsilon dx$, ϵ désignant une fraction. Le centre de gravité de la surface totale est également situé sur l'axe, et, en appelant X sa distance au point O , et S l'aire de la surface, on aura, par le théorème des moments,

$$S \cdot X = \int_a^b 2\pi y \cdot ds \cdot (x + \epsilon dx) = 2\pi \int_a^b xy ds,$$

en négligeant ϵdx devant x . On a d'ailleurs

$$S = 2\pi \int_a^b y ds.$$

En mettant donc pour ds sa valeur $dx \sqrt{1 + y'^2}$, remplaçant l'ordonnée y et sa dérivée y' par leurs valeurs en x et effectuant les intégrations, on obtiendra la distance X .

On trouverait ainsi que le centre de gravité de la surface d'un cône de révolution est situé sur son axe, au tiers de sa longueur à partir de la base. On verrait de même que le centre de gravité de la surface d'un tronc de cône est situé sur son axe de révolution, et qu'il le divise en deux parties x et y dont le rapport a pour expression

$$\frac{x}{y} = \frac{2R + r}{R + 2r},$$

en appelant R le rayon de la grande base et r le rayon de la petite.

ZONE SPHÉRIQUE. Dans le cas d'une zone sphérique,

on a $y = \sqrt{R^2 - x^2},$

d'où $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$

et $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$

Il en résulte $y ds = R dx$

et $S = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R (b - a).$

On a ensuite

$$SX = 2\pi \int_a^b R x dy = 2\pi R \frac{(b^2 - a^2)}{2};$$

par conséquent $X = \frac{1}{2} (b + a).$

Cette valeur est l'abscisse du milieu de l'axe, par conséquent : le centre de gravité d'une zone est le milieu de son axe.

SURFACE QUELCONQUE. Soit $x = \varphi(x, y)$ l'équation de la surface, et S l'aire comprise entre les limites assignées, a et a' pour x , b et b' pour y . L'élément de la surface a pour expression

$$dS = dx dy \sqrt{1 + [\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2}$$

et la surface entière est exprimée par

$$S = \int_a^{a'} \int_b^{b'} dx dy \sqrt{1 + [\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2}.$$

On a ensuite, par le théorème des moments,

$$SX = \iint x dS, \quad SY = \iint y dS,$$

$$SZ = \iint z dS.$$

En remplaçant dS et x par leurs valeurs en x et y , et effectuant les intégrations entre les limites indiquées, on obtiendra les valeurs des coordonnées X, Y, Z , du centre de gravité demandé.

VII. Nous nous occuperons enfin du centre de gravité des volumes.

PRISME. Soit $ABCDE A'B'C'D'E'$ (fig. 12) un prisme quelconque. On peut imaginer que ce prisme soit divisé, par des plans parallèles aux bases,

en tranches égales infiniment minces. Ces tranches auront leurs centres de gravité semblablement placés puisqu'elles sont égales; tous ces centres de gravité seront donc sur une même droite GG' parallèle aux arêtes latérales; par conséquent le centre de gravité du prisme total sera sur cette droite. De plus il sera au milieu g de cette droite; car les poids de ces tranches seront des forces parallèles, égales, appliquées en des points de GG' équidistants, et par conséquent, la droite GG' pouvant être considérée comme chargée de poids uniformément répartis sur sa longueur, le point d'application de leur résultante est au milieu de cette longueur. Le centre de gravité g du prisme est donc situé dans la section $abcde$ faite parallèlement aux bases à égale distance de ces bases. Je dis que c'est le centre de gravité même de cette section. En effet, décomposons le prisme total en prismes triangulaires infiniment petits, tels $MNP M'N'P'$ ayant leurs arêtes parallèles à celles du prisme donné; et soit mnp la section de l'un de ces prismes élémentaires par le plan $abcde$. Concevons un plan P perpendiculaire aux bases du prisme, et prenons les moments des prismes élémentaires et du prisme total par rapport à ce plan. Désignons par h la hauteur du prisme, par ω l'aire mnp , par x la distance du centre de gravité du prisme élémentaire au plan P , par x' la distance du centre de gravité du triangle mnp au même plan; par X la distance du centre de gravité du prisme total, et par X' celle du centre de gravité du polygone $abcde$. Remarquons que x et x' ne pourront différer que d'une quantité infiniment petite ϵ , puisque les centres de gravité du prisme élémentaire et de sa section moyenne sont tous deux situés dans le triangle infiniment petit mnp ; soit $x' = x + \epsilon$. On aura, en appelant Ω l'aire du polygone $abcde$,

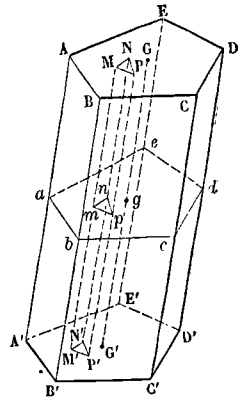


Fig. 12.

et

$$h \Omega \cdot X = \Sigma h \omega \cdot x, \quad \text{d'où} \quad \Omega X = \Sigma \omega x,$$

et

$$\Omega X' = \Sigma \omega (x + \epsilon).$$

ou, en négligeant l'infiniment petit ϵ devant la quantité finie x ,

$$\Omega X' = \Sigma \omega x = \Omega X,$$

$$X' = X.$$

d'où

Ainsi le centre de gravité du prisme proposé et celui de la section $abcde$ sont à la même distance du plan P ; et comme ce plan est un plan quelconque perpendiculaire aux bases, il s'ensuit que les deux centres de gravité coïncident. Par conséquent, *le centre de gravité d'un prisme est celui de la section faite parallèlement aux bases, à égale distance de ces bases.*

La même démonstration s'étend à un CYLINDRE droit ou oblique.

TÉTRAÈDRE. On pourrait appliquer au tétraèdre, et en général aux pyramides et aux cônes, une démonstration analogue à la précédente. Mais à cause de l'importance que présente la recherche du centre de gravité du tétraèdre, il est utile de lui appliquer une méthode géométrique spéciale. Soit ABCD (fig. 13) le tétraèdre proposé. Joignons le point A

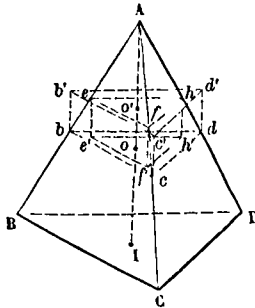


Fig. 13.

au centre de gravité I de la face opposée. Menons les plans bcd , efh parallèles à BCD; et les droites bb' , cc' , dd' , ee' , ff' , hh' parallèles à AI et terminées à ces plans; enfin joignons $b'c'$, $c'd'$, $b'd'$ et $e'f'$, $f'h'$, $e'h'$. La droite AI étant menée au centre de gravité de la base BCD, passe par les centres de gravité o et o' des sections bcd et efh ; car le point A est leur centre commun de similitude. Les prismes triangulaires bcd $b'c'd'$, efh $e'f'h'$, dont les arêtes latérales sont parallèles à AI, ont donc tous deux leur centre de gravité au milieu de oo' . Mais plus les sections bcd , efh seront rapprochées, plus la pyramide tronquée $bcdefh$, comprise entre les deux prismes, approchera de se confondre avec chacun d'eux. Donc lorsque la distance oo' sera infiniment petite, on pourra dire que la pyramide tronquée se confond avec l'un ou l'autre de ces prismes, et qu'elle a par conséquent son centre de gravité au même point sur la ligne AI. Il en résulte que si l'on conçoit le tétraèdre décomposé, par des plans parallèles à BCD, en pyramides tronquées infiniment minces, toutes ces pyramides tronquées pourront être considérées comme ayant leurs centres de gravité sur la droite AI. Donc en vertu du principe I le centre de gravité du tétraèdre ABCD est situé sur la même droite AI. Comme on en pourrait dire autant en prenant pour base une autre face, il s'ensuit que: *le centre de gravité d'un tétraèdre est au point de rencontre des droites menées de chaque sommet au centre de gravité de la face opposée.*

Cela posé, soit O (fig. 14) le milieu de l'arête BC; menons AO et DO, prenons OH égal au tiers de AO, et OI égal au tiers de OD; les points H et I seront respectivement les centres de gravité des faces ABC et BCD. Tirons AI et DH; ces droites, qui sont toutes deux dans le plan AOD, se rencontreront en un point

G, qui sera le centre de gravité du tétraèdre. Or, si l'on mène IH, les triangles semblables IGH et AGD donneront la proportion

$$IG : GA = IH : AD;$$

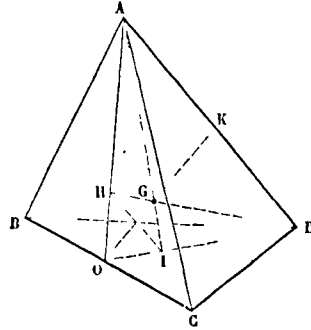


Fig. 14.

mais les triangles semblables IOH et AOD donnent aussi

$$IH : AD = OI : OD = 1 : 3;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$IG : GA = 1 : 3,$$

d'où

$IG : IG + GA = 1 : 1 + 3$, ou $IG : AI = 1 : 4$, c'est-à-dire que IG est le quart de AI. Ainsi *le centre de gravité d'un tétraèdre est situé sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette droite à partir de la base.*

On peut remarquer que si, par le point G, on menait un plan parallèle à la base BCD du tétraèdre, ce point serait le centre de gravité de la section déterminée par ce plan; en sorte que *le centre de gravité d'un tétraèdre est celui de la section faite parallèlement à sa base, au quart de la distance entre cette base et le sommet opposé.*

Imaginons que les points A, B, C, D soient les points d'application de quatre forces égales et parallèles dont nous représenterons l'intensité commune par P. Pour composer ces quatre forces, on pourra composer d'abord les deux forces P appliquées aux points B et C, ce qui donnera une force 2P appliquée au milieu O de BC. On aura ensuite à composer cette force 2P appliquée en O avec la force P appliquée en D; pour cela, il faudra diviser la distance OD dans le rapport inverse de ces forces, c'est-à-dire dans le rapport inverse des nombres 2 et 1, ce qui donnera le point I, centre de gravité de la base BCD. On aura enfin à composer la force 3P appliquée en I avec la force P appliquée en A; pour cela, il faudra diviser AI dans le rapport inverse des nombres 3 et 1, ce qui donnera précisément le point G. Par conséquent, *le centre de gravité d'un tétraèdre est le point d'application de la résultante de quatre forces égales, parallèles et de même sens appliquées respectivement aux quatre sommets.*

Les quatre forces P peuvent être composées autrement. On peut composer d'abord les forces P appliquées en B et en C, en une seule force 2P appliquée au milieu O de BC. On peut ensuite composer les deux autres forces P appliquées en A et en D en une seule force 2P appliquée au milieu K de AD. Il restera à composer la force 2P appliquée

en O avec la force 2P appliquée en K, ce qui donnera une force 4P appliquée au milieu G de la droite OK. D'ailleurs le point G obtenu de la sorte doit être évidemment le même que celui qu'on a obtenu par un autre mode de composition. Donc : *le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées.* Comme il existe trois droites analogues, joignant les milieux de deux arêtes opposées, il résulte de ce qu'on vient de dire que ces trois droites se coupent mutuellement en leur milieu, ce qui est en effet un théorème connu de Géométrie.

TÉTRAÈDRE TRONQUÉ. Soit ABCDEF (fig. 15) le tronc de tétraèdre proposé. On démontrerait,

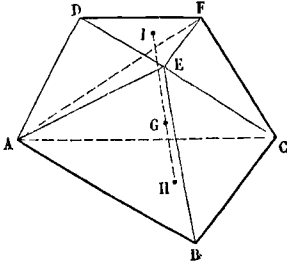


Fig. 15.

comme pour le tétraèdre, que le centre de gravité doit se trouver sur la droite IH qui joint les centres de gravité des deux bases. Soit G ce point; il reste à déterminer le rapport des longueurs GI et GH, ou, ce qui revient au même, le rapport des distances du point G aux plans des deux bases. Soient x et y ces distances, et $x + y = h$ la hauteur du tronc. Désignons par B la base ABC et par b la base DEF. Décomposons le tronc de tétraèdre en trois pyramides par les plans AEC et AEF, comme on le fait pour arriver à la mesure de son volume; et prenons successivement les moments par rapport aux deux bases, en remarquant que les distances des centres de gravité de ces pyramides partielles aux bases DEF et ABC sont respectivement : $\frac{1}{4} h$ et

$\frac{3}{4} h$ pour la pyramide ADEF, $\frac{3}{4} h$ et $\frac{1}{4} h$ pour la pyramide EABC; $\frac{1}{2} h$ et $\frac{1}{2} h$ pour la pyramide EAFC, puisque son centre de gravité est au milieu de la droite qui joindrait les milieux des arêtes opposées EF et AC. Nous aurons donc, en prenant d'abord les moments par rapport à la base DEF,

$$ABCDEF. x = ADEF. \frac{1}{4} h + EABC. \frac{3}{4} h + EFAC. \frac{1}{2} h$$

$$\text{ou} \quad ABCDEF. x = \frac{1}{12} h^2 (b + 3B + 2\sqrt{Bb}).$$

En prenant ensuite les moments par rapport à la base ABC, on aura de même

$$ABCDEF. y = ADEF. \frac{3}{4} h + EABC. \frac{1}{4} h + EFAC. \frac{1}{2} h$$

$$\text{ou} \quad ABCDEF. y = \frac{1}{12} h^2 (3b + B + 2\sqrt{Bb}).$$

Divisant membre à membre les deux égalités obtenues, et simplifiant, on trouve

$$\frac{x}{y} = \frac{GI}{HG} = \frac{b + 3B + 2\sqrt{Bb}}{3b + B + 2\sqrt{Bb}}. \quad [A]$$

On peut remplacer les bases B et b par les carrés de leurs arêtes homologues, puisqu'elles leur sont proportionnelles; en nommant A et a ces arêtes, on aurait donc

$$\frac{x}{y} = \frac{GI}{GH} = \frac{a^2 + 3A^2 + 2Aa}{3a^2 + A^2 + 2Aa}.$$

On remarque que lorsque les deux bases sont infiniment rapprochées, elles diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, et que GI est alors sensiblement égal à GH, c'est-à-dire que le centre de gravité est sensiblement au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases. C'est ce qui a lieu pour les tranches élémentaires considérées dans la recherche du centre de gravité du tétraèdre.

PYRAMIDE QUELCONQUE. Soit SABCDE (fig. 16) une pyramide à base quelconque. Décomposons-la en tétraèdres par les plans diagonaux ASC et ASD.

A une distance de la base égale au quart de la hauteur de la pyramide, menons un plan abcde parallèle à cette base. Ce plan contiendra les centres de gravité g, g', g'' des tétraèdres partiels, et par conséquent le centre de gravité de la pyramide totale (PRINCIPE I). Or, les tétraèdres SABC, SADC, SADE ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases, ou, comme les triangles abc, acd, ade, proportionnels à ces bases. Si donc on supposait appliqués aux points g, g', g'' des poids égaux à ceux des tétraèdres correspondants, ces poids seraient en même temps proportionnels aux aires des triangles abc, acd, ade. Il suit de là que le point d'application de la résultante de ces poids n'est autre que le centre de gravité du polygone abcde. Mais on verrait facilement, par de simples similitudes de triangles, que la droite qui joint le sommet S au centre de gravité de la base ABCDE de la pyramide, passe par les centres de gravité de toutes les sections, telles que abcde, parallèles à cette base. Donc enfin *le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette droite à partir de la base.*

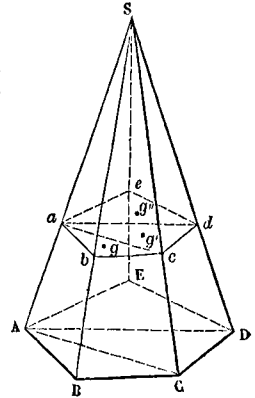


Fig. 16.

Ce théorème s'étend à un cône, droit ou oblique, à base quelconque, puisqu'un pareil corps n'est qu'une pyramide dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

PYRAMIDE TRONQUÉE. Si l'on décompose le tronc de pyramide en troncs de tétraèdres, leurs bases supérieures seront proportionnelles aux bases inférieures, et en général aux sections faites par un même plan parallèle aux bases. Il en résulte que le rapport des distances de leurs centres de gravité aux deux bases sera le même pour chacun d'eux,

et que, par conséquent, leurs centres de gravité seront dans un même plan parallèle aux bases, et déterminé par la formule [A] donnée plus haut pour le tronc de tétraèdre. Le centre de gravité du tronc de pyramide total sera donc aussi dans ce plan. De plus, les tétraèdres tronqués partiels ayant même hauteur et des bases proportionnelles, sont entre eux comme ces bases, ou comme les sections faites par le plan qui contient leurs centres de gravité. On en déduit comme ci-dessus que le centre de gravité du tronc de pyramide total est celui de la section qui contient les centres de gravité des tétraèdres partiels. Donc enfin *le centre de gravité d'un tronc de pyramide est sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases, et il divise cette droite dans le rapport exprimé par la formule [A] relative au tétraèdre*, les lettres B et b désignant alors les bases du tronc de pyramide.

Cette proposition s'étend au TRONC DE CÔNE; et les bases de B et b étant alors proportionnelles aux carrés de leurs rayons R et r, on a, en appelant toujours x et y les segments déterminés par le centre de gravité cherché sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases,

$$\frac{x}{y} = \frac{r^2 + 3R^2 + 2Rr}{3r^2 + R^2 + 2Rr}$$

SPHÈRE. Le centre de gravité d'une sphère est son centre de figure.

SECTEUR SPHÉRIQUE. On peut concevoir le secteur divisé en pyramides élémentaires ayant toutes pour sommet le centre de la sphère. Le centre de gravité de chacune d'elles sera sur le rayon mené au centre de gravité de l'élément de surface sphérique qui lui sert de base, aux $\frac{3}{4}$ de ce rayon à partir du centre. Imaginons que l'on décrive, avec un rayon égal aux $\frac{3}{4}$ de celui de la sphère, une calotte auxiliaire terminée au cône qui limite le secteur, laquelle calotte sera semblable à celle qui sert de base au secteur. La surface de cette calotte auxiliaire coupera toutes les pyramides, et la section obtenue dans chacune d'elles aura son centre de gravité au même point que la pyramide. Il en résulte (PRINCIPE V) que le centre de gravité du secteur est le même que celui de la calotte auxiliaire, et que par conséquent il est au milieu de l'axe de cette calotte. Si R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte qui sert de base au secteur, $\frac{3}{4}R$ et

$\frac{3}{4}h$ seront le rayon et la hauteur de la calotte auxiliaire; en appelant X la distance du centre de gravité du secteur au centre, on aura donc

$$X = \frac{3}{4} \left(R - \frac{1}{2} h \right).$$

Si le secteur est une demi-sphère, on a $h = R$, et par suite $X = \frac{3}{8}R$.

CORPS TERMINÉ PAR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. Soit OX (fig. 9) l'axe de révolution, $y = f(x)$ l'équation de la génératrice AB. On peut regarder le volume total comme composé de cylindres élémentaires, tels que celui qui serait décrit par $MP'P'I$, ayant pour rayon $MP' = y$, et pour hauteur $PP' = dx$; l'expression d'un de ces cylindres élémentaires est

$\pi y^2 dx$. Si donc on appelle $OC = a$ et $OD = b$ les abscisses des plans perpendiculaires à l'axe qui servent de limites au corps considéré, V le volume de ce corps, on aura d'abord

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Le centre de gravité du corps est sur l'axe de révolution à une distance X de l'origine, qui sera donnée, en vertu du théorème des moments, par la relation

$$VX = \pi \int_a^b y^2 x dx.$$

En mettant pour y sa valeur et effectuant les intégrations, on obtiendra la distance inconnue X.

CORPS TERMINÉ PAR UNE SURFACE QUELCONQUE. On suppose le corps compris entre les deux surfaces données $z_1 = F(x, y)$ et $z_2 = f(x, y)$, les plans $x = a$, $x = a'$ et les plans $y = b$, $y = b'$. L'élément du volume est le parallélépipède rectangle $dx dy dz$; le volume total V est donc exprimé par la relation

$$\begin{aligned} V &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_{z_2}^{z_1} dx dy dz \\ &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} [F(x, y) - f(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

On a ensuite, en prenant les moments de ces éléments par rapport aux trois plans coordonnés :

$$\begin{aligned} VX &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_{z_2}^{z_1} x dx dy dz \\ &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} [F(x, y) - f(x, y)] x dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VY &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_{z_2}^{z_1} y dx dy dz \\ &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} [F(x, y) - f(x, y)] y dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VZ &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_{z_2}^{z_1} z dx dy dz \\ &= \int_a^{a'} \int_b^{b'} \frac{1}{2} \left\{ [F(x, y)]^2 - [f(x, y)]^2 \right\} dx dy. \end{aligned}$$

VOLUME QUELCONQUE. Dans certaines questions, dans les terrassements par exemple (Voy. TRANSPORT DES TERRES), on peut avoir à déterminer le centre de gravité d'un corps tout à fait irrégulier. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un monticule donné par les projections de ses courbes de niveau (Voy. NIVELLEMENT). On commencera par évaluer l'aire comprise sous chacune de ces courbes. Soit h la distance des plans consécutifs de ces courbes. Si cette distance n'est pas trop considérable, et que les courbes de niveau ne varient pas d'une manière trop brusque, on pourra considérer chaque tranche comprise entre deux plans consécutifs comme une pyramide tronquée, dont on pourra déterminer le volume par la règle connue. On déterminera les centres de gravité des deux bases; le centre de gravité de la tranche sera sur

droite qui joint ces deux centres; et il divisera cette droite dans un rapport exprimé par la formule [A] ci-dessus. Connaissant ainsi le volume et le centre de gravité de chaque tranche, on prendra les moments par rapport à un plan horizontal et par rapport à deux plans verticaux rectangulaires, et l'on obtiendra les coordonnées rectangulaires du centre de gravité du monticule.

VIII. Le centre de gravité jouit de diverses propriétés, dont la plus importante est exprimée par le THÉORÈME DE GULDIN (voy. ce mot).

1. Le volume d'un cylindre tronqué est égal au produit de sa section droite par la distance entre les centres de gravité de ses deux bases. Supposons d'abord que la base inférieure soit la section droite elle-même; prenons-la pour plan des xy , et soit θ l'angle que fait la base supérieure avec ce plan. Si Ω désigne l'aire totale de la base supérieure, et ω un élément de cette aire, $\Omega \cos \theta$ et $\omega \cos \theta$ désigneront l'aire totale de la base inférieure et l'élément de cette base correspondant à l'élément ω . Appelons x l'ordonnée de l'élément ω ; le volume du cylindre qui projette ω sur le plan de la base sera exprimé par $\omega \cos \theta \cdot x$ à un infiniment petit près d'un ordre supérieur, et le volume du cylindre tronqué sera exprimé en conséquence par

$$V = \Sigma \omega \cos \theta \cdot x = \cos \theta \cdot \Sigma \omega x.$$

Mais si Z est l'ordonnée du centre de gravité de la base supérieure, on a, par le théorème des moments,

$$\Omega Z = \Sigma \omega x; \\ \text{donc} \quad V = \cos \theta \cdot \Omega Z,$$

c'est-à-dire que le volume cherché est le produit de la base inférieure $\Omega \cos \theta$ par l'ordonnée Z du centre de gravité de la base supérieure. Or le pied de cette ordonnée est précisément le centre de gravité de la base inférieure, car si X désigne la distance du centre de gravité de la base supérieure au plan des yz et X' la distance du centre de gravité de la base inférieure à ce même plan, on aura pour déterminer ces deux distances les équations

$$\Omega X = \Sigma \omega x \quad \text{et} \quad \Omega \cos \theta \cdot X' = \Sigma \omega \cos \theta \cdot x;$$

la seconde se réduit à

$$\Omega X' = \Sigma \omega x = \Omega X,$$

d'où $X = X'$. On verrait de même que ces deux centres de gravité sont à la même distance du plan des xz ; donc ils sont sur une même parallèle à l'axe des x , et le second est le pied de l'ordonnée du premier. Le théorème se trouve donc démontré pour le cas que nous considérons.

Si les plans des deux bases sont quelconques, on peut diviser le cylindre tronqué, par un plan perpendiculaire à ses arêtes, en deux cylindres tronqués qui rentrent dans le premier cas; et, en faisant la somme, on verra que le volume a pour mesure la section droite multipliée par la somme des ordonnées des centres de gravité des deux bases par rapport à cette section droite, ordonnées qui ont toutes deux pour pied le centre de gravité de cette section; cette expression revient donc au produit de la section droite par la distance entre les centres de gravité des deux bases.

2. Considérons un nombre quelconque de corps dont les poids sont $p, p', p'',$ etc. Déterminons le centre de gravité de ce système comme s'il était solide, soient $\rho, \rho', \rho'',$ etc., les distances des centres de gravité respectifs de ces corps à l'origine, R la distance du centre de gravité du système à

cette même origine; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'',$ etc., a, b, c les angles que les droites sur lesquelles se mesurent ces distances font avec les trois axes. On aura par le théorème des moments, et en nommant P le poids total,

$$PR \cos a = \Sigma p \rho \cos \alpha, \quad PR \cos b = \Sigma p \rho \cos \beta, \\ PR \cos c = \Sigma p \rho \cos \gamma. \quad [1]$$

Ces relations expriment que si l'on appliquait à l'origine, des forces proportionnelles aux produits $p\rho, p'\rho', p''\rho'',$ etc., et respectivement dirigées vers les centres de gravité des corps partiels, elles auraient pour résultante une force proportionnelle au produit PR et dirigée vers le centre de gravité du système. Si l'origine était le centre de gravité même, les forces $p\rho, p'\rho', p''\rho'',$ etc., s'y feraient équilibre, puisque la résultante serait nulle.

3. Elevons au carré les deux membres des équations [1] et ajoutons-les membre à membre, il viendra

$$P^2 R^2 = \Sigma p^2 \rho^2 \\ + \Sigma 2pp' \rho \rho' (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') \\ \text{ou, en appelant } (\rho\rho') \text{ l'angle de } \rho \text{ avec } \rho', \\ P^2 R^2 = \Sigma p^2 \rho^2 + \Sigma 2pp' \rho \rho' \cos (\rho\rho').$$

Si r désigne la distance des centres de gravité des corps p et p' , on a

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos (\rho\rho'), \\ \text{d'où} \quad 2\rho\rho' \cos (\rho\rho') = \rho^2 + \rho'^2 - r^2,$$

par conséquent

$$P^2 R^2 = \Sigma p^2 \rho^2 + \Sigma pp' (\rho^2 + \rho'^2 - r^2).$$

En réunissant tous ces termes en ρ^2 on a

$$\rho^2 (\rho^2 + pp' + pp'' + \dots)$$

ou $\rho^2 \cdot P\rho$; on trouverait des termes analogues en réunissant tous ceux qui contiennent ρ'^2 , puis tous ceux qui contiennent ρ''^2 , et ainsi de suite; on peut donc écrire

$$P^2 R^2 = P \Sigma p \rho^2 - \Sigma pp' r^2. \quad [2]$$

On conclut de cette relation que si le système se déplace sans changer de forme, et de telle sorte que son centre de gravité reste toujours à la même distance d'un point fixe (l'origine), la somme des produits des poids des différents corps par le carré de leur distance à ce point fixe restera constante. Car R étant constant, ainsi que les distances représentées par r , le terme $P \Sigma p \rho^2$ doit être constant, et par suite il en est de même de $\Sigma pp' r^2$.

La relation [1] peut s'écrire

$$\Sigma p \rho^2 = PR^2 + \frac{\Sigma pp' r^2}{P};$$

sous cette forme, elle montre que le système conservant sa forme, c'est-à-dire $r, r', r'',$ etc., demeurant constants, $\Sigma p \rho^2$ sera le plus petit possible quand R sera égal à zéro; c'est-à-dire que le centre de gravité jouit de la propriété que la somme des produits des poids des différents corps par le carré de la distance de leurs centres de gravité partiels au centre de gravité du système est un minimum.

IX. Si tous les points matériels faisant partie du système considéré sont dans un même lieu, où la valeur de l'accélération g due à la pesanteur puisse être regardée comme constante, on peut, dans les équations des moments, remplacer les poids par les masses, et écrire

$$MX = \Sigma m x, \quad MY = \Sigma m y, \quad MZ = \Sigma m z.$$

Si ces différents points sont assez éloignés les uns des autres pour que g varie d'une manière sensible, ces équations ne peuvent plus se déduire des équations des moments. Mais elles définissent

néanmoins les coordonnées X, Y, Z d'un certain point de l'espace, qui joue un rôle important dans la Mécanique des corps libres, et particulièrement en Astronomie. Euler avait proposé pour ce point le nom de *centre d'inertie*; d'autres auteurs ont proposé le nom de *centre de masse*; le nom de *centre de gravité* a prévalu, quoique la gravité soit étrangère à la détermination de ce point. Il faut avoir soin, pour éviter toute confusion, de bien distinguer le cas où les poids sont proportionnels aux masses, de celui où cette proportionnalité n'a pas lieu.

CENTRE DE GRAVITÉ (MOUVEMENT DU). Lorsqu'un système matériel se meut, son centre de gravité est en général en mouvement lui-même; et ce mouvement peut être déterminé quand on connaît celui de chacun des points matériels qui composent le système. Cette détermination est l'objet d'un théorème connu sous le nom de *Principe sur le mouvement du centre de gravité*, et que nous allons établir.

I. Soient p, p', p'', \dots , les poids des points matériels qui composent le point matériel considéré, x, x', x'', \dots , etc., leurs distances à un plan de comparaison, P le poids total du système et X la distance de son centre de gravité au même plan; on aura par le théorème des moments des forces parallèles (Voy. MOMENT)

$$px + p'x' + p''x'' + \dots = PX. \quad [1]$$

Mais si tous les points du système sont dans un espace assez peu étendu pour que l'accélération g due à la pesanteur soit la même pour tous ces points, on pourra, en divisant tous les termes de la relation [1] par g , remplacer les poids par les masses, et écrire

$$mx + m'x' + m''x'' + \dots = MX. \quad [2]$$

Dans cette relation, les quantités x, x', x'', \dots , etc., X varient avec le temps, et peuvent être considérées comme des fonctions de cette variable. Différentiations par rapport au temps, nous aurons

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} + m'' \frac{dx''}{dt} + \dots = M \frac{dX}{dt}.$$

Or $\frac{dx}{dt}$ est la composante, perpendiculaire au plan de comparaison, de la vitesse du point dont la masse est m ; nous la représenterons par v_x . De même $\frac{dx'}{dt}$ est la composante, suivant la même direction, de la vitesse du point dont la masse est m' ; nous la représenterons par v'_x , et ainsi des autres.

Semblablement $\frac{dX}{dt}$ est la composante, perpendiculaire au plan de comparaison, de la vitesse du centre de gravité; nous la représenterons par V_x . A l'aide de ces notations, la relation ci-dessus pourra s'écrire

$$mv_x + m'v'_x + m''v''_x + \dots = MV_x$$

ou, en abrégéant l'écriture,

$$\Sigma mv_x = MV_x, \quad [3]$$

c'est-à-dire que la somme des quantités de mouvement de tout le système, projetée sur un axe perpendiculaire au plan de comparaison, est égale à la quantité de mouvement du centre de gravité, projetée sur le même axe (si l'on attribue au centre de gravité une masse égale à la masse totale du système). (Voy. QUANTITÉ DE MOUVEMENT.) Si l'on rapporte le système à trois axes rectangulaires, des x, y et des z , et qu'on projette les quantités de mouvement successivement sur ces trois axes, on

obtiendra, pour les axes des y et des z , deux autres équations analogues à l'équation [3], savoir :

$$\Sigma mv_y = MV_y, \quad [4]$$

$$\text{et } \Sigma mv_z = MV_z. \quad [5]$$

Les équations [3], [4] et [5] détermineront la vitesse V du centre de gravité; car on en tire d'abord

$$V_x = \frac{\Sigma mv_x}{M}, \quad V_y = \frac{\Sigma mv_y}{M}, \quad V_z = \frac{\Sigma mv_z}{M}.$$

On aura ensuite $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$,

et, si α, β, γ désignent les angles que cette vitesse fait avec les axes,

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V}.$$

II. Les équations [3], [4] et [5] sont en outre susceptibles d'une interprétation remarquable. La quantité de mouvement d'un point matériel est un nombre de kilogrammes; on peut donc toujours concevoir une force qui ait la même direction que la vitesse du mobile et dont l'intensité soit exprimée par sa quantité de mouvement. Soient $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$, etc., les forces qui représenteraient ainsi les quantités de mouvement des divers points matériels du système, et Φ la force qui représenterait de même la quantité de mouvement du centre de gravité; soient $\varphi_x, \varphi'_x, \varphi''_x, \dots, \Phi_x$ les projections de ces forces sur l'axe des x , respectivement équivalentes aux quantités de mouvement projetées sur le même axe, ou à $mv_x, m'v'_x, m''v''_x, \dots, MV_x$. En vertu de l'équation [3] on aura

$$\Sigma \varphi_x = \Phi_x.$$

On aurait de même pour les deux autres axes

$$\Sigma \varphi_y = \Phi_y \quad \text{et} \quad \Sigma \varphi_z = \Phi_z.$$

Or, ces trois dernières équations expriment que la force Φ est la résultante des forces $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ (Voy. COMPOSITION DES FORCES.) Les équations [3], [4], [5] expriment donc que la quantité de mouvement du centre de gravité est la résultante des quantités de mouvement des divers points du système transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point (en supposant que les quantités de mouvement se composent comme les forces).

III. Cette relation a lieu à un instant quelconque du mouvement, et par conséquent aussi à l'instant initial. En sorte que si l'on désigne par l'indice zéro les vitesses initiales, on aura, en vertu des équations [3], [4], [5] elles-mêmes,

$$\Sigma mv_{0x} = MV_{0x}, \quad [6]$$

$$\Sigma mv_{0y} = MV_{0y}, \quad [7]$$

$$\Sigma mv_{0z} = MV_{0z}. \quad [8]$$

Si l'on retranche membre à membre les équations [6], [7], [8] des équations [3], [4], [5] on obtient

$$\Sigma mv_x - \Sigma mv_{0x} = MV_x - MV_{0x}, \quad [9]$$

$$\Sigma mv_y - \Sigma mv_{0y} = MV_y - MV_{0y}, \quad [10]$$

$$\Sigma mv_z - \Sigma mv_{0z} = MV_z - MV_{0z}. \quad [11]$$

Mais en vertu du principe des quantités de mouvement, ou de l'effet de l'impulsion, on a

$$\Sigma mv_x - \Sigma mv_{0x} = \int_0^t R_x dt,$$

$$\Sigma mv_y - \Sigma mv_{0y} = \int_0^t R_y dt,$$

$$\Sigma mv_z - \Sigma mv_{0z} = \int_0^t R_z dt,$$

en désignant par R la RÉSULTANTE DE TRANSLATION

(Voy. ce mot) des forces extérieures qui sollicitent le système ; on peut donc écrire

$$\left. \begin{aligned} MV_x - MV_{0x} &= \int_0^t R_x dt, \\ MV_y - MV_{0y} &= \int_0^t R_y dt, \\ MV_z - MV_{0z} &= \int_0^t R_z dt. \end{aligned} \right\} [12]$$

Or, ces équations sont celles du mouvement d'un point matériel dont la masse serait M, la vitesse initiale V_0 , et qui serait soumis à la force R. Donc on peut dire : le centre de gravité d'un système matériel se meut comme si toute la masse du système y était concentrée, comme si la résultante de translation de toutes les forces extérieures y était appliquée, et comme si toutes les quantités de mouvement initiales y avaient été transportées parallèlement à elles-mêmes et composées comme des forces. Tel est le principe sur le mouvement du centre de gravité.

IV. Ce principe ne dépend pas des forces mutuelles qui s'exercent entre les divers points matériels composant le système. On déduit de cette observation diverses conséquences :

1. Concevons une bombe sphérique lancée dans le vide ; son centre décrirait une parabole dans le plan vertical passant par la direction de la vitesse initiale (Voy. BALISTIQUE). Supposons qu'à un certain instant la bombe éclate ; comme l'explosion n'est due qu'aux forces intérieures mutuelles qui se développent, ces forces n'altéreront pas le mouvement du centre de gravité ; et, s'il était possible de déterminer à chaque instant le centre de gravité du système formé par les débris de la bombe, on verrait que ce point continue à décrire la parabole que décrivait le centre de la bombe entière avant l'explosion.

2. Les équations [12] expliquent aussi l'effet du recul dans les armes à feu. Prenons pour exemple une pièce de canon placée sur un sol horizontal avec son affût. Avant l'explosion le système n'était soumis qu'à son poids, et aux réactions du sol, donnant lieu à une résultante égale et contraire à ce poids ; et ces forces passant par le centre de gravité donnaient une résultante totale égale à zéro. L'explosion n'étant due qu'à des forces moléculaires mutuelles, la résultante de translation R reste nulle ; en vertu des équations [12], qui dans ce cas se réduisent à une seule. Si l'on prend pour axe la direction horizontale du tir, la quantité de mouvement finale est égale à la quantité de mouvement initiale ; or celle-ci était nulle ; il en est donc de même de la quantité de mouvement finale. Si donc on désigne par m la masse du boulet, par v sa vitesse, par M la masse de la pièce et de son affût, et par u la vitesse du recul, on a

$$mv - Mu = 0, \text{ d'où } u = v \frac{m}{M},$$

c'est-à-dire que la vitesse initiale du recul serait une fraction de la vitesse initiale du boulet (dans l'âme de la pièce) marquée par le rapport entre la masse du boulet et celle de la pièce avec son affût. En réalité, la vitesse du recul est un peu moindre,

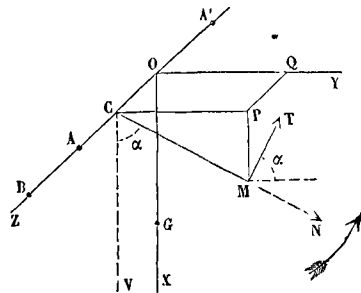
à cause du frottement de l'affût sur le sol, de celui des roues sur leurs fusées, et de celui du boulet contre la paroi interne de la pièce.

3. En général, toutes les fois qu'il n'y a pas de forces extérieures, ou que les forces extérieures donnent une résultante de translation égale à zéro, les seconds membres des équations [12] sont nuls, et la quantité de mouvement finale du centre de gravité est égale à sa quantité de mouvement initiale. Si le centre de gravité était primitivement en repos, il conserve sa position ; s'il était animé d'une certaine vitesse, il conserve cette vitesse et se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme.

4. Un animal ne peut se mouvoir qu'à l'aide des réactions exercées par les corps avec lesquels il est en contact. Placé dans le vide, sans contact avec aucun corps, il agiterait vainement ses membres sans pouvoir déplacer son centre de gravité.

5. Les équations [12] expliquent aussi l'effet d'un couple. Les deux forces égales et de sens contraire qui forment le couple, donnent une résultante de translation égale à zéro ; par conséquent, le couple n'a aucune influence sur le mouvement du centre de gravité. Si ce point était primitivement en repos, il demeure en repos ; et le mouvement produit par le couple ne peut être qu'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité (Voy. COUPLE).

CENTRE DE PERCUSSION, point où il faut frapper un corps solide, mobile autour d'un axe, pour que les réactions exercées sur cet axe soient nulles. Considérons un corps solide mobile autour d'un axe OZ, retenu par deux de ses points A et A', et s'ap-



puyant en outre par son extrémité B contre un plan fixe perpendiculaire. Le corps étant supposé en équilibre, imaginons qu'une force F soit tout à coup appliquée à ce corps, et qu'en vertu de cette force il prenne un mouvement de rotation dans le sens indiqué par la flèche. On demande quelle doit être la force F pour que les réactions qui s'exerceraient aux points A, A' et B soient nulles ; le point d'application de cette force F est ce que l'on nomme le centre de percussion. Par le centre de gravité G du corps faisons passer un plan perpendiculaire à l'axe ; il coupera cet axe en un point O ; prenons OG pour axe des x , l'axe de rotation pour axe des z , et l'axe des y perpendiculaire aux deux premiers. Considérons un point quelconque M du corps, et soit m la masse de ce point matériel. Abaissons de ce point sur l'axe la perpendiculaire MC, et soit α l'angle qu'elle fait avec une parallèle CV à l'axe des x ; soient enfin $MP = x$, $CP = y$ et $PQ = x$ les

coordonnées du point M. Ce point prenant un mouvement de rotation autour de O Z, c'est à-dire suivant un cercle ayant le point C pour centre, il peut être considéré comme soumis à une force tangentielle, et à une force centripète, qui, dans le cas actuel, est nulle, puisque la vitesse initiale du point considéré est égale à zéro (Voy. FORCE CENTRIPÈTE). Désignons par T cette force tangentielle, et supposons qu'on raisonne de même pour les autres points matériels du système; le corps pourra être regardé comme uniquement soumis aux forces T, du moins dans le premier instant. Mais, en réalité, il est soumis à la force F et aux actions mutuelles des points matériels qui composent le système; le système formé de la force F et de ces actions mutuelles constitue donc un système équivalent à celui des forces T (Voy. FORCES ÉQUIVALENTES), et par conséquent la somme de leurs projections sur les trois axes doit être la même pour chaque groupe, et il doit en être de même de la somme de leurs moments. La force T a pour expression $mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$, en appelant r la distance MC; ses projections sur les trois axes sont respectivement

$$-mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \sin \alpha, \quad +mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cos \alpha, \quad \text{zéro},$$

$$\text{ou } -my \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad +mx \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad \text{zéro}.$$

Ses moments par rapport aux trois axes ont pour expressions, en adoptant pour le sens positif le sens de y vers x pour l'axe des x, de x vers y pour l'axe des y, et de x vers y pour l'axe des z,

$$-mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cos \alpha \cdot z, \quad -mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \sin \alpha \cdot x, \quad +mr \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot r.$$

$$\text{ou } -mxz \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad -myx \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad +mr^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Quand on passera du point M à un autre, x, y, z, r, α changeront; mais l'accélération angulaire $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ ne changera pas. Les six conditions d'équivalence seront donc, en remarquant que les réactions des appuis ne doivent point y figurer puisqu'on les suppose nulles, et que les forces mutuelles disparaissent comme étant deux à deux égales et opposées,

$$F_x = -\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Sigma my = 0,$$

$$F_y = +\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Sigma mx,$$

$$F_z = 0;$$

$$\mathcal{M}_x F = -\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Sigma mxz,$$

$$\mathcal{M}_y F = -\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Sigma myx,$$

$$\mathcal{M}_z F = +\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Sigma mr^2.$$

Le centre de gravité étant sur l'axe des x, on a $\Sigma my = 0$, et par suite $F_x = 0$. En même temps on voit qu'on a $F_z = 0$; par conséquent la force F est parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire perpendiculaire au plan mené par l'axe de rotation et par le centre de gravité du corps.

Si l'on appelle M la masse totale du corps et a la distance GO, on a $\Sigma mx = Ma$; et par conséquent

$$F_y = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} Ma.$$

Soit h la distance de la force F_y au plan YOZ; son moment par rapport à l'axe des z sera F_yh

$$\text{ou } \frac{d^2 \alpha}{dt^2} Mah.$$

Substituant dans la sixième équation et simplifiant, on obtient donc $Mah = \Sigma mr^2$,

$$\text{d'où } h = \frac{\Sigma mr^2}{Ma}.$$

Cette expression est précisément celle de la distance de l'axe d'oscillation du corps à son axe de rotation (Voy. PENDULE COMPOSÉ). C'est donc à cette distance qu'il faut appliquer la force F_y, ou F pour qu'il n'y ait point de réactions sur l'axe de rotation. C'est-à-dire que le centre de percussion est sur l'axe d'oscillation.

Le moment de la force F par rapport à l'axe des y est nul, puisqu'elle est parallèle à cet axe; on a donc $\Sigma myx = 0$. Si de plus on suppose le corps symétrique par rapport au plan XOY perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité, on aura, à cause de cette symétrie, $\Sigma mxz = 0$; le moment de la force F par rapport à l'axe des x sera donc nul, c'est-à-dire que cette force sera dans le plan de symétrie. Dans ce cas le centre de percussion coïncide avec le centre d'oscillation (Voy. PENDULE COMPOSÉ).

En même temps, les relations $\Sigma mxz = 0$ et $\Sigma myx = 0$ indiqueront que l'axe de rotation est un des AXES PRINCIPAUX (Voy. ce mot) du corps par rapport au point O.

Si, par exemple, le corps considéré est une tige rectiligne très-mince, mobile autour d'une de ses extrémités, on trouve que le centre de percussion est aux $\frac{2}{3}$ de la longueur de la tige à partir de l'extrémité fixe. Comme le centre d'oscillation et le centre de suspension sont réciproques, si la tige était mobile autour d'un point situé au tiers de sa longueur, le centre d'oscillation, ou, ce qui revient au même ici, le centre de percussion, serait à l'extrémité de la tige.

Dans ce qui précède, on n'a point tenu compte de la pesanteur; si l'on veut y avoir égard, il faut s'imposer la condition que les réactions exercées sur l'axe soient les mêmes que dans l'état d'équilibre. On trouve alors pour la force F les mêmes conditions que ci-dessus; et les réactions aux points A et A' s'obtiennent en décomposant le poids P du corps en deux forces parallèles passant respectivement par ces deux points, comme dans l'état de repos. (Voy. l'article ROTATION.)

CENTRE DE POUSSÉE, point d'application de la poussée exercée par un fluide en repos sur un corps qui y est plongé ou qui flotte à sa surface. C'est le centre de gravité du volume déplacé. (Voy. CORPS PLONGES, CORPS FLOTTANTS.)

CENTRE DE PRESSION, point d'application de la résultante des pressions exercées par un liquide sur une surface plane qui y est plongée.

I. La recherche de ce point est une application de la théorie de la composition des forces parallèles; car les pressions élémentaires qui s'exercent sur les divers éléments de la surface plane considérée sont des forces perpendiculaires à cette surface, si l'on néglige la viscosité du liquide, et par conséquent parallèles entre elles.

Si la surface plane considérée est horizontale, le centre de pression se confond avec le centre de gravité de la surface; car tous les éléments de celle-ci étant à la même distance au-dessous du niveau du liquide, supportent des pressions proportionnelles à leur étendue; on a donc à composer des forces parallèles proportionnelles à l'aire des divers éléments de la surface plane considérée; on opérera donc comme s'il s'agissait de composer les poids de ces éléments, et le point d'application de la résultante sera celui du poids total de la surface, c'est-à-dire son centre de gravité.

Si la surface plane considérée n'est pas horizontale, le centre de pression est toujours plus bas que le centre de gravité. Soit, en effet, AMBN (fig. 1)

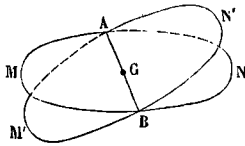


Fig. 1.

la surface considérée, supposée d'abord horizontale; soit G son centre de gravité, et AB une horizontale quelconque passant par ce point. Faisons tourner la surface autour de AB, et soit AM'BN' sa nouvelle position. Tous les éléments de la portion AN'B se sont rapprochés du niveau supérieur du liquide, et supportent par conséquent des pressions moindres; tous les éléments de la portion AM'B se sont au contraire éloignés du niveau supérieur et supportent en conséquence des pressions plus grandes. D'après les règles de la composition des forces parallèles, le point d'application de la résultante s'est rapproché de la partie de la surface où s'exercent les plus grandes pressions; et puisqu'il était primitivement en G, il se trouve actuellement dans la partie AM'B; par conséquent il est au-dessous du centre de gravité G.

II. Pour déterminer par le calcul le centre de pression d'une surface plane AMBN (fig. 2), on la

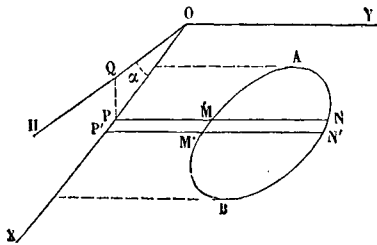


Fig. 2.

rapporte à deux axes rectangulaires, l'un OX parallèle à la ligne de plus grande pente, l'autre OY horizontal, et place au niveau supérieur du liquide. On décompose l'aire AMBN en éléments par des droites, telles que MN, M'N', horizontales, et par conséquent parallèles à l'axe des y. La pression du liquide étant la même en tous les points de la bande MNN'M', la pression sur cette bande aura pour expression l'aire de cette bande, multipliée par la distance PQ de cette bande au niveau supérieur, et par le poids II du mètre cube du liquide (Voy. Pression d'un fluide). Désignons par y' et y'' les ordonnées des points N et M, par x l'abscisse OP de la corde MN; l'aire MNN'M' sera exprimée par

$(y' - y'') dx$. Soit α l'angle que fait le plan de la surface AMBN avec l'horizon; on aura

$$PQ = OP \tan \alpha = x \tan \alpha.$$

La pression élémentaire sur la bande MNN'M' aura pour valeur

$$(y' - y'') dx \cdot x \tan \alpha \cdot \Pi.$$

On en déduit d'abord pour la pression totale P

$$P = \Pi \tan \alpha \int_a^b (y' - y'') x dx, \quad [1]$$

en appelant a et b la plus petite et la plus grande abscisse relative au contour AMBN.

Si ce contour est donné par son équation, y' et y'' seront des fonctions connues de x, que l'on pourra substituer à ces variables, et l'on effectuera l'intégration soit exactement, soit par approximation.

Désignons maintenant par X et par Y les coordonnées du centre de pression; on les déterminera en égalant le moment de la pression totale, par rapport aux deux axes coordonnés successivement, à la somme des moments des pressions élémentaires par rapport aux mêmes axes.

La distance de la bande MNN'M' à l'axe des y n'est autre chose que x; on aura donc

$$PX = \Pi \tan \alpha \int_a^b (y' - y'') \cdot x^2 dx. \quad [2]$$

La pression exercée sur la bande MNN'M' pouvant être considérée comme une force appliquée au milieu de MN, le moment de cette pression par rapport à l'axe des x sera le produit de cette même pression par la distance de l'axe OX au milieu de MN, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}(y' + y'')$; on aura donc

$$PY = \Pi \tan \alpha \int_a^b \frac{1}{2}(y' + y'') \cdot x dx. \quad [3]$$

Les équations [2] et [3] feront connaître les coordonnées X et Y du centre de pression. On peut remarquer que $\Pi \tan \alpha$ disparaîtra comme facteur commun à P et aux produits PX et PY; et l'on aura

$$X = \frac{\int_a^b (y' - y'') x^2 dx}{\int_a^b (y' - y'') x dx}$$

$$Y = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(y' + y'') x dx}{\int_a^b (y' - y'') x dx} \quad [4]$$

III. Le plus ordinairement la surface plane considérée a un axe de symétrie parallèle à la ligne de plus grande pente. Le centre de pression est alors sur cet axe, et la première des équations [4] suffit pour déterminer le centre de pression. On a alors $y'' = -y'$, et la valeur de X devient

$$X = \frac{\int_a^b y x^2 dx}{\int_a^b y x dx}, \quad [5]$$

expression dans laquelle il restera à mettre pour y

sa valeur en fonction de x . Nous en donnerons quelques exemples.

1. La surface proposée est un rectangle dont la base horizontale est 2β et la hauteur h ; la base supérieure est supposée au niveau supérieur du liquide. Dans ce cas, on a $y = \beta$; $a = 0$, $b = h$; par suite,

$$X = \frac{\int_0^h \beta \cdot x^2 dx}{\int_0^h \beta \cdot x dx} = \frac{\frac{1}{3} \beta h^3}{\frac{1}{2} \beta h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Le centre de pression est donc sur la médiane parallèle à la ligne de plus grande pente, à une distance de l'axe des y égale aux $\frac{2}{3}$ de cette médiane.

On vérifie ainsi que le centre de pression est plus bas que le centre de gravité, puisque celui-ci est au milieu de cette même médiane.

2. La surface proposée est un triangle isocèle dont la médiane est dirigée suivant la ligne de plus grande pente, et dont la base est au niveau supérieur du liquide. Si 2β désigne la base du triangle et h sa hauteur, on a $a = 0$, $b = h$; de plus,

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{\beta} = 1, \text{ d'où } y = \beta - \frac{\beta}{h} x;$$

par suite,

$$X = \frac{\int_0^h \left(\beta - \frac{\beta}{h} x\right) x^2 dx}{\int_0^h \left(\beta - \frac{\beta}{h} x\right) x dx} = \frac{\frac{\beta h^3}{3} - \frac{\beta h^4}{4h}}{\frac{\beta h^2}{2} - \frac{\beta h^3}{3h}} = \frac{\frac{1}{12} h^2}{\frac{1}{6} h} = \frac{1}{2} h,$$

ou $X = \frac{1}{2} h$,

c'est-à-dire que, dans ce cas, le centre de pression est sur la médiane, au milieu même de cette médiane (plus bas par conséquent que le centre de gravité, qui est au tiers de cette droite à partir de la base).

3. La surface proposée est un trapèze symétrique, dont la hauteur est h ; l'une des bases 2β est située au niveau supérieur du liquide; l'autre base est 2δ . Dans ce cas, l'équation du côté est celle d'une droite passant par deux points dont les coordonnées sont 0 et β d'une part, h et δ de l'autre; on a donc

$$\frac{y - \beta}{\beta - \delta} = \frac{x - 0}{0 - h}, \text{ d'où } y = \beta - \frac{\beta - \delta}{h} x;$$

par suite,

$$X = \frac{\int_0^h \left(\beta - \frac{\beta - \delta}{h} x\right) x^2 dx}{\int_0^h \left(\beta - \frac{\beta - \delta}{h} x\right) x dx} = h \cdot \frac{\frac{1}{3} \beta - \frac{1}{4} (\beta - \delta)}{\frac{1}{2} \beta - \frac{1}{3} (\beta - \delta)}$$

ou $X = \frac{1}{2} h \cdot \frac{\beta + 3\delta}{\beta + 2\delta}$.

Pour $\delta = \beta$, on retombe sur le résultat du problème 1; et pour $\delta = 0$, on retrouve celui du problème 2.

Si l'on suppose $\beta = 0$, c'est-à-dire si la surface

proposée est un triangle isocèle ayant son sommet au niveau supérieur du liquide, et sa base horizontale, on trouve $X = \frac{3}{4} h$; c'est-à-dire que le centre

de pression est alors sur la médiane, aux $\frac{3}{4}$ de cette droite à partir du sommet (plus bas par conséquent que le centre de gravité qui est aux $\frac{2}{3}$ de cette droite).

4. La surface proposée est un demi-cercle dont le diamètre est situé au niveau supérieur du liquide. Si r est le rayon du cercle, on a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Par suite,

$$X = \frac{\int_0^r x^2 dx \sqrt{r^2 - x^2}}{\int_0^r x dx \sqrt{r^2 - x^2}}.$$

En posant $x = r \sin \omega$, on transforme cette expression en la suivante :

$$X = r \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \cos^2 \omega d\omega}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega \cos^2 \omega d\omega}$$

et, en effectuant les intégrations,

$$X = r \frac{\frac{1}{16} \pi}{\frac{1}{3}} \text{ ou } X = \frac{3}{16} \pi r = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi r}{2}.$$

Ainsi, le centre de pression est sur le rayon qui sert d'axe de symétrie, à une distance du centre égale aux $\frac{3}{8}$ de la longueur développée du quadrant.

IV. Dans quelques cas particuliers, on peut déterminer le centre de pression par des considérations géométriques. La pression sur chaque élément de la surface plane considérée peut être représentée par le poids d'une colonne liquide ayant cet élément pour base, et pour hauteur la distance de ce même élément au-dessous du niveau supérieur du liquide. Si l'on conçoit toutes ces colonnes construites, leur volume total représentera la pression totale du liquide; et le point d'application de cette pression totale sera le pied de la perpendiculaire abaissée sur la surface plane considérée par le point d'application du poids total, c'est-à-dire par le centre de gravité du volume que forme l'ensemble des colonnes élémentaires.

Si la surface considérée est un rectangle ABCD (fig. 3) ayant son côté AB au niveau supérieur du liquide, les colonnes élémentaires auront des hauteurs proportionnelles à leur distance à ce côté AB; leurs extrémités supérieures seront donc dans un même plan, et le volume total sera une pyramide triangulaire ACEBDF, dont le centre de gravité G sera celui de la section moyenne OIK. Or, IK étant perpendiculaire sur ABCD, puisque les pressions sont normales, la perpendiculaire GC abaissée du

point G sur ABDC sera parallèle à IK, et rencontrera conséquemment OI aux $\frac{2}{3}$ de cette droite à partir du point O, ce qui est conforme au résultat obtenuci-dessus.

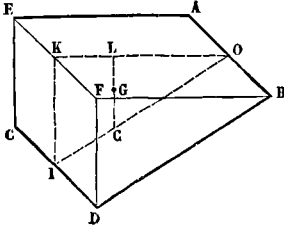


Fig. 3.

Si la surface considérée est un triangle isocèle AOB (fig. 4) ayant son sommet O au niveau supérieur du liquide, et sa base AB horizontale, le volume formé par l'ensemble des colonnes élémen-

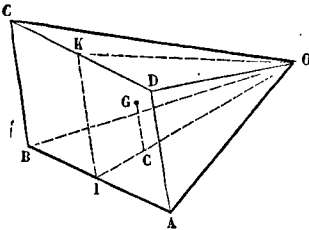


Fig. 4.

taires sera une pyramide quadrangulaire OABCD, dont le centre de gravité sera dans le plan de symétrie OIK aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur de ce triangle; la perpendiculaire GC abaissée sur AOB, et par conséquent parallèle à IK, rencontrera donc OI aux $\frac{3}{4}$ de cette droite, à partir du point O, ce qui est encore conforme au résultat précédemment obtenu.

Enfin, si la surface considérée est un triangle isocèle ABE (fig. 5) ayant sa base AB au niveau

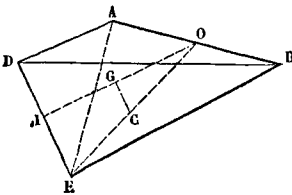


Fig. 5.

supérieur du liquide, le volume formé par l'ensemble des colonnes élémentaires sera un tétraèdre ABED, dont le centre de gravité G se trouvera au milieu de la droite OI qui joint les milieux O et I de deux arêtes opposées (Voy. CENTRE DE GRAVITÉ). La perpendiculaire GC abaissée de ce point sur le triangle AEB, étant parallèle à DE, tombera donc au milieu de OE, ce qui est conforme au résultat trouvé plus haut.

Cette méthode pourrait encore être employée dans

quelques autres cas particuliers; mais on conçoit qu'elle ne peut être suivie généralement, et que la méthode fondée sur l'emploi du calcul est la seule qui soit applicable à tous les cas, sauf la difficulté des intégrations, que l'on pourra toujours, du reste, effectuer par approximation.

CENTRE DE SYSTÈME, ou centre de gravité d'un navire et de sa charge. Ce point, dont la considération est importante au point de vue de la stabilité de l'équilibre, soit statique, soit dynamique, est évidemment situé dans le *longitudinal* (Voy. CONSTRUCTION NAVALE, DEVIS DE CONSTRUCTION), puisque ce plan est un plan de symétrie du navire, et que la charge est ordinairement répartie d'une manière symétrique. On pourrait le déterminer en évaluant avec soin le poids de chacune des pièces qui entrent dans la construction du vaisseau ou qui font partie de la charge, et en prenant les moments de ces poids par rapport au dessus de la quille, et par rapport au latitudinal, ou à l'une des perpendiculaires avant ou arrière. Mais ce procédé serait d'une longueur rebutante, et on répondrait difficilement de n'avoir rien omis. — On préfère déterminer le centre de gravité par expérience lorsque le navire est à flot et que son armement est complet. On se sert pour cela de la considération du **MÉTACENTRE** (Voy. ce mot). Nous supposons que le navire, primitivement droit, s'incline en tournant autour d'un axe horizontal situé dans son plan de symétrie.

Soit AB (fig. 1) la trace de la ligne d'eau primitive sur le latitudinal; et pour simplifier la figure,

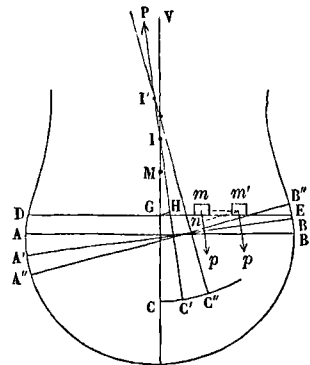


Fig. 1.

supposons que ce soit la ligne d'eau qui se déplace pour venir en A'B'. Nous nommerons α l'angle de ces deux droites, ou la quantité dont le navire s'est incliné. Pour produire cette inclinaison, il suffit de déplacer un poids p un peu considérable, et de le transporter par exemple de m en m' , plus près du bord. Nous supposons que le plan horizontal DE dans lequel le déplacement s'opère passe par le centre de gravité G du système ou très-près de ce centre, ce qui aurait lieu si l'opération se faisait à la hauteur du premier pont. Pour mesurer l'inclinaison produite, on peut se servir d'un fil à plomb suspendu en un point de la ligne de milieu d'une épontille; on peut encore mesurer au maître couple l'espace AA' abandonné par le fluide; le rapport de cet espace à la demi-largeur de la ligne d'eau

donne sensiblement la tangente de l'inclinaison cherchée. Cela posé, il faut concevoir qu'avant l'inclinaison le poids p placé en m était équilibré par un poids égal placé symétriquement de l'autre côté du longitudinal; après l'inclinaison, les moments de ces poids par rapport au centre de gravité ne sont plus égaux. Si C et C' sont les positions successives du CENTRE DE CARÈNE (*Voy.* ce mot), et I le point de rencontre de la verticale CI avec la verticale de C' dans la nouvelle position du navire, en prenant les moments par rapport à un plan mené par G perpendiculairement au longitudinal et parallèlement à $C'I$, on trouvera que le moment de p aura augmenté de $p \cdot mm' \cdot \cos \alpha$ ou $pd \cos \alpha$, en appelant d la distance mm' . Cette augmentation étant la seule cause de l'inclinaison produite, il faut pour l'équilibre que le moment de la poussée du fluide sur la carène soit égal et de signe contraire à cette même augmentation. Or, en nommant P cette poussée, son moment est $P \cdot IG \sin \alpha$; on doit donc avoir

$$P \cdot IG \sin \alpha = pd \cos \alpha, \text{ d'où } IG = \frac{p}{P} \cdot d \cot \alpha. [1]$$

Cette relation donnerait le point G si le point I était connu; comme il ne l'est pas, on fait une seconde expérience; on transporte de nouveau le poids p à une nouvelle distance d' du point m ; il en résulte une nouvelle inclinaison α' , une nouvelle ligne d'eau $A''B''$, un nouveau centre de carène C'' ; et la verticale de ce centre vient rencontrer en I' la verticale primitive CV . On a donc, par les mêmes raisons que ci-dessus,

$$I'G = \frac{p}{P} d' \cot \alpha'. [2]$$

Retranchant membre à membre les relations [1] et [2], on en déduit

$$I'G - IG = I'I = \frac{p}{P} (d' \cot \alpha' - d \cot \alpha). [3]$$

Soit maintenant M la projection du premier métacentre, point que l'on sait déterminer. On démontre aisément que, pour de faibles inclinaisons, les distances IM et $I'M$ sont proportionnelles aux inclinaisons elles-mêmes; si nous admettons pour le moment cette proportionnalité, nous aurons

$$I'M : IM = \alpha' : \alpha, \\ \text{d'où } IM : I'M - IM = \alpha : \alpha' - \alpha, \\ \text{par suite } IM = I'I \cdot \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha}, [4]$$

ou, en mettant pour $I'I$ sa valeur [3],

$$IM = \frac{p}{P} (d' \cot \alpha' - d \cot \alpha) \cdot \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha}. [5]$$

Retranchant membre à membre les relations [5] et [1], on obtient

$$IG - IM = MG = \frac{p}{P} d \cdot \cot \alpha \\ - \frac{p}{P} (d' \cot \alpha' - d \cot \alpha) \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

relation qu'on peut mettre sous la forme

$$MG = \frac{p}{P} \cdot \frac{\alpha' d \cot \alpha - \alpha d' \cot \alpha'}{\alpha' - \alpha}. [6]$$

La position du centre de gravité se trouve ainsi déduite de celle du premier métacentre.

Nous avons supposé que l'expérience de déplacement du poids p , expérience que les marins désignent par les mots *mettre à la bande*, se faisait à la hauteur du centre de gravité ou très-près de ce centre. Si cela n'avait pas lieu, les formules ci-des-

sus deviendraient inexactes, parce qu'alors la distance du point G au plan dans lequel se fait le déplacement doit intervenir dans le calcul, ce qui conduit à des résultats beaucoup moins simples.

Nous avons admis que, pour de faibles inclinaisons, les distances IM et $I'M$ étaient sensiblement proportionnelles à α et α' . La démonstration en est facile. Soit $MM' M''$ (fig. 2) le lieu des métacentres,

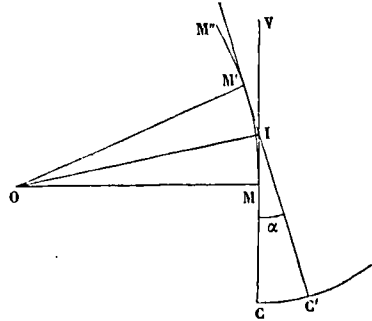


Fig. 2.

les droites CI et $C'I'$ seront tangentes à cette courbe, l'une en M , l'autre en M' . Or si l'inclinaison α est très-faible, comme cela a lieu ordinairement, l'arc MM' peut être pris pour un arc de cercle, ayant pour rayon le rayon de courbure ρ de la courbe au point M . Mais si MM' est un arc de cercle, soit O son centre; joignons OM, OI, OM' ; l'angle MOM' sera égal à α , et l'angle IOM en sera la moitié; dans le triangle IOM , rectangle en M , on aura donc

$$IM = OM \cdot \text{tang } IOM = \rho \text{ tang } \frac{1}{2} \alpha,$$

ou, en remplaçant la tangente par l'arc,

$$IM = \frac{1}{2} \rho \cdot \alpha.$$

La longueur IM est donc proportionnelle à α ; ce qu'il s'agissait de démontrer.

On peut remarquer que si la courbe métacentrique était tracée avec soin, et à une échelle suffisante sur le plan latitudinal, ainsi que le lieu des centres de carène, il suffirait, pour avoir le point I , de mener une tangente à la courbe des métacentres, ou une normale à la courbe des centres de carène, faisant avec la verticale primitive un angle égal à l'inclinaison observée α . D'ailleurs la distance IG se calcule très-aisément à l'aide de la formule [1] qui est logarithmique; en faisant la différence, on aurait la distance MG , et l'on pourrait placer le point G sur l'épure.

Au lieu de faire varier la position d'un seul poids p , on en fait ordinairement varier plusieurs; chaque terme tel que $pd \cos \alpha$ doit alors être remplacé par une somme $\Sigma pd \cos \alpha$, ou $\cos \alpha \Sigma pd$, puisque l'inclinaison est la même pour tous les termes.

On peut remarquer enfin qu'au lieu de faire varier la distance d pour obtenir une inclinaison différente, on pourrait faire varier le poids p . Les formules, dans ce cas, auraient encore une forme analogue aux précédentes.

Lorsque le navire est en repos, il faut pour l'équilibre que son centre de gravité soit dans la verticale du centre de carène; connaissant la hauteur du métacentre latitudinal au-dessus du centre de

carène, et la distance du métacentre au centre de gravité, la position de ce dernier point est complètement déterminée.

Dans un navire dont l'armement et le chargement sont complets, le centre de gravité est ordinairement à une petite distance au-dessus du plan de flottaison; mais il peut arriver qu'il soit au-dessous. On comprend d'ailleurs que ce point varie dans une traversée. (Voy. la *Théorie du navire*, par le marquis de Poterat, t. II, liv. I; la *Construction des bâtiments de mer*, par M. Viel, et surtout le *Cours de construction navale* de l'école de Brest.)

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES, point par lequel passe constamment la résultante d'un système de forces parallèles lorsqu'on fait varier leur direction commune sans faire varier leurs intensités, ou en faisant varier ces intensités proportionnellement. (Voy. COMPOSITION DES FORCES.)

CENTRE DES MOMENTS, point par rapport auquel on prend les moments d'un système de forces situées dans un même plan. (Voy. MOMENT.)

CENTRE DE VOILURE, point d'application de la résultante des actions exercées sur les voiles; c'est le centre de gravité de l'ensemble des voiles, regardées dans ce cas comme planes (Voy. VOILES). Ce point est aussi nommé **CENTRE VÉLIQUE**; il ne faut pas le confondre avec le **POINT VÉLIQUE** (Voy. ce mot).

CENTRE D'OSCILLATION, point d'un pendule composé, situé sur la perpendiculaire à l'axe de rotation menée par le centre de gravité, et qui jouit de la propriété d'osciller comme s'il était libre, c'est-à-dire comme un pendule simple. (Voy. PENDULE COMPOSÉ.)

CENTRE INSTANTANÉ, point autour duquel s'effectue la rotation instantanée d'une figure plane

qui se meut d'une manière quelconque dans son plan. (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ.)

CENTRE VÉLIQUE, ou **CENTRE DE VOILURE** (Voy. ce mot). Il ne faut point confondre ce point avec le **POINT VÉLIQUE**. (Voy. ce mot.)

CERCE, sorte de patron en bois ou en métal qu'on emploie dans la coupe des pierres pour reproduire la courbure d'une surface. Il y a des cerces convexes pour donner la courbure des surfaces concaves, et des cerces concaves pour donner la courbure des surfaces convexes. La figure 1 représente



Fig. 1.



Fig. 2.

une cerce convexe; la figure 2 représente une cerce concave. On présente la cerce normalement à la surface qu'on veut obtenir, et l'on entame la pierre avec soin jusqu'à ce que la cerce s'y applique exactement. (Voy. les divers articles relatifs à la *COUPE DES PIERRES*.)

CERCLE A RÉFLEXION, instrument qui sert à la mesure des angles, principalement à bord des navires. Il se compose d'un cercle divisé, monté sur une poignée perpendiculaire à son plan et qui sert à le tenir à la main. Il porte deux alidades AB et CD (fig. 1) mobiles autour d'un même axe perpen-

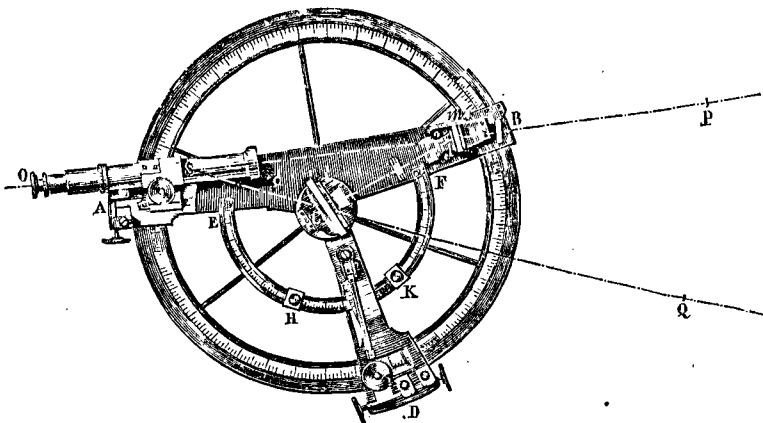


Fig. 1.

diculaire au plan du cercle et passant par son centre, mais qui sont indépendantes l'une de l'autre. La première est munie : 1° à l'extrémité A, d'une lunette dont l'axe optique est parallèle au plan du limbe et dirigée suivant la ligne de foi de l'alidade; 2° d'une pince avec vis de pression et vis de RAPPEL. 3° à l'extrémité B, d'un VERNIER, et d'une petite glace *m* perpendiculaire au limbe, mais dont une moitié seulement, celle qui est la plus voisine du cercle, est étamée, l'autre moitié demeurant

transparente. La seconde alidade est munie : 1° au centre C, d'un miroir entier qu'on appelle le grand miroir, et dont le plan est perpendiculaire au cercle; 2° à l'extrémité D, d'un vernier et d'une pince, avec vis de pression et vis de rappel. Une loupe qu'on peut amener sur les divisions sert à faciliter la lecture. En visant par la lunette, on peut apercevoir directement un objet P à travers la glace transparente *m*, et l'image d'un objet Q réfléchi une première fois sur le miroir C et une seconde fois sur

la partie étamée de la glace m . L'angle PSQ formé par les droites SP et SQ est le double de l'angle des deux miroirs (Voy. MIROIR PLAN). L'instrument peut donc fonctionner comme un SEXTANT (Voy. ce mot); le limbe est divisé en demi-degrés, numérotés de 0 à 720 comme des degrés, en sorte que l'angle à mesurer se trouve immédiatement indiqué avec sa vraie valeur. Le cercle à réflexion offre même, par rapport au sextant, un avantage de plus: c'est de pouvoir servir à mesurer des angles quelconques.

Mais ce qui donne à cet instrument une supériorité réelle sur les autres appareils employés dans la marine à la mesure des angles, c'est qu'il permet d'appliquer à cette mesure le principe de la RÉPÉTITION (Voy. ce mot).

Voici comment il faut opérer pour cela. Soient AB et CD (fig. 2) la position relative des deux ali-

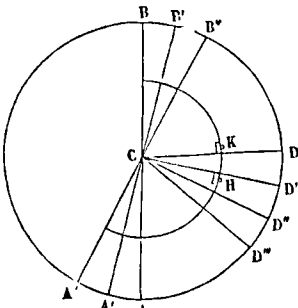


Fig. 2.

dades quand les miroirs m et C sont parallèles; et supposons, pour fixer les idées, que la direction CD passe par le zéro de la division. Imaginons que, pour faire coïncider l'image directe du point P avec l'image deux fois réfléchie du point Q , il ait fallu amener l'alidade CD à la position CD' ; l'arc DD' mesurera l'angle cherché, d'après ce que nous avons dit de la graduation du limbe. On fixera l'alidade en CD' ; on détachera l'alidade AB , et on l'amènera à la position $A'B'$ pour laquelle les deux miroirs sont de nouveau parallèles; et, partant de cette position relative des deux alidades, qui est pareille à la première, on visera directement le point P suivant $A'B'$, en faisant tourner tout l'instrument, et on fera marcher l'alidade CD' jusqu'à ce qu'elle arrive à la position CD'' , pour laquelle l'image deux fois réfléchie du point Q vient coïncider avec l'image directe du point P . Il est clair que cette alidade aura marché d'une quantité $D'D''$ égale à DD' , et que le zéro du vernier de l'alidade CD aura parcouru un arc DD'' double de celui qui mesure l'angle cherché. On fixera l'alidade en CD'' ; on détachera l'alidade $A'B'$; on l'amènera dans la position $A''B''$ pour laquelle les miroirs sont parallèles; faisant tourner tout l'appareil, on visera directement le point P suivant $A''B''$, puis on fera marcher l'alidade CD'' jusqu'à ce qu'elle arrive à la position CD''' pour laquelle l'image deux fois réfléchie du point Q coïncide avec l'image directe du point P . L'alidade aura parcouru un nouvel arc $D'D'''$ égal à chacun des deux précédents, et l'arc DD''' sera le triple de celui qui mesure l'angle cherché. En continuant

ainsi on obtiendra un multiple entier quelconque de l'arc DD' ; et on aura sa valeur par une seule lecture. Supposons que DD' ait été répété 10 fois; en divisant le résultat par 10, on aura la valeur de DD' ; et l'erreur commise sur la lecture, erreur qui est la même que si l'arc DD' eût été mesuré directement, se trouvera elle-même divisée par 10.

Pour faciliter la manœuvre qui vient d'être expliquée, on adapte à l'alidade AB une portion d'anneau EF (fig. 1) concentrique au cercle, et portant deux curseurs H et K que l'on peut fixer en un point quelconque de l'anneau. Cette portion d'anneau porte le nom d'*arc concentrique de Mendoza*. Au commencement de l'opération, on amène le curseur K contre l'alidade CD ; et, lorsque cette alidade est venue en CD' , on amène contre elle le curseur H . Pour ramener les miroirs au parallélisme, ou à très-peu près, il suffit alors de faire mouvoir l'alidade AB jusqu'à ce que le curseur K soit venu s'appuyer contre l'alidade CD' ; la position véritable de l'alidade AB achève de se régler avec la vis de rappel; puis, pour amener l'alidade CD' à la position qui produit la coïncidence des images, il suffit de la faire mouvoir jusqu'à ce qu'elle se trouve de nouveau en contact avec le curseur H , lequel a été entraîné avec l'alidade AB ; et la position CD'' se règle avec la vis de rappel; et ainsi de suite à chaque opération.

Dans les divers genres d'observations, on opère comme pour le SEXTANT (Voy. ce mot). Il faut cependant remarquer que l'on peut avec le cercle à réflexion viser directement l'objet de droite aussi bien que l'objet de gauche (Voy. MIROIR PLAN, III); dans le premier cas on dit qu'on fait une *observation à gauche*, parce que c'est par la gauche que viennent les rayons réfléchis; dans le second, les rayons réfléchis venant de la droite, on dit qu'on fait une *observation à droite*. Or, en combinant les deux modes d'observation, ce qu'on appelle faire deux observations *croisées*, on peut se dispenser de déterminer la position relative des alidades pour laquelle les miroirs sont parallèles. Supposons, en effet, qu'ayant à déterminer l'angle de deux rayons visuels OP , OQ (fig. 3), on ait d'abord

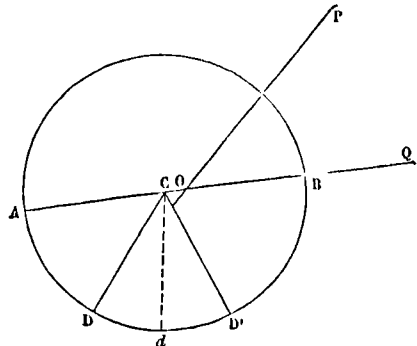


Fig. 3.

fait une observation à droite, et soient AB et CD les deux alidades dans la position qu'on leur a donnée à la fin de cette observation. Concevons maintenant qu'on fasse une observation à gauche, en visant directement le point Q dans le sens de AB , et qu'on fasse mouvoir l'alidade jusqu'à ce qu'elle prenne

la position CD' pour laquelle l'image deux fois réfléchie du point P coïncide avec l'image directe du point Q . Soit Cd la position de l'alidade CD pour laquelle les miroirs sont parallèles; d'après le principe déjà invoqué, l'arc Dd sera la mesure de l'angle POQ résultant de l'observation à droite; et l'arc dD' sera la mesure du même angle résultant de l'observation à gauche. Donc $Dd = dD'$; et DD' mesure un angle double de l'angle POQ ; il suffira donc d'en prendre la moitié pour obtenir la mesure de l'angle proposé. (Il ne faut pas oublier que les divisions numérotées comme des degrés ne sont réellement que des demi-degrés; autrement ce serait l'arc DD' tout entier qui mesurerait l'angle POQ .)

Il y a une méthode de répétition des angles fondée sur les observations croisées. Ces observations croisées ont l'avantage d'atténuer plusieurs des erreurs inhérentes à l'emploi de l'instrument, et de faire entièrement disparaître celles qui proviennent du défaut de parallélisme des faces des verres colorés dont il va être question.

Quand on observe le soleil, on place derrière la glace m , et sur le trajet des deux miroirs, de petits châssis portant des verres colorés, que l'on peut enlever à volonté en les faisant glisser dans des rainures adaptées à l'alidade AB . Mais, par la disposition de l'appareil, les verres colorés interposés entre les deux miroirs se trouvent sur le trajet des rayons réfléchis lorsque l'angle à mesurer est compris entre $5^{\circ}20'$ et 34° ; dans ce cas, on les remplace par d'autres verres colorés, que l'on appelle les *grands verres*, et que l'on place devant le grand miroir C , en les faisant glisser dans des rainures pratiquées dans le cadre même qui supporte ce miroir.

Les verres colorés peuvent être une cause d'erreur lorsque leurs deux faces ne sont pas exactement parallèles, parce qu'ils agissent alors comme des prismes pour dévier la lumière. Dans les instruments soignés, les verres peuvent être retournés; on rend alors les observations indépendantes du défaut de parallélisme des faces en répétant ces observations après avoir retourné les verres, et prenant la moyenne des résultats. Ainsi, dans une série de 10 répétitions, on retourne les verres après la cinquième. On arrive au même résultat par les observations croisées.

On adapte aussi des verres colorés à la lunette elle-même; mais ces verres n'influent pas sur l'exactitude des observations, puisque le rayon direct et le rayon réfléchi sont déviés de la même manière.

Enfin, dans les observations où l'on a à viser directement des objets terrestres, on place souvent derrière le petit miroir, à la place d'un ou plusieurs verres colorés, une plaque de cuivre percée d'un trou triangulaire, à laquelle on donne le nom de *ventelle*; elle s'engage, par une queue munie d'un ressort, dans une loge pratiquée exprès; et on peut l'enfoncer ou l'élever plus ou moins pour augmenter ou affaiblir la quantité de lumière émise par l'objet, de manière à rendre l'image directe égale en intensité à l'image de l'objet réfléchi, condition qu'il faut chercher à remplir dans toutes les observations pour pouvoir juger plus nettement soit du contact, soit de la superposition des images.

L'invention du cercle à réflexion est due à l'astro-

nome Tobie Mayer; mais il a été perfectionné par Borda. Ce géomètre a calculé des tables pour toutes les corrections auxquelles l'instrument peut donner lieu; et particulièrement pour celle qui résulte du défaut de parallélisme des deux faces de la glace qui forme le grand miroir. Ce cercle à réflexion est d'un usage général dans la marine; et il rend de précieux services dans l'hydrographie.

Les *rectifications* ou vérifications qu'il faut faire subir à l'instrument sont analogues à celles qui concernent le sextant. Elles sont au nombre de quatre :

1° Il faut rendre le grand miroir perpendiculaire au plan du limbe. Pour cela, on place le limbe horizontalement, et l'on amène l'alidade du grand miroir à toucher l'alidade de la lunette. On place sur les bords du limbe deux viseurs égaux, aux extrémités d'une corde perpendiculaire au grand miroir, et rasant ce miroir. En mettant l'œil à la hauteur de l'arête du viseur placé en face du miroir, on aperçoit l'image de ce viseur par réflexion et l'autre viseur directement. Si le grand miroir est perpendiculaire au plan du limbe, les arêtes supérieures doivent paraître dans le prolongement l'une de l'autre. Si l'image du premier viseur paraît au-dessus du second, c'est que le miroir incline du côté de ce premier viseur; si l'image paraît au-dessous, c'est le contraire. On fait alors mouvoir les vis de la monture du miroir de manière à remplir la condition indiquée.

2° Il faut en second lieu rendre le petit miroir perpendiculaire au plan du limbe. Pour cela, on place les alidades de manière que les deux miroirs soient à peu près parallèles; on vise un astre, et en faisant mouvoir l'alidade du grand miroir on amène l'image réfléchie à coïncider avec l'image directe. Si la coïncidence s'établit exactement, les deux miroirs sont alors exactement parallèles, et par conséquent le petit miroir est perpendiculaire au plan du limbe. Si l'image réfléchie paraît au-dessus de l'image directe, c'est que le petit miroir penche du côté de l'observateur; si l'image réfléchie paraît au-dessous, c'est le contraire. On rétablit le parallélisme au moyen des vis de la monture du petit miroir.

On peut encore viser l'horizon de la mer en tenant le limbe vertical, et amener l'image réfléchie en contact avec l'image directe. Si en inclinant ensuite l'instrument les images ne se séparent pas, le petit miroir est parallèle au grand. Si les deux images se séparent, on fait mouvoir les vis de manière à rétablir la coïncidence dans toutes les positions.

3° Il faut ensuite rendre l'axe optique de la lunette parallèle au plan du limbe. Les collets ou montants qui fixent la lunette sur le limbe peuvent être rapprochés ou écartés de ce plan à l'aide de vis spéciales. On place le limbe horizontalement; et l'on pose sur son plan deux viseurs égaux, aux extrémités d'une corde à peu près parallèle à l'axe optique de la lunette; et l'on vise, à l'aide des arêtes supérieures de ces viseurs, un point remarquable éloigné de 10 à 15 mètres au moins. On vise ensuite le même point à l'aide de la lunette; et, faisant mouvoir l'alidade qui la porte, on examine si le point visé paraît décrire une droite parallèle aux fils horizontaux du réticule. Si cela n'a pas

lieu, on modifie la distance des montants au limbe de manière que la condition soit remplie.

4° Il faut enfin rectifier les curseurs. L'arc concentrique porte des divisions dans deux sens, à partir de la position qu'occupe l'alidade du grand miroir à l'instant du parallélisme; il faut que les curseurs amenés contre l'alidade dans cette position correspondent à deux divisions de même rang. Si cela n'a pas lieu, on fait varier la longueur de l'un des curseurs au moyen d'un appendice latéral qu'on peut rentrer ou faire sortir; ou bien, on peut déranger un peu la position de l'alidade de manière que les viseurs correspondent à des divisions de même rang, et rétablir le parallélisme des miroirs en faisant pivoter le petit miroir sur son axe.

On appelle *erreur de parallélisme* ou *erreur instrumentale* la distance qui existe assez souvent entre le zéro du limbe et le zéro du vernier lorsque les miroirs sont parallèles. Tout angle mesuré à l'aide de l'instrument doit être corrigé de cette erreur constante.

Plusieurs constructeurs étrangers se sont attachés à faire disparaître l'erreur d'excentricité qui subsiste dans le cercle à réflexion de Borda. On a aussi remplacé les miroirs ordinaires par des prismes à réflexion totale.

(Voyez, pour plus de détails, le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, pages 124 et suivantes; et le *Cours de Géodésie* de M. Laussedat, à l'École polytechnique, pages 65 et suivantes.)

CERCLE MURAL, cercle de grandes dimensions employé dans les observatoires à la mesure des DISTANCES ZÉNITHALES, et par suite des DÉCLINAISONS et des HAUTEURS MÉRIDIENNES (Voy. ces mots). Le cercle est monté sur un axe horizontal perpendiculaire au plan du méridien; cet axe peut tourner sur des coussinets placés dans l'intérieur d'un pilier en maçonnerie, en sorte que le cercle se meut à une petite distance du mur auquel il est sensiblement parallèle, d'où le nom de *cercle mural*. Suivant un diamètre du cercle est fixée une lunette qui le suit dans son mouvement et dont l'axe optique est perpendiculaire à l'axe de rotation. Un système de contre-poids est disposé de manière à soulager les coussinets et à diminuer le frottement, comme dans la LUNETTE MÉRIDIENNE (Voy. ce mot). Des vis de pression et des vis de rappel permettent d'arrêter les mouvements du cercle, et de pointer d'une manière précise.

Quand on veut observer avec cet instrument une étoile placée dans le plan du méridien, on fait tourner rapidement le cercle jusqu'à ce que l'étoile apparaisse dans le champ de la lunette, près de la croisée des fils du réticule; une pince avec vis de rappel (Voy. ce mot) permet ensuite de faire mouvoir le cercle lentement, jusqu'à ce que l'étoile coïncide avec le point de croisement des fils. Il s'agit alors de lire la quantité angulaire dont le cercle a tourné; à cet effet, un certain nombre de MICROMÈTRES, petites lunettes à réticule et à vis micrométrique (Voy. ces mots), sont fixés au mur, à des distances égales les uns des autres, autour de la circonférence du cercle, et vis-à-vis de sa tranche, qui est divisée en degrés et fractions de degré, de 5' en 5' par exemple. Le réticule du micromètre étant dans sa position normale, on lit le nombre entier de divisions dont le cercle a tourné; puis on

fait marcher le réticule, à l'aide de la vis micrométrique, jusqu'à ce que le point de croisement des fils vienne se placer sur la division dont on a lu le numéro d'ordre; le nombre de tours et la fraction de tour qu'il faut faire faire pour cela à la tête de la vis micrométrique, indique la fraction de division qu'il faut ajouter au nombre entier pour avoir la mesure de l'angle cherché. A l'observatoire de Paris, les micromètres sont au nombre de 6; l'un d'eux, appelé *micromètre principal*, donne le nombre entier de divisions qui entre dans la mesure de l'angle; la fraction de division à ajouter à ce nombre entier est donnée par la moyenne des indications des 6 micromètres. Il n'y a plus qu'à faire subir à l'angle obtenu la correction relative à la RÉFRACTION ATMOSPHERIQUE (Voy. ce mot).

Le cercle mural doit être soumis, comme la lunette méridienne, à certaines vérifications. Il faut s'assurer d'abord que l'axe optique de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation.

Pour cela, on applique sur le cercle une lunette portée par deux collets à bords carrés CC, et dont l'axe optique est exactement parallèle au plan déterminé par deux bords correspondants de ces collets; cette lunette s'appelle une LUNETTE D'ÉPREUVE. Quand elle est posée par ses collets sur le plan du cercle mural, son axe optique est parallèle à ce plan; et, comme ce plan est perpendiculaire à son axe de rotation, l'axe optique de la lunette d'épreuve est lui-même perpendiculaire à cet axe. S'il en est de même de l'axe optique de la lunette fixée au cercle, il faut qu'en dirigeant les deux lunettes parallèlement vers une même étoile, cette étoile soit cachée par le point de croisement des fils du réticule dans les deux lunettes. Si cela n'a pas lieu, on déplace le réticule de la lunette fixée au cercle, de manière à remplir cette condition. Pour s'assurer ensuite que le plan du cercle mural est celui du méridien, on opère par comparaison avec la lunette méridienne, ordinairement placée dans le voisinage.

CERCLE RÉPÉTITEUR, ou simplement **CERCLES**, instrument employé pour mesurer les angles. Il se compose essentiellement d'un cercle horizontal divisé CCC, qui peut tourner autour d'un axe vertical passant par son centre, et d'une lunette LL dite *plongeante* (c'est-à-dire mobile autour d'un axe horizontal), mais susceptible en outre d'un second mouvement de rotation autour de l'axe vertical du cercle. — Ce cercle fait corps avec une colonne creuse A, mobile autour d'un axe intérieur B; elle se termine inférieurement par un plateau N, qui peut être lié au support par le moyen d'une pince K que l'on serre à l'aide de la vis de pression P; l'ensemble de ces pièces, le cercle CC, la colonne A et le plateau N forment ce qu'on peut appeler, pour abrégé le discours, le *système du cercle*.

L'axe horizontal de la lunette LL est établi au sommet d'une autre colonne creuse A', mobile autour du même axe vertical B que le cercle; elle se termine inférieurement par une ALIDADE aa', dont



la ligne de foi est dans le plan vertical déterminé par l'axe optique de la lunette; ses extrémités sont munies de verniers qui, dans la rotation, ne cessent pas de coïncider avec le limbe du cercle, et l'une

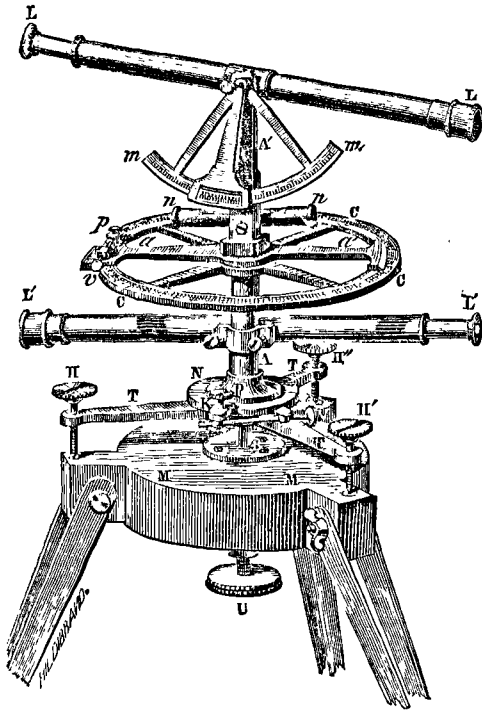


Fig. 1.

de ces extrémités peut en outre être liée au plan du cercle par le moyen d'une pince que l'on serre à l'aide de la vis *p*; l'ensemble de ces trois pièces, la lunette LL, la colonne A' et l'alidade aa' forment ce qu'on peut appeler le système de la lunette. Tout l'appareil repose sur un solide support MM à trois pieds, au moyen d'un trépied TTT muni de vis calantes H, H', H''; et, pour plus de sûreté, ce trépied est lié au support MM par une forte vis U. L'instrument offre en outre quelques parties accessoires. Perpendiculairement à l'axe de la lunette LL est montée une alidade terminée par un vernier, et qui parcourt un arc divisé fixe *mm*, embrassant environ 60° de part et d'autre de la verticale. Perpendiculairement à la colonne A' est établi un niveau à bulle d'air *nn*. Enfin, à la colonne A est fixée une seconde lunette L'L', à peu près horizontale, et qui n'est susceptible que d'un petit mouvement que l'on règle par des vis spéciales. Ces détails permettront de comprendre le maniement de l'appareil.

Pour mettre l'instrument en station, on établit solidement le support MM en enfonçant ses trois pieds dans le sol, de manière que sa partie supérieure soit sensiblement horizontale. La vis P étant serrée et la vis *p* desserrée, on fait tourner le système de la lunette de manière à amener le niveau *nn* dans une direction à peu près parallèle à la droite déterminée par deux des vis calantes H' et H'', par exemple; et, le niveau étant supposé réglé (Voy.

NIVEAU), l'on tourne ces vis dans le sens convenable jusqu'à ce que la bulle du niveau vienne se placer entre ses repères. On fait de nouveau tourner le système de la lunette jusqu'à ce que le niveau vienne prendre une position à peu près perpendiculaire à la première, et l'on fait tourner la vis calante H jusqu'à ce que la bulle du niveau occupe le milieu du tube. Ce niveau étant parallèle au plan du cercle, on est assuré alors que ce plan est horizontal, puisque, par l'opération même, on s'est assuré qu'il contenait deux droites horizontales.

Pour mesurer un angle, on installe l'instrument, comme il vient d'être dit, au sommet de l'angle à mesurer, de manière que son axe vertical soit au-dessus de ce sommet, ce dont on s'assure à l'aide d'un fil à plomb placé sous la vis U. La vis P étant toujours serrée, on fait tourner le système de la lunette jusqu'à ce que le zéro de l'alidade aa' corresponde au zéro de la graduation du cercle, on serre alors la vis *p*, on desserre la vis P, et l'on fait tourner l'ensemble des deux systèmes devenus solitaires, jusqu'à ce qu'en visant à l'aide de la lunette LL, on aperçoive à peu près derrière la croisée des fils placés au foyer de l'objectif le signal qui détermine la direction du côté de l'angle placé à la droite de l'opérateur; on serre alors la vis P, et à l'aide de la vis de rappel V, on amène doucement le signal derrière la croisée des fils. Cela fait, on desserre la vis *p*; on fait tourner le système de la lunette de droite à gauche jusqu'à ce qu'en visant par la lunette LL on aperçoive, à peu près derrière la croisée des fils, le signal qui détermine le côté de l'angle placé à gauche de l'opérateur; on serre alors la vis *p*; et, à l'aide de la vis de rappel, on amène doucement le signal derrière la croisée des fils. On lit alors, au moyen des verniers, l'angle dont le système supérieur a tourné; c'est l'angle qu'il s'agissait d'obtenir. Si les deux lectures ne donnent pas rigoureusement le même arc, on prend la moyenne pour l'expression de l'angle cherché. L'une de ces lectures, celle qui est faite à l'aide du vernier placé du côté a', donne toujours 180° de trop; il est inutile de dire qu'il faut avoir soin de les retrancher.

Dans cette opération, on se sert de la lunette inférieure L'L' pour s'assurer que le cercle est resté immobile pendant la rotation de la lunette supérieure. Pour cela, lorsque l'alidade aa' a été fixée dans la direction du premier côté, on dirige la lunette inférieure, en la déplaçant un peu si cela est nécessaire, vers un point éloigné pouvant servir de point de repère, et on la fixe dans cette position; puis, lorsque, après la rotation de la lunette supérieure, l'alidade a été fixée dans la direction du second côté, on s'assure que la lunette inférieure est toujours dirigée sur son repère.

Le principal avantage du cercle consiste dans l'approximation presque indéfinie avec laquelle on peut, théoriquement au moins, évaluer les angles par la répétition des angles. Voici en quoi consiste cette méthode. L'évaluation d'un angle peut être entachée de deux erreurs, dont l'une provient du pointé et l'autre de la lecture de l'angle; la première est toujours très-faible et ne s'élève guère à plus d'une seconde dans les cas les plus défavorables. Il n'en est pas de même de la seconde erreur, puisqu'on ne peut lire les angles qu'à une minute près. Mais au lieu de mesurer l'angle lui-même, on

peut mesurer un de ses multiples, n fois cet angle par exemple; en ne faisant qu'une seule lecture, l'erreur commise sur l'angle cherché ne sera, au moins très-approximativement, que la $n^{\text{ème}}$ partie de l'erreur commise sur son multiple; si, par exemple, l'angle mesuré vaut 60 fois l'angle cherché, l'erreur de lecture qui pouvait aller jusqu'à une minute, ne sera plus que d'une seconde. Pour répéter ainsi un angle AOB (fig. 2), on opère de la manière suivante :

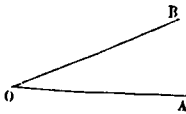


Fig. 2.

On opère d'abord, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, comme si l'on voulait mesurer directement l'angle AOB; mais au lieu de lire sa valeur sur le limbe, on desserre la vis P; et comme la vis p se trouve avoir été serrée pour faire jouer la vis de rappel v, on fait tourner tout l'instrument de gauche à droite, et l'on ramène la lunette dans la direction OA; la vis P ayant été serrée pour faire jouer la vis V, on desserre la vis p, on fait tourner le système de la lunette de droite à gauche, et on amène cette lunette dans la direction OB. L'alidade aa' marque alors sur le limbe le double de l'angle AOB, puisque le zéro du cercle a décrit précédemment, de gauche à droite, un angle égal à AOB. Par une série de manœuvres identiques, on ramène ainsi successivement la lunette et le cercle dans la direction OA, puis la lunette seule dans la direction OB; la lunette et le cercle dans la direction OA, puis la lunette seule dans la direction OB, et ainsi de suite; et l'on arrive à faire exprimer à l'alidade un multiple quelconque de AOB. On a soin de compter le nombre de tours entiers que l'instrument a exécutés de gauche à droite, on multiplie 360° par ce nombre de tours, et l'on ajoute au produit l'indication de l'alidade sur le limbe; on a ainsi la mesure du multiple de AOB. Si, par exemple, on a mesuré le multiple de l'angle cherché par 60, qu'on ait compté trois tours entiers de l'instrument de gauche à droite, et que l'alidade marque sur le limbe $314^\circ 31'$, on ajoutera 3 fois 360° , ou 1080° , ce qui donnera $1394^\circ 31'$, et l'on divisera par 60; on trouvera ainsi, pour la mesure à $1''$ près de l'angle demandé, $23^\circ 14' 31''$.

En même temps qu'on mesure ainsi un angle, ou du moins cet angle réduit à l'horizon, on peut aussi évaluer, à l'aide de l'arc que parcourt l'alidade fixée perpendiculairement à la lunette LL, les angles que font ces côtés avec l'horizon, angles qui sont souvent utiles.

On donne quelquefois au cercle répéteur une autre disposition qui exige une manœuvre un peu différente, dans laquelle on se sert de deux lunettes mobiles parallèlement au cercle. L'axe optique de la lunette supérieure rencontre l'axe vertical passant par le centre du cercle; mais la lunette inférieure est placée un peu à côté de cet axe vertical. Du reste on peut faire tourner autour de ce même axe, soit chaque lunette séparément, soit l'ensemble de tout le système. On dirige le zéro du cercle et la lunette supérieure sur le point A (fig. 2) et la lunette inférieure sur le point B; on fait tourner tout le système de gauche à droite jusqu'à ce que la lunette inférieure soit ramenée sur A, et l'on dirige

la lunette supérieure sur B; on fait tourner tout le système de gauche à droite jusqu'à ce que la lunette supérieure soit ramenée sur A, et l'on dirige la lunette inférieure sur B; et ainsi de suite. On voit aisément que l'angle à mesurer se trouve répété comme dans la première méthode; mais il faut, pour lire le multiple obtenu, que la lunette supérieure soit ramenée sur le point B, parce que c'est elle qui porte le vernier; ceci exige que le multiple dont il s'agit soit un multiple pair. Cette méthode s'appelle *méthode de répétition double*; c'est celle qu'employait Borda. Néanmoins la méthode de répétition simple, exposée plus haut, est considérée aujourd'hui comme plus commode (Voy. THÉODOLITE).

Dans les cercles répéteurs de Borda, le limbe peut prendre toutes les inclinaisons possibles; et l'on mesure l'angle dans son plan au lieu de mesurer directement sa projection horizontale; l'emploi de cet instrument exige donc pour chaque angle le calcul de la RÉDUCTION A L'HORIZON (Voy. ce mot).

On reproche au cercle répéteur de donner lieu à une espèce particulière d'erreur qu'on appelle *erreur d'entraînement*, provenant de la torsion que peut faire subir à l'axe le mouvement prolongé du limbe dans un même sens, et aussi de l'imperfection des vis de pression ou du jeu des vis de rappel.

On emploie aujourd'hui, surtout à l'étranger, une méthode pour mesurer les angles fondée sur un principe différent de la répétition et qu'on appelle méthode de RÉITÉRATION; elle consiste à mesurer le même angle un certain nombre de fois, en prenant successivement pour origine des points arbitrairement choisis sur la circonférence du cercle, et à prendre la moyenne des mesures obtenues. Cette méthode exige deux lectures à chaque opération partielle; et la discussion approfondie des diverses causes d'erreur ne paraît pas en définitive lui assurer l'avantage sur celle de la répétition.

On attribue ordinairement l'idée de la répétition à Borda, qui l'a le premier appliquée en France; mais elle paraît due à l'astronome Tobie Mayer, qui l'a publiée en 1777.

Pour vérifier un cercle répéteur tel que celui de la figure 1, on s'assurera d'abord que le plan du cercle est perpendiculaire à l'axe général de rotation; pour cela on rendra le plan du cercle horizontal; puis, en le faisant tourner autour de son axe, on s'assurera qu'il conserve la position horizontale; on se servira à cet effet du niveau comme dans la mise en station. On s'assurera en second lieu que le centre du cercle est sur l'axe de rotation; il suffira pour cela de lire les indications données par les deux extrémités de l'alidade aa' et de vérifier si elles diffèrent exactement de 180° . Pour vérifier la graduation du cercle, on mesurera un même angle par *réitération* (Voy. ci-dessus), et l'on verra si la moyenne obtenue est toujours la même. Enfin on devra s'assurer que l'axe optique de la lunette LL décrit un plan perpendiculaire à celui du cercle; pour cela on pourra opérer de la manière suivante: on placera le cercle horizontalement, et l'on visera avec la lunette le point le plus bas d'une droite verticale, telle que l'arête d'un édifice, et l'on fixera l'alidade; puis on fera mouvoir la lunette autour de son axe en visant successivement les différents points de

te arête; il faudra que le point de croisement des fils placés au foyer de l'objectif ne quitte pas la droite visée.

CERCLES HORAIREs, nom donné aux méridiens célestes, parce que l'angle compris entre deux de ces méridiens est mesuré par l'intervalle de temps qui s'écoule entre les instants où ces méridiens viennent coïncider avec le plan du méridien du lieu. (*Voy.* ANGLE HORAIRE.)

CERCLES POLAIRES, petits cercles de la sphère céleste parallèles à l'équateur et distants des pôles de $23^{\circ}27'27''$, 24 (*Voy.* ÉCLIPRIQUE). On donne aussi, en Géographie, le nom de *cercles polaires* à deux cercles supposés tracés sur la surface terrestre de la même manière que les précédents sur la sphère céleste, et qui servent de limite aux deux zones glaciales. Celui de ces deux cercles qui est voisin du pôle boréal porte le nom de cercle polaire arctique (du grec ἀρκτος, ourse, constellation); celui qui est voisin du pôle austral est le cercle polaire antarctique (opposé à l'ourse). Les cercles polaires passent par les lieux du globe pour lesquels le soleil ne fait qu'apparaître à l'horizon, à midi, le jour du solstice, savoir: au solstice d'hiver pour les lieux situés sous le cercle polaire arctique, et au solstice d'été pour les lieux situés sous le cercle polaire antarctique.

CHAÎNE D'ARPEUTEUR, instrument qui sert à mesurer sur le terrain une distance jalonnée (*Voy.* JALONNER). Cette chaîne se compose de 50 chaînons en gros fil de fer ayant chacun $0^m,2$; elle a donc 10^m de long; toutefois on lui donne quelques millimètres de plus, 5 millimètres, par exemple, pour compenser le défaut de tension absolue, qui est inévitable. Elle se termine par deux poignées dont la longueur est prise sur les chaînons extrêmes. Les chaînons sont réunis par des anneaux en fer; mais, de 5 en 5 chaînons, cet anneau en fer est remplacé par un anneau de cuivre, afin de marquer les mètres; et le milieu de la chaîne est indiqué par une petite tige en cuivre. Pour mesurer une distance horizontale, l'opérateur appuie l'une des poignées de la chaîne contre le premier jalon; et son aide, muni de 10 fiches en fer, tend la chaîne par l'autre poignée, dans la direction du jalon suivant, et plante une fiche contre la poignée, intérieurement à cette poignée. L'opérateur et son aide emportent alors la chaîne, en marchant toujours dans la direction des jalons; arrivé à la fiche, l'opérateur y appuie extérieurement la poignée qu'il tient, et l'aide, tendant la chaîne, plante une seconde fiche de la même manière que la première. L'opérateur ramasse alors cette première fiche, et continue à s'avancer avec son aide; il appuie la poignée de la chaîne contre la seconde fiche, et l'aide, tendant la chaîne, en plante une troisième. L'opérateur ramasse la seconde; et ainsi de suite. Quand toutes les fiches ont ainsi passé des mains de l'aide dans celles de l'opérateur, celui-ci remplace la dixième par une fiche plus longue qui marque une portée, c'est-à-dire une distance de 100^m . Quand la chaîne a été tendue de manière à dépasser le dernier jalon, on compte le nombre des portées, celui des longueurs de chaîne formant une fraction de portée, celui des chaînons compris entre la poignée tenue par l'opérateur et le dernier jalon; la fraction de chaînon, s'il y en a une, s'apprécie souvent à

l'œil; mais on peut la mesurer à l'aide de divisions en centimètres tracées sur le dernier chaînon; on a ainsi les éléments nécessaires pour trouver la longueur mesurée. Si, par exemple, on a compté 2 portées, plus 3 longueurs de chaîne, plus 13 chaînons et 12 centimètres, la longueur mesurée est de $200^m + 30^m + 2^m, 6 + 0^m, 12$, c'est-à-dire $232^m, 72$.

L'opérateur et son aide doivent s'efforcer de tenir la chaîne horizontalement. Cependant il ne faudrait pas s'exagérer l'inconvénient d'une légère inclinaison. Si l'on suppose que l'un des bouts de la chaîne soit de $0^m, 2$ plus haut que l'autre, ce qui répond à une pente de $\frac{1}{10}$, pente très-appreciable à l'œil, on voit aisément que l'erreur commise sur la mesure serait pour chaque longueur de chaîne $10^m - \sqrt{(10^m)^2 - (0^m,2)^2}$ ou $10^m - \sqrt{10^m,2 \times 9^m,8}$ ou, en effectuant les calculs, environ $0^m,002$, c'est-à-dire que l'erreur relative ne serait que $\frac{1}{5000}$. Si l'on ad-

met qu'un des bouts de la chaîne soit de $0^m,4$ plus haut que l'autre, ce qui répond à une pente de $\frac{1}{5}$, pente tout à fait invraisemblable, on trouve, par un calcul analogue, que l'erreur absolue serait moindre que $0^m,008$, et que par conséquent l'erreur relative serait moindre que $\frac{8}{10000}$ ou $\frac{1}{1250}$. Il est beaucoup plus important de tenir la chaîne bien tendue; une flèche de $0^m,1$ ne produit qu'une erreur un peu supérieure à $\frac{2}{3}$ de millimètre; mais une flèche de $0^m,2$ produirait une erreur de plus de 83 millimètres; c'est ce qu'on reconnaît aisément en remarquant que la chaîne affecte alors réellement la forme de la courbe appelée CHAÎNETTE (*Voy.* CHAÎNETTE, FLÈCHE).

Quand la ligne à mesurer n'est pas horizontale, c'est encore sa projection horizontale qu'on mesure (*Voy.* LEVER DES PLANS, ARPENTAGE); il suffit donc encore de tendre la chaîne à peu près horizontalement. Mais si la pente du terrain est considérable, l'aide ne peut plus planter ses fiches sans déplacer la chaîne; on emploie dans ce cas des fiches plombées que l'aide laisse tomber et qui s'enfoncent d'elles-mêmes dans le terrain. Mais la méthode perd notablement de son exactitude; aussi beaucoup d'opérateurs préfèrent-ils mesurer les longueurs sur le terrain même en tenant compte des pentes, qu'ils évaluent à l'aide d'un NIVEAU DE PENTE (*Voy.* ce mot). Soit alors a la longueur de la droite mesurée et α l'angle qu'elle fait avec l'horizon, sa projection horizontale est $a \cos \alpha$; par conséquent si l'on appelle x ce qu'il faut retrancher de la longueur mesurée pour avoir sa projection, on a

$$x = a - a \cos \alpha \quad \text{ou} \quad x = 2a \sin^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Si la pente ne dépasse pas 3 et 4 degrés, on peut prendre l'arc pour le sinus et écrire

$$x = \frac{1}{2} a \alpha^2,$$

formule dans laquelle α est exprimé en parties du rayon. Si α' est le même arc exprimé en minutes,

$$\text{on a} \quad \alpha' : 1 = \alpha : \frac{\pi}{10800},$$

d'où $\alpha = \alpha' \cdot \frac{\pi}{10800} = \alpha' \cdot 0,0002908882\dots$

et $\log \alpha = \log \alpha' + \bar{3}, 4637262$;
d'où l'on déduit sans peine

$\log x = \log a + \bar{6}, 6174224 + 2 \log \alpha'$

Si, par exemple, $a = 100^m$, $\alpha' = 2^\circ$ ou $120'$, on trouvera $x = 5^m,697$; par conséquent la projection cherchée serait dans ce cas $94^m,303$.

Les efforts que l'on fait pour tenir la chaîne tendue peuvent l'allonger, en déformant les anneaux; il est donc nécessaire de la vérifier chaque fois que l'on veut s'en servir. Pour cela, on la tend une première fois horizontalement au pied d'un mur, et l'on marque sur ce mur les points où les extrémités des deux poignées aboutissent; si la chaîne ne s'allonge pas, chaque fois qu'on la vérifiera les extrémités des poignées devront aboutir exactement aux mêmes repères.

CHAÎNE DE PIERRES, sorte de pilier formé de pierres de taille, que l'on élève du bas en haut d'un édifice, pour rompre la monotonie d'une façade, ou pour marquer l'emplacement d'un gros mur de refend. Il y a des chaînes semblables à l'encoignure des édifices. Ces chaînes, très-apparentes dans les constructions en briques, ou en pierres de petites dimensions, cesseraient de l'être dans les constructions en pierres de taille; on les rend alors visibles en y pratiquant des refends.

CHAÎNES, organes flexibles qui servent, concurremment avec les cordes et les courroies, à la transmission des mouvements. On en distingue diverses espèces. Les chaînes ordinaires, destinées à agir sur des points d'attache, se composent de maillons simplement engagés les uns dans les autres, de telle sorte que la chaîne est flexible dans tous les sens. Les figures 1 et 2 représentent les modèles les plus employés. Dans le modèle de la figure 1, les mail-



Fig. 1.

lons sont de simples anneaux plans, soit circulaires, soit elliptiques. Quelquefois la chaîne est double, c'est-à-dire que les maillons sont disposés par couples parallèlement, et que les deux anneaux de chaque couple sont engagés à la fois dans les deux anneaux du couple qui précède. Dans le modèle de la figure 2, les maillons sont des courbes en S à simple



Fig. 2.

et quelquefois à double courbure. On rencontre un très-grand nombre de combinaisons diverses dans les chaînes dites de fantaisie. Mais, dans les machines, la transmission du mouvement s'opérant le plus ordinairement dans un plan, la flexibilité de la chaîne en tous sens n'offre plus aucun avantage; et, en en faisant le sacrifice, on peut donner à la chaîne une plus grande résistance, ce qui est une condition essentielle quand on a de grands efforts à transmettre. Les deux modèles le plus fréquemment employés dans ce cas sont ceux qui sont représentés figures 3 et 4. Dans le modèle de la figure 3, les maillons ont la forme d'un trapèze dont la petite base manœuvrait; et les côtés non parallèles

de chaque maillon s'accrochent, ou même s'enroulent, autour de la base du maillon qui précède. D'après ce dispositif la chaîne n'est flexible que dans un sens perpendiculaire aux bases des maillons, les-



Fig. 3.

quelles jouent le rôle de charnières. Cette chaîne est connue sous le nom de *chaîne de Vaucanson*, quoiqu'elle soit bien antérieure à cet illustre mécanicien, puisqu'elle est décrite dans le traité *De re metallica*, publié à Bâle par Agricola (Georges) en 1546. Dans le modèle représenté en élévation et en plan par la figure 4, chaque maillon se compose de

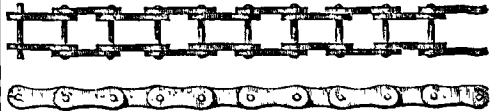


Fig. 4.

deux courtes bielles parallèles, mobiles autour de deux axes perpendiculaires. Cette chaîne est connue sous le nom de *chaîne de Galle*; elle offre plus de résistance que la chaîne de Vaucanson. Elle peut être double ou triple; c'est-à-dire que les bielles formant un chaînon, au lieu de se réduire à deux, peuvent être au nombre de 4, de 6, ou même d'un nombre pair quelconque, sans cesser d'être mobiles autour des deux mêmes axes; mais alors les bielles d'un chaînon alternent avec celles du chaînon pré-

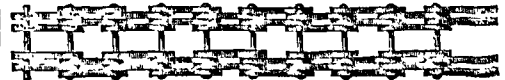


Fig. 5.

cedent, comme le montre la figure 5, qui représente une chaîne double.

Les chaînes de Vaucanson et les chaînes de Galle servent ordinairement à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes parallèles, munis d'engrenages dont les dents pénètrent dans les maillons de la chaîne. La transmission directe par engrenage est toujours préférable, parce qu'elle donne lieu à des frottements beaucoup moindres, et offre plus de régularité; ce n'est donc que dans des cas exceptionnels que l'on a recours aux chaînes, comme lorsqu'il faut transmettre à de grandes distances des efforts considérables.

CHAÎNETTE, courbe qu'affecterait une chaîne pesante, à anneaux infiniment petits, ou un fil pesant, inextensible, mais parfaitement flexible, si l'un ou l'autre était suspendu à ses extrémités en deux points fixes et abandonné à l'action de la pesanteur.

1. Cette courbe peut être assimilée à un **POLYGOÛNE FUNICULAIRE** (Voy. ce mot) au sommet duquel sont appliquées des forces verticales égales entre elles. Soient, en effet, MM' et M'M'' (fig. 1) deux éléments consécutifs de la courbe, que l'on peut toujours supposer d'égale longueur. Si p désigne le poids de la chaîne ou du fil par mètre de longueur, le poids de l'élément MM' ou ds sera pds ; et ce poids p:ut

être considéré comme appliqué au milieu de la droite MM'; on peut le décomposer en deux autres, égaux chacun à $\frac{1}{2} pds$ et appliqués respectivement en M et en M'. En opérant de même pour l'élément M'M'', on aura en M' deux forces verticales égales chacune à $\frac{1}{2} pds$ et qui auront une résultante verticale égale à pds . Et comme on en peut dire autant de chacun des sommets du polygone infinitésimal qui se confond avec la courbe, en voit que cette courbe peut être assimilée à un polygone funiculaire dont tous les sommets sont les points d'application d'autant de forces verticales égales à pds . On peut donc appliquer à la chaînette la théorie du polygone funiculaire soumis à des forces verticales.

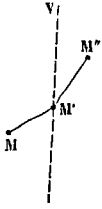


Fig. 1.

Il en résulte en premier lieu que la courbe tout entière est située dans le plan vertical qui passe par les points fixes. En second lieu la projection horizontale de la tension d'un côté quelconque est une quantité constante; si donc T désigne la tension du côté MM', α l'angle que ce côté fait avec l'horizon, et T_0 la valeur commune des projections horizontales de toutes les tensions, on aura

$$T \cos \alpha = T_0. \quad [1]$$

Il faut remarquer que T_0 est la valeur de la tension au point le plus bas de la chaîne, puisqu'en ce point on a $\alpha = 0$.

Il faut écrire en outre que la somme algébrique des projections verticales des côtés consécutifs MM' et M'M'' est égale au poids appliqué en M'. La projection verticale de la tension T est $-T \sin \alpha$; la projection verticale de la tension du côté suivant M'M'' est $T \sin \alpha + d.T \sin \alpha$; on doit donc avoir

$$T \sin \alpha + d.T \sin \alpha - T \sin \alpha = pds,$$

ou $d.T \sin \alpha = pds,$

ou, en remplaçant T par sa valeur tirée de l'équation [1], $d.T_0 \tan \alpha = pds,$

ou encore $d. \tan \alpha = \frac{p}{T_0} ds. \quad [2]$

Mais $\tan \alpha$ n'est autre chose que le coefficient angulaire de l'élément MM', ou, ce qui revient au même, de la tangente à la chaînette en M'; on a donc $\tan \alpha = y'$, en désignant par y' la dérivée de l'ordonnée y du point M' considérée comme une fonction de l'abscisse de ce point. L'équation [2] peut donc s'écrire

$$dy' = \frac{p}{T_0} ds \quad \text{ou} \quad dy' = \frac{p}{T_0} dx \sqrt{1+y'^2}; \quad [3]$$

c'est l'équation différentielle de la chaînette. On sépare immédiatement les variables en écrivant

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p}{T_0} dx,$$

équation qui, intégrée une première fois, donne

$$\log(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{p}{T_0} x + C,$$

en désignant par C une constante arbitraire. Pour la déterminer, on peut faire passer l'axe des y par le point le plus bas de la courbe; pour $x = 0$ on a

alors $y' = 0$, ce qui suppose $C = 0$. Il reste donc, en faisant $\frac{p}{T_0} = m$,

$$\log(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{p}{T_0} x = mx,$$

ou, en passant aux nombres,

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{mx}.$$

Isolant le radical, élevant au carré et réduisant, on obtient

$$1 = e^{2mx} - 2y'e^{mx},$$

d'où $y' = \frac{1}{2}(e^{mx} - e^{-mx}). \quad [4]$

Multipliant par dx et intégrant une seconde fois, on trouve

$$y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx}) + C'. \quad [5]$$

Si h désigne l'ordonnée du point le plus bas, on doit avoir $y = h$ pour $x = 0$; et par conséquent

$$h = \frac{1}{2m} + C', \quad \text{d'où} \quad C' = h - \frac{1}{m},$$

valeur qu'il faudrait mettre pour C' dans l'équation [5]. Mais on peut disposer de l'axe des x de manière que l'ordonnée h du point le plus bas soit égale à $\frac{1}{m}$; on a alors $C' = 0$, $m = \frac{1}{h}$, et l'équation [5] devient enfin

$$y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right); \quad [6]$$

telle est l'équation de la chaînette. La courbe a la forme représentée par la figure 2.

La forme de cette équation montre que toutes les chaînettes sont des courbes semblables; car si l'on

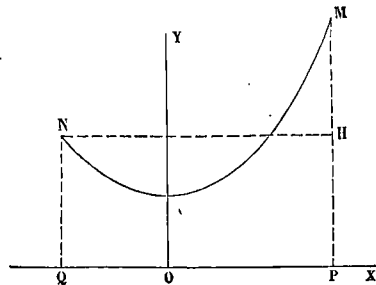


Fig 2

fait varier h , les coordonnées x et y qui satisfont à l'équation varient dans le même rapport; il en résulte qu'on obtient toujours la même courbe à une échelle différente; ou, en d'autres termes, que les courbes obtenues sont semblables.

II. Si l'on calcule, par les méthodes ordinaires, la longueur de l'arc de chaînette compris entre le point le plus bas et celui dont les coordonnées sont x et y , en appelant s cette longueur, on trouve

$$s = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right), \quad [7]$$

d'où l'on conclut $s = hy'$, [8]
expression facile à construire.

Mais la valeur de l'arc s permet surtout de résoudre le problème fondamental suivant : *Connaissant la longueur L de la chaîne, son poids p par mètre courant, et les coordonnées des points de suspen-*

sion, trouver la forme de la courbe, et la tension T_0 au point le plus bas. Supposons la courbe obtenue, et rapportée aux axes convenables pour que son équation soit l'équation [6]. Soient $OP = a$ et $MP = b$ les coordonnées du point de suspension M; soient $OQ = -a'$ et $NQ = b'$ celles du point de suspension N. On connaîtra la différence $b - b'$ et la somme $a + a'$. L'équation [6] donnera

$$b = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} \right) \quad \text{et} \quad b' = \frac{h}{2} \left(e^{-\frac{a'}{h}} + e^{\frac{a'}{h}} \right),$$

d'où

$$b - b' = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} - e^{-\frac{a'}{h}} - e^{\frac{a'}{h}} \right]. \quad [9]$$

Soit d la distance PQ, ou NH, on aura $a + a' = d$. [10]

La longueur de l'arc AM sera exprimée par

$$AM = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{a}{h}} - e^{-\frac{a}{h}} \right],$$

la longueur de l'arc AN sera exprimée de même par

$$AN = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{a'}{h}} - e^{-\frac{a'}{h}} \right],$$

par conséquent

$$AM + AN = L = \frac{h}{2} \left[e^{\frac{a}{h}} - e^{-\frac{a}{h}} + e^{\frac{a'}{h}} - e^{-\frac{a'}{h}} \right]. \quad [11]$$

Les équations [9], [10] et [11] feront connaître a , a' et h , par suite b et b' . On aura donc la position des deux axes par rapport aux points de suspension, et l'on pourra tracer la courbe à l'aide de son équation [6]. On aura ensuite $T_0 = \frac{p}{m} = ph$; ce qui fera connaître la tension au point le plus bas.

Si l'on veut avoir la tension en un point quelconque, par exemple au point dont les coordonnées sont x et y , et où la tangente fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est y' ou $\tan \alpha$, on se rappellera que cette tension est donnée par l'équation [1], savoir :

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha} = T_0 \sqrt{1 + y'^2} = T_0 \cdot \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right), \quad [12]$$

ou encore $T = T_0 \frac{y}{h}$.

On voit que la tension augmente à mesure qu'on s'élève sur la courbe; la tension maximum a donc lieu au point d'attache le plus élevé.

III. La chaînette jouit de propriétés curieuses que l'on trouvera exposés dans les *Traité de Mécanique rationnelle*, et particulièrement de la suivante : c'est que, de toutes les courbes de même périmètre, aboutissant aux deux points de suspension, c'est celle dont le centre de gravité est le plus bas. (Voy. le *Traité de Mécanique* de Poisson, t. I, n° 296. Voyez aussi le *Cours de Mécanique* de M. Duhamel.)

CHAMBRANLE, moulure composée qui fait le tour de la baie d'une porte ou d'une fenêtre, en suivant les jambages et le linteau. Ses détails sont souvent ceux d'une ARCHITRAVE (Voy. ce mot). Le chambranle est dit *rentrant* quand il est taillé dans le jambage de manière à ne dépasser le nu du mur que par son filet externe. (Voy. PORTE, FENÊTRE.)

CHANGE, opération qui a pour but d'échanger une valeur commerciale contre une autre, quand

l'une de ces valeurs n'est disponible que dans un lieu différent de celui où se fait l'échange. Le change sert à effectuer les paiements à distance, sans aucun transport de numéraire. Une personne de Paris qui veut payer une certaine somme à Londres, achète d'un banquier de Paris une *lettre de change* sur un banquier de Londres, et l'adresse à son créancier; celui-ci se présente au banquier de Londres, qui lui remet la somme dont il s'agit, énoncée en monnaie anglaise sur la lettre de change. Si le change se fait au pair, le calcul est facile quand on connaît la valeur des MONNAIES ÉTRANGÈRES (Voy. ce mot). Si, par exemple on avait à payer à Londres une somme de 361 livres sterling 18 shillings et 10 pence, il faudrait payer au banquier de Paris, savoir :

Pour les 361 liv. sterl.,	361 fois 25f,21	ou 9100f,81
Pour les 18 sh. les $\frac{18}{20}$	ou les $\frac{9}{10}$	de 25f,21
ou		22f,689
Pour les 10 pence les $\frac{10}{240}$	ou $\frac{1}{24}$	de 25f,21
ou		1f,050
Total		9124f,549

ou 9124f,55.

Si une personne de Londres avait au contraire 3000 francs à payer à Paris, elle devrait payer au banquier de Londres autant de livres sterling que 25f,21 est contenu de fois dans 3000 francs. En faisant la division, on trouve pour quotient 119 livres sterling, plus un reste de 1 centime, qui serait négligeable.

Mais le cas où le change s'effectue au pair est un cas exceptionnel qui se présente très-rarement. Si, par suite des transactions commerciales, il arrive, au moment que l'on considère, qu'il y ait plus de négociants de Paris débiteurs de Londres qu'il n'y a de négociants de Londres débiteurs de Paris, ou plus exactement, que la dette de Paris soit plus considérable que celle de Londres, les lettres de change sur Londres seront plus recherchées à Paris que les lettres de change sur Paris ne seront recherchées à Londres, et il arrivera à ces deux espèces de papiers ce qui arrive à toute autre marchandise : le papier le plus recherché augmentera de valeur, et le moins recherché diminuera; la livre sterling vaudra à Paris plus de 25f,21, et 25f,21 vaudront à Londres un peu moins d'une livre sterling. Si, par exemple, le change était à 25f,24 pour une livre sterling, on trouverait que le prix d'une lettre de change sur Londres de 361 liv. st. 18 shill. 10 pence, au lieu d'être de 9124f,55, comme ci-dessus, serait de 9134f,36.

On appelle *taux* du change entre deux places de commerce le rapport entre les quantités de monnaies des deux pays qui s'équivalent au moment considéré. Mais il est commode de ne faire varier que l'un des deux termes du rapport. Ainsi, entre Paris et Londres, il y a un terme constant, c'est la livre sterling, et un terme variable, c'est le nombre de francs et centimes qui équivalent à la livre sterling à l'époque que l'on considère. Pour exprimer cette convention, on dit que Paris donne l'*incertain* pour le *certain*; le certain est la livre sterling, l'incertain est le nombre variable de francs et centimes qui équivalent, au moment considéré, à la livre sterling.

Il en est de même entre deux places quelconques ; l'une d'elles donne le certain et l'autre l'incertain, en sorte que l'un des deux termes étant toujours sous-entendu, il suffit d'énoncer l'autre. Voici le tableau des conventions établies à cet égard entre Paris et les principales places de commerce :

PLACES.	INCERTAIN.	CERTAIN.
Amsterdam	24 centimes, plus ou moins, pour	1 florin de Hollande.
Auguste (Augsbourg)	260	1 florin courant.
Berlin	371	1 thaler.
Francfort	245	1 florin de change.
Hambourg	188	1 marc banco.
Lisbonne	510	1000 reis de change.
London	25/24	1 livre sterling.
Madrid	595 centimes	1 piastre (réelle).
Milan	84	1 livre.
Naples	424	1 ducat.
New-York	518	1 écu romain.
Rome	536	1 rouble (argent).
Saint-Petersbourg	45	1 rouble (papier).
ou	1/14	1 florin courant (ou
Vienne	260 centimes	1 florin effectif, ou
		florin d'Auguste ;
		ces expressions
		sont équivalentes).

Avec les places qui se servent de la même monnaie que nous, le cours du change s'exprime par tant pour 100 de perte. Dire, par exemple, que le change avec Bâle est à 1 pour 100 de perte, c'est dire que l'on paye 99 fr. à Paris une lettre de change de 100 fr. sur Bâle.

Le cours du change entre deux places s'exprime quelquefois de deux manières différentes. Par exemple :

A Paris, le cours du change avec Vienne s'exprime par un certain nombre de centimes pour un florin, ou par un certain nombre de francs pour 100 florins. A Vienne, le même cours s'exprime par un certain nombre de florins pour 300 francs.

A Paris, le cours du change avec Madrid s'exprime par un certain nombre de francs pour 100 piastres (monnaie réelle). A Madrid, le même cours s'exprime par un certain nombre de francs pour une pistole de change (de 32 réaux de plata, valant 3 piastres, monnaie réelle).

A Paris, le cours du change avec Francfort s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1 florin, ou de francs pour 100 florins de change. A Francfort, le même cours s'exprime par un certain nombre de thalers de change pour 300 francs.

A Paris, le cours du change avec Berlin s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1 thaler, ou de francs pour 100 thalers. A Berlin, le même cours s'exprime de plusieurs manières, et particulièrement par un certain nombre de thalers pour 300 francs.

A Paris, le cours du change avec Milan s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1 livre, ou de francs pour 100 livres. A Milan, le même cours s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1 franc.

A Paris, le cours du change avec Lisbonne s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1000 reis. A Lisbonne, le même cours s'exprime par un certain nombre de reis pour 3 francs.

A Paris, le cours du change avec Amsterdam s'exprime par un certain nombre de centimes pour 1 florin, ou de francs pour 100 florins. A Amsterdam, le même cours s'exprime par un certain nombre de florins pour 120 francs.

Dans tous les cas le calcul du change se réduit toujours à une simple règle de trois.

Les cours du change entre deux places ne sont pas toujours réciproques ; c'est-à-dire que, quoique l'égalité entre les deux taux tende sans cesse à s'établir, il arrive cependant, par l'effet de la distance et par d'autres causes, que cette égalité n'a pas lieu.

Un négociant qui a des fonds à faire passer à un de ses correspondants peut s'y prendre de deux manières. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un négociant de Paris, que nous nommerons Pierre, ayant à Vienne un correspondant que nous nommerons Jacques. Pierre peut acheter, à Paris, une ou plusieurs lettres de change sur des maisons de Vienne, et les adresser à Jacques qui en touchera le montant ; c'est ce qu'on appelle *faire des remises* à son correspondant. Mais, au lieu d'opérer ainsi, Pierre peut donner à Jacques l'ordre de *tirer sur lui*, c'est-à-dire de faire des lettres de change sur lui, Pierre, lettres ou *traites* que Jacques négociera, c'est-à-dire vendra à Vienne. Le résultat des deux opérations sera le même, avec cette différence que, dans le premier cas, Pierre débourse d'abord et Jacques touche ensuite, tandis que dans le second cas, Jacques touche d'abord le montant de ses traites, et Pierre les acquitte lorsqu'on les lui présente. Mais s'il n'y a pas réciprocity entre les cours du change, il peut être plus avantageux d'opérer d'une manière que de l'autre, ce que l'on constate en faisant le calcul dans les deux hypothèses.

Un négociant qui a des fonds chez un de ses correspondants, et qui veut les faire rentrer, peut aussi s'y prendre de deux manières. En reprenant, pour plus de clarté, les hypothèses de tout à l'heure, Pierre peut *tirer* sur Jacques, c'est-à-dire qu'il peut faire des lettres de change sur Jacques, qu'il négociera ou vendra à Paris, et que Jacques payera à Vienne au moment de leur présentation. Il peut au contraire donner à Jacques l'ordre de lui *faire des remises*, c'est-à-dire qu'il peut ordonner à Jacques d'acheter à Vienne des lettres de change sur des maisons de Paris, et de les lui adresser pour qu'il en touche le montant. Le résultat des deux opérations sera le même, avec cette seule distinction que, dans le premier cas, Pierre touchera le montant de ses traites avant que Jacques en paye la valeur, tandis que, dans le second cas, Jacques payera la valeur des traites sur Paris, avant que Pierre en touche le montant. Mais les résultats peuvent être différents si les cours du change entre Paris et Vienne ne sont pas réciproques.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'il s'agissait de

lettres de change à vue, c'est-à-dire payables au moment de leur présentation. Mais la plupart des traites ne sont payables qu'à un certain nombre de jours de date ou de vue, presque toujours constant pour chaque place, et qu'on nommait autrefois l'*usance*. Ainsi, Marseille tire sur Rome à 90 jours; Rome tire sur Marseille à 75 jours; Naples tire sur Gênes à 40 jours, Paris tire aujourd'hui à 90 jours sur la plupart des places, etc., etc. Il en résulte qu'un négociant qui veut acquitter immédiatement une dette envers un de ses correspondants, au moyen d'une remise, à une échéance plus ou moins longue, doit lui tenir compte des intérêts pour le nombre de jours qui restent à s'écouler jusqu'au jour de l'échéance. Il en est de même lorsqu'un négociant qui a des fonds déposés chez un de ses correspondants, veut en retirer immédiatement une partie, et pour cela donne ordre à ce correspondant de lui faire des remises; celui-ci doit tenir compte des intérêts des traites qu'il lui remet pour le temps qui doit s'écouler jusqu'au jour de leur échéance; car, pour pouvoir en toucher immédiatement la valeur, il faudra que le négociant à qui elles seront remises les fasse escompter.

Lorsqu'une lettre de change, sans être à vue, est à une échéance plus courte que l'échéance consacrée par l'usage, il est clair que l'on doit tenir compte des intérêts pour le nombre de jours qui restent à s'écouler. Le calcul des intérêts doit aussi être pris en considération dans les cas où il s'agit d'opter entre des traites et des remises, parce que cette considération modifie le taux réel du change.

Lorsqu'un négociant est débiteur de l'un de ses correspondants, les résultats peuvent être très-différents, suivant qu'il lui fait des remises ou qu'il lui donne l'ordre de tirer sur lui. Dans le premier cas, il a à payer à son correspondant les intérêts du papier qu'il achète, pour le nombre de jours qui composent l'usance de la place où opère le correspondant; car celui-ci, pour toucher immédiatement, sera obligé de faire escompter les traites. Dans le second cas, il bénéficie au contraire des intérêts des traites tirées sur lui par son correspondant, puisqu'il ne les acquittera qu'au bout du nombre de jours formant l'usance de la place où il opère lui-même. — Par des raisons analogues, lorsqu'un négociant est créancier de l'un de ses correspondants, les résultats peuvent être très-différents, suivant qu'il tire sur lui ou qu'il lui donne l'ordre de lui faire des remises. Dans le premier cas, il fait jouir son correspondant des intérêts jusqu'au jour de l'échéance de sa traite. Dans le second cas, il impose à son correspondant l'obligation de lui tenir compte des intérêts des effets que lui remet celui-ci; car il n'en pourra toucher le montant qu'au jour de leur échéance.

Il doit donc chercher la voie la plus favorable aux intérêts de son correspondant; car, pour lui-même, quelque voie qu'il adopte, il est sûr de toucher immédiatement le montant de sa créance.

Enfin, le taux de l'intérêt n'est pas toujours réciproque entre un négociant et son correspondant; cela peut tenir à des usages locaux ou à des conventions particulières.

Pour donner une idée du genre de calculs auxquels donnent lieu les questions relatives au change, nous traiterons le problème suivant :

Un négociant de Paris doit 1800 marcs-banco à son correspondant de Hambourg; le change avec Hambourg est, à Paris, au cours de 186, et le change avec Paris est, à Hambourg, au cours de 187; on demande s'il doit faire des remises à Hambourg à trois mois, l'intérêt étant à 3 pour 100, ou donner l'ordre de tirer sur Paris à 30 jours, l'intérêt étant à 4 pour 100.

L'intérêt du négociant de Paris est d'acheter les marcs-banco le moins cher possible. S'il fait des remises à Hambourg, il payera les 100 marcs-banco au cours de Paris, c'est-à-dire..... 186, » à quoi il faudra ajouter les intérêts à 3 p. 100 pour 3 mois, soit..... 1,39

Total..... 187,39

Si le négociant de Paris donne ordre à son correspondant de tirer sur lui, il payera les 100 marcs-banco au cours de Hambourg, c'est-à-dire 187, » mais il bénéficiera des intérêts à 4 p. 100 pendant 1 mois, soit de..... 0f,62

Différence.... 186f,38

Les 100 marcs-banco seront donc moins chers à Hambourg qu'à Paris, et il convient de les acheter à Hambourg; pour cela, le négociant de Paris doit donner ordre à son correspondant de tirer sur Paris. Le correspondant y gagnera 187f,39 — 186f,38 ou 1f,01 pour chaque somme de 100 marcs, et par conséquent 1f,01 > 18 ou 18f,18 pour les 1800 marcs.

Le change dont nous venons de parler porte le nom de *change direct*. Le change peut être indirect, c'est-à-dire que pour l'opérer on peut avoir recours à une ou plusieurs places intermédiaires. (Voy. ARBITRAGES. Voyez aussi les articles MONNAIES ÉTRANGÈRES, MÉTAUX PRÉCIEUX.)

CHANGEMENT DE PLANS (GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE), méthode fréquemment employée dans la résolution des problèmes, et qui consiste à changer le plan vertical de projection, ou le plan horizontal, ou l'un et l'autre à la fois.

I. Cette méthode est tout à fait analogue au changement des axes coordonnés dans la Géométrie analytique. Mais, d'après les usages généralement établis, le choix des nouveaux plans de projection est soumis à deux restrictions essentielles. On peut donner au plan vertical telle direction que l'on voudra, à condition qu'il reste vertical; on peut élever ou abaisser à volonté le plan horizontal, à condition qu'il demeure horizontal. C'est surtout en vue de l'application de la Géométrie descriptive à la stéréotomie qu'on a établi ces restrictions. Il est, en effet, naturel de rapporter une construction au plan horizontal sur lequel elle repose, ou à un plan parallèle, et de la projeter sur un plan vertical parallèle à l'une de ses faces principales. Si on la projetait sur des plans dont aucun ne fût horizontal, l'esprit aurait quelque peine à se la figurer, et les tracés seraient moins faciles à saisir. Cependant, lorsqu'il ne s'agit que de systèmes géométriques abstraits, rien ne s'oppose à ce qu'on adopte pour plans de projection deux plans rectangulaires quelconques; la méthode du changement de plans peut alors avoir pour but de rapporter le système à des plans tellement choisis que les grandeurs des lignes inconnues s'y reconnaissent à la simple vue. Olivier a fait un continuel usage de cette méthode. Mais on peut arriver au même but par d'autres voies; et la plupart

des professeurs s'astreignent aujourd'hui à n'employer, dans leurs épreuves, que des plans de projection dont l'un soit vertical et l'autre horizontal.

La méthode du changement de plans était connue dès le dix-septième siècle; on peut consulter sur ce sujet la *Pratique du trait à preuves*, de M. Desargues, publiée en 1643 par Abraham Brosse, et le *Traité de Stéréotomie*, de Frézier, où cette méthode est aussi exposée. Mais l'emploi systématique des changements de plans pour la résolution des problèmes n'a jamais été accueilli par les praticiens, et Monge n'en a donné aucun exemple.

II. Les changements de plans se effectuent d'ailleurs avec une grande facilité. Considérons d'abord le changement de plan vertical. Soit XY (fig. 1) l'ancienne ligne de terre, m et m' les

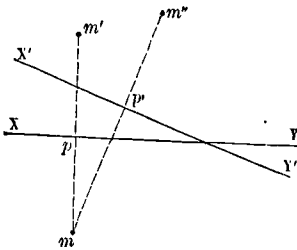


Fig. 1.

projections d'un point M sur les deux plans de projection. Prenons pour nouvelle ligne de terre une droite X'Y' coupant la première. Nous supposons que le plan horizontal n'a pas changé, et que le nouveau plan vertical y est rabattu en tournant autour de X'Y', comme l'était l'ancien, après avoir tourné autour de XY. — Il est clair que la projection horizontale m du point M considéré ne change pas. Quant à sa nouvelle projection verticale, elle doit évidemment se trouver sur la perpendiculaire mp' à X'Y', menée par le point m ; et, comme la hauteur du point M au-dessus du plan horizontal n'a pas changé, et que cette hauteur est exprimée, comme on sait, par la distance de la projection verticale du point à la ligne de terre, on obtiendra la nouvelle projection verticale demandée en prenant sur mp' , à partir de la ligne de terre X'Y', une longueur $p'm''$ égale à pm' ; le point m'' sera la nouvelle projection, et le point M, précédemment représenté par les projections m, m' , le sera maintenant par les projections m, m'' .

III. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une droite, et soient $ab, a'b'$ (fig. 2) ses anciennes projections. — Soit X'Y' la nouvelle ligne de terre. En premier lieu, la projection horizontale ab ne changera pas. Pour obtenir la nouvelle projection verticale, il suffit d'en déterminer deux points. On peut opérer sur deux points quelconques de la droite; mais lorsqu'on a ses traces, l'opération est plus simple. La trace horizontale b ne changeant pas, on n'a qu'à la projeter en b'' sur la nouvelle ligne de terre, pour avoir un point de la nouvelle projection verticale. Pour la trace verticale a, a' , on opère comme il a été expliqué ci-dessus; on abaisse du point a une perpendiculaire sur X'Y', et l'on prend sur cette perpendiculaire une longueur pa''

égale à aa' ; le point a'' est la nouvelle projection de l'ancienne trace verticale. Il ne reste donc qu'à joindre $a''b''$ pour avoir la nouvelle projection verticale de la droite.

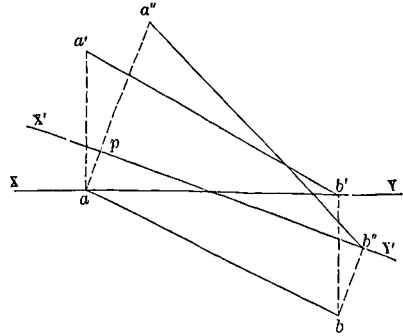


Fig. 2.

IV. Supposons qu'il s'agisse d'un plan; et soient αP et $\alpha P'$ (fig. 3) ses anciennes traces. Soit X'Y' la nouvelle ligne de terre. La trace horizontale αP ne changera pas; il suffit donc de la prolonger jusqu'à

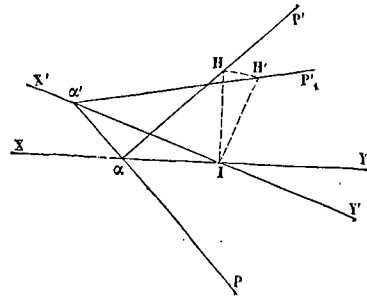


Fig. 3.

sa rencontre en α' avec la nouvelle ligne de terre, pour avoir un point de la nouvelle trace verticale. Pour en obtenir un second, on peut remarquer que les deux plans verticaux se coupent suivant la verticale du point I, laquelle, dans le premier système de plans, se rabat en IH, perpendiculairement à XY, et qui, dans le second système de plans, doit se rabattre suivant une perpendiculaire IH' à la nouvelle ligne de terre, en conservant la même grandeur. En prenant $IH' = IH$, on obtient donc un second point de la nouvelle trace verticale du plan. Il ne reste donc plus qu'à joindre $\alpha'H'$; et les nouvelles traces du plan sont $\alpha'P'$ et $\alpha'P'$.

Si l'on ne pouvait pas disposer des points α et I, il faudrait opérer d'une autre manière. On déterminerait les projections primitives m et m' d'un point du plan, et l'on prendrait sur la trace horizontale donnée deux autres points p et q . On projetterait ces trois points sur le nouveau plan vertical. Si l'on conçoit alors que l'on joigne le premier point à chacun des points p et q , on obtient deux droites, situées dans le plan donné, et dont les projections s'obtiennent en joignant les projections de ces points. Les traces verticales des deux droites ainsi déterminées appartiennent à la nouvelle trace verticale du plan donné

V. Lorsque la nouvelle ligne de terre est parallèle à l'ancienne, c'est-à-dire lorsqu'on ne fait que transporter le plan vertical de projection parallèlement à lui-même, les opérations se simplifient.

Soient m, m' (fig. 4) les projections d'un point, $ab, a'b'$ les projections d'une droite contenant ce

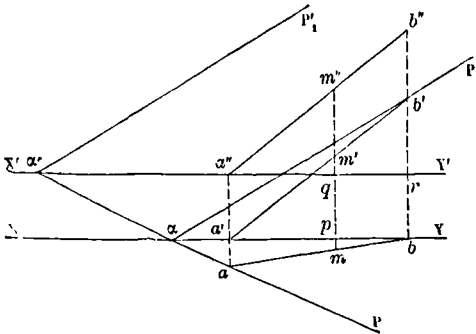


Fig. 4.

point, $\alpha P, \alpha'P'$ les traces d'un plan contenant cette droite. Transportons la ligne de terre parallèlement en $X'Y'$.

1° La projection horizontale m du point donné ne change pas. Quant à la projection verticale, elle doit se trouver sur la perpendiculaire abaissée de m sur les deux lignes de terre, à une distance de $X'Y'$ égale à celle qui séparait m' de XY , attendu que la hauteur du point au-dessus du plan horizontal n'a pas varié. Par conséquent, en prenant sur mm'' une longueur qm'' égale à pm' , on aura la nouvelle projection verticale du point considéré.

2° La projection horizontale ab de la droite donnée ne change pas. La projection verticale de la trace a vient en a'' . La nouvelle projection verticale correspondante à b vient en b'' , à une distance rb'' de la nouvelle ligne de terre égale à bb' . La nouvelle projection verticale de la droite est donc $a''b''$; elle est évidemment parallèle à l'ancienne.

3° La trace horizontale αP du plan donné ne change pas; il suffit de la prolonger jusqu'à la nouvelle ligne de terre en α' . Quant à la nouvelle trace verticale, elle doit évidemment être parallèle à l'ancienne, puisque les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles. Il suffit donc, pour obtenir cette nouvelle trace, de mener par le point α' une droite $\alpha'P'$ parallèle à αP .

Dans l'épure que nous avons faite, il y a une vérification: la droite $a''b''$ doit passer par le point m'' . Il y en aurait une seconde, si le cadre de l'épure était suffisamment grand; le point de rencontre des droites ab et $X'Y'$, et le point de rencontre des droites $a''b''$ et $\alpha'P'$, devraient être sur une même perpendiculaire à $X'Y'$; car ces deux points de rencontre seraient les projections de la trace verticale de la droite donnée.

Si le point α' n'était pas dans le cadre de l'épure, on mènerait dans le plan donné une droite; on déterminerait, comme nous l'avons indiqué, sa nouvelle projection verticale, et par suite sa nouvelle trace verticale; cette trace serait un point de la nouvelle trace verticale du plan; il resterait donc à mener par ce point une parallèle à l'ancienne trace verticale. On peut toujours choisir la droite

auxiliaire de manière que sa nouvelle trace verticale soit dans le cadre de l'épure.

VI. Les opérations que nous venons de faire pour transporter le plan vertical de projection parallèlement à lui-même, sont précisément celles qu'il faut exécuter pour changer de plan horizontal.

Soient, comme ci-dessus, m, m' (fig. 5) les projections d'un point; $ab, a'b'$ les projections d'une

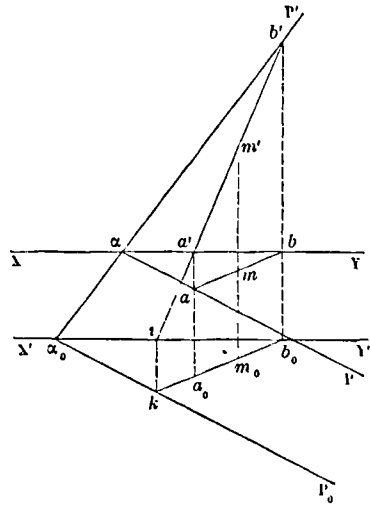


Fig. 5.

droite passant par ce point; $\alpha P, \alpha'P'$ les traces d'un plan passant par cette droite. Transportons le plan horizontal de projection d'une certaine quantité au-dessous de sa position primitive; et soit $X'Y'$ la nouvelle ligne de terre.

1° La projection verticale m' du point donné ne change pas. Et comme la distance du point considéré au plan vertical ne change pas non plus, la projection horizontale m du point s'abaisse en m_0 , d'une quantité mm_0 égale à la distance des deux lignes de terre; de telle sorte que la distance de m_0 à $X'Y'$ est la même que celle de m à XY .

2° La projection verticale $a'b'$ de la droite donnée ne change pas. Les points a et b viennent en a_0 et b_0 , en s'abaissant tous deux d'une quantité égale à la distance des deux lignes de terre; de telle sorte que la nouvelle projection horizontale est une droite a_0b_0 , parallèle à ab .

3° La trace verticale $\alpha'P'$ du plan donné ne change pas; il suffit de la prolonger jusqu'à la nouvelle ligne de terre, en α_0 . Quant à la nouvelle trace horizontale, elle est évidemment parallèle à l'ancienne; ainsi l'on mènera par le point α_0 une droite α_0P_0 parallèle à αP .

Dans l'épure que nous avons faite, la droite a_0b_0 doit passer par m_0 ; de plus, le point i où $a'b'$ rencontre $X'Y'$, et le point k où a_0b_0 rencontre α_0P_0 , doivent être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Si le point α_0 était situé hors du cadre de l'épure, on obtiendrait un point de la nouvelle trace horizontale du plan donné, en menant dans ce plan une droite auxiliaire dont on déterminerait la nouvelle trace horizontale.

VII. Lorsqu'on veut remplacer le plan horizontal de projection par un plan perpendiculaire au plan vertical, mais différent d'un plan horizontal, on a à exécuter des opérations analogues à celles qui sont indiquées par les figures 1, 2, 3; seulement ce sont alors les projections verticales et les traces verticales qui sont conservées. Ces opérations sont indiquées par les figures 6, 7 et 8.

Dans la figure 6, un point étant donné par ses projections m, m' , on remplace le plan horizontal

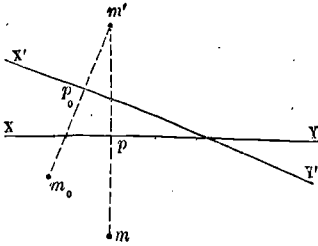


Fig. 6.

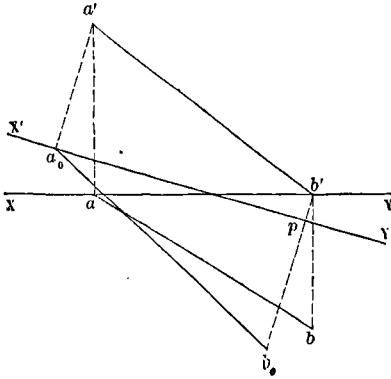


Fig. 7.

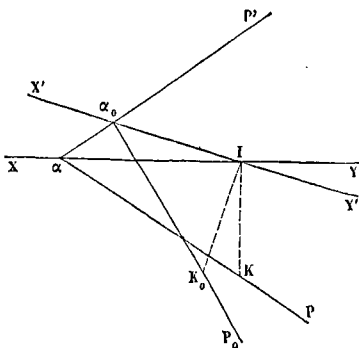


Fig. 8.

par un plan, toujours perpendiculaire au plan vertical, mais incliné à l'horizon; $X'Y'$ est l'intersection de ce nouveau plan avec le plan vertical. La projection verticale m' du point donné ne change pas; la seconde projection se trouve sur la perpendiculaire abaissée de m' sur $X'Y'$, à une distance p_0 , égale à pm .

Dans la figure 7, une droite étant donnée par ses projections $ab, a'b'$, on opère le même changement de plan. La projection verticale $a'b'$ ne change pas. La nouvelle projection correspondante à a' est au pied a_0 de la perpendiculaire abaissée de a' sur $X'Y'$, puisque le point a, a' est dans le plan vertical, qui n'a pas changé. La nouvelle projection correspondante à b' est sur la perpendiculaire abaissée de b' sur $X'Y'$, à une distance pb_0 égale à bb' .

Dans la figure 8, un plan étant donné par ses traces $\alpha P, \alpha P'$, on opère encore le même changement de plan. La trace verticale $\alpha P'$ ne change pas. Elle rencontre généralement la ligne $X'Y'$ en un point α_0 , qui appartient à la nouvelle trace. Pour en obtenir un second, on mène IK perpendiculaire à XY ; on élève en I une perpendiculaire IK_0 à $X'Y'$, que l'on prend égale à IK ; on joint $\alpha_0 K_0$, et l'on a en $\alpha_0 P_0$ la nouvelle trace demandée. Si les points α_0 et I n'étaient pas dans le cadre de l'épure, on se servirait de trois points du plan, dont deux seraient pris sur la trace verticale, et l'on opérerait comme il a été expliqué, pour un cas semblable, à l'occasion du changement de plan vertical.

VIII. On peut, au moyen de trois changements successifs, remplacer ainsi le plan vertical V et le plan horizontal H donnés, par deux plans rectangulaires quelconques P et Q . Pour cela, on remplace d'abord le plan vertical V par un plan vertical V' perpendiculaire à Q , ce qui donne le système V', H . On remplace le plan H par le plan Q , qui, d'après ce qui vient d'être dit, est perpendiculaire à V' , et l'on a le système V', Q . Enfin, on remplace le plan V' par le plan P , également perpendiculaire à Q ; et l'on a le système P, Q .

Nous avons dit, en commençant, pourquoi la méthode du changement de plans, entendue d'une manière aussi générale, n'est point usitée dans les applications. Les changements les plus usités consistent à prendre un nouveau plan vertical parallèle à une droite donnée, ou perpendiculaire à un plan donné, ou à transporter le plan horizontal à une hauteur donnée. Lorsqu'on prend le plan vertical parallèle à une droite donnée, la nouvelle ligne de terre est parallèle à la projection horizontale de cette droite. Lorsqu'on prend le plan vertical perpendiculaire à un plan donné, la nouvelle ligne de terre est perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan. Enfin, lorsqu'on transporte le plan horizontal parallèlement à lui-même d'une certaine hauteur, la nouvelle ligne de terre est parallèle à l'ancienne, et elle en est distante de la hauteur dont il s'agit.

CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION DES CONDUITES. Les changements brusques de diamètre d'une conduite occasionnent toujours une *perte de charge*, c'est-à-dire une diminution dans la différence des hauteurs piézométriques (*Voy. PIÉZOMÈTRE*) en amont et en aval du point où le changement a lieu.

I. Nous nous occuperons d'abord du cas où il y a **ÉLARGISSEMENT BRUSQUE** de section, comme l'indique la figure 1. L'expérience prouve que lorsqu'une veine liquide verticale arrive dans un vase déjà rempli du même fluide, la masse affluente perd promptement sa vitesse, si la profondeur du liquide dans le vase est suffisante. Le niveau dans le vase s'élève en restant horizontal, et l'agitation ne se

manifeste que jusqu'à une médiocre distance du niveau. Il résulte de cette observation que le liquide affluent perd dans le vase toute sa puissance vive, et que son influence ne se fait sentir que jusqu'à

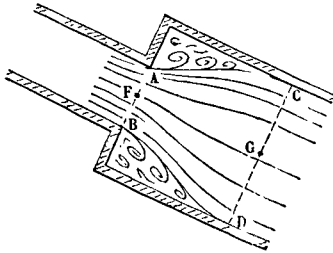


Fig. 1.

une petite distance du point où s'opère le mélange. Si M est la masse qui afflue dans l'unité de temps, et V sa vitesse, il y a donc une perte de puissance vive représentée par $\frac{1}{2} MV^2$. Si le vase, au lieu d'être en repos, était animé d'une vitesse V' dans le sens de la veine, on ramènerait ce cas au précédent, en donnant à la veine et au vase une vitesse commune égale et contraire à V'; la vitesse de la veine serait alors V - V', et la perte de puissance vive serait $\frac{1}{2} M (V - V')^2$, c'est-à-dire que le liquide affluent perdrait la puissance vive due à sa vitesse relative V - V'. Dans tous les cas cette perte de puissance vive est évidemment due aux actions moléculaires exercées sur le liquide affluent par le liquide déjà contenu dans le vase et par les parois de celui-ci.

Il est facile de faire l'application de cette remarque au cas d'un élargissement brusque dans le diamètre d'une conduite. Nous supposons, comme cela a lieu le plus souvent, que les deux conduites qui s'abouchent aient le même axe. Soit AB (fig. 1) le diamètre de la première, et CD le diamètre de la seconde; soient ω et Ω les aires de leurs sections transversales. Soient p et \mathcal{P} les pressions par mètre en AB et en CD, et h la différence de niveau des centres de gravité F et G des sections AB et CD; enfin soient v et V les vitesses dans ces sections, la seconde étant supposée faite à une assez grande distance de AB pour que l'agitation due à la veine affluente ne se fasse plus sentir, et que les filets fluides puissent être considérés comme redevenus parallèles. Appliquons à ce système le théorème de L'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot); pour un temps θ très-court, en désignant par q le volume d'eau écoulé dans ce temps élémentaire par une section quelconque, et par Π le poids du mètre cube de liquide; nous aurons

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi q}{g} v^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi q}{g} v'^2 = p \omega v \theta - \mathcal{P} \Omega V \theta + \Pi q h - \frac{1}{2} \frac{\Pi q}{g} (v - v')^2,$$

le dernier terme représentant, d'après ce qui a été dit plus haut, la perte de puissance vive due aux actions moléculaires exercées sur la veine affluente par le liquide contenu dans la seconde conduite et par les parois de cette même conduite. On suppose les deux sections AB et CD assez rapprochées pour

qu'on puisse dans l'intervalle négliger le frottement des parois; la réaction de ces parois peut alors être considérée comme normale et ne produit aucun travail.

On a d'ailleurs

$$q = \omega v \theta = \Omega V \theta.$$

Divisant donc toute l'équation ci-dessus par Πq , on obtient

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v'^2}{2g} = \frac{p}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}}{\Pi} + h - \frac{(v - v')^2}{2g},$$

équation que l'on peut écrire

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} + h = \frac{v'^2}{2g} + \frac{\mathcal{P}}{\Pi} + \frac{(v - v')^2}{2g}, \quad [1]$$

et qui ne diffère de celle que donne le THÉORÈME DE BERNOULLI (Voy. ce mot), qu'en ce que le second membre contient en plus le terme $\frac{(v - v')^2}{2g}$.

Le résultat est donc le même que si le point G s'était relevé verticalement d'une hauteur égale à ce terme. C'est pourquoi ce terme porte le nom de *perte de charge*, c'est-à-dire diminution dans la différence des hauteurs piézométriques de la section d'amont et de la section d'aval. Cette perte de charge peut s'exprimer en fonction de la seule vitesse V, en remarquant qu'on a

$$\omega v = \Omega V, \quad \text{d'où } v = V \cdot \frac{\Omega}{\omega};$$

en appelant donc ζ la perte de charge due à l'élargissement brusque, on a

$$\zeta = \frac{V^2}{2g} \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1 \right)^2. \quad [2]$$

Ces résultats peuvent être vérifiés à l'aide du *piézomètre différentiel* (Voy. PIÉZOMÈTRE).

II. Considérons maintenant le cas d'un rétrécissement brusque de section, comme l'indique la figure 2. La veine qui sort de la plus grande con-

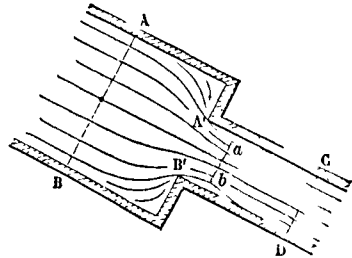


Fig. 2.

duite pour pénétrer dans la plus petite, éprouve une contraction (Voy. CONTRACTION DE LA VEINE); et, à une certaine distance de l'orifice A'B', sa section est devenue ab; les filets fluides y coulent parallèlement. Lorsque l'écoulement commence, l'air qui environne la veine est d'abord entraîné en partie et se raréfie; la pression supérieure qui s'exerce en aval, refoule le liquide, oblige la veine à se gonfler; et, à une certaine distance de la section contractée, le liquide coule à plein tuyau, en sorte qu'on peut admettre que dans une section CD, peu éloignée de A'B', les filets recommencent à être parallèles. Désignons par Ω la section AB, par ω la section CD ou A'B', par ω' la section ab, par V, V' et V'' les vitesses moyennes dans ces sections, par m le coefficient de contraction. Soient \mathcal{P} , \mathcal{P}' et \mathcal{P}''

les pressions dans les sections AB, *ab* et CD; soit *h* la différence de niveau des centres de gravité des sections AB et *ab*, et *h'* la différence de niveau des centres de gravité des sections *ab* et CD. De AB à *ab*, on peut appliquer le théorème de Bernoulli, et écrire

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{\Pi} + h = \frac{V'^2}{2g} + \frac{Q'}{\Pi'}$$

De *ab* à CD, on ne peut plus appliquer ce théorème; il y a élargissement brusque, et il faut ajouter aux termes relatifs à la section CD la perte de charge due à la vitesse relative (*V' - V''*); on a donc

$$\frac{V'^2}{2g} + \frac{Q'}{\Pi} + h' = \frac{V''^2}{2g} + \frac{Q''}{\Pi} + \frac{(V' - V'')^2}{2g}$$

Ajoutant membre à membre ces deux relations et simplifiant, on obtient

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{\Pi} + (h + h') = \frac{V''^2}{2g} + \frac{Q''}{\Pi} + \frac{(V' - V'')^2}{2g}$$

équation qui ne diffère de celle que donnerait le théorème de Bernoulli appliqué aux sections AB et CD, que par le dernier terme du second membre. L'effet du rétrécissement est donc le même que si le centre de gravité de la section CD était relevé d'une hauteur égale à ce terme; en sorte que le rétrécissement produit une perte de charge ζ donnée par la formule

$$\zeta = \frac{(V' - V'')^2}{2g}$$

On a d'ailleurs

$$m\omega V' = \omega V'', \text{ d'où } V' = \frac{V''}{m};$$

par conséquent

$$\zeta = \frac{V''^2}{2g} \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2. \quad [3]$$

III. Si le rétrécissement était produit par un simple diaphragme, comme l'indique la figure 3,

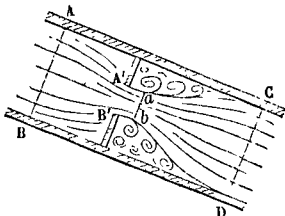


Fig. 3.

on aurait CD = AB, et, en appelant ω l'aire de l'orifice A'B',

$$m\omega V' = \Omega V'', \text{ d'où } V' = V'' \frac{\Omega}{m\omega};$$

par conséquent

$$\zeta = \frac{V''^2}{2g} \left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1 \right)^2 = \frac{V''^2}{2g} \left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1 \right)^2, \quad [4]$$

attendu que les sections AB et CD étant égales, il en est de même des vitesses *V* et *V''*.

IV. La perte de charge que nous avons appelée ζ est en réalité le surcroît de perte de charge due au changement brusque de section, c'est-à-dire la diminution que ce changement brusque détermine dans la différence des hauteurs piézométriques en aval et en amont. Cette différence porte souvent elle-même le nom de perte de charge, en sorte qu'il en peut résulter quelque confusion. Il faut donc avoir soin de ne pas confondre la différence de

charge, résultant de l'application du théorème de Bernoulli, avec la diminution de charge due au changement brusque de section, ni avec la différence totale de charge résultant de cette diminution, quantités que l'on désigne toutes les trois sous le nom de *perte de charge*. Avec un peu d'attention, il est toujours facile de distinguer ces trois quantités.

V. Pour les gaz, les variations de pression étant généralement très-faibles dans l'étendue d'une même conduite, on traite les changements brusques de section comme s'il s'agissait d'un liquide de même densité, et l'on obtient généralement ainsi une approximation suffisante pour les besoins de la pratique.

CHANLATTE, planchette triangulaire clouée sur le bas du coyau d'une ferme, pour prolonger le chevron jusqu'au bord de la corniche, sans charger celle-ci (*Voy. FERMES*).

CHANTIGNOLLE, morceaux de bois cloués sur les arbalétriers d'un comble pour soutenir les tasseaux sur lesquels s'appuient les pannes (*Voy. FERMES*).

CHAPELET, machine employée à élever l'eau dans les travaux d'épuisement. On en distingue deux espèces : le *chapelet incliné* et le *chapelet vertical*. Le chapelet incliné est une sorte de chaîne sans fin, formée de chaînons de fer articulés portant, chacun en son milieu, une palette rectangulaire, perpendiculaire à sa direction. Cette chaîne est mise en mouvement par une sorte de roue à axe horizontal *a* (fig. 1) dont les bras s'engagent

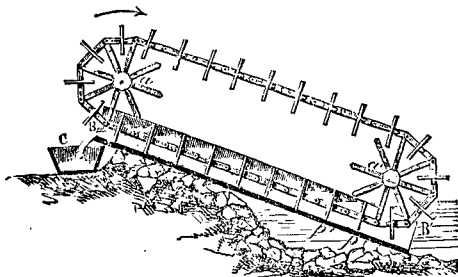


Fig. 1.

entre les *grains* du chapelet; la chaîne fait tourner à son tour une autre roue semblable *a'* placée un peu plus bas, et l'écartement des deux roues est calculé de manière à maintenir la chaîne suffisamment tendue. La branche inférieure du chapelet plonge dans un canal rectangulaire BB', incliné de 30 à 40 degrés à l'horizon. L'extrémité inférieure B' de ce canal plonge dans le puisard; l'extrémité supérieure est placée au-dessus d'une rigole C destinée à conduire les eaux au dehors. On conçoit que lorsque, par le jeu de l'appareil, une palette *p* émerge du puisard et monte sur le fond du canal incliné, l'eau placée au-dessus se trouve comprise entre cette palette et la suivante comme dans une sorte de vase mobile qui la transporte au haut du canal et la déverse dans la rigole C. Toutefois le volume d'eau élevé est toujours moindre que celui qui s'introduit entre les palettes, parce qu'il y a un jeu indispensable d'un demi-centimètre de chaque côté entre les palettes et les parois verticales du canal. Cette fuite d'eau est d'autant moindre que la vitesse

des palettes est plus grande ; mais d'un autre côté, une vitesse trop grande occasionnerait une perte notable de puissance vive par le choc des palettes au moment de leur immersion, et par l'excès de vitesse inutilement conservée par l'eau à son arrivée au haut du chapelet ; l'expérience a montré que la vitesse la plus convenable à donner aux palettes est une vitesse de 1^m,50. La hauteur des palettes est ordinairement égale à la distance de deux palettes consécutives, et leur largeur est double de leur hauteur. Le rendement des chapelets inclinés, ou le rapport de l'effet utile obtenu au travail dépensé, ne s'élève guère qu'à 0,38 ou 0,39. Ces machines ont en outre l'inconvénient d'occuper un grand espace et d'être d'une installation difficile. On leur substitue généralement aujourd'hui des pompes à balancier (Voy. POMPES).

Dans le chapelet vertical (fig. 2) le canal incliné est remplacé par un tuyau vertical à section circu-

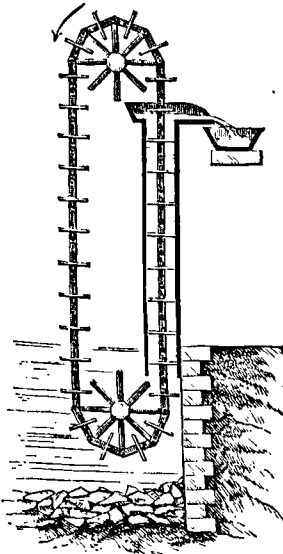


Fig. 2.

laire ; et chaque palette par deux disques en fonte comprenant entre eux un disque de cuir qui sert de garniture pour diminuer les fuites d'eau. Le mécanisme de l'appareil est d'ailleurs le même. — D'après l'expérience, le rendement du chapelet vertical peut s'élever à 0,64 et même 0,67.

Le chapelet, vertical ou incliné, est mis en mouvement soit par des hommes agissant sur une manivelle, soit par des chevaux attelés à un MANÈGE (Voy. ce mot).

CHAPELLE, renflement que présente un tuyau de pompe aux points où se trouve une soupape. Ce renflement porte une grande ouverture, que l'on ferme avec une plaque de fonte boulonnée, mais qui sert à vérifier l'état de la soupape et à la réparer au besoin.

CHAPITEAU, partie supérieure d'une colonne, celle qui repose sur le fût. Le chapiteau est la partie de la colonne qui présente, d'un ordre à l'autre, les différences les plus caractéristiques.

La figure 1 représente le chapiteau de l'ordre tos-

can. On y distingue le *listel* A et la *face* B du tailloir reliés par un *congé* ; le *quart de rond* C et le *filet* D ; enfin la *frise* ou le *gorgerin* E. Les moulures qui sont au-dessous (astragale, ceinture et

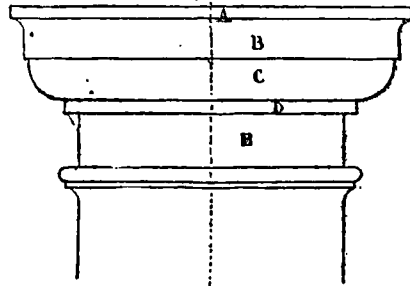


Fig. 1.

congé) font partie du fût de la colonne. Le tailloir est de forme carrée ; mais les parties situées au-dessous sont circulaires, et terminées par des surfaces de révolution. La frise est parfois reliée par un congé au filet D, qui devient alors un listel.

La figure 2 représente le chapiteau de l'ordre dorique. On y voit le *listel*, le *talon* et la *face* du tail-

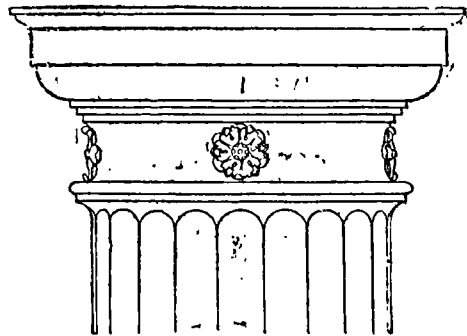


Fig. 2.

loir, parties de forme carrée ; un *quart de rond*, une *baguette*, un *filet*, un *congé*, et enfin le *gorgerin* ou la *frise*, ces dernières parties de forme circulaire. Le talon, le quart de rond, la baguette et la frise reçoivent souvent des ornements.

Le chapiteau de l'ordre ionique (fig. 3) se distingue par les *VOLUTES* V, V (Voy. ce mot) qui en forment la partie principale. Le profil du chapiteau est représenté à côté, les volutes enlevées. On y distingue un *filet* A, un *talon* B, une cavité C, appelée le *canal des volutes*, un *quart de rond* D, une baguette E, et un *filet* ou *listel* F qui se raccorde par un congé au fût de la colonne. La figure 4 montre le chapiteau renversé ; on y reconnaît la forme carrée du tailloir, celle des volutes, et des autres parties. Le talon, le quart de rond, les volutes, sont presque toujours chargés d'ornements.

La figure 5 représente le chapiteau de l'ordre corinthien. On verra à l'article TAILLOIR quelle est la forme de l'abaque. La partie du chapiteau située au-des-

sous se nomme le *vase*, parce qu'elle a en effet la forme d'un vase qui va en s'élargissant vers le haut. On lui donne le nom de *campane*. Il est orné d'un

double rang de feuilles d'acanthé, et d'espèces de tiges appelées *caulicoles*, d'où naissent de petites volutes ornant les angles, et des volutes plus petites

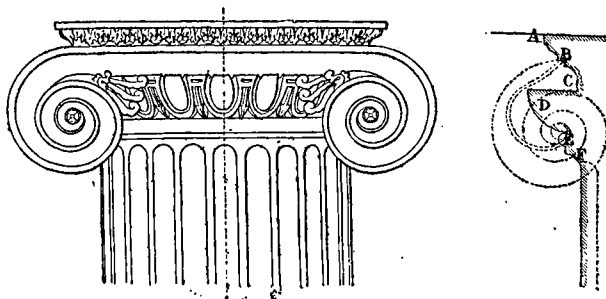


Fig. 3.

encore, ou hélices, ornant le milieu de chacun des côtés de l'abaque. Ce chapiteau est le plus riche et le plus élégant que les Grecs nous aient laissé.

Le chapiteau de l'ordre composite (fig. 6) a, comme le chapiteau corinthien, la forme générale d'un vase ou d'une cloche retournée, que surmonte un tailloir de même forme que dans l'ordre corinthien. Le vase est orné de feuilles d'acanthé, et de grandes volutes aux angles, réunissant ainsi les beautés particulières de l'ordre ionique à celles de l'ordre corinthien. L'abaque, les volutes, et pour ainsi dire

toutes les parties de ce chapiteau, sont susceptibles de recevoir des ornements variés.

Le chapiteau de l'ordre ionique présente quelque-

fois une disposition particulière. Lorsque la colonne occupe l'angle d'un édifice ou d'une colonnade, la vue qu'offre le chapiteau de face se répète latéralement. Les chapiteaux ioniques de ce genre portent le nom de *chapiteaux angulaires*. C'est sans doute

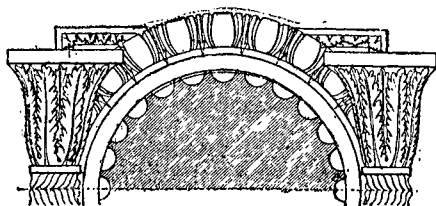


Fig. 4.

cette disposition qui a donné l'idée de la volute de l'ordre composite placée aux angles du chapiteau. — L'architecture moderne s'est emparée de cette

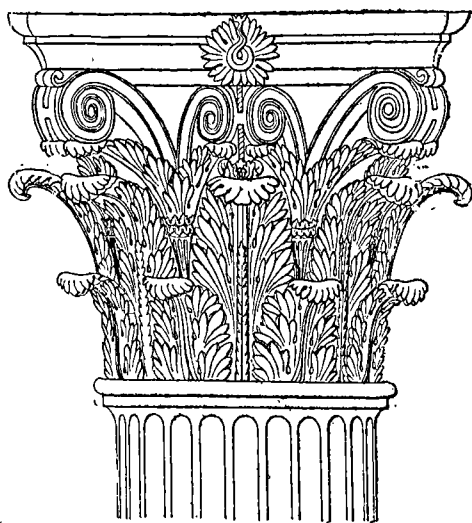


Fig. 5.

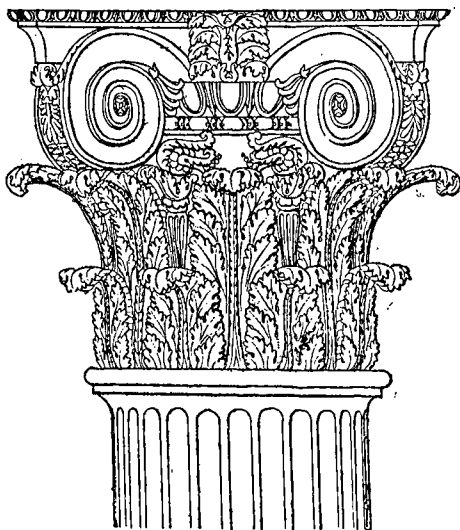


Fig. 6.

disposition de la volute, et l'a appliquée aux quatre faces du chapiteau ionique. L'église Saint-Vincent de Paul, à Paris, offre un exemple de l'emploi du

chapiteau ionique avec volutes sur les quatre faces. Quelques auteurs ont même fait de cette disposition une variété de l'ordre ionique, à laquelle ils

ont donné le nom d'*ordre ionique français*. Quand le chapiteau ionique a ainsi quatre faces semblables, on relie souvent les volutes par des guirlandes de fleurs.

Pour les dimensions relatives des diverses parties des chapiteaux, *Voy.* l'article ORDRES.

CHARIOTS DE SERVICE, appareils employés dans les gares de chemins de fer pour transporter les voitures d'une voie sur une autre. Le prix élevé des PLAQUES TOURNANTES (*Voy.* ce mot) a déterminé les ingénieurs de plusieurs voies ferrées à les remplacer par des appareils moins coûteux, au moins pour le service des remises et des ateliers de montage. Ces appareils portent le nom de *chariots de service*. On en distingue plusieurs espèces.

Le plus simple se compose d'une plate-forme placée à la hauteur des voies principales, et portée par des roues qui roulent sur des rails établis au fond d'une fosse transversale aux voies principales. Le chariot étant amené en face de la voie sur laquelle se trouve la voiture à transporter, de manière que les rails qu'il porte se placent dans le prolongement de ceux qui forment cette voie, on amène la voiture sur la plate-forme ; on pousse alors le chariot sur la voie transversale jusqu'à ce que les rails qu'il porte viennent se placer dans le prolongement de ceux de la voie sur laquelle la voiture doit être transportée, et l'on pousse la voiture du chariot sur cette voie.

Pour le service des voies de départ et d'arrivée, on fait quelquefois usage du *chariot hydraulique*, employé d'abord sur le chemin de Bristol, puis sur celui de Saint-Germain. Il roule sur une voie transversale, interrompue aux points où elle croise les voies principales, mais s'élevant au-dessus de celles-ci d'une quantité égale au rebord des roues du chariot. Il en résulte qu'aux points de croisement où la voie transversale est interrompue, les roues du chariot sont supportées par les rails des voies principales sur lesquels leurs rebords roulent pendant un court instant. Ce chariot, très-bas, porte une bêche remplie d'eau, et des pompes, à l'aide desquelles on chasse cette eau dans des cylindres, dans lesquels se meuvent des pistons dont la tige, verticale, se termine par une sorte de crosse ou de fourche. Le chariot étant amené en face de la voie sur laquelle est la voiture à transporter, on amène cette voiture sur le chariot, de manière que ses essieux se trouvent au-dessus des fourches. On fait alors mouvoir les pompes, et l'on enlève ainsi la voiture de la quantité nécessaire pour que les rebords de ses roues puissent passer au-dessus des rails. On pousse le chariot ainsi chargé jusqu'à ce que la voiture soit en face de la voie sur laquelle elle doit être transportée; on laisse écouler l'eau des cylindres, et les roues de la voiture viennent reposer doucement sur les rails. Il ne reste plus qu'à pousser la voiture sur la nouvelle voie où elle se trouve.

Les chariots hydrauliques sont d'un prix assez élevé. On leur substitue avec avantage les chariots dits *système Dünn*, qui roulent aussi sur une voie principale, mais interrompue aux points de croisement, comme pour le chariot hydraulique. Mais pour faire monter la voiture sur le chariot, on se sert de contre-rails qui se replient au besoin sur le chariot même, ou se développent dans le sens de

la voie principale, et forment des plans inclinés sur lesquelles les roues de la voiture roulent pour monter sur le chariot ou pour en descendre. (*Voy.* pour plus de détails, le *Traité élémentaire des chemins de fer*, de M. Perdonnet.)

CHARNIÈRE, nom donné quelquefois à la droite autour de laquelle, dans le RABATTEMENT (*Voy.* ce mot), s'opère la rotation du plan que l'on rabat.

CHARPENTE, partie de la STÉRÉOTOMIE relative à la forme des bois qui entrent dans les constructions. C'est une des plus importantes applications de la Géométrie descriptive. Elle embrasse les ASSEMBLAGES, les PANS DE BOIS, les PLANCHIERS, les COMBLES, les ESCALIERS, les PONTS, etc. (*Voy.* ces mots). La CONSTRUCTION NAVALE (*Voy.* ce mot) rentre presque en entier dans la charpente.

Les charpentiers exécutent les différentes pièces droites d'après des dessins tracés sur le sol horizontal convenablement préparé. Ces dessins portent le nom d'*ételons* lorsque les pièces n'y sont représentées que par leurs *lignes milieux*, qu'il ne faut pas confondre avec leurs axes de figure, quoique ces lignes coïncident le plus souvent; mais il peut arriver que les pièces soient *dévoignées*, comme on le verra aux articles GROUPE DROITE, GROUPE BIAISE, NOUË, et dans ce cas la ligne milieu diffère de l'axe de figure. Lorsque les dimensions réelles des pièces, leurs joints et leurs assemblages sont représentés sur le dessin, il devient une véritable *épure*; et il en prend conséquemment le nom. Ces épures fournissent ordinairement deux projections de la pièce à tailler, l'une sur un plan parallèle à l'une de ses faces latérales, l'autre sur un plan parallèle à sa face supérieure ou inférieure, et c'est en reportant ces projections sur la pièce même que le charpentier détermine les coupes à faire dans le bois pour lui donner la forme qu'il s'agit d'obtenir. Pour cela, il est nécessaire de projeter à l'avance l'axe de figure de la pièce sur ses quatre faces latérales, ce qu'on appelle *ligner* et *contre-ligner* la pièce. C'est à l'aide du CORDEAU (*Voy.* ce mot) que l'on trace ces projections. Pour les obtenir, on commence par disposer la pièce sur des *chantiers* ou morceaux de bois rectangulaires, et à l'aide de *cales* convenables on lui donne par tâtonnements une position telle, que sa face supérieure soit horizontale. On dit que cette face est *de niveau*, lorsqu'un niveau placé dans le sens de la longueur indique par la position de son fil à plomb que la direction dont il s'agit est horizontale (*Voy.* NIVEAU); la face est dite *de dévers*, lorsque le niveau placé transversalement indique de même une direction horizontale; quand la face considérée est à la fois de niveau et de dévers, elle est horizontale, en vertu d'un principe connu. On trace alors à l'aide du cordeau la direction de la ligne milieu, après en avoir déterminé les extrémités; et, à l'aide de deux fils à plomb placés contre ces extrémités, on détermine, en avant et en arrière de la pièce, deux points de repère qui permettent de retrouver la direction de cette ligne milieu.

On a soin de faire une *plumée* à l'endroit où l'on place le niveau de dévers, c'est-à-dire qu'on enlève à cet endroit quelques copeaux à l'aide du rabot ou de la biseau, et sur cet emplacement on trace une perpendiculaire à la ligne milieu, ce qu'on appelle un *trait carré*; il sert à ramener la pièce dans

sa position primitive lorsqu'elle en a été écartée par rotation comme nous allons le dire.

Après avoir ligné la face supérieure, on fait faire à la pièce un quart de tour sur elle-même, ce qu'on appelle *donner quartier* à la pièce; et on ligne la face qui est devenue la face supérieure, en s'assurant, à l'aide des deux fils à plomb, que la nouvelle ligne tracée est dirigée vers les mêmes points de repère que la précédente. L'axe de la pièce se trouve alors déterminé par les deux plans menés, perpendiculairement aux deux faces dont on vient de parler, par les deux lignes longitudinales qui y ont été tracées, et la pièce est dite *lignée*. On donne de nouveau quartier à la pièce; la face qui était primitivement au-dessus se trouve maintenant au-dessous; mais on peut rendre visibles les extrémités de sa ligne milieu, au moyen d'un trait sur chacune des sections qui forment les bouts de la pièce. A l'aide d'un fil à plomb placé contre l'une de ces extrémités on marque sur la face supérieure l'extrémité correspondante de sa ligne milieu; il suffit alors de faire passer une droite par les deux extrémités ainsi déterminées. En faisant faire à la pièce un nouveau quart de tour, on trace de même la ligne milieu de la quatrième face; et la pièce est contre-lignée. Par la manière dont on a opéré, les lignes milieux des faces opposées sont dans un même plan contenant l'axe de la pièce; et les quatre lignes tracées sur les quatre faces sont les projections de cet axe sur ces quatre faces.

Lorsque la pièce est lignée et contre-lignée, il faut la *mettre sur ligne*, c'est-à-dire la placer de manière que, ses faces supérieure et inférieure étant horizontales, leurs lignes milieux se projettent toutes deux sur la ligne qui leur correspond dans l'épure. Les détails donnés plus haut feront aisément comprendre comment on parvient à remplir cette condition. Mais il faut de plus qu'on puisse ramener la pièce exactement à la même place, si, pour une raison quelconque, on est obligé de la déplacer; pour y parvenir, on trace sur la face supérieure et perpendiculairement à la ligne milieu, une droite qu'on appelle *trait de ramèneret*, et dont on détermine, à l'aide du fil à plomb, la projection sur l'épure. On place ainsi successivement toutes les pièces d'un même pan de charpente de niveau, de dévers, sur ligne, et sur trait de ramèneret. C'est alors qu'on procède à l'opération qui a pour objet de déterminer sur chaque pièce les limites des joints et des assemblages, opération que l'on appelle le *Piqué des bois* (*Voy.* ce mot). On a alors tous les éléments nécessaires pour exécuter les *coupes* qui doivent donner à chaque pièce la forme qu'elle doit avoir.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des pièces droites. Les opérations sont un peu différentes pour les pièces courbes, et se rapprochent davantage des procédés employés dans la coupe des pierres. Nous supposons d'abord que toutes les arêtes de la pièce considérée soient des courbes planes; et nous prendrons pour premier exemple la forme indiquée par les traits pleins (fig. 1), et terminée par quatre plans et par deux surfaces cylindriques perpendiculaires à deux de ces plans. Cette pièce, dont les projections sont supposées connues, devra être extraite d'un parallélépipède rectangle de même hauteur ABCDEFGH, et dont les bases peuvent contenir les faces *befg* et *adeh*. On commencera par tracer sur la

base inférieure la figure *befg* qui est donnée; et, cette base étant placée horizontalement, on placera successivement le fil à plomb aux points *b* et *c*, ce qui déterminera sur la face supérieure les points

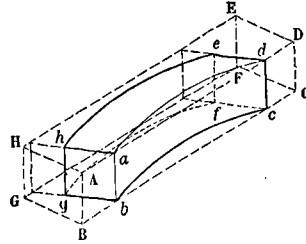


Fig. 1.

correspondants *a* et *d*, et permettra de tracer la figure *adeh*. Par les droites parallèles *bg* et *ah* on fera passer un trait de scie; et, sur le plan ainsi obtenu, on tirera la droite *gh*, ce qui déterminera la face *abgh*. Par les droites parallèles *cf* et *de* on fera passer un second trait de scie, et, sur le plan ainsi obtenu, on tirera la droite *ef*, ce qui déterminera la face *cdef*. On divisera les courbes *ad* et *bc* en un même nombre de parties égales; les points de division correspondants seront des points de repère dont on fera usage tout à l'heure. A l'aide d'une scie à chantourner on dégrossira la surface cylindrique *abcd*, que l'on finira à l'aide d'un instrument plus fin, en s'aidant d'une règle posée sur les points de repère qu'on s'est précédemment ménagés, afin de s'assurer que la surface obtenue est bien cylindrique. On exécutera de même la surface cylindrique *hgfe*; et la pièce se trouvera taillée. — S'il y avait des tenons aux extrémités de la pièce, c'est-à-dire en saillie sur les faces *abgh* et *dcfe*, on taillerait d'abord la pièce en lui donnant un excès de longueur égal à la saillie des tenons, et l'on taillerait les tenons après coup en entamant la pièce par ses extrémités.

Nous prendrons pour second exemple la pièce *mnpqrst* (fig. 2) dont les faces extrêmes sont pla-

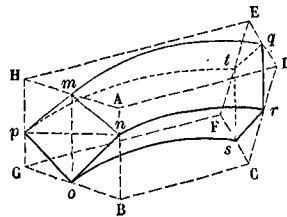


Fig. 2.

nes, mais dont les quatre autres sont coniques. Nous supposons cette pièce engendrée par le carré *mnp* tournant autour d'un axe parallèle à sa diagonale *om*. La pièce devra être extraite d'un prisme droit ABCDEFGH ayant la hauteur de cette diagonale, et une base capable de contenir la projection de la pièce, c'est-à-dire le trapèze circulaire *nrtp* qui formerait la section perpendiculaire à *om*. Ayant déterminé ce prisme, ce qui n'offre aucune difficulté, on prendra les milieux *m* et *q* des côtés

opposés AH et DE de la base supérieure; et par ces deux points on fera passer l'arc *mq* dont la projection est supposée donnée sur un plan parallèle à cette base, c'est-à-dire que cet arc est connu en vraie grandeur. Sur la base inférieure BCFG on tracera de même l'arc égal *os*. On tracera sur ces mêmes bases l'arc BC, qui est la projection en vraie grandeur de l'arc *nr*, et l'arc AD qui lui est égal; puis, par ces deux arcs on fera passer, comme il a été dit à l'occasion du premier exemple, une surface cylindrique, sur laquelle on tracera à la règle ployante l'arc *nr* lui-même, dont on a les extrémités. Par des procédés analogues on obtiendra l'arc *pt*. Cela fait, on divisera en un même nombre de parties égales les quatre arcs *mq*, *nr*, *os* et *pt*, afin de se procurer les points de repère dont on va avoir besoin. Par les arcs *mq* et *nr*, et en s'aidant d'une règle posée sur les points de repère, on fera passer une surface conique; on en fera passer de même une seconde par les arcs *nr* et *os*; une troisième par les arcs *os* et *pt*; une quatrième par les arcs *pt* et *mq*. La pièce se trouvera ainsi taillée, sauf les tenons, s'il y en a, pour lesquels on pourrait répéter l'observation faite à l'occasion du premier exemple.

Nous supposerons en troisième lieu que les arêtes de la pièce considérée soient à double courbure, et nous prendrons pour exemple la pièce représentée fig. 3, et que nous supposerons engendrée par un

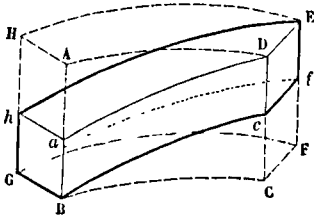


Fig. 3.

carré dont les quatre sommets décrivent simultanément des hélices de même pas tracées sur des cylindres concentriques. Cette pièce pourra être extraite d'un prisme droit à base curviligne ABCDEFGH, analogue à celui de la figure 1, et que l'on taillerait de la même manière. Sur la surface cylindrique ABCD on tracera à la règle ployante l'hélice *aD* et l'hélice *Bc* dont les extrémités sont données. Sur la surface cylindrique HGFE on tracera de même les hélices *hE* et *Gf*. On divisera ces hélices en un même nombre de parties égales pour se procurer des points de repère. On enlèvera alors le bois au-dessus des hélices *hE* et *aD*, et l'on fera passer par ces hélices une surface hélicoïde à génératrices horizontales, en s'aidant pour cela d'une règle posée sur les points de repère. On fera passer une surface hélicoïde égale par les hélices *Gf* et *Bc*; et la pièce sera taillée. Cette méthode occasionnerait un grand déchet de bois et pourrait même devenir impraticable si l'inclinaison des hélices était considérable. Dans ce cas on extrairait la pièce d'un prisme minimum capable du volume considéré, en employant le procédé qu'on trouvera développé à l'art. LIMON.

Tout ce que nous venons de dire des pièces courbes se rapporte au cas où elles ont un peu d'étendue en longueur. Dans le cas contraire, les pièces sont ordinairement à courbure simple, et peuvent

être obtenues en assemblant à *trait de Jupiter* (Voy. ASSEMBLAGES) des pièces d'une moindre longueur. Mais si les dimensions doivent être très-considérables, comme lorsqu'il s'agit des grands arcs qui entrent dans les *fermes* (Voy. ce mot), on peut employer l'un des deux procédés suivants. Le premier, qui est dû à Philibert Delorme, est représenté (fig. 4). Qu'on imagine une série de planches ou de

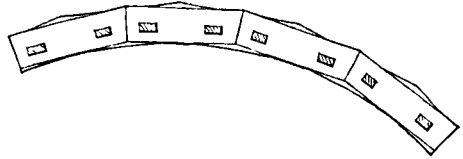


Fig. 4.

madriers ayant la forme de trapèzes symétriques, réunis bout à bout dans une position verticale, de manière que leurs arêtes supérieure et inférieure soient deux lignes brisées régulières. Qu'on suppose un second système égal au premier, juxtaposé à celui-ci, mais de manière que ses angles alternent avec ceux des premiers. Ces deux systèmes de planches posées de champ formeront, en les réunissant par des traverses, un système tout à fait rigide, dont la projection sur un plan parallèle est inscriptible au cercle. On pourra augmenter indéfiniment la résistance du système total en multipliant le nombre des cours de planches. En arrondissant alors les angles, on obtiendra une pièce courbe, d'une longueur et d'un rayon aussi grand qu'on le voudra, et offrant toute la résistance désirable. Le seul vice de ce système est la multiplicité des assemblages.

Le second procédé est dû à M. Emy. Il consiste à superposer à plat un certain nombre de planches, comme on le voit fig. 5. On les courbe ensuite

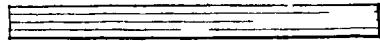


Fig. 5.

par force, en maintenant d'un côté tous les bouts dans le même plan. Par suite de la flexion, chaque planche dépasse de l'autre bout la planche supérieure, comme le montre la figure 6. On boulonne



Fig. 6.

les planches dans cette position, pour les empêcher de reprendre leur position primitive, et l'on obtient une pièce courbe, dont la résistance dépend du nombre des planches employées.

Les procédés particuliers à chaque genre de question sont connus depuis un temps considérable dans la Charpente; mais c'est Monge qui a eu le mérite de démêler, parmi ces procédés, les principes généraux qui doivent servir de guide. Les ouvrages les plus esti-

més qui aient été publiés depuis sur la charpente sont le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy, les *Applications de la Géométrie descriptive* de Th. Olivier, le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, et le *Traité de Charpenterie* de M. Emy.

CHARRUE. Voy. MACHINES AGRICOLES.

CHEMIN COUVERT, espace compris entre la contrescarpe et le glacis, sur lequel les défenseurs d'une place sont à l'abri des feux rectilignes. Le chemin couvert règne sans interruption tout autour de la place, en embrassant les demi-lunes (Voy. FORTIFICATIONS). Pagan, et Vauban après lui, lui ont donné une banquette sur laquelle les défenseurs montent pour faire le coup de feu, abrités par l'épaulement que forme l'arête du glacis. Cette banquette est plus large que celle des parapets, parce qu'elle reçoit les palissades dont on continue à garnir le chemin couvert. La crête du glacis est à 2^m,50 au-dessus du terre-plein ou sol naturel du chemin couvert. La largeur de ce terre-plein est ordinairement de 10 mètres. Aux saillants, on ménage aujourd'hui des *places d'armes saillantes*, où l'on place les postes avancés ; et aux rentrants, des *places d'armes rentrantes*, où l'on réunit les troupes destinées à soutenir ces postes, et à défendre la contrescarpe. De distance en distance, on coupe le chemin couvert par des TRAVERSES (Voy. ce mot) qui ont pour effet d'éviter l'enfilade et l'effet du tir à ricochet. Le chemin couvert, qui n'était primitivement qu'une sorte de chemin de ronde pour la surveillance de la contrescarpe, est devenu ainsi un excellent ouvrage de défense. (Voy. pour plus de détails les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

CHEMINS DE FER, voies formées de bandes de fer parallèles appelées RAILS (Voy. ce mot), sur lesquelles circulent des voitures appelées *wagons*, mues généralement par des machines à vapeur mobiles, nommées LOCOMOTIVES (Voy. ce mot). Les premiers chemins de fer ont été construits vers 1650, aux environs de Newcastle, en Angleterre ; mais jusqu'à 1804 les seuls moteurs employés étaient le cheval, et la pesanteur. A cette époque on vit apparaître, aux environs de Newcastle, la première locomotive. Mais la vitesse des convois demeura très-limitée jusqu'en 1829, où Georges Stephenson, appliquant aux machines locomotives la chaudière tubulaire imaginée par Marc Séguin, obtint des vitesses de 25 kilomètres à l'heure. Depuis cette époque, les machines n'ont cessé de se perfectionner ; et l'on obtient aujourd'hui des vitesses de 60, 70 et 80 kilomètres à l'heure. En même temps, la puissance des machines n'a cessé de s'accroître, et le poids des trains, qui n'était que de 38 tonnes au moment de la découverte de Stephenson, a pu être porté jusqu'à plus de 600 tonnes. Les premiers chemins de fer de grande circulation ont été construits en Angleterre. Les États-Unis, la Belgique, l'Allemagne, la France ont successivement adopté ce mode de communication. Aujourd'hui toute l'Europe est couverte d'un vaste réseau de voies ferrées, et les chemins de fer ont pénétré en Égypte et jusque dans l'Inde.

I. Le tracé des chemins de fer est, comme celui des routes, un problème très-complexe, qui dépend de la nature et de la valeur des terrains à parcourir, des ressources locales, des relations commerciales

de la contrée, des conditions économiques dans lesquelles le chemin doit être établi, et quelquefois de considérations stratégiques. Il s'y joint deux difficultés de plus, venant de la nécessité de limiter les pentes, et de n'employer que des courbes de grand rayon. Dans les pays médiocrement accidentés, la pente est ordinairement limitée à 4 ou 5 millimètres par mètre ; elle ne doit pas excéder 10 à 12 millimètres. Elle peut aller jusqu'à 20 à 25 millimètres dans les pays de montagnes. On trouve sur quelques chemins des pentes de 30 millimètres ; mais c'est exceptionnel. La rapidité avec laquelle la composante du poids des trains parallèle à la voie croît avec la pente, est la cause qui oblige à maintenir l'inclinaison de la voie dans les limites que nous venons d'indiquer.

Les courbes doivent avoir un rayon de 800 à 1000 mètres en général ; à l'approche des gares, où la vitesse se ralentit, on peut réduire le rayon à 500 mètres. On peut même le réduire à 350 ou 300 mètres, mais à la condition de ralentir en conséquence. Dans les changements de voie, où l'on marche toujours lentement, on peut descendre jusqu'à un rayon de 260 mètres. Enfin, lorsqu'on emploie les trains articulés de M. Arnoux (Voy. SYSTÈME ARNOUX), on peut faire circuler les convois, à petite vitesse, dans des courbes de 25 mètres de rayon. La raison qui empêche de réduire le rayon des courbes au delà d'une certaine limite est l'influence de la FORCE CENTRIFUGE (Voy. ce mot) développée au passage de ces courbes. Cette force tend, non pas à renverser les wagons en dehors de la voie, comme on le croit communément, car son moment par rapport au rail extérieur est toujours inférieur à celui du poids du wagon, mais à faire monter le rebord de la roue sur le rail et à occasionner un déraillement. Or, la force centrifuge varie comme le carré de la vitesse, et en raison inverse du rayon : il y a donc pour chaque vitesse une limite au-dessous de laquelle le rayon ne doit pas descendre.

Lorsque les circonstances obligent à placer à la suite l'une de l'autre deux courbes en sens contraire, il faut avoir soin de les séparer par une portion de voie rectiligne au moins égale à la longueur des plus grands convois.

II. L'exécution de la voie oblige à de grands travaux de terrassements, tels que tranchées et REMBLAIS, et entraîne de nombreux travaux d'art, tels que PONTS, PONCEAUX, VIADUCS, TUNNELS (Voy. ces mots).

Sur tous les chemins de fer de France, de Belgique, de Suisse, et sur la plupart des chemins anglais et allemands, la largeur de la voie est de 1^m,50 ou 1^m,51 d'axe en axe des rails. Les rails sont portés par des traverses en bois équarri, de 2^m,60 de longueur, reposant eux-mêmes sur une couche de *ballast*, sorte d'ensablement destiné à égaliser la voie, à lui donner plus d'élasticité, et à favoriser l'écoulement des eaux pluviales. Les traverses en chêne ne durent pas au delà de 12 à 15 ans ; aussi a-t-on quelquefois posé les rails sur des dés en pierre ; mais on y a renoncé presque partout, attendu que ce genre de support manque d'élasticité, et laisse les deux files de rails indépendantes l'une de l'autre.

Lorsqu'il y a deux voies, la largeur de l'en-

trevoie doit être au moins de 1^m,80. La largeur des accotements varie de 1 mètre à 3 mètres ; elle est, en général, de 1 mètre en tranchée et de 1^m,50 en remblai. La largeur totale de la bande de terrain employée pour la voie varie entre 34 et 44 mètres.

III. On a, dans l'exécution de la voie, à s'occuper de diverses dispositions accessoires, telles que les passages à niveau, les croisements, les changements de voie, les plaques tournantes, les poteaux indicateurs et les signaux fixes.

Lorsque le passage à niveau est destiné aux voitures, il est nécessaire de noyer les rails dans le pavé, en ménageant, du côté de l'axe de la voie, une rainure dans le sol pour loger le bourrelet de la roue ; cette rainure est garnie de fer sur sa paroi opposée au rail.

Quand deux voies se croisent, il est nécessaire d'interrompre les rails aux points de croisement, afin que le rebord des roues des voitures qui parcourent l'une des voies ne soit pas obligé de monter sur les rails de l'autre voie. Cette interruption s'effectue comme l'indique la figure 1. Le pa-

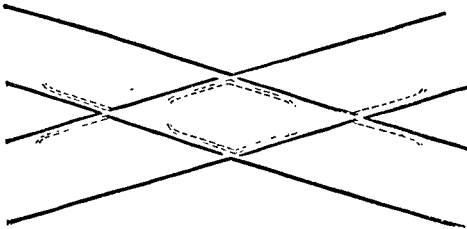


Fig. 1.

rallélogramme formé par les quatre rails qui se croisent est ouvert à ses quatre sommets. Cette disposition suffit pour éviter toute secousse au moment du croisement. Mais afin de prévenir tout danger de déraillement, on place aux points d'interruption des portions de rails, marquées en lignes ponctuées sur la figure, et que l'on appelle des contre-rails. Le rebord de la roue s'engageant entre le contre-rail et le rail auquel il est parallèle, cette roue se trouve maintenue, à l'instant où elle arrive au point d'interruption, dans la direction qu'elle doit suivre. On a soin de relier les traverses des deux voies, au point où elles se croisent, par des pièces de bois longitudinales qui rendent le système invariable.

Les changements de voie s'exécutent au moyen des aiguilles, ou des PLAQUES TOURNANTES, ou des CHARIOTS DE SERVICE (Voy. ces mots).

Les POTEAUX INDICATEURS font connaître l'inclinaison des rampes en amont et en aval (Voy. ce mot).

Les signaux fixes, placés à 800 mètres au moins de chaque station, ont pour mission d'avertir le train qui approche que la voie est libre ou qu'il y a un obstacle. Chaque signal se compose d'un disque circulaire qui se place parallèlement à la voie quand elle est libre, et perpendiculairement à la voie en cas d'arrêt. Ce disque est placé au haut d'une colonne que son arbre traverse. Il est peint en rouge

du côté qu'il doit présenter aux trains arrivants, s'il y a obstacle sur la voie. La nuit, une lanterne à feux blancs, placée près du disque en dedans de la voie, est visible pour les trains arrivants quand le disque est effacé ; mais quand le disque vient se placer perpendiculairement à la voie, la lanterne se trouve couverte par un verre rouge adapté à une ouverture ménagée dans le disque, et ses feux paraissent rouges. L'arbre du disque se manœuvre à distance par l'intermédiaire d'un fil de fer soutenu de distance en distance par de petits poteaux. A ce fil est attachée l'extrémité d'une chaîne qui s'enroule sur une poulie *p* (fig. 2), et porte à son extré-

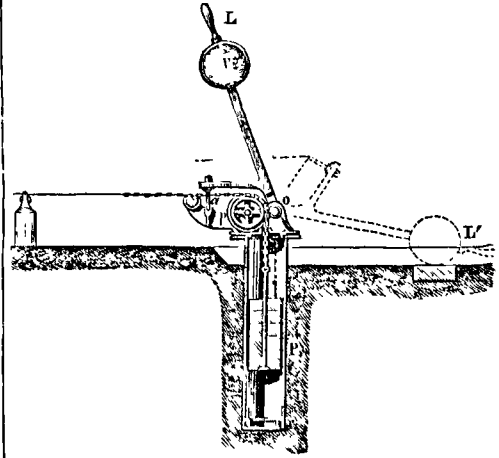


Fig. 2.

mité un contre-poids *P*. Un levier *OL*, mobile autour du point *O*, porte une sorte d'anneau *a* terminé en pointe vers le bas, et dans lequel la chaîne passe sans difficulté quand le levier a la position *OL*. Mais si on lui fait prendre la position *OL'*, les mailles de la chaîne se trouvent prises dans la partie étroite de l'anneau *a*, et la chaîne est tirée vers la droite. Le disque, sollicité par le fil de fer, exécute alors un quart de tour, et vient se placer perpendiculairement à la voie. Quand on relève le levier dans la position *OL*, un second levier à contre-poids *CQ* (fig. 3) placé près du disque, et lié à son arbre par

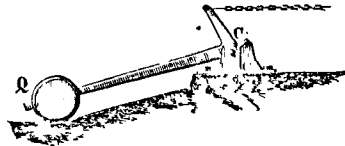


Fig. 3.

un fil de fer, ramène l'arbre à sa position primitive en tournant par l'effet de son poids autour du point *C*, et le disque se place de nouveau parallèlement à la voie. Le contre-poids *P* (fig. 2) est destiné à maintenir toujours le fil tendu.

Sur quelques lignes, le disque, en se plaçant perpendiculairement à la voie pour donner le signal d'arrêt, met en mouvement un carillon établi dans

la station même, et qu'on appelle un *trembleur électrique*; ce carillon avertit le chef de gare que le disque a la position d'arrêt. Le bruit se prolonge quelques minutes après le départ du train.

Aux signaux fixes on associe les signaux à la main, tels que drapeaux ou lanternes de couleur tenus par les gardes-voie; les signaux mobiles, tels que pétaards ou bottes détonantes que la locomotive fait

éclater en les écrasant; les signaux donnés par le sifflet de la locomotive elle-même, et qui sont à la disposition du mécanicien; et enfin le télégraphe électrique.

IV. Les voitures qui circulent sur les chemins de fer se composent, comme toutes les voitures, d'un *train* et d'une *caisse*. Le train est, à peu de chose près, le même pour toutes les espèces de voitures.

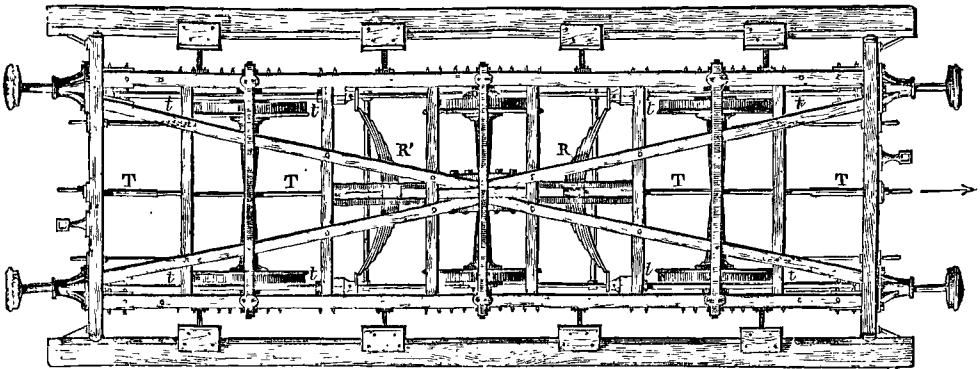
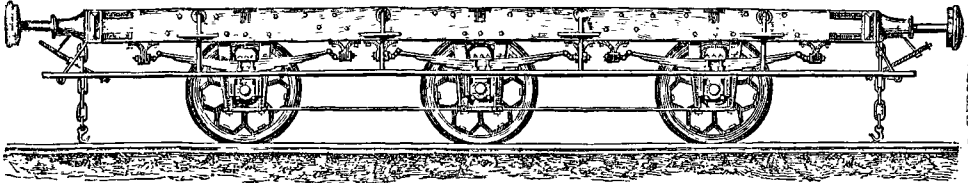


Fig.

Il se compose d'un châssis rectangulaire, consolidé par des traverses et par de longues pièces diagonales formant *croix de Saint-André*. Ce châssis, dont la figure 4 représente une partie, est porté sur 4, 6 et quelquefois 8 roues. Pour cela, il présente, à l'aplomb de chaque roue, de fortes plaques en tôle, découpées en forme de trapèzes, que l'on appelle les *plaques de garde*, lesquelles maintiennent les *bottes à graisse* reposant sur la fusée des essieux; des *ressorts de suspension*, pareils à ceux des voitures ordinaires, sont fixés par leurs extrémités au-dessous du châssis, et par le milieu aux boîtes à graisse; en sorte que le châssis repose sur les essieux par l'intermédiaire des ressorts de suspension et de ces boîtes.

Les essieux, au lieu d'être fixes, tournent dans des collets ménagés dans les boîtes à graisse, et sont solidaires avec les roues, qui sont placées en dedans du châssis. La raison de cette solidarité établie entre les essieux et les roues est que, si les essieux étaient fixes et les roues mobiles, le moindre obstacle qui empêcherait momentanément une roue de tourner tandis que la roue jumelle continuerait sa rotation, occasionnerait une déviation et par suite un déraillement. C'est pour la même raison que, sauf dans le *SYSTÈME ARNOUX* (*Voy. ce mot*), les essieux d'une même voiture sont constamment parallèles, afin qu'il ne se produise aucune déviation au passage des courbes.

Les bandes des roues ne sont point cylindriques comme sur les routes ordinaires; elles offrent une légère inclinaison de $\frac{1}{20}$, de l'extérieur à l'intérieur; et la roue a, comme nous l'avons dit, un rebord ou bourrelet intérieur, indiqué sur la figure 5. Ce rebord empêche la roue de sortir de la voie; et l'inclinaison de la bande a pour effet de ramener constamment la roue vers l'intérieur de la voie lorsqu'elle tend à s'en écarter, afin d'éviter ainsi le frottement du rebord contre le rail, frottement qui produirait une résistance considérable.

Indépendamment des ressorts de suspension, le train présente entre les traverses deux autres ressorts placés horizontalement, comme la figure 4 le montre en R et R', et au milieu desquels sont attachées les *tiges de traction* TT. Les extrémités de ces ressorts s'appuient sur les extrémités des tiges tt, qui, après avoir traversé des guides fixés au

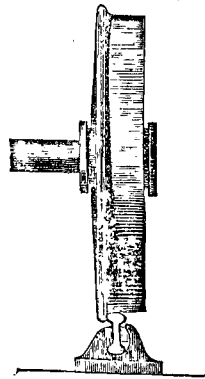


Fig. 5.

châssis, se terminent en C et C' par des *tampons* en bois dur appelés *tampons de choc*, rendus élastiques par des rondelles en caoutchouc, ou par des ressorts diversement disposés. Les ressorts R, R' portent le nom de *ressorts de choc et de traction*; voici la manière dont ils fonctionnent. Supposons le wagon au repos, et admettons qu'un effort de traction s'exerce, dans le sens de la flèche, de la part de la voiture qui précède, sur la tige de traction TT. Le ressort R sera sollicité en son milieu dans le sens de cette flèche; ses extrémités pousseront les tiges tt; les manettes qui les terminent s'appuyant contre la traverse du châssis, la flèche du ressort diminuera, jusqu'à ce que la tension qui en résulte soit équivalente à l'effort de traction; à ce moment le wagon se mettra en marche vers l'avant. On voit que la traction s'opère ainsi d'une manière graduelle. Supposons au contraire que la voiture qui précède recule, ses tampons d'arrière pousseront les tampons d'avant C et C'; les extrémités des tiges tt pousseront la flèche de ce ressort, dont le milieu est maintenu par la tige de traction; l'embase qui termine cette tige exercera un effort de plus en plus grand sur la traverse antérieure, et fera enfin mouvoir le wagon en arrière. Mais le mouvement sera encore transmis d'une manière graduelle et sans choc.

Ce que nous disons du wagon en repos peut se dire du wagon en mouvement, lorsque la voiture qui précède tendra à prendre une vitesse plus grande ou plus petite; dans les deux cas les ressorts R, R' amortiront le choc résultant de la différence de vitesse.

Les crochets qui terminent les tiges de traction de deux voitures consécutives, sont reliés par des appareils appelés *tendeurs*, qui permettent de rapprocher les véhicules jusqu'à ce que leurs tampons exercent les uns sur les autres une forte pression. On évite ainsi les secousses et l'on diminue les chocs. Cet appareil est représenté fig. 6. Il se compose de deux mailles

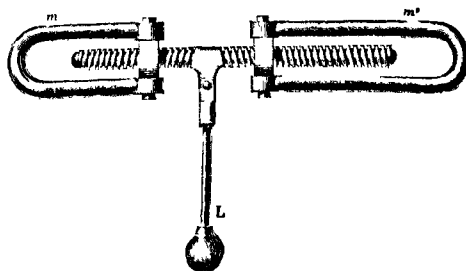


Fig. 6.

m, m', dans les traverses desquelles s'engage, comme dans deux écrous, une tige filetée en sens contraire du côté des deux mailles; en faisant tourner cette double vis à l'aide du levier L, on rapproche ou l'on écarte les deux mailles, de manière à augmenter ou diminuer à volonté la pression des tampons. L'une des mailles est fixée à demeure dans un œil ménagé à l'extrémité de la tige de traction d'arrière de l'un des wagons; l'autre maille s'accroche à l'extrémité de la tige de traction d'avant du wagon qui suit. Ce mode de réunion des wagons consécutifs a l'inconvénient de rendre solidaires toutes

les voitures d'un même train et de rendre par conséquent le démarrage plus difficile. On évite cet inconvénient en réunissant les voitures par de simples chaînes; mais alors la mise en mouvement occasionne des chocs successifs très-désagréables pour les voyageurs.

Dans un train il y a toujours un certain nombre de voitures munies de freins; ce nombre est fixé par les règlements administratifs (*Voy. FREIN*).

La caisse des voitures varie suivant sa destination et le degré de luxe qu'on veut y introduire. On distingue les wagons de terrassement ou d'ensablement, les wagons destinés au transport des combustibles, au transport des marchandises, les maringottes destinées au transport des voitures de roulage, les trucs servant au transport des diligences ou des chaises de poste, les wagons à transporter le lait, ceux qui servent au transport des bestiaux, les wagons-écuries, les wagons de bagages, les wagons pour le transport des dépêches, enfin les wagons de voyageurs, divisés en première, deuxième et troisième classe. Nous renverrons aux ouvrages spéciaux pour la description de ces diverses voitures, d'ailleurs connues de la plupart des lecteurs.

Nous renverrons à l'article *LOCOMOTIVE* pour tout ce qui touche à ces machines motrices.

V. Le mode de transport dont il vient d'être question est celui qu'on emploie sur la grande généralité des chemins de fer. Mais on a fait usage de divers autres systèmes, qui peuvent convenir dans des circonstances spéciales. Voyez, à cet égard, les articles *PLANS AUTOMOTEURS*, *SYSTÈME ARNOUX*, *SYSTÈME ATMOSPHÉRIQUE*.

VI. La construction des grandes gares a donné lieu à quelques problèmes nouveaux, et en particulier à celui qui consistait à couvrir de vastes espaces sans multiplier les points d'appui. Les comblés à la Polonceau ont résolu ce problème de la manière la plus heureuse (*Voy. POUTRES ARMÉES, FERMES*). On trouvera dans le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet tous les détails qui ne peuvent trouver place ici, et qui sont relatifs aux gares de voyageurs et de marchandises, avec leurs remises, leurs magasins et leurs ateliers, les heurtoirs où viennent buter les trains lorsqu'ils conservent encore un peu de vitesse à leur arrivée en gare, les salles d'attente, et tous les services accessoires, etc., etc.

VII. Quelques chiffres, empruntés à l'intéressant ouvrage de M. Amédée Guillemin, ayant pour titre *Simple explication des chemins de fer*, donneront une idée de l'importance qu'ont prise les voies ferrées. Sur les cinq grandes lignes de France, savoir les lignes du Nord, de l'Est, de Lyon, d'Orléans, et de l'Ouest, il y a eu en moyenne, pendant l'année 1860, environ 2130 trains par jour, représentant un parcours de 158 000 kilomètres. Le nombre des voyageurs a été de plus de 47 500 000, et le poids transporté à petite vitesse s'est élevé à près de 15 500 000 tonnes. Le nombre total de kilomètres parcourus a été d'environ 2 800 000.

La seule ligne de Paris à la Méditerranée employait à cette époque 943 locomotives, et 23 355 véhicules de toutes sortes. Dans la même année la dépense totale de l'exploitation du chemin de fer du Nord, comprenant l'administration centrale, et tous les frais matériels, a été de plus de 23 290 000 francs.

L'étendue des lignes exploitées à la même époque était, savoir :

Europe.....	52476 kil.	ayant coûté	20780 millions
Asie.....	2295	—	876 —
Afrique.....	371	—	112 —
Amérique sep- tentrionale..	54388	—	6770 —
Amérique méri- dionale.....	794	—	246 —
Australie.....	560	..	250 —
Total.....	110884	—	29028 —

Ce qui fait en moyenne 260 000 fr. par kilomètre.

Dans ce total, la France entre pour 2278 kilomètres, et l'Angleterre pour 16 786 kilomètres.

Le succès des voies ferrées tient à plusieurs causes : en premier lieu à la rapidité des communications. Un train *omnibus* marche à une vitesse de 30 kilomètres à l'heure, arrêts compris ; un train *express* fait de 45 à 50 kilomètres dans le même temps ; dans des circonstances exceptionnelles la vitesse peut être portée jusqu'à 70 et même 80 kilomètres. Or, les anciennes diligences n'ont jamais dépassé 15 kilomètres à l'heure, et le meilleur paquebot à vapeur n'atteint pas à une vitesse de 30 kilomètres. Une autre cause du succès des chemins de fer, au moins en ce qui concerne les voyageurs, est la facilité avec laquelle on trouve, pour ainsi dire à toute heure du jour, une occasion de transport, sans être obligé, comme autrefois, de retenir sa place longtemps à l'avance. L'affluence des voyageurs serait bien plus grande encore si les Compagnies parvenaient à abaisser leurs prix et à les rendre accessibles à un plus grand nombre de bourses. Quoiqu'il en soit, la rapidité et la fréquence des communications depuis l'établissement des chemins de fer, et la fusion d'intérêts qui en résulte, auront une influence incalculable sur les relations internationales et sur la prospérité des peuples.

CHEVAL DE BASSE PRESSION, l'une des unités employées pour évaluer la force nominale des machines à vapeur appliquées à la propulsion des navires. Elle représente environ 107 kilogrammètres par seconde sur l'arbre de couche, soit 130 kilogrammètres environ sur les pistons. (*Voy. FORCE NOMINALE.*)

CHEVAL NOMINAL, nom commun donné à diverses unités à l'aide desquelles on évalue la force nominale des machines à vapeur employées dans la navigation. (*Voy. FORCE NOMINALE.*)

CHEVAL-VAPEUR, unité adoptée dans l'industrie pour évaluer le travail continu des machines ; elle représente un travail de 75 kilogrammètres par seconde. Voici l'origine de cette unité. Lorsque les machines à vapeur commencèrent à se répandre en Angleterre, et à remplacer, dans l'exploitation des mines, les chevaux attelés au manège, les constructeurs durent garantir que le nouveau moteur remplacerait l'ancien ; et l'on fut ainsi conduit à comparer le travail de la machine au travail du cheval. Les observations de Watt et Boulton ayant montré que le travail des chevaux employés aux épuisements dans les mines pouvait être fixé à une valeur moyenne qui, en mesures françaises, revient à 74 ou 76 kilogrammètres, soit 75 kilogrammètres, par seconde, ce travail fut nommé *travail d'un che-*

val, et le travail des machines fut ainsi évalué en *chevaux*. Mais il s'en faut de beaucoup que le travail effectif d'un cheval soit l'équivalent du travail appelé *cheval* dans l'évaluation du travail des machines. En effet, en premier lieu, le travail continu du cheval s'élève au plus à 60 kilogrammètres par seconde ; si Watt et Boulton ont adopté 75 kilogrammètres, c'est que d'une part les animaux qu'ils avaient en vue étaient plus forts que ceux que l'on emploie généralement, et que d'autre part, suivant l'habitude anglaise, ces chevaux étaient *surmenés*, et que le travail exigé d'eux était supérieur à celui qu'ils auraient pu fournir d'une manière indéfinie sans que leur santé en souffrit. En second lieu, ces chevaux ne travaillaient que quatre à six heures par jour, tandis que le travail d'une machine peut se prolonger pendant les vingt-quatre heures. Pour obtenir exactement le nombre de chevaux effectifs dont le travail pourrait remplacer celui d'un cheval de machine, il faut d'abord multiplier 75 kilogrammètres par le nombre de secondes contenues dans vingt-quatre heures, c'est-à-dire par 86 400, ce qui donne 6 480 000 kilogrammètres pour le travail journalier d'un cheval de machine ; il faut ensuite diviser ce nombre par 1 166 400 kilogrammètres, travail journalier maximum d'un cheval effectif attelé au manège (*Voy. MOTEURS ANIMÉS*) ; le quotient exprimera le nombre de chevaux effectifs cherché. On trouve ainsi 5,55... ou un peu plus de $5 \frac{1}{2}$; c'est-à-dire que pour remplacer une machine de 10 chevaux, par exemple, il faudrait $5,5 \times 10$ ou 55 chevaux effectifs. De là la nécessité de distinguer, dans le langage, le cheval effectif du cheval de machine ; et c'est pourquoi l'on a donné à ce dernier le nom de *cheval de machine à vapeur*, ou, par abréviation, *cheval-vapeur*.

CHEVÊTRES, courtes pièces de charpente placées dans un plancher, de chaque côté d'une cheminée ; elles s'engagent par un bout dans le mur et s'appuient de l'autre sur une solive parallèle au mur. (*Voy. PLANCHER.*)

CHEVRE, appareil qui sert à élever les fardeaux. C'est une combinaison de la poulie et du treuil. Une chèvre (fig. 1) se compose de deux montants obliques réunis par des traverses ; à la partie supérieure est établie une poulie *p*, et à la partie inférieure est placé un treuil. La corde qui soutient le fardeau à soulever passe sur la poulie et va s'enrouler sur le treuil, qu'on manœuvre à l'aide de leviers *l*, *l* introduits dans les têtes du treuil, percées à cet effet de deux trous cylindriques se coupant à angle droit. Pour que la chèvre ne bascule pas sous l'action du poids qui la sollicite, on la retient à l'aide d'un câble fixé d'une part à son extrémité supérieure et de l'autre à un mur, à un arbre, ou de toute autre manière.

Pour manœuvrer l'appareil, un ouvrier agit de haut en bas sur l'un des leviers ; quand il a fait faire un quart de tour au treuil, un autre ouvrier engage le second levier dans la tête opposée du treuil, par le trou qui occupe à ce moment la partie supérieure, et agissant de haut en bas, fait faire au treuil au second quart de tour ; et ainsi de suite alternativement.

Si l'on néglige le frottement, il est facile d'apprécier l'effort nécessaire pour soulever le poids *P* sus-

courent en un même point, qui est le point de rencontre I des droites AF et OH. La droite IC est donc la direction de la réaction R' exercée en C, de la part du levier sur la pièce CB. Si R'' est la réaction du sol sur cette pièce, il faut pour son équilibre, que les directions de R' et de R'' aillent concourir sur la verticale de la charge P appliquée au point E. Or, R' prolongé rencontre en K la verticale du point E; la droite BK est donc la direction de la réaction R''. Les directions de toutes les forces étant ainsi connues, il est facile de déterminer leurs intensités, si la charge P est donnée. Décomposant la force P suivant les directions BK et CK, on aura les intensités des forces R'' et R'. Prenant alors la force R' en sens contraire, et la décomposant suivant les directions IR et IA, on aura les intensités des forces R et F.

Considérons maintenant la figure 3, dans laquelle l'équilibre a lieu de lui-même sans le secours de la force F. L'équilibre du levier exige que les forces qui s'exercent en O et en C, soient opposées, égales, et dirigées suivant la droite OC. L'équilibre du cheval exige que la force qui s'exerce en O et celle qui s'exerce en H de la part du sol (résultante de celles qui s'exercent sur les pieds des deux montants) soient aussi égales et opposées. Donc les trois points H, O et C doivent être en ligne droite comme nous l'avions annoncé. Dès lors si l'on prolonge la droite OH jusqu'à la rencontre en K avec la verticale du point E et qu'on joigne KB, ce sera la direction de R''. Pour avoir les intensités des forces R' et R'', il suffira de décomposer la force P suivant les directions KC et KB. La force R sera égale à R'.

CHEVRE DE LOMBARD. Voy. TREUIL DIFFÉRENTIEL.

CHEVRONS, pièces de charpente ordinairement parallèles à la ligne de plus grande pente d'un toit, et destinées à recevoir le lattis sur lequel on établit les tuiles, ardoises, etc., qui forment la toiture. (Voy. FERMES.)

CHEVRONS EMPANONS, pièces de charpente qui relient une noue (Voy. ce mot) au fattage. Ils peuvent être déladés ou déversés comme les empanons d'une CROUPE (Voy. ce mot).

CHOC, rencontre brusque de deux corps en mouvement, ou d'un corps en mouvement avec un corps en repos. Le choc est un phénomène complexe que la théorie n'aborde que dans quelques cas particuliers, suffisants d'ailleurs pour les besoins de la pratique.

I. On suppose d'abord que les deux corps aient deux plans de symétrie communs, et qu'ils se meuvent d'un mouvement de translation parallèle à l'intersection de ces deux plans; on dit dans ce cas que le choc est *direct*. Soit OX (fig. 1) l'intersection

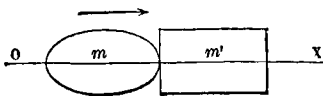


Fig. 1.

des deux plans de symétrie; soit m la masse du corps choquant, et v sa vitesse dirigée de O vers X; soit m' la masse du corps choqué, et v' sa vitesse

qui peut avoir un sens contraire ou le même sens, mais qui, dans ce dernier cas, doit être supposée moindre que v . Supposons v et v' de même sens pour fixer les idées. Dès que la rencontre des deux corps a lieu, ils se compriment mutuellement, les forces moléculaires répulsives prennent le dessus, par rapport aux forces moléculaires attractives, et agissent, celles du corps choquant pour accroître la vitesse du corps choqué, celles du corps choqué pour diminuer la vitesse du corps choquant; en sorte qu'au bout d'un certain temps, d'ailleurs extrêmement court, les deux corps ont pris une vitesse commune u . Ceci constitue la première période du choc. Il faut alors distinguer deux cas principaux, cas extrêmes dont aucun ne se réalise complètement dans la nature, mais entre lesquels les cas ordinaires sont toujours compris. On peut supposer que les corps soient complètement dépourvus d'élasticité, ou qu'ils soient complètement élastiques; nous examinerons successivement ces deux cas.

II. Si les deux corps sont totalement dépourvus d'élasticité, et qu'ils soient de la nature de ceux que l'on désigne sous le nom de *corps mous*, le choc se trouve terminé à la fin de la première période; ils conservent l'un et l'autre la déformation résultant de leur compression mutuelle, et ils ont à la fin du choc une vitesse commune u . Cette vitesse est facile à calculer. Supposons, en effet, que l'on applique au système le *principe des quantités de mouvement* ou de *l'effet de l'impulsion* (Voy. QUANTITÉ DE MOUVEMENT), et qu'on prenne pour axe la droite OX, on aura pour la quantité de mouvement finale $(m + m')u$, et pour quantité de mouvement initiale $mv + m'v'$; l'accroissement de quantité de mouvement sera donc

$$(m + m')u - (mv + m'v').$$

Or, si l'on fait abstraction de la pesanteur, ou si l'on suppose OX horizontal, auquel cas les projections des poids des deux corps sont nulles, il ne reste aucune force extérieure agissant sur le système; il n'est soumis qu'aux actions moléculaires, qui sont nécessairement mutuelles, en sorte que, transportées en un point quelconque de l'espace, elles se font équilibre deux à deux. La résultante de translation est donc nulle; il en est de même de son impulsion totale, et par conséquent la quantité ci-dessus écrite est égale à zéro; ce qui donne

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}, \quad [1]$$

c'est-à-dire que la vitesse commune après le choc est égale à la somme des quantités de mouvement initiales divisée par la somme des masses. Elle serait nulle si les vitesses v et v' étaient de sens contraire, et que les quantités de mouvement initiales des deux corps fussent égales en valeur absolue. Si les masses m et m' étaient égales, la vitesse finale u serait la moyenne arithmétique entre les vitesses initiales v et v' .

III. Dans le cas qui nous occupe, on fait voir aisément qu'il y a toujours *perte de puissance vive*, c'est-à-dire que la puissance vive après le choc est toujours moindre que la puissance vive initiale. On peut s'en rendre compte *a priori* en remarquant que la déformation qui s'opère en sens contraire des forces répulsives développées par chaque corps, représente un travail négatif, et que, par conséquent,

si l'on appliquait au système le principe de l'effet du travail (Voy. EFFET DU TRAVAIL), le second membre de l'équation étant négatif, il en serait de même du premier, et que, par conséquent, la puissance vive finale est moindre que la puissance vive initiale. Mais on peut aussi le vérifier par le calcul. Désignons par δ l'excès de la puissance vive initiale sur la puissance vive finale; tout se réduit à démontrer que δ est positif. Or, on a

$$\delta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}(m+m')u^2,$$

ou, en mettant par u sa valeur [1],

$$\delta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(mv + m'v')^2}{m+m'};$$

réduisant au même dénominateur et réduisant, on obtient

$$\delta = \frac{mm'(v-v')^2}{2(m+m')}, \quad [2]$$

quantité positive, quel que soit v' . Donc il y a bien perte de puissance vive. On voit, en même temps, que cette perte est proportionnelle au carré de la vitesse relative initiale $v-v'$. Elle ne serait nulle que si l'on avait $v=v'$; mais alors il n'y aurait plus de choc. Si l'on avait $v'=-v$ et $m=m'$, on trouverait $\delta = mv^2$. Or, dans ce cas, mv^2 serait précisément la puissance vive initiale $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$, ce qui montre qu'alors toute la puissance vive serait détruite par le choc; on aurait en effet, dans ce cas, $u=0$, et le système serait réduit au repos après le choc.

IV. Examinons maintenant le cas où les corps seraient parfaitement élastiques. Le choc ne serait plus terminé à sa première période; après cette période de compression, il y aurait une seconde période de détente, après laquelle les corps seraient revenus à leur forme primitive. Les forces répulsives continuant à agir pendant cette seconde partie du phénomène, la vitesse du corps choqué continuerait à croître dans le sens OX, tandis que celle du corps choquant continuerait à décroître. Mais ce qui caractérise surtout le cas qui nous occupe, c'est qu'il n'y aurait, après le choc, aucune perte de puissance vive. Car le travail positif des forces répulsives pendant la seconde période, où les corps reprennent leur forme, serait précisément égal au travail négatif de ces mêmes forces pendant la déformation (Voy. FORCES MUTUELLES); le travail total pendant le choc, c'est-à-dire depuis l'instant où les corps se rencontrent jusqu'à l'instant où ils se quittent, serait donc nul, et il n'y aurait aucune variation de puissance vive. C'est cette considération qui permet de déterminer les vitesses après le choc. Soient v_0 et v'_0 les vitesses initiales du corps choquant et du corps choqué, v et v' leurs vitesses finales; puisque la somme des puissances vives reste la même, on devra avoir

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'v'_0^2,$$

relation qu'on peut mettre sous la forme

$$m(v^2 - v_0^2) = m'(v'^2 - v'_0^2). \quad [3]$$

D'ailleurs on démontrerait, comme dans le cas des corps mous, que la somme des quantités de mouvement reste aussi la même; on a donc

$$mv + m'v' = mv_0 + m'v'_0,$$

relation que l'on peut écrire

$$m(v - v_0) = m'(v'_0 - v'). \quad [4]$$

Si l'on divise membre à membre, l'équation [3] par l'équation [4], on obtient

$$v + v_0 = v'_0 + v', \quad [5]$$

ou

$$v - v' = -(v_0 - v'_0),$$

relation que l'on peut énoncer en disant que la vitesse relative des deux mobiles n'a fait que changer de sens après le choc.

Des deux équations [4] et [5], on tire les valeurs de v et de v' , savoir :

$$v = \frac{m-m'}{m+m'}v_0 + \frac{2m'}{m+m'}v'_0, \quad [6]$$

$$v' = \frac{2m}{m+m'}v_0 - \frac{m-m'}{m+m'}v'_0. \quad [7]$$

Comme on a $v'_0 < v_0$, il est facile de reconnaître qu'on a toujours, si v'_0 est positif,

$$v < v_0 \text{ et } v' > v'_0;$$

car la formule [6] donne

$$v < v_0 \left(\frac{m-m'}{m+m'} + \frac{2m'}{m+m'} \right), \text{ ou } v < v_0.$$

et la formule [7] donne

$$v' > v'_0 \left(\frac{2m}{m+m'} - \frac{m-m'}{m+m'} \right), \text{ ou } v' > v'_0.$$

Le premier résultat subsisterait *a fortiori* si v'_0 était négatif. Quant au second, il subsisterait algébriquement, et par conséquent v' serait en valeur absolue inférieur à v_0 .

Dans le cas où les masses sont égales, les valeurs [6] et [7] se réduisent à

$$v = v'_0 \text{ et } v' = v_0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, il y a échange de vitesses entre les deux mobiles. Si le corps choqué était en repos, et qu'on eût $v'_0 = 0$, on trouverait $v = 0$ et $v' = v_0$,

c'est-à-dire que le corps choquant se substitue au corps choqué et devient immobile, tandis que celui-ci part avec la vitesse du corps choquant. Cet effet est facile à observer au jeu de billard.

Dans le cas où le corps choqué est primitivement en repos, on a

$$v = \frac{m-m'}{m+m'}v_0 \text{ et } v' = \frac{2m}{m+m'}v_0,$$

ce qu'on peut écrire

$$v = \frac{\frac{m}{m'} - 1}{\frac{m}{m'} + 1} v_0 \text{ et } v' = \frac{2\frac{m}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1} v_0.$$

Si la masse m' du corps choqué est très-grande par rapport à la masse m du corps choquant, on peut négliger la fraction très-petite $\frac{m}{m'}$, et il reste

$$v = -v_0 \text{ et } v' = 0,$$

c'est-à-dire que le corps choquant s'en retourne avec une vitesse égale et contraire à sa vitesse initiale, et qu'il y a pour ce corps une véritable réflexion de mouvement, tandis que le corps choqué demeure immobile sans être affecté par le choc.

V. Il y a ainsi réflexion du mouvement toutes les fois qu'un corps élastique de forme sphérique rencontre, sous une incidence quelconque, un plan fixe élastique lui-même. Soit M (fig. 2) le point de rencontre, MA = v_0 la vitesse initiale du corps choquant. Par cette direction, menons un plan perpendiculaire au plan fixe, et qui sera celui de la figure; soit XX l'intersection des deux plans. La vitesse v_0 peut être décomposée en deux autres : l'une MC = v_0 suivant XX, l'autre MB = v_0 perpendiculairement

corps se déplacent extrêmement peu pendant la durée du choc, et qui se réduisent à une force unique N. Le moment de cette force, par rapport à l'axe O, est

$$-Nr,$$

attendu qu'elle tend à faire tourner le corps en sens inverse de son mouvement réel, qui est regardé comme le sens positif des moments. On a donc, en vertu du principe cité,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Nr}{i}.$$

Multiplications par dt, et intégrons pour la durée θ du choc, nous aurons

$$\omega - \omega_0 = -\int_0^\theta \frac{Nr}{i} dt = -\frac{r}{i} \int_0^\theta N dt. \quad [8]$$

Si l'on désigne par m une masse qui, placée à la distance r de l'axe O aurait le même moment d'inertie que le corps choquant, on pourra écrire

$$i = mr^2,$$

et, en multipliant les deux membres de l'équation [8] par mr, on obtiendra

$$m(\omega - \omega_0)r = -\int_0^\theta N dt. \quad [9]$$

Considérons maintenant le corps choqué; il est soumis à la réaction N' du corps choquant, force égale et opposée à N; il est soumis aussi à l'action de la pesanteur; mais les forces qui se développent dans le choc sont tellement considérables, que l'on peut, sans erreur sensible, négliger vis-à-vis de N' le poids du corps choqué, bien qu'il puisse être très-grand; on aura donc, en vertu du principe déjà invoqué,

$$\frac{d\omega'}{dt} = +\frac{N'R}{I},$$

la somme des moments se réduisant au moment de N' par rapport à l'axe O', moment qui doit être affecté du signe +, puisque N' tend à faire tourner le corps choqué dans le sens de son mouvement véritable.— Multiplications par dt et intégrons de zéro à θ , en remarquant que la vitesse initiale du corps choqué est nulle, et en remplaçant N' par N qui lui est égal; nous aurons

$$\omega' = +\int_0^\theta \frac{NR}{I} dt = +\frac{R}{I} \int_0^\theta N dt. \quad [10]$$

Soit M une masse qui, placée à la distance R de l'axe O', aurait le même moment d'inertie que le corps choqué, on pourra poser

$$I = MR^2,$$

et, en multipliant les deux membres de l'équation [10] par MR, il viendra

$$M\omega'R = +\int_0^\theta N dt. \quad [11]$$

En ajoutant membre à membre les équations [9] et [11], on trouve

$$m(\omega - \omega_0)r + M\omega'R = 0.$$

Mais $\omega r = u$ et $\omega'R = v$;

et si l'on appelle v la vitesse initiale du point A considéré comme appartenant au corps choquant, on a $\omega_0 r = v$. L'équation à laquelle on vient de parvenir peut donc s'écrire

$$m(u - v) + Mu = 0, \text{ d'où } u = \frac{mv}{M + m}, \quad [12]$$

relation analogue à celle qu'on déduirait de l'équa-

tion [1] pour le cas où le corps choqué est primitivement en repos.

VII. A l'aide de cette valeur et des relations $\omega r = \omega'R = u$, il serait facile de calculer la perte de puissance vive due au choc. On la trouverait égale à

$$\frac{1}{2} v^2 \cdot \frac{mM}{M + m},$$

valeur tout à fait analogue à celle qui est exprimée par l'équation [2]; car le corps choqué étant primitivement en repos, la vitesse relative est ici la vitesse du corps choquant.

Mais, dans les questions industrielles auxquelles cette théorie s'applique, la vitesse angulaire ω_0 n'est pas ordinairement connue, non plus que ω, r ou v ; ce qu'il importe d'ailleurs le plus d'obtenir n'est point la perte de puissance vive totale, mais seulement la perte de puissance vive du corps choquant. C'est ce qui arrive notamment dans le cas d'un marteau de forge mis en mouvement par une roue à cames.

La valeur absolue de cette perte de puissance vive du corps choquant est

$$\frac{1}{2} i \cdot (\omega_0^2 - \omega^2).$$

Dans l'impossibilité où l'on se trouve de déterminer expérimentalement ω_0 ou ω , on admet que la moyenne arithmétique entre ces deux vitesses angulaires avant et après le choc est sensiblement égale à la vitesse angulaire de régime, déduite du nombre de tours que fait l'arbre à cames par minute. Soit Ω cette vitesse angulaire de régime, on pose

$$\omega_0 + \omega = 2\Omega. \quad [13]$$

La relation [12], divisée par r, donne

$$\omega = \omega_0 \frac{m}{M + m}.$$

De ces deux relations on tire sans peine

$$\omega_0 = 2\Omega \frac{m + M}{2m + M} \text{ et } \omega = 2\Omega \cdot \frac{m}{2m + M},$$

d'où $\omega_0 - \omega = 2\Omega \cdot \frac{M}{2m + M}$. [14]

Multipliant les relations [13] et [14] membre à membre, on obtient

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 4\Omega^2 \cdot \frac{M}{2m + M},$$

et par conséquent la perte de puissance vive δ' du corps choquant a pour valeur

$$\delta' = \frac{1}{2} i (\omega_0^2 - \omega^2) = 2\Omega^2 i \cdot \frac{M}{2m + M}.$$

Soit V la vitesse de régime du point situé à la distance r de l'axe O, on a

$$V = \omega r;$$

d'ailleurs

$$i = mr^2.$$

A l'aide de ces relations, on met la valeur de δ' sous la forme

$$\delta' = v^2 \cdot \frac{2mM}{2m + M} = \frac{1}{2} m v^2 \cdot \frac{4M}{2m + M}, \quad [15]$$

formule facile à retenir, et qui montre que la perte de puissance vive du corps choquant est une fraction de sa puissance vive de régime, marquée par le rapport

$$\frac{4M}{2m + M}. \text{ Or ce rapport peut s'écrire } \frac{4}{2 \cdot \frac{m}{M} + 1}, \text{ et,}$$

sous cette forme, on voit qu'il est d'autant plus pe-

tit que la masse fictive m , relative au corps choquant, est plus grande par rapport à la masse fictive M , relative au corps choqué: ce qui revient à dire que la perte de puissance vive du corps choquant est d'autant moindre que son moment d'inertie est plus grand par rapport à celui du corps choqué.

(Voy. le Cours de M. Bélanger à l'École des ponts et chaussées.)

Si l'on avait à considérer le choc d'un corps animé d'un mouvement de rotation contre un corps animé d'un mouvement de translation rectiligne, comme cela a lieu dans le cas du choc d'une came contre le mentonnet d'un PILON (Voy. ce mot), on aurait pour le corps choquant l'équation [9]

$$m(\omega - \omega_0)r = - \int_0^\theta N dt. \quad [16]$$

Pour le corps choqué on aurait, en nommant M sa masse, l'équation

$$\frac{du}{dt} = + \frac{N}{M}, \quad \text{d'où} \quad Mu = + \int_0^\theta N dt. \quad [17]$$

Faisant $\omega_0 r = v$ et remarquant qu'on a $\omega r = u$, on écrirait l'équation [16] sous la forme

$$m(u - v) = - \int_0^\theta N dt,$$

et, en comparant avec [17], on en conclurait

$$m(u - v) + Mu = 0,$$

d'où l'on déduirait, par les mêmes moyens que ci-dessus, pour la perte de puissance vive de la roue à cames

$$\delta' = \frac{1}{2} m v^2 \cdot \frac{4m}{2m + M}; \quad [18]$$

équation identique à l'équation [15], mais dans laquelle M représente, non plus une masse fictive, mais la masse même du corps choqué.

CHOC DUNE VEINE CONTRE UN PLAN. Lorsqu'une veine fluide parabolique rencontre un plan fixe, elle exerce sur ce plan une pression que l'on peut calculer. Pour cela on applique au fluide le théorème général des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (Voy. ce mot).

I. Soit ABCDEF (fig. 1) une veine fluide rencontrant un plan CE, que nous supposerons assez

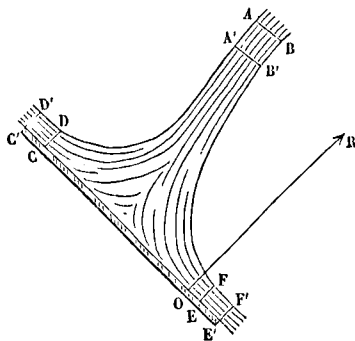


Fig. 1.

étendu pour qu'après s'y être épanouie la veine s'écoule sur tout son pourtour par filets sensiblement parallèles au plan. Admettons que le mouvement soit permanent; et concevons que le fluide

compris entre la section AB de la veine et la section circulaire CD EF perpendiculaire au plan, soit venue au bout d'un temps très-court θ occuper la position A'B'C'D'E'F'. Soit OR la direction de la normale au plan fixe; désignons par R la réaction du plan sur la veine, force qui a une direction parallèle à OR. Soit P le poids du volume fluide considéré; Π le poids du mètre cube de ce fluide; Ω l'aire de la section AB; U la vitesse moyenne dans cette section, α l'angle que sa direction fait avec OR; soit enfin β l'angle du plan fixe avec l'horizon. Le volume écoulé par la section AB dans le temps θ est $\Omega U \theta$, et sa masse a pour valeur $\frac{\Pi \Omega U \theta}{g}$; sa

quantité de mouvement projetée sur la direction OR donne donc $-\frac{\Pi \Omega U^2 \theta \cos \alpha}{g}$. Quant à la quantité

de mouvement du fluide écoulé par le pourtour CDEF dans le même temps, elle est parallèle au plan, et conséquemment sa projection sur OR est nulle. D'ailleurs la quantité de mouvement du fluide compris entre A'B' et CD EF, à cause de la permanence du mouvement, est la même à l'instant initial et au bout du temps θ . L'accroissement total de la quantité de mouvement projetée sur OR est donc

$$0 + \frac{\Pi \Omega U^2 \theta \cos \alpha}{g}.$$

L'impulsion de la force R est $+ R\theta$. Le poids P projeté sur OR donne $- P \cos \beta$; et son impulsion est $- P \cos \beta \theta$. Soit \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique par mètre, et à l'aire du plan; la pression de l'atmosphère sur toute la surface de la veine, y compris la section AB sur laquelle elle s'exerce aussi puisque le mouvement est parabolique (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE), est égale à celle qui s'exercerait sur la projection de cette surface, c'est-à-dire sur l'aire A; elle a donc pour valeur $\mathcal{P}_0 A$, et son impulsion est $-\mathcal{P}_0 A \theta$. Par suite, en appliquant le théorème des quantités de mouvement, on a

$$\frac{\Pi \Omega U^2 \theta \cos \alpha}{g} = R\theta - P \cos \beta \theta - \mathcal{P}_0 A \theta,$$

$$\text{d'où} \quad R - \mathcal{P}_0 A = P \cos \beta + \frac{\Pi \Omega U^2}{g} \cos \alpha. \quad [1]$$

Le premier membre est l'excès de la réaction totale du plan fixe sur celle qu'il exercerait s'il n'avait à supporter que la pression atmosphérique; c'est ce qu'on appelle ordinairement la réaction du plan. Elle est égale et opposée à la pression que la veine exerce sur le plan; celle-ci est donc exprimée aussi par le second membre de l'équation [1].

II. Si le plan est horizontal et que la veine soit verticale, on a $\beta = 0$ et $\alpha = 0$; la pression exercée sur le plan est donc

$$P + \frac{\Pi \Omega U^2}{g}.$$

On voit qu'elle est égale au poids du fluide ABCDEF plus le poids d'une colonne du même liquide qui aurait pour base la section de la veine et pour hauteur le double de la hauteur due à la vitesse dans cette section. Par conséquent, si l'on prolongeait la veine en amont sous la forme d'un cylindre ayant pour base Ω et pour hauteur $2 \cdot \frac{U^2}{2g}$, le poids du fluide compris dans la veine ainsi prolongée exprimerait la pression supportée par le plan.

III. On peut démontrer que le second membre de

l'équation [1], c'est-à-dire l'expression de la pression exercée par la veine sur le plan, ne dépend pas de la position de la section AB supposée faite dans la veine, pourvu qu'elle soit faite dans la partie de cette veine où le mouvement est parabolique.

Menons en effet par le point O (fig. 2) la droite OU en sens contraire de la vitesse U, et la verticale ascendante OV, on aura UOR = α , VOR = β ; nous désignerons VOU par γ . Soit en outre A l'angle dièdre des plans VOU et VOR. L'angle trièdre en O donnera la relation

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A,$$

et, par conséquent, en appelant p la pression exercée sur le plan, on aura, en vertu de la relation [1], et parce que le produit ΩU repré-

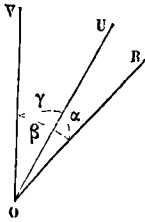


Fig. 2.

sente la dépense Q,

$$p = P \cos \beta + \frac{\Pi Q}{g} U (\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A). \quad [2]$$

Or, le mouvement dans la veine étant parabolique, la projection horizontale U sin γ de la vitesse est une quantité constante; d'ailleurs l'angle A est constant aussi; donc le dernier terme du second membre, c'est-à-dire $\frac{\Pi Q}{g} U \sin \gamma \cdot \cos A$, est constant.

Les deux autres termes peuvent s'écrire

$$\cos \beta \left(P + \frac{\Pi Q}{g} U \cos \gamma \right).$$

Le facteur $\cos \beta$ est constant. Considérons la quantité entre parenthèses et supposons qu'on remplace la section AB par la section A'B' (fig. 1) est en est distante de U θ . Le poids P diminuera de $\Pi Q U \theta$.

Dans le terme $\frac{\Pi Q}{g} U \cos \gamma$, le facteur U cos γ représentant la projection verticale de la vitesse, ce facteur croîtra au contraire de $g\theta$; le terme considéré croîtra donc de $\frac{\Pi Q}{g} \cdot g\theta$, ou de $\Pi Q \theta$, ou encore de $\Pi Q U \theta$. Ainsi les deux termes entre parenthèses varieront en sens contraire de quantités égales; donc la valeur de cette parenthèse est constante. Donc en définitive la valeur de p est constante elle-même.

IV. Si le plan CE n'avait pas une assez grande étendue pour que la veine pût s'y épanouir complètement et couler par filets parallèles à ce plan, la pression exercée par la veine serait moindre. En effet, les filets s'écoulant dans une direction oblique au plan, la quantité de mouvement due aux volumes CD D'C' et EFFE' (fig. 3),

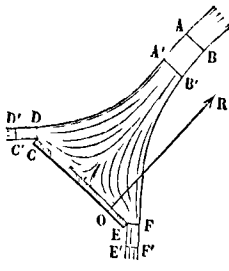


Fig. 3.

projetée sur la direction OR, donnerait une projection négative, dont la valeur absolue se retrancherait de

$$\frac{\Pi Q U^2 \theta \cos \alpha}{g};$$

et la valeur de R — $\Phi_0 A$ ou de p serait moindre que celle qui est exprimée par l'équation [1].

Si, au contraire, comme l'indique la figure 4, le plan avait des rebords, et que l'eau en quittant le plan fût contrainte, après avoir coulé parallèlement à ce plan, de revenir sur ses pas dans une direction plus ou moins rapprochée de OR, la pression exercée par la veine sur le plan serait plus grande. Car la quantité de mouvement due aux volumes CD D'C' et EFFE', projetée sur OR, donnerait une

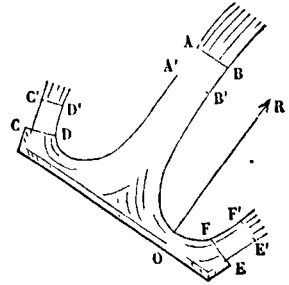


Fig. 4.

quantité positive qui s'ajouterait à $\frac{\Pi Q U^2 \theta \cos \alpha}{g}$, et augmenterait la pression p . (Voy. le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

CHRONOMÈTRE (de χρόνος, temps, et de μέτρον, mesure), instrument de précision qui sert à la mesure du temps. Les parties principales d'un chronomètre sont le *moteur*, le *rouage*, le *régulateur*, l'*échappement* et le mécanisme du *remontage*.

Le *moteur* est un ressort d'acier, enroulé en spirale, et renfermé dans un cylindre que l'on nomme le *barillet*; l'une des extrémités du ressort est fixée à l'axe du cylindre, tandis que l'autre est attachée en un point de sa surface; il en résulte que lorsque le ressort a été *armé*, c'est-à-dire enroulé autour de l'axe, en se détendant il fait tourner le barillet en sens contraire autour de l'axe qui reste fixe. La force exercée par ce moteur est nécessairement variable : elle diminue à mesure que le ressort se détend. Mais on a reconnu qu'on pouvait resserrer ses variations entre d'étroites limites en donnant au ressort une assez grande longueur pour que, dans un intervalle d'un jour, il ne se détendît que d'une faible quantité; si l'on remonte le chronomètre toutes les vingt-quatre heures (nous dirons plus loin comment), on est alors sûr que le moteur sera demeuré à peu près constant. C'est sur ce principe que sont construits les chronomètres modernes. Pour corriger les inégalités du moteur, quelques constructeurs emploient encore l'ingénieux mécanisme auquel on donne le nom de *fusée*. C'est une sorte de roue tronconique, interposée entre le rouage et le barillet, et liée à ce dernier par une chaîne qui peut s'enrouler et se dérouler de l'un sur l'autre. La surface de la fusée présente une sorte d'hélice conique sur laquelle la chaîne s'applique, et qui a été déterminée de manière que le bras de levier au bout duquel agit la chaîne soit toujours en raison inverse de la force du ressort. La tension que celui-ci communique à la chaîne reste variable, mais le *MOMENT* (Voy. ce mot) de cette tension reste constant, et c'est la condition suffisante pour que l'effet produit soit le même que celui d'une force constante agissant à une distance constante de l'axe. On a renoncé à la fusée, malgré ses avantages incontestables, parce qu'elle exige

un axe de plus et tend ainsi à augmenter les frottements; parce que la rupture de la chaîne est un accident assez fréquent qui met le chronomètre hors de service; parce que la suppression de la

du système se compose alors d'une série de mouvements variés très-courts, mais de même durée, et cette durée peut être prise pour unité dans la mesure du temps. C'est le régulateur qui est chargé

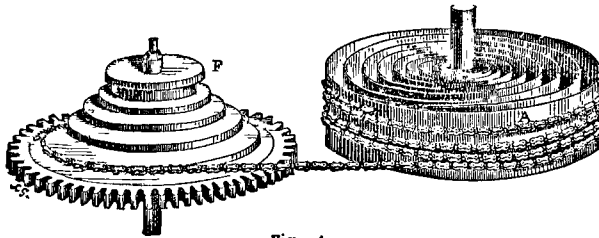


Fig. 1.

fusée permet l'emploi d'un ressort plus faible; et pour plusieurs autres motifs de moindre importance.

Le rouage se compose d'une série de roues dentées, dont chacune engrène avec le pignon monté sur l'axe de la roue suivante. Les axes de ces roues sont maintenus par des *platines* parallèles au cadran, ou par une platine voisine du cadran et par des *ponts* qui tiennent lieu de la seconde. Une première roue est montée sur l'axe de la fusée, ou sur le barillet lui-même, s'il n'y a pas de fusée. Elle engrène avec le pignon d'une seconde roue, appelée *grande moyenne* ou *roue des minutes*; celle-ci conduit à son tour le pignon d'une troisième roue appelée *petite moyenne*, qui engrène avec le pignon d'une quatrième roue, appelée *roue des secondes*; celle-ci conduit le pignon d'une cinquième roue, appelée *roue d'échappement*, et dont la fonction sera expliquée plus loin. Toutes ces roues sont situées dans des plans parallèles, et sont comprises entre les deux platines, ou entre la platine et les ponts. L'axe de la roue des minutes, qui se prolonge hors du cadran, porte l'aiguille des minutes; l'axe de la roue des secondes porte de même l'aiguille des secondes, qui se meut sur un cadran séparé. Quant à l'aiguille des heures, elle est fixée à un canon dans lequel passe l'axe de la roue des minutes, et qui peut tourner à frottement doux autour de cet axe. Sur ce canon est montée la *roue des heures*, ou *roue de cadran*, qui est conduite par le pignon d'une roue particulière appelée *roue de renvoi*, laquelle est conduite à son tour par un pignon spécial monté sur l'axe de la roue des minutes, et qu'on nomme le *pignon de chaussée*. Ces roues et leurs pignons sont placés entre le cadran et la platine, et forment ce qu'on appelle la *minuterie*. Toutes les parties du rouage sont disposées de manière à occuper le moins de place possible. (Voir plus loin fig. 6). Nous dirons plus loin comment on détermine le nombre des dents des roues et des ailes des pignons.

Si le mécanisme n'était soumis qu'à l'action du moteur et aux frottements occasionnés par les engrenages et par la rotation des axes, tout le système prendrait un mouvement accéléré à mesure que le ressort irait en se détendant. Pour obtenir l'uniformité de mouvement nécessaire dans la mesure du temps, il faut pouvoir interrompre l'action du moteur à des intervalles de temps égaux, de telle sorte qu'à chaque reprise les conditions soient redevenues les mêmes qu'au départ; le mouvement

d'interrompt ainsi, à des intervalles de temps égaux, l'action du moteur. Il se compose d'un *balancier* ou volant circulaire, entraîné par les oscillations d'un ressort d'acier roulé en hélice (on donne improprement à ce ressort le nom de *spiral*, par analogie avec le régulateur des montres ordinaires, lequel est mû par un ressort roulé effectivement en spirale). Afin que le chronomètre ne soit pas dérangé par les mouvements brusques aux-

quels il peut être soumis, on donne aux oscillations du régulateur une grande amplitude, 360 et jusqu'à 450 degrés; en même temps, on règle la force et les dimensions du spiral, de manière qu'il fasse 4 ou 5 demi-oscillations par seconde; la force vive du volant est alors assez considérable pour que le mouvement général du système ne soit pas sensiblement influencé par les mouvements instantanés qu'on lui imprime en transportant la machine. Il faut aussi employer tous les moyens possibles pour que les oscillations restent sensiblement isochrones malgré les variations de température, et malgré l'accroissement de résistance que peut produire l'épaississement des huiles employées à lubrifier les pivots. Or, d'une part, Pierre Leroy a démontré qu'il existe pour chaque ressort une longueur pour laquelle la durée des oscillations est à peu près indépendante de l'amplitude; en sorte qu'une fois cette longueur déterminée, si les oscillations viennent à varier d'amplitude, elles conservent néanmoins leur isochronisme. Quant à l'influence de la température, on la combat en disposant le balancier de manière qu'il tende à se rapprocher de l'axe quand la température s'élève, et à s'en éloigner au contraire quand la température s'abaisse; pour un même travail moteur, ou pour une même force vive, la vitesse angulaire sera donc plus grande dans le premier cas que dans le second (*Voy. FORCE VIVE, RAYON DE GYRATION*); il en résulte que lorsque la température en s'élevant tendra à allonger le spiral et à rendre les oscillations plus lentes, cet effet sera combattu par la contraction du balancier, et que l'effet contraire aura lieu quand la température s'abaissera. Pour obtenir ces effets, voici la disposition donnée au balancier, qui prend alors le nom de *balancier compensateur*. Il se compose de deux arcs AC et BD (fig. 2), un peu moindres qu'une demi-circumférence, et formés chacun de deux métaux inégalement dilatables; la lame extérieure est en laiton, et la lame intérieure en acier trempé; les extrémités A et B de ces arcs sont fixées aux extrémités d'un diamètre; vers les extrémités libres C et D sont placées des masses métalliques *m, m'* qui peuvent glisser le long de l'arc. Quand la température s'élève, le laiton étant plus dilatable que l'acier, les arcs se courbent vers l'intérieur; les extrémités C et D se rapprochent du centre ainsi que les masses *m, m'*, appelées *masses compensatrices*. L'inverse a lieu quand la température s'abaisse.

Des vis A, B, V, V', qu'on peut éloigner ou rapprocher du centre, servent à régler la compensation d'une manière exacte.

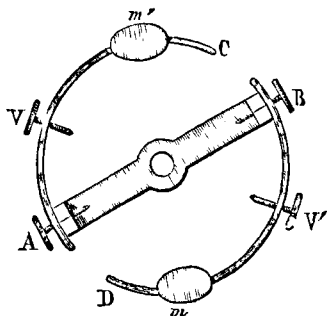


Fig. 2.

Il faut maintenant expliquer comment les oscillations du régulateur interrompent et rétablissent l'action du moteur. Cet effet est obtenu par l'intermédiaire de l'échappement, qui a, en outre, pour fonction de restituer au régulateur la force vive qu'il perd à chaque interruption. Il existe un grand nombre de systèmes d'échappement; celui qui est employé dans les chronomètres les plus parfaits est l'échappement libre, dont le principe est dû à Pierre Leroy, mais qui a reçu divers perfectionnements. Nous décrirons d'abord l'échappement d'Arnold, l'un des plus fréquemment employés dans les instruments de haute précision, particulièrement en Angleterre: il est représenté fig. 3. A est la roue

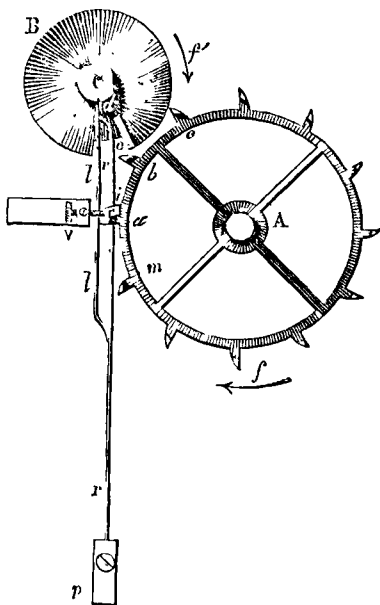


Fig. 3.

d'échappement, qui tourne dans le sens indiqué par la flèche *f*: B est un disque, nommé *cercle d'échappement*, monté sur l'axe du régulateur et participant à son mouvement oscillatoire; un rouleau C, monté sur le même axe, est armé d'un doigt *d* en

Pierre fine, dont la fonction sera expliquée tout à l'heure. Un ressort *rr*, nommé *détente-ressort*, fixe en *p* à l'une de ses extrémités, porte en un point de sa longueur un talon *t* en pierre fine, contre lequel vient reposer l'une des dents *a* de la roue; sur le ressort *rr* est fixé, par une de ses extrémités, un autre ressort plus flexible *ll*, ordinairement en or. — La dent *a* étant arrêtée par le talon *t*, on conçoit que l'action du moteur se trouve momentanément suspendue; c'est ce qui constitue le *repos*. Dans la demi-oscillation du balancier qui a lieu dans le sens de la flèche *f'*, le doigt *d* soulève l'extrémité du petit ressort *ll*, sans produire d'autre effet; mais, à la demi-oscillation suivante, qui a lieu en sens contraire, le doigt *d* rencontrant l'extrémité du petit ressort *ll*, entraîne l'ensemble des deux ressorts; le talon *t* s'écarte vers le centre de la roue, et la dent *a* se dégage; c'est ce qui constitue l'échappement. La roue cédant à l'action du moteur tourne dans le sens de la flèche *f*; c'est ce qui constitue la *chute*. Dans ce mouvement, la dent *b* vient frapper l'entaille *ee* du cercle d'échappement (ordinairement garnie de pierre fine), l'entraîne pendant une partie de sa course et, par le choc, restitue au régulateur la force vive qu'il avait perdue; c'est ce qu'on appelle la *levée*. Pendant ce temps, la détente-ressort revient par son élasticité à sa position primitive, qu'elle ne peut dépasser à cause d'une vis *v* contre laquelle le talon *t* vient buter; ce talon se trouve ainsi en mesure d'arrêter la dent suivante *m*; et le même jeu recommence. On voit qu'il échappe une dent à chaque oscillation complète, aller et retour, du régulateur. — Le rayon du cercle d'échappement B doit être égal à la distance entre les extrémités de deux dents consécutives de la roue; mais la corde qui joint les points d'intersection de la circonférence du disque B avec celle qui passe par les extrémités des dents doit être un peu plus petite que le rayon du disque, pour qu'il y ait le jeu nécessaire. L'entaille *ee* doit être dirigée vers le centre du disque. Il en est de même du petit ressort *ll*; mais il vaut mieux que son prolongement passe un peu à gauche du centre, afin que le contact entre le doigt *d* et l'extrémité de ce ressort se fasse un peu avant la ligne des centres (Voy. ENGRENAGES) dans la demi-oscillation qui produit l'échappement de la dent. Il faut enfin, au moment où la dent *a* échappe, la dent *b* se trouve à une distance suffisante de l'entaille *ee*, afin qu'il y ait assez de chute pour produire le choc nécessaire.

L'échappement est la partie la plus délicate du chronomètre; c'est de l'exacte proportion de ses parties et du soin apporté à son exécution que dépend en grande partie la précision extrême qu'on recherche dans les instruments de ce genre.

On emploie encore assez fréquemment l'échappement d'Earnshaw; c'est encore un échappement libre à ressort, fondé sur les mêmes principes que celui d'Arnold; mais la disposition est inverse, c'est-à-dire que la dent échappe quand la détente-ressort s'écarte du centre de la roue, et que la dent appuie sur le talon *t* dans le sens de *t* vers *p*. Cette disposition a été critiquée par les horlogers instruits.

On paraît revenir aujourd'hui aux échappements libres à pivot, c'est-à-dire au système de Pierre Leroy perfectionné. Nous décrirons, pour en donner

une idée, l'échappement de M. Henri Robert. La détente-ressort des échappements ci-dessus est remplacée par un levier *rr* (fig. 4 et 5), monté sur un axe ou pivot *pp*; un ressort spiral *R* fixé par

chronomètre, ou du moins l'une des dispositions qui ont été fréquemment adoptées, et qui varient nécessairement selon le goût du constructeur ou selon les conditions particulières qu'il s'impose. A est le

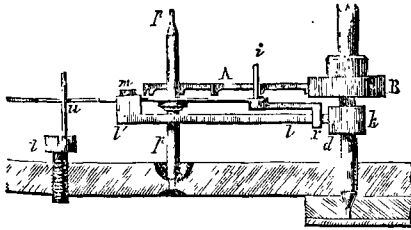


Fig. 4.

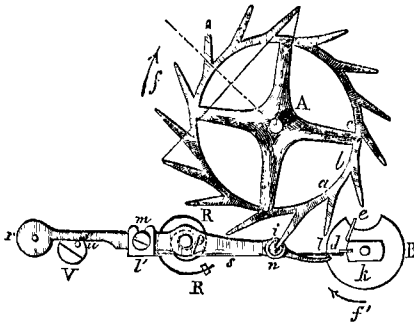


Fig. 5.

une de ses extrémités à ce pivot et par l'autre à la platine, ramène le levier contre une goupille *u*, portée par la tête d'une vis *V*. En un point *m* du levier *rr* est fixé un petit ressort en or *ll*; les figures montrent comment l'extrémité du levier se recourbe en équerre pour venir descendre en avant du ressort *ll*. En un autre point *n* du levier s'élève un demi-cylindre *i* qui joue le rôle du talon *i* des échappements précédents; c'est contre la partie plane de ce demi-cylindre qu'appuie l'extrémité de la dent *a* de la roue d'échappement. Un disque ou cercle d'échappement *B* porte un rubis *e* destiné à recevoir l'action de la dent pendant la levée. Une pièce d'acier *k*, montée sur le même axe, porte un doigt *d* qui a la même fonction que dans les échappements qui précèdent. — La roue d'échappement tendant à tourner dans le sens de la flèche *f*, est arrêtée par le demi-cylindre *i*; pendant la demi-oscillation du régulateur qui a lieu dans le sens de la flèche *f'*, le doigt *d* a soulevé le petit ressort *ll* sans autre effet, et le repos a continué; mais, à la demi-oscillation suivante, qui a lieu en sens contraire, le doigt *d*, en agissant sur le ressort *ll*, entraîne le levier *rr*, qui tourne autour de son pivot; le demi-cylindre *i* s'éloigne, et la dent *a* échappe; la dent *c* vient frapper sur la levée *e* et rendre au régulateur la force vive qu'il a perdue; puis le levier *rr*, ramené contre la goupille *u* par l'action du ressort spiral *R*, reprend sa position primitive, arrête la dent *b*, et le même jeu recommence. Le lecteur trouvera la description plus complète de cet ingénieux échappement dans le *Bulletin de la Société d'encouragement*, année 1846.

La figure 6 représente le plan ou calibre d'un

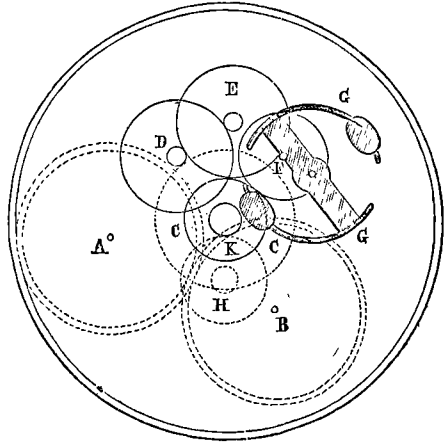


Fig. 6.

barillet, *B* la fusée, *CC* la grande moyenne, ou roue des minutes, *D* la petite moyenne, *E* la roue des secondes, *F* la roue d'échappement, *GG* le balancier compensateur, *H* la roue de renvoi, et *K* la roue de cadran ou des heures. On n'a point indiqué l'échappement sur le dessin, non plus que les ponts, barrettes, etc., dans lesquels s'engagent les extrémités des axes de rotation. Le calibre est évidemment un peu plus simple quand il n'y a pas de fusée.

Pour calculer le nombre de dents qu'il faut donner à chaque roue, on se donne d'abord le nombre d'oscillations que doit faire le balancier par seconde. Supposons qu'il doive faire 5 demi-oscillations, que la roue d'échappement ait 15 dents et son pignon 8 ailes. Le balancier faisant $5 \times 60 \times 60$ ou 18000 demi-oscillations par heure, la roue d'échappement fera $\frac{18000}{15 \times 2}$ ou 600 tours dans le même temps; mais

la roue des secondes doit faire 60 tours par heure; il faut donc que le nombre de ses dents soit 10 fois plus grand que celui du pignon de la roue d'échappement, c'est-à-dire 8×10 ou 80. On se donne également le nombre des ailes du pignon de la roue des secondes et du pignon de la petite moyenne; soient respectivement 10 et 12 ces deux nombres; et soient *x* et *y* les nombres de dents de la roue des minutes et de la petite moyenne. Quand la roue des minutes fera un tour, la petite moyenne en fera un nombre marqué par $\frac{x}{10}$; et quand la petite moyenne fera un tour, la roue des secondes en fera un nombre marqué par $\frac{y}{12}$; par conséquent, quand la roue des minutes fera un tour, la roue des secondes en fera un nombre marqué par $\frac{x}{10} \times \frac{y}{12}$. Mais ce nombre doit être égal à 60; on doit donc avoir

$$xy = 60 \times 10 \times 12 = 7200.$$

On prendra pour *x* et *y* deux facteurs de 7200 qui ne diffèrent pas trop l'un de l'autre, par exemple

$x=90$ et $y=80$. On se donne de même le nombre des ailes du pignon de chaussée monté sur l'axe de la roue des minutes, et le nombre des ailes du pignon de renvoi ; soient 8 et 6 ces deux nombres, et soient x et u les nombres de dents de la roue des minutes et de la roue de cadran. Quand la roue de minutes fera un tour, la roue de renvoi en fera un nombre marqué par $\frac{8}{x}$; et quand la roue de renvoi fera un tour, la roue de cadran en fera un nombre marqué par $\frac{6}{u}$; par conséquent quand la roue des minutes fera un tour, la roue de cadran en fera un nombre marqué par $\frac{8}{x} \times \frac{6}{u}$; mais ce nombre doit être égal à $\frac{1}{12}$, puisque la roue des heures ne fait qu'un tour quand la roue des minutes en fait 12 ; on devra donc avoir $\frac{8 \times 6}{x \cdot u} = \frac{1}{12}$,
ou $xu = 8 \times 6 \times 12 = 576$.

On pourra prendre $x=24$ et $u=24$. Enfin on se donnera le nombre des ailes du pignon de la roue des minutes qui engrène avec la fusée, et le nombre de tours que celle-ci doit faire dans 24 heures ; soit 12 le nombre des ailes du pignon, 3 le nombre de tours de la fusée, et v le nombre des dents de la roue montée sur l'axe de cette fusée. Quand la fusée fera un tour, la roue des minutes en fera un nombre marqué par $\frac{v}{12}$; dans 24 heures le nombre

des tours de la roue des minutes sera donc $\frac{3v}{12}$; mais ce nombre doit être égal à 24, puisque la roue des minutes fait un tour par heure ; on devra donc avoir $\frac{3v}{12} = 24$, d'où $v=96$. La recherche du nombre des dents du rouage est, comme on le voit, un problème indéterminé, que l'on peut toujours résoudre d'une manière simple. (Voy. ROUAGE.)

Il reste à décrire le mécanisme du *remontage*. Dans les chronomètres qui n'ont pas de fusée, il suffit pour remonter l'instrument de faire tourner, à l'aide de la clef, l'axe du barillet, afin de tendre le ressort en l'enroulant autour de cet axe ; cette opération n'arrête pas la marche du chronomètre, attendu que pendant le remontage le ressort ne cesse pas d'agir sur le barillet ; il suffit qu'une roue A ROCHET (Voy. ce mot), montée sur l'axe dont il s'agit, l'empêche de revenir en sens contraire de la rotation qu'on lui imprime. Mais lorsqu'il y a une fusée, il faut, pour opérer le remontage sans arrêter le chronomètre, employer une disposition spéciale, qui est représentée fig. 7. A est la roue dentée qui a pour axe l'axe de la fusée ; B et C sont deux roues à rochet ayant aussi le même axe ; la dernière fait corps avec la fusée. Dans l'état ordinaire, la fusée cédant à la tension de la chaîne, la roue C tourne dans le sens de la flèche, en entraînant la roue B par l'intermédiaire du doigt D ; la roue B fait céder le doigt D', et la roue A ne serait pas entraînée, si un ressort RS, fixé en R à la roue B et en S à la roue A, ne déterminait le mouvement de cette dernière. Mais lorsque, la chaîne étant entièrement déroulée, on veut remonter le chronomètre, c'est-à-dire enrouler de nouveau la chaîne sur la fusée,

pour faire tourner le barillet en sens contraire et enrouler ou *armer* le ressort moteur, on agit, à l'aide d'une clef, sur l'axe de la fusée, et l'on fait tourner la roue C en sens contraire de la flèche ;

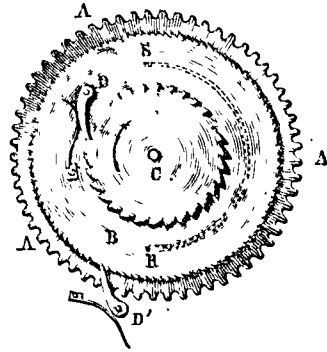


Fig. 7.

le doigt D cède, et la roue B se trouve soustraite à l'action directe du moteur ; retenue d'ailleurs par le doigt D', elle ne pourrait tourner en sens contraire, elle s'arrête donc un moment ; mais la tension du ressort RS suffit pour entretenir pendant quelques instants le mouvement de la roue A ; et, par l'action de cette force auxiliaire, le mouvement général du rouage continue pendant le remontage. Pour cette raison le ressort RS porte le nom de *ressort d'entretien*.

Lorsque la tension du ressort a atteint une certaine limite, une pièce particulière, à laquelle on donne le nom d'*arrêtage*, avertit par sa résistance qu'il faut cesser d'agir sur la clef.

Afin de diminuer autant qu'il est possible l'influence du frottement, on a soin de réduire à de très-petites dimensions les extrémités ou *pivots* des axes tournants ; et on les fait rouler dans des trous en pierre fine, ordinairement en rubis, surtout les pivots des pièces animées d'une grande vitesse, comme le balancier et la roue d'échappement. Dans chacun de ces trous est pratiquée une petite cavité ou *noyure* destinée à recevoir une goutte d'huile d'olive pour lubrifier les pivots.

Lorsqu'un chronomètre doit être embarqué, on a soin de le transporter à bord avec les plus grandes précautions et en évitant tout mouvement brusque ; on le place au centre du bâtiment où les secousses se font moins sentir ; on l'entoure de laine ou d'étaupe, et on le dépose dans une boîte suspendue A LA CARDAN comme les BOUSSOLES MARINES (Voy. ces mots). On a soin de le remonter tous les jours à la même heure ; on vérifie son état dans toutes les relâches dont la position géographique est bien connue, en déterminant directement l'heure avec précision. Malgré toute la perfection apportée à la construction d'un chronomètre, malgré les épreuves qu'on lui fait subir à terre avant de l'embarquer, et malgré tous les soins dont il est l'objet à bord, il se déränge toujours peu de temps après le départ, et ne conserve jamais la marche si régulière qu'il avait à terre. Indépendamment des mouvements du navire, les variations de température exercent sur un chronomètre une influence incontestable ; le balancier compensateur est ordinaire-

ment réglé pour les températures extrêmes auxquelles l'instrument doit être soumis ; mais il est rare que la compensation soit exacte pour les températures intermédiaires ou pour celles qui sortent des limites prévues. Les variations de la température font avancer ou retarder le chronomètre de quantités qui paraissent leur être sensiblement proportionnelles ; mais elles agissent d'une manière trop complexe pour que cette loi puisse être considérée comme autre chose qu'une loi d'interpolation approchée. D'un autre côté, l'épaississement des huiles, et les frottements, quelques faibles qu'ils soient d'ailleurs, ont pour effet, à la longue, de diminuer l'amplitude des oscillations du régulateur et de produire une accélération. On a imaginé diverses formules, théoriques ou empiriques, pour corriger la marche des chronomètres ; et le lecteur peut consulter sur ce sujet un savant mémoire de M. Lieussou, inséré dans les *Annales hydrographiques* pour 1853. Mais les méthodes analytiques proposées pour l'objet dont il s'agit n'ont pas été, en définitive, admises par les navigateurs. Les quantités que l'on appelle les *constantes* d'un chronomètre paraissent être, en réalité, variables avec le temps. D'ailleurs, indépendamment des variations régulières des chronomètres, ces instruments sont sujets à des dérangements irréguliers qui échappent à toute méthode de calcul. On voit quelquefois un chronomètre qui a une marche très-régulière, faire tout à coup des sauts brusques de 20, 30 et jusqu'à 100 secondes et au-delà. Il arrive quelquefois que, pendant une courte traversée, tous les chronomètres changent momentanément de marche dans un même sens, sans qu'on puisse attribuer cette anomalie à la température. Il peut encore arriver qu'un bon chronomètre éprouve, sans cause connue, un dérangement qui le mette complètement hors de service pendant huit à dix jours, et qui a été comparé à une véritable maladie. La seule chose qu'il y ait à faire est donc d'observer attentivement la marche du chronomètre, de la comparer journellement avec d'autres chronomètres provenant autant que possible d'artistes différents, et de faire des vérifications par les méthodes astronomiques toutes les fois que cela est possible. Le lecteur trouvera d'intéressants détails sur ce sujet dans les *Observations chronométriques faites à bord de la corvette la Capricieuse, par M. Mouchex, lieutenant de vaisseau, pendant son voyage de circumnavigation*, de mai 1850 à mars 1854 (*Voy. MARCHE D'UN CHRONOMÈTRE*). On peut consulter également les *Recherches sur les variations des pendules et des chronomètres*, publiées en 1854 par M. Lieussou.

L'emploi d'un ressort comme moteur paraît être une invention française du quinzième siècle. L'usage du spiral est dû à Huyghens ; la théorie de ce régulateur est l'objet d'un savant mémoire de M. Phillips, inséré en 1841 dans les *Annales des mines*. Le premier chronomètre capable de servir à la détermination des longitudes a été construit par Harrison dans le siècle dernier.

Un grand nombre d'auteurs ont écrit sur les instruments de précision employés à la mesure du temps ; les plus célèbres ouvrages sur ce sujet sont : le *Traité d'Horlogerie*, de Lepaute ; le *Traité des horloges marines*, de Ferd. Berthoud ; les *Principes généraux de l'exacte mesure du temps*, par Jurgensen ; le *Traité d'Horlogerie*, de Moinet, etc.

CHUTE D'EAU, différence de niveau, naturelle ou artificielle, entre deux parties consécutives d'un même cours d'eau. Pour créer une chute artificielle on établit en travers de la rivière un BARRAGE (*Voy. ce mot*) qui oblige l'eau à s'élever en amont, tandis qu'elle s'abaisse en aval ; on partage ainsi le cours d'eau en deux biefs ou bassins, l'un supérieur, l'autre inférieur. L'eau s'écoule du bief supérieur dans le bief inférieur, soit par le pertuis d'une VANNE (*Voy. ce mot*), soit en DÉVERSOIR (*Voy. ce mot*), auquel cas l'écoulement peut être réglé par une vanne plongeante. Dans tous les cas la différence de niveau de l'eau dans les deux biefs est ce que l'on appelle la chute.

Lorsqu'il s'agit d'un cours d'eau navigable ou flottable, l'administration ne permet pas d'ordinaire d'établir une usine sur la rivière même, il faut créer un canal latéral ou canal de dérivation, qui prend l'eau en un certain point de la rivière du côté d'amont, et va la lui rendre en un autre point du côté d'aval ; c'est sur ce canal que l'on crée la chute artificielle dont on a besoin.

Lorsque la chute est naturelle, on n'a pas de barrage à établir ; mais il faut encore disposer les deux biefs de manière que l'écoulement se fasse par une vanne ou par un déversoir qui permettent de régler la dépense.

Dans l'état normal cette dépense doit être égale au volume d'eau qui s'écoule dans l'unité de temps par une section transversale quelconque du cours d'eau ; le niveau demeure alors constant dans les deux biefs, et la chute ne varie pas. Le poids d'eau qui s'écoule dans une seconde par la vanne ou en déversoir, multiplié par la différence du niveau des deux biefs, est ce qu'on appelle la puissance absolue de la chute. Si, par exemple, la chute est de 2^m,50 et que le volume d'eau écoulé par seconde soit de 1200 litres, qui représentent 1200 kilogrammes, la puissance absolue de la chute sera 1200^l × 2^m,50 ou 3000 kilogrammètres ; divisant par 75^{km} on obtient pour seconde expression de cette puissance absolue 40 chevaux-vapeur (*Voy. CHEVAL-VAPEUR*).

On pourrait bien régler accidentellement la vanne de manière à augmenter la dépense ; mais le niveau s'abaisserait graduellement dans le bief supérieur, il s'élèverait dans le bief inférieur ; la chute diminuerait, et pour la rétablir il faudrait fermer la vanne et arrêter l'écoulement pendant un temps plus ou moins long.

On pourrait au contraire régler la vanne de manière à diminuer la dépense ; mais le niveau s'élèverait alors graduellement dans le bief supérieur ; et pourrait finir par dépasser la limite au delà de laquelle l'eau sortirait de son lit et compromettrait les propriétés riveraines (*Voy. RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES*).

CHUTE DES CORPS. Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES.

CIMAISE, partie supérieure d'une corniche ; formée du filet de couronnement et du quart de rond ou de la doucine placés immédiatement au-dessous. C'est la cimaise proprement dite ; mais on la désigne souvent sous le nom de *cimaise supérieure*, pour la distinguer de la *cimaise inférieure* placée au-dessous du larmier, laquelle se compose d'un filet et d'un talon ou d'un quart de rond.

Ces dénominations se rapportent à la corniche de

l'entablement. La corniche du piédestal n'a qu'une cimaise, composée d'un listel ou d'un filet, et d'un quart de rond ou d'un talon.

On rencontre dans la menuiserie des parties analogues et qui reçoivent le même nom.

CINÉMATIQUE (du grec κίνημα, mouvement), nom donné par Ampère à la partie de la Mécanique qui traite du mouvement considéré indépendamment de ses causes, et à un point de vue purement géométrique. On peut la diviser elle-même en deux parties. L'une, purement théorique, comprend l'étude du mouvement d'un point, l'étude du mouvement d'un corps solide, la composition des mouvements; la seconde, ayant pour objet les applications, comprend les moyens de réaliser et d'assurer un mouvement donné, la transformation des mouvements, et la description des machines, abstraction faite des forces qui y sont appliquées.

Voyez, pour la première partie, les articles : MOUVEMENT, VITESSE, ACCÉLÉRATION, COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, COMPOSITION DES MOUVEMENTS, TRANSLATION, ROTATION, COMPOSITION DES ROTATIONS, MOUVEMENT INSTANTANÉ, MOUVEMENT RELATIF etc., et pour la seconde, les articles : GUIDES DU MOUVEMENT, TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS, MACHINES, et les articles auxquels ceux-ci renvoient.

Les traités de Cinématique les plus estimés sont : la *Cinématique* de M. Morin; le *Traité de Cinématique* de M. Ch. Laboulaye, celui de M. Bédan; le *Traité des Mécanismes* de M. Haton de la Goupillière; la *Cinématique* de M. Edm. Bour; et l'ouvrage de Willis ayant pour titre : *Principles of mechanism*.

CINTRE, construction en charpente destinée à soutenir les voussoirs d'une arche de pont ou d'une voûte quelconque pendant son exécution. Chaque cintre se compose de plusieurs FERMES (Voy. ce mot) espacées de 1^m,25 à 2^m, offrant à leur partie supérieure la forme de la section droite de l'intrados ou, sauf l'espace nécessaire pour placer les planches ou madriers appelés *couchis* que l'on pose sur les fermes parallèlement aux génératrices de la voûte, et sur lesquels doivent s'appliquer les voussoirs. Ces couchis se placent jointifs quand la voûte est construite en petits matériaux; on les espace au contraire de 0^m,10 à 0^m,15 quand la voûte est en pierres de taille; mais on les recouvre ordinairement alors de planches minces et flexibles auxquelles on fait prendre la courbure de la voûte.

On distingue deux systèmes de cintres : les cintres *fixes* et les cintres *retroussés*. Un cintre est fixe quand il repose sur un certain nombre d'appuis disposés d'une naissance à l'autre; il est retroussé quand il n'est soutenu qu'aux naissances. Dans le premier cas il est invariable de forme; dans le second il est susceptible de céder plus ou moins à la pression, et de changer de forme suivant qu'il est chargé sur une plus ou moins grande étendue. Ce second système n'est bon que dans la construction des ponts sur des rivières trop profondes ou sujettes à des affouillements trop variables pour qu'on y puisse trouver des points d'appui suffisants; et, sans l'autorité de Perronet, ses inconvénients l'auraient fait abandonner depuis longtemps déjà. Toutefois un troisième système qu'on pourrait appeler *mixte* paraît donner de bons résultats; il consiste à

établir d'abord les fermes en ne les soutenant qu'aux naissances; puis à les étayer pendant la construction par un certain nombre de points d'appui fixes. Ce système a, entre autres avantages, celui de favoriser le DÉCINTREMENT (Voy. ce mot), en permettant d'enlever d'abord les étais, et de n'enlever le cintre lui-même qu'après les premiers effets du tassement.

Quel que soit le système de cintres qu'on adopte, il doit satisfaire à un certain nombre de conditions essentielles. En premier lieu il est nécessaire, pour empêcher le relèvement du sommet pendant la pose des premiers cours de voussoirs vers les reins, de relier ce sommet aux naissances par des moises ou brides ou par quelque autre système qui forme une liaison solide. Souvent même il est indispensable de placer sur le sommet du cintre une surcharge provisoire. En second lieu, il importe, surtout dans les cintres de grandes dimensions, de relier les pièces d'une même ferme par des moises horizontales, de manière qu'en montant la voûte symétriquement des deux côtés, les efforts horizontaux qui en résultent se fassent mutuellement équilibre. Enfin, il faut que le cintre soit *contreventé*, c'est-à-dire que les diverses fermes d'un même cintre soient reliées par des moises horizontales parallèles à l'axe de la voûte, ou par des pièces en écharpe, qui s'opposent à la déformation dans le sens de l'axe de la voûte.

Nous indiquerons quelques-unes des dispositions les plus fréquemment adoptées dans la construction des cintres. Dans les très-petites voûtes, de 2^m d'ouverture, chaque ferme se réduit à deux planches inclinées *a, a* (fig. 1), auxquelles on donne le nom de *veaux*; elles sont soutenues par des pièces verticales *b, b*, appelées *chandelles*. reposant elles-

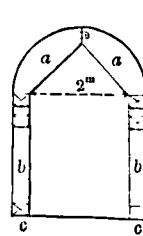


Fig. 1.

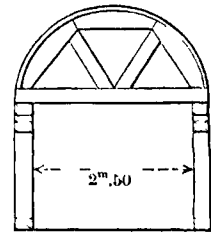


Fig. 2.

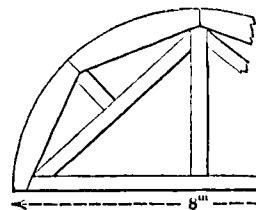


Fig. 3.

mêmes sur des *semelles* *c, c*. Dans les voûtes à plein cintre ayant de 2^m à 25^m d'ouverture, on emploie les dispositions indiquées par les figures 2, 3 et 4.

La figure 5 représente le cintre fixe employé au pont de Plessis-lès-Tours, et la figure 6 représente

le cintre retroussé dont on a fait usage au pont de Saint-Sauveur sur le gave de Gavarnie.

Toutes ces fermes se composent soit d'arbalétriers courbes, soit d'arbalétriers droits sur lesquels sont disposés les *veaux*, d'un poinçon, de moises horizontales, de moises ou brides obliques, et de contre

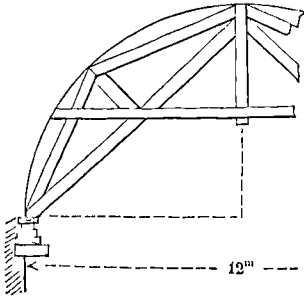


Fig. 4.

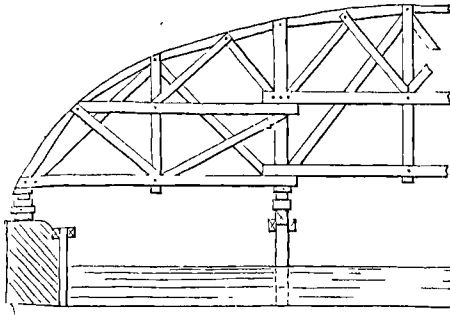


Fig. 5.

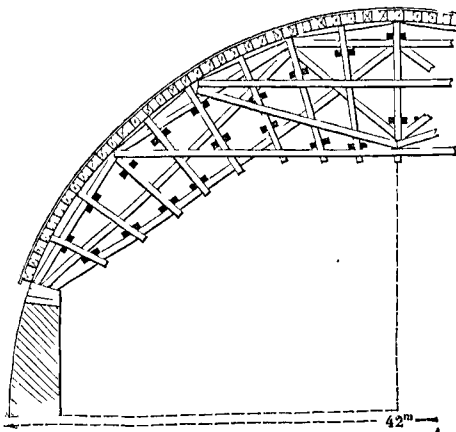


Fig. 6.

fiches, ordinairement normales à l'intrados de la voûte.

Sur la figure 6 on a marqué par une teinte plus foncée les têtes des moises horizontales qui servent à contreventer le cintre, ainsi que les têtes des couchis. Les fermes reposent sur une maçonnerie pro-

visoire appelée *murette* que l'on enlève après le décintrement. Il en est de même pour le cintre fixe de la figure 5; les fermes sont en outre soutenues par de forts pieux, enfoncés à refus, qui forment les points d'appui intermédiaires. Dans ces divers cintres, les fermes ne reposent pas directement sur leurs appuis; on interpose des coins ou des boîtes à sable qui servent au décintrement (*Voy. DÉCINTREMENT*).

Nous avons dit en commençant que les fermes offraient à la partie supérieure la forme de la section droite de la voûte, à cela près de l'espace nécessaire pour placer les couchis. Il faudrait, en effet, qu'il en fût ainsi si l'intrados conservait exactement sa forme après l'enlèvement des cintres; mais cela n'arrive pas en général. Lorsque la voûte est abandonnée à elle-même, il se produit, par suite de la compression des mortiers, un tassement qui peut être assez considérable. Au pont de Neuilly, il a été de 0^m,660, pour une ouverture de 39^m. Le tassement est beaucoup moindre du reste, depuis qu'on fait partout usage de bons mortiers; et au *Pont aux Doubles* et au *Petit-Pont*, à Paris, qui ont été construits en meulière avec ciment de Vassy, on n'a remarqué aucun tassement. Quoi qu'il en soit, beaucoup de constructeurs, tenant compte du tassement qui peut se produire, donnent aux cintres une forme, qu'on appelle la *courbe de pose*, différente de la courbe réelle, mais réglée de telle sorte qu'après le décintrement la voûte prenne la forme qu'elle doit avoir et pour laquelle les voussoirs ont été taillés.

Quand on connaît la diminution que subit la longueur de la courbe d'intrados, on peut en déduire le tassement à la clef. Supposons, par exemple, que cette courbe soit une ANSE DE PANIER (*Voy. ce mot*) à trois centres; soit a la demi-ouverture de la voûte, b sa montée, x le plus petit rayon, L la longueur de la courbe d'intrados, et y la différence entre a et x ; on trouvera aisément les relations :

$$L = \frac{2}{3} \pi x + \frac{1}{3} \pi (x + 2y),$$

$$b = x + 2y - y\sqrt{3},$$

$$x + y = a.$$

avec

Si l'on élimine x et y entre ces équations, on en tire

$$b = \frac{3L}{\pi} (\sqrt{3} - 1) - a (3\sqrt{3} - 4),$$

et par conséquent, en désignant par Δb et ΔL les variations correspondantes et très-petites de b et de L , on a

$$\Delta b = 3 \frac{(\sqrt{3} - 1)}{\pi} \cdot \Delta L = 0,699 \cdot \Delta L,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, et en supposant que la courbe ne cesse pas d'être une anse de panier à trois centres, le tassement à la clef serait environ les $\frac{7}{10}$ de la diminution de longueur de la courbe d'intrados.

Pour apprécier la différence de longueur entre la courbe réelle et la courbe de pose, et se rendre ainsi compte du tassement, on a quelquefois évalué la compression du mortier à 0^m,000125, ou $\frac{1}{8}$ de millimètre, par kilogramme de pression sur un centimètre carré. Mais cette évaluation est néces-

sairement incertaine; et l'emploi d'une courbe de pose ne donne pas toujours le résultat qu'on en attend; ainsi il est arrivé qu'un pont qui devait être horizontal, a présenté après le décentrement une pente et une contre-pente, parce que le tassement sur lequel on comptait n'a pas eu lieu. Il vaut mieux, comme on le fait aujourd'hui, veiller à la bonne qualité du ciment, et faire usage de cintres construits d'après la courbe réelle, mais de manière à ne pas céder à la pression des voussoirs.

Cette pression, qui est utile à connaître, se détermine d'une manière très-simple.

Soit ABCD (fig. 7) la section d'un voussoir, AD l'arc de l'intrados qui lui correspond, AB le joint

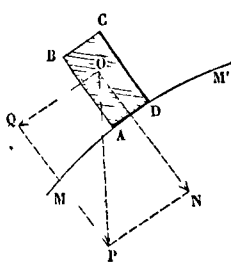


Fig. 7.

par lequel il repose sur le voussoir inférieur, P le poids du voussoir considéré, et α l'angle PON que fait la normale ON avec la verticale. La force qui tend à faire descendre le voussoir sur le plan incliné AB a pour expression

$P \cos \alpha - fP \sin \alpha$,
en appelant f le coefficient du frottement, qui

$$\cos \alpha - f \sin \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,76}.$$

Or, l'angle dont la tangente est 0,76 étant 37° , la valeur de α est sensiblement 53° . Ainsi tant que la construction de la voûte n'atteint pas le point où la normale à l'intrados fait avec la verticale un angle de 53° , les voussoirs déjà portés n'exercent aucun effort normal sur le cintre. C'est donc surtout la partie du cintre supérieur à ce point qu'il importe de relier invariablement aux points d'appui.

Dans les voûtes biaisées la méthode la plus rationnelle consiste à placer les fermes parallèlement à la section droite de la voûte, sauf les fermes extrêmes qui sont dans le plan des arcs de tête. Si le biais est considérable, on comble l'intervalle entre chaque ferme oblique et la ferme droite la plus voisine, par des portions de fermes droites solidement reliées entre elles et aux deux fermes entières, oblique et droite, dont il est question.

(Voy. le *Cours de routes et ponts* professé à l'École centrale par M. Mary, et le *Traité de Charpente* de J. Adhémar.)

CIRCOMPOLAIRE (ÉTOILE), étoile qui ne s'abaisse jamais au-dessous de l'horizon, ce qui a lieu quand la distance de cette étoile au pôle est moindre que la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. Une étoile circumpolaire passe deux fois par jour sidéral au méridien : une première fois en allant de l'est à l'ouest, dans notre hémisphère c'est son passage supérieur; une seconde fois en allant au contraire de l'ouest à l'est, c'est son passage inférieur.

CIRCOPÉRENCE PRIMITIVES, circonférences sur la considération desquelles est fondé le tracé d'un engrenage cylindrique; ce sont les bases de deux cylindres qui, tournant autour de leurs axes,

se conduiraient par simple contact, de la même manière que les roues dentées. (Voy. ENGRENAGES.)

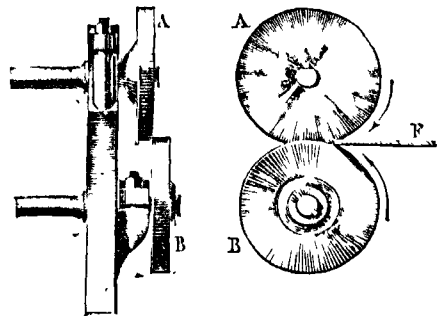
CISAILLÉMENT (RÉSISTANCE AU), résistance à un EFFORT TRANCHANT (Voy. ce mot), c'est-à-dire à un effort qui tend à couper une pièce prismatique suivant une section droite. L'expérience a démontré que cette résistance est proportionnelle à l'aire de la section; en sorte qu'en appelant Ω cette section, R la résistance par mètre carré et F l'effort tranchant, on a

$$F = \Omega R.$$

Pour le fer la résistance au cisaillement est sensiblement la même que la résistance à la RUPTURE (Voy. ce mot), c'est-à-dire environ 30 kil. par millimètre carré; elle est plus grande pour l'acier, plus de 50 kil. Mais dans les constructions ou dans les machines on ne doit pas faire supporter au métal plus du cinquième de l'effort tranchant qui produirait la rupture par cisaillement; c'est-à-dire que pour le fer on prendra R égal à 6 kil. par millimètre carré, soit $R = 6000000$ kil. par mètre carré, et pour l'acier 10 kil. par millimètre carré, soit $R = 10000000$ kil. par mètre carré (Voy. la *Résistance des matériaux* par M. Morin). C'est surtout pour la résistance des RIVETS (Voy. ce mot) que le cisaillement doit être pris en considération.

CISAILLES, machine-outil dont on se sert pour découper les métaux ductiles, tels que le fer, l'acier doux, le cuivre, le zinc, le plomb, etc. — On distingue les *cisailles droites* et les *cisailles circulaires*.

Les cisailles droites, quelle que soit leur disposition, se composent de deux lames d'acier, droites, et juxtaposées, les tranchants en regard; l'une de ces lames est solidement fixée dans un plan vertical, le tranchant dirigé horizontalement; l'autre est mobile autour d'un axe horizontal. Quand le service des cisailles n'exige ni un trop grand effort ni un travail continu, on manœuvre à la main la lame mobile, à l'aide d'une poignée adaptée à son extrémité antérieure. Quand les cisailles doivent servir d'une manière continue, ou lorsqu'elles exigent un effort supérieur à celui qu'un homme peut exercer, on donne à la lame mobile un prolongement, ou queue, au delà de l'axe de rotation; et l'on imprime à cette queue un mouvement circulaire alternatif, soit à l'aide d'un excentrique (Voy. TRANSFORMATION DE MOUVEMENTS, *circulaire continu en*



circulaire alternatif), soit à l'aide d'une bielle et d'une manivelle, comme dans la cisaille de MM. Thomas et Laurens (Voy. le tome XII de la publication de M. Armengaud), soit par tout autre

moyen équivalent. L'axe de la manivelle est quelquefois alors muni d'un VOLANT (Voy. ce mot), surtout quand les cisailles doivent exercer un effort considérable.

Les cisailles circulaires se composent de deux disques A et B, auxquels sont appliqués des tranchants circulaires en acier. Ils tournent en sens inverse, et se croisent d'une petite quantité. On les emploie surtout pour découper les métaux en feuilles; on présente pour cela la feuille F au tranchant des disques, vers l'intersection de leurs circonférences, du côté où, par l'effet de la rotation, les points situés sur ces circonférences vont en se rapprochant. La feuille est d'abord entraînée par le frottement des disques; puis, une des parties est poussée vers le bas par le disque A, tandis que l'autre partie est poussée vers le haut par le disque B; et la feuille est coupée dans le plan commun des deux disques.

CISELURE, entaille plane de 1 à 2 centimètres de largeur, que le tailleur de pierre pratique d'abord pour dresser un parement (Voy. COUPE DES PIERRES).

CITADELLE, petite place forte élevée à côté d'une ville. Si la ville est fortifiée, il faut que la citadelle fasse partie de l'enceinte, afin de pouvoir au besoin recevoir directement des secours du dehors. Il faut que les fronts qui font face à la campagne présentent une supériorité marquée sur ceux qui font face à la ville, afin que l'assiégeant ne soit pas tenté d'attaquer par la citadelle, auquel cas, la citadelle prise, la ville le serait aussi. Une citadelle doit avoir assez de capacité pour contenir les deux tiers de la garnison, l'expérience ayant montré que c'est à cette fraction qu'elle est généralement réduite à la fin d'un siège. Il faut aussi qu'elle contienne assez de casemates et de souterrains pour mettre les défenseurs et les munitions à l'abri de la bombe; dans ce cas une citadelle est d'une excellente défense, et exige un siège en règle. Il faut enfin qu'elle ait un commandement marqué sur la ville; et elle doit en être séparée par une esplanade suffisamment étendue.

CLAPET, genre de soupape. (Voy. SOUPAPES.)

CLAVEAU, l'une quelconque des pierres qui forment une PLATE-BANDE (Voy. ce mot).

CLEF, nom donné au vousoir qui occupe la partie supérieure d'une voûte, ou le milieu d'une PLATE-BANDE (Voy. ces mots). Une voûte en berceau ne peut se maintenir en équilibre d'elle-même que lorsque la clef est posée; il en est de même pour une plate-bande. Les VOÛTES SPHÉRIQUES ou ELLIPTIQUES et les VOÛTES EN ARC DE CLOÎTRE peuvent se soutenir sans le secours de la clef.

CLIN-FOC, ou petit foc. Voy. FOC.

CLIQUET, levier d'arrêt des ROUES A ROCHET et des ENCLIQUETAGES (Voy. ces mots).

CLISIMÈTRE (de κλίνω, j'incline, et de μέτρον, mesure), nom donné à plusieurs instruments qui ont pour objet de mesurer l'inclinaison d'une droite sur l'horizon. Ce mot a la même signification que niveau de pente (Voy. NIVEAU).

COEFFICIENT D'AVANCE, rapport entre la quantité dont un navire à hélice avance dans un temps donné, et celle dont il avancerait dans le même temps si l'hélice tournait avec la même vitesse dans un écrou fixe. C'est aussi le rapport entre l'avance pour un tour d'hélice et le pas de cette hélice. (Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES.)

COEFFICIENT DE CONTRACTION, coefficient par lequel il faut multiplier l'aire de l'orifice d'écoulement d'une veine fluide pour obtenir l'aire de la section contractée. (Voy. CONTRACTION DE LA VEINE, THÉORÈME DE TORRICELLI, ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.)

COEFFICIENT DE DÉPENSE, coefficient par lequel il faut, dans l'étude de l'écoulement d'un liquide, multiplier la dépense dite *dépense théorique* (mais résultant d'une théorie imparfaite) pour obtenir la dépense effective. (Voy. ÉCOULEMENT DES FLUIDES.)

COEFFICIENT D'EFFET UTILE, ou rendement, rapport entre le travail utile d'une machine et le travail moteur qu'elle reçoit. Dans les bonnes machines, ce rapport varie ordinairement de 0,60 à 0,80. (Voy. MACHINES.)

COEFFICIENT DE FROTTEMENT, coefficient numérique par lequel il faut multiplier la pression normale qu'exercent l'un sur l'autre deux corps en contact pour obtenir le *frottement*, c'est-à-dire la résistance au glissement des deux corps l'un sur l'autre. Ce coefficient est constant pour les mêmes corps; mais il varie selon la nature des corps en contact. (Voy. FROTTEMENT.)

Le coefficient de frottement est la tangente trigonométrique de l'ANGLE DE FROTTEMENT (Voy. ce mot).

COEFFICIENT DE LA RÉFRACTION GÉODÉSIQUE, coefficient par lequel il faut multiplier l'angle que font les normales aux extrémités d'une ligne géodésique pour avoir la réfraction entre ces extrémités, c'est-à-dire l'angle dont la distance zénithale de chacune d'elles se trouve diminuée quand on l'observe de l'autre. Ceci suppose : 1° que la réfraction géodésique est proportionnelle à l'angle des normales menées aux deux stations; 2° que la réfraction est la même aux deux extrémités de la ligne géodésique, ce qui exige que la trajectoire du rayon réfracté soit sensiblement un arc de cercle, ou que cette trajectoire se confonde avec son cercle osculateur dans l'étendue comprise entre les deux stations. Ces hypothèses sont sensiblement satisfaites dans les circonstances ordinaires des opérations géodésiques. — Si C désigne l'angle des normales extrêmes, et n le coefficient de la réfraction géodésique, nC exprime la réfraction. Le coefficient n paraît varier entre 0,062 et 0,088; on prend d'après Delambre $n = 0,08$. Voyez, pour la manière dont ce coefficient s'introduit dans le calcul des hauteurs, les mots ALTITUDE, NIVELLEMENT (géodésique).

Les marins adoptent également $n = 0,08$ dans le calcul de la DÉPRESSION (Voy. ce mot).

COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ, nombre constant pour chaque espèce de matière solide, par lequel il faut multiplier l'allongement ou le raccourcissement par mètre d'un prisme de cette matière, pour obtenir la tension ou la pression par unité de surface, tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, c'est-à-dire tant que l'allongement ou le raccourcissement élastique reste proportionnel à la charge. On désigne ordinairement ce coefficient par la lettre E; et en représentant par Ω la section droite du prisme, par L sa longueur et par ΔL l'allongement ou le raccourcissement qui correspond à

la tension ou à la pression T, on a (Voy. ALLONGEMENT, COMPRESSION)

$$T = E\Omega \cdot \frac{\Delta L}{L}, \text{ d'où } \frac{T}{\Omega} = E \cdot \frac{\Delta L}{L};$$

ce qui justifie la définition. On a dit aussi que le coefficient d'élasticité est la tension nécessaire pour allonger un prisme, dont la section droite est l'unité de surface, d'une quantité égale à sa longueur; car si $\Omega = 1$ et $\Delta L = L$, il reste $T = E$. Mais cette définition repose sur une hypothèse qui ne pourrait être réalisée; elle ne pourrait d'ailleurs s'appliquer au cas du raccourcissement.

Pour le fer, le coefficient E est égal à 20^4 , lorsqu'on rapporte la section au millimètre carré, et que l'allongement ΔL est exprimé en millièmes de l'unité de L; mais si l'on rapporte les longueurs au mètre et les surfaces au mètre carré, il faut prendre $E = 20^4 \cdot 10^9$.

Pour la fonte on a $E = 9^4 \cdot 10^9$, en adoptant les mêmes unités.

Pour les bois le plus fréquemment employés, le coefficient d'élasticité varie de $0^4 \cdot 6 \cdot 10^9$ à $1^4 \cdot 2 \cdot 10^9$.

COEFFICIENT DE RÉGULARITÉ, coefficient par lequel il faut multiplier la vitesse angulaire de régime d'un volant pour avoir les écarts en plus ou en moins de sa vitesse angulaire réelle sur cette vitesse de régime (Voy. VOLANT).

COEFFICIENT DE RÉGULARITÉ. Voy. MODULE DE CONVERGENCE.

COEFFICIENT DE STABILITÉ, coefficient par lequel, dans la théorie des MURS DE SOUTÈNEMENT ou des REVÊTEMENTS de fortification (Voy. ces mots), on multiplie soit la poussée des terres, soit le moment de cette poussée, pour ne pas rester dans les conditions de l'équilibre strict, et avoir égard à la stabilité de la construction.

COEFFICIENT D'UTILISATION, nom donné, dans la marine à vapeur, au rapport entre le travail nécessaire pour vaincre la résistance du fluide, et le travail total dépensé par la machine motrice. (Voy. PROPULSEURS à AUBES, PROPULSEURS HÉLICOÏDES, NAVIGATION à VAPEUR.)

COIN, machine simple formée d'un prisme triangulaire, ordinairement en bois ou en fer, que l'on

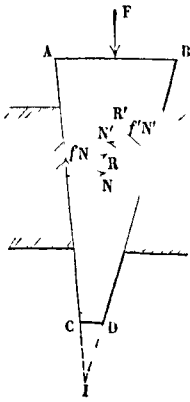


Fig. 1.

consiste à déterminer les réactions R et R' exercées sur les faces du coin par les corps avec lesquelles elles sont en contact, ou, ce qui revient au même, les actions égales et contraires que le

coin exerce sur ces corps. Dans ce problème, on néglige ordinairement le poids du coin, qui est, en effet, négligeable vis-à-vis des efforts généralement considérables que le coin a à supporter.

I. On peut traiter la question très-simplement par une construction géométrique. La réaction R résultante des efforts que le corps situé à gauche du coin exerce sur la face AC, est une force oblique à cette face et faisant avec la normale un angle φ égal à l'angle du frottement (Voy. FROTTEMENT). Sa direction est donc parfaitement connue. Il en est de même de la réaction R' exercée sur le coin par le corps situé à droite. Le coin étant supposé en équilibre sous l'action de ces trois forces, elles doivent être dans un même plan (Voy. ÉQUILIBRE), qui sera celui de la figure, et concourir en un même point; il en résulte que si l'on mène trois droites respectivement parallèles aux trois forces F, R et R', ses côtés seront proportionnels à ces forces. Soit donc MN (fig. 2) une droite qui représente en grandeur et en direction la force F, on mènera par le point M une parallèle à la réaction R, par le point N une parallèle à la réaction R'; le triangle MNP ainsi formé aura ses côtés proportionnels aux trois forces; et puisque MN représente F, MP représentera R, et NP représentera R'.

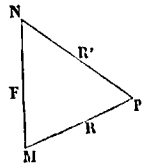


Fig. 2.

II. On peut aussi traiter la question par le calcul en écrivant que la somme algébrique des projections des forces sur deux axes rectangulaires est nulle séparément pour chacun de ces axes. Pour cela il est commode de remplacer la réaction R par ses composantes, l'une N perpendiculaire à AC, l'autre fN dirigée suivant CA, et de remplacer de même R' par une force N' normale à BD et par une force tangentielle $f'N'$, dirigée suivant DB. On projette alors les cinq forces F, N, fN , N' et $f'N'$, d'abord sur la direction de la force F, ensuite sur une direction perpendiculaire, et l'on obtient, en prenant la direction de F pour le sens positif : $F - N \cos A - fN \sin A - N' \cos B - f'N' \sin B = 0$ [1] et

$N \sin A - fN \cos A - N' \sin B + f'N' \cos B = 0$, [2] formules qui suffisent pour déterminer N et N' si l'on suppose F connu.

Généralement le coin est isocèle, et l'on a $A = B$. En même temps les corps placés à gauche et à droite sont de même nature, en sorte que le coefficient de frottement est le même et qu'on a $f' = f$. Les équations [1] et [2] se simplifient; la seconde se réduit à $N = N'$, et la première devient

$$F = 2N(\cos A + f \sin A), \quad [3]$$

$$\text{d'où } \frac{F}{N} = 2 \frac{\cos(A - \varphi)}{\cos \varphi}, \quad [4]$$

en appelant φ l'angle du frottement. On voit que ce rapport diminue à mesure que A augmente, c'est-à-dire à mesure que le coin devient plus aigu en I.

III. Il peut être utile de comparer le travail de la force F au travail de la force normale N pour un déplacement quelconque du coin. Supposons que le coin, sous l'action de la force F, ait glissé sur le corps de gauche supposé fixe, d'une petite quantité AA' ou II' (fig. 3), et soit venu prendre la position A'I'B'. Prolongeons la bissectrice de l'angle aigu AIB, et menons I'v perpendiculaire à cette bissec-

frice, puis abaissons In perpendiculaire sur $B'I'$. Le travail de la force F aura pour expression

$$\mathcal{E}F = F \cdot Iv = F \cdot I'I' \cdot \sin I'I'v = F \cdot I'I' \cdot \sin A.$$

Le travail de la force N aura pour valeur

$$\mathcal{E}N = N \cdot In = N \cdot I'I' \cdot \sin I'I'n = N \cdot I'I' \cdot \sin (180^\circ - 2A),$$

ou $\mathcal{E}N = N \cdot I'I' \cdot 2 \sin A \cdot \cos A.$

On déduit de ces relations

$$\frac{\mathcal{E}F}{\mathcal{E}N} = \frac{F \cdot I'I' \cdot \sin A}{N \cdot I'I' \cdot 2 \sin A \cdot \cos A} = \frac{F}{N} \cdot \frac{1}{2 \cos A},$$

ou, en mettant pour $\frac{F}{N}$ sa valeur [4],

$$\frac{\mathcal{E}F}{\mathcal{E}N} = \frac{\cos(A - \varphi)}{\cos A \cos \varphi} = 1 + \text{tang } A \text{ tang } \varphi, \quad [5]$$

relation facile à retenir. On voit que ce rapport augmente lorsque l'angle en I diminue, car A et par suite $\text{tang } A$ augmentent; on peut donc diminuer F en diminuant I sans accroître le rapport $\frac{\mathcal{E}F}{\mathcal{E}N}$. La force

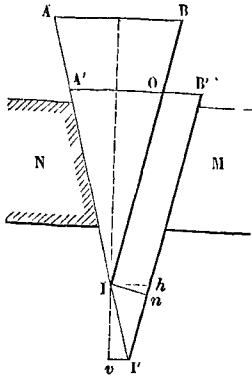


Fig. 3.

$$F = 2N \cos A \text{ et } \mathcal{E}F = \mathcal{E}N.$$

La perte de travail est plus grande encore quand on agit par choc sur la tête du coin, comme on le fait le plus souvent. On atténue la perte en augmentant la masse du corps choquant. (Voy. Choc.)

L'arête de l'angle aigu du coin est souvent tronquée, comme le montre la figure 1, ce qui ne change rien à l'effet de la machine.

IV. Le coin peut être employé comme organe de transformation de mouvement, à changer un mouvement rectiligne continu en un mouvement rectiligne continu de direction différente. La figure 3 montre en effet que lorsque le coin s'introduit entre deux pièces M et N , dont l'une M est mobile, et l'autre N fixe, il oblige la pièce mobile à s'écarter. S'il a marché d'une quantité AA' parallèlement à la face AI , il s'est avancé d'une quantité OB' parallèlement à sa tête AB . Menons Ih parallèle à AB , nous aurons $Ih = OB'$; d'ailleurs $I'I' = AA'$; on voit donc que les chemins parcourus dans la direction AI et dans la direction AB sont $I'I'$ et Ih , quantités proportionnelles à $A'I$ et $A'B'$ ou, ce qui revient au même, à AI et AB ; c'est-à-dire que les chemins sont entre eux comme la face du coin est à sa tête.

Le plus souvent on adopte la disposition suivante. Le coin AHC (fig. 4) peut glisser par sa face HC sur un plan horizontal. Une tige verticale PQ , mobile entre des guides, se termine en P par un galet qui s'appuie sur la face inclinée AI du coin. Si le coin marche dans le sens de la flèche horizontale, la tige est obligée de marcher dans le sens

de la flèche verticale, et peut transmettre son mouvement à tout autre organe de machine. Si le coin s'avance de la quantité BI , la tige s'élèvera de la quantité AB ; ainsi le rapport des chemins parcourus

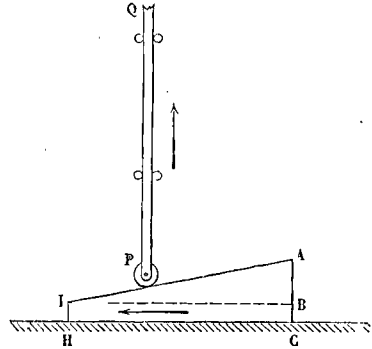


Fig. 4.

est celui de la longueur CH du coin à la différence AB des deux bases.

COÏNCIDENCES (MÉTHODE DES), méthode employée par Borda pour compter les oscillations du pendule. Le pendule, composé d'une sphère de platine suspendue par un fil très-fin, était installé dans une boîte vitrée renfermant une horloge à secondes. Un trait vertical tracé sur le balancier de l'horloge représentait la projection du fil sur le plan de ce balancier dans la position d'équilibre des deux appareils; et une lunette horizontale était disposée à 8 ou 10 mètres de distance, de manière que ce trait vertical paraissait couvert par l'image du fil lorsqu'on le visait à l'aide de cet instrument. On ouvrait la cage pour donner l'impulsion au balancier et au pendule, et on la refermait aussitôt pour éviter l'influence de l'agitation de l'air. Si l'on observe attentivement l'image du fil et celle du trait vertical tracé sur le balancier, on voit ces images se séparer ou se rapprocher; et l'on saisit le moment où elles semblent superposées en marchant dans le même sens: c'est la *première coïncidence*; on note exactement l'heure marquée à ce moment par l'horloge. Supposons, ce qui arrive ordinairement, que le pendule aille plus vite que l'horloge, on verra le fil prendre l'avance sur le trait du balancier, les deux images se sépareront, et au bout d'un certain temps elles passeront en même temps dans la verticale, mais en sens contraire; à ce moment le pendule aura fait une oscillation de plus que le balancier. L'avance du pendule augmentant toujours, il viendra un moment où les deux images paraîtront de nouveau coïncider en marchant dans le même sens: c'est la *deuxième coïncidence*; à ce moment le pendule aura deux oscillations de plus que le balancier. Or si, comme cela a lieu d'ordinaire, le balancier fait une oscillation par seconde, et que n soit le nombre de secondes écoulées entre deux coïncidences consécutives, le nombre des oscillations du pendule dans le même temps sera $n + 2$. Si donc on a observé N coïncidences dans le temps T , $\frac{T}{N}$ étant le nombre de secondes écoulées entre deux coïncidences, $\frac{T}{N} + 2$ sera le nombre des

oscillations du pendule entre deux coïncidences, et

$$\left(\frac{T}{N} + 2\right)N, \text{ ou } T + 2N,$$

sera le nombre des oscillations du pendule dans le temps T ; c'est-à-dire que, pour avoir le nombre d'oscillations exécutées par le pendule dans le temps T , il suffit d'ajouter au nombre de secondes contenues dans T le double du nombre des coïncidences observées pendant ce temps.

L'avantage de cette méthode est de dispenser de compter une à une les oscillations; on n'a à compter que les coïncidences, ce qui est beaucoup plus facile.

COLLIER A GALETS, système de galets disposés circulairement autour d'un arbre vertical de machine, pour lui servir de guide en remplaçant le frottement de glissement par un frottement de roulement. Les axes verticaux des galets sont réunis par une couronne commune qui entoure l'arbre. C'est ordinairement au passage d'un arbre vertical au travers d'un plancher qu'on l'entoure ainsi d'un collier à galets. Ce dispositif s'emploie également dans les grues (Voy. ce mot) qui font le service des ports. On le retrouve aussi dans les phares tournants.

COLLIMATEURS, appareils employés à la collimation. Le plus simple consiste en une lentille convergente, au foyer principal de laquelle est établie une plaque percée d'une ouverture sur laquelle sont tendus deux fils fins croisés, le point de croisement coïncidant avec le foyer même. La droite qui joint ce foyer au centre optique de la lentille est la ligne de collimation. Si maintenant on dirige une lunette sur cet appareil, et qu'on amène l'image du foyer de la lentille fixe en coïncidence avec la croisée du réticule de la lunette, on sera certain que l'axe optique de celle-ci coïncide avec la ligne de collimation fixe. On pourra donc ramener exactement l'axe optique de la lunette dans cette direction toutes les fois que cela sera nécessaire. Quand on observe de nuit, on éclaire par derrière la plaque du collimateur.

Quand il s'agit de rendre vertical l'axe optique d'une lunette, on emploie un autre procédé. On pointe la lunette sur un bain de mercure, dont la surface forme un miroir horizontal, et on fait varier doucement l'axe de la lunette jusqu'à ce que la croisée du réticule coïncide exactement avec son image dans le miroir. On est certain alors que l'axe optique de la lunette est perpendiculaire à la surface du miroir, et par conséquent vertical. Mais pour que l'image des fils du réticule soit visible, il faut projeter de la lumière diffuse dans le tube. Pour cela on remplace l'oculaire par un petit microscope, qui porte un réflecteur percé d'un trou; en faisant varier l'inclinaison de ce réflecteur, on arrive à illuminer l'intérieur de la lunette, et à distinguer à la fois les fils du réticule et leur image par réflexion.

COLLIMATION, visée. Se dit du pointage des lunettes dans les instruments de Géodésie ou d'Astronomie. L'AXE OPTIQUE d'une LUNETTE (Voy. ces mots) porte le nom de *ligne de collimation*. Mais le mot collimation s'applique d'une manière plus particulière au cas où l'axe optique d'une lunette doit être ramené exactement dans une direction déterminée; et les appareils à l'aide desquels on

effectue cette opération portent le nom de **COLLIMATEURS** (Voy. ce mot).

On sait que les rayons lumineux émanés du foyer d'une lentille convergente émergent parallèlement à son axe; si, sur le trajet de ces rayons parallèles on interpose une seconde lentille, ces rayons, après s'être réfractés de nouveau, vont converger au foyer de cette seconde lentille. Réciproquement les rayons émanés du foyer de cette seconde lentille viendraient converger au foyer de la première. Cette propriété constitue ce que l'on appelle le *principe de la collimation*. Les foyers et les centres optiques des deux lentilles sont quatre points en ligne droite; si l'on amène la droite qui joint le foyer et le centre optique de la première lentille dans le prolongement de celle qui joint le foyer et le centre optique de la seconde, la direction de la première droite se trouve exactement déterminée.

Le pointé exécuté par les plus habiles observateurs, et à l'aide des meilleurs instruments, est toujours affecté d'une certaine inexactitude inévitable, à laquelle on donne le nom d'*erreur de collimation* ou de pointé. (Voy. ERREURS [Théorie des].)

On donne aussi le nom de *Collimation* à l'arc compris, sur le limbe d'un sextant, entre le zéro de la division et le *point de parallélisme*. (Voy. SEXTANT.)

COLONNADE, série de colonnes égales et équidistantes supportant une même architrave; et, par extension, toute disposition architecturale dans laquelle les colonnes sont ainsi placées en files, droites ou circulaires, sur un ou plusieurs rangs. L'*entre-colonnement*, ou la distance, d'axe en axe, entre deux colonnes consécutives, varie suivant les ordres: il est de 6 modules $\frac{2}{3}$ dans l'ordre toscan,

de 7 modules $\frac{1}{2}$ dans l'ordre dorique, de 6 modules $\frac{1}{2}$ dans l'ordre ionique, de 6 modules $\frac{2}{3}$ dans

l'ordre corinthien, ainsi que dans l'ordre composite. Les colonnes qui forment une colonnade sont toujours dépourvues de piédestal. Si l'entre-colonnement doit être élevé au-dessus du sol, on fait reposer toutes les colonnes sur un piédestal continu qui porte le nom de *stylobate* (ou *porte-colonne*).

Les colonnes sont quelquefois réunies deux à deux ou *accouplées*. Cette disposition est condamnée par les hommes de goût, malgré l'admiration qu'excite à juste titre la colonnade du Louvre où les colonnes sont ainsi accouplées.

Le plus bel exemple de colonnade est la colonnade de Saint-Pierre de Rome, composée de deux galeries demi-circulaires soutenues chacune par 142 colonnes ou pilastres, d'ordre dorique, de plus de 13 mètres de haut.

COLONNE, pilier à section circulaire qui sert de soutien ou d'ornement à un édifice. Une colonne se compose toujours de trois parties: d'un corps que l'on nomme le *fût*, d'une tête appelée *chapiteau*, et d'un pied ou support auquel on donne le nom de *base*. Les proportions de ces diverses parties diffèrent suivant les ORDRES (Voy. ce mot).

Dans l'ordre toscan, la hauteur de la colonne est de 14 modules, ou 7 fois son diamètre inférieur. Le chapiteau a 1 module; le fût en a 12; la base a 1 module.

Dans l'ordre dorique, la hauteur de la colonne est de 16 modules, ou 8 fois son diamètre inférieur, dont 1 module pour le chapiteau, 14 pour le fût, et 1 pour la base.

Dans l'ordre ionique, la hauteur totale est de 18 modules, ou 9 fois le diamètre inférieur; savoir: 24 parties (Voy. MODULE) pour le chapiteau; 16 modules 9 parties pour le fût, et 1 module 3 parties pour la base.

Dans l'ordre corinthien, la colonne a 20 modules, ou 10 fois son diamètre inférieur, dont 2 modules 12 parties pour le chapiteau, 16 modules 24 parties pour le fût, et 1 module pour la base.

Dans l'ordre composite, la hauteur de la colonne est aussi de 20 modules, dont 2 modules 12 parties pour le chapiteau, 16 modules 24 parties pour le fût, et 1 module pour la base, comme dans l'ordre corinthien.

Quelques auteurs admettent un sixième ordre, le dorique grec, ou ordre de Pæstum, dans lequel la colonne n'a que 11 modules 8 parties, dont 18 parties $\frac{5}{6}$ pour le chapiteau; 10 modules 5 parties $\frac{1}{6}$ pour le fût, et seulement 8 parties pour la base, qui se réduit à une simple *plinthe* ou marche continue supportant le fût de la colonne.

Les colonnes, dans ces divers ordres, ne sont pas exactement cylindriques dans toute leur hauteur. A partir du premier tiers, elles vont en diminuant de diamètre vers le haut; la diminution totale a été fixée à $\frac{1}{6}$ par Vignole, mais elle est beaucoup moindre dans les monuments anciens qui peuvent être cités pour modèles. Les maîtres d'un goût épuré conseillent de ne pas dépasser $\frac{1}{8}$ pour le toscan et le dorique, et $\frac{1}{10}$ pour l'ionique, le corinthien et le composite. (Voy. à l'article FÛT la construction à employer pour galber la colonne, c'est-à-dire pour tracer sa génératrice en ayant égard à la diminution.)

Alberti, célèbre architecte qui vivait à Florence dans le quinzième siècle, s'autorisant de quelques exemples pris dans l'antiquité, imagina de renfler la colonne vers le tiers à partir du bas, le fût diminuant ainsi de diamètre à partir de ce tiers, vers le bas et vers le haut. Ce système a été proposé de nouveau par Vignole dans le seizième siècle, et adopté par quelques architectes, qui l'ont gâté en l'exagérant. Ce renflement, applicable surtout aux ordres ionique, corinthien et composite, est d'un effet gracieux quand il est maintenu dans de justes limites. On ne peut nier que ce ne soit l'imitation de la forme que prend un cylindre soumis par ses deux bases à une forte pression (Voy. COMPRESSION), et qu'ainsi l'exemple du renflement dont il s'agit n'ait été pris dans la nature, comme beaucoup d'autres formes adoptées par les architectes de l'antiquité. On trouvera le tracé de ce renflement à l'article FÛT.

On donne le nom de *colonnes engagées* à celles qui pénètrent d'une certaine quantité dans un mur; elles sont généralement engagées jusqu'aux $\frac{2}{3}$ de leur rayon, ou au tiers de leur diamètre. Cepen-

dant, dans l'ordre toscan sans piédestal, les colonnes sont engagées jusqu'aux $\frac{3}{8}$ de leur diamètre.

On appelle *colonnes torsées* celles qui, au lieu de présenter une surface de révolution, offrent, avec les mêmes sections transversales, une surface hélicoïdale. On en trouvera le tracé à l'article FÛT.

On nomme *colonnes accouplées* celles qui sont réunies deux à deux pour porter un entablement commun. Dans ce cas la distance des deux colonnes, d'axe en axe, doit être au moins le double du diamètre de chacune, afin que l'intervalle entre les deux colonnes soit au moins égal au diamètre. Les hommes de goût condamnent l'emploi des colonnes accouplées.

COLTIS (COUPLE DE), le dernier des couples dévoyés, placé à l'avant de la coque d'un navire. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

COLURES (en grec κολουροι, de κολος, tronqué, et de ούρα, queue, dénomination dont l'origine n'est pas bien connue), grands cercles de la sphère céleste, qui passent par l'axe du monde, et l'un par les points équinoxiaux, c'est le *colure des équinoxes*, et l'autre par les points solsticiaux, c'est le *colure des solstices*. Les colures sont perpendiculaires à l'équateur; le colure des solstices est en même temps perpendiculaire à l'écliptique.

COMBLE, partie la plus élevée d'un bâtiment, présentant un ou plusieurs plans inclinés sur lesquels s'applique la couverture. On donne le nom d'*égout* à chacun de ces plans inclinés; et le comble est dit à un *égout* ou à deux *égouts* selon qu'il présente un ou deux de ces plans. Dans le premier cas, qui ne se rencontre que dans les constructions de peu d'importance, le comble prend le nom d'*appentis* (fig. 1). Le plus souvent le comble est à deux égouts, et formé par deux plans inclinés qui se coupent suivant une horizontale, appelée *faîte* ou

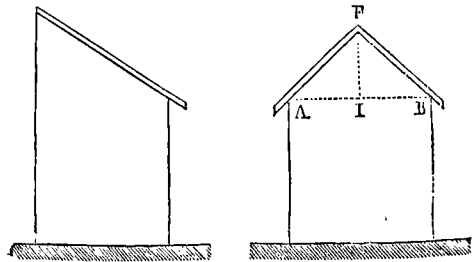


Fig. 1.

Fig. 2.

ligne de couronnement, laquelle est parallèle au plus grand côté du rectangle qui sert de base au bâtiment. Lorsque les murs qui correspondent aux plus petits côtés s'élèvent jusqu'au faîte, il en résulte des faces verticales et triangulaires, telles que AFB (fig. 2), auxquelles on donne le nom de *pignons*. Si les côtés AF et BF sont ornés d'une corniche, le pignon prend le nom de *fronton*; et si la même corniche se répète en outre suivant l'horizontale AB, l'espace triangulaire compris entre les trois corniches forme le *tympant* du fronton.

Lorsqu'on ne veut pas élever les murs latéraux jusqu'au faîte, on forme le comble de quatre plans inclinés; ceux qui aboutissent aux plus longs côtés AC et BD (fig. 3) du rectangle formé par la partie supérieure des murs sont des trapèzes, dont AFEC

et BFED figurent les projections horizontales, et qui se réunissent suivant la ligne de faite EF; ces trapèzes se nomment les *longs pans*. Les deux autres plans inclinés sont des triangles projetés en

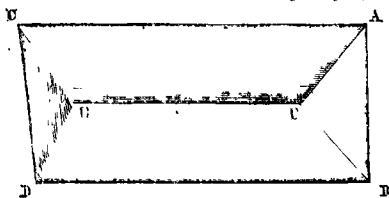


Fig. 3.

AFB et CED; on leur donne le nom de *croupes*; la croupe est dite *droite*, lorsque, comme dans la figure 3, la base AB du triangle est perpendiculaire aux arêtes de longs pans AC et BD; la croupe est dite *biaise*, lorsque le côté AB n'est pas perpendiculaire à ces droites (Voy. CROUPE DROITE, CROUPE BIAISE). Les arêtes saillantes FA, FB, EC, ED que présente le comble sont formées par des pièces de charpente taillées en dos d'âne, et auxquelles on donne le nom d'*arêtiers*.

Lorsque deux bâtiments se croisent, comme on le voit fig. 4, et que les combles, supposés de même

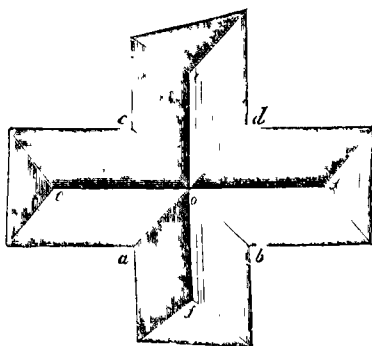


Fig. 4.

hauteur, se rencontrent, ils présentent quatre angles dièdres rentrants dont les arêtes Oa, Ob, Oc, Od, aboutissant au point d'intersection O des lignes de faite ef, e'f', sont formées par des pièces de charpente creusées en gouttière auxquelles on donne le nom de *noues* (Voy. ce mot).

Si les deux bâtiments, au lieu de se croiser, se rencontraient sans se pénétrer mutuellement, comme l'indique la figure 5, il y aurait un arêtier Oa du côté de l'angle dièdre saillant, et une noue Ob du côté de l'angle dièdre rentrant.

Pour couvrir un pavillon carré on emploie le plus ordinairement quatre croupes égales, représentées (fig. 6) en projection horizontale par les triangles AOB, BOC, COD, DOA. Cette disposition est celle que l'on désigne habituellement sous le nom de *comble en pavillon*. Mais on peut aussi élever les quatre murs en pointe de manière à former autant de pignons, et couvrir chacun d'eux par un comble à deux égouts; cette disposition est représentée par la figure 7, en élévation et en projection horizontale. On peut encore adopter la disposition représentée figure 8 par sa projection horizontale, et par sa

projection sur un plan vertical parallèle à l'une des diagonales du carré qui forme la base du pavillon. Le comble se compose, comme on voit, de quatre plans inclinés, ayant la forme de losanges, qui se

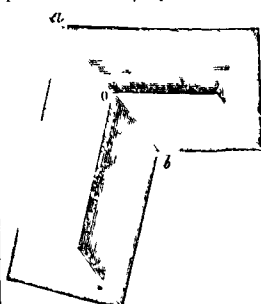


Fig. 5.

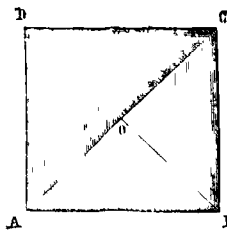


Fig. 6.

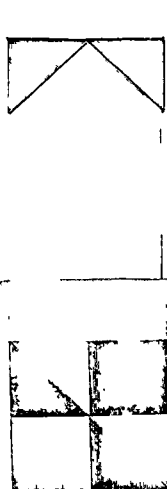


Fig. 7.

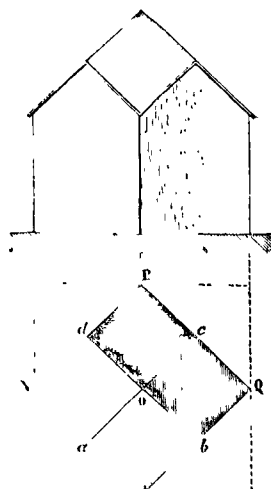


Fig. 8.

projetent horizontalement suivant les carrés OaMb, ObNc, OcPd, OdQa. Ce n'est autre chose que le reste d'une pyramide régulière ayant pour base le carré efgh, qui aurait été coupée par les quatre plans verticaux élevés suivant les côtés MN, NP, PQ, QM. Le pavillon présente ainsi quatre pignons, quoique le comble n'offre que quatre égouts.

Il existe quelques autres dispositions, mais elles sont généralement peu usitées.

La *pente* d'un comble est l'angle que chacun des plans inclinés qui le composent fait avec l'horizon. Dans les combles à deux égouts, cette pente est exprimée par le rapport entre la hauteur FI (fig. 2) du comble, et la demi-largeur AI. Cette pente varie avec la latitude, ou plus exactement avec le climat. Dans le Nord, on faisait autrefois le triangle AFB équilatéral, ce qui donne pour la pente, ou pour la tangente de l'inclinaison du plan avec l'horizon,

$$\frac{FI}{AI} = \sqrt{3} = 1,73 \dots$$

On a même employé des pentes plus grandes; et il y a des exemples de constructions anciennes dans lesquelles FI est le double et même le triple de AI.

On avait pour but, en employant des pentes aussi considérables, d'empêcher la neige de s'accumuler sur les toits; mais l'expérience prouve que le moyen n'a pas toute l'efficacité qu'on lui suppose, tandis que les inconvénients d'une charpente nécessairement massive et dispendieuse sont frappants. Dans le Midi on emploie au contraire des pentes au-dessous de 45°; mais lorsque la pente est beaucoup inférieure, les vents arrachent facilement les tuiles ou les ardoises, les combles conservent plus d'humidité, et en même temps la capacité des greniers diminue. On voit donc qu'il y a des limites entre lesquelles la pente d'un comble doit rester comprise. On a voulu établir une relation mathématique entre la pente et la latitude; mais c'est une idée chimérique, et il vaut mieux s'en tenir dans chaque localité à ce que l'expérience a appris. Si l'on appelle α l'inclinaison du comble par rapport à l'horizon, on a trouvé qu'à Paris et dans les départements voisins, on pouvait prendre $\tan \alpha$

entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, si la toiture est formée de tuiles creuses,

entre $\frac{2}{3}$ et 1, — d'ardoises,

entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{4}$, — de tuiles plates,

ce qui donne pour α de 18 à 26 degrés dans le premier cas, de 33 à 45 degrés dans le second, de 36 à 51 dans le troisième. Il en résulte que, dans les deux derniers cas, on peut adopter $\alpha = 45^\circ$, ce qui est aussi l'inclinaison la plus avantageuse au point de vue de la capacité utile que peuvent présenter les combles.

La charpente d'un comble à deux égouts comprend un certain nombre de fermes, sorte de chevales triangulaires qui s'appuient sur les murs et supportent toute la toiture; ces fermes sont reliées à la partie supérieure par une pièce horizontale appelée *FAITAGE*, et à la partie inférieure par des *sablères* reposant sur les murs; elles sont reliées en outre par d'autres pièces horizontales appelées *pannes* ou *liernes*, suivant leur disposition. Sur ces pannes sont établis les *chevrons*, pièces de bois dirigées suivant la ligne de plus grande pente des longs pans, et qui jouent par rapport à ces pans de bois le rôle des solives dans un plancher. Sur les chevrons on cloue un *lattis* formé de lattes ou de planches, sur lesquelles on fixe enfin les tuiles ou les ardoises. (Voy. l'article FERME et les différents mots mis en italiques dans ce paragraphe.)

On construit aussi des combles à surface courbe, et particulièrement des combles cylindriques, coniques et sphériques. Les combles cylindriques extérieurement se composent d'un certain nombre de fermes affectant la forme de la section droite du cylindre, et réunies entre elles par des pannes, sur lesquelles s'établissent les chevrons courbes qui reçoivent le lattis et la toiture. Les arbalétriers courbes sont formés de pièces assemblées à trait de Jupiter en des points qui ne correspondent pas à une panne. Les chevrons doivent être assemblés aux *sablères* et au *faitage* par des assemblages à tenon et mortaise, attendu que l'assemblage se fait à angle droit, et qu'un simple embrèvement ne pourrait pas suffire comme dans les combles plans.

Il peut arriver que le comble ne soit cylindrique qu'intérieurement. Dans ce cas la toiture est portée

par un comble plan ordinaire; mais la surface cylindrique est déterminée par des pièces cintrées correspondantes à chaque ferme et qui s'assemblent avec les *sablères*, la *jambe de force* et l'*entrait*, d'autres pièces cintrées, établies dans l'intervalle des fermes, s'assemblant avec les *liernes* et avec la pièce de *fûte* qui réunit les milieux des entrails des différentes fermes. C'est sous ces pièces cintrées que l'on cloue le lattis, qui est lui-même recouvert soit d'une toile, soit d'un enduit, soit même de panneaux de menuiserie.

La disposition la plus ordinaire des combles coniques est la suivante: sur une *sablère* circulaire SSSS (fig. 9), consolidée par deux tirants diamé-

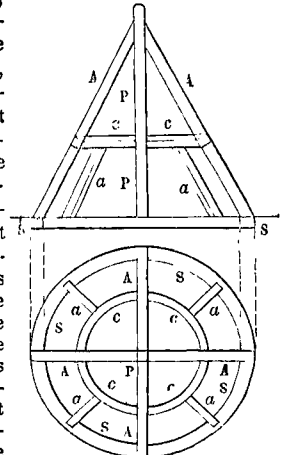


Fig. 9.

traux à angle droit, reposent les extrémités inférieures de quatre arbalétriers A, A, A, A, correspondant aux tirants, et appuyés par leur extrémité supérieure sur un poinçon commun P dont ces mêmes tirants reçoivent le pied. Ces arbalétriers sont réunis vers leur partie moyenne par une couronne horizontale formée d'une suite de liernes courbes c, c, c, c assemblées à tenon et mortaise dans les arbalétriers; et sur cette couronne, dans les intervalles des arbalétriers, s'appuient des demi-arbalétriers a, a, a, a, reposant aussi par leur pied sur la *sablère* circulaire. Si le comble était de grandes dimensions, il faudrait, au lieu d'une couronne, en employer deux, et multiplier le nombre des demi-arbalétriers, dont les uns s'éleveraient jusqu'à la couronne supérieure, tandis que d'autres, placés dans les intervalles de ceux-ci, s'arrêteraient à la couronne inférieure. En même temps, pour consolider la *sablère*, il faudrait réunir les deux tirants TT par des goussets g, g, g (fig. 10) sur lesquels on ferait porter des demi-tirants t, t, t, t, qui joueraient le rôle des coyers d'une croupe droite (Voy. ce mot). L'ensemble de ces pièces horizontales forme ce que l'on appelle l'*enrayure*.

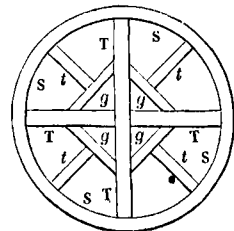


Fig. 10.

On forme les combles sphériques de petites dimensions par une *sablère* circulaire et par un certain nombre de couronnes horizontales cc, c'c' (fig. 11), disposées suivant les parallèles; la *sablère* et ces couronnes sont reliées entre elles par des pièces courbes a, a, a, disposées suivant les méridiens, et jouant ensemble le rôle d'arbalétriers. L'*enrayure* (fig. 12) est ici formée de même par

un certain nombre de couronnes concentriques, ax , yy , réunies par des pièces droites t , t , placées dans le sens des rayons, et figurant autant de tirants ou demi-tirants.

Quelquefois le comble est formé de chevrons cir-

Fig. 11.

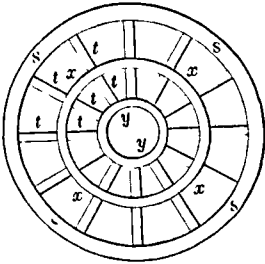
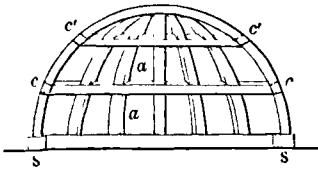


Fig. 12.

culaires qui s'assemblent par leur pied avec la sablière, et par le haut avec une pièce centrale appelée *noyau d'assemblage*. Les chevrons sont reliés par des liernes horizontales dirigées suivant les parallèles de la sphère. Le noyau d'assemblage se prolonge verticalement en forme de *poignon* quand le comble sphérique recouvre une voûte sphérique intérieurement, et il sert de lien entre les deux combles.

Dans les combles sphériques de grandes dimensions et destinés à supporter une charge considérable, comme le poids d'une coupole par exemple, on est obligé d'employer un système plus compliqué, et de recourir à de véritables fermes, en nombre plus ou moins grand, reliées par des pièces circulaires dans le sens des parallèles, et reposant sur une forte enrayure, plus ou moins compliquée elle-même. Ainsi le comble sphérique des Invalides, construit par Mansard, ne contient pas moins de 36 demi-fermes, dont 4 s'élèvent jusqu'à la coupole, 8 autres jusqu'à une hauteur un peu moindre, et les 24 autres jusqu'à une hauteur moindre encore. Dans un pareil cas, la voûte sphérique qui forme l'intrados, visible de l'intérieur du monument, est placée plus bas, et rendue indépendante du comble. Nous renverrons pour plus de détails sur ces combles au *Traité de l'art de la Charpente* de M. Emy, et au *Traité de Charpente* de J. Adhémar.

On construit aussi des *combles elliptiques*. On peut former le comble d'une série de fermes elliptiques parallèles. On peut aussi adopter le même système que pour les combles sphériques, c'est-à-dire une série de chevrons en ellipses, réunis par un noyau d'assemblage et par des liernes horizontales elliptiques. Monge a indiqué, dans le *Journal de l'École polytechnique*, un autre système de comble elliptique, fondé sur la considération des lignes de courbure; mais il n'a jamais été exécuté.

Les voûtes annulaires sont ordinairement recouvertes par un comble conique à deux égouts, dont l'un verse les eaux à l'extérieur et l'autre à l'intérieur. Ce comble est composé de fermes dont les plans sont dirigés vers l'axe vertical de la voûte; les chevrons sont reliés par des liernes circulaires horizontales; les sablières et la ligne de faite figurent également des cercles horizontaux.

On emploierait la même disposition si la surface de la toiture, au lieu d'être composée de deux cônes, devait présenter la forme d'un tore; mais les fermes seraient alors circulaires.

COMÈTES (du grec $\kappa\omicron\mu\acute{\eta}\tau\eta\varsigma$, chevelu), corps célestes qui ont un mouvement propre sur la sphère, comme les planètes, mais qui s'en distinguent, comme on va le voir, par des caractères spéciaux. L'aspect ordinaire d'une comète présente un point brillant auquel on donne le nom de *noyau*, entouré d'une nébulosité que l'on nomme la *chevelure*, et suivi d'une traînée lumineuse à laquelle on donne le nom de *queue*; le noyau et sa chevelure constituent ce que l'on nomme la *tête* de la comète. Tant qu'une comète est très-éloignée du soleil, elle ne présente qu'une nébulosité ronde ou ovale, plus lumineuse au centre que sur les bords. C'est en approchant du soleil que la queue se développe, quelquefois dans un temps très-court; cette queue est toujours dirigée dans le prolongement du rayon vecteur qui va du soleil à la comète; elle embrasse quelquefois un arc d'une très-grande étendue sur la voûte céleste. Elle diminue et disparaît lorsque la comète, après avoir passé près du soleil, s'en éloigne ensuite de plus en plus. — Nous disons que c'est là l'apparence ordinaire; mais il y a à cet égard la plus grande diversité. Quelques comètes ont plusieurs queues; d'autres ont, indépendamment de la queue, une aigrette dirigée en sens contraire et partant de la chevelure; d'autres au contraire n'ont point de queue; on en a vu qui n'avaient même pas de chevelure et pouvaient être confondues, pour l'aspect, avec une planète. Mais, ce qui établit une première distinction entre les deux classes de corps célestes, c'est que les planètes sont opaques et ont une forme sphéroïdale déterminée, tandis que les comètes paraissent formées d'une matière si ténue qu'on aperçoit les étoiles à travers le noyau lui-même; et que, d'un autre côté, leur forme et leur aspect se modifient, et quelquefois d'une manière notable, pendant la durée de leur apparition.

Les comètes paraissent décrire des ellipses très-allongées qui se confondent sensiblement avec des paraboles dans la partie de leur cours pendant laquelle elles sont visibles pour nous; aussi, la parabole étant une courbe beaucoup plus simple que l'ellipse, les astronomes adoptent-ils pour les comètes, au moins dans une première approximation, l'hypothèse d'une trajectoire parabolique. Les éléments nécessaires pour déterminer cette trajectoire sont au nombre de cinq, savoir : 1° *l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique*; 2° *la longitude du nœud ascendant*, c'est-à-dire l'angle que l'intersection de l'orbite avec l'écliptique fait avec la ligne des équinoxes, ou avec une parallèle à cette ligne menée par le centre du soleil; 3° *la longitude du périhélie*, ou la longitude du sommet de la parabole; 4° *la distance périhélie*, c'est-à-dire la distance du sommet au foyer; 5° enfin *l'époque du passage de*

ta comète au périhélie. A ces éléments, il faut ajouter le sens, soit direct, soit rétrograde, dans lequel la comète parcourt sa trajectoire. Trois observations suffisent pour déterminer ces éléments, pourvu qu'elles ne soient pas trop rapprochées.

Une nouvelle distinction se manifeste ici entre les planètes et les comètes; les planètes décrivent des ellipses peu excentriques et peu inclinées sur l'écliptique; elles les décrivent toutes dans le sens direct. Les orbites des comètes sont des paraboles ou des ellipses généralement très-excentriques, qui coupent l'écliptique sous toutes les inclinaisons, depuis 0 jusqu'à 90°; et leur mouvement peut aussi bien être rétrograde que direct.

Pour beaucoup de comètes, l'hypothèse d'une trajectoire parabolique peut être considérée comme l'expression de la vérité; ces astres se montrent une fois à nous, s'approchent du soleil, puis s'en éloignent pour ne plus reparaitre. Mais d'autres comètes doivent se mouvoir sur des ellipses; et on en a la certitude pour un petit nombre d'entre elles. Dans ce cas l'astre, après avoir disparu pendant un certain temps, reparait pour disparaître encore, et ainsi de suite indéfiniment; ces comètes sont dites *périodiques*. Mais ce n'est point à leur aspect que les comètes périodiques peuvent être reconnues; cet aspect change dans le cours même d'une apparition, et à plus forte raison d'une apparition à l'autre. Ce n'est pas même par l'identité complète de la trajectoire que la périodicité se manifeste; les comètes ont une masse si faible, que leur mouvement est troublé par tous les corps célestes dont elles s'approchent et particulièrement par les planètes. C'est à l'analogie des éléments que l'on peut soupçonner l'identité de deux comètes; mais il faut étudier le mouvement avec soin, en tenant compte de toutes les causes perturbatrices pour arriver à la démonstration complète de cette identité. On peut alors prédire avec quelque certitude le retour de la comète.

Il n'y a encore que 4 comètes dont la périodicité ait été complètement démontrée, ce sont :

1° La *comète de Halley*, observée en 1531 par Apian, en 1607 par Képler et Longomontanus, en 1682 par Lahire, Picard, Hévélius et Flamsteed; elle reparut en 1759 conformément aux prédictions de Halley; elle a été observée de nouveau en 1835. Sa période est de 76 ans environ. Son orbite, inclinée d'environ 17° $\frac{1}{2}$ sur le plan de l'écliptique, s'étend au delà de l'orbite de Neptune.

2° La *comète à courte période*, observée en 1818, à Marseille, par M. Pons, et reconnue par M. Encke comme identique à une comète observée en 1805. Sa période est de 3^{ans}, 3. Son orbite est comprise à l'intérieur de celle de Jupiter.

3° La *comète de Biela*, ainsi désignée du nom du capitaine autrichien qui l'a découverte en 1826. Elle avait déjà été observée en 1805 et en 1772. MM. Gambart et Clausen ont trouvé que sa période est de 6 ans $\frac{1}{2}$. Son orbite s'étend un peu au delà de celle de Jupiter. Cette comète a présenté une circonstance singulière lors de son apparition en 1846 : elle s'est divisée en deux parties, de manière à présenter deux comètes semblables, très-voisines l'une de l'autre. Elle s'est remontrée sous le même aspect en 1852, mais la distance des deux noyaux avait notablement augmenté

4° La *comète de M. Faye*, observée pour la première fois en 1843. Le Dr Goldschmidt reconnut qu'elle décrit une ellipse assez peu excentrique, et que sa période est de 7 ans $\frac{1}{2}$. Son orbite s'étend un peu au delà de celle de Jupiter.

L'étude du mouvement des comètes périodiques a beaucoup d'importance en Astronomie, parce que les perturbations que ce mouvement éprouve servent à déterminer la masse des planètes.

Les comètes, au contraire, ne paraissent avoir aucune influence sur les mouvements planétaires, ni sur les mouvements des satellites des planètes.

La masse des comètes est donc excessivement faible, car elles occupent souvent dans le ciel une étendue considérable. On a fait beaucoup d'hypothèses sur la nature de ces corps. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est qu'ils sont constitués par une matière dont la densité est de beaucoup inférieure aux substances gazeuses les plus légères que nous connaissons, et que la lumière qu'ils nous envoient est de la lumière réfléchie venant du soleil. La chaleur solaire paraît avoir une grande influence sur le développement de la queue des comètes, puisque c'est dans le voisinage du périhélie que le plus grand développement a toujours lieu.

COMMUNE (Faire une). Terme de bourse. (Voy. MARCHÉS AU COMPTANT.)

COMPARAISON, opération qu'il faut faire en mer pour déterminer l'heure précise que marquait un chronomètre à l'instant d'une observation astronomique. Les observations se font, en effet, sur le pont, tandis que les chronomètres sont généralement établis dans le faux pont; on est donc obligé de se servir d'une montre auxiliaire que l'on consulte au moment de l'observation, mais qui a été comparée au chronomètre auparavant et qu'on lui compare de nouveau après. Cette montre auxiliaire qui doit avoir une marche régulière, sans être assujettie à la même précision qu'un chronomètre, porte le nom de *montre de comparaison*. Le calcul nécessaire pour obtenir l'heure du chronomètre à l'instant de l'observation est des plus simples. Soient m_1 et c_1 les heures que marquaient la montre et le chronomètre à l'instant de la première comparaison, m_2 et c_2 les heures marquées par ces deux instruments à l'instant de la seconde comparaison, m l'heure marquée par la montre à l'instant de l'observation, et x l'heure correspondante du chronomètre. On peut admettre que dans l'intervalle des deux comparaisons les deux instruments ont marché d'une manière régulière, et par conséquent proportionnelle; on doit donc avoir

$$\frac{x - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{m - m_1}{m_2 - m_1}, \text{ d'où } x = c_1 + (c_2 - c_1) \cdot \frac{m - m_1}{m_2 - m_1}.$$

Si, par exemple, on suppose $c_1 = 5^h 45^m$; $c_2 = 5^h 56^m$; $m_1 = 4^h 18^m 21^s, 4$; $m_2 = 4^h 29^m 35^s, 6$, et $m = 4^h 24^m 13^s, 8$,

$$\text{on trouvera } x = 5^h 45^m + 11^m \cdot \frac{5^m 52^s, 4}{11^m 14^s, 4}$$

$$\text{ou } x = 5^h 45^m + 11^m \cdot \frac{352, 4}{674, 2} = 5^h 50^m 4^s, 5$$

pour l'heure que marquait le chronomètre à l'instant de l'observation.

COMPARATEUR, instrument qui sert à vérifier les mesures de longueur. On en distingue deux espèces : le comparateur pour les mesures *à bouts*, et le comparateur pour les mesures *à traits*.

Le *comparateur pour les mesures à bouts* se compose d'une table en fonte, bien dressée, vers l'une des extrémités de laquelle on peut fixer, en un point quelconque, un talon triangulaire en acier. On appuie contre l'arête de ce talon l'un des bouts de la mesure à vérifier. Vers l'autre extrémité de la table est disposée une petite tige en acier, entourée d'un ressort à boudin auquel elle est liée vers son bout le plus éloigné du milieu de la table. C'est contre l'extrémité de cette tige la plus voisine du centre de la table qu'on fait appuyer le second bout de la règle à vérifier. L'autre extrémité de la tige d'acier vient alors agir sur un levier à bras très-inégaux, dont le plus grand parcourt un arc de cercle divisé. Si deux règles, placées de la même manière, donnent la même indication sur ce cercle, on peut affirmer qu'elles ont la même longueur. Dans le cas contraire, le déplacement du levier sur l'arc de cercle exprime en millièmes de millimètre la différence de longueur des deux règles.

Le *comparateur pour les mesures à traits* se compose d'un banc en fonte, sur lequel glissent longitudinalement deux chariots portant chacun un microscope. À côté de ce banc est disposée une table sur laquelle on place les règles à comparer. Cette table peut s'élever ou s'abaisser à l'aide de vis de rappel; d'autres vis de rappel servent à déplacer les règles dans le sens longitudinal ou dans le sens transversal. Chaque microscope peut aussi être élevé ou abaissé; il peut en outre recevoir un mouvement horizontal dans le sens perpendiculaire à la direction du rail qui guide le chariot. Chacun de ces instruments est muni d'un réticule fixe et d'un réticule mobile à l'aide d'une vis micrométrique. Un tour complet de cette vis fait marcher les fils du réticule mobile d'un demi-millimètre; l'écrou de la vis porte un cadran dont la circonférence est divisée en 500 parties égales; on peut donc apprécier ainsi un déplacement d'un millième de millimètre.

Pour se servir de cet appareil on fait d'abord coïncider la croisée des fils des deux réticules de chaque microscope. On place sur la table une des règles à comparer; on l'amène dans le champ et au foyer des deux microscopes; et l'on déplace ceux-ci jusqu'à ce que les traits extrêmes de la règle coïncident avec la croisée des fils. On remplace alors la première règle par la seconde. On l'amène comme ci-dessus dans le champ et au foyer des deux microscopes, et on la déplace de manière que l'un des deux traits extrêmes coïncide avec la croisée des fils de l'un des microscopes. Si la même coïncidence a lieu pour l'autre trait extrême et pour la croisée des fils de l'autre microscope, on peut affirmer que les deux règles ont exactement la même longueur. Dans le cas contraire on agit sur la vis micrométrique du second microscope jusqu'à ce que la croisée du réticule mobile vienne coïncider avec le dernier trait de la règle; la quantité dont le réticule s'est déplacé exprime la différence de longueur des deux règles.

COMPAS, instrument qui sert à mesurer des distances et à tracer des circonférences de cercle. Il se compose dans le premier cas de deux branches parfaitement égales, terminées en pointe à l'une de leurs extrémités et réunies à l'autre par une charnière autour de laquelle elles peuvent glisser à frottement doux. On fait ordinairement le corps des

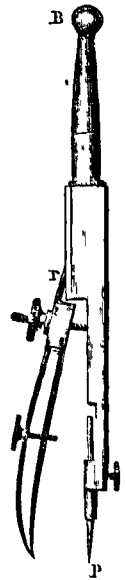
branches en laiton et leurs extrémités en acier. Pour qu'un compas soit bon, il faut que les deux branches s'ouvrent ou se ferment par mouvements aussi doux qu'on le veut, et qu'en rapprochant les pointes leurs extrémités viennent coïncider parfaitement l'une avec l'autre. Lorsque l'instrument doit servir à tracer des circonférences, l'une de ses extrémités peut être enlevée et remplacée par une autre qui est disposée de manière à recevoir un crayon, ou bien à servir de tire-ligne. Lorsqu'on a à tracer des circonférences de grand rayon, on remplace l'extrémité mobile par une pièce spéciale qui a une longueur suffisante, et qui peut se recourber à volonté de manière que le crayon ou le tire-ligne soit toujours dans une position à peu près perpendiculaire à la feuille de dessin. Pour tracer au contraire des circonférences de très-petit rayon, on emploie un compas particulier que l'on appelle *compas à balustre*: il se compose d'une branche principale, dont la pointe P peut être allongée ou raccourcie; et d'un tire-ligne relié à la branche principale par un ressort r; on écarte plus ou moins le tire-ligne en faisant tourner la vis A dont l'écrou est la tête même du tire-ligne. La branche principale est terminée par une petite boule B que l'on fait tourner entre ses doigts pour tracer une circonférence dont le centre est P.

Un compas est dit à *pointes sèches* lorsque aucune de ses deux branches ne porte ni crayon ni tire-ligne. Les compas à pointes sèches servent surtout à mesurer des distances.

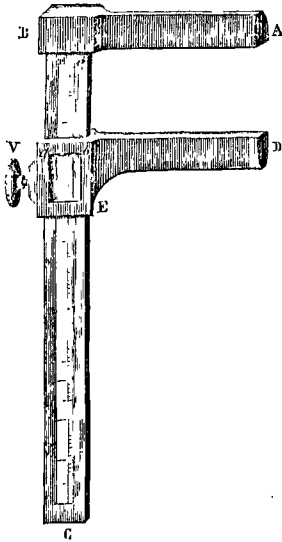
On appelle *compas à verge* un instrument dont on se sert pour tracer des circonférences de très-grand rayon, comme cela est souvent nécessaire dans certaines opérations graphiques, et particulièrement dans le tracé des cartes de géographie. Cet instrument n'est autre chose qu'une règle de 1 mètre de long, divisée en centimètres et millimètres, à l'une des extrémités de laquelle on adapte une *garniture*, qu'on peut y fixer à l'aide d'une vis de pression, et qui présente une pointe perpendiculaire à la face inférieure de la règle, et servant de centre; tandis qu'en un autre point quelconque de la règle on peut adapter de même une autre garniture munie soit d'une pointe sèche, soit d'un portecrayon, soit d'un tire-ligne. Quelquefois la règle est à tirage, afin de pouvoir être réduite à un moindre volume quand on veut la transporter. Quelquefois aussi la garniture mobile est munie d'un vernier qui donne les cinquièmes, et permet de placer la pointe à tracer au point précis où elle doit être.

Il y a des *compas à trois branches* qui servent à prendre les distances respectives de trois points et à transporter un triangle d'une figure sur une autre. Cet instrument est peu commode et rarement employé.

COMPAS A COULISSE, instrument employé dans l'artillerie pour mesurer certaines dimensions extérieures des bouches à feu, telles que le diamètre de



la pièce, celui des tourillons et de leurs enbases, la distance de celles-ci, etc., etc. Il se compose d'une équerre ABC, dont la plus grande branche est divisée dans sa longueur, et d'un curseur DE, parallèle



à la petite branche, et pouvant être fixé dans une position quelconque au moyen d'une vis de pression V. Pour mesurer avec cet instrument le diamètre d'une pièce, par exemple, on le place de manière que les branches AB et DE soient tangentes à un parallèle de la surface; on fixe la branche mobile, à l'aide de la vis V; et on lit sur la grande branche, à travers une fenêtre pratiquée dans le curseur, la division à laquelle correspond le bord ab de la fenêtre. (Ce bord correspond au zéro de l'échelle quand le curseur est amené au contact de la branche AB.)

Cet instrument est fondé sur le même principe que l'ÉTALON A COULISSE (*Voy. ce mot*); mais il est de dimensions plus grandes. Le curseur ne porte pas de vernier; les distances peuvent être évaluées sans cet auxiliaire à moins d'un millimètre, ou même d'un demi-millimètre près; ce qui est suffisant pour les mesures à effectuer à l'aide du compas à coulisse.

COMPAS D'ÉPAISSEUR, compas à branches courbes qui sert à prendre l'épaisseur des corps. Il a la forme représentée par la figure 1. Il se compose de deux branches en S parfaitement égales AOB, A'OB' et symétriques chacune par rapport au point O, où elles sont assemblées à charnière. Il en résulte que l'écart des points B et B' est toujours le même que celui des points A et A'. Si donc on saisit entre les branches OA et OA' le corps dont on veut mesurer l'épaisseur, l'écart des points B et B' sera l'épaisseur demandée.

Quand il s'agit de mesurer le diamètre intérieur d'un cylindre, on donne au compas la forme indiquée par la figure 2. Les compas de cette forme sont connus dans les ateliers sous le nom de *mattre-d-danser*. Le principe en est toujours le même; c'est-à-dire que l'instrument est construit de telle sorte que la distance des pointes extérieures B et

B' soit toujours égale à celles des pointes A et A'.

Il suffit, pour que cette condition soit que les trois points A, O, B soient en ligne

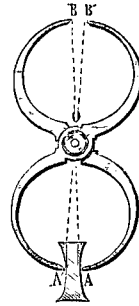


Fig. 1.

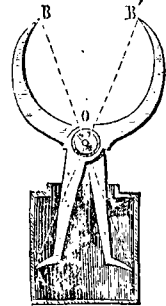
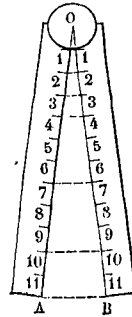


Fig. 2.

et qu'on ait $OB = OA$; et de même pour l'autre branche. Car dès lors les deux triangles AOA' et BOB' sont toujours égaux, comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux.

COMPAS DE PROPORTION, instrument qui sert à prendre des parties aliquotes d'une longueur donnée. Il se compose de deux règles égales OA et OB,



pouvant tourner à charnière dans leur plan, et divisées sur les bords en regard en un même nombre de parties égales. Si, par exemple, les bords OA et OB ont été divisés en 12 parties égales, et qu'on ouvre les branches de manière que la distance AB soit égale à une ligne donnée,

la distance des points 1 et 1 en sera le $\frac{1}{12}$;
 la distance des points 2 et 2 en sera les $\frac{2}{12}$ ou le $\frac{1}{6}$;
 — 3 et 3 — $\frac{3}{12}$ — $\frac{1}{4}$,
 — 4 et 4 — $\frac{4}{12}$ — $\frac{1}{3}$,
 — 6 et 6 — $\frac{6}{12}$ ou la moitié.

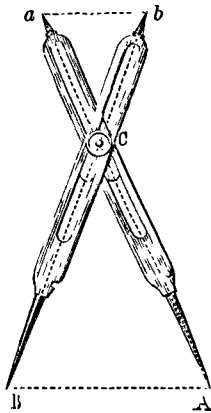
Si les deux branches ont été écartées de manière que la distance des points 10 et 10 soit égale à la longueur donnée, les distances 1 1, 2 2, 3 3, etc., en seront respectivement $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc.

Si l'on veut prendre les $\frac{3}{7}$ d'une longueur donnée, on écartera les branches de manière que la distance

des points 7 et 7 soit égale à cette longueur ; la distance des points 3 et 3 sera alors les $\frac{3}{7}$ de la longueur donnée. Et ainsi de suite.

Ces propriétés tiennent évidemment à ce que les triangles tels que 101, 202, 303, etc., AOB, sont tous semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels.

COMPAS DE RÉDUCTION, instrument dont on se sert pour réduire, dans un rapport donné, toutes



les lignes d'un dessin. Il se compose de deux branches croisées égales Aa, Bb, percées chacune d'une rainure longitudinale dans laquelle s'engage un curseur C que l'on peut faire glisser le long des deux branches, et fixer, à l'aide d'une vis, dans une position déterminée. Quand on veut se servir de l'instrument, on commence par superposer les deux branches et desserrer la vis du curseur. On fait glisser ensuite ce curseur jusqu'à ce qu'un

trait transversal, tracé près de son extrémité, vienne se placer dans le prolongement d'un trait semblable tracé sur la branche Aa, et à côté duquel est inscrit le rapport qu'on veut établir entre les distances Ca et CA; par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. On serre

alors la vis du curseur, et l'on peut se servir de l'instrument pour la réduction qu'on a en vue. La distance des pointes a et b sera constamment une même fraction de la distance des pointes A et B; car les deux triangles aCb et ACB seront constamment semblables, puisque les côtés égaux Ca et Cb seront, par cela même, dans le rapport des côtés égaux CA et CB. On aura donc toujours

$$ab : AB = Ca : CA.$$

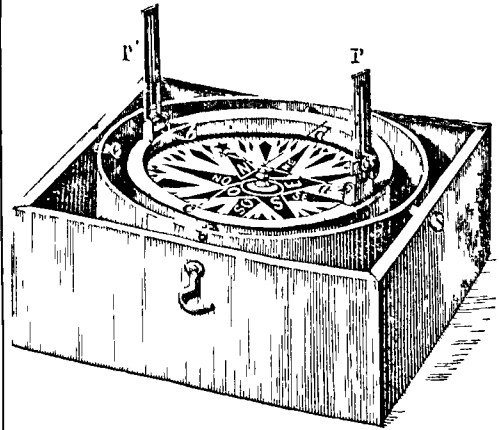
Le curseur glissant à frottement doux dans les rainures, il n'est pas difficile de l'amener au point où l'on veut. Cependant, pour mieux assurer ce mouvement, on arme quelquefois le curseur d'une petite roue dentée, engrenant avec une petite crémaillère fixée dans la rainure de la branche Bb.

Afin d'assurer la coïncidence des deux branches, quand on les superpose pour faire glisser le curseur, on place ordinairement sur la branche Bb une petite cheville qui entre dans une encoche de la branche Aa.

COMPAS DE ROUTE, Voy. BOUSSOLE MARINE.

COMPAS DE VARIATION, ou BOUSSOLE DE RELÈVEMENTS, boussole portative, ordinairement placée sur un support à trois pieds, et servant à bord des navires à mesurer l'azimut d'un astre ou d'un objet terrestre. La boîte qui contient l'aiguille est munie d'une *alidade concentrique* (Voy. ALIDADE; voyez aussi THEODOLITE), à laquelle sont adaptées deux pinnules diamétralement opposées, P et P'. Deux fils sont tendus à angle droit sur le bord de la boîte : l'un AB dans le plan des fils des pinnules, l'autre CD

suivant un diamètre perpendiculaire. Quelquefois l'instrument est placé à poste fixe dans un endroit du vaisseau d'où l'on puisse apercevoir librement l'horizon ; c'est le plus souvent une plate-forme si-



tuée au-dessus du dôme de l'escalier de l'arrière. Pour les observations de nuit, on adapte au compas de variation un fanal qui éclaire en dessous la rose du compas.

Chaque relèvement exige le concours de deux observateurs. Tandis que l'un vise à l'aide de l'alidade l'objet qu'il s'agit de relever, un autre observe l'angle que fait la ligne NS du compas avec la direction du fil CD; cet angle est le complément de celui que fait le vertical de l'objet relevé avec le méridien magnétique. On n'observe pas directement ce dernier angle, parce que dans cette opération le second observateur serait gêné par le premier.

Quand on veut relever un astre qui a un diamètre apparent notable, comme le soleil ou la lune, on relève le bord oriental, puis le bord occidental ; la moyenne des deux lectures donne le relèvement du centre.

Pour qu'on puisse relever un astre avec le compas de variation, il faut que sa hauteur ne dépasse pas 15°.

COMPENSATEUR, mécanisme qui, dans l'horlogerie, a pour fonction de corriger les effets des variations de température. (Voy. CHRONOMÈTRE, MONTRE, PENDULE.)

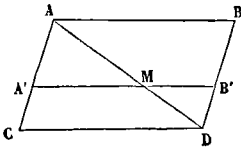
COMPENSATION GÉODÉSIQUE, méthode employée en Géodésie pour corriger ou compenser les erreurs des observations, de manière à obtenir les résultats les plus probables, en faisant concourir à ces résultats toutes les observations surabondantes. Cette compensation est fondée sur l'application de la méthode dite des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot). Voy. aussi l'art. ERREURS (Théorie des).

COMPOSANTE, nom donné à l'une quelconque des forces, des vitesses, des accélérations simultanées que l'on compose, c'est-à-dire que l'on remplace par une seule. (Voy. COMPOSITION DES FORCES, COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, COMPOSITION DES ROTATIONS.)

COMPOSITE (ORDRE), l'un des cinq ordres d'architecture (Voy. ORDRES D'ARCHITECTURE).

COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, opération qui a pour objet de remplacer plusieurs accélérations

tions simultanées par une seule. Considérons d'abord le cas de deux accélérations constantes dans le mouvement rectiligne. Imaginons qu'un point matériel, partant du point A sans vitesse initiale,



parcours la droite AC d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale. Tous les points de la droite mobile décrivant à chaque instant des chemins égaux et parallèles, le point matériel pourra être considéré comme ayant deux accélérations: l'une appartenant à son mouvement relatif sur la droite AB, l'autre dépendant du mouvement d'entraînement qui lui est commun avec cette droite, et qui est celle de l'extrémité A dans son mouvement sur AC. Soit B la position qu'occuperait le mobile sur la droite AB au bout du temps t si elle était fixe; soit C la position que prend l'extrémité A au bout du même temps, par suite du mouvement de la droite AB elle-même. Sur les droites AB et AC, construisons le parallélogramme ABCD. Soit A'B' la position de AB au bout d'un temps quelconque t' , et soit M la position du point matériel sur A'B'. Cela posé :

1° Le mobile parcourt la diagonale AD du parallélogramme ABCD. En effet, en vertu du mouvement de la droite AB parallèlement à elle-même, on aura, puisque ce mouvement est uniformément accéléré,

$$AA' : AC = t'^2 : t^2 ;$$

et, en vertu du mouvement du point matériel sur la droite mobile, on a, par une raison semblable,

$$A'M : A'B' \text{ ou } CD = t'^2 : t^2 ;$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$AA' : AC = A'M : CD.$$

Il en résulte que si l'on joint le point M au point A, les deux triangles AA'M et ACD seront semblables comme ayant un angle égal, $AA'M = ACD$, compris entre côtés proportionnels; par conséquent, les angles en A seront égaux, et les trois points A, M, D sont en ligne droite; ainsi le mobile est à un instant quelconque sur la diagonale AD; donc il parcourt cette diagonale.

2° Le point matériel se meut sur cette diagonale d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale. Car la similitude des mêmes triangles donne la proportion

$$AM : AD = AA' : AC = t'^2 : t^2.$$

Les espaces parcourus par le mobile sur la diagonale AD, à partir du point A, sont donc proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir; son mouvement est donc uniformément accéléré, sans vitesse initiale.

3° Si les accélérations suivant les côtés AB et AC du parallélogramme ABCD sont représentées en grandeur et en direction par ces côtés eux-mêmes, l'accélération suivant la diagonale AD sera représentée en grandeur et en direction par cette diagonale. Car si j , j' et J représentent ces trois accélérations, on aura, en vertu des propriétés du mouvement

uniformément accéléré (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ),

$$j = \frac{2AB}{t^2}, j' = \frac{2AC}{t^2}, J = \frac{2AD}{t^2},$$

et par conséquent

$$\frac{j}{AB} = \frac{j'}{AC} = \frac{J}{AD}.$$

Les accélérations considérées sont donc proportionnelles aux trois longueurs AB, AC et AD. Si donc les deux premières sont représentées par AB et AC, la troisième sera représentée par AD.

Il résulte de ce qui précède que: *si un point matériel partant du repos est animé de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformément accélérés, son mouvement absolu dans l'espace est encore un mouvement rectiligne et uniformément accéléré; et si les accélérations des deux mouvements composants sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés adjacents d'un parallélogramme, l'accélération du mouvement résultant est représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélogramme.*

Cette proposition est connue sous le nom de *parallélogramme des accélérations*. La démonstration de cette proposition est indépendante de la valeur du temps t ; par conséquent, le théorème subsisterait encore si les mouvements simultanés que l'on considère avaient une durée infiniment petite. Si les accélérations composants étaient variables, on pourrait toujours considérer le mouvement pendant un temps assez petit pour que ces accélérations pussent être regardées comme constantes, et dès lors on pourrait leur appliquer la règle du parallélogramme. C'est en ce sens qu'on peut dire d'une manière générale que *les accélérations se composent comme les vitesses*. (Voy. COMPOSITION DES VITESSES. Voyez aussi FORCES, COMPOSITION DES FORCES.)

COMPOSITION DES CHEMINS, opération qui consiste à remplacer les chemins élémentaires que décrit un mobile en vertu de plusieurs vitesses simultanées, par le chemin élémentaire décrit en vertu de la vitesse résultante. — La composition des chemins n'est autre chose au fond que la COMPOSITION DES VITESSES (Voy. ce mot). Si v , v' , v'' , etc., désignent les vitesses composants, V la vitesse résultante, et θ un temps très-petit pendant lequel ces vitesses peuvent être regardées comme constantes en direction et en grandeur, les chemins élémentaires e , e' , e'' , etc., décrits en vertu des vitesses composants, et le chemin E décrit en vertu de la vitesse résultante, auront pour expressions :

$$e = v\theta, e' = v'\theta, e'' = v''\theta, \dots, E = V\theta.$$

Il y aura donc entre les chemins les mêmes relations de grandeur et de direction qu'entre les vitesses. Ainsi :

Le chemin résultant de deux chemins composants est la diagonale du parallélogramme construit sur les chemins composants. Cette règle porte le nom de *Parallélogramme des chemins*.

Le chemin résultant de trois chemins composants est la diagonale du parallélépipède construit sur les chemins composants. Cette règle est connue sous le nom de *Parallélépipède des chemins*.

Le chemin résultant d'un nombre quelconque de chemins composants s'obtient en formant une ligne brisée qui ait pour côtés consécutifs des droites égales et parallèles aux chemins composants, et en

fermant le polygone par une droite qui est le chemin résultant. Cette règle porte le nom de Polygone des chemins.

COMPOSITION DES FORCES, opération qui a pour but de remplacer un système de forces, appliquées soit à un même point matériel, soit à un même corps solide, par le plus petit nombre possible de forces équivalentes, c'est-à-dire produisant le même effet.

I. Dans le cas où les forces données sont appliquées à un même point matériel, on peut toujours les réduire à une seule force équivalente; les forces données sont les composantes, et la force unique qui les remplace est leur résultante. Pour le faire voir, on commence par considérer deux forces constantes agissant simultanément sur un même point matériel partant du repos. Soient F et F' ces deux forces, appliquées en un même point A (fig. 1) et agissant

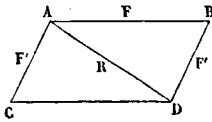


Fig. 1.

respectivement dans les directions AB et AC . On admet comme un principe expérimental que si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, chacune d'elles obtient son effet comme si elle était seule, c'est-à-dire que les mouvements qui seraient produits par ces forces agissant séparément coexistent sans se modifier mutuellement. Or, si la force F agissait seule, elle imprimerait au mobile, dans la direction AB , un mouvement uniformément accéléré (Voy. FORCE CONSTANTE), dont nous représenterons l'accélération par j ; si la force F' agissait seule, elle imprimerait au mobile, suivant la direction AC , un mouvement uniformément accéléré, dont nous représenterons l'accélération par j' . Les deux forces agissant simultanément en réalité, ces deux mouvements coexisteront sans se modifier, d'après le principe expérimental ci-dessus. Mais on sait (Voy. COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS) que le mouvement résultant sera un mouvement rectiligne uniformément accéléré; et que si les accélérations j et j' sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés AB et AC du parallélogramme $ABCD$, l'accélération résultante J sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AD de ce parallélogramme. Le mouvement suivant cette diagonale peut être attribué à une force constante, que nous représenterons par R ; cette force produisant à elle seule le même effet que les deux forces simultanées F et F' , sera la résultante de ces deux forces. Or on sait, d'autre part, que les forces appliquées à un même point matériel sont proportionnelles aux accélérations qu'elles lui impriment (Voy. MESURE DES FORCES); les forces F , F' et R sont donc proportionnelles aux longueurs AB , AC et AD . Il en résulte que si les forces F et F' sont représentées à une échelle convenable (Voy. FORCE), par les lignes AB et AC , la résultante R sera représentée à la même échelle par la ligne AD . De là ce théorème : Si deux forces constantes sont représentées en grandeur et en direction par deux côtés adjacents d'un parallélogramme, elles ont une résultante qui est représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélogramme, aboutissant au même sommet. Ce théorème est connu sous le nom de Parallélogramme des forces;

il est tout à fait analogue au Parallélogramme des vitesses et au Parallélogramme des accélérations.

Au lieu de fonder ce théorème sur la composition des accélérations, on pourrait s'appuyer sur la composition des vitesses. Dans le mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, on a, en effet, $v = jt$, d'où il résulte que pour une même durée t les accélérations sont proportionnelles aux vitesses; et comme les forces sont proportionnelles aux accélérations, les vitesses sont aussi proportionnelles aux forces.

La démonstration précédente suppose que le mobile part du repos; mais l'effet d'une force sur un point matériel étant indépendant du mouvement antérieurement acquis (Voy. FORCE CONSTANTE), l'effet des deux composantes F et F' ne serait pas altéré par la vitesse initiale que pourrait posséder le mobile; on pourrait donc leur substituer encore la résultante R , comme si le mobile était primitivement en repos; ainsi le théorème subsisterait dans le cas où le mobile aurait une vitesse initiale.

La démonstration suppose aussi qu'il s'agit de deux forces constantes; mais il est facile d'étendre le théorème à deux forces variables; il suffit pour cela de considérer leur action pendant un temps assez court pour qu'elles puissent être regardées comme conservant la même direction et la même intensité. Les forces variables se composent donc comme les forces constantes; elles ont, à chaque instant, une résultante qui s'obtient par la règle du parallélogramme; seulement cette résultante est généralement variable elle-même.

Sachant ainsi composer deux forces appliquées en un même point matériel, on est en état d'en composer un nombre quelconque. Supposons d'abord qu'on ait à composer trois forces représentées par les droites OA , OB , OC (fig. 2) non situées dans un

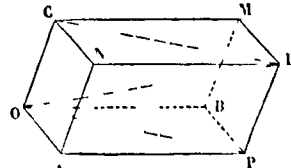


Fig. 2.

même plan. On pourra d'abord composer les deux premières, OA et OB , c'est-à-dire les remplacer par leur résultante, qui est la diagonale OP du parallélogramme $OAPB$ construit sur OA et OB . On pourra ensuite composer OP avec OC , ce qui donnera pour résultante la diagonale OD du parallélogramme $OPDC$ construit sur OP et OC . La force OD sera la résultante des trois forces proposées. Mais on remarque que la droite OD n'est autre chose que la diagonale du parallélépipède $OAPBCNDM$ construit sur OA , OB et OC ; on peut donc énoncer ce théorème : Si trois forces appliquées à un même point matériel sont représentées en grandeur et en direction par les trois arêtes d'un parallélépipède aboutissant à un même sommet, elles ont une résultante qui est représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélépipède, qui aboutit au même sommet. Ce théorème est connu sous le nom de Parallélépipède des forces. Il est analogue au Parallélépipède des vitesses. Le parallélépipède cesse

d'exister quand les trois forces composantes sont situées dans un même plan; mais la construction qui nous a servi à déterminer la résultante demeure la même.

Soit maintenant à composer un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel O (fig. 3) et représentées par les droites OA,

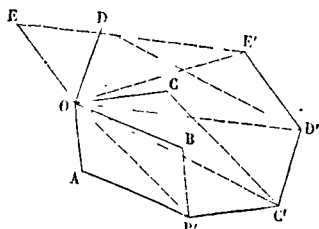


Fig. 3.

OB, OC, OD, OE. On composera d'abord les deux premières OA et OB par la règle du parallélogramme, et l'on obtiendra une première résultante partielle OB'. On composera OB' avec OC par la règle du parallélogramme, et l'on obtiendra une seconde résultante partielle OC'. On composera OC' avec OD, ce qui donnera pour troisième résultante partielle OD'. Enfin on composera OD' avec OE, ce qui donnera pour dernière résultante partielle OE'. Cette dernière résultante partielle sera la résultante de toutes les forces données. Mais on remarque que pour obtenir OE' il suffit de construire la ligne brisée OAB'C'D'E', dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites OA, OB, OC, OD, OE. De là cette règle : *Formez une ligne brisée en plaçant bout à bout les droites qui représentent en grandeur et en direction les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes; la droite qui fermera la ligne brisée représentera en grandeur et en direction la résultante de ces forces.* Cette règle est connue sous le nom de *Polygone des forces*. Elle est analogue au *Polygone des vitesses*. En l'appliquant à deux forces ou à trois forces, on retomberait sur le parallélogramme des forces et sur le parallélépipède des forces.

La composition des forces peut aussi s'opérer par le calcul. Considérons d'abord le cas de deux forces. Soient AB = F et AC = F' (fig. 1) les deux forces, et soit AD = R leur résultante. Comme on a BD = AC = F', on voit que les deux composantes F et F' et la résultante R sont les trois côtés du triangle ABD; il y a donc entre ces forces et les angles qu'elles font entre elles, les relations qui lient les côtés et les angles d'un triangle. Désignons par (F, F'), (F, R), (F', R) les angles BAC, BAD, CAD que les trois forces font entre elles; nous aurons d'abord

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 AB \cdot BD \cdot \cos \text{ABD},$$

ou, en remarquant que ABD est le supplément de BAC, ou de (F, F'),

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2 FF' \cos (F, F'). \quad [1]$$

On aura ensuite

$$\frac{AB}{\sin \text{BDA}} = \frac{BD}{\sin \text{BAD}} = \frac{AD}{\sin \text{ABD}},$$

$$\text{ou} \quad \frac{F}{\sin (F', R)} = \frac{F'}{\sin (F, R)} = \frac{R}{\sin (F, F')}. \quad [2]$$

Les formules [1] et [2] serviront à calculer la résultante R, et les angles (F, R) et (F', R) qu'elle fait avec les deux composantes.

Lorsque l'angle (F, F') ou BAC est droit, ces formules donnent, en désignant par α l'angle (F, R),

$$R^2 = F^2 + F'^2, \quad [3]$$

$$\text{et} \quad \frac{F}{\cos \alpha} = \frac{F'}{\sin \alpha} = R, \quad [4]$$

$$\text{d'où l'on tire} \quad \tan \alpha = \frac{F'}{F}. \quad [5]$$

Cette dernière formule donne directement l'angle α en fonction des deux composantes.

Lorsque l'angle (F, F') est nul, on a $\sin (F, R) = 0$, $\sin (F', R) = 0$; et la formule [1] devient

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2 FF', \text{ d'où } R = F + F'. \quad [6]$$

Si l'angle (F, F') est égal à 180°, on a encore $\sin (F, R) = 0$, $\sin (F', R) = 0$; et la formule [1] devient

$$R^2 = F^2 + F'^2 - 2 FF', \text{ d'où } R = \pm (F - F'). \quad [7]$$

Pour avoir la valeur absolue de R, on prendra dans ce cas le signe + ou le signe -, selon que F sera plus grand ou plus petit que F'. On reconnaît ainsi que : *si les deux composantes sont de même direction et de même sens, la résultante est de même direction et de même sens et égale à leur somme, et que si les deux composantes sont de même direction et de sens contraires, la résultante est de même direction, égale à leur différence, et de même sens que la plus grande, résultat qu'on aurait pu admettre a priori.*

Considérons en second lieu le cas de trois composantes, et supposons d'abord qu'elles soient perpendiculaires deux à deux, auquel cas le parallélépipède des forces devient un parallélépipède rectangle. Désignons par F, F', F'' les trois composantes, par R la résultante, et par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les composantes. Les propriétés connues du parallélépipède rectangle donnent immédiatement

$$R^2 = F^2 + F'^2 + F''^2 \quad [8]$$

$$\text{et} \quad \cos \alpha = \frac{F}{R}, \quad \cos \beta = \frac{F'}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{F''}{R}, \quad [9]$$

formules qui feront connaître l'intensité et la direction de la résultante R.

Nous traiterions plus loin le cas où les trois composantes ne seraient pas rectangulaires.

Considérons le cas d'un nombre quelconque de composantes F, F', F'', F''', etc. On se sert dans ce cas de la propriété fondamentale des projections, en vertu de laquelle la somme algébrique des projections des côtés d'une ligne brisée sur un axe quelconque est égale à la projection, sur le même axe, de la droite qui ferme le polygone. On rapporte les forces à trois axes rectangulaires; soient α, β, γ les angles que fait la force F avec ces axes, α', β', γ' , ceux que fait la force F'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux que fait la force F'', et ainsi de suite. Soient a, b, c les angles que la résultante R fait avec ces mêmes axes. On aura, en vertu du principe qui vient d'être rappelé : $R \cos a = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' + \dots$, [10]

$$\text{ou, pour abréger l'écriture,} \quad R \cos a = \Sigma F \cos \alpha, \quad [11]$$

on obtiendra de même

$$R \cos b = \Sigma F \cos \beta, \\ R \cos c = \Sigma F \cos \gamma.$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre, on obtient

$$R^2 = (\Sigma F \cos \alpha)^2 + (\Sigma F \cos \beta)^2 + (\Sigma F \cos \gamma)^2, \quad [12]$$

ce qui fera connaître la résultante R. On tirera ensuite des relations [10]

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\Sigma F \cos \alpha}{R}, & \cos \beta &= \frac{\Sigma F \cos \beta}{R}, \\ \cos c &= \frac{\Sigma F \cos \gamma}{R}, \end{aligned} \quad [13]$$

ce qui donnera la direction de la résultante.

Cette méthode, appliquée au cas de trois forces non rectangulaires, permet de calculer les angles que la résultante fait avec les trois composantes. On a d'abord

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' = X, \\ R \cos \beta &= F \cos \beta + F' \cos \beta' + F'' \cos \beta'' = Y, \\ R \cos c &= F \cos \gamma + F' \cos \gamma' + F'' \cos \gamma'' = Z, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R^2 &= F^2 + F'^2 + F''^2 \\ &+ 2FF'(\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') \\ &+ 2FF''(\cos \alpha \cos \alpha'' + \cos \beta \cos \beta'' + \cos \gamma \cos \gamma'') \\ &+ 2F'F''(\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma''), \end{aligned}$$

ou $R^2 = F^2 + F'^2 + F''^2 + 2FF' \cos(\angle F, F') + 2FF'' \cos(\angle F, F'') + 2F'F'' \cos(\angle F', F'')$.

On a ensuite

$$\cos(\angle F, R) = \cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos c;$$

or $\cos \alpha = \frac{X}{R}, \cos \beta = \frac{Y}{R}, \cos c = \frac{Z}{R}.$

Donc, $\cos(\angle F, R) = \frac{X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma}{R}$

ou, en mettant pour X, Y, Z leurs valeurs et réduisant,

$$\cos(\angle F, R) = \frac{F + F' \cos(\angle F, F') + F'' \cos(\angle F, F'')}{R},$$

on trouvera de même

$$\cos(\angle F', R) = \frac{F' + F \cos(\angle F', F) + F'' \cos(\angle F', F'')}{R},$$

et

$$\cos(\angle F'', R) = \frac{F'' + F \cos(\angle F'', F) + F' \cos(\angle F'', F')}{R}.$$

La relation [10] exprime une propriété géométrique de la résultante dont on fait un fréquent usage; elle s'énonce en disant que la projection de la résultante sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe.

II. Les forces appliquées à un corps solide peuvent être concourantes; elles peuvent être parallèles; elle peuvent avoir des directions quelconques; nous examinerons successivement ces trois cas.

FORCES CONCOURANTES. Considérons d'abord deux forces F et F' (fig. 4) appliquées à deux points A et B d'un même corps solide; et supposons que leurs directions concourent en un point O appartenant à ce corps. On pourra (Voy. Force) transporter ces forces au point O, puisque ce point est supposé lié invariablement avec les points A et B.

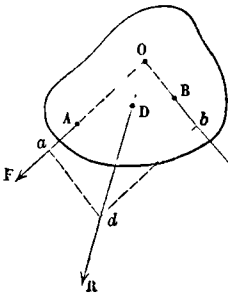


Fig. 4.

On aura alors deux forces appliquées en un même point O; si Oa et Ob sont les longueurs qui représentent ces deux forces, elles auront une résultante R représentée par la diagonale Od du pa-

rallélogramme Oadb. Cette résultante pourra à son tour être transportée en un point quelconque D du corps pris sur sa direction; et cette force R appliquée en D produira à elle seule le même effet que les forces F et F' appliquées en A et B.

Considérons de même un nombre quelconque de forces F, F', F'', F''', etc., appliquées en divers points d'un même corps solide; et supposons que leurs directions aillent concourir en un point O appartenant à ce corps. On pourra comme ci-dessus transporter les forces données au point O, puisque ce point est supposé lié invariablement avec les points d'application de chacune de ces forces. On aura donc un système de forces appliquées en un même point O; elles se composeront d'après la règle du polygone des forces; et leur résultante pourra être ensuite transportée en un point quelconque du corps pris sur sa direction. Cette force produira à elle seule le même effet que les forces concourantes données.

Si le point de concours O des forces était situé hors du corps, on pourrait, sans changer l'état de ce corps, imaginer que le point O fût lié invariablement avec lui, et dès lors on pourrait appliquer les raisonnements ci-dessus. Il en résulte que, dans tous les cas, les forces concourantes se composent comme les forces appliquées à un même point matériel.

Il pourrait arriver que la direction de la résultante ne rencontrât pas le corps. C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on avait à composer deux forces égales, appliquées à un anneau solide, de manière à être dans un même plan avec l'axe de l'anneau et à faire des angles égaux de part et d'autre avec cet axe; le point de concours des deux composantes serait situé sur l'axe de l'anneau, et la résultante serait dirigée suivant cet axe lui-même; elle ne rencontrerait donc point le corps. Dans un pareil cas, la résultante serait purement fictive; il n'existerait pas réellement de force capable de produire à elle seule l'effet des forces données. Néanmoins cette résultante fictive pourrait encore être utile à considérer, comme moyen de simplifier les démonstrations ou les énoncés de certaines propositions de Mécanique.

FORCES PARALLÈLES. Soit à composer deux forces parallèles et de même sens F et F' (fig. 5) appli-

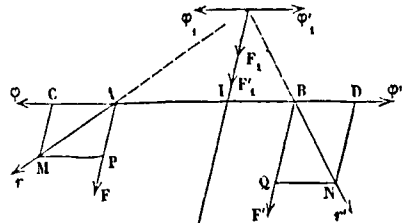


Fig. 5.

quées en deux points A et B appartenant à un même corps solide. Soient AP et BQ les droites qui représentent ces forces. On ne changera pas l'état du corps (Voy. Force) si l'on applique en A et en B, dans la direction de AB, deux forces égales et de

sens contraire φ et φ' ; soient AC et BD les droites égales qui représentent ces nouvelles forces. Les deux forces F et φ , appliquées en un même point A, auront une résultante r, représentée par la diagonale AM du parallélogramme ACMP construit sur AP et AC; de même, les deux forces F' et φ' , appliquées en un même point B, auront une résultante r', représentée par la diagonale BN du parallélogramme BQND construit sur BQ et BD. Ces deux résultantes partielles seront dans le plan des deux parallèles AP et BQ; elles concourront en un certain point O, que nous supposons d'abord situé dans le corps. On pourra donc transporter les forces r et r' en ce point; et, une fois ce transport effectué, les remplacer par leurs composantes. On aura ainsi au point O quatre forces, savoir : 1° deux forces φ_1 et φ'_1 , respectivement égales et parallèles à φ et φ' ; elles seront égales et opposées, et pourront conséquemment être supprimées sans changer l'état du corps; 2° deux forces F_1 et F'_1 , respectivement égales et parallèles à F et à F'; elles auront la même direction et le même sens, et donneront par conséquent une résultante R de même direction et de même sens, égale à leur somme. On aura donc

$$R = F_1 + F'_1 = F + F'. \quad [14]$$

Cette résultante pourra être transportée en un point quelconque de sa direction, par exemple au point I où elle rencontre la droite AB. Ce point est facile à déterminer. En effet, les triangles semblables OAI et AMP donnent la proportion

$$AI : OI = MP \text{ ou } AC : AP = \varphi : F,$$

d'où
$$AI = OI \cdot \frac{\varphi}{F}.$$

Les triangles semblables OIB et BQN donnent de même

$$BI : OI = NQ \text{ ou } BD : BQ = \varphi' : F',$$

d'où
$$BI = OI \cdot \frac{\varphi'}{F'}.$$

Divisant la valeur de AI par celle de BI, et simplifiant, en remarquant qu'on a $\varphi = \varphi'$, il reste

$$\frac{AI}{BI} = \frac{F'}{F},$$

c'est-à-dire que le point I divise la droite AB dans le rapport inverse des forces F et F'. Ainsi deux forces parallèles et de même sens, appliquées à un même corps solide, ont une résultante parallèle et de même sens, égale à leur somme, et dont la direction divise la droite qui joint les points d'application des composantes en raison inverse de ces composantes. Cette résultante se trouve ainsi parfaitement déterminée.

Nous avons supposé que le point O appartenait au corps solide; on pourra toujours remplir cette condition, puisqu'on est maître de l'intensité et même du sens des forces auxiliaires φ et φ' . Mais, dans tous les cas, on peut toujours imaginer que le point O soit lié invariablement au corps; et dès lors la démonstration subsiste.

On pourrait appliquer une démonstration analogue au cas de deux forces parallèles et de sens contraire; mais il est plus simple de procéder de la manière suivante. Soient F et F' (fig. 6) deux forces parallèles et de sens contraire appliquées aux points A et B d'un même corps solide. Joignons AB; prolongeons cette droite du côté de la plus grande des deux composantes, et prenons sur

ce prolongement un point C tel, que l'on ait la proportion

$$AC : AB = F' : F - F', \quad [15]$$

puis appliquons en B une force F'_1 égale et opposée

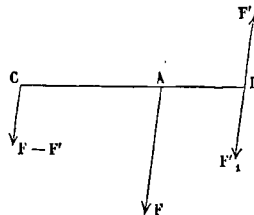


Fig. 6.

à F', et en C une force égale à F - F', parallèle à F et de même sens. Ces deux forces pourront remplacer la force F; car leur résultante est évidemment appliquée au point C, et elle a pour valeur la somme des composantes F'_1 et F - F', c'est-à-dire F. Supposons donc qu'on ait ainsi remplacé la force F par les forces F'_1 et F - F', on pourra supprimer en outre les deux forces égales et opposées F' et F'_1; et il ne restera en définitive que la force F - F' appliquée en C; cette force remplace donc les deux forces données; elle est la résultante de ces forces. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, la résultante est une force parallèle aux deux composantes, égale à leur différence, et de même sens que la plus grande. Nous avons vu comment on détermine le point C où la résultante peut être considérée comme appliquée; mais on peut le déterminer d'une autre manière qui rentre dans la même règle que pour le cas des forces parallèles et de même sens. Car on tire de la proportion [15]

$$AC : AC + AB = F' : F' + (F - F'),$$

ou
$$AC : BC = F' : F,$$

c'est-à-dire que les distances du point C aux points A et B où sont appliquées les deux composantes sont encore en raison inverse de ces composantes. Par conséquent deux forces parallèles et de sens contraire, appliquées à un même corps solide, ont une résultante qui leur est parallèle, égale à leur différence et de même sens que la plus grande; elle est située au delà de la plus grande par rapport à la plus petite, et rencontre la droite qui joint les points d'application des composantes en un point dont les distances à ces deux points d'application sont en raison inverse des composantes.

Nous avons supposé implicitement que le point C appartenait au corps solide; si cela n'était pas, on pourrait toujours imaginer que ce point fût lié invariablement au corps; et dès lors la démonstration subsisterait.

On peut aussi déduire la composition de deux forces parallèles de la composition de deux forces concourantes, en supposant que le point de concours s'éloigne à l'infini; c'est ainsi que la question a été traitée par Newton et d'Alembert. Mais cette fiction d'un point d'application commun situé à l'infini n'est pas conforme à la nature des forces parallèles, qui ont par le fait des points d'application distincts. La démonstration donnée plus haut est celle qu'on adopte le plus généralement.

Lorsque les deux composantes sont à la fois égales

et de sens contraire, il résulte de la règle ci-dessus que la résultante est nulle; mais en même temps la relation [15] donne

$$AC = AB \cdot \frac{F'}{F - F'} = \frac{AB \cdot F'}{0} = \text{l'infini.}$$

Ainsi la résultante serait nulle, et appliquée à une distance infinie, ce qui revient à dire que dans ce cas il n'y a pas de résultante.

Deux forces parallèles, égales et de sens contraire appliquées à un même corps solide forment ce qu'on appelle un COUPLE (Voy. ce mot). Il résulte de ce que nous venons de dire qu'un couple n'a pas de résultante.

Considérons maintenant un nombre quelconque de forces parallèles et de même sens, $F, F', F'', F''', \text{etc.}$, appliquées en des points A, B, C, D, etc. (fig. 7), appartenant à un

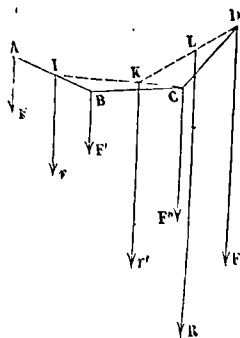


Fig. 7.

même corps solide. Les deux premières forces F et F' pourront être remplacées par une force $F + F'$, parallèle et de même sens, appliquée en un point I de la droite AB tel qu'on ait

$$AI : IB = F' : F.$$

Soit r cette résultante partielle. Joignons IC, et divisons cette droite en un point K, de telle manière

qu'on ait

$$IK : KC = F'' : r = F'' : F + F'$$

les deux forces r et F'' pourront être remplacées par une force parallèle et de même sens, égale à $r + F''$, ou à $F + F' + F''$, appliquée au point K.

Soit r' cette nouvelle résultante partielle. Joignons KD, et divisons cette droite en un point L tel que l'on ait

$$KL : LD = F''' : r' = F''' : F + F' + F''.$$

Les deux forces r' et F''' pourront être remplacées par une force parallèle et de même sens, égale à $r' + F'''$, ou à $F + F' + F'' + F'''$, appliquée au point L.

En continuant ainsi, on réduira toutes les forces données à une seule force parallèle et de même sens, égale à leur somme. Si, pour fixer les idées, on suppose que le système se réduise aux quatre forces F, F', F'', F''' , on aura, en appelant R la résultante,

$$R = F + F' + F'' + F''',$$

et son point d'application sera le point L, point qui est parfaitement déterminé. On pourra, bien entendu, changer ensuite ce point d'application et transporter la résultante en un point quelconque pris sur sa direction, pourvu qu'il soit invariablement lié au corps.

Considérons enfin un nombre quelconque de forces parallèles, les unes dirigées dans un certain sens, les autres dirigées en sens contraire. On pourra d'abord composer en une seule toutes celles qui tirent dans l'un de ces deux sens; soit R leur résultante; on composera ensuite toutes celles qui tirent en sens contraire; soit R' cette seconde résultante. Il restera à composer les deux forces R et R' , parallèles et de sens contraire. La résultante sera une force parallèle, de même sens que la plus

grande, et égale à $R - R'$; son point d'application sera déterminé par les constructions indiquées ci-dessus. Il suit de ce que nous venons de dire que la résultante d'un système de forces parallèles est encore une force parallèle, égale à la différence entre la somme des forces qui tirent dans un sens et celles des forces qui tirent en sens contraire, et de même sens que la plus grande de ces deux sommes. Quant à son point d'application, on le détermine géométriquement en appliquant successivement les règles de la composition de deux forces parallèles.

Dans le cas où la somme des forces qui tirent dans un sens serait égale à la somme de celles qui tirent dans l'autre, les forces R et R' formeraient un couple, et les forces proposées n'auraient point de résultante.

Dans le cas même où il y a une résultante, il peut arriver que sa direction ne rencontre pas le corps; cette résultante est alors purement fictive; il n'existe réellement aucune force capable de produire à elle seule l'effet des forces proposées. Mais cette résultante fictive peut être utile à considérer comme moyen de simplifier les énoncés ou les démonstrations.

Dans la composition des forces parallèles on vient de voir qu'on détermine d'abord un point situé sur la direction de la résultante des deux premières forces, puis un point situé sur la direction de la résultante de cette première résultante partielle et de la troisième force, puis un point situé sur la direction de la résultante de cette seconde résultante partielle et de la quatrième force, et ainsi de suite. Le dernier point ainsi déterminé appartient à la direction de la résultante totale. Or, par la manière dont ce point a été obtenu, on voit qu'il ne dépend nullement de la direction commune des forces parallèles considérées; et que, si l'on venait à incliner les forces d'une autre manière, pourvu qu'elles restassent toujours parallèles, le point obtenu resterait le même. On peut remarquer même que ce point ne dépend pas de l'intensité absolue des forces considérées, mais seulement des rapports entre ces intensités; en sorte que si les forces venaient à varier proportionnellement, le point dont il s'agit resterait le même. Ce point, par lequel passe la résultante d'un système de forces parallèles, quelle que soit la direction commune de ces forces, et quelles que soient leurs intensités, pourvu qu'elles restent proportionnelles, est ce que l'on appelle le centre des forces parallèles. Ce point joue un rôle important en Mécanique.

Pour la détermination analytique de la résultante et du centre des forces parallèles, voyez l'article MOMENT.

FORCES DE DIRECTIONS QUELCONQUES. Lorsque les forces appliquées à un corps solide ont des directions quelconques, on ne peut plus affirmer qu'elles ont une résultante unique, mais on peut toujours les réduire à deux équivalentes, dont l'une passe par un point donné. Soient, en effet, $F, F', F'', F''', \text{etc.}$ un système quelconque de forces appliquées à un corps solide; et soit O (fig. 8) un point donné quelconque. Considérons d'abord les deux premières forces F et F' , appliquées aux points A et B. Le point O et la direction de la force F déterminent un plan; le point O et la direction de la force F'

déterminent un second plan. Ces deux plans qui ont un point commun O , se coupent suivant une certaine droite OX . Sur cette droite prenons arbitrairement un point C . Joignons AO , AC , BO , BC ,

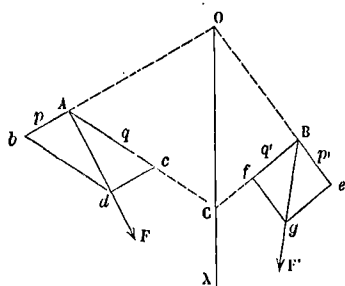


Fig. 8.

et prolongeons AO et BO . La force F peut être regardée comme la résultante de deux forces appliquées en A et dirigées, l'une suivant le prolongement de OA , l'autre suivant AC . Si l'on prend en effet sur la direction de la force F une longueur Ad pour représenter cette force, et que, par le point d on mène db parallèle à AC et de parallèle à OA , les longueurs Ab et Ac représenteront deux forces p et q qui auront pour résultante la force F . De même, la force F' peut être regardée comme la résultante de deux forces dirigées l'une suivant OB , l'autre suivant BC ; on les obtiendra en prenant sur la direction de la force F' une longueur Bg pour représenter cette force, et menant par le point g les droites ge et gf respectivement parallèles à BC et OB . Soient p' et q' les forces représentées par Be et par Bf ; elles auront pour résultante F' . Mais les forces p et p' peuvent être transportées au point O ; les forces q et q' peuvent être transportées au point C . Ces deux dernières donneront une résultante que nous représenterons par r .

Cela posé, faisons pour les forces r et F'' ce que nous avons fait pour les forces F et F' ; nous pourrions les remplacer par deux autres forces appliquées en O , et par une troisième force r' appliquée en certain point, analogue à C . Faisons pour r' et pour F'' ce que nous avons fait pour F et F' ; nous pourrions remplacer ces deux forces par deux autres appliquées en O , et par une troisième r'' appliquée en un certain point analogue à C . En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait employé la dernière des forces proposées, on aura un groupe de forces appliquées en O , et une force R appliquée en un certain point analogue à C . Or, toutes les forces appliquées en O se composeront en une seule S ; on aura donc réduit le système des forces proposées à deux forces R et S , dont l'une S passe par le point donné O .

La démonstration semble supposer que les plans menés par le point O et la direction AF d'une part, par le même point O et la direction BF' de l'autre, se coupent suivant une droite déterminée OX . Mais si ces deux plans se confondaient en un seul, la droite OX pourrait être tracée comme on voudrait dans ce plan par le point O ; et la démonstration se ferait de la même manière.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS, problème qui consiste à trouver le mouvement *absolu* d'un

point matériel ou d'un corps solide, lorsqu'on connaît son mouvement *relatif* par rapport à un système dont il fait partie, et le mouvement *d'entraînement* de ce système (*Voy.* COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, COMPOSITION DES TRANSLATIONS, COMPOSITION DES ROTATIONS). Ce problème et son inverse, qui consiste à trouver soit le mouvement relatif, soit le mouvement d'entraînement, connaissant l'un d'eux et le mouvement absolu, se rencontrent fréquemment dans la CINÉMATIQUE (*Voy.* ce mot).

On démontre que le mouvement instantané le plus général d'un corps solide (*Voy.* MOUVEMENT INSTANTANÉ) est une rotation autour d'un axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe. Si un corps est animé de plusieurs mouvements simultanés, on a donc à composer entre elles un certain nombre de rotations et le même nombre de translations. Toutes les translations se composent en une seule; il en est de même de toutes les rotations, sauf le cas où deux des rotations composantes seraient égales, parallèles et de sens contraire, c'est-à-dire formeraient un *couple de rotations*, laquelle équivaut à une translation (*Voy.* COMPOSITION DES ROTATIONS), auquel cas cette translation devrait être composée avec les premières. Il ne restera donc en définitive qu'une rotation et une translation; mais on peut toujours (*Voy.* l'article cité) la réduire à une rotation autour d'un axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe. Ainsi le mouvement absolu, instantané, du mobile dans l'espace, pourra être déterminé, et il sera de même nature que chacun des mouvements instantanés composants. En opérant la même composition pour chacun des instants élémentaires successifs qui composent la durée finie que l'on considère, on aurait les mouvements élémentaires successifs dont se compose le mouvement absolu total, et ce mouvement se trouverait ainsi complètement déterminé (*Voy.* AXE INSTANTANÉ, CENTRE INSTANTANÉ).

COMPOSITION DES ROTATIONS, cas particulier de la COMPOSITION DES MOUVEMENTS (*Voy.* ce mot) dans lequel le mouvement *d'entraînement* et le mouvement *relatif* sont des mouvements de rotation autour de deux axes concourants ou parallèles. Sachant composer les rotations dans ce cas, on peut ensuite en composer un nombre quelconque, ainsi qu'on le verra plus loin.

I. Considérons d'abord deux rotations s'effectuant autour de deux axes qui se coupent. Si l'on représente chaque rotation par une longueur portée sur son axe dans le sens convenable (*Voy.* ROTATION), la composition des deux rotations est tout à fait analogue à celle des forces; et l'on a ce théorème : *Deux rotations représentées pour la grandeur et pour le sens par les deux côtés OP et OQ d'un parallélogramme $OPRQ$ (fig. 1) ont pour résultante une rotation représentée pour la grandeur et pour le sens par la diagonale OR de ce parallélogramme.* C'est-à-dire que si un corps tourne autour de l'axe OP avec une vitesse angulaire ω représentée pour la grandeur et pour le sens par la droite OP , tandis que cet axe lui-même tourne autour de OQ avec une vitesse angulaire ω' représentée par la droite OQ , le mouvement absolu, pendant un instant infiniment petit, sera une rotation autour de l'axe OR , avec une vitesse angulaire Ω représentée par OR .

On aura pour la vitesse d'un point M pris sur le prolongement de AB

$$\omega \cdot AM - \omega' \cdot BM.$$

Si le point C est choisi de manière qu'on ait

$$\omega \cdot AC = \omega' \cdot BC,$$

on peut, à l'expression de cette vitesse, ajouter $\omega \cdot AC$ et en retrancher $\omega' \cdot BC$, ce qui donne

$$\omega (AM + AC) - \omega' (BM + BC) \text{ ou } (\omega - \omega') MC$$

et l'on voit que le point M, et par suite la droite MN

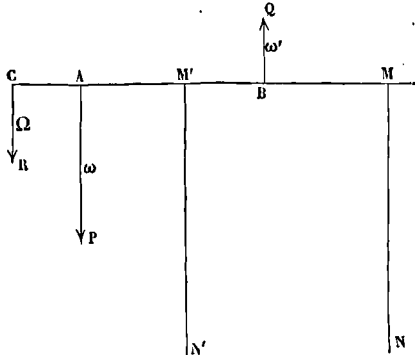


Fig. 4.

menée par ce point parallèlement aux axes, se meurent comme si le corps tournait autour de l'axe CR avec une vitesse angulaire Ω égale à $\omega - \omega'$.

Si l'on prend un point M' situé entre A et B, on trouve pour l'expression de sa vitesse

$$\omega \cdot M'A + \omega' \cdot M'B.$$

Ajoutant $\omega \cdot AC$ et retranchant $\omega' \cdot BC$, on obtient $\omega (M'A + AC) - \omega' (BC - M'B)$ ou $(\omega - \omega') \cdot M'C$. Ainsi le point M', et par suite la droite M'N' menée par ce point parallèlement aux axes, se meurt encore, pendant un temps infiniment court, comme si le corps tournait autour de l'axe CR avec la vitesse Ω égale à $\omega - \omega'$; ce qui démontre la proposition.

Ainsi les rotations parallèles se composent comme des forces parallèles.

III. Lorsque les deux rotations parallèles sont égales et de sens contraire, l'expression de la vitesse du point M devient

$$\omega (AM - BM) \text{ ou } \omega \cdot AB,$$

et celle de la vitesse du point M' devient

$$\omega (M'A + M'B) \text{ ou } \omega \cdot AB;$$

c'est-à-dire que tous les points appartenant aux deux droites MN et M'N', et par suite tous les points du corps auquel ces droites appartiennent, ont des vitesses égales et parallèles perpendiculaires au plan des deux axes. En d'autres termes le mouvement absolu ou résultant, au lieu d'être une rotation, se change en une translation.

M. Poinso t a donné le nom de *couple de rotations* à l'ensemble de deux rotations parallèles et de sens contraire; et il a fondé sur la considération de ces couples une Statique analogue à celle qu'il avait fondée précédemment sur la considération des couples ordinaires, composés de deux forces égales, parallèles et de sens contraire. On voit qu'un couple de rotations équivaut à une translation, dont la vitesse est mesurée par le produit obtenu en multipliant la vitesse angulaire d'une des deux rotations par la distance des deux axes.

IV. On peut, à l'aide de ce qui précède, composer un nombre quelconque de rotations de directions quelconques. Soit AP (fig. 5) une quelconque des rotations données, et O un point choisi comme on le voudra dans l'espace. On pourra appliquer au point O deux rotations contraires, OP' et OP'', égales et parallèles à AP, ce qui ne changera évidemment rien à l'état du corps. Mais on pourra considérer

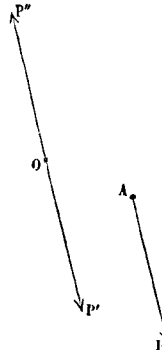


Fig. 5.

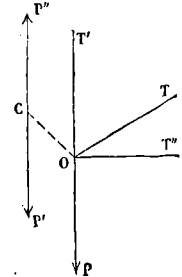


Fig. 6.

l'ensemble de ces trois rotations comme se composant d'une rotation OP' appliquée au point O, et d'un couple de rotations AP et OP'', c'est-à-dire d'une translation perpendiculaire au plan des droites AP et OP'. Si l'on opère de même pour une autre rotation du système donné, on la remplacera aussi par une rotation égale et parallèle appliquée au point O, et par une translation. En faisant la même substitution pour toutes les rotations données, on remplacera le système par un groupe de rotations appliquées au point O, et par un groupe de translations. Toutes les rotations appliquées au point O se composeront en une seule appliquée en ce point; et toutes les translations se composeront en une seule, par la règle du polygone des vitesses. Il ne restera donc en définitive qu'une rotation dont l'axe passe au point O, et une translation.

Mais on peut préciser encore davantage les résultats. Soit OP (fig. 6) la rotation obtenue, et soit OT la direction de la translation. On pourra décomposer celle-ci en deux autres, l'une T' ayant la direction de OP, l'autre T'' perpendiculaire à cette direction. Au point O élevons une perpendiculaire au plan POT'', et sur cette perpendiculaire prenons un point C; en ce point appliquons deux rotations contraires CP' et CP'' égales et parallèles à OP, ce qui ne troublera pas l'état du système. On pourra regarder le groupe OP, CP' et CP'' comme composé d'une rotation CP' et d'un couple de rotations OP, CP'', c'est-à-dire d'une translation perpendiculaire au plan POCP', et par conséquent parallèle à OT'', et sur la vitesse de cette translation ayant pour expression $OP \times CO$, on peut faire varier la position du point C sur CO de manière que cette translation devienne égale et opposée à T''. Dès lors il ne restera plus que la rotation CP' et la translation T'; c'est-à-dire qu'un système quelconque de rotations peut se réduire à une rotation autour d'un certain axe et à une translation parallèle à cet axe.

(Voy. la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, par M. Poinso.)

COMPOSITION DES TRANSLATIONS, cas particulier de la COMPOSITION DES MOUVEMENTS (Voy. ce mot) où le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif sont des mouvements de translation. La composition des translations n'est autre chose que la COMPOSITION DES VITESSES (Voy. ce mot). Car, dans un mouvement de translation, les vitesses de tous les points du corps étant égales et parallèles, la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative sera la même pour tous les points du système. Le mouvement absolu sera donc encore un mouvement de translation; et la direction et la grandeur de sa vitesse s'obtiendra en composant les vitesses simultanées de l'un quelconque des points du système. On composerait de la même manière autant de translations qu'on voudra; le mouvement résultant sera encore une translation; la direction et la grandeur de sa vitesse s'obtiendra en composant les vitesses simultanées de l'un quelconque des points du corps.

COMPOSITION DES VITESSES, opération qui a pour objet de remplacer plusieurs vitesses simultanées par une seule. La composition des vitesses peut être établie de diverses manières; mais on la fonde en général sur la considération du mouvement relatif. Pour donner un exemple de vitesses simultanées, on imagine ordinairement que, tandis qu'un bateau descend uniformément le cours d'un fleuve, une bille roule uniformément, dans une direction quelconque, sur le pont de ce bateau. La bille, indépendamment de la vitesse relative avec laquelle elle roule sur le pont du bateau, possédera en commun avec lui la vitesse dite d'entraînement, avec laquelle ils descendent le cours du fleuve; elle pourra donc être considérée comme animée à la fois de deux vitesses. On pourra la considérer comme animée de trois vitesses simultanées, si l'on a égard à celle avec laquelle le fleuve est emporté lui-même autour de l'axe du globe terrestre dans son mouvement diurne; elle sera animée de quatre vitesses simultanées si l'on a égard à la vitesse avec laquelle le globe, à son tour, se transporte dans son orbite, etc. — Mais, bien que le mobile puisse ainsi être considéré comme animé de plusieurs vitesses simultanées, il est clair que, si l'on considère son mouvement absolu dans l'espace, il ne possède qu'une vitesse unique; c'est dans la recherche de cette vitesse unique que consiste le problème de la composition des vitesses. Les vitesses simultanées portent le nom de *vitesse composantes*, et la vitesse unique qui en résulte est ce qu'on nomme la *vitesse résultante*.

Considérons d'abord le cas de deux vitesses simultanées. Concevons qu'une droite AB (fig. 1) se transporte, dans le temps t , parallèlement à elle-même en CD, de manière que l'extrémité A parcoure d'un mouvement uniforme la droite AC. Concevons en outre qu'un point matériel d'abord placé en A se meuve uniformément sur la droite mobile AB, de manière à parcourir cette droite dans le temps t . Ce point matériel pourra être considéré comme animé, pendant tout ce temps, de deux vitesses simultanées: l'une, qui est la vitesse relative avec laquelle il parcourt la droite mobile AB; l'autre, qui lui est commune avec tous les points de cette

droite, et qui est la vitesse d'entraînement, égale et parallèle à celle avec laquelle le point A parcourt la droite AC. Cela posé: 1° *Le mobile parcourt la diagonale AD du parallélogramme ABCD*. En effet,

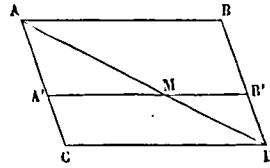


Fig. 1.

soit A'B' la position de la droite mobile au bout du temps t' , et M la position du point matériel sur cette droite. Le mouvement de la droite mobile parallèlement à elle-même étant uniforme, on aura (Voy. MOUVEMENT UNIFORME)

$$AA' : AC = t' : t.$$

Le mouvement du point matériel sur la droite mobile étant uniforme aussi, on aura

$$A'M : A'B' = t' : t.$$

A cause du rapport commun il vient donc

$$AA' : AC = A'M : A'B' = A'M : CD.$$

Il en résulte que si l'on suppose le point M joint au point A par une droite, les triangles AA'M et ACD seront semblables, comme ayant un angle égal AA'M = ACD compris entre des côtés proportionnels, et que par conséquent les angles en A seront égaux. Donc le point M est situé sur AD; et comme le temps t' est quelconque, il s'ensuit que pendant toute la durée du mouvement le mobile se trouve sur AD, et que par conséquent il parcourt cette diagonale.

2° *Le point matériel se meut d'un mouvement uniforme sur la diagonale AD*. Car la similitude des mêmes triangles donne la proportion

$$AM : AD = AA' : AC = t' : t.$$

Les espaces parcourus sur la diagonale, à partir du point A, sont donc proportionnels aux temps employés à les parcourir; le mouvement du point matériel sur la diagonale est donc uniforme.

3° *Si les vitesses suivant AB et AC sont représentées en grandeur et en direction par les côtés AB et AC du parallélogramme ABCD, la vitesse suivant AD sera représentée en grandeur par cette diagonale*. Car il résulte de l'uniformité des trois mouvements que les trois vitesses ont respectivement pour valeur

$$\frac{AB}{t}, \frac{AC}{t}, \frac{AD}{t},$$

et qu'elles sont par conséquent proportionnelles aux trois longueurs

$$AB, AC \text{ et } AD.$$

On peut donc énoncer cette règle: *La résultante de deux vitesses simultanées, représentées en grandeur et en direction par les côtés adjacents d'un parallélogramme, est représentée elle-même en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélogramme* (qui aboutit au même sommet). Cette règle importante est connue sous le nom de PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES. Elle ne dépend point de la durée t , et aurait par conséquent encore lieu si t était infiniment petit. On l'a établie dans la supposition que le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement étaient tous deux rectilignes et uni-

formes ; mais, quelle que soit la nature de ces mouvements, on peut toujours les considérer pendant un temps assez court pour qu'on puisse les regarder comme uniformes ; la règle du parallélogramme des vitesses a donc lieu quels que soient les deux mouvements considérés ; cette règle est donc générale.

On en déduit comme conséquences immédiates que deux vitesses simultanées de même direction et de même sens ont une résultante de même direction, de même sens, et égale à leur somme ; et que deux vitesses simultanées de même direction, mais de sens contraire, ont une résultante de même direction, égale à leur différence, et de même sens que la plus grande.

Lorsqu'on a à composer trois vitesses simultanées représentées par les droites OA, OB, OC (fig. 2),

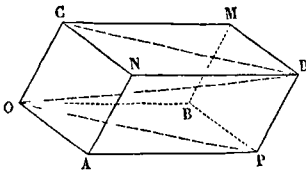


Fig. 2.

on peut d'abord composer les deux premières OA et OB par la règle du parallélogramme, et remplacer ces deux vitesses par leur résultante OP ; on n'a plus alors à composer que les deux vitesses OP et OC ; leur résultante est représentée par la diagonale OD du parallélogramme OPDC ; or, cette seconde résultante peut remplacer les vitesses OP et OC ; la vitesse OP remplace d'ailleurs les vitesses OA et OB ; donc la vitesse OD remplace les trois vitesses simultanées OA, OB et OC ; c'est donc la résultante de ces vitesses. Mais on peut remarquer que OD n'est autre chose que la diagonale du parallélépipède OAPBNDMC construit sur les trois droites OA, OB, OC qui représentent les vitesses données. On peut donc énoncer cette règle : La résultante de trois vitesses simultanées, représentées en grandeur et en direction par les trois arêtes d'un parallélépipède qui aboutissent à un même sommet, est représentée elle-même en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélépipède (qui aboutit au même sommet). Cette règle est connue sous le nom de PARALLÉLÉPIPÈDE DES VITESSES.

Le parallélépipède cesse d'exister quand les trois composantes sont situées dans un même plan ; mais la construction qui nous a servi à trouver la résultante demeure la même.

Soit à composer maintenant un nombre quelconque de vitesses simultanées représentées par les droites OA, OB, OC, OD, OE (fig. 3). On composera d'abord les deux premières OA et OB ; on obtiendra pour première résultante partielle la diagonale OB' du parallélogramme construit sur OA et OB ; on composera en second lieu les vitesses OB' et OC, ce qui donnera pour seconde résultante partielle la diagonale OC' du parallélogramme construit sur OB' et OC ; on composera les vitesses OC' et OD, ce qui donnera pour troisième résultante partielle la diagonale OD' du parallélogramme construit sur OC' et OD ; enfin on composera les vitesses OD' et OE, ce qui donnera pour résultante finale la diagonale OE' du parallélogramme construit sur OD' et

OE. Cette vitesse OE' pourra remplacer les vitesses simultanées OA, OB, OC, OD, OE. — Mais on remarque que pour obtenir OE' il suffit de déterminer le point E', ce qui peut se faire sans construire les

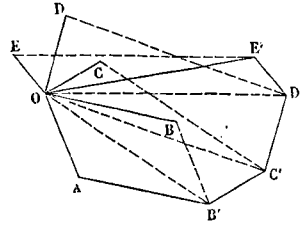


Fig. 3.

parallélogrammes successifs que l'on a considérés. En effet, on aura le point B' en menant AB' égal et parallèle à OB, le point C' en menant B'C' égal et parallèle à OC, le point D' en menant C'D' égal et parallèle à OD, enfin le point E' en menant D'E' égal et parallèle à OE. De là cette règle : Formez une ligne brisée en plaçant bout à bout les droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses simultanées, transportées parallèlement à elles-mêmes, la droite qui fermera la ligne brisée représentera en grandeur et en direction la résultante de ces vitesses simultanées. Cette règle est connue sous le nom de POLYGOUE DES VITESSES.

En l'appliquant à deux ou à trois vitesses simultanées, on retrouverait la règle du parallélogramme et la règle de parallélépipède des vitesses.

La composition des vitesses peut aussi s'opérer par le calcul. Considérons d'abord le cas de deux vitesses simultanées. Soient $AB = v$ et $AC = v'$ (fig. 1) ces deux vitesses, et soit $AD = V$ leur résultante. Comme on a $BD = AC = v'$, on voit que les deux composantes v et v' et la résultante V sont les trois côtés du triangle ABD ; il y a donc entre ces vitesses et les angles qu'elles font entre elles les relations qui lient les côtés et les angles d'un triangle. Ainsi on aura d'abord

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos ABD,$$

ou, en remarquant que ABD est le supplément de l'angle BAC formé par les deux composantes, et appelant (v, v') cet angle

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cdot \cos (v, v'). \quad [1]$$

On aura ensuite, en désignant de même par (v, V) et par (v', V) les angles que la résultante fait avec chacune des composantes,

$$\frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{AD}{\sin ABD},$$

$$\text{ou} \quad \frac{v}{\sin (v', V)} = \frac{v'}{\sin (v, V)} = \frac{V}{\sin (v, v')}. \quad [2]$$

Les formules [1] et [2] suffiront pour calculer la résultante V , et les angles (v', V) et (v, V) que sa direction fait avec celles des deux composantes.

Lorsque l'angle (v, v') ou BAC est droit, ces formules donnent, en désignant par α l'angle (v, V) ,

$$V^2 = v^2 + v'^2, \quad [3]$$

$$\text{et} \quad \frac{v}{\cos \alpha} = \frac{v'}{\sin \alpha} = V. \quad [4]$$

On tire de la dernière relation

$$\tan \alpha = \frac{v'}{v}, \quad [5]$$

formule commode pour calculer directement l'angle α sans être obligé de calculer d'abord la résultante V .

Lorsque l'angle (v, v') est nul, on a
 $\sin(v, V) = 0$ et $\sin(v', V) = 0$,

et la formule [1] se réduit à

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv', \text{ d'où } V = v + v'. \quad [6]$$

Si l'angle (v, v') est de 180° , on a encore

$$\sin(v, V) = 0, \quad \sin(v', V) = 0,$$

et la formule [1] se réduit à

$$V^2 = v^2 + v'^2 - 2v'v', \text{ d'où } V = \pm(v - v'). \quad [7]$$

Pour avoir la valeur absolue de V on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ devant la parenthèse, selon qu'on aura $v > v'$ ou $v < v'$. Les résultats exprimés par les formules [6] et [7] s'accordent avec les remarques qui ont été faites plus haut.

On pourrait rechercher les relations qui existent entre la résultante de trois vitesses simultanées quelconques, ces trois composantes et les angles qu'elles font entre elles et avec la résultante; mais on fait généralement rentrer ce cas dans le cas général de la composition d'un nombre quelconque de vitesses simultanées, et l'on ne traite à part que le cas de trois vitesses simultanées rectangulaires deux à deux.

Soient, dans ce cas, v, v', v'' les trois composantes, α, β, γ , les angles qu'elles font avec la résultante V , on aura par les propriétés connues du parallélogramme rectangle,

$$v = V \cos \alpha, \quad v' = V \cos \beta, \quad v'' = V \cos \gamma, \quad [8]$$

$$\text{et} \quad V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2. \quad [9]$$

La relation [9] donnera la résultante V ; on tirera ensuite des relations [8]

$$\cos \alpha = \frac{v}{V}, \quad \cos \beta = \frac{v'}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{v''}{V}, \quad [10]$$

valeurs qui feront connaître les angles α, β, γ , et par suite la direction de la résultante.

Quand on a à composer un nombre quelconque de vitesses simultanées v, v', v'', v''', \dots , on se sert de la propriété fondamentale des projections, en vertu de laquelle la somme algébrique des projections des côtés d'une ligne brisée sur un axe quelconque est égale à la projection, sur le même axe, de la droite qui ferme le polygone. On rapporte les vitesses données à trois axes rectangulaires; soient α, β, γ les angles que fait la vitesse v avec ces trois axes; α', β', γ' ceux de la vitesse v' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux de la vitesse v'' , et ainsi de suite; soient a, b, c les angles que fait avec ces mêmes axes la vitesse résultante V . On aura, en vertu du principe qui vient d'être rappelé,

$$V \cos a = v \cos \alpha + v' \cos \alpha' + v'' \cos \alpha'' + \dots, \text{ ou, pour abrégier l'écriture,}$$

$$V \cos a = \Sigma v \cos \alpha. \quad [11]$$

On obtiendra de même

$$V \cos b = \Sigma v \cos \beta$$

et

$$V \cos c = \Sigma v \cos \gamma.$$

On tire de ces relations, en élevant au carré et ajoutant membre et membre,

$$V^2 = (\Sigma v \cos \alpha)^2 + (\Sigma v \cos \beta)^2 + (\Sigma v \cos \gamma)^2, \quad [12]$$

ce qui fera connaître la vitesse résultante V . Les relations [11] donneront ensuite

$$\cos a = \frac{\Sigma v \cos \alpha}{V}, \quad \cos b = \frac{\Sigma v \cos \beta}{V},$$

$$\cos c = \frac{\Sigma v \cos \gamma}{V}, \quad [13]$$

ce qui donnera les angles a, b, c , et par conséquent la direction de la vitesse résultante.

COMPRESSION (RÉSISTANCE À LA), résistance qu'un solide de forme prismatique oppose à un effort longitudinal tendant à le raccourcir. Lorsqu'on a soin de maintenir le prisme latéralement, de manière qu'il ne puisse pas fléchir, et tant que la pression exercée reste notablement inférieure à celle qui produirait l'écrasement du prisme, l'expérience prouve que les lois de la compression sont les mêmes que celles de l'allongement [Voy. ALLONGEMENT (RÉSISTANCE À L')]. C'est-à-dire que si l'on appelle L la longueur du prisme, Ω la section transversale, P la pression exercée perpendiculairement à la base, ΔL le raccourcissement produit, et E le coefficient d'élasticité de la matière, qui est ici le même que dans le cas de l'allongement, on a encore

$$P = E \Omega \frac{\Delta L}{L} = E \Omega i, \quad [1]$$

en appelant i le raccourcissement proportionnel, ou par mètre de longueur.

On peut remarquer en passant que la pression P est proportionnelle à la diminution de volume du prisme, puisque cette diminution est exprimée par $\Omega \Delta L$.

I. La plupart des auteurs qui ont fait des expériences sur ce sujet se sont contentés de déterminer la charge qui produit l'écrasement, et n'ont point évalué celle que l'on peut faire supporter au prisme sans dépasser la limite d'élasticité de la matière, c'est-à-dire la charge au delà de laquelle le rapport de la pression au raccourcissement cesse d'être sensiblement constant. Cependant pour le fer et la fonte, on a d'intéressantes expériences de M. Eaton Hodgkinson; et pour les bois, outre les expériences du même auteur, on a les données consignées par Rondelet dans son *Traité de l'art de bâtir*, et celles qui résultent de la pratique d'un grand nombre d'ingénieurs modernes. Dans les constructions, et lorsqu'il s'agit de charges permanentes, on ne dépasse pas pour le fer une charge de 6 kil. par millimètre carré; on peut aller jusqu'à 10 kil. et même davantage pour la fonte. Pour les bois, la charge permanente varie nécessairement avec l'essence et la qualité des bois; d'après M. Mary on peut adopter en moyenne 60 kil. par centimètre carré pour le chêne, et 80 kil. pour le sapin. Pour les maçonneries, la charge permanente ne doit pas dépasser le dixième de celle qui produit l'écrasement; et, quand il s'agit de pierres tendres, il convient de n'aller que jusqu'au vingtième; d'après M. Mary on peut prendre, comme limite de la charge permanente, 5 kil. par centimètre carré pour la pierre de taille, et 1 kil. pour le moellon. (Voy. la *Résistance des matériaux* par M. Morin, l'*Introduction à la Mécanique industrielle* par M. Poncelet, et le *Cours de construction* professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Mary.)

Voyez aussi l'article POTEAUX, pour les règles relatives aux dimensions de ces supports.

II. La compression longitudinale des prismes est accompagnée d'un renflement, c'est-à-dire que la section transversale va en augmentant depuis chaque base jusqu'au milieu de la longueur du prisme, où elle est à son maximum (fig. 1). Cet effet est l'inverse de celui qui se manifeste dans le

cas de l'allongement des prismes. M. Poisson a démontré que l'extension proportionnelle de la section est la moitié du raccourcissement proportionnel de la longueur; d'où il résulte que l'allongement proportionnel du diamètre est le quart du raccourcissement proportionnel de la longueur; c'est-à-dire, que si L est la longueur du prisme, e son diamètre, ΔL le raccourcissement de L et Δe l'accroissement de e, on a

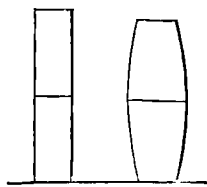


Fig. 1.

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad [3]$$

Le raccourcissement ΔL étant toujours très-faible, l'extension du diamètre est presque insensible. Néanmoins on pense que ce phénomène était connu des anciens, et que c'est pour se rapprocher de cette loi de la nature que les Grecs ont adopté dans leur architecture, qu'ils nous ont transmise, la diminution de diamètre de la colonne. (Voy. ORDRES.)

III. Dans les constructions où des solides de forme prismatique sont en contact par des faces planes d'une certaine étendue, et exercent l'un sur l'autre des pressions mutuelles, il est nécessaire de se rendre compte de la loi suivant laquelle ces pressions se répartissent entre les différents points des surfaces de contact. Pour cela on fait quelques hypothèses qui peuvent être accordées sans répugnance et dont l'expérience paraît confirmer l'exactitude. On admet que lorsque deux corps solides se touchent suivant une face plane, les choses se passent comme si, ces corps étant composés de fibres parallèles, normales à la face de contact, ces fibres éprouvaient des raccourcissements proportionnels à la pression qu'elles supportent. On admet en outre que les molécules qui étaient dans un même plan transversal avant la compression, demeurent encore dans un même plan après qu'elles se sont déplacées par l'effet de cette compression. Supposons, pour fixer les idées, que la face de contact soit un rectangle projeté suivant AB sur la figure 2, et ayant perpendiculairement à la figure une dimension que nous représenterons par e. Concevons qu'en vertu de la pression mutuelle que les deux corps M et N exercent l'un sur l'autre, le corps N se soit comprimé, et que les molécules qui étaient dans le plan AB soient venues se placer dans un nouveau plan projeté suivant A'B'. La fibre dont l'extrémité était A se sera raccourcie de AA'; celle dont l'extrémité était B se sera raccourcie de BB'; une fibre quelconque dont l'extrémité était m se sera raccourcie de mm'. Désignons par a la distance AB, par x la distance Am, par y la longueur mm', par p la pression normale par mètre carré au point m; on aura p = Ky en appelant K une constante convenable. La pression sur le rectangle élémentaire qui a pour base e et pour hauteur dx sera donc exprimée par Kyedx; et la pression totale, qui est la

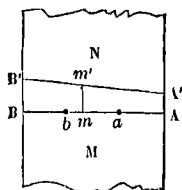


Fig. 2.

projeté suivant A'B'. La fibre dont l'extrémité était A se sera raccourcie de AA'; celle dont l'extrémité était B se sera raccourcie de BB'; une fibre quelconque dont l'extrémité était m se sera raccourcie de mm'. Désignons par a la distance AB, par x la distance Am, par y la longueur mm', par p la pression normale par mètre carré au point m; on aura p = Ky en appelant K une constante convenable. La pression sur le rectangle élémentaire qui a pour base e et pour hauteur dx sera donc exprimée par Kyedx; et la pression totale, qui est la

somme des pressions exercées aux différents points de la face de contact, aura pour valeur

$$\int_0^a Kyedx \text{ ou } Ke \int_0^a y dx$$

Or, l'intégrale qui figure dans cette expression représente l'aire du trapèze AA'B'B; en désignant donc AA' par y' et BB' par y'', on aura pour l'expression de la pression totale

$$Ke \cdot \frac{1}{2} a (y' + y'').$$

Mais si P désigne la pression moyenne par mètre, on a aussi pour la pression totale Pae; on peut donc écrire

$$Pae = Ke \cdot \frac{1}{2} a (y' + y''), \text{ d'où } P = \frac{1}{2} K (y' + y''). \quad [4]$$

La projection de cette pression totale passe par le centre de gravité du trapèze AA'B'B; si donc on appelle X sa distance à AA', on aura, en prenant par rapport au point A les moments des deux triangles dont se compose le trapèze,

$$\frac{1}{2} a (y' + y'') X = \frac{1}{2} ay' \cdot \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} ay'' \cdot \frac{2}{3} a,$$

$$\text{d'où } X = \frac{\frac{1}{3} ay' + \frac{2}{3} ay''}{y' + y''} \quad [5]$$

En appelant p' et p'' les pressions par mètre aux points A et B, on a d'ailleurs

$$[6] \quad p' = Ky' \text{ et } p'' = Ky''. \quad [7]$$

On obtiendra donc la valeur de p' en éliminant y' et y'' entre les relations [4], [5] et [6], et on aura p'' en éliminant les mêmes quantités entre les relations [4], [5] et [7]. Pour faire la première élimination, on peut mettre [5] sous la forme

$$X = \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} a \frac{y'}{y' + y''};$$

or, des relations [4] et [6] on tire

$$\frac{y'}{y' + y''} = \frac{p'}{2P};$$

il vient donc en faisant la substitution

$$X = \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} a \cdot \frac{p'}{2P},$$

$$\text{d'où } p' = 2P \left(2 - \frac{3X}{a} \right) \quad [8]$$

Pour faire la seconde élimination, on mettra [5] sous la forme

$$X = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} a \frac{y''}{y' + y''};$$

on tirera des relations [4] et [7]

$$\frac{y''}{y' + y''} = \frac{p''}{2P}.$$

Il viendra donc

$$X = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} a \cdot \frac{p''}{2P}.$$

$$\text{d'où } p'' = 2P \left(\frac{3X}{a} - 1 \right). \quad [9]$$

Si l'on a X = $\frac{1}{3} a$, on trouve p' = 2P et p'' = 0; c'est-à-dire que la pression en A est le double de la pression moyenne, et que la pression en B est nulle.

Pour une valeur de X inférieure à $\frac{1}{3} a$, p'' aurait une valeur négative. Or, dans une construction on

ne peut admettre une pression négative ; X ne devra donc pas être inférieur à $\frac{1}{3}a$, c'est-à-dire que la pression résultante ne devra pas passer plus près de l'arête A que le tiers de la hauteur AB du joint. Pareillement, si l'on suppose $X = \frac{2}{3}a$, on trouve $p' = 0$ et $p'' = 2P$. Pour une valeur de X supérieure à $\frac{2}{3}a$, p' deviendrait négatif ; la pression résultante ne devra donc pas passer plus près de l'arête B que le tiers de la hauteur du joint. Si donc on divise cette hauteur en trois parties égales, et que a et b soient les points de division, c'est entre ces points a et b que devra passer la résultante des pressions.

Ces considérations trouvent leur application dans la POUSSÉE DES VOUTES, dans la détermination des dimensions des PILES et CULÈES, des MURS DE SOCIÉTÉMENT, des REVÊTEMENTS de la fortification, etc., etc.

COMPRESSION, se dit de la période pendant laquelle, vers la fin de la détente, dans les machines à vapeur, et par suite de l'avance à l'échappement, la petite quantité de vapeur restée en avant du piston exerce sur lui une pression en sens inverse de sa marche. (Voy. MACHINES A VAPEUR, LOCOMOTIVES, AVANCES DU TIROIR, DÉTENTE.)

COMPTES COURANTS ET D'INTÉRÊTS. On sait que si deux banquiers, ou négociants, sont en relations d'affaires, chacun d'eux en tient note par des écritures régulières. Soient Urbain et Samuel les noms de ces deux banquiers ou négociants. Urbain, par exemple, ouvrira un compte à Samuel, dans lequel il portera au débit, c'est-à-dire dans une colonne spéciale placée à gauche du compte, les valeurs qu'il aura livrées à Samuel, et au crédit, c'est-à-dire dans une autre colonne spéciale placée à droite, les valeurs que Samuel lui aura remises. — On sait encore que pour connaître, à un jour donné, la situation respective des deux intéressés, il faut faire la balance du compte, c'est-à-dire additionner les valeurs portées au débit, additionner de même les valeurs portées au crédit, et retrancher la plus petite somme de la plus grande. Cette différence, qu'on appelle *solde*, s'écrit au-dessous de la colonne qui avait donné le plus petit résultat, afin de rendre les deux sommes égales. Si le solde est ainsi porté au débit, cela indique que les valeurs remises par Samuel l'emportent d'autant sur celles qu'Urbain lui a livrées, ou que le compte se solde à l'avantage de Samuel. Le contraire a lieu si le solde a dû être porté au crédit.

Si les valeurs livrées mutuellement sont susceptibles de porter intérêt, il faut y avoir égard dans le compte, c'est-à-dire qu'il faut faire la balance des intérêts, et en porter le solde au débit ou au crédit de Samuel, selon que les intérêts des valeurs livrées à Samuel l'emportent sur les intérêts de celles qu'il a remises à Urbain, ou que ces derniers l'emportent sur les premiers.

Supposons, par exemple, que les valeurs mutuellement remises soient les suivantes :

Le 3 avril, Urbain a avancé à Samuel une somme de 10 000 fr. ;

Le 14 avril, Samuel a remis à Urbain un effet de 4500 fr., à son ordre, payable le 16 juin ;

Le 2 juillet, Urbain a avancé à Samuel une somme de 2600 fr. ;

Le 11 août, Urbain a tiré sur Samuel pour une somme de 8720 fr. ;

Le 29 du même mois, Samuel a remis à Urbain un effet de 600 fr., payable à son ordre le 28 septembre ;

Le 4 octobre, Urbain a payé, pour le compte de Samuel, une somme de 1800 fr. ;

Le 18 du même mois, Samuel a remis à Urbain un effet de 1100 fr., payable à son ordre le 6 novembre ;

Enfin, le 15 novembre, Urbain a avancé à Samuel une somme de 3000 fr.

Supposons qu'on demande le compte de Samuel, à la date du 31 décembre, l'intérêt étant à 6 p. 100 et réciproque.

Faisons d'abord le décompte des intérêts. Mais auparavant remarquons qu'il n'y a pas lieu d'avoir égard aux dates des remises faites par Samuel, mais seulement à la date de l'échéance de chaque billet, date à laquelle la somme énoncée sur le billet entre dans la caisse d'Urbain, et commence à porter intérêt en faveur de Samuel.

Du 3 avril au 16 juin il y a 74 jours, pendant lesquels les 10 000 fr. fournis par Urbain portent intérêt à 6 p. 100 ; le nombre est donc $10\ 000 \times 74$ ou 740 000 ; divisant par 6000, diviseur fixe relatif au taux de 6 p. 100 (Voy. INTÉRÊT SIMPLE), on obtient 123,33 à porter au débit de Samuel.

Du 16 juin au 2 juillet il y a 16 jours, pendant lesquels il n'y a plus que la différence entre 10 000^f et 4500^f, c'est-à-dire 5500^f, qui continue à porter intérêt ; le nombre est alors 5500×16 ou 88 000 ; divisant par 6000, on obtient 14,67 à porter également au débit.

Du 2 juillet au 11 août, il y a 40 jours, pendant lesquels c'est la somme des valeurs 5500^f et 2600^f, c'est-à-dire 8100^f, qui porte intérêt ; le nombre est 8100×40 ou 324 000 ; divisant par 6000, on obtient 54^f à porter encore au débit.

Le 11 août, la remise de Samuel éteint sa dette, et le surplus, c'est-à-dire 620^f, porte intérêt jusqu'au 28 septembre, c'est-à-dire pendant 48 jours ; le nombre est 620×48 ou 29 760 ; divisant par 6000, on trouve 4^f,96 à porter au crédit de Samuel.

Du 28 septembre au 4 octobre il y a 6 jours, pendant lesquels c'est la somme des valeurs 620^f et 600^f, c'est-à-dire 1220^f, qui porte intérêt en faveur de Samuel ; le nombre est ici 1220×6 ; divisant par 6000, on obtient 1^f,22 à ajouter au crédit de Samuel.

Du 4 octobre au 6 novembre, c'est-à-dire pendant 33 jours, Samuel redevient le débiteur d'Urbain pour une somme égale à la différence entre 1800^f et 1220^f, c'est-à-dire pour une somme de 580^f ; le nombre est donc 580×33 ou 19 140 ; divisant par 6000, on obtient 3^f,19 à porter au débit de Samuel.

Le 6 novembre, la remise de Samuel éteint de nouveau sa dette ; et le surplus, c'est-à-dire 520^f, porte intérêt en sa faveur jusqu'au 15 du même mois, c'est-à-dire pendant 9 jours ; le nombre est donc 520×9 ou 4680 ; divisant par 6000, on obtient 0^f,78 à porter au crédit de Samuel.

Enfin, du 15 novembre au 31 décembre, c'est-à-dire pendant 46 jours, Samuel redevient le débi-

teur d'Urbain pour l'excès de 3000^f sur 520^f, c'est-à-dire pour 2480^f; le nombre est donc 2480 × 46 ou 114 080; divisant par 6000, on obtient 19^f,01 à porter au débit de Samuel.

La somme des intérêts portés au débit est ainsi : 123^f,33 plus 14^f,67, plus 54^f, plus 3^f,19, plus 19^f,01, ou 214^f,20. La somme des intérêts portés au crédit est 4^f,96, plus 1^f,22, plus 0^f,78 ou 6^f,94. La balance des intérêts est donc 214^f,20 — 6^f,94 ou 207^f,26.

La somme des valeurs fournies par Urbain est 10 000^f + 2600^f + 1800^f + 3000^f, c'est-à-dire 17 400^f; la somme des valeurs fournies par Samuel est 4500^f + 8720^f + 600^f + 1100^f, c'est-à-dire 14 920^f.

Ajoutant au total du débit, 17 400^f, les 207^f,26 d'intérêt, on obtient 17607^f,26; et si l'on en retranche le total du crédit, ou 14 920^f, on obtiendra le solde définitif; on trouve 2687^f,26, c'est-à-dire qu'en fin de compte Samuel reste débiteur d'Urbain pour 2687^f,26.

Lorsque pour faire le calcul des intérêts, à porter soit au débit, soit au crédit, on suit ainsi pas à pas l'ordre de date des remises, on emploie la méthode connue sous le nom de *méthode hambourgeoise*, ou *méthode des échelles*. D'après les usages commerciaux, le compte se présente alors sous la forme suivante :

DOIT.					SAMUEL, chez URBAIN et C ^{ie} , son compte arrêté le 31 décembre 1864.					AVOIR.			
10 000	»	à caisse.	3 avril.	D. 10 000	du 3 avril au 16 juin...	123	33	»	»	16 juin.	P. effets à recevoir.	4 500	»
2 600	»	à caisse.	2 juil.	A. 4 500									
1 800	»	à caisse.	4 octob.	5 500	du 16 juin au 2 juillet..	14	67	»	»	11 août.	P. effets à recevoir.	8 720	»
3 000	»	à caisse.	15 nov.	D. 2 600									
				8 100	du 2 juillet au 11 août...	54	»	»	»	28 sept.	P. effets à recevoir.	600	»
				A. 8 720									
				620	du 11 août au 28 sept...	»	»	4	96	6 nov.	P. effets à recevoir.	1 100	»
				A. 600									
				1 220	du 28 sept. au 4 octobre.	»	»	1	22				
				D. 1 800									
				580	du 4 octobre au 6 nov...	3	19	»	»				
				A. 1 100									
				520	du 6 nov. au 15 nov.....	»	»	0	78				
				D. 3 000									
				2 480	du 15 nov. au 31 déc....	19	01	»	»				
					Balance des intérêts.....			207	26		Solde...	2 687	26
207	26	Intérêts en ma faveur.										17 607	26
17 607	26												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Les colonnes (1) et (2) expriment en francs et centimes les sommes fournies à Samuel. Dans la colonne (3) les mots à *caisse* montrent que les sommes dont il s'agit ont été payées en espèces. La colonne (4) contient les dates correspondantes à chacun des articles. La colonne (5) contient en abrégé le décompte des intérêts d'après la méthode hambourgeoise, et conformément aux calculs indiqués ci-dessus. Les colonnes (6) et (7) expriment en francs et centimes les intérêts qu'il aurait fallu porter au débit. Les colonnes (8) et (9) expriment de même les intérêts qu'il eût fallu porter au crédit. La colonne (10) contient les dates des diverses remises faites par Samuel. Dans la colonne (11) les mots *P. effets à recevoir* indiquent que ces remises ont été faites en billets. Enfin, les colonnes (12) et (13) expriment en francs et centimes les valeurs remises par Samuel. Dans la colonne (5) les initiales D et A indiquent que la valeur correspondante provient du *Doit* ou de l'*Avoir*, ou, ce qui revient au même, du débit ou du crédit. On a supprimé, pour plus de simplicité, une colonne qui figure ordinairement dans les comptes, et qui sert à inscrire les numéros du *Journal* correspondants à chaque article.

La méthode hambourgeoise n'est plus employée qu'à Hambourg et dans le nord de l'Europe. On lui a substitué partout ailleurs des procédés plus expéditifs, connus sous les noms de méthode ancienne ou *directe*, et de méthode nouvelle ou *rétrograde*.

La méthode directe consiste à calculer l'intérêt de chaque somme depuis la date de la remise jusqu'à la date de l'arrêté de compte, puis, à faire la

différence entre les intérêts ainsi obtenus au débit et au crédit, ou plutôt à faire la différence des nombres, et à diviser cette différence par le *diviseur fixe* correspondant au taux de l'intérêt. Reprenons, par exemple, les données du compte précédent.

Déterminons d'abord les *nombres* du débit :

Du 3 avril au 31 décembre, il y a 272 jours; multipliant par 10 000, on obtient..... 2 720 000.
 Du 2 juillet au 31 décembre, il y a 182 jours; multipliant par 2600, on trouve.. 473 200
 Du 4 octobre au 31 décembre, il y a 88 jours; multipliant par 1800, on obtient 158 400
 Du 15 novembre au 31 décembre, il y a 46 jours; multipliant par 3000, on trouve..... 138 000

Total des nombres du débit.... 3 489 600.

Déterminons de même les *nombres* du crédit :

Du 16 juin au 31 décembre, il y a 198 jours; multipliant par 4500, on trouve 891 000.
 Du 11 août au 31 décembre, il y a 142 jours; multipliant par 8720, on obtient 1 238 240
 Du 28 septembre au 31 décembre, il y a 94 jours; multipliant par 600, on trouve 56 400
 Du 6 novembre au 31 décembre, il y a 55 jours; multipliant par 1100, on obtient 60 500

Total des nombres du crédit... 2 246 140

Retranchant la somme des nombres du crédit de celle des nombres du débit, on obtient 1 243 460; et, en divisant par 6000, on trouve pour le solde des intérêts 207^f,24. (La légère différence de 2 cen-

times entre ce résultat et celui qui a été trouvé plus haut, tient aux fractions de centime négligées à chaque opération partielle.)

D'après les usages commerciaux, le compte, d'après la méthode directe, se présenterait sous la forme suivante, en supprimant les colonnes contenant des indications étrangères à l'objet qui nous occupe. On a remplacé, comme les banquiers le

font souvent, les mots *à caisse et par effets à recevoir*, qui appartiennent au langage de la tenue des livres en partie double, par les mots *espèces et bordereau*, exprimant : le premier, que les sommes correspondantes ont été fournies en argent ; le second, que les sommes correspondantes forment chacune le total de plusieurs effets réunis en une même mise et à la même échéance.

DOIT. SAMUEL, chez URBAIN et C^{ie}, son compte arrêté le 31 décembre 1864. AVOIR.

10 000	»	Espèces.	3 avril.	272	27 200	4 500	»	Bordereau.	16 juin.	198	8 910
2 600	»	d°	2 juillet.	182	4 732	8 720	»	d°	11 août.	142	12 382
1 800	»	d°	4 octobre.	88	1 584	600	»	d°	28 septembre.	94	564
3 000	»	d°	15 novembre	46	1 380	1 100	»	d°	6 novembre.	55	605
								Différence des			
					34 896			nombre...		12 435
		Balance des						Solde en ma			34 896
207	24	intérêts.				2 687	24	favor.			
17 607	24					17 607	24				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Les colonnes (1) et (2) expriment en francs et centimes les sommes payées à Samuel ; la colonne (3) montre que le paiement a été fait en espèces ; la colonne (4) donne les dates des paiements ; la colonne (5) contient le nombre de jours compris entre chacune de ces dates et la date de l'arrêté de compte ; la colonne (6) contient les *nombre*s, produit des sommes inscrites dans la colonne (1) par les nombres inscrits dans la colonne (5). Mais il faut bien remarquer que ces *nombre*s ont été divisés par 100 ; cette simplification, consacrée par l'usage, n'altère pas d'une manière sensible les résultats de l'opération. Les colonnes (7), (8), (9), (10), (11) et (12) ont, au crédit, les mêmes fonctions que les colonnes (1), (2), (3), (4), (5), (6) au débit.

Il est aisé de faire voir que la méthode directe doit donner le même résultat que la méthode hambourgeoise. Pour plus de simplicité, réduisons le compte à une valeur *a* fournie par Urbain *N* jours avant le règlement de compte, et à une valeur *b* fournie par Samuel *n* jours avant ce même règlement ; enfin, soit *d* le diviseur fixe correspondant au taux de l'intérêt. Par la méthode hambourgeoise, le solde des intérêts sera

$$\frac{a(N - n)}{d} + \frac{(a - b)n}{d} \text{ ou } \frac{aN}{d} - \frac{bn}{d}.$$

Or *aN* et *bn* sont les *nombre*s que l'on obtient quand on calcule les intérêts des valeurs *a* et *b* depuis le jour de leur remise jusqu'au jour du règlement de compte ; l'expression obtenue exprime donc le résultat par la méthode directe. Mais il n'en serait plus de même si le taux de l'intérêt n'était pas réciproque ; il faudrait alors recourir à la méthode hambourgeoise.

Il arrive souvent qu'au moment où l'on arrête un compte, il reste, de part et d'autre, des billets remis, mais non encore échus. Supposons, par exemple, qu'outre les articles du compte précédent, il y ait un billet de 1500^f, remis par Samuel le 20 novembre, mais payable seulement le 20 février. On inscrit cette somme de 1500^f au crédit de Samuel, et elle se trouve ainsi comptée en déduction de ce qu'il doit à la date du 31 décembre ; mais comme Urbain n'en jouira réellement que le 20 février, c'est une

véritable avance qu'il fait à Samuel depuis le 31 décembre jusqu'au 21 février, c'est-à-dire pendant 51 jours, et Samuel lui en doit les intérêts pour ce nombre de jours. On portera donc le *nombre* correspondant à ces intérêts au débit de Samuel ; mais, afin de conserver la trace de leur origine, on portera ce même nombre au crédit, seulement pour mémoire et *d'encre rouge*, pour ne pas le confondre avec ceux qui font réellement partie du crédit ; c'est ce qu'on appelle une *nombre rouge*. La balance du compte se fait comme à l'ordinaire, sans avoir égard à ce nombre rouge. S'il y a des nombres rouges au crédit et au débit, on en fait la balance séparément, et c'est le résultat de cette balance que l'on porte à l'encre noire du côté le plus faible.

La méthode directe offre cet inconvénient grave que si, pour une cause quelconque, l'époque prévue de l'arrêté de compte vient à changer, il faut recommencer tous les calculs. C'est une des causes qui ont fait prévaloir la méthode nouvelle ou *rétrograde*. Dans cette méthode, on prend pour point de départ une époque antérieure à toutes les échéances, soit le premier jour de l'année, soit la date du dernier arrêté de compte, soit celle de la première échéance, et l'on compte les jours compris entre ce point de départ arbitraire, mais déterminé, et la date d'échéance de chaque article. On calcule les *nombre*s comme dans la méthode ancienne, en multipliant les sommes par les jours. On fait une balance préparatoire des sommes, ou capitaux ; on multiplie la balance par le nombre de jours compris depuis l'époque fixe choisie pour point de départ jusqu'au jour de l'arrêté de compte ; on obtient ainsi un *nombre*, et du même côté que la balance. On fait ensuite la balance des *nombre*s, et l'on en déduit les intérêts, que l'on écrit du même côté que la balance des *nombre*s. On fait enfin, comme à l'ordinaire, la balance définitive, qui donne le solde du compte.

Reprenons encore l'exemple déjà traité par les deux autres méthodes, et prenons pour origine fixe le 3 avril, date du premier article, afin de diminuer les *nombre*s.

Déterminons d'abord les nombres du débit :

Du 3 avril au 3 avril, il y a 0 jours, d'où le nombre 0..... 0

Du 3 avril au 2 juillet, il y a 90 jours ; multipliant par 2600, on obtient..... 234 000

Du 3 avril au 4 octobre, il y a 184 jours ; multipliant par 1800, on trouve..... 331 200

Du 3 avril au 15 novembre, il y a 226 jours ; multipliant par 3000, on obtient.. 678 000

Total des nombres du débit..... 1 243 200

Déterminons les nombres du crédit :

Du 3 avril au 16 juin, il y a 74 jours ; multipliant par 4500, on obtient..... 333 000

Du 3 avril au 11 août, il y a 130 jours ; multipliant par 8720, on trouve..... 1 133 600

Du 3 avril au 28 septembre, il y a 178 jours ; multipliant par 600, on obtient... 106 800

A reporter..... 1 573 400

Report.... 1 573 400

Du 3 avril au 6 novembre, il y a 217 jours ; multipliant par 1100, on trouve. 238 700

Total des nombres du crédit.... 1 812 100

La balance préparatoire des capitaux donne 2480^f, à écrire au crédit ; multipliant par le nombre de jours compris du 3 avril au 31 décembre, c'est-à-dire par 272, on obtient 674 560, à écrire dans la colonne des nombres du crédit. Le total de cette colonne devient ainsi..... 2 486 660

Faisant maintenant la balance des *nombres*, on trouve..... 1 243 460

Et en divisant par 6000, on obtient pour les intérêts 207^f,24 à écrire à la colonne du débit. La balance définitive donne comme ci-dessus 2687^f,24 en faveur d'Urbain.

Le compte, d'après cette méthode, se présenterait sous la forme suivante :

DOIT. SAMUEL, chez URBAIN et C^{ie}, son compte arrêté le 31 décembre 1864. AVOIR.

10 000	»	Espèces.	3 avril.	0	0	4 500	»	Bordereau.	16 juin.	74	3 330
2 600	»	d°	2 juillet.	90	2 340	8 720	»	d°	11 août.	130	11 336
1 800	»	d°	4 octobre.	184	3 312	600	»	d°	28 septembre.	178	1 068
3 000	»	d°	15 novembre.	226	6 780	1 100	»	d°	6 novembre.	217	2 387
		Balance des nombres....			12 435			Balance préparatoire des capitaux.....	2 480 fr.	272	6 746
					24 867			Solde en ma faveur.			24 867
207	25	Intérêts.				2 687	25				
17 407	25					17 407	25				

Ce qui a été dit plus haut suffit pour expliquer le tableau précédent.

La méthode rétrograde dispense de l'emploi des nombres rouges, qui sont une cause constante d'erreur. On démontre d'ailleurs que les deux méthodes doivent donner le même résultat. Supposons, en effet, que le compte se réduise à trois articles : 1° une somme *a* fournie par Urbain *m* jours avant l'arrêté de compte ; 2° une somme *b* remise par Samuel *n* jours avant cet arrêté ; 3° une somme *c* remise par Samuel en un billet payable *k* jours après la date de l'arrêté de compte. Soit *m'* le nombre de jours compris entre l'origine fixe et l'échéance de la valeur *a*, *n'* le nombre de jours compris entre cette origine et l'échéance de la valeur *b* ; enfin soit *N* le nombre de jours compris entre l'origine et l'arrêté de compte. On aura d'abord

$$m + m' = n + n' = N.$$

Cela posé, par la méthode ancienne les *nombres* seront *am* pour le débit, *bn* pour le crédit, et *ck* pour le débit aussi, nombre auquel correspondra au crédit un *nombre rouge* ; la balance des nombres sera donc

$$am - bn + ck.$$

Par la méthode nouvelle, on aura d'abord pour la balance préparatoire des capitaux

$$a - b - c,$$

d'où le *nombre*

$$(a - b - c)N$$

à porter au crédit.

La balance des nombres donnera par conséquent

$$(a - b - c)N + bn' + c(N + k) - am',$$

ou

$$a(N - m') + ck - b(N - n'),$$

ou enfin

$$am + ck - bn$$

à porter au crédit comme par la méthode ancienne. Dès lors les intérêts, et par suite le solde définitif, seront les mêmes.

Quand le taux de l'intérêt n'est pas réciproque et qu'on est obligé d'avoir recours à la méthode hambourgeoise, on présente quelquefois le compte sous une forme qui diffère de celle indiquée dans le premier tableau. Indépendamment d'une colonne pour la date d'entrée des articles, et d'une autre colonne pour le folio du journal auquel ces articles se rapportent, détails sur lesquels nous ne nous arrêterons pas, le compte présente 12 colonnes. La 1^{re} renferme l'indication de la nature des articles, tant du débit que du crédit, espèces, bordereau, etc. La 2^e et la 3^e donnent en francs et centimes les sommes du débit. La 4^e et la 5^e donnent de même les sommes du crédit. La 6^e et la 7^e donnent en francs et centimes les balances successives qu'on est obligé de faire quand on applique la méthode hambourgeoise. La 8^e et la 9^e donnent, l'une le jour, et l'autre le mois de la date de chaque échéance. La 10^e donne le nombre de jours compris entre la date de l'échéance de chaque article et celle de l'échéance suivante. La 11^e donne les *nombres*, calculés d'après les nombres de jours placés dans la colonne précédente, mais seulement pour les intérêts débiteurs ; la 12^e donne les mêmes *nombres* pour les intérêts créditeurs. On fait la balance des nombres, d'où l'on déduit celle des intérêts, que l'on porte dans la colonne des capitaux, soit au débit, soit au crédit, suivant que les intérêts créditeurs l'emportent sur les intérêts débiteurs, ou *vice versa*. Il ne reste plus qu'à faire la balance des capitaux pour avoir le solde définitif.

COMPTEUR A POINTAGE, chronomètre à l'aide duquel on peut apprécier l'instant précis d'un phénomène, au moyen d'une marque faite sur le cadran. L'aiguille de ce compteur indique ordinairement les cinquièmes de seconde, ce qui permet d'apprécier à l'œil les dixièmes. Un embrayage, qu'on manœuvre à l'aide d'un petit levier extérieur, permet de mettre l'aiguille en marche ou de l'arrêter sans arrêter pour cela le mécanisme général. L'aiguille, en acier très-mince, peut recevoir à son extrémité une goutte d'encre visqueuse, logée dans un petit orifice spécial où elle se maintient par capillarité. Quand on veut marquer l'instant d'une observation, on appuie sur un bouton extérieur. Ce bouton fait élever un manchon entourant l'axe de l'aiguille, et qui, soulevant brusquement celle-ci par son centre, lui imprime une petite secousse suffisante pour faire échapper une gouttelette d'encre, qui se fixe sur le cadran au point où se trouvait l'extrémité de l'aiguille quand on a pressé le bouton. L'encre afflue à cette extrémité par une rainure longitudinale pratiquée à la face supérieure de l'aiguille. Quand on a pris note des observations, on efface aisément les marques faites sur le cadran.

Cet appareil est aussi connu sous le nom de *trotteuse* ou de *montre à stop* (de l'anglais *stop*, s'arrêter).

Les compteurs à pointage sont employés dans un grand nombre d'expériences délicates de Physique et de Mécanique, et même en Astronomie lorsque l'observateur n'est pas exercé à apprécier les subdivisions de l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux battements consécutifs de l'horloge.

COMPTEURS, mécanismes disposés pour enregistrer le nombre de tours faits dans un sens donné par un arbre animé d'un mouvement de rotation. Sur l'axe donné lui-même est montée une aiguille destinée à marquer sur un premier cadran les fractions de tour. Au moyen d'un ENGRENAGE INTERMITTENT (Voy. ce mot) on obtient un second axe qui fait $\frac{1}{10}$ de tour chaque fois que l'aiguille du premier arbre a fait un tour et revient au zéro. Une aiguille montée sur ce second axe marque donc sur un second cadran les nombres de tours du premier, moindres que 10. Au moyen d'un nouvel engrenage intermittent on obtient un troisième axe qui fait $\frac{1}{10}$ de tour quand l'aiguille du second a fait un tour et revient au zéro. Une aiguille montée sur ce troisième axe marque donc les dizaines de tours du premier. En continuant ainsi on obtient le moyen de marquer les centaines de tours et même les mille.

On a fait une heureuse application aux compteurs de l'emploi des mouvements différentiels. Un *compteur à roues différentielles* se compose de deux roues dentées mobiles sur un même axe horizontal et engrenant toutes deux avec une même vis sans fin. L'une de ces roues a 100 dents, l'autre n'en a que 99; il en résulte que lorsque la vis sans fin a fait 100 tours, la première roue en a fait 1, et la seconde est en arrière d'une dent sur la première; lorsque la vis sans fin a fait 200 tours, la première roue en a fait 2, et la seconde est en arrière de 2 dents, et ainsi de suite. Cet appareil sert à comp-

ter le nombre de tours faits par un arbre de machine dans un temps donné. L'axe des deux roues dentées est adapté à une boîte à jour; l'axe de la vis sans fin tourne dans des collets pratiqués dans cette boîte, et il se termine par une pyramide aiguë. Pour se servir de l'instrument, on commence par désengrener la vis sans fin, et amener le zéro de chacune des roues dentées en regard d'un index adapté à la boîte. On pratique une entaille au bout de l'arbre à expérimenter, et on y engage la pointe de l'axe de la vis. On fait engrener celle-ci à l'instant où l'on commence à compter le temps, et l'on tient la boîte à la main. La vis sans fin, participant à la rotation de l'arbre, fait tourner, comme nous l'avons dit, les deux roues dentées. A la fin du temps qu'on s'est imposé, on désengrene de nouveau, et l'on observe 1° le nombre des dents de la première roue qui a passé devant l'index; 2° le nombre de dents exprimant le retard de la seconde roue par rapport à la première. Le second nombre exprime les centaines de tours; la première exprime le nombre de tours qui excède les centaines. On peut compter ainsi jusqu'à 9999 tours. Au lieu de s'astreindre à tenir la boîte à la main, on peut lui donner un poids suffisant pour qu'elle ne soit pas entraînée par la rotation de la vis; et dès lors l'appareil fonctionne sans le secours de l'observateur, qui n'a qu'à désengrener à la fin de l'expérience.

COMPUT ECCLESIASTIQUE, calculs que fait l'Église pour déterminer la date des fêtes mobiles. Ces calculs embrassent la détermination du CYCLE SOLAIRE, de la LETTRE DOMINICALE, du NOMBRE D'OR ou du CYCLE LUNAIRE, et de l'ÉPACTE (Voy. ces mots). C'est à l'aide de ces éléments qu'on détermine la date de la fête de Pâques, et par suite celle de chacune des autres fêtes mobiles, qui sont réglées d'après la fête pascale. Le concile de Nicée a fixé la fête de Pâques au dimanche qui suit la première pleine lune du printemps, supposé commencer le 21 mars. L'époque de cette première pleine lune est déterminée par l'épacte, et le dimanche qui suit est déterminé à son tour par la lettre dominicale.

Sachant, par exemple, qu'en 1861 l'épacte est XVIII et la lettre dominicale F, on verra, à l'inspection du CALENDRIER PERPÉTUEL (Voy. ce mot) que les dates des nouvelles lunes ecclésiastiques sont, pour cette année-là, les 13 janvier, 11 février, 13 mars. Ajoutant 13 à cette dernière date, on a le 26 mars pour la date de la première pleine lune après le 21. Cette date du 26 correspond à la lettre A; il faut aller jusqu'au 31 pour arriver à la lettre dominicale F. La fête de Pâques est donc le 31 mars.

La fête de Pâques peut tomber le 22 mars, si la première pleine lune du printemps est le 21 même, et que le lendemain soit un dimanche. Mais si la pleine lune tombe le 20 mars, il faut avancer de 29 jours, c'est-à-dire aller jusqu'au 18 avril, pour avoir la date de la première pleine lune du printemps. S'il arrive que le 18 avril soit un dimanche, il faut avancer de 7 jours encore, et aller jusqu'au 25 pour avoir le dimanche qui suit la première pleine lune de printemps. La fête de Pâques peut donc être placée entre ces limites, 22 mars et 25 avril, en y comprenant ces limites elles-mêmes.

CONDENSATION, retour de la vapeur à l'état li-

guide. Dans les machines à vapeur la condensation, lorsqu'elle est employée, s'effectue dans une capacité particulière à laquelle on donne le nom de *condenseur*. Elle peut se faire de deux manières : soit par une injection continue d'eau froide dans le condenseur même, c'est la disposition la plus ordinaire; soit par une circulation d'eau froide dans une enveloppe qui entoure le condenseur. Dans le premier cas, on a la *condensation par injection*, et dans le second, ce qu'on est convenu d'appeler la *condensation à sec*.

Le problème de la condensation par injection consiste à trouver une relation entre le poids p de vapeur qui arrive au condenseur dans un temps donné, le poids P de l'eau froide injectée dans le même temps, la température T de la vapeur, celle t de l'eau, et celle θ du mélange, c'est-à-dire la température qui se maintient dans le condenseur. D'après les expériences de M. Regnault, la quantité de chaleur contenue dans 1 kilogramme de vapeur saturée à la température T est exprimée, en calories, par la formule,

$$606,5 + 0,305T. \quad [1]$$

Un poids p de vapeur à cette température perd donc, en passant à la température θ , une quantité de chaleur exprimée par

$$p(606,5 + 0,305T - \theta).$$

Un poids P d'eau à la température t gagne au contraire, en passant à la température θ , une quantité de chaleur représentée par

$$P(\theta - t).$$

La perte devant être égale au gain, on a donc la relation

$$p(606,5 + 0,305T - \theta) = P(\theta - t), \quad [2]$$

d'où l'on tire

$$P = p \cdot \frac{606,5 + 0,305T - \theta}{\theta - t}. \quad [3]$$

Supposons, par exemple, que la chaudière ayant une surface de chauffe de 10 mètres carrés, la production de vapeur soit de 20 kilogrammes par mètre carré et par heure, ce qui fait une production totale de 1000^k par heure. Admettons que le piston fasse une double course par seconde : le poids de vapeur introduite dans le condenseur dans ce temps sera la 3600^e partie de 1000^k, c'est-à-dire qu'on aura

$$p = 0^k, 277.$$

Supposons la vapeur à la température de 153°, l'eau à 15°, et le condenseur à 40°, nous trouverons

$$P = 0^k, 277 \cdot \frac{606,5 + 0,305 \cdot 153 - 40}{40 - 15} = 7^k, 24.$$

Tel serait le poids d'eau à 15° qu'il faudrait injecter par seconde.

La formule [2] pourrait servir également à déterminer la température θ du condenseur connaissant le poids et la température de la vapeur et de l'eau; on trouverait

$$\theta = \frac{Pt + p(606,5 + 0,305T)}{P + p}, \quad [4]$$

formule qui pourrait d'ailleurs s'établir directement.

La température du condenseur doit rester comprise entre 35° et 40°, ce qui répond à une tension de vapeur mesurée par une colonne de 40 à 50 millimètres de mercure. Une température plus élevée dans le condenseur produirait sur le piston une pression en sens contraire trop grande, et une température plus basse exigerait une quantité d'eau

trop considérable, et accroîtrait le travail de la *pompe à air* qui extrait cette eau du condenseur.

Les formules [2] et [3] sont applicables au cas de la condensation à sec, pourvu que θ désigne alors la température de la *chambre à eau* qui environne le conducteur. Ce mode de condensation est du reste peu employé.

Nous extrayons du *Traité des machines à vapeur* de M. Jullien le tableau suivant des volumes d'air et d'eau à retirer du condenseur après la condensation de 1^{kg} de vapeur : θ est la température du condenseur, h la pression dans le condenseur évaluée en colonne d'eau, p le poids de l'eau employée à la condensation :

θ	h	p	VOLUME D'AIR INJECTÉ		VOLUME à extraire du condenseur.
			à la pression atmosphérique.	à la pression du condenseur.	
	m.	kg.	lit.	lit.	lit.
12°	0,146	319,00	15,950	1135,00	1455,00
31	0,430	29,90	1,495	35,90	66,00
38	0,645	22,00	1,100	17,55	40,55
51,45	1,300	14,42	0,721	5,72	21,14

On voit combien on accroîtrait la quantité d'eau à employer et le volume d'eau et d'air à extraire du condenseur si l'on voulait y maintenir une température de 12°, au lieu d'une température de 35 à 40 degrés, qui y règne habituellement.

CONDENSEUR, capacité où se fait la condensation dans les machines à vapeur. Sa température est ordinairement de 35° à 40° (*Voy.* CONDENSATION). Le condenseur contient toujours de l'air provenant de l'eau d'injection, lorsque, comme cela a lieu ordinairement, c'est ce mode de condensation qui est employé. Une pompe spéciale dite **POMPE À AIR** (*Voy.* ce mot) extrait du condenseur l'eau et l'air qui y sont contenus. Quelquefois, au moment de la mise en train, et particulièrement dans les machines appliquées à la navigation, on *purge* le condenseur de l'air et de l'eau qu'il contient, en y faisant passer un courant de vapeur, qui s'échappe par une soupape placée à la partie supérieure, et qui ne se ferme que par son poids; on l'appelle le *reniflard*. Quand l'air est expulsé, on le reconnaît à ce que le jet de vapeur qui sort du reniflard se condense par détente et forme un nuage. On ferme alors l'orifice d'admission de la vapeur; on refroidit le condenseur; la pression de la vapeur y descend à la valeur correspondante à la température, et le reniflard retombe par son propre poids. Toutefois, on ne purge jamais ainsi complètement le condenseur; mais l'opération a l'avantage de chasser en même temps l'eau qui peut s'être déposée dans le cylindre lui-même.

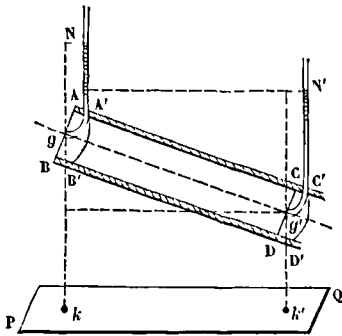
La capacité du condenseur n'est fixée par aucune règle théorique. On peut remarquer seulement que lorsque le condenseur est trop grand, il condense bien, mais il fait mal le vide, vu la difficulté d'en chasser complètement l'air au moment de la mise en train. S'il est trop petit, la pression de la vapeur sortant du cylindre ne diminue pas assez rapidement, et il en résulte, dans les premiers instants, une pression en sens contraire de la marche du piston dont la valeur est trop grande.

Il convient donc de donner au condenseur des

dimensions moyennes. En général, on lui donne une capacité égale à celle du corps de pompe de la pompe à air.

CONDUITES (MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES). On suppose toujours que le mouvement de l'eau dans une conduite est arrivé à l'état *permanent* (Voy. MOUVEMENT PERMANENT); et la relation qui lie la vitesse moyenne avec les pressions dans deux sections transversales données et avec la hauteur de ces sections au-dessus d'un plan horizontal de comparaison, se déduit aisément du théorème de la QUANTITÉ DE MOUVEMENT (Voy. ce mot). Les divers filets fluides parallèles à la direction générale du courant ne sont pas animés de vitesses égales; ceux qui sont en contact avec la paroi sont retardés par la résistance de cette paroi; ils retardent à leur tour les filets suivants, et ainsi de suite; en sorte que la vitesse décroît depuis l'axe, où elle est la plus grande, jusqu'à la paroi, où elle est plus petite. Mais dans les questions ordinaires on n'a point égard à cette différence de vitesse; l'on ne considère que la *vitesse moyenne*, c'est-à-dire celle qui, multipliée par la section transversale du tuyau, donnerait la *dépense réelle*, ou le volume réellement écoulé par cette section dans l'unité de temps. Si la section de la conduite est partout la même, la dépense étant aussi la même pour chaque section, à cause de la permanence du mouvement, il en résulte que la vitesse moyenne est constante.

I. Considérons, dans une conduite cylindrique, le fluide compris entre deux sections quelconques AB et CD. Soient $gk = x$ et $g'k' = x'$ les distances des



centres de ces sections au-dessus d'un plan horizontal fixe PQ; soit \mathcal{P} la pression moyenne par mètre dans la section AB, et \mathcal{P}' la pression dans la section CD. Désignons par Π le poids du mètre cube d'eau, ou en général du liquide qui se meut dans la conduite, par Ω la section de la conduite, supposée constante, par U la vitesse moyenne, laquelle doit être la même dans chaque section, puisque le volume de liquide qui s'écoule dans l'unité de temps par une section quelconque est le même pour chacune d'elles. Concevons que, pendant un temps très-court θ , la masse fluide considérée se soit déplacée d'une petite quantité: que les molécules qui étaient dans la section AB soient venues se placer sur une certaine surface courbe $A'B'$, et celles qui étaient dans la section CD sur une autre surface analogue $C'D'$; et appliquons à ce mouvement élémentaire le théorème général des quantités de mouve-

ment. Chaque filet fluide se meut individuellement d'un mouvement uniforme, quoique la vitesse varie d'un filet à l'autre; il en résulte que pour chaque filet l'accroissement de quantité de mouvement est nul; il en est donc de même de l'accroissement total de quantité de mouvement. Par conséquent, en vertu du principe invoqué, la somme algébrique des projections, sur la direction de l'axe de la conduite, de toutes les forces appliquées à la masse liquide considérée ABCD, doit être égale à zéro. Ces forces sont: la pression qui s'exerce sur la section AB, celle qui s'exerce sur la section CD, le poids du fluide considéré, les réactions normales du tuyau sur le fluide, et enfin le frottement du fluide sur les parois, ou la résistance longitudinale que ces parois opposent au mouvement du fluide. La pression moyenne sur AB étant \mathcal{P} , la pression totale est $\mathcal{P}\Omega$. La pression sur CD est de même $\mathcal{P}'\Omega$; mais elle est de sens contraire. Soit L la distance AC; le poids du fluide considéré est $\Pi\Omega L$; sa projection sur l'axe de la conduite s'obtiendra en multipliant ce poids par le cosinus de l'angle que cet axe fait avec la verticale, cosinus qui a pour expression $\frac{x-x'}{L}$;

la projection demandée est donc $\Pi\Omega(x-x')$. Les pressions normales exercées par les parois n'ont point de composantes suivant l'axe. Il ne reste donc à évaluer que la résistance longitudinale des parois. L'expérience prouve que cette résistance est proportionnelle d'une part à l'aire de la paroi mouillée, c'est-à-dire χL , en désignant par χ le périmètre de la section transversale, et de l'autre à une fonction de la vitesse moyenne, que nous représenterons par $\varphi(U)$. On devra donc avoir, en ayant égard au signe de chaque force,

$$\mathcal{P}'\Omega - \mathcal{P}\Omega + \Pi\Omega(x-x') - \chi L\varphi(U) = 0 \quad [1]$$

telle est la relation qu'il s'agissait d'obtenir. En divisant tous les termes par Π et par χ , remarquant que le quotient de Ω par χ est $\frac{1}{4}D$, en appelant D le diamètre de la conduite, et passant ensuite le dernier terme dans le second membre, on peut écrire

$$\frac{1}{4}D \left[\frac{\mathcal{P}}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}'}{\Pi} + x - x' \right] = \frac{L}{\Pi} \varphi(U) \quad [2]$$

Cette équation a été obtenue dans l'hypothèse d'une conduite rectiligne; mais il est aisé de voir qu'elle subsiste encore pour une conduite curviligne; car, si on divise celle-ci en parties assez petites pour que chacune d'elles puisse être regardée comme rectiligne, on aura pour chacune une relation analogue à la relation [2]; si l'on ajoute membre à membre toutes ces relations, les pressions et les ordonnées intermédiaires disparaîtront dans le premier membre; les longueurs partielles qui sont multipliées dans le second par le même facteur $\frac{1}{\Pi} \varphi(U)$ s'ajouteront pour donner la longueur totale L multipliée par le même facteur; en sorte qu'on obtiendra en définitive une équation analogue à l'équation [2], dans laquelle ne figureront que les pressions et les ordonnées extrêmes, avec la longueur totale.

La quantité entre parenthèses dans le premier membre n'est autre chose que la différence de niveau des colonnes piézométriques dans les deux sections AB et CD. Si, en effet, on appelle h et h' les

hauteurs de ces colonnes, et \mathcal{P} , la pression atmosphérique, on a (*Voy. PIÉZOMÈTRE*)

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} + h \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{P}'}{\Pi} = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} + h',$$

d'où $\frac{\mathcal{P}}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}'}{\Pi} = h - h'$.

Or, $h - h' + z - z'$ ou $(h + z) - (h' + z')$ c'est-à-dire $(Ng + gK) - (N'g' + g'K')$ ou enfin $NK - N'K'$, est bien la différence de niveau des sommets N et N' des colonnes piézométriques. Si donc on nomme Y cette différence de niveau, on peut l'écrire.

$$\frac{1}{4} DY = \frac{L}{\Pi} \varphi(U), \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{4} D \cdot \frac{Y}{L} = \frac{1}{\Pi} \varphi(U). \quad [3]$$

La quantité Y est ce qu'on appelle la *perte de charge* due à la résistance de la conduite sur la longueur L; le quotient $\frac{Y}{L}$ est la *perte de charge par mètre de longueur*; on la désigne habituellement par la lettre J, et l'on écrit

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{1}{\Pi} \varphi(U), \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} DJ = 0,001 \cdot \varphi(U), \quad [4]$$

en supposant, comme c'est le cas ordinaire, que le liquide en mouvement soit de l'eau.

II. M. de Prony a supposé à la fonction $0,001 \varphi(U)$ la forme

$$aU + bU^2$$

et il a déterminé les coefficients a et b de manière à satisfaire le mieux possible aux expériences, au nombre de 51, qu'il avait à sa disposition, et qui sont dues à Dubuat, à Couplet, à Bossut. Il a trouvé qu'il fallait adopter les valeurs

$$a = 0,0000173 \quad \text{et} \quad b = 0,000348.$$

Plus tard, d'Aubuisson a proposé d'autres valeurs, savoir :

$$a = 0,0000188 \quad \text{et} \quad b = 0,000343.$$

Eytelwein, reprenant à son tour la question, et ayant égard à la perte de charge, négligée avant lui, qui est due à l'entrée de l'eau du réservoir supérieur dans la conduite (*Voy. plus loin*), a trouvé qu'il convenait de prendre

$$a = 0,0000222 \quad \text{et} \quad b = 0,000280.$$

Ce sont les valeurs généralement adoptées quand on emploie la forme de fonction choisie par M. de Prony. Mais d'autres expérimentateurs ont proposé des formes de fonctions différentes. M. Dupuit, considérant que le terme affecté de la première puissance de U est ordinairement négligeable vis-à-vis du terme qui contient la seconde puissance, prend simplement

$$\varphi(U) = 0,0003855 U^2.$$

M. Barré de Saint-Venant remplace le binôme $aU + bU^2$ par l'expression monôme

$$\varphi(U) = 0,0002955 U^{1\frac{1}{2}}.$$

Nous donnons ci-dessous une table qui, pour des valeurs de U croissant de 5 en 5 centimètres, depuis 0^m,05 jusqu'à 3 mètres, fournit les valeurs de la fonction $aU + bU^2$ avec les coefficients d'Eytelwein, et les valeurs correspondantes de la fonction $0,0002955 U^{1\frac{1}{2}}$. Nous y avons inscrit les différences, afin de rendre l'interpolation plus facile; ces différences expriment des unités du 8^e ordre décimal.

U	$aU + bU^2$	Diff.	$0,0002955 U^{1\frac{1}{2}}$	Diff.
m.				
0,05	0,00000181	321	0,00000174	397
0,10	0,00000502	461	0,00000571	572
0,15	0,00000963	601	0,00001143	729
0,20	0,00001564	741	0,00001872	873
0,25	0,00002305	881	0,00002745	1007
0,30	0,00003186	1021	0,00003752	1135
0,35	0,00004207	1161	0,00004887	1257
0,40	0,00005368	1301	0,00006144	1375
0,45	0,00006669	1441	0,00007519	1489
0,50	0,00008110	1581	0,00009008	1598
0,55	0,00009691	1721	0,00010606	1707
0,60	0,00011412	1861	0,00012313	1810
0,65	0,00013273	2001	0,00014123	1914
0,70	0,00015274	2141	0,00016037	2013
0,75	0,00017415	2281	0,00018057	2112
0,80	0,00019696	2421	0,00020182	2208
0,85	0,00022117	2561	0,00022417	2303
0,90	0,00024678	2701	0,00024763	2396
0,95	0,00027379	2841	0,00027229	2488
1,00	0,00030220	2981	0,00029817	2573
1,05	0,00033201	3121	0,00032513	2670
1,10	0,00036322	3261	0,00035320	2760
1,15	0,00039583	3401	0,00038240	2840
1,20	0,00042984	3541	0,00041270	2930
1,25	0,00046525	3681	0,00044413	3010
1,30	0,00050206	3821	0,00047664	3100
1,35	0,00054027	3961	0,00051020	3180
1,40	0,00057988	4101	0,00054480	3270
1,45	0,00062089	4241	0,00058030	3340
1,50	0,00066330	4381	0,00061680	3420
1,55	0,00070711	4521	0,00065430	3510
1,60	0,00075232	4661	0,00069280	3580
1,65	0,00079893	4801	0,00073230	3660
1,70	0,00084694	4941	0,00077280	3740
1,75	0,00089635	5081	0,00081430	3820
1,80	0,00094716	5221	0,00085680	3890
1,85	0,00099937	5361	0,00090030	3970
1,90	0,00105298	5501	0,00094480	4050
1,95	0,00107999	5641	0,00099030	4120
2,00	0,00114640	5781	0,00103680	4190
2,05	0,00122221	5921	0,00108430	4270
2,10	0,00130842	6061	0,00113280	4340
2,15	0,00139503	6201	0,00118230	4410
2,20	0,00148204	6341	0,00123280	4490
2,25	0,00156945	6481	0,00128430	4560
2,30	0,00165726	6621	0,00133680	4620
2,35	0,00174547	6761	0,00139030	4700
2,40	0,00183408	6901	0,00144480	4770
2,45	0,00192309	7041	0,00150030	4850
2,50	0,00201250	7181	0,00155680	4900
2,55	0,00210231	7321	0,00161430	4980
2,60	0,00219252	7461	0,00167280	5050
2,65	0,00228313	7601	0,00173230	5120
2,70	0,00237414	7741	0,00179280	5180
2,75	0,00246555	7881	0,00185430	5250
2,80	0,00255736	8021	0,00191680	5320
2,85	0,00264957	8161	0,00198030	5380
2,90	0,00274218	8301	0,00204480	5460
2,95	0,00283519	8441	0,00211030	5520
3,00	0,00292860	8581	0,00217680	5580

On voit que la formule de M. de Saint-Venant donne en général des valeurs inférieures à celles que fournit la formule d'Eytelwein.

Enfin M. Darcy, à qui l'on doit d'intéressantes recherches, faites en 1857, sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite, adopte la même forme que M. de Prony, mais il prend des coefficients variables avec le rayon R du tuyau; et il pose

$$a = 0,000032 + \frac{0,00000000376}{R^2},$$

$$b = 0,000443 + \frac{0,0000062}{R}.$$

Lorsque la vitesse moyenne est assez grande pour que le terme en a soit négligeable devant le terme en b, il prend pour b la valeur

$$b_1 = 0,000507 + \frac{0,00000647}{R}.$$

M. Darcy a déduit de ces formules le tableau suivant, dans lequel, en regard de différents diamètres D, il a placé le quotient de J par le carré Q² du volume d'eau Q déposé par seconde.

D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$
0,027	444920	0,135	86,98	0,400	0,3408
0,040	52500	0,150	50,54	0,450	0,1876
0,050	15858	0,162	34,02	0,500	0,11034
0,054	10524	0,200	11,56	0,600	0,04398
0,060	6008	0,216	7,80	0,700	0,02022
0,080	1320,6	0,250	3,70	0,800	0,01034
0,081	1237,2	0,300	1,465	0,900	0,005716
0,100	411,8	0,325	0,976	1,000	0,003304
0,108	276,04	0,350	0,670	"	"

Les diamètres qui figurent dans ce tableau sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications. Les nombres inscrits en regard se rapportent à des conduites en service courant et chargées de dépôts à l'intérieur; s'il s'agissait de tuyaux neufs en fonte, il faudrait, d'après M. Darcy, réduire ces nombres de moitié. Plus exactement, les nombres qu'il a déduits de ses expériences sur des tuyaux en fonte neufs sont les moitiés de ceux qui sont inscrits dans le tableau précédent; et il a admis que, dans le cas où les parois sont chargées de dépôts de diverse nature, il convenait de doubler ces coefficients.

M. Mary a également calculé des tables, qu'on trouvera à la suite de ses Leçons lithographiées faites à l'École des ponts et chaussées, et qui peuvent rendre de grands services pour la résolution des problèmes relatifs aux tuyaux de conduite. Ce sont des tables à deux entrées qui, au moyen des valeurs de la dépense Q et du diamètre D, font connaître la vitesse moyenne U et la perte de charge par mètre J.

M. Fourneyron a calculé de son côté une table qui donne le produit J²Q en fonction de U. Mais les deux tables données plus haut peuvent suffire dans tous les cas.

III. L'entrée de l'eau du réservoir supérieur dans la conduite donne lieu à une perte de charge à laquelle il est nécessaire d'avoir égard lorsqu'on veut embrasser l'ensemble de la conduite. Ce qui se passe à l'entrée du tuyau est tout à fait analogue à ce qui se passe dans un ajutage cylindrique (Voy. AJUTAGE). Si donc on appelle Q₀ la pression atmosphérique, qu'on regarde la section AB comme faite à une distance suffisante de la section contractée pour que les filets puissent y être considérés comme redevenus parallèles, et si H est la hauteur du niveau dans le réservoir supérieur au-dessus du centre de la section AB, on aura

$$U = 0,82 \sqrt{H + \frac{Q_0}{\Pi} - \frac{Q}{\Pi}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{Q}{\Pi} = \frac{Q_0}{\Pi} + H - 1,49 \frac{U^2}{2g}.$$

Cette valeur mise dans l'équation [2] donne

$$\frac{1}{4} D \left[\frac{Q_0}{\Pi} - \frac{Q}{\Pi} + H + z - z' - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right] = \frac{L}{\Pi} \varphi(U). \quad [5]$$

Les cinq premiers termes de la parenthèse représentent la différence de hauteur entre le niveau du liquide dans le réservoir et le sommet de la colonne

piézométrique dans la section CD; en nommant encore Y cette différence, on aura donc

$$\frac{1}{4} D \left(Y - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{L}{\Pi} \varphi(U),$$

et pour faire coïncider cette formule avec la formule [4] on voit qu'il faut poser

$$J = \frac{Y - 1,49 \frac{U^2}{2g}}{L}.$$

Les premiers expérimentateurs qui ont employé pour 0,001 φ(U) la forme aU + bU², négligeaient

le terme $-1,49 \frac{U^2}{2g}$; Eytelwein y a eu égard. C'est pourquoi les coefficients calculés par cet habile hydraulicien doivent être adoptés de préférence.

IV. La quantité H + z - z' représente la distance du niveau du réservoir au-dessus du centre de la section CD; si on la représente par Z, on peut écrire l'équation [5] sous la forme

$$\frac{1}{4} D \left(\frac{Q_0}{\Pi} - \frac{Q}{\Pi} + Z - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{L}{\Pi} \varphi(U). \quad [6]$$

Cette équation donne Q' lorsque la dépense et le diamètre sont connus, ainsi que la hauteur Z. Elle peut donc servir dans ce cas à calculer la pression en un point quelconque de la conduite. Cependant si l'on trouvait pour Q' une valeur négative, ou même une valeur notablement inférieure à Q₀, ce serait un indice que la formule n'est pas applicable au cas que l'on considère. Lorsque en effet une conduite sinueuse s'élève assez haut, en quelqu'un de ses points, pour que la pression y devienne notablement inférieure à la pression atmosphérique, l'air contenu dans l'eau se dégage, va se cantonner dans la partie la plus élevée de la conduite, de telle sorte que l'eau cesse d'y couler à plein tuyau, ce qui est une des conditions essentielles de la théorie sur laquelle est fondée l'équation [2] et toutes celles que nous en avons déduites. A plus forte raison, la formule cesserait-elle d'être applicable si l'on trouvait pour Q' une valeur négative; car dans un liquide d'une faible viscosité comme l'eau, on ne peut admettre que la pression se change en une tension, puisqu'elle aurait pour effet de diviser la masse fluide, ce qui est contraire aux hypothèses fondamentales de la question.

V. Si la conduite débouche dans l'air, on a pour son extrémité Q' = Q₀ et la formule [6] se réduit à

$$\frac{1}{4} D \cdot \left(Z - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{L}{\Pi} \varphi(U). \quad [7]$$

Si elle débouche dans un réservoir dont le niveau soit à une hauteur Z' au-dessus du centre de sa section extrême, on a pour cette section

$$\frac{Q'}{\Pi} = \frac{Q_0}{\Pi} + Z,$$

et la formule [6] devient

$$\frac{1}{4} D \left(Z - Z' - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{L}{\Pi} \varphi(U), \quad [8]$$

relation dans laquelle Z - Z' représente la distance verticale comprise entre les niveaux des deux réservoirs.

On se servira donc dans les deux cas de la formule [4] en prenant dans le premier cas

$$J = \frac{Z - 1,49 \frac{U^2}{2g}}{L}$$

et dans le second

$$J = \frac{7 - Z' - 1,49 \frac{U^2}{2g}}{L}$$

VI. A l'équation [4], dans laquelle on donnera à J la valeur convenable, il faut joindre la relation

$$Q = \frac{1}{4} \Pi D^2 U. \quad [9]$$

Les relations [4] et [9] permettent de déterminer deux des quatre quantités D, Q, J, U, lorsque les deux autres sont données. Nous examinerons les cas qui se présentent le plus fréquemment dans les applications.

1. On donne le diamètre D de la conduite et la distance Z du niveau du réservoir supérieur au-dessus de l'extrémité de la conduite, supposée déboucher dans l'air; on demande la dépense Q et la vitesse moyenne U.

On négligera d'abord le terme de correction $1,49 \frac{U^2}{2g}$, et l'on prendra

$$J = \frac{Z}{L}.$$

Le diamètre D étant connu, la table de M. Darcy donnera $\frac{J}{Q^2}$; J étant connu, on en déduira Q^2 ,

puis Q; en divisant par $\frac{1}{4} \Pi D^2$, on aura U.

On recommencera le calcul en tenant compte du terme négligé.

Exemple. On suppose

$$D = 0^m,06, \quad L = 200^m, \quad Z = 4^m$$

On a pour première approximation

$$J = \frac{4}{200} = 0,02$$

La table pour $D = 0,06$ donne

$$\frac{J}{Q^2} = 6008 \quad \text{ou} \quad \frac{0,02}{Q^2} = 6008,$$

d'où $Q^2 = \frac{0,02}{6008} = 0,000033288$,

puis $Q = 0,00182$. D'ailleurs $\frac{1}{4} \Pi D^2 = 0,002826$,

donc $U = \frac{0,00182}{0,002826} = 0^m,644$.

On en déduit $\frac{U^2}{2g} = 0,021$ et $1,49 \frac{U^2}{2g} = 0,031$.

Recommençant le calcul, on obtient

$$J = \frac{4 - 0,031}{200} = 0,019845,$$

$$Q^2 = \frac{0,019845}{6008} = 0,000033031,$$

puis $Q = 0,001817$,

enfin $U = \frac{0,001817}{0,002826} = 0^m,6429$.

On voit qu'on aurait pu, à la rigueur, se contenter de la première approximation.

2. Une conduite doit débiter un volume donné Q; elle met en communication deux réservoirs dont la différence de niveau H est donnée; on demande le diamètre de la conduite et la vitesse moyenne du liquide.

En négligeant d'abord le terme de correction

$$1,49 \frac{U^2}{2g}$$

on aura $J = \frac{H}{L}$.

On calculera le quotient $\frac{J}{Q^2}$; la table donnera par interpolation le diamètre D. On aura ensuite

$$U = \frac{4Q}{\Pi D^2}.$$

On pourra recommencer le calcul en se servant de cette valeur de U pour tenir compte du terme de correction qui a été négligé.

Exemple. Soit

$$L = 500^m, \quad Q = 20 \text{ litres}, \quad H = 6^m,40.$$

On aura d'abord

$$J = \frac{6,40}{500} = 0,0128.$$

D'ailleurs $Q = 0^m,020$;

donc $\frac{J}{Q^2} = \frac{0,0128}{(0,02)^2} = 32$

La table donne par interpolation $D = 0^m,1654$. On a ensuite

$$U = \frac{0,020 \cdot 4}{3,1416 (0,1654)^2} = 0^m,9308.$$

Si l'on veut tenir compte du terme négligé, on trouve d'abord

$$1,49 \frac{U^2}{2g} = 1,49 \cdot \frac{(0,9308)^2}{19,62} = 0,0658.$$

Puis $J = \frac{6,40 - 0,0658}{500} = 0,0126744$.

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{0,0126744}{0,0004} = 31,686.$$

La table donne alors $D = 0^m,16595$, ou $0^m,166$; et l'on a enfin

$$U = \frac{0,020 \cdot 4}{3,1416 (0,166)^2} = 0^m,9241.$$

VII. La résistance du tuyau croissant très-rapidement avec la vitesse moyenne, on évite en général de donner à cette vitesse des valeurs supérieures à 2^m, surtout si les robinets peuvent être fermés brusquement, car il en résulte des coups de bélier qui pourraient faire rompre la conduite. On limite ordinairement la vitesse à quelques centimètres pour les petits tuyaux ou à quelques décimètres pour les grands. Cependant si les eaux qui se meuvent dans la conduite sont susceptibles de se troubler et de charrier des limons ou des sables, il faut que la vitesse conserve une valeur suffisante pour que ces matières étrangères ne puissent pas se déposer, c'est-à-dire environ 0^m,08 pour les terres détrempées, 0^m,15 pour les argiles, 0^m,30 pour les sables, 0^m,60 pour les graviers.

(Voy. le Cours d'Hydraulique professé à l'École centrale par M. Bélanger, le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, l'Aide-Mémoire de Mécanique pratique de M. Morin, les Leçons de Mécanique pratique du même auteur, et les auteurs cités dans le cours de cet article.)

Voy. l'article DISTRIBUTIONS D'EAU. Voyez aussi notre mémoire (approuvé par l'Académie des sciences) ayant pour titre Recherches sur le mouvement uniforme des eaux, etc., en ayant égard aux différences de vitesse des filets (1845).

CÔNE CIRCONSCRIT, cône enveloppe des plans tangents menés à une surface par un point donné. Ce cône touche la surface suivant une ligne que l'on appelle souvent ligne d'ombre, parce que si le point donné était un point lumineux, cette ligne séparerait l'ombre propre de la surface de la portion éclairée.

D'après la définition même, pour déterminer le cône circonscrit à une surface, étant donné le sommet de ce cône, il faut mener une série de plans tangents par ce point (*Voy. PLAN TANGENT*), déterminer le point de contact de chacun d'eux, et joindre ce point de contact au sommet du cône. Toutes les lignes de jonction ainsi menées sont des génératrices du cône circonscrit, dont il sera facile de déterminer la trace sur les plans de projection ainsi que le contour apparent.

Le problème se simplifie dans beaucoup de cas.

Si la surface donnée est un cylindre, le cône circonscrit se compose de deux plans qui se coupent suivant une droite parallèle aux génératrices du cylindre, et la ligne de contact est formée de deux de ces génératrices.

Si la surface donnée est un cône, que nous supposons à base convexe, le cône circonscrit se compose de deux plans qui se coupent suivant une droite passant par le sommet du cône donné, et la ligne de contact est formée de deux génératrices de ce cône.

Si la surface donnée est une surface du second ordre, le cône circonscrit est lui-même du second ordre, et la ligne de contact est une courbe du second degré ou une variété de ces courbes. Si, par exemple, la surface donnée est un ellipsoïde, la ligne de contact est une ellipse dont le plan a une direction conjuguée à celle du diamètre passant par le sommet du cône. Si la surface donnée est un parabolôïde hyperbolique, la ligne de contact est une hyperbole située dans un plan parallèle au plan tangent mené par le point de la surface où elle est percée par le diamètre passant au sommet du cône. Si la surface donnée est un hyperbolôïde à une nappe, la ligne d'ombre est une hyperbole, une ellipse, ou une parabole, suivant que le diamètre qui va au sommet du cône est un diamètre transverse, non transverse, ou qu'il se confond avec une génératrice de l'hyperbolôïde.

(*Voy. pour plus de détails le Traité de Géométrie descriptive de M. de La Gournerie. Voyez aussi dans ce dictionnaire l'art. OMBRES.*)

CÔNE DIRECTEUR, cône dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface gauche donnée. Dans l'hyperbolôïde à une nappe, le cône directeur est un cône du second degré; si on lui donne pour sommet le centre de sa surface, il se confond avec le cône asymptote. Dans l'hyperbolôïde de révolution à une nappe, dans l'hélicoïde développable, dans la surface de vis à filet triangulaire, le cône directeur est un cône de révolution. Dans le parabolôïde hyperbolique et dans tous les conoïdes, le cône directeur devient un plan (*Voy. SURFACES COURBES*).

CÔNES DE FRICTION, cônes, l'un intérieur, l'autre extérieur, dont le frottement sert de moyen d'embrayage (*Voy. EMBRAYAGES*).

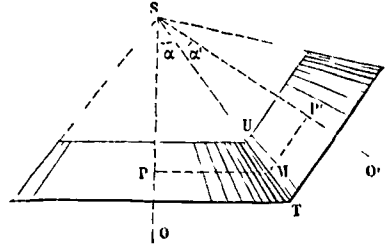
On donne quelquefois le même nom aux cônes qui se conduisent mutuellement par simple contact comme des roues d'angle.

On augmente l'adhérence de ces cônes en recouvrant les deux surfaces d'une peau de buffle. Soient SO et SO' les axes des deux roues, ST la génératrice commune, M un point sur cette génératrice, $MP = r$ et $MP' = r'$ les distances du point M aux deux axes, enfin ω et ω' les vitesses angulaires autour de ces

mêmes axes. Le point M devant avoir la même vitesse sur les deux cônes pour qu'il n'y ait pas de glissement, on doit avoir

$$\omega r = \omega' r', \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r},$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont en raison inverse des distances d'un point quelconque de



la génératrice aux deux axes. Si le point M est le milieu de la portion UT de génératrice suivant laquelle s'opère le contact, les distances r et r' sont les rayons moyens des deux roues. On peut remarquer encore que si α et α' désignent les angles OST , $O'ST$ que la génératrice de contact fait avec les deux axes, on a

$$r = SM \sin \alpha \quad \text{et} \quad r' = SM \sin \alpha';$$

d'où $\frac{r'}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$, et par suite $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$,

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont en raison inverse des sinus des demi-angles au sommet des deux cônes.

Les cônes de friction ne peuvent être employés que dans les mécanismes légers où l'effort à transmettre est très-faible, autrement il faudrait recourir à un engrenage conique.

CÔNES PRIMITIFS, cônes ayant le même sommet et qui, en tournant autour de leurs axes, se conduiraient mutuellement par simple contact, de la même manière qu'un engrenage conique donné (*Voy. ENGRENAGES*).

CONFIGURATIONS DES SATELLITES DE JUPITER, figures qui, dans la *Connaissance des temps*, donnent, pour chaque jour de l'année où cette planète peut être observée, et pour l'heure la plus favorable aux observations, les positions relatives de la planète et de ses satellites. La position de Jupiter est figurée par un petit cercle; celles de ses satellites sont figurées par des points accompagnés de chiffres placés du côté vers lequel le satellite se dirige. Ces configurations sont renversées comme on les voit dans des lunettes à deux verres convexes. En avant de la ligne horizontale qui donne la configuration d'un jour, on trouve quelquefois un petit cercle accompagné d'un chiffre: cette notation indique que le satellite correspondant à ce chiffre est sur le disque de Jupiter; au contraire, un gros point noir accompagné d'un chiffre indique que le satellite correspondant est dans l'ombre projetée par la planète, ou derrière la planète elle-même. On trouve, par exemple, que pour le 29 janvier 1862, les satellites de Jupiter présentaient la configuration ci-dessous, à 3^h 30^m du matin :

29

● 1

2 .

○

. 3

. 4

Cette figure montre les positions relatives de la planète et de ses satellites; elle indique en outre: 1° que le premier satellite est éclipsé; 2° que le second se dirige vers la gauche, dans la lunette, c'est-à-dire en réalité vers l'occident; 3° que le troisième et le quatrième se dirigent tous deux vers la droite, dans la lunette, c'est-à-dire en réalité vers l'orient.

CONGÉ, sorte de moulure circulaire (*Voy. Moulures*).

CONJONCTION, position relative de deux corps célestes qui ont la même longitude. Cette dénomination s'emploie principalement dans le cas où l'un des corps célestes considérés est le soleil; ainsi la lune est en conjonction à l'époque de la néoménie.

Pour les planètes inférieures, on distingue deux conjonctions: l'une dite *supérieure*, c'est celle qui a lieu quand la planète est placée au delà du soleil par rapport à nous; l'autre dite *inférieure*, c'est celle qui a lieu quand la planète est placée entre le soleil et la terre.

CONNAISSANCE DES TEMPS, recueil publié pour chaque année, et deux ans à l'avance, par le Bureau des longitudes, et contenant toutes les données astronomiques qui peuvent intéresser les astronomes et les navigateurs. Parmi celles qui intéressent la géodésie et la navigation, nous citerons:

1° Une table donnant, pour chaque jour de l'année, l'heure du lever et du coucher du soleil en temps moyen de Paris.

2° Une table donnant, pour chaque jour de l'année, et pour l'heure de midi, temps moyen de Paris, la longitude du soleil, sa latitude, et le logarithme de sa distance à la terre. La même table donne, dans une colonne spéciale, le *temps moyen à midi vrai*, c'est-à-dire l'équation du temps (*Voy. ce mot*) avec les différences pour faciliter l'interpolation. Elle donne également pour l'heure de midi, temps moyen de Paris, l'heure sidérale, l'ascension droite du soleil, sa déclinaison, et les différences successives de ces coordonnées.

3° Une table donnant, de 5 jours en 5 jours, la parallaxe horizontale du soleil, son demi-diamètre apparent, la durée du passage de ce demi-diamètre au méridien, en temps moyen et en temps sidéral, le mouvement horaire du soleil en longitude, et l'aberration du soleil.

4° Une table donnant pour tous les jours de l'année l'heure du lever de la lune, l'heure de son coucher et l'heure de son passage au méridien, en temps moyen de Paris.

5° Une table donnant, de 12 heures en 12 heures, c'est-à-dire à midi et à minuit, temps moyen de Paris, la longitude de la lune, sa latitude, avec les différences successives de ces coordonnées pour faciliter l'interpolation; la parallaxe de la lune et son demi-diamètre apparent, et, d'heure en heure, son ascension droite, sa déclinaison, et une colonne des différences pour 10 minutes.

6° Des tables donnant, en temps moyen de Paris, l'heure du lever, du coucher et du passage au méridien des principales planètes, leurs coordonnées écliptiques, héliocentriques et géocentriques, leurs coordonnées équatoriales et leur rayon vecteur. Ces données sont fournies de 3 jours en 3 jours pour Mercure, de 6 jours en 6 jours pour Vénus et Mars, de 8 jours en 8 jours pour Jupiter, de 10 jours en

10 jours pour Saturne, et de 15 jours en 15 jours pour Uranus. Les mêmes tables donnent, pour les planètes inférieures, les dates des conjonctions et des plus grandes elongations, et pour les planètes supérieures, celles des conjonctions, oppositions et quadratures.

7° Une table des éclipses des satellites de Jupiter.

8° Une table des configurations (*Voy. ce mot*) des mêmes satellites.

9° Une table des positions apparentes de 116 étoiles principales, calculées pour leur passage supérieur au méridien de Paris.

10° Une table des distances lunaires, c'est-à-dire des distances géocentriques du centre de la lune au centre du soleil, aux centres des planètes et aux principales étoiles. Cette table a surtout pour objet la détermination des longitudes. Celles de ces distances qui sont observables, sont données de 3 heures en 3 heures.

11° Un tableau détaillé des éclipses de lune et de soleil.

12° Un tableau des plus grandes marées.

13° Une table de réfraction, avec les tables de correction qui s'y rapportent.

14° Une table de correction pour convertir le temps sidéral en temps moyen.

15° Une table de correction pour convertir le temps moyen en temps sidéral.

16° Une table servant à calculer l'équation du temps à midi moyen quand on l'a pour midi vrai.

17° Une table servant à calculer l'équation du temps à midi vrai quand on l'a pour midi moyen.

18° Une table de la parallaxe du soleil à divers degrés de hauteur et en différents temps de l'année.

19° Une table de la parallaxe des planètes à divers degrés de hauteur.

20° Une table de réduction des degrés de longitude terrestre en temps.

21° Une table des positions géographiques des principaux lieux de la terre.

On trouve dans le même volume l'explication et l'usage des articles de la *Connaissance des temps*, et des *Additions* renfermant divers mémoires scientifiques.

CONOÏDE, surface gauche à plan directeur. Le paraboloïde hyperbolique et la surface de vis à filet carré sont des conoïdes. (*Voy. SURFACES COURBES.*)

CONSERVATION DES FORCES VIVES (PRINCIPE DE LA), principe qu'il ne faut pas confondre avec le *Principe des forces vives*, dont il n'est qu'un cas particulier. Il consiste en ce que la somme des forces vives demeure constante dans un système composé de corps qui ne sont soumis qu'à leurs pressions mutuelles. Il suppose les corps incompressibles; le travail des pressions mutuelles étant nul, l'accroissement de puissance vive ou de force vive est nul aussi, et la somme des forces vives ne varie pas. Ce principe, énoncé d'abord par Huyghens dans un cas particulier, a été ensuite démontré et étendu par Jean et Jacques Bernoulli.

CONSOLE, support dont la forme générale est celle d'une S, et qui est destiné à porter une corniche, un appui de croisée, une tablette de cheminée, etc. Les contours d'une console peuvent être obtenus à l'aide d'arcs de cercles qui se raccordent; mais les architectes préfèrent ordinairement les dessiner à la main. Cependont les extrémités se terminent

souvent en volutes, et pourraient être tracées par des moyens analogues à ceux dont on fait usage pour la volute ionique (Voy. VOLUTES). Une console peut être LISSE à sa partie antérieure ; mais plus fréquemment elle est ornée de moulures.

CONSTELLATION, groupe d'étoiles, réunies artificiellement par une figure d'homme, ou d'animal, etc., qui lui donne son nom. Aujourd'hui la position des étoiles sur la sphère céleste est déterminée par leurs ascensions droites et leurs déclinaisons, inscrites dans tous les catalogues d'étoiles. Mais à l'époque où ces coordonnées sphériques n'étaient point connues, il était commode, pour désigner une étoile, de la rattacher à une figure convenue, et de dire, par exemple, l'étoile qui occupe la queue de la Grande-Ourse, l'œil du Chien, le cœur du Scorpion, etc. Les noms de ces figures, qui facilitent la connaissance du ciel, ont été conservés de nos jours ; mais on désigne les étoiles d'une même constellation soit par une lettre grecque ou romaine, soit par un numéro d'ordre quand les lettres sont insuffisantes. Toutes les MAPPEMONDES ou CARTES CÉLESTES (Voy. ce mot) offrent le tableau des constellations avec leurs positions relatives.

Pour les distinguer dans le ciel, on emploie d'ordinaire la méthode dite des alignements, qui permet de retrouver toutes les constellations quand on sait reconnaître l'une d'elles. La première constellation qu'on apprend ordinairement à distinguer est la Grande Ourse, caractérisée par 7 étoiles brillantes α , β , γ , δ , ϵ , ζ , η (fig. 1), formant une fi-

gure de 4 étoiles de 2° grandeur, dont 3 appartiennent à la constellation de Pégase, la quatrième α appartient à la constellation d'Andromède. La ligne $\delta\epsilon$ de la figure 1 rencontre, à peu près à moitié chemin entre P et α , la constellation de Cassiopée, qu'on appelle aussi la Chaise. La ligne qui joint ζ et η de la Grande Ourse, prolongée

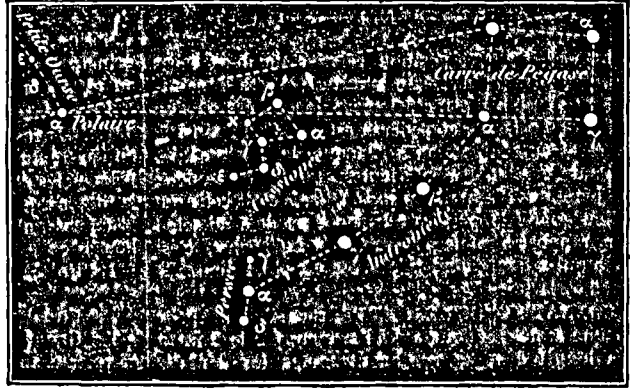


Fig. 2.

de 33° environ, passe très-près d'Arcturus ou α du Bouvier, étoile de première grandeur. Sur la ligne menée par δ et α de la Grande Ourse, on rencontre la Chèvre, étoile de première grandeur et la principale de la constellation du Cocher. La ligne qui joint l'étoile polaire à la Chèvre va passer au milieu d'Orion, la plus brillante des constellations, formée de 7 étoiles principales, dont 4 occupent les angles d'un grand quadrilatère, tandis que les 3 autres sont rapprochées les unes des autres sur une ligne oblique occupant le centre du quadrilatère. En continuant ainsi, on parvient à relier entre elles toutes les constellations et à les distinguer aisément sur la voûte étoilée. Mais rien ne remplace à cet égard une longue habitude de l'aspect du ciel.

Les constellations connues du temps de Ptolémée étaient au nombre de 48, savoir :

1° 21 dans l'hémisphère boréal :

La Petite Ourse, la Grande Ourse, le Dragon, Céphée, le Bouvier, la Couronne boréale, Hercule, la Lyre, le Cygne, Cassiopée, Persée, le Cocher, Ophiucus, le Serpent, la Flèche, l'Aigle, le Dauphin, le petit Cheval, Pégase, Andromède, le Triangle ;

2° 12 dans le ZODIAQUE (Voy. ce mot) :

Le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, le Cancer, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons ;

3° 15 dans l'hémisphère austral :

La Baleine, Orion, l'Éridan, le Lièvre, le Chien, Procyon, Argo, l'Hydre, la Coupe, le Corbeau, le Centaure, le Loup, l'Autel, la Couronne australe, le Poisson austral.

Ces constellations sont les plus importantes à connaître ; 60 autres ont été ajoutées à cette liste par Hévelius, Halley, Bayer, la Caille et d'autres as-

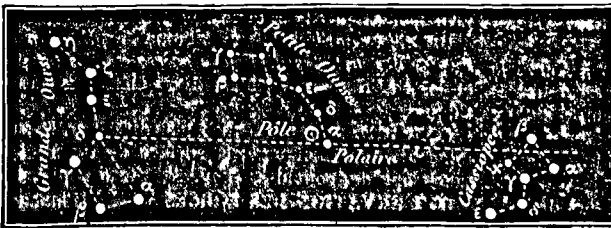


Fig. 1.

gure facile à retenir et à laquelle on donne quelquefois le nom de chariot. Cette constellation reste toujours au-dessus de l'horizon de Paris.

Si l'on joint par la pensée les étoiles α et β de la Grande Ourse, et qu'on prolonge la ligne de jonction d'une quantité à peu près égale à cinq fois la distance $\alpha\beta$, on trouve l'étoile polaire P, qui n'occupe pas exactement le pôle boréal, comme son nom pourrait le faire croire, mais qui n'en est distante que de 1° 26'. Cette étoile occupe l'extrémité de la queue de la Petite Ourse, constellation caractérisée aussi par 7 étoiles principales, formant une figure à peu près semblable à la Grande Ourse, mais moins étendue et tournée en sens contraire.

Les lignes $\alpha\beta$ et $\delta\epsilon$ de la figure 1 étant prolongées, vont aboutir au carré de Pégase (fig. 2)

tronomes plus modernes ; la plupart de ces nouvelles constellations sont situées dans l'hémisphère austral. On les trouve figurées sur les grandes cartes astronomiques.

CONSTRUCTION NAVALE, science qui enseigne à disposer les diverses parties d'un navire. Elle embrasse la connaissance des formes que doivent affecter ces diverses parties, leur exécution, leur mise en place, et l'étude des conditions générales auxquelles le navire doit satisfaire, au point de vue de l'équilibre, de la stabilité et de la marche.

La partie principale d'un navire est la *coque*, formant un tout continu et destinée à flotter. Elle est divisée en deux parties symétriques par un plan, qui est vertical à l'état de repos, et qu'on appelle le *plan diamétral longitudinal*, ou simplement le *longitudinal*. La courbe suivant laquelle la coque est rencontrée par le plan horizontal de la mer lorsque le navire est chargé se nomme *ligne de flottaison en charge*, ou *ligne d'eau*. La partie de la coque qui est immergée constitue la *carène* ou les *œuvres vives* ; la partie qui est au-dessus de la ligne de flottaison forme l'*accastillage* ou les *œuvres mortes*. On divise encore la coque par un plan vertical perpendiculaire au longitudinal, auquel on donne le nom de *latitudinal* ou *transversal*. Tout ce qui est en avant de ce plan forme la partie *avant* du navire, qui se termine de ce côté à la *proue* ; tout ce qui est en arrière du latitudinal forme la partie *arrière*, qui se termine par la *poupe*. Tout ce qui est à droite du longitudinal pour un observateur regardant l'avant forme le côté de *tribord* ; tout ce qui est à gauche forme le côté de *babord*.

Au point de vue de la construction, la coque se divise en trois parties principales : la membrure, le revêtement, les grandes liaisons.

Le base de la membrure est une pièce longitudinale qui en occupe la partie inférieure et qu'on appelle la *quille* ; elle présente la forme d'un parallépipède rectangle, et se compose de pièces ayant environ 2 mètres, assemblées à empâture (*Voy. ASSEMBLAGES*). Vers la partie supérieure des faces latérales est pratiquée une rainure longitudinale nommée *râblure*, et destinée à servir d'encastrement au bordage inférieur du revêtement. La section transversale de la quille présente ainsi la forme indiquée par la figure 1. La quille est fortifiée à l'intérieur de la coque, c'est-à-dire à sa partie supérieure, par une pièce longitudinale d'une moindre épaisseur nommée *contre-quille*, et à la partie inférieure par une autre pièce semblable nommée *fausse quille*. A l'avant de la quille on établit une pièce courbe E, E (fig. 2) qui en est la continuation, et qui porte le nom d'*étrave* ; elle est fortifiée à l'intérieur



Fig. 1.

par une pièce *ee* de forme semblable, appelée *contre-étrave*. L'ensemble de ces pièces porte le nom de *massif avant*. A l'arrière, la quille reçoit une pièce droite EE (fig. 3) qui porte le nom d'*étambot* ; l'incision de cette pièce par rapport à la verticale est ce qu'on nomme la *quête* de l'étambot. Cette pièce est fortifiée à l'intérieur par un *faux-étambot*, et à l'intérieur par un *contre-étambot*, et par une forte pièce courbe C, nommée *courbe d'étambot*, qui la relie plus solidement à la quille. La

râblure de la quille se continue sur l'étrave et sur l'étambot.

Sur la quille et perpendiculairement à sa longueur s'élèvent une série de constructions qui forment la *maîtresse partie* de la membrure, et aux-

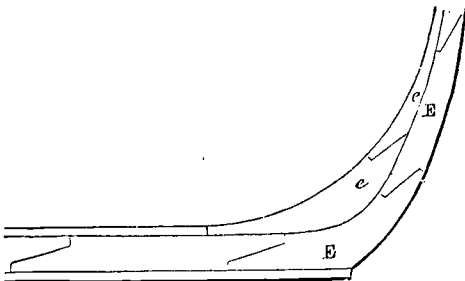


Fig. 2.

quelles on donne le nom de *couples* (fig. 4). Ils présentent deux branches symétriques par rapport au longitudinal, et sont formés de pièces assemblées à écart simple normalement à la courbure. On leur

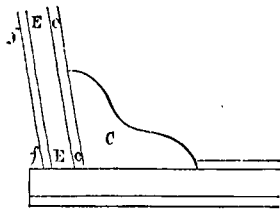


Fig. 3.

donne le nom de couples, parce qu'ils sont formés de deux moitiés juxtaposées, dont les épaisseurs réunies forment l'épaisseur totale du couple, et qui ne diffèrent l'une de l'autre qu'en ce que les écarts

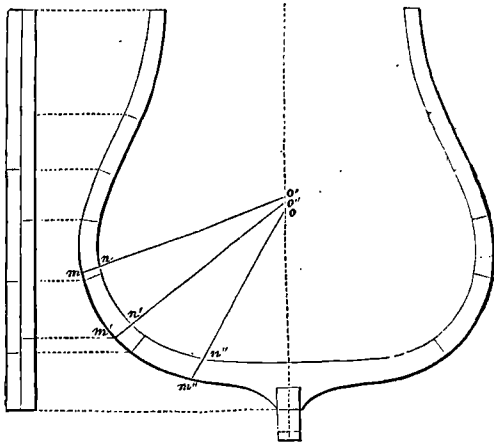


Fig. 4.

de l'une correspondent aux parties pleines de l'autre, comme l'indique la figure 4. La pièce inférieure de chaque couple, appelée *varangue*, s'assemble par entaille à la contre-quille. Les autres pièces successives portent le nom d'*allonges* et se distin-

guent par leurs numéros d'ordre tribord ou bâbord. Vers la partie moyenne de la coque, mais un peu plus sur l'avant, se trouve un couple plus large que les autres et qui porte le nom de *matre-couple*; il est divisé en deux parties égales dans son épaisseur par le latitudinal. La mise en place des couples exige des vérifications dont on trouvera le détail aux articles BALANCEMENT et PERPIGNAGE. Les couples dont nous venons de parler ayant leurs deux branches dans un même plan portent le nom de couples *droits*; lorsque les deux branches sont dans des plans verticaux différents, comme cela a lieu vers l'avant, le couple est dit *dévoyé*; l'angle formé par les plans des deux branches est alors divisé en deux parties égales par le longitudinal. Les couples changent de forme à mesure qu'on avance vers les extrémités du navire; et ce changement affecte surtout les varangues. Celles qui avoisinent le maître-couple sont des *varangues plates* ou *varangues de fond* (fig. 4). Mais à mesure qu'on s'éloigne du matre, les varangues sont de plus en plus *acculées*, c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée de leur extrémité sur la face supérieure de la quille, supposée prolongée, va en augmentant; lorsque les branches de la varangue se réunissent sous un angle très-aigu, elle prend le nom de *fourcat*. Dès que l'angle des deux branches commence à être un peu aigu, la varangue, au lieu de s'assembler à la contre-quille, s'assemble, au moyen d'un tenon qu'elle fournit, à une pièce *oo* (fig. 5) appelée *oreiller* et qui remplace la contre-

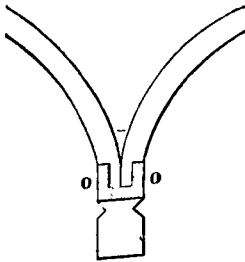


Fig. 5.

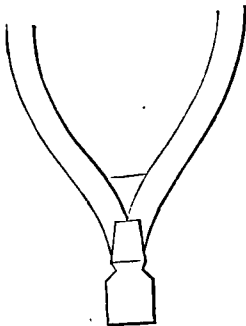


Fig. 6.

ou moins brusque, aboutir à une sorte de couple dévoyé nommé *estain* (SS, S'S') sur la face postérieure duquel elles appuyent leur extrémité. La barre supérieure (HH, H'H') est la *barre d'Hourdy*; elle est à double courbure et présente par conséquent deux *bouges* ou deux flèches, l'une dans le sens

vertical, l'autre dans le sens horizontal. La barre suivante PP est la *barre de pont*, ainsi nommée parce qu'elle est à la hauteur du premier pont, ou du pont le plus bas. Les suivantes portent des numéros d'ordre, comme on le voit sur la figure. La dernière (FS, F'S'), nommée *fourcat d'ouverture*, est formée de deux branches concaves vers l'extérieur. L'estain se prolonge dans l'accastillage par une pièce dite *al-longe d'estain* ou *cornière* HS.

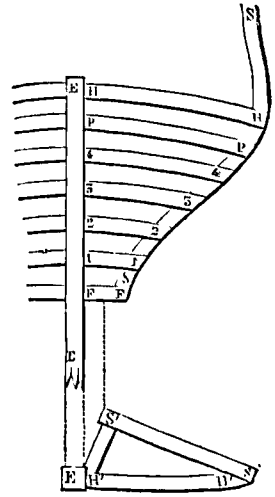


Fig. 7.

Ces diverses pièces sont réunies à terre aux étambots; on procède ensuite à la mise en place des étambots et de l'arcasse, au moyen d'appareils convenables, et enfin au balancement et au perpignage de cette construction. On comble l'espace qui existe entre l'estain et la contre-quille au moyen de pièces de diverses formes dont l'ensemble constitue le *massif arrière*. Dans les chantiers,

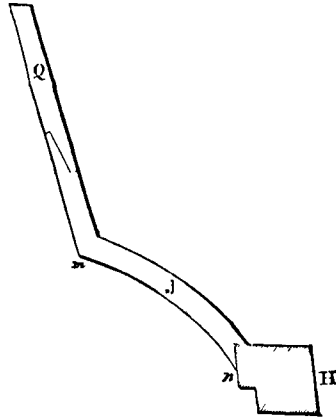


Fig. 8.

la construction et la mise en place de l'arcasse précèdent ordinairement l'érection des couples.

Au-dessus de l'arcasse on établit la *voûte* et le *tableau*. La membrure de la voûte se compose de pièces verticales, parallèles au longitudinal et nommées *allonges de voûte* ou *jambettes* J (fig. 8). Ces jambettes reposent sur la barre d'Hourdy H; et l'on peut concevoir la surface de la voûte comme engendrée par la courbe inférieure *mn* de la jambette qui se mouvrait parallèlement à elle-même en suivant la courbure de la barre d'Hourdy. La membrure du tableau est formée par des pièces dites *quenouillettes* Q, qui sont le prolongement des jambettes. On ne pose d'abord que les deux

quenouillettes placées contre l'étambot de part et d'autre, et les deux quenouillettes les plus éloignées, dites quenouillettes *latérales* ou de *cornière*. Les deux premières comprennent entre elles l'ouverture

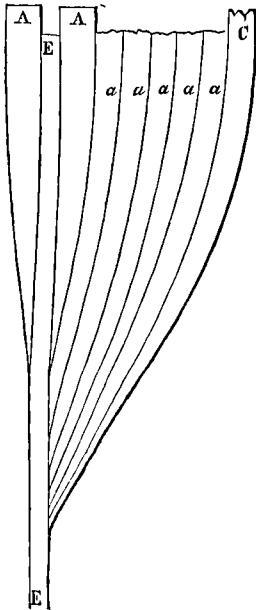


Fig. 9.

par laquelle la tête du gouvernail pénétrera dans l'intérieur de la coque (Voy. JAUMIERE). Nous verrons plus loin comment on place les autres quenouillettes.

Sur l'avant, le dernier couple est un couple dévoyé nommé *couple de collis*. L'espace compris entre ce couple et l'étrave est rempli par un massif plein formé de pièces nommées *allonges d'écubier* *a, a, a* (fig. 9), disposées en éventail, c'est-à-dire allant en s'élargissant à partir du bas, où elles reposent sur la contre-étrave EE, sur le massif avant, et enfin sur le collis CC lui-même. Les deux allonges A, A qui touchent l'étrave de chaque côté dépassent un peu les autres vers le haut; on leur donne le nom d'*apôtres*; elles comprennent entre elles l'ouverture par laquelle passera le beaupré.

Telles sont les parties principales de la membrure. Mais avant de procéder au revêtement de la coque il faut combler les intervalles trop considérables encore que ces parties laissent entre elles; pour cela voici comment on procède. Les plans du navire fournissent les intersections de la carène avec un certain nombre de plans perpendiculaires au latitudinal et obliques au longitudinal. Ces courbes portent le nom de *lisses de carène*. On nomme *lisse de fond* celle qui suit les extrémités des varangues, *fausse lisse de fond* celle qui est comprise entre la lisse de fond et la râblure de quille, *lisse de fort* celle qui suit la ligne de flottaison; les autres sont distinguées par des numéros d'ordre. Le projet fournit aussi d'autres courbes analogues qui parcourent la coque dans sa longueur au-dessus de la ligne d'eau, et que l'on nomme *lisses d'accastillage*; celles-ci sont à double courbure. Celle qui suit les extrémités des allonges des couples se nomme *lisse de plat-bord*; dans les navires à dunette, il y a une dernière lisse appelée *lisse de rabatue*. Les intersections de ces diverses courbes avec les couples ayant été déterminées avec soin, on réalise en quelque sorte ces courbes au moyen de pièces de bois d'un faible équarrissage appelées *cabrions*, que l'on place bout à bout et que l'on fixe aux couples successifs. Les courbes ainsi obtenues sont nommées *lisses d'exécution*; elles forment autour de la membrure une liaison provisoire qui détermine en même temps les diverses

courbures de la coque. Ces lisses se prolongent à l'avant sur les allonges d'écubier, et à l'arrière sur la vôte et sur le tableau. On s'en sert pour construire, entre les couples dont nous avons parlé précédemment, et que l'on nomme *couples de levée*, d'autres couples intermédiaires appelés *couples de remplissage*. On les construit pièce par pièce au moyen de GABARITS (Voy. ce mot) construits sur place à l'aide des lisses; on conçoit en effet que si l'on se donne le point où le couple que l'on veut construire coupe la quille, un plan mené par ce point perpendiculairement à la quille coupera toutes les lisses en des points qui appartiendront au contour du couple demandé. On construit de la même manière des jambettes et quenouillettes de remplissage; la membrure est alors à mailles assez serrées pour qu'on puisse procéder au revêtement. Mais avant d'en parler nous dirons quelques mots des ponts.

Dans les vaisseaux de haut bord ces ponts sont au nombre de quatre au moins, qui, en allant de bas en haut, portent respectivement les noms de *faux pont*, *premier pont*, *deuxième pont* et *gaillard*. L'espace situé au-dessous du faux pont constitue la *cale*; l'intervalle compris entre le faux pont et le premier pont porte lui-même le nom de *faux pont*; entre le premier et le deuxième pont est située la *première batterie*; entre le deuxième pont et les gaillards se trouve la *deuxième batterie*; la troisième batterie est alors la *batterie des gaillards*.

Dans les vaisseaux de premier rang, il y a un pont de plus, qui prend le nom de troisième pont; entre ce troisième pont et les gaillards se trouve la troisième batterie; la batterie des gaillards est alors une quatrième batterie.

La membrure des ponts se compose de pièces appelées *baux*, placées transversalement de distance en distance et dont chacune relie les deux branches d'un même couple. Comme les ponts ont à supporter un poids considérable, on leur donne une courbure dont la convexité est tournée vers le haut; cette courbure est déterminée par la méthode du QUART DE NONANTE (Voy. ce mot). Comme d'autre part les navires ont une tendance à s'*arqu*er dans le sens longitudinal, c'est-à-dire que la poupe et la proue tendent à s'abaisser par rapport au centre, surtout quand la longueur du navire est considérable par rapport à sa largeur, pour s'opposer à cet effet on donne aux ponts, dans le sens de la longueur, une courbure dont la convexité est tournée vers le bas; un plan parallèle au longitudinal couperait les baux suivant des points placés sur une courbe tournant sa convexité vers le bas; c'est ce que l'on appelle la *tonture* du pont. On nomme LIVET DE PONT (Voy. ce mot) l'intersection du pont avec la coque. Pour le premier pont, le premier bau de l'arrière est la barre de pont, qui fait partie de l'arcasse; pour les autres ponts, le premier bau est en contact avec les jambettes et quenouillettes. L'intervalle des baux est rempli par des pièces analogues, mais d'un moindre équarrissage, appelées *barrotins*. Les ponts sont reliés entre eux par des colonnes en bois ou en fer placées dans le longitudinal et dans plusieurs plans parallèles, et auxquelles on donne le nom d'*épontilles*.

Le revêtement intérieur ou *vai-grage* est formé

par des planches nommées *vaigres* que l'on dispose bout à bout dans le sens de la longueur du navire; celles qui forment une file constituent ce qu'on appelle une *virure*. Ces virures sont juxtaposées à partir d'une pièce longitudinale placée sur les varanques et portant le nom de *carlingue*, jusqu'à la hauteur des gaillards. La virure qui précède chaque pont se nomme une *banquière*; c'est sur elle que s'appuient les baux. La virure placée immédiatement au-dessus de chaque pont prend le nom de *fourrure de gouttière*. L'arcasse n'est point vaigrée. La voûte et le tableau reçoivent des vaigres dont les virures suivent la courbure du dernier bau de l'arrière.

Depuis un certain nombre d'années, on substitue au vaigrage longitudinal dont il vient d'être parlé un *vaigrage oblique* qui a pour objet de combattre la tendance du navire à s'arquer.

Le revêtement extérieur ou *bordé* se compose également de fortes planches, ou *bordages*, disposées bout à bout par *virures*. Ces virures suivent la direction des lisses; et par conséquent, au-dessus de la flottaison, elles ont une double courbure et participent à la tonture des ponts. Elles vont en diminuant de largeur à mesure qu'on avance vers la proue ou vers la poupe. Les bordages de la carène portent des noms divers suivant la position qu'ils occupent. A la hauteur du premier et du deuxième pont, un ensemble de trois virures d'une forte section forme une liaison solide à laquelle on donne le nom de *préceinte*; à la hauteur des gaillards la préceinte prend le nom de *ribord*. Enfin sur la tête de toutes les allonges de couples repose une pièce continue qui déborde en dedans et en dehors, et qui termine la paroi du navire; c'est la *lisse de plat-bord*. Les ouvertures nommées *sabords* sont pratiquées entre les préceintes, ou entre le vibord et le plat-bord en profitant de l'intervalle des couples. La figure 10 montre en coupe les virures du vaigrage et du bordé. On voit en A et B la première et la seconde préceinte, en C le vibord, et en D le plat-bord; *b, b, b* sont les banquières; *f, f, f* les fourrures de gouttière. O représente la demi-section de la carlingue; S celle d'un ensemble de pièces longitudinales formant liaison, et qui portent le nom *serres d'empâtures*.

Le bordé de la voûte et du tableau se fait au moyen de virures transversales de même largeur que celles qui leur correspondent sur les côtés du navire.

Le bordé des ponts se fait au moyen de virures longitudinales reposant sur les baux et les barrotins, et qui vont en se rétrécissant vers l'avant du navire.

Indépendamment des ponts, des épontilles, de la carlingue et des serres d'empâture, il existe d'autres liaisons intérieures; telles sont les *porques*, sorte de demi-couples placés de distance en distance pour renforcer la membrure. Sur l'avant, ces constructions deviennent à peu près normales à l'étrave et prennent le nom de *guirlandes*. A la hauteur de chaque pont se trouve une guirlande dite *guirlande de pont*, qui se termine au premier bau de l'avant, et reçoit l'extrémité des bordages de pont. Nous sommes obligés de renvoyer aux ouvrages

spéciaux pour les autres détails; on peut consulter entre autres le *Traité de la Construction des vaisseaux*, de F. H. Chapman, et le *Cours de Construction navale* de l'École de Brest, par M. Salicis.

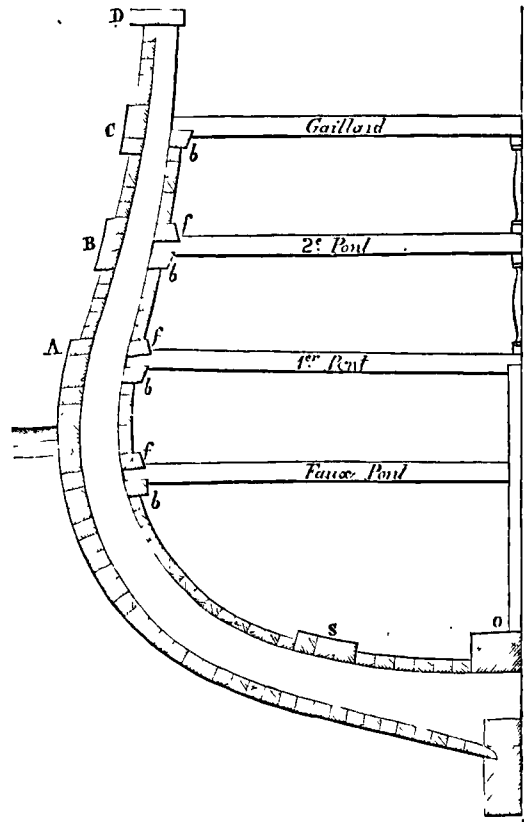


Fig. 10.

On substitue aujourd'hui aux poupes carrées, surtout dans la marine militaire, des poupes rondes qui présentent plusieurs avantages; elles offrent une meilleure disposition pour le combat, elles résistent mieux à l'action des lames; elles embrassent la mâche du gouvernail et la protègent ainsi contre les projectiles ennemis. — Dans les poupes rondes, l'arcasse est supprimée, et la membrure se compose, comme à l'avant, de couples de plus en plus déviés; ces couples sont généralement composés d'une partie plane et d'une partie cylindrique, ce qui leur a fait donner le nom de *couples cylindriques* (Voy. COUPLES). La partie arrière est remplie par un boisage analogue aux apêtres et aux allonges d'écubier qui remplissent la partie avant. Les guirlandes, les banquières, les fourrures de gouttière et le bordé forment la liaison du système et lui donnent toute la solidité nécessaire. Les poupes rondes s'appliquent d'ordinaire aux navires à hélice, il y a deux étambots, séparés, dans le sens longitudinal, par un espace formant la cage dans laquelle l'hélice est placée; on se ménage même le plus souvent les moyens de pratiquer dans la coque une ouverture appelée *puits*, par laquelle l'hélice peut être remontée lorsqu'on a besoin de visiter ou de réparer ce propulseur (Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES).

Les données nécessaires à la construction du navire sont fournies par l'ingénieur au moyen de trois projections sur le latitudinal, sur le longitudinal et sur un plan horizontal; ces projections sont accompagnées de tableaux donnant les dimensions des parties. C'est ce qu'on nomme le **DEVIS DE CONSTRUCTION** (*Voy. ce mot*).

Le travail des pièces est soumis à certaines règles générales. On divise les pièces en *pièces droites* et *pièces courbes*, ou *pièces de tour*; les premières sont celles qui ne sont terminées que par des faces planes; les dernières sont celles qui offrent des faces courbes. Elles se subdivisent en trois classes : 1° les pièces de tour *sans équerrage*: ce sont celles dans lesquelles les surfaces courbes sont des surfaces cylindriques droites, comprises entre deux faces planes perpendiculaires aux génératrices: telles sont l'étrave, la courbe d'étambot, les massifs, les baux, etc.; 2° les pièces de tour à *équerrage*: ce sont celles dans lesquelles la surface courbe est une surface réglée dont la génératrice fait, dans chacune de ses positions, des angles différents avec les faces planes; telles sont les allonges de couples, l'estain, la cornière, les allonges d'écubier, les barres d'arçasse inférieures à la barre de pont, les jambettes et quenouillettes intermédiaires; 3° les pièces terminées par quatre faces courbes, comme la barre d'Hourdy, la barre de pont, les lisses d'exécution, les jambettes de cornière, etc.; ces pièces sont à équerrages. — On appelle épaisseur *sur le droit* la distance de deux faces planes parallèles estimée suivant leur perpendiculaire commune, et épaisseur *sur le tour* la distance de deux faces courbes parallèles estimée suivant la normale.

Le travail des pièces droites n'offre aucune difficulté. Si la section droite de la pièce doit être rectangulaire, comme les bois dont on dispose ont le plus ordinairement cette forme, il suffit d'en réduire convenablement les dimensions. Pour cela, après avoir établi horizontalement une des faces, ce dont on s'assure à l'aide d'un niveau, on y trace au cordeau deux droites parallèles, à la distance voulue; on reporte ces droites sur la face opposée au moyen d'un fil à plomb que l'on place à leurs extrémités; puis par deux traits de scie on enlève le bois excédant, et l'on a ainsi deux faces planes parallèles, à la distance demandée; on opère de même pour se procurer les deux autres faces latérales, et il ne reste plus qu'à couper la pièce de longueur. Si la section droite de la pièce n'est pas un rectangle, mais un trapèze rectangulaire, par exemple, on se procure comme ci-dessus deux faces parallèles $ABB'A'$, $CDD'C'$ (fig. 11) placées à la distance des bases du trapèze. On porte

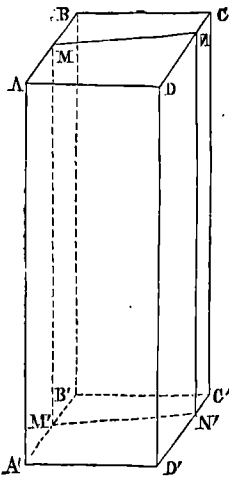


Fig. 11.

ces bases en AM et DN sur la tête de la pièce; on les porte en $A'M'$ et $D'N'$ sur la tête opposée; on tire au cordeau les droites MM' et NN' , et d'un trait de scie suivant le plan $MNN'M'$ on enlève l'excédant de bois. On aurait pu se contenter de prendre AM et $A'M'$ égaux à l'axe des bases du trapèze, et de prendre, à l'aide de la fausse équerre, l'angle de cette base avec le côté oblique, angle qu'on aurait rapporté en AMN et $A'M'N'$. Des moyens analogues permettent de travailler une pièce droite quelle que soit la figure de la section droite.

Le travail des pièces de tour sans équerrages n'offre pas non plus une grande difficulté. On se procure d'abord, au magasin des bois, une pièce ayant à peu près la forme voulue, avec un excédant d'épaisseur. On la plane les cornes en l'air, de façon que ses faces planes soient verticales, ce dont on s'assure à l'aide du fil à plomb. On tend un fil de A en B (fig. 12), points choisis sur les

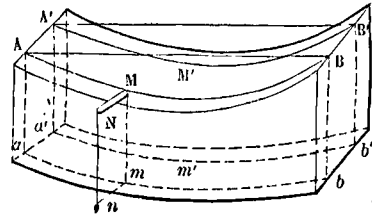


Fig. 12.

arêtes supérieures, de manière que le plan vertical passant par AB enlève la croûte du bois. On promène le fil à plomb le long de AB , et l'on marque sur la surface concave de la pièce un certain nombre des positions successivement occupées par l'extrémité du plomb; ces points doivent être assez rapprochés pour qu'on puisse les joindre successivement par des lignes battues au cordeau malgré la courbure de la surface. On obtient ainsi une trace AMB . On se procure de la même manière une seconde trace parallèle $A'M'B'$ à la distance voulue, c'est-à-dire à la distance que doivent avoir les deux faces planes de la pièce. Pour reporter ces traces sur la surface convexe, on dispose un fil à plomb Nn à l'extrémité d'un bâtonnet MN que l'on promène de manière à ce qu'il reste en contact avec la surface concave et perpendiculaire aux faces planes. On porte en dessous, parallèlement au bâtonnet, des distances telles que nm , égales à la longueur de ce bâtonnet, et l'on obtient ainsi une série de points tels que m , à l'aide desquels on trace la ligne amb . On trace de la même manière la courbe $a'm'b'$. Par les courbes correspondantes AMB et $a'm'b'$ on fait passer un trait de scie; on en fait passer un autre par les courbes $A'M'B'$ et $a'm'b'$, et la pièce se trouve travaillée sur le droit. Pour la travailler sur le tour, on dispose les faces planes horizontalement; on trace à la sanguine, sur l'une d'elles, à l'aide des gabarits donnés, les deux courbes intersections de cette face avec les surfaces courbes, convexe et concave; on reporte ces courbes sur la face plane opposée, par un procédé analogue à celui qui vient d'être exposé ci-dessus; on enlève à la scie ou à la hache l'excédant de bois, et l'on pare les surfaces courbes à l'herminette.

Le travail des pièces de tour avec équerrages est

un peu plus compliqué. On peut prendre pour type une allonge de couple de levée. Cette pièce a deux faces planes dont le gabarit est donné; les surfaces courbes qui les réunissent sont des surfaces réglées dont la génération est différente suivant qu'il s'agit de la portion correspondante à la carène, ou de la partie appartenant à l'accastillage. Supposons d'abord qu'il s'agisse de la partie comprise dans la carène. Dans cette portion de la coque les lisses sont planes, et le plan de chacune d'elles, oblique au longitudinal, est parallèle à la quille. Le DEVIS DE CONSTRUCTION (Voy. ce mot) donne la trace de ce plan sur le latitudinal; en même temps il donne, sur le plan horizontal, le rabattement des lisses de carène; enfin ce rabattement est tracé en vraie grandeur sur le plancher uni de la salle des gabarits. Cela posé, soient m, m', m'', \dots (fig. 4) les points de rencontre des différentes lisses avec le contour extérieur d'une des faces planes de l'allonge. Les directions $mn, m'n', m''n'', \dots$, des traces des plans des lisses sur cette face ayant été déterminées avec soin sur le gabarit, on imagine aux points m, m', m'', \dots , des tangentes aux lisses correspondantes, et l'on mesure les angles qu'elles font respectivement avec les droites $mn, m'n', m''n'', \dots$. Pour mesurer, par exemple, l'angle de la tangente en m à la lisse, avec la direction mn , soit LL (fig. 13) le rabattement de la lisse sur le

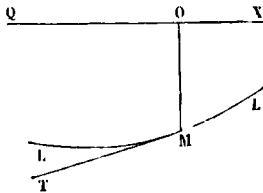


Fig. 13.

plan horizontal, et soit M le rabattement du point m ; MO, perpendiculaire à la quille QX, sera le rabattement de om ; et si l'on mène la tangente MT à la courbe LL, l'angle OMT sera l'angle mesuré pour le point m , ou l'équerrage relatif au point m ; parce que cet angle se relève à la fausse équerre. On obtiendra de même les équerrages relatifs aux points m', m'', \dots . On reporte tous ces angles par ordre sur le bord d'une planchette, comme l'indique la figure 14, et l'on a les éléments nécessaires pour

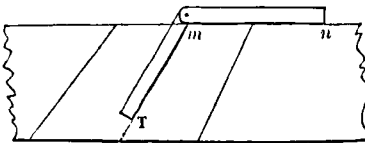


Fig. 14.

travailler l'allonge sur le tour. A cet effet, on se procure, au magasin des bois, une pièce ayant à peu près la forme de l'allonge, avec un excédant de bois. On lui donne d'abord deux faces planes, parallèles, à la distance voulue; sur l'une d'elles on trace, à l'aide du gabarit, la courbe extérieure $mm'm'' \dots$ (fig. 4), ainsi que les directions $mn, m'n', m''n'', \dots$. Soit MN (fig. 15) la droite mn de la figure 14, et soit ABCD la section qui serait faite dans la pièce suivant MN et perpendiculairement à

la face plane contenant cette droite. On prend sur la planchette l'équerrage Tmn (fig. 14), et on porte la fausse équerre sur la pièce, de manière que l'arête intérieure du manche coïncide avec MN, et que le centre soit en A. On prend au compas la distance AM, et on la porte parallèlement à elle-même sur la face opposée en pq ; le point q ainsi déterminé sera le point correspondant à M sur cette

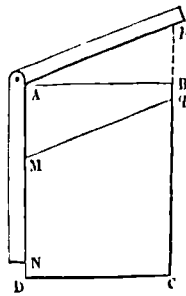


Fig. 15.

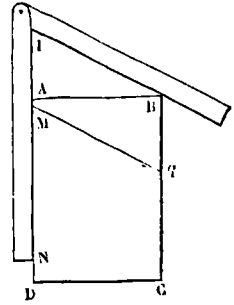


Fig. 16.

seconde face, la droite Mq fera avec MN l'angle fourni par l'équerrage, et cette droite Mq sera la génératrice de la surface courbe correspondant au point M. On se procurera de la même manière un point de chacune des autres génératrices sur la seconde face plane du couple. On pourra donc enlever avec la scie ou avec la hache l'excédant de bois, et en parant à l'herminette on aura la surface demandée. Ceci suppose que les points m, m', m'', \dots de la figure 4 sont suffisamment rapprochés; comme ils ne le sont pas en général, on prend, par exemple, un point m , intermédiaire entre m et m' ; on mène par ce point une droite $m_i n_i$, ayant une direction intermédiaire entre mn et $m'n'$, et l'on fait correspondre à cette droite un équerrage moyen entre ceux qui ont été pris en m et en m' , et ainsi pour les autres intervalles: c'est ce qu'on appelle *médiocrer les équerrages*. La surface courbe extérieure de l'allonge étant obtenue comme on vient de l'expliquer, on détermine sur chaque face plane un certain nombre de points de la courbe intérieure, en portant normalement aux courbes extérieures des longueurs égales à l'épaisseur sur le tour; puis on fait sauter le bois en excédant entre ces deux courbes; on pare à l'herminette, et l'on a la surface courbe intérieure de l'allonge.

Nous avons supposé que les angles pris à la fausse équerre étaient obtus, auquel cas on dit que l'équerrage a été relevé *en gras*; l'angle pourrait être aigu, et dans ce cas l'équerrage est dit [relevé *en maigre*]. Si MN (fig. 16) représente toujours la droite mn de la figure 4, et si ABCD est encore la section supposée faite dans la pièce suivant MN et perpendiculairement à la face plane, on fait coïncider le manche de l'équerre avec MN, de manière que la lame touche l'arête projetée en B; on prend au compas sur BC une longueur Bq égale à IM, et la droite Mq fera avec MN l'angle fourni par l'équerrage, c'est-à-dire que ce sera la génératrice de la surface courbe; et le point q sera un point de la courbe extérieure qui termine la face plane opposée à celle qui contient MN.

Pour la partie du couple qui appartient à l'accas-

tillage, on opère d'une manière analogue; mais comme les lisses ne sont plus planes, les éléments de l'équerrage sont différents. On imagine par chaque point de l'arête extérieure de l'allonge un plan horizontal, qui coupe la face plane suivant une horizontale; cette horizontale est un des côtés de l'angle à mesurer, et l'on prend pour l'autre côté la tangente à la projection horizontale de la lisse. Cet angle se mesure sur le plancher de la salle des gabarits, où la projection horizontale de la lisse est tracée; l'horizontale, intersection de la face plane de l'allonge par le plan horizontal auxiliaire, se projette sur ce plancher perpendiculairement à la quille.

Le travail d'une pièce terminée par quatre surfaces courbes exige l'emploi de deux gabarits. Nous prendrons pour exemple la barre d'Hourdy. Les projections de son arête supérieure externe sont données sur le atitudinal et sur le plan horizontal, et l'on peut en déduire le gabarit de son bouge vertical, et celui de son bouge horizontal. On choisit alors une pièce de bois qui ait les dimensions suffisantes, et l'on y pare une face plane, sur laquelle on applique le gabarit vertical; on trace ainsi sur cette face plane la projection verticale de l'arête supérieure externe, et à une distance convenable, la projection de l'arête externe inférieure; puis on donne à la pièce une première façon, qui a pour effet d'en faire un cylindre droit ayant pour base la portion de face plane comprise entre ces deux courbes. Cela fait, on pose ce cylindre sur sa face convexe, les cornes en haut, et l'on établit sur ces cornes le gabarit horizontal; puis, à l'aide du fil à plomb, on détermine sur la face concave un certain nombre de points correspondants à ce gabarit, on les joint par une courbe, que l'on reporte sur la face convexe à l'aide des procédés indiqués plus haut, puis on trace sur la face concave comme sur la face convexe, deux courbes parallèles aux deux premières et à la distance voulue. Ces quatre courbes sont les quatre arêtes de la barre; il n'y a plus qu'à faire sauter le bois excédant entre les deux courbes répondant aux arêtes externes, et entre les deux courbes répondant aux arêtes internes, et enfin à parer les surfaces courbes ainsi obtenues. (Voy. les articles : ALLONGES D'ÉCUBIER, BARRES D'ARCASSE, BORDAGES, COUPLES DÉVOYÉS, ESTAIN, JAMBETTES, LIVET DE PONT; consultez en outre les traités spéciaux, particulièrement le *Cours de Construction navale* déjà cité, et l'ouvrage ayant pour titre : *Construction des bâtiments de mer*, par M. Viel.)

Les diverses parties de la coque ne sont pas seulement reliées entre elles par les assemblages; elles sont en outre chevillées; les chevilles sont en cuivre pour mieux résister à l'action de la mer. La coque est en outre calfatée avec soin et doublée en cuivre jusqu'au-dessus de la ligne de flottaison, afin de la préserver de l'action incrustante des animaux qui vivent dans la mer, et de lui assurer ainsi une surface unie qui augmente les qualités du navire au point de vue de la marche.

La coque une fois construite et mise à flot, on s'occupe de la MÂTURE (Voy. ce mot). On trouvera à l'article VOILES tout ce qui se rapporte à l'action du vent sur ces organes, d'après leur forme et leur disposition. L'étude du vaisseau, au point de vue de la stabilité et de la marche, constitue ce qu'on appelle, à proprement parler, la *Théorie du navire*

(Voy. NAVIRE [*Théorie du*]). Elle comprend les calculs de DÉPLACEMENT, la détermination du CENTRE DE CARÈNE, du CENTRE DE SYSTÈME ou de GRAVITÉ et du MÉTACENTRE; l'action du GOUVERNAIL, la RÉSISTANCE de la mer, l'étude de la STABILITÉ SOUS VOILES; l'étude du ROULIS et du TANGAGE (Voy. ces mots), et tout ce que la théorie et l'expérience ont appris relativement à la marche des bâtiments.

Dans tout ce qui précède, on a supposé qu'il s'agissait de navires en bois; la construction des bâtiments en fer est soumise aux mêmes règles, sauf les différences dans le mode d'emploi des matériaux; et ces navires sont construits d'après le même type que les bâtiments en bois.

La quille, l'étrave, l'étambot peuvent être en fer plein ou en tôle creuse. Les couples sont formés de pièces de tôle primitivement pliées à angle droit, et auxquelles on donne le nom de *cornières*; l'angle des deux faces est modifié sur le chantier même conformément aux équerrages déterminés par le plan du navire. La distance des couples varie de 0^m,30 à 0^m,50. On les dévoie peu à peu vers les extrémités; et les navires en fer sont généralement à poupes rondes. Cependant on en construit à voûte et tableau; mais il n'y a point d'arcasse. Le bordé se fait en feuilles de tôle de 2^m,40 de long sur 0^m,60 de large au maître couple; ces feuilles forment des virures, et vont en se rétrécissant vers les extrémités du navire. Leur épaisseur varie ordinairement depuis la quille où elle est d'un pouce, ou 0^m,027, jusqu'au plat-bord où elle se réduit à $\frac{3}{8}$ de pouce,

ou environ 0^m,010. Les ponts ont été longtemps construits avec des barrots en bois; mais, dans les navires à vapeur, on a introduit les barrots en tôle, et cet usage s'est généralisé; les barrots en tôle ont une plus grande durée, plus de force et de légèreté, et ils s'assemblent plus solidement à la coque. Le bordé des ponts supérieurs et particulièrement des gaillards s'exécute toujours en bois; mais on substitue la tôle au bois pour le bordé des ponts inférieurs. Souvent on établit sous les ponts des bandes de tôle qui forment liaison, soit dans le sens longitudinal, soit dans deux directions croisées faisant des angles de 45° avec le longitudinal. — Enfin, dans les navires en fer, on établit des cloisons transversales en tôle qui divisent la carène en compartiments indépendants les uns des autres, ce qui offre des avantages en cas d'avaries. Ces cloisons sont ordinairement au nombre de 4 : deux vers les extrémités, et deux autres qui, dans les navires à vapeur, limitent l'emplacement des machines. Il y a cependant des navires où le nombre de ces cloisons est porté à 6. Enfin, dans les navires en fer, le GOUVERNAIL lui-même (Voy. ce mot) est construit en fer.

On trouvera aux articles NAVIRES A VAPEUR, PROPULSEURS HÉLICOÏDES les différences qui caractérisent les bâtiments nus par l'action de la vapeur.

Les vaisseaux cuirassés qui ont été introduits depuis un certain nombre d'années dans les flottes de guerre sont des navires en bois, couverts jusqu'à une certaine distance au-dessus de la flottaison, d'un revêtement formé de plaques de fer de 10 à 15 centimètres d'épaisseur, boulonnées solidement sur la coque. Dans la flotte cuirassée française, on s'est attaché à conserver aux vaisseaux cuirassés les avantages des autres navires, au point de vue de la

marche et de la facilité d'évolution, ce qui entraîne l'emploi de formes extérieure, analogues. La différence essentielle est dans le DÉPLACEMENT (Voy. ce mot), qui doit être nécessairement plus considérable, afin de compenser l'augmentation de poids résultant de la cuirasse. Ce genre de navires est encore un objet d'études pour les marins et les ingénieurs.

CONTOUR APPARENT, intersection des rayons visuels tangents à la surface d'un corps avec la surface sur laquelle ce corps doit être représenté. (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS, PERSPECTIVE.)

CONTRACTION DE LA VEINE, phénomène que présente la veine lorsqu'un fluide s'écoule d'un vase par un orifice percé en mince paroi. Les filets liquides se présentant à l'orifice dans toutes les directions ne peuvent perdre instantanément ces directions convergentes; en réagissant les uns sur les autres, ils prennent une forme curviligne dont la convexité est tournée vers l'axe de la veine. Il en résulte que la section de la veine va en diminuant jusqu'à une certaine distance de l'orifice, où les filets deviennent parallèles (fig. 1). Au delà, les filets

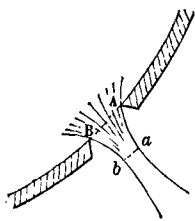


Fig. 1.

divergent par l'effet de la résistance de l'air sur ceux qui entourent la veine; la section où les filets sont parallèles est donc la section minimum; on lui donne le nom de *section contractée*, et le rapport de cette section à l'aire de l'orifice est ce qu'on appelle le *coefficient de contraction*.

Le phénomène de la contraction de la veine a été étudié expérimentalement par plusieurs hydrauliciens, et en particulier par Eytelwein et par MM. Poncelet et Lesbros. Le mode d'expérimentation consiste à faire passer la veine

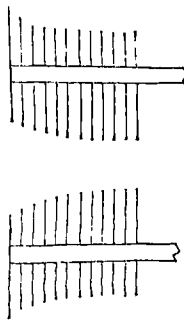


Fig. 2.

entre deux cadres verticaux, entre lesquels sont disposées, dans le plan vertical médian, une série de tiges métalliques qu'on peut faire glisser verticalement. On les amène avec précaution jusqu'au point où elles affleurent la veine sans y pénétrer; leurs extrémités dessinent alors la forme de la veine, comme on le voit sur la figure 2; et l'on peut relever à loisir la forme ainsi déterminée. Eytelwein a trouvé ainsi que la section contractée se trouve à une distance de l'orifice à

peu près égale à son rayon, en la supposant circulaire, et que le diamètre de cette section contractée est les 0,79 du diamètre de l'orifice; d'où il résulte que l'aire de la section contractée est une fraction de celle de l'orifice marquée par (0,79)² ou par 0,6241: soit environ 0,624. — Cependant on ne peut admettre que le rapport de ces deux sections soit indépendant du rayon de l'orifice et de la distance de cet orifice au niveau supérieur du liquide dans le réservoir. MM. Poncelet et Lesbros, dans les expériences qu'ils ont faites à Metz en 1827, sur des orifices à la vérité rectangulaires,

ont vu ce rapport varier depuis 0,572 jusqu'à 0,695, suivant les dimensions de l'orifice, dont la base avait 0^m,20 et dont la hauteur a varié de 0^m,01 jusqu'à 0^m,20, et suivant la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de cet orifice, qui a varié depuis 0^m,02 jusqu'à 3^m. Il est très-vraisemblable qu'il en est de même pour les orifices circulaires, et que le nombre 0,624 (ou à peu près $\frac{5}{8}$) ne doit être considéré que comme une moyenne.

Plusieurs auteurs ont essayé de déterminer par la théorie le coefficient de contraction; mais jusqu'ici les efforts faits dans ce sens ont été infructueux. La contraction est un phénomène complexe, et il est difficile de tenir compte de toutes les circonstances qui peuvent influer sur les résultats.

Ce qui précède suppose l'orifice percé en mince paroi, c'est-à-dire de telle sorte que les bords internes de l'orifice présentent une arête vive, et que la veine se détache complètement des parois dès sa sortie, comme l'indique la figure 1. L'orifice est encore considéré comme percé en mince paroi lorsque l'épaisseur de celle-ci atteint le diamètre de l'orifice et même une fois et demie ce diamètre. Au delà, l'orifice deviendrait un véritable AJUTAGE (Voy. ce mot) et le phénomène changerait de nature.

Voici les valeurs du coefficient de contraction obtenues par MM. Poncelet et Lesbros sur des orifices rectangulaires. Nous avons dit que leur largeur était de 0^m,20 et qu'on ne faisait varier que la hauteur de l'orifice, ainsi que la charge sur le sommet de l'orifice, c'est-à-dire la distance de ce sommet au niveau supérieur du liquide. Il faut ajouter à cette charge la moitié de la hauteur de l'orifice pour obtenir la hauteur *h* qui doit figurer dans la formule donnant la vitesse et par suite la dépense. (Voy. THÉORÈME DE TORRICELLI.)

Charge sur le sommet de l'orifice.	COEFFICIENT DE CONTRACTION POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE					
	0 ^m ,20	0 ^m ,10	0 ^m ,05	0 ^m ,03	0 ^m ,02	0 ^m ,01
0,02	0,572	0,596	0,616	0,639	0,660	0,695
0,03	0,578	0,600	0,620	0,641	0,659	0,689
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,659	0,684
0,06	0,587	0,607	0,626	0,639	0,657	0,677
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,655	0,667
0,20	0,598	0,615	0,631	0,634	0,640	0,655
0,30	0,600	0,616	0,630	0,632	0,645	0,650
0,40	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,646
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,641
1,00	0,605	0,615	0,625	0,627	0,632	0,629
1,50	0,602	0,611	0,619	0,621	0,620	0,617
2,00	0,601	0,607	0,613	0,613	0,613	0,613
3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,608	0,609

Le phénomène de la contraction est accompagné, dans le cas d'un orifice polygonal, d'un autre phénomène connu sous le nom d'INVERSION DE LA VEINE (Voy. ce mot).

On peut supprimer complètement la contraction de la veine en évasant l'orifice comme l'indique la figure 3, c'est-à-dire en donnant aux parois une forme peu différente de celle qu'affecte une veine contractée. Les filets liquides sortent parallèlement par l'orifice AB. Le coefficient de la dépense n'est cependant pas tout à fait égal à l'unité; mais, d'a-

près Michelotti et d'Aubuisson, il peut être pris égal à 0,98; en sorte qu'il ne diffère de l'unité que de 2 centièmes. La différence peut être attribuée aux frottements que l'on néglige quand on applique le théorème de Torricelli.

On peut supprimer la contraction en partie en prolongeant à l'intérieur une partie des parois de l'orifice. Si, par exemple, l'orifice est rectangulaire, on peut, comme l'indique la figure 4, disposer à l'intérieur une plaque CB qui forme le prolongement de la base de l'orifice; on peut encore disposer des plaques analogues qui forment les prolongements des côtés latéraux. La contraction,

dans le premier cas, se trouve supprimée sur la base de l'orifice, parce que les filets qui suivent la plaque CB sortent normalement à l'orifice;

dans le second cas la contraction se trouve supprimée sur trois côtés de l'orifice. Suivant M. Lesbros, le coefficient de contraction s'approche d'autant plus de l'unité que la fraction du périmètre de l'orifice sur laquelle la contraction a été supprimée est plus grande. Afin de donner une idée de l'augmentation de ce coefficient par la suppression de la contraction sur une portion du périmètre de l'orifice, nous rapporterons les résultats des expériences de MM. Poncelet et Lesbros relatives à des orifices rectangulaires de 0^m,20 de base et de hauteurs variables : 1° dans le cas où la contraction était supprimée sur la base seulement; 2° dans le cas où elle était supprimée à la fois sur la base et sur les côtés latéraux.

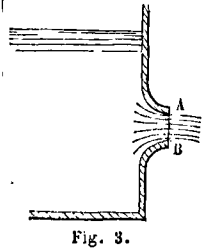


Fig. 3.

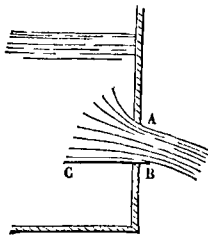


Fig. 4.

D'après Bidone, en appelant n la fraction du périmètre sur laquelle la contraction est supprimée, et m le coefficient de contraction, on aurait

$$m = 0,62 (1 + 0,152 n).$$

Cette formule donne pour m des valeurs un peu plus fortes que celles qui résultent des expériences de MM. Poncelet et Lesbros.

CONTRE-BATTERIES, batteries que l'assiégeant établit au saillant du chemin couvert du bastion d'attaque, pour contre-battre les flancs des bastions collatéraux (*Voy. ATTAQUE DES PLACES*). Après la prise des demi-lunes, ces contre-batteries s'étendent pour se transformer en batteries de brèche.

CONTRE-CHAMBRANLE, moulure composée, moins large et moins saillante que le chambranle, mais qui le suit verticalement et du côté externe. On emploie surtout le contre-chambranle quand la corniche qui couronne la baie est soutenue à ses extrémités par des consoles; le contre-chambranle s'élève alors depuis le bas jusqu'à la hauteur de la console. Il peut recevoir divers ornements.

CONTRE-ÉTAMBOT, pièce qui fortifie l'étambot sur sa face intérieure. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

CONTRE-ÉTRAVE, pièce de même forme que l'étrave d'un navire, et qui sert à la fortifier intérieurement. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

CONTRE-FICHE, pièce de charpente placée obliquement pour relier une pièce verticale avec une pièce horizontale ou inclinée. Dans une FERME ordinaire, une contre-fiche relie l'arbalétrier au poinçon; dans une FERME SOUS FAÎTE, le poinçon est relié au faitage par une contre-fiche, etc. (*Voy. FERME et FERME SOUS FAÎTE.*)

CONTRE-FORTS, saillies en maçonnerie, liées à un MUR DE SOUTÈNEMENT ou à un REVÈTEMENT de fortification (*Voy. ces mots*), et qui ont pour objet d'augmenter la stabilité de la construction.

CONTRE-GARDES, ouvrages de fortification compris parmi les dehors, et qui servent à couvrir les bastions, quelquefois même les demi-lunes. On voit en COC' (fig. 1) le tracé de la contre-garde qui

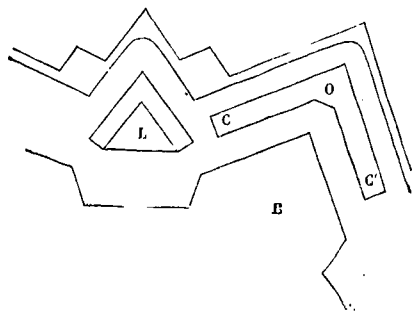


Fig. 1.

couvre un bastion B. On reconnaît que cet ouvrage est flanqué par la demi-lune L, tandis que les faces du bastion sont flanquées par les flancs des bastions adjacents. Un fossé sépare la contre-garde du chemin couvert; un autre fossé parallèle sépare le bastion de la contre-garde. La figure 2 montre le profil du relief. Ce profil a ordinairement une épaisseur de 24 mètres, dont 10 mètres pour le terre-plein.

CHARGE SUR LE SOMMET DE L'ORIFICE.	COEFFICIENT DE DÉPENSE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE						
	0 ^m ,20	0 ^m ,10	0 ^m ,05	0 ^m ,03	0 ^m ,02	0 ^m ,01	
Contraction supprimée sur la base.	0,02	0,599	0,624	0,664	0,691	0,703	0,756
	0,03	0,603	0,629	0,665	0,687	0,702	0,747
	0,04	0,605	0,633	0,666	0,686	0,701	0,741
	0,06	0,610	0,637	0,667	0,686	0,699	0,732
	0,10	0,615	0,643	0,669	0,684	0,698	0,722
	0,20	0,621	0,648	0,670	0,681	0,696	0,712
	0,30	0,622	0,648	0,670	0,681	0,695	0,709
	0,40	0,623	0,648	0,669	0,681	0,695	0,706
	0,60	0,624	0,648	0,668	0,679	0,693	0,703
	1,00	0,624	0,647	0,666	0,676	0,692	0,701
	1,50	0,624	0,644	0,665	0,675	0,687	0,697
	2,00	0,619	0,641	0,664	0,675	0,683	0,693
3,00	0,614	0,639	0,662	0,675	0,680	0,689	
Contraction supprimée sur la base et sur les deux côtés verticaux.	0,06	"	"	0,699	"	"	"
	0,10	"	"	0,696	"	"	"
	0,20	0,708	"	0,693	"	"	"
	0,30	0,697	"	0,691	"	"	"
	0,40	0,692	"	0,690	"	"	"
	0,60	0,679	"	0,688	"	"	"
	1,00	0,676	"	0,685	"	"	"
1,50	0,672	"	0,681	"	"	"	
2,00	0,668	"	0,681	"	"	"	
3,00	0,665	"	0,678	"	"	"	

Une épaisseur plus grande serait trop dispendieuse, et occasionnerait un tracé général trop profond; une épaisseur moindre constituerait un ouvrage trop facile à détruire par des fourneaux de mine. On

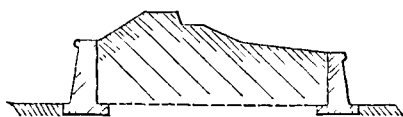


Fig. 2.

donne à une contre-garde de 5 à 6 mètres de hauteur d'escarpe. Son relief doit couvrir l'escarpe du bastion des coups de l'ennemi. L'existence d'une contre-garde permet ordinairement d'abaisser la crête du glacis, et de diminuer ainsi la masse des remblais.

Au lieu de faire défendre la contre-garde par la demi-lune, on l'a quelquefois fait flanquer par le flanc même du bastion voisin; la contre-garde joue alors le rôle d'un bastion, dont le bastion réel serait le réduit. Vauban a donné un exemple de cette disposition dans les fortifications de Neuf-Brisach; elle est rarement employée, parce qu'elle donne trop de profondeur au tracé, et exige un espace considérable.

Lorsqu'on place une contre-garde devant une demi-lune, elle n'enveloppe d'ordinaire que le saillant, et ne se prolonge pas sur toute l'étendue des faces. Cette disposition est très-rare. (Voy. pour plus de détails les *Principes de Fortification* par le général Noizet.)

CONTRE-PRESSION, pression qui, dans les machines à vapeur, s'exerce sur le piston en sens inverse de sa marche.

Se dit aussi de la période pendant laquelle, par suite de l'AVANCE DU TIROIR (Voy. ce mot), la vapeur est admise en avant du piston, un peu avant la fin de sa course. (Voy. MACHINES A VAPEUR, LOCOMOTIVES, DÉTENTE.)

CONTRE-QUILLE, pièce longitudinale qui fortifie la quille d'un navire à sa partie supérieure. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

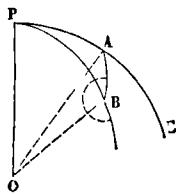
CONTRESCARPE, paroi du fossé d'un ouvrage de fortification opposée à l'escarpe. La contrescarpe doit avoir au moins 4 mètres de haut. Sa pente est de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$ selon la nature des terres pour les ouvrages de

fortification passagère; elle n'est que de $\frac{1}{20}$ pour les ouvrages de fortification permanente dans lesquels elle est revêtue en maçonnerie. Dans ce cas elle est couronnée par une tablette de 0^m,33 en saillie pour rejeter les eaux. C'est à la contrescarpe que sont appliqués les escaliers étroits nommés *pas de souris*, qui donnent accès sur le chemin couvert ou dans les ouvrages extérieurs.

CONTREVENTIER, se dit d'un cintre d'arche de pont, ou d'une travée de pont en charpente; on entend par ce mot établir entre les fermes qui forment ce cintre ou cette travée une liaison suffisante pour garantir le système des actions latérales qui peuvent s'exercer d'amont en aval ou d'aval en amont.

CONVERGENCE DES MÉRIDIENS, excès de 180° sur la différence entre les azimuts d'une même ligne géodésique par rapport aux horizons de ses

extrémités. Si la ligne géodésique a assez peu d'étendue pour que la surface du globe puisse être considérée comme sphérique, cette différence d'azimuts peut s'obtenir aisément. Soit AB (fig. 1) la ligne géodésique considérée, qui dans ce cas est un arc de grand cercle; soit P le pôle, PA et PB les méridiens des points A et B. Soit A l'angle BAE, ou l'azimut de AB sur l'horizon du point A; soit A' l'angle FBA (plus grand que 180°) ou l'azimut de AB sur l'horizon du point B (Voy.



AZIMUT); enfin désignons par α et β les angles en A et B dans le triangle PAB. On aura

$$A = 180^\circ - \alpha, \quad A' = 180^\circ + \beta,$$

par conséquent $A' - A = \alpha + \beta$.

Or, dans le triangle PAB, en appelant a et b les côtés opposés à α et β , on a par la première analogie de Néper,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{1}{2}P.$$

Or, si l et L désignent les coordonnées géographiques du point A, l' et L' celles du point B, on a

$$a = 90^\circ - l', \quad b = 90^\circ - l, \quad P = L' - L,$$

par conséquent

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A' - A) = \frac{\cos \frac{1}{2}(l - l')}{\sin \frac{1}{2}(l + l')} \cot \frac{1}{2}(L' - L),$$

d'où
$$\operatorname{tang} \left[90^\circ - \frac{1}{2}(A' - A) \right]$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(l + l')}{\cos \frac{1}{2}(l - l')} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(L' - L). \quad [1]$$

Dans les triangulations ordinaires, les lignes géodésiques considérées étant peu considérables, les différences $l - l'$ et $L' - L$ sont très-petites; on peut donc remplacer $\cos \frac{1}{2}(l - l')$ par l'unité, et

$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(L' - L)$ par l'arc $\frac{1}{2}(L' - L)$. En même temps, $A' - A$ est très-peu différent de 180°, qui serait sa valeur exacte si l'on opérât dans un plan; il en résulte que $180^\circ - (A' - A)$ et à plus forte raison sa moitié $90^\circ - \frac{1}{2}(A' - A)$ sont des arcs très-petits, et

que dans le premier membre de la relation [1], on peut remplacer la tangente par l'arc. Faisant ces substitutions, multipliant par 2, et transposant, on en tire

$$A' - A = 180^\circ - \sin \frac{1}{2}(l + l')(L' - L). \quad [2]$$

Le second terme du second membre est la *convergence des méridiens*.

On remarque que ce terme croît avec les latitudes l et l' ; par conséquent la convergence des méridiens augmente à mesure qu'on se rapproche du pôle. Si au contraire les points A et B étaient sur l'équa-

teur, l et l' seraient nuls; il en serait de même de la convergence des méridiens; et l'on aurait

$$A' - A = 180^\circ.$$

CONVERSION DES MESURES. *Voy.* POIDS ET MESURES, MONNAIES ÉTRANGÈRES.

CONVERSION DES TEMPS, marche à suivre pour convertir l'un dans l'autre le *temps vrai*, le *temps moyen* et le *temps sidéral* (*Voy.* ces mots). Il résulte des définitions de ces temps que l'heure vraie est mesurée en un point quelconque du globe par l'angle horaire du soleil vrai, l'heure moyenne par l'angle horaire du soleil moyen, et l'heure sidérale par l'angle horaire de l'équinoxe du printemps. La différence entre l'heure vraie et l'heure moyenne est donc égale à la différence entre l'ascension droite du soleil vrai et celle du soleil moyen, c'est-à-dire à l'ÉQUATION DU TEMPS (*Voy.* ce mot). Elle est donnée par la *Connaissance des temps*. La différence entre l'heure sidérale et l'heure moyenne est égale à la différence entre l'ascension droite du point vernal et celle du soleil moyen. Les tables du soleil insérées dans la *Connaissance des temps* donnent cette différence pour Paris, dans la colonne intitulée *temps sidéral, à midi moyen*. On a ainsi tous les éléments nécessaires pour effectuer comme il suit la conversion des temps.

CONVERSION DU TEMPS VRAI EN TEMPS MOYEN. *Une observation a été faite, le 18 octobre 1862, à New-York, à 1^h 35^m 18^s,5 du soir, heure vraie; on demande l'heure moyenne correspondante.* La longitude de New-York est $76^\circ 20' 27''$; convertie en temps elle donne $5^h 5^m 21^s,8$. Comme cette longitude est occidentale, en l'ajoutant à $1^h 24^m 18^s,5$ on aura l'heure de Paris au moment de l'observation; on trouve $6^h 40^m 40^s,5$, heure vraie. L'équation du temps, pour le 18 octobre 1862 est, d'après la *Connaissance des temps*, $11^h 45^m 15^s,63$; et la différence tabulaire est $- 11^s,0$. On posera la proportion

$$24^h : 11^s = 6^h 40^m 40^s,5 : x,$$

d'où l'on tire $x = 3^s,06$, c'est ce qu'il faut retrancher de l'équation du temps à midi vrai pour l'avoir à l'heure indiquée, ce qui donne $11^h 45^m 12^s,57$. Ajoutant ce nombre à l'heure vraie de Paris, on obtient l'heure moyenne $18^h 25^m 53^s,07$, c'est-à-dire, en retranchant 12, $6^h 25^m 53^s,07$. Retranchant enfin la longitude de New-York en temps, il reste pour l'heure vraie demandée $1^h 20^m 31^s,27$.

CONVERSION DU TEMPS MOYEN EN TEMPS VRAI. *Une observation a été faite le 18 octobre 1862 à New-York, à 1^h 20^m 31^s,3, temps moyen; on demande l'heure vraie correspondante.* Le calcul est l'inverse du précédent. Ajoutons d'abord la longitude de New-York convertie en temps, c'est-à-dire $5^h 5^m 21^s,8$, nous aurons l'heure moyenne de Paris $6^h 25^m 53^s,1$. Comme l'équation du temps pour l'heure vraie cherchée n'est pas connue, on commence par retrancher l'équation du temps pour midi, après avoir préalablement ajouté 12^h à l'heure moyenne pour rendre la soustraction possible; on obtient ainsi une valeur approchée de l'heure vraie, $18^h 25^m 53^s,1 - 11^h 45^m 15^s,6$, ou $6^h 40^m 37^s,5$. On se sert comme ci-dessus de cette valeur approchée de l'heure vraie pour obtenir la variation correspondante de l'équation du temps, en posant la proportion

$$24^h 11^s = 6^h 40^m 37^s,5 : x,$$

d'où l'on tire $x = 3^s,06$, valeur que l'on retranche de l'équation du temps pour midi, laquelle devient

ainsi $11^h 45^m 12^s,57$. Cette valeur de l'équation du temps, retranchée de l'heure moyenne de Paris, après avoir ajouté 12^h à celle-ci pour rendre la soustraction possible, donne l'heure vraie définitive de Paris, $18^h 25^m 53^s,1 - 11^h 45^m 12^s,57$, ou $6^h 40^m 40^s,53$. Retranchant enfin la longitude de New-York exprimée en temps, ou $5^h 5^m 21^s,8$, le reste $1^h 35^m 18^s,7$ sera l'heure vraie de New-York.

CONVERSION DU TEMPS SIDÉRAL EN TEMPS MOYEN. *Une observation a été faite à Saint-Petersbourg, le 25 juin 1862, à 22^h 41^m 17^s,4, temps sidéral; on demande l'heure moyenne correspondante.* La longitude de Saint-Petersbourg est de $27^\circ 58' 13''$; convertie en temps, elle donne $1^h 52^m 52^s,87$. Comme cette longitude est orientale, si on la retranche de l'heure de Saint-Petersbourg, on aura l'heure sidérale correspondante de Paris; on trouve $20^h 49^m 24^s,53$. Le même jour, à midi moyen, le *temps sidéral* donné par la *Connaissance des temps* était $6^h 13^m 26^s,74$. La différence $14^h 35^m 57^s,79$ exprime le temps sidéral écoulé depuis le midi moyen; on la transforme en temps moyen en se rappelant que le rapport du jour moyen au jour sidéral est 1,0027379091 (*Voy.* TEMPS MOYEN), ou, plus simplement, en se servant d'une table insérée dans la *Connaissance des temps*, et avec laquelle on calcule rapidement ce qu'il faut retrancher au temps sidéral pour avoir le temps moyen. De l'une ou l'autre manière on trouvera $14^h 33^m 34^s,28$ pour l'heure de l'observation à Paris, en temps moyen. Il reste à ajouter la longitude de Saint-Petersbourg, exprimée en temps moyen; or elle est $1^h 51^m 52^s,87$ en temps sidéral; à l'aide de la même table on trouvera pour sa valeur en temps moyen $1^h 51^m 34^s,54$. Ajoutant ce nombre à $14^h 33^m 32^s,28$, on trouve pour l'heure de l'observation à Saint-Petersbourg en temps moyen $16^h 25^m 8^s,82$.

CONVERSION DU TEMPS MOYEN EN TEMPS SIDÉRAL. *Une observation a été faite à Saint-Petersbourg, le 25 juin 1862 à 16^h 25^m 8^s,82 temps moyen; on demande l'heure sidérale correspondante.* La longitude de Saint-Petersbourg convertie en temps moyen est $1^h 51^m 34^s,54$, comme on l'a vu ci-dessus; retranchant ce nombre de l'heure de l'observation de Saint-Petersbourg, on aura l'heure correspondante de Paris, en temps moyen; on trouve $14^h 33^m 34^s,28$. On convertira ce temps moyen en temps sidéral, soit à l'aide du rapport entre le jour sidéral et le jour moyen, soit plus simplement à l'aide d'une table insérée dans la *Connaissance des temps* et qui permet de calculer rapidement ce qu'il faut ajouter au temps moyen pour obtenir le temps sidéral; on trouvera par l'une ou l'autre méthode $14^h 32^m 57^s,79$, temps sidéral. Or, à midi moyen, le temps sidéral était $6^h 13^m 26^s,74$: en faisant la somme on aura l'heure de l'observation en temps sidéral de Paris; on trouve $20^h 49^m 24^s,53$. Ajoutant enfin la longitude de Saint-Petersbourg en temps sidéral, ou $1^h 51^m 52^s,87$, on aura l'heure sidérale cherchée $22^h 41^m 17^s,40$.

Lorsqu'on a à convertir le temps vrai en temps sidéral, ou le temps sidéral en temps vrai, on prend pour intermédiaire le temps moyen, et la question se trouve ramenée à la résolution de deux problèmes du genre de ceux qui viennent d'être traités.

Les tables dont nous avons parlé, et qui servent à convertir l'un dans l'autre le temps sidéral et

le temps moyen sont faciles à construire. On sait que le rapport du jour moyen au jour sidéral est 1,0027379091 (*Voy. TEMPS MOYEN*); il en résulte que la durée du jour moyen exprimée en temps sidéral est $24^h \times 0,0027379091$; et que par conséquent, pour avoir cette durée, il suffit d'ajouter à 24^h le produit $24^h \times 0,0027379091$ ou $3^m 56^s,55535$. Comme le mouvement diurne et celui du soleil moyen sont tous deux uniformes, la différence entre le temps sidéral et le temps moyen varie proportionnellement au temps; ainsi puisque pour 24^h il faut ajouter $3^m 56^s,55535$ pour avoir le jour moyen, pour 1^h il faudra ajouter la 24^e partie de ce nombre, c'est-à-dire $9^s,85647$; et par des additions successives on obtiendra ce qu'il faut ajouter pour 2^h , pour 3^h , etc. La 60^e partie de $9^s,85647$ sera ce qu'il faut ajouter pour 1^m , c'est-à-dire $0^s,16427$, et par des additions successives on obtiendra ce qu'il faut ajouter pour 2^m , pour 3^m , etc. La 60^e partie de $0^s,16427$ sera ce qu'il faut ajouter pour 1^s , c'est-à-dire $0^s,00273...$; et par des additions successives on obtiendra ce qu'il faut ajouter pour 2^s , pour 3^s , etc. On aura ainsi tous les éléments de la table qui sert à convertir le temps moyen en temps sidéral.

Inversement, puisque pour obtenir 24^h moyennes il faut ajouter aux 24^h sidérales un certain nombre de minutes et secondes sidérales, pour obtenir au contraire les 24^h sidérales, il faudra des 24^h moyennes retrancher un certain nombre de minutes et secondes moyennes. Ce second nombre se déduit aisément du premier: désignons par s l'heure sidérale, par m l'heure moyenne, par as ce qu'il faut ajouter dans le premier cas et par mx ce qu'il faut retrancher dans le second; comme on a

$$24m = 24s + as \quad \text{et} \quad 24s = 24m - mx,$$

on devra avoir

$$mx = as \quad \text{ou} \quad x = a \cdot \frac{s}{m} = (3^m 56^s,55535) \cdot \frac{s}{m}.$$

Or $\frac{m}{s}$ est le rapport de l'heure moyenne à l'heure sidérale, ou, si l'on veut, le rapport du jour moyen au jour sidéral, c'est-à-dire 1,0027379091; il vient donc

$$x = \frac{3^m 56^s,55535}{1,0027379091}.$$

En effectuant l'opération, on trouve

$$x = 3^m 55^s,90945.$$

C'est ce qu'il faut retrancher aux 24^h moyennes pour avoir les 24^h sidérales; la 24^e partie de ce nombre, ou $9^s,82956$, sera ce qu'il faut retrancher à l'heure moyenne pour avoir l'heure sidérale; la 60^e partie de celui-ci, ou $0^s,16382$, sera ce qu'il faut retrancher pour 1^m ; et la 60^e partie de ce dernier, ou $0^s,00273$, sera ce qu'il faut retrancher pour 1^s . Par des additions successives on obtiendra ce qu'il faut retrancher pour 2^h , pour 3^h , etc.; pour 2^m , pour 3^m , etc.; pour 2^s , pour 3^s , etc. Et l'on aura les éléments de la table qui sert à convertir le temps sidéral en temps moyen. Une fois ces tables construites, on n'y conserve que trois décimales, qui sont suffisantes dans tous les cas.

Il est très-important de remarquer que lorsqu'on a à convertir un nombre d'heures, minutes et secondes en degrés, ou *vice versa*, on n'a point à se préoccuper de l'espèce de temps dont il s'agit. En effet, que ce soit le soleil vrai, le soleil moyen, ou une étoile, qui servent à régler le temps, cet astre

n'en fait pas moins, pour revenir au méridien, le tour complet du globe en 24 heures du temps qui lui correspond. Il parcourt donc 360° en 24 heures, ou 15° dans une heure; et par conséquent la conversion du temps en degrés ou des degrés en temps doit toujours se faire à raison de 15° par heure, ou $15'$ de degré pour 1^m de temps, ou $15''$ de degré pour 1^s de temps.

COORDONNÉES AZIMUTALES, coordonnées sphériques qui se composent de la DISTANCE ZÉNITHALE et de l'AZIMUT (*Voy. ces mots*).

COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES, coordonnées sphériques employées pour fixer sur la surface du globe terrestre la position d'un point; elles se composent de la LATITUDE et de la LONGITUDE (*Voy. ces mots*).

COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (CALCUL DES), calculs que l'on a à effectuer pour déterminer les coordonnées géographiques des sommets d'une chaîne de triangles (*Voy. TRIANGULATION*), connaissant les longueurs et les azimuts des côtés de ces triangles et les coordonnées géographiques d'un premier sommet. Ces calculs seraient très-faciles si la terre pouvait être considérée comme sphérique.

Soit, en effet, AB (fig. 1) un côté de l'un des triangles considérés, soit k sa longueur, P le pôle, O le centre du globe, R le rayon de la terre, PA et PB les méridiens des points A et B; si les coordonnées géographiques du point A sont connues, la considération du triangle sphérique PAB donnera celles du point B. Car on connaît dans ce triangle: 1° l'angle en A, supplément de l'azimut BAE du côté AB sur l'horizon du point A; 2° le côté PA, complément de la latitude du point A; 3° la longueur k du côté AB; son expression x en degrés s'obtiendra par la proportion

$$x : 360^\circ = k : 2\pi R, \quad \text{d'où} \quad x = 360^\circ \cdot \frac{k}{2\pi R}.$$

On pourra donc en déduire: 1° le côté PB; ce sera le complément de la latitude du point B; 2° l'angle en P: ce sera la différence des longitudes des points A et B.

Si l'on ne peut pas regarder la terre comme sphérique, et que le côté AB soit assez grand pour qu'il faille avoir égard à la forme elliptique du méridien, le calcul des coordonnées géographiques du point B peut se faire de deux manières principales: 1° en considérant le TRIANGLE SPHÉROÏDIQUE (*Voy. ce mot*) tracé sur la surface de l'ellipsoïde terrestre; 2° en projetant les sommets P et B sur une sphère osculatrice au point A. Ce second moyen est le plus simple. Soit PAE (fig. 2) l'ellipse méridienne; soit AN la grande normale en ce point. La sphère qui a cette grande normale pour rayon et le point N pour centre, est osculatrice à l'ellipsoïde au point A; car 1° son méridien P'AE' est tangent en A au méridien elliptique PAE, et 2° la grande normale AN est précisément le rayon de courbure de la section faite dans l'ellipsoïde par un plan mené suivant AN perpendiculairement au plan PAE'; la section faite par ce plan dans la sphère est donc tangente en A à la section faite dans l'ellipsoïde. Cette sphère est dite *transversalement osculatrice*, parce qu'elle est tan-

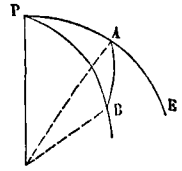


Fig. 1.

gente à l'ellipsoïde tout le long du parallèle qui contient le point A. — Par la droite AN faisons passer un plan qui fasse avec PAE un angle égal à l'azimut du premier côté sur l'horizon du point A; ce plan cou-

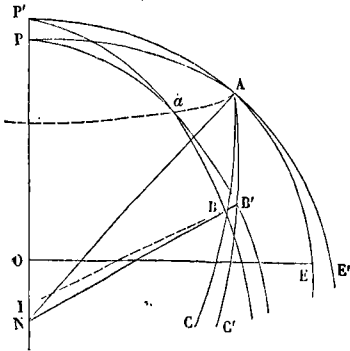


Fig. 2.

pera l'ellipsoïde suivant un arc ABC et la sphère suivant un arc AB'C' qui seront tangents au point A. Prenons AB égal au côté k qui a été mesuré, et joignons BN, dont le prolongement viendra couper la sphère en un point B'. L'arc de grand cercle AB' sera la projection sur la sphère de l'arc d'ellipse AB, et n'en différera que d'une quantité du second ordre par rapport à AB. Le méridien elliptique PB et le méridien circulaire P'B' seront tangents en un point a situé sur le parallèle du point A. Enfin, l'angle aB'A sera sensiblement égal à l'angle aBA; car le premier ne sera autre chose que le second réduit à l'horizon du point B' (Voy. RÉDUCTION A L'HORIZON), et la correction sera ici très-faible, parce que BB' est très-petit.

Mais si l'on mène la normale BI au méridien elliptique, cette normale ne se confondra pas avec BN; et ces deux directions feront entre elles un petit angle que nous désignerons par ψ . — Il résulte de ce qui précède qu'en remplaçant le point B par sa projection B' sur la sphère osculatrice, on ne change pas la différence des longitudes des points A et B, on ne change pas non plus, du moins sensiblement, l'azimut du côté AB sur l'horizon du point B; mais on change un peu la différence des latitudes des points A et B.

CALCUL DE LA DIFFÉRENCE EN LATITUDE. Soit l la latitude du point A, et λ celle du point B', comptée sur la sphère; si l'on désigne par u le rapport du côté AB au rayon AN de la sphère, rapport qui est ordinairement très-petit, on pourra regarder λ comme une fonction de u , et poser $\lambda = \varphi(u)$; par conséquent, par la série de Maclaurin, on aura

$$\lambda = l + \varphi'(0) \cdot \frac{u}{1} + \varphi''(0) \frac{u^2}{1 \cdot 2}, \quad [1]$$

en négligeant les puissances de u supérieures à la seconde. Or le triangle P'AB', dans lequel les arcs P'A et P'B' sont les compléments des latitudes des points A et B', donne

$$\sin \lambda = \sin l \cos u - \cos l \sin u \cos A, \quad [2]$$

en appelant A l'angle B'AE', ou l'azimut du côté AB' sur l'horizon du point A. Différentiant deux fois la relation [2], tirant les valeurs de $\frac{d\lambda}{du}$ et de $\frac{d^2\lambda}{du^2}$; faisant ensuite $u = 0$ pour avoir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$, puis

substituant dans [1], on obtient

$$\lambda = l - u \cos A - \frac{1}{2} \text{tang } l \cdot \sin^2 A \cdot u^2. \quad [3]$$

Si l'on désigne par k le côté AB, et par N la grande normale AN, on peut écrire

$$\lambda - l = -\cos A \cdot \frac{k}{N \sin l''} - \frac{1}{2} \text{tang } l \cdot \sin^2 A \cdot \frac{k^2}{N^2 \sin^2 l''}, \quad [4]$$

en évaluant les latitudes, non plus en parties du rayon, mais en degrés, minutes et secondes.

Telle est l'expression de la différence des latitudes comptées sur la sphère; il s'agit d'en déduire la différence des latitudes comptées sur l'ellipsoïde. Soit l_1 la latitude du point B comptée sur l'ellipsoïde. Les arcs aB et aB' sont sensiblement égaux. On a $aB' = N(\lambda - l)$, puisque λ et l sont les latitudes des points a et B', et que N est le rayon de la sphère. D'un autre côté, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne au point A, ou au point a, ce qui revient au même, l'arc aB étant peu étendu, comme cela arrive d'ordinaire dans les triangulations, on peut le regarder comme un arc de cercle décrit du rayon ρ ; on a dès lors $aB = \rho(l_1 - l)$, et par conséquent

$$\rho(l_1 - l) = N(\lambda - l); \quad \text{d'où } l_1 - l = \frac{N}{\rho}(\lambda - l);$$

ou on a (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{d'où } \frac{N}{\rho} = \frac{1 - e^2 \sin^2 l}{1 - e^2}$$

= $(1 - e^2 \sin^2 l) \times (1 + e^2 + e^4 + \dots)$. Substituant et négligeant les termes qui contiennent e à des puissances supérieures à la seconde, on arrive à une expression de la forme

$$l_1 - l = -Pk \cos A - Qk^2 \sin^2 A, \quad [5]$$

dans laquelle

$$P = \frac{1 + e^2 \sin^2 l}{N \sin l''} \quad \text{et} \quad Q = P \frac{\text{tang } l}{2N}.$$

La formule [5] est celle qui a été employée au calcul des latitudes de la carte de France du Dépôt de la guerre. Les valeurs de P et de Q ont été converties en tables, qui sont insérées dans le IX^e volume du *Mémorial du Dépôt de la guerre*.

CALCUL DE LA DIFFÉRENCE EN LONGITUDE. Il suffira ici de considérer les points A et B' situés sur la sphère. Soient L et L₁ leurs longitudes. Le triangle P'AB' donne la relation

$$\frac{\sin(L_1 - L)}{\sin A} = \frac{\sin u}{\cos \lambda},$$

qui exprime que les sinus des angles en P' et en A sont proportionnels aux sinus des côtés opposés. Développant $\sin(L_1 - L)$ et $\sin u$, en s'arrêtant aux troisièmes puissances des arcs, on obtient

$$L_1 - L - \frac{1}{6}(L_1 - L)^3 = \frac{\sin A}{\cos \lambda} \left(u - \frac{1}{6} u^3 \right);$$

$$\text{d'où } L_1 - L = \frac{\sin A}{\cos \lambda} \left(u - \frac{1}{6} u^3 \right) + \frac{1}{6} (L_1 - L)^3.$$

En négligeant d'abord le second terme du second membre, on obtient pour $L_1 - L$ une valeur approchée que l'on peut substituer dans ce second terme; et, en négligeant les puissances de u supérieures à la troisième, il vient

$$L_1 - L = \frac{\sin A}{\cos \lambda} \cdot u - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin A}{\cos \lambda} u^3 + \frac{1}{6} \frac{\sin^3 A}{\cos^3 \lambda} u^3; \quad [6]$$

remplaçant u par sa valeur $\frac{k}{N}$, et exprimant les angles en degrés, on obtient

$$L_1 - L = \frac{\sin A}{\cos \lambda} \cdot \frac{k}{N \sin 1''} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin A}{\cos \lambda} \cdot \frac{k^3}{N^3 \sin 1''} + \frac{1}{6} \frac{\sin^3 A}{\cos^3 \lambda} \cdot \frac{k^3}{N^3 \sin 1''}$$

Les projections horizontales des lignes BN et BI étant égales, on peut remplacer $N \cos \lambda$ par $n \cos l$, en désignant BI par n . On peut même, attendu que la valeur du second terme est toujours très-petite, et que n diffère peu de N , remplacer ensuite N^2 par n^2 au dénominateur de ce terme, afin de ne plus avoir que n dans la formule ; on trouve ainsi :

$$L_1 - L = \frac{k}{n \sin 1''} \cdot \frac{\sin A}{\cos l} - \frac{1}{6} \cdot \frac{k^3}{n^3 \sin 1''} \cdot \frac{\sin A}{\cos l} + \frac{1}{6} \cdot \frac{k^3}{n^3 \sin 1''} \cdot \frac{\sin^3 A}{\cos^3 l} \quad [7]$$

Dans le calcul des longitudes relatif à la carte de France du Dépôt de la guerre, on n'a conservé que le premier terme du second membre. Le facteur $\frac{1}{n \sin 1''}$ a été réduit en une table, insérée également dans le IX^e volume du *Mémorial* ; et la formule employée est alors

$$L_1 - L = Rk \cdot \frac{\sin A}{\cos l} \quad [8]$$

R désignant le nombre fourni par la table.

Il existe pour la solution du même problème plusieurs autres méthodes, dont l'une a été donnée par Legendre en 1787, et appliquée par Delambre à la mesure du méridien. (*Voy. le Traité de Géodésie* de M. Puissant, tom. I.)

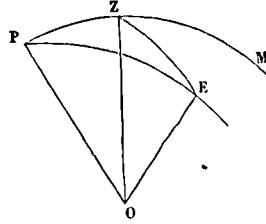
La distance des points B et B' est ordinairement très-petite ; à l'équateur, où la sphère osculatrice s'écarte le plus de l'ellipsoïde, cette distance BB' n'est que de 6^m pour une valeur de k égale à 1 degré. Dans les mêmes circonstances, la différence des longueurs AB et AB' n'est que de 0^m,04 ; et l'angle ψ n'est que de 23^m au maximum. Cependant, lorsque k est considérable, il convient de pousser le calcul de $\frac{N}{p}$ plus loin que la seconde puissance de e . Du

reste, quel que soit le degré d'approximation employé, on constate presque toujours entre les coordonnées géographiques calculées, et celles qui peuvent être observées directement, des différences qui ne peuvent être attribuées ni, au calcul ni à l'observation, et qui montrent l'inexactitude de l'hypothèse qui assimile la surface du globe à un ellipsoïde de révolution. Mais cette hypothèse peut être admise pour une étendue de pays telle que celle de la France, par exemple.

COORDONNÉES HORAIRES, coordonnées sphériques qui se composent de l'ANGLE HORAIRE et de la DISTANCE POLAIRE (*Voy. ces mots*). Ces coordonnées pourraient s'observer directement avec l'équatorial ; mais on préfère les déduire par le calcul de l'observation des **COORDONNÉES AZIMUTALES** (*Voy. ce mot*). Le pôle P, le zénith Z et l'étoile E que l'on considère (ou du moins sa projection sur la sphère céleste), sont les trois sommets d'un triangle sphérique dans lequel PE = δ est la distance polaire, ZPE = A est l'angle horaire, ZE = x est la distance zénithale de l'étoile, PZE est le supplément de MZE = A qui est l'azimut ; enfin PZ = λ est la

distance zénithale du pôle, supposée connue. Ce triangle donne donc les formules :

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \lambda \cos x - \sin \lambda \sin x \cos A ; \\ \sin \delta \cos A &= \sin \lambda \cos x + \cos \lambda \sin x \cos A , \\ \sin \delta \sin A &= \sin x \sin A . \end{aligned}$$



Les deux premières suffiraient pour calculer δ et A ; mais la troisième sert de vérification.

Pour opérer la transformation inverse, on emploierait les formules :

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos A ; \\ \sin x \cos A &= - \sin \lambda \cos \delta + \cos \lambda \sin \delta \cos A ; \\ \sin x \sin A &= \sin \delta \sin A . \end{aligned}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES RECTANGULAIRES, coordonnées qui servent quelquefois en Géodésie à fixer sur le globe terrestre la position d'un point. Elles se composent d'un arc de la méridienne principale et d'un arc de perpendiculaire à la méridienne. (*Voy. PERPENDICULAIRES A LA MÉRIDienne.*)

COORDONNÉES URANOGRAPHIQUES, coordonnées sphériques composées de la DÉCLINAISON et de l'ASCENSION DROITE (*Voy. ces mots*), ou de la LONGITUDE et de la LATITUDE (*Voy. ces mots*). Dans le premier cas on donne aussi à ces coordonnées le nom de **COORDONNÉES ÉQUATORIALES** pour les distinguer du second système qui se rapporte à l'écliptique et que l'on appelle **COORDONNÉES ÉCLIPTIQUES**.

Pour passer de l'un de ces systèmes de coordonnées à l'autre, il suffit de résoudre un triangle sphérique dont les trois sommets sont le pôle P de l'équateur, le pôle Q de l'écliptique, et l'astre e que l'on considère. En effet, soient A γ A' (fig. 1) l'é-

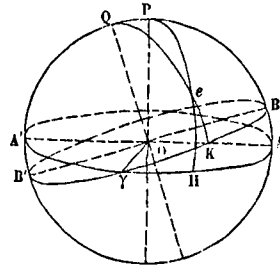


Fig. 1.

quateur, B γ B' l'écliptique, γ l'équinoxe du printemps ; PH le méridien du point e , QK le cercle de latitude de ce même point. La droite O γ étant perpendiculaire à la fois à l'axe OP de l'équateur et à l'axe OQ de l'écliptique, l'angle QOP, ou l'arc PQ qui le mesure, est égal à l'obliquité de l'écliptique ω . Le côté Pe est le complément de la déclinaison D ; le côté Qe est le complément de la latitude λ ; l'angle QPe, mesuré par l'arc d'équateur A'H, vaut

$90^\circ + \gamma H$ ou 90° plus l'ascension droite \mathcal{R} ; enfin l'angle PQe , mesuré par l'arc d'écliptique κB , est le complément de la longitude L . Pour déterminer la longitude et la latitude, connaissant l'ascension droite et la déclinaison, on aura donc à déterminer l'angle PQe et le côté Qe , connaissant l'angle QPe , le côté Pe et le côté PQ ; c'est-à-dire qu'on aura à résoudre un triangle sphérique connaissant deux côtés et l'angle compris. Il en serait de même s'il s'agissait de déterminer l'ascension droite et la déclinaison connaissant la longitude et la latitude.

La considération de ce triangle sphérique donne dans le premier cas :

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \sin D \cos \omega - \cos D \sin \omega \sin \mathcal{R}, \\ \cos \lambda \sin L &= \sin D \sin \omega + \cos D \cos \omega \sin \mathcal{R}, \\ \cos \lambda \cos L &= \cos D \cos \mathcal{R}; \end{aligned}$$

et dans le second :

$$\begin{aligned} \sin D &= \sin \lambda \cos \omega + \cos \lambda \sin \omega \sin L, \\ \cos D \sin \mathcal{R} &= -\sin \lambda \sin \omega + \cos \lambda \cos \omega \sin L, \\ \cos D \cos \mathcal{R} &= \cos \lambda \cos L. \end{aligned}$$

Deux des formules suffisent dans chaque cas, mais la troisième sert de vérification.

Quand il s'agit du soleil, le problème se simplifie, parce que la latitude est constamment nulle, si l'on néglige les perturbations dues à l'action des planètes sur la terre. On a alors à considérer un triangle sphérique rectangle $S\gamma H$ (fig. 2), dans lequel γH

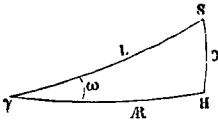


Fig. 2.

est l'ascension droite \mathcal{R} du soleil, HS sa déclinaison D , γS sa longitude L , et $S\gamma H = \omega$ l'obliquité de l'écliptique.

Ce triangle donne immédiatement :

$$\text{tang } \mathcal{R} = \text{tang } L \cos \omega,$$

et

$$\sin D = \sin L \sin \omega,$$

formules qui donneront l'ascension droite et la déclinaison connaissant la longitude. Si c'était la longitude qui fût inconnue, elle serait donnée immédiatement par la première formule, qui n'exige que la connaissance de l'ascension droite.

COQUE, partie principale d'un navire, formant un tout continu, et destinée à flotter. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

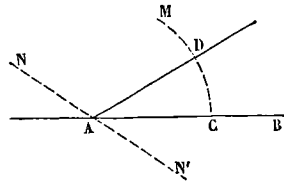
CORBEAU, crochet de fer scellé dans un mur et servant à soutenir une poutre parallèle à ce mur. On donne aussi ce nom à une espèce de console en pierre remplissant le même office.

CORDEAU, instrument qui sert à tracer des lignes droites sur une surface plane de quelque étendue; il se compose simplement d'une cordelette, suffisamment résistante, que l'on tend par ses extrémités entre les deux points par lesquels on veut faire passer une ligne droite. Si l'on opère sur le terrain, on suit avec un piquet la direction du cordeau, et l'on obtient ainsi une trace rectiligne. Si l'on opère sur une planche, une poutre, etc., on enduit préalablement le cordeau d'une matière colorante, le plus souvent de sanguine ou de craie; le cordeau une fois tendu, on le pince par le milieu,

puis on l'abandonne à son élasticité; en reprenant sa position primitive, il tend à la dépasser, et laisse sur le bois une trace rectiligne colorée : c'est ce qu'on appelle *battre* une ligne droite.

Dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot), on se sert quelquefois du cordeau pour obtenir sur une surface courbe une ligne de plus courte distance entre deux points.

CORDES (TABLE DES), table qui donne pour tous les angles compris entre 0 et 180° le rapport de la corde correspondante au rayon. L'emploi d'une pareille table dispense de l'usage du rapporteur, et conduit à des résultats plus approchés. Pour faire en un point A d'une droite AB un angle de 24° par



exemple, on décrira, du point A comme centre, avec un rayon égal à l'une des unités de l'échelle adoptée, un arc indéfini CM ; consultant ensuite la *table des cordes*, on trouvera que la corde de 24° est $0,4159$; on prendra donc, à la même échelle, une ouverture de compas égale aux $0,4159$ de l'unité, et on portera cette ouverture de compas sur l'arc indéfini, de C en un point D ; on joindra AD ; et l'angle CAD sera l'angle demandé.

La corde d'un arc étant le double du sinus de sa moitié, on pourrait remplacer une table des cordes par une table des SINUS NATURELS (Voy. ce mot); en ayant soin de prendre le sinus correspondant à la moitié de l'angle proposé, et de doubler ensuite ce sinus.

Nous donnons ci-dessous la table des cordes pour tous les arcs, de 10 minutes en 10 minutes, depuis 0 jusqu'à 90° , le rayon étant pris pour unité. Il n'est pas nécessaire de pousser la table au delà de 90° , attendu que si l'on avait à construire, en un point A , un angle obtus BAN , on pourrait, de l'autre côté de AB , construire l'angle aigu supplémentaire BAN' . Si l'angle à construire tombait entre deux angles consécutifs de la table, on trouverait sa corde par une interpolation analogue à celle qu'on emploie dans l'usage des tables de logarithmes. Si, par exemple, l'angle à construire est $48^\circ 37' 30''$, on prendra dans la table la corde de $48^\circ 30'$ qui est $0,8214$, et celle de $48^\circ 40'$, qui est $0,8241$; ces deux cordes diffèrent de $0,0027$; on posera donc la proportion

$$10' : 7'30'' = 0,0027 : x,$$

ou

$$600'' : 450'' = 0,0027 : x,$$

d'où

$$x = 0,0020.$$

C'est ce qu'il faudra ajouter à la corde de $48^\circ 30'$ pour avoir celle de $48^\circ 37' 30''$; celle-ci est donc

$$0,8214 + 0,0020 \text{ ou } 0,8134.$$

L'approximation fournie par cette proportion sera généralement suffisante; si l'on voulait une approximation plus grande, il faudrait recourir aux différences secondes (Voy. INTERPOLATION); mais elles sont ici trop faibles pour qu'il y ait lieu d'y avoir égard.

ARCS.	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°.....	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1.....	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320
2.....	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494
3.....	0,0523	0,0553	0,0582	0,0611	0,0640	0,0669
4.....	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843
5.....	0,0872	0,0901	0,0931	0,0960	0,0989	0,1018
6.....	0,1047	0,1076	0,1105	0,1134	0,1163	0,1192
7.....	0,1221	0,1250	0,1279	0,1308	0,1337	0,1366
8.....	0,1395	0,1424	0,1453	0,1482	0,1511	0,1540
9.....	0,1569	0,1598	0,1627	0,1656	0,1685	0,1714
10.....	0,1743	0,1772	0,1801	0,1830	0,1859	0,1888
11.....	0,1917	0,1946	0,1975	0,2004	0,2033	0,2062
12.....	0,2091	0,2120	0,2148	0,2177	0,2206	0,2235
13.....	0,2264	0,2293	0,2322	0,2351	0,2380	0,2409
14.....	0,2437	0,2466	0,2495	0,2524	0,2553	0,2582
15.....	0,2611	0,2639	0,2668	0,2697	0,2726	0,2755
16.....	0,2783	0,2812	0,2841	0,2870	0,2899	0,2927
17.....	0,2956	0,2985	0,3014	0,3042	0,3071	0,3100
18.....	0,3129	0,3157	0,3186	0,3215	0,3244	0,3272
19.....	0,3301	0,3330	0,3358	0,3387	0,3416	0,3444
20.....	0,3473	0,3502	0,3530	0,3559	0,3587	0,3616
21.....	0,3645	0,3673	0,3702	0,3731	0,3759	0,3788
22.....	0,3816	0,3845	0,3873	0,3902	0,3930	0,3959
23.....	0,3987	0,4016	0,4044	0,4073	0,4101	0,4130
24.....	0,4159	0,4187	0,4215	0,4244	0,4272	0,4300
25.....	0,4329	0,4357	0,4386	0,4414	0,4443	0,4471
26.....	0,4499	0,4527	0,4556	0,4584	0,4612	0,4641
27.....	0,4669	0,4697	0,4725	0,4754	0,4782	0,4810
28.....	0,4838	0,4866	0,4895	0,4923	0,4951	0,4979
29.....	0,5008	0,5036	0,5064	0,5092	0,5120	0,5148
30.....	0,5176	0,5204	0,5233	0,5261	0,5289	0,5317
31.....	0,5345	0,5373	0,5401	0,5429	0,5457	0,5485
32.....	0,5513	0,5541	0,5569	0,5597	0,5625	0,5652
33.....	0,5680	0,5708	0,5736	0,5764	0,5792	0,5820
34.....	0,5847	0,5875	0,5903	0,5931	0,5959	0,5986
35.....	0,6014	0,6042	0,6070	0,6097	0,6125	0,6153
36.....	0,6180	0,6208	0,6236	0,6264	0,6291	0,6319
37.....	0,6346	0,6374	0,6401	0,6429	0,6456	0,6484
38.....	0,6511	0,6539	0,6566	0,6594	0,6621	0,6649
39.....	0,6676	0,6704	0,6731	0,6759	0,6786	0,6813
40.....	0,6840	0,6868	0,6895	0,6922	0,6949	0,6977
41.....	0,7004	0,7031	0,7059	0,7086	0,7113	0,7140
42.....	0,7167	0,7195	0,7222	0,7249	0,7276	0,7303
43.....	0,7330	0,7357	0,7384	0,7411	0,7438	0,7465
44.....	0,7491	0,7519	0,7546	0,7573	0,7600	0,7627
45.....	0,7654	0,7680	0,7707	0,7734	0,7761	0,7788
46.....	0,7815	0,7841	0,7868	0,7895	0,7922	0,7948
47.....	0,7975	0,8002	0,8028	0,8055	0,8082	0,8108
48.....	0,8133	0,8161	0,8188	0,8214	0,8241	0,8267
49.....	0,8294	0,8320	0,8347	0,8373	0,8400	0,8426
50.....	0,8452	0,8479	0,8505	0,8532	0,8558	0,8584
51.....	0,8610	0,8636	0,8663	0,8689	0,8715	0,8741
52.....	0,8767	0,8794	0,8820	0,8846	0,8872	0,8898
53.....	0,8924	0,8950	0,8976	0,9002	0,9028	0,9054
54.....	0,9080	0,9106	0,9132	0,9157	0,9183	0,9209
55.....	0,9235	0,9261	0,9287	0,9312	0,9338	0,9364
56.....	0,9389	0,9415	0,9441	0,9466	0,9492	0,9518
57.....	0,9543	0,9569	0,9594	0,9620	0,9645	0,9671
58.....	0,9696	0,9722	0,9747	0,9772	0,9798	0,9823
59.....	0,9848	0,9874	0,9899	0,9924	0,9949	0,9975
60.....	1,0000	1,0025	1,0050	1,0075	1,0101	1,0126
61.....	1,0151	1,0176	1,0201	1,0226	1,0251	1,0276
62.....	1,0301	1,0326	1,0351	1,0375	1,0400	1,0425
63.....	1,0450	1,0475	1,0500	1,0524	1,0549	1,0574
64.....	1,0598	1,0623	1,0648	1,0672	1,0697	1,0721

ARCS.	0'	10'	20'	30'	40'	50'
65.....	1,0746	1,0771	1,0795	1,0819	1,0844	1,0868
66.....	1,0893	1,0917	1,0941	1,0966	1,0990	1,1014
67.....	1,1039	1,1063	1,1087	1,1111	1,1136	1,1160
68.....	1,1184	1,1208	1,1232	1,1256	1,1280	1,1304
69.....	1,1328	1,1352	1,1376	1,1400	1,1424	1,1448
70.....	1,1472	1,1495	1,1519	1,1543	1,1567	1,1590
71.....	1,1614	1,1638	1,1661	1,1685	1,1709	1,1732
72.....	1,1756	1,1779	1,1803	1,1826	1,1850	1,1873
73.....	1,1896	1,1920	1,1943	1,1966	1,1990	1,2013
74.....	1,2036	1,2060	1,2083	1,2106	1,2129	1,2152
75.....	1,2175	1,2198	1,2221	1,2244	1,2267	1,2290
76.....	1,2313	1,2336	1,2359	1,2382	1,2405	1,2427
77.....	1,2450	1,2473	1,2496	1,2518	1,2541	1,2564
78.....	1,2586	1,2609	1,2632	1,2654	1,2677	1,2699
79.....	1,2721	1,2744	1,2766	1,2789	1,2811	1,2833
80.....	1,2856	1,2878	1,2900	1,2922	1,2944	1,2966
81.....	1,2989	1,3011	1,3033	1,3055	1,3077	1,3099
82.....	1,3121	1,3143	1,3165	1,3187	1,3209	1,3231
83.....	1,3252	1,3274	1,3296	1,3318	1,3339	1,3361
84.....	1,3383	1,3404	1,3426	1,3447	1,3469	1,3490
85.....	1,3512	1,3533	1,3555	1,3576	1,3597	1,3619
86.....	1,3640	1,3661	1,3682	1,3704	1,3725	1,3746
87.....	1,3767	1,3788	1,3809	1,3830	1,3851	1,3872
88.....	1,3893	1,3914	1,3935	1,3956	1,3977	1,3997
89.....	1,4018	1,4039	1,4060	1,4080	1,4101	1,4121
90°.....	1,4142	»	»	»	»	»

Une table des cordes peut être employée à un usage inverse de celui dont nous avons parlé ci-dessus. Dans le *lever au mètre* (*Voy. LEVER DES PLANS*), on relève un angle en portant, à partir de son sommet, sur chacun de ses côtés, deux longueurs égales, et en mesurant la distance comprise entre les extrémités de ces longueurs; supposons que ces longueurs aient été de 5^m chacune, et que la distance entre leurs extrémités ait été trouvée de 6^m,341; on divisera 6^m,341 par 5^m; le quotient 1,2682 exprimera, dans le cercle dont le rayon est 1, la corde correspondante à l'angle considéré. Si l'on se contente d'une première approximation, on cherchera dans la table des cordes le nombre qui approche le plus de 1,2682; on trouvera que c'est 1,2677 qui est la corde répondant à un angle de 78° 40'. Si l'on veut une approximation plus grande, on remarquera que le nombre donné 1,2682 est compris dans la table entre les nombres 1,2677 et 1,2699 qui répondent à 78° 40' et à 78° 50'; ces nombres diffèrent entre eux de 0,0022; et le plus petit d'entre eux est inférieur au nombre proposé de 0,0005; on pourra donc poser la proportion :

$$0,0022 : 0,0005 = 10' : x = 600'' : x,$$

d'où $x = 136'',4 = 2'16'',4$. L'angle cherché a donc pour valeur 78° 42' 16'',4. Si la corde donnée était plus grande que 1,4142, corde du quadrant, cela indiquerait que l'angle correspondant est obtus; dans ce cas on calculerait la corde de l'arc supplémentaire. Si c est une corde, dans le cercle dont le rayon est 1, et que x désigne la corde supplémentaire, on a entre ces deux quantités la relation

$$c^2 + x^2 = 4, \text{ d'où } x = \sqrt{(2+c)(2-c)}.$$

Si, par exemple, la corde donnée était 1,5465, on trouverait, en appliquant les logarithmes à cette formule, que la corde supplémentaire est 1,2682;

et comme celle-ci répond à un angle de $78^{\circ} 42' 16''$, on en conclurait que la corde donnée répond à l'angle supplémentaire $101^{\circ} 17' 43''$, 6.

CORDES (FROTTEMENT DES). Il s'agit ici du frottement des cordes sur des cylindres fixes, frottement que l'on a souvent à considérer dans les applications. Une corde, soumise à l'une de ses extrémités à un effort quelconque P, un poids par exemple, s'enroule sur un cylindre de rayon r , et est sollicitée à l'autre extrémité par une force mouvante F ; on demande quelle doit être l'intensité de cette force mouvante pour que le mouvement ait lieu en effet et que la corde glisse sur le cylindre. Pour résoudre ce problème, considérons l'équilibre d'une tranche infiniment mince de la corde, par exemple de celle qui occupe la position M (fig. 1). Cette tranche est sol-

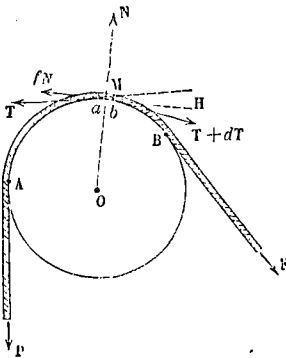


Fig. 1.

licitée d'une part par la partie de la corde située à gauche, laquelle exerce sur elle une certaine tension T, suivant la tangente au cylindre, menée par le point a, extrémité gauche de la tranche de corde considérée. Elle est sollicitée d'autre part par la partie de la corde située à droite, laquelle exerce une tension infiniment peu différente T + dT, dirigée suivant la tangente au cylindre menée par le point b, extrémité droite de la tranche. (A la rigueur, ces tensions devraient être considérées comme tangentes à un cylindre concentrique dont le rayon serait r augmenté du demi-diamètre de la corde; mais nous négligerons ce demi-diamètre vis-à-vis de r .) La tranche dont il s'agit reçoit en outre du cylindre une réaction qui peut se décomposer en deux, l'une N normale au cylindre, et dirigée suivant le prolongement du rayon OM, l'autre fN perpendiculaire à la première et dirigée en sens inverse du mouvement qui tend à naître; c'est le frottement de la tranche sur le cylindre. Pour l'équilibre, il faut que la somme des projections de ces diverses forces sur le rayon OM et sur sa perpendiculaire soit égale à zéro pour chacun de ces axes. En appelant 2α l'angle de contingence, ou l'angle des forces T et T + dT, α représentera l'angle de chacune d'elles avec la droite MH perpendiculaire au rayon OM. On devra donc avoir

$$(T + dT) \sin \alpha + T \sin \alpha - N = 0,$$

$$\text{et } (T + dT) \cos \alpha - T \cos \alpha - fN = 0,$$

d'où $N = (2T + dT) \sin \alpha$ et $fN = dT \cos \alpha$,
 et, en éliminant N,

$$f(2T + dT) \sin \alpha = dT \cos \alpha,$$

ou

$$\frac{dT}{2T + dT} = f \tan \alpha.$$

Or, d'après la définition de 2α , on a $\tan 2\alpha = \frac{ds}{r}$, en appelant ds l'élément de la circonférence; et par conséquent, puisqu'il s'agit d'un angle infiniment petit, $\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{ds}{r}$. Substituant pour $\tan \alpha$ cette valeur, supprimant le terme infiniment petit dT devant 2T, et multipliant par 2, on obtient

$$\frac{dT}{T} = f \frac{ds}{r},$$

d'où, en intégrant, $\log' T = \frac{fs}{r} + \text{const.}$

Au point A où la corde commence à s'enrouler sur le cylindre, on a $s = 0$ et $T = P$; par conséquent $\log' P = + \text{const.}$

Par suite $\log' T - \log' P = \frac{fs}{r},$

et $T = P \cdot e^{\frac{fs}{r}}$ [1]

Telle est la relation qui lie la tension en un point quelconque de la partie de corde enroulée avec la force résistante P. Au point B où la corde se détache du cylindre, on a $T = F$; et si nous sommions S l'arc AB, il viendra

$$F = P \cdot e^{\frac{fS}{r}}. \quad [2]$$

c'est la formule qu'il s'agissait d'établir.

Si on appelle σ l'arc semblable à S dans le cercle dont le rayon est 1, on a $S = \sigma r$, par conséquent

$$F = P e^{f\sigma}. \quad [3]$$

Si la corde s'enroule d'un demi-tour, on aura

$$F = P \cdot e^{f\pi}.$$

Si elle s'enroule d'un tour entier, on aura

$$F = P \cdot e^{2f\pi};$$

et ainsi de suite. — On peut remarquer que σ est l'angle des normales aux deux points de contact extrêmes, ou l'arc qui le mesure dans le cercle dont le rayon est 1.

Supposons, par exemple, qu'on veuille retenir un poids de 1000 kil., en enroulant sur un cylindre fixe en bois la corde à laquelle il est suspendu, et qu'on ne veuille avoir à exercer qu'un effort de 20 kil.; la force mouvante étant ici le poids de 1000 kil., on devra avoir

$$1000 = 20 e^{0,50 \sigma},$$

en prenant $f = 0,50$, ce qui répond au frottement d'une corde sur un cylindre en chêne. On tire de cette équation $\sigma = 7,824$, ce qui répond à un peu plus d'un tour et un quart.

La formule [3] a été établie dans l'hypothèse où le cylindre serait à base circulaire; mais il est facile de faire voir qu'elle s'applique à un cylindre convexe à base quelconque. Soit AMB (fig. 2) la base de ce cylindre. En considérant un élément MM' de la corde, en contact avec un élément de la courbe AB dont le rayon de courbure est ρ , on obtiendra, par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent,

$$\frac{dT}{T} = \frac{f ds}{\rho},$$

formule dans laquelle $\frac{ds}{\rho}$ représente la tangente de l'angle de contingence, ou cet angle lui-même, ou encore l'angle MCM' des deux normales consécutives MC et M'C. Or, si l'on désigne par $d\sigma$ l'arc semblable à MM' dans le cercle dont le rayon est 1, on aura

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{d\sigma}{1} = d\sigma ;$$

par conséquent

$$\frac{dT}{T} = f d\sigma,$$

d'où

$$T = f\sigma + \text{const.},$$

et, en intégrant entre les limites correspondantes

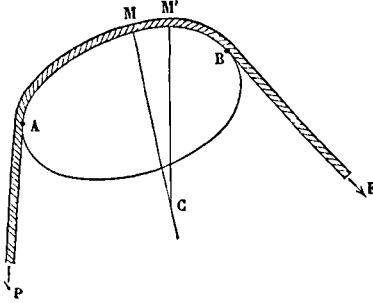


Fig. 2.

aux points de contact extrêmes, et appelant σ l'arc total AB embrassé par la corde,

$$F = P e^{f\sigma},$$

comme ci-dessus, σ désignant toujours l'angle des normales aux points de contact extrêmes.

Tout ce qui vient d'être dit des cordes peut s'appliquer aux courroies. (Voy. COURROIES SANS FIN.)

CORNE DE VACHE, sorte de voussure que l'on emploie pour évaser l'ouverture d'un tunnel, d'une arche de pont, ou en général d'un berceau quelconque, et dont on fait également usage pour racher la différence de saillie de deux constructions déjà existantes. — Soit C'HD' la section droite du

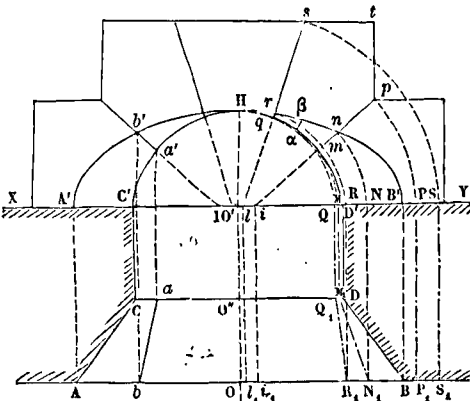
traces des piédroits formant l'évasement. Sur AB on décrira une courbe de tête ayant la même montée que la courbe C'HD'; soit A'HB' cette courbe. L'intrados de la corne de vache sera une surface gauche engendrée par une droite assujettie à rencontrer les deux courbes CD, C'HD' et AB, A'HB', et à demeurer normale à la première. Pour en obtenir une génératrice, on mènera la' normale à la courbe C'HD', et on la considérera comme la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical. Il rencontre les deux courbes en des points qui se projettent verticalement en a' et b' et horizontalement en a et b; la droite ab sera donc la projection horizontale d'une génératrice de la surface gauche; a'b' sera la projection verticale correspondante. La droite qui a ces projections remplit en effet la condition de rencontrer les deux courbes, et elle est normale à la courbe CD, C'HD' puisqu'elle est contenue dans un plan normal à cette courbe. — Pour tracer l'appareil, on divisera la courbe C'HD' en parties égales; par les points de division on mènera des normales jusqu'à la rencontre de la courbe A'HB', ou jusqu'à la rencontre des joints de lit des assises du mur.

Il faudra ensuite se procurer les panneaux de joints des différents voussoirs. Considérons en particulier celui qui a pour panneau de tête antérieur la figure *pnrst*, et pour panneau de tête postérieur la figure *pmqst*. Imaginons que le joint *mnp* tourne autour de la droite *ti*, perpendiculaire au plan vertical de projection et menée par le pied *i* de la normale en *m* à C'HD'; le point *n* viendra en N₁, le point *p* en P₁, le point *m* en M₁; d'ailleurs la ligne *mn* se rabattra suivant une ligne droite, puisque c'est une génératrice de la surface gauche; le panneau de joint inférieur se rabattra donc suivant la figure PP₁N₁M₁M. Pareillement le panneau de joint supérieur en tournant autour de *ti* se rabattra suivant la figure SS₁R₁Q₁Q. On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour procéder à la taille du voussoir. On préparera un prisme droit ayant pour base la figure *pmqst*, et pour hauteur la distance PP₁; sur la face correspondante à *np* on appliquera le panneau PP₁N₁M₁M, et sur la face correspondante à *rs* on appliquera le panneau SS₁R₁Q₁Q; on pourra tailler à l'aide d'une équerre la douelle cylindrique comprise entre les droites MM₁ et QQ₁ et dont la base est l'arc *qm*; on poussera cette douelle à partir du plan AB jusqu'à ce qu'on atteigne le plan CD, et qu'on puisse, dans ce dernier plan, tracer à la règle ployante un arc égal et parallèle à *qm*. Il restera à tailler la douelle gauche, ce qui se fera à l'aide d'une règle posée sur des points de repère déterminés à l'avance sur les deux directrices ayant respectivement pour projections CD, *qm* d'une part, et AB, *rn* de l'autre. Ces points de repère s'obtiennent aisément en menant une normale $\alpha\beta$ à l'arc *qm*, prolongée jusqu'à la rencontre de l'arc *rn*; les points α et β sont deux points de repère correspondants.

Il existe au pont de Neuilly, construit par Perrotet en 1774, des cornes de vache qui raccordent ainsi les arches en anse de panier avec les avant-becs des piles.

On donne aussi le nom de *corne de vache* à une voussure gauche servant à résoudre le problème du BIAIS PASSÉ (Voy. ce mot).

CORNICHE, partie supérieure de l'entablement.



berceau. Prenons ce plan pour plan vertical de projection, et pour plan horizontal le plan de naissance. Soient C'D' et CD les traces des plans verticaux entre lesquels est comprise la portion de berceau que l'on considère; et soient CA et DB les

Sa hauteur est de 1 module $\frac{1}{3}$ dans l'ordre toscan, de 1 module $\frac{1}{2}$ dans l'ordre dorique, de 1 module 13 parties $\frac{1}{2}$ dans l'ordre ionique, de 2 modules dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite. Les détails varient suivant les ordres. La corniche représente, dans les constructions en pierre, l'extrémité des pièces du plancher dans les constructions en bois.

On donne aussi le nom de CORNICHE à la partie supérieure du piédestal. Sa hauteur est de $\frac{1}{2}$ module dans l'ordre toscan et dans l'ordre dorique, de 10 parties ou minutes dans l'ordre ionique, de 14 parties dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite. Ses détails varient suivant les ordres (Voy. ORDRES).

Dans les constructions modernes, où l'on n'est point assujéti à l'observation rigoureuse des règles relatives à la proportion des ordres, on retrouve toujours néanmoins un ou plusieurs membres analogues à la corniche.

On appelle *corniche architravée* une corniche placée immédiatement au-dessus de la partie horizontale du chambranle d'une porte ou d'une fenêtré (Voy. ces mots).

CORPS FLOTTANTS (ÉQUILIBRE DES). Un corps qui flotte à la surface d'un liquide en repos, est soumis à deux forces : 1° à son poids, force verticale dirigée de haut en bas, appliquée à son centre de gravité; 2° à la poussée du liquide, force verticale dirigée de bas en haut et appliquée au centre de poussée, c'est-à-dire au centre de gravité du liquide déplacé (Voy. PRINCIPE D'ARCHIMÈDE). (Dans les navires, le centre de poussée porte le nom de *centre de carène*.) Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et opposées. Les conditions de l'équilibre sont donc : 1° que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du corps; 2° que le centre de poussée et le centre de gravité du corps soient sur une même verticale.

L'équilibre peut subsister théoriquement, quand ces deux conditions sont remplies, quelle que soit la position relative du centre de poussée et du centre de gravité du corps. Mais l'équilibre peut être stable, instable, ou indifférent (Voy. CORPS PLONGÉS). Pour que l'équilibre soit stable, il suffit que le centre de gravité soit au-dessous d'un certain point auquel on donne le nom de *métacentre* (Voy. STABILITÉ HYDROSTATIQUE, MÉTACENTRE), point qu'il est surtout utile de considérer lorsqu'il s'agit de la stabilité des navires.

Comme application des conditions d'équilibre des corps flottants, nous résoudrons les problèmes qui suivent.

I. *Un prisme homogène flotte de manière que ses arêtes latérales soient verticales; on demande le rapport qui existe entre la partie qui émerge et la partie qui plonge.*

Soit x la partie de l'arête qui émerge et y la partie qui plonge. Désignons par Π le poids du mètre cube de la matière du prisme, et par Π' le poids du mètre cube du liquide; on devra avoir, en appelant B la base du prisme,

$$\Pi B(x+y) = \Pi' B y \quad \text{ou} \quad \Pi(x+y) = \Pi' y,$$

d'où l'on tire $\frac{x}{y} = \frac{\Pi'}{\Pi} - 1$.

Pour le liège, par exemple, dont la densité est 0,24, on aurait

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{0,24} - 1 = \frac{76}{24} = \frac{19}{6}.$$

II. *Un cône homogène flotte de manière que son axe soit vertical; on demande la partie de cet axe qui plonge et celle qui émerge.*

1° Supposons d'abord que le cône flotte le sommet en bas. Soit h sa hauteur et r le rayon de sa base; soit y la partie de l'axe qui plonge, et x le rayon de la section faite au niveau de l'eau; enfin soit Π le poids du mètre cube de la matière du cône et Π' le poids du mètre cube du liquide. On devra avoir

$$\Pi \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \Pi' \cdot \frac{1}{3} \pi x^2 y;$$

mais $\frac{y}{h} = \frac{x}{r}$, d'où $y = \frac{hx}{r}$.

Substituant et simplifiant, on tire de la relation ci-dessus

$$x = r \sqrt[3]{\frac{\Pi}{\Pi'}};$$

par suite

$$y = h \sqrt[3]{\frac{\Pi}{\Pi'}}.$$

On aura ensuite $h-y$ pour la partie de l'axe qui émerge.

2° Supposons en second lieu que le cône flotte le sommet en haut. Soit y la partie de l'axe qui émerge; en conservant toutes les autres notations on devra avoir

$$\Pi \cdot \frac{1}{3} \pi x^2 y = \Pi' \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi x^2 y \right);$$

avec $\frac{y}{h} = \frac{x}{r}$.

On tire de ces deux relations :

$$x = r \sqrt[3]{\frac{\Pi'}{\Pi + \Pi'}} \quad \text{et} \quad y = h \sqrt[3]{\frac{\Pi'}{\Pi + \Pi'}},$$

$h-y$ serait la partie de l'axe qui plonge.

Si, par exemple, le cône est fait d'un bois dont la densité soit 0,9, on aura dans le premier cas

$$y = h \sqrt[3]{\frac{0,9}{1}} = 0,96549.h,$$

et dans le second

$$y = h \sqrt[3]{\frac{1}{1+0,9}} = 0,80738.h.$$

CORPS PLONGÉS (ÉQUILIBRE DES). Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide en repos, il y est soumis à deux forces : 1° à son poids, qui est une force verticale agissant de haut en bas, et appliquée à son centre de gravité; 2° à la poussée du fluide, qui est une force verticale agissant de bas en haut, et appliquée au centre de gravité du volume de fluide déplacé (Voy. PRINCIPE D'ARCHIMÈDE). Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et opposées. Il faut donc : 1° que le poids du corps soit égal à celui du fluide déplacé; 2° que le centre de gravité du corps et le centre de gravité du fluide déplacé soient sur une même verticale.

À la rigueur l'équilibre peut avoir lieu, quand ces deux conditions sont remplies, quelle que soit la situation relative de ces deux centres. Mais pour que

l'équilibre soit *stable*, il faut que le centre de gravité du corps soit au-dessous du centre de poussée, c'est-à-dire au-dessous du centre de gravité du fluide déplacé. En effet, considérons, pour fixer les idées, une sphère lestée à sa partie inférieure, de manière que son centre de gravité soit plus bas que son centre de figure. Si on la déplace un peu de sa position d'équilibre, de manière que ce centre de gravité vienne en G (fig. 1), tandis que le centre de figure C reste au même point, le corps sera soumis à son poids P appliqué en G, et à la poussée égale P' agissant en C; ces deux forces tendent toutes deux à faire tourner la sphère dans le sens indiqué par la flèche, et à la ramener par conséquent à sa position primitive; c'est-à-dire que l'équilibre est

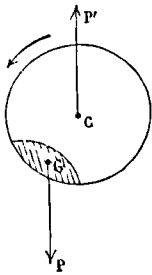


Fig. 1.

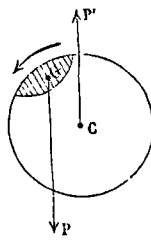


Fig. 2.

stable. Supposons au contraire qu'on ait réalisé l'équilibre en plaçant le point G au-dessus du point C, ce qui est possible; puis qu'on déplace un peu la sphère de manière à faire prendre à son centre de gravité la position G (fig. 2), les deux forces P et P', appliquées l'une en G, l'autre en C, tendront encore à faire tourner la sphère dans le même sens; mais alors le point G s'éloignera de plus en plus de la position d'équilibre; c'est-à-dire que l'équilibre sera *instable*. Les raisonnements seraient les mêmes pour un corps de forme quelconque.

Si l'arrivait que les points G et C se confondissent, ce qui aurait lieu si le corps était homogène, ce corps serait en équilibre dans toutes les positions possibles, et l'équilibre serait *indifférent*. (Voy. AÉROSTATS.)

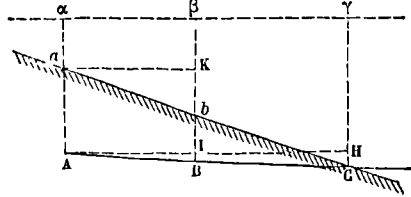
COSMOGRAPHIE (du grec κόσμος, univers, et γράφω, je décris), description de l'univers, c'est-à-dire des corps célestes qui le composent et des mouvements dont ils sont animés. On y fait entrer aujourd'hui l'étude abrégée des instruments et des méthodes d'observation, et l'examen de toutes les questions astronomiques dont la solution n'exige que la connaissance des éléments des sciences. La Cosmographie se confond donc avec l'Astronomie élémentaire. On peut consulter sur ce sujet : l'Exposition du système du monde, de Laplace; le Cosmos, de M. de Humboldt; le Traité de la Sphère, de Rivard; le Cours élémentaire d'Astronomie, de M. Delaunay; les Leçons de Cosmographie, de M. Faye; les Leçons nouvelles de Cosmographie, de M. Garcet; le Traité élémentaire de Cosmographie, de M. Amiot; le Cours lithographié d'Astronomie élémentaire de l'École Polytechnique, etc., etc.

COTE, nombre qu'on écrit à côté de la projection horizontale d'un point, et qui exprime sa distance à

un plan horizontal de comparaison. Par extension on désigne aussi sous le nom de *cote* la distance d'un point du terrain à un plan horizontal fixe. (Voy. NIVELLEMENT, PLANS COTÉS.)

CÔTÉ EXTÉRIEUR, nom donné à un côté quelconque du polygone extérieur qui sert de base au tracé d'une enceinte fortifiée. (Voy. FORTIFICATION.)

COTES ROUGES, différences de niveau entre les divers points du terrain et les points correspondants du profil en long ou du profil en travers d'un projet de route (Voy. ROUTES). Elles sont ainsi nommées parce qu'on les inscrit à l'encre rouge sur les dessins qui servent à l'étude du projet. Si l'on connaît l'ordonnée d'un point du projet par rapport à un plan horizontal de comparaison, et celle du point du terrain situé sur la même verticale, on obtient la cote rouge de ce dernier en retranchant la seconde ordonnée de la première. Si par exemple l'ordonnée Aα d'un point A du projet, par rapport à



un plan horizontal supérieur, est Aα = 9^m,45, et que l'ordonnée aa du point correspondant du terrain, par rapport au même plan horizontal, soit aa = 4^m,39, la cote rouge du point a sera

$$aA = A\alpha - aa = 9^m,45 - 4^m,39 = 5^m,06.$$

Connaissant les ordonnées de deux points correspondants du terrain et du projet, et les pentes par mètre des deux lignes du profil qui représentent ces surfaces, on obtient aisément la cote rouge d'un point du terrain situé à une distance horizontale donnée du premier. Soit b le point dont on veut obtenir la cote rouge; soient P et p les pentes par mètre des lignes AB et ab, et soit d la distance AI ou aK entre les verticales des points a et b. On aura

$$Kb = pd \text{ et } IB = Pd.$$

D'ailleurs

$$bB = KI + IB - Kb = Aa + IB - Kb,$$

$$\text{donc } bB = Aa + d(P - p). \quad [1]$$

Si, par exemple, on a d = 8^m,40, P = 0,04 et p = 0,32,

il viendra

$$bB = 5^m,06 + 8^m,40(0,04 - 0,32) = 2^m,708.$$

Si l'on veut avoir la distance horizontale AH entre la verticale du point a et celle du point C dont la cote rouge est nulle, c'est-à-dire du point où la ligne du projet rencontre la ligne du terrain, on regardera d comme inconnu dans la formule [1], et l'on y remplacera le premier membre par zéro, ce qui donnera

$$0 = Aa + d(P - p),$$

$$\text{d'où } d = \frac{Aa}{p - P}. \quad [2]$$

Dans l'exemple ci-dessus, on aurait

$$d = \frac{5^m,06}{0,32 - 0,04} = 18^m,07.$$

Les formules [1] et [2] s'appliquent à tous les c

pourvu qu'on adopte les conventions ordinaires sur les signes.

Ces formules supposent les pentes p et P connues. Nous rappellerons que pour obtenir l'une quelconque de ces pentes, il suffit de connaître les ordonnées de deux points de la droite correspondante et la distance de ces ordonnées; la pente cherchée s'obtient en divisant par cette distance la différence des deux ordonnées. Sachant, par exemple, que les points a et b ont respectivement pour ordonnées $4^m, 390$ et $7^m, 078$, et que la distance de ces ordonnées est $8^m, 40$, on trouvera

$$p = \frac{7^m, 078 - 4^m, 390}{8^m, 40} = 0,32.$$

Les formules [1] et [2] peuvent être mises sous une forme qu'il est utile de connaître. Soient H' et h' les ordonnées des points A et a ; soient H'' et h'' les ordonnées des points B et b ; soit D la distance entre les verticales Aa et Bb ; soit c' la cote rouge du point a , c'' celle du point b ; c celle d'un point quelconque situé à la distance d de la verticale Aa . On aura d'après ce qui vient d'être dit

$$p = \frac{h'' - h'}{D} \quad \text{et} \quad P = \frac{H'' - H'}{D}.$$

Substituant dans la relation [1], on obtient

$$c = c' + d \cdot \left[\frac{H'' - H'}{D} - \frac{h'' - h'}{D} \right]$$

$$\text{ou} \quad c = c' + \frac{d}{D} (c'' - c'). \quad [3]$$

Substituant de même dans la relation [2], on trouve

$$d = \frac{c' \cdot D}{c'' - c'} = D \cdot \frac{c'}{c'' - c'}. \quad [4]$$

Dans les formules [3] et [4] les pentes ont disparu et il ne reste plus que les cotes rouges et les distances à la première verticale. On obtiendrait directement ces relations par la considération des triangles semblables AaC , BbC . (Voy. LIGNES DE PASSAGE.)

COTIDALES (COURBES) (de l'anglais *tide*, marée), courbes passant par tous les points où la marée a lieu à la même heure. (Voy. MAREES.)

COTON-POUDRE (PROPRIÉTÉS BALISTIQUES DU). Voy. PYROXYLE.

COUCHER D'UN ASTRE, instant où le centre de cet astre traverse le plan de l'horizon pour descendre au-dessous de ce plan. L'heure du coucher d'un astre peut être facilement déterminée par le calcul quand on connaît sa déclinaison, l'heure de son passage au méridien du lieu, et la latitude de ce lieu. Il suffit, en effet, de calculer l'angle horaire de l'astre pour l'instant de son coucher. Or, dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P , le zénith Z et le centre S de l'astre à un instant quelconque, le côté PZ est le complément de la latitude λ du lieu, le côté PS est le complément de la déclinaison D de l'astre, le côté ZS est sa distance zénithale z , et l'angle en P , opposé à ce dernier côté, est précisément l'angle horaire AH ; on a donc par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos z = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D \cdot \cos AH. \quad [1]$$

Mais à l'instant du coucher la distance zénithale z est de 90° ; on a donc $\cos z = 0$, et l'on tire de l'équation ci-dessus

$$\cos AH = -\frac{\tan \lambda \cdot \tan D}{\cos \lambda \cos D}. \quad [2]$$

relation qui fera connaître l'angle horaire; cet

angle converti en temps exprimera le temps écoulé depuis le passage de l'astre au méridien jusqu'à l'instant de son coucher.

Les marins calculent par la même formule le sinus du complément de l'angle horaire, complément auquel on donne le nom de *différence ascensionnelle*, et ils prennent pour règle de convertir cette différence ascensionnelle en temps et de l'ajouter à 6 heures ou de l'en retrancher, suivant que la déclinaison D est de même dénomination que la latitude λ ou de dénomination contraire. L'emploi direct de la formule [2] est plus simple, à moins qu'on ne fasse usage d'une table des différences ascensionnelles (Voy. DIFFÉRENCE ASCENSIONNELLE).

Le calcul indiqué par la formule [2] ne souffre aucune difficulté lorsqu'il s'agit d'une étoile; mais quand il s'agit d'un astre animé d'un mouvement en déclinaison, comme cet élément n'est pas connu pour l'instant du coucher que l'on cherche, on ne peut procéder que par approximations successives. La déclinaison de l'astre est donnée pour Paris et pour midi moyen dans la *Connaissance des temps*; comme on connaît toujours à peu près l'heure du coucher que l'on cherche, on fait une interpolation pour trouver la déclinaison correspondante à l'instant approché de ce coucher, et on introduit cette valeur pour D dans l'équation [2], qui donne une valeur approchée de AH , et par suite une valeur plus approchée de l'heure que l'on cherche; on peut, au moyen de cette valeur plus approchée de l'heure du coucher, calculer par une nouvelle interpolation une nouvelle valeur plus approchée de D , qui, mise dans l'équation [2], donnera une valeur plus approchée de AH , et par suite de l'heure cherchée. Si l'on ne connaissait pas à peu près l'heure du coucher, on pourrait partir de la valeur de D , donnée pour Paris dans la *Connaissance des temps*; en déduire par une interpolation la valeur de D pour l'instant du passage au méridien du lieu (Voy. PASSAGE AU MÉRIDEN), et l'introduire comme première approximation dans la formule [2]; puis continuer comme ci-dessus.

Les calculs qui précèdent se rapportent à l'instant du coucher vrai. Lorsqu'il s'agit du soleil, on peut avoir besoin de connaître l'heure du coucher apparent; il faut alors dans la formule [1] remplacer la distance zénithale vraie z par sa valeur en fonction de la distance zénithale apparente z' , et supposer ensuite cette dernière égale à 90° . Or, en appelant d la dépression, r la réfraction, et p la parallaxe (Voy. ces mots), on a

$$z = z' + d + r - p.$$

On devra donc dans la formule [1] remplacer z par $90^\circ + d + r - p$, et l'on obtiendra AH à l'aide de la méthode de calcul qui donne un angle d'un triangle sphérique connaissant les trois côtés, c'est-à-dire qu'on calculera $\sin \frac{1}{2} AH$, d'où $\frac{1}{2} AH$ et par suite AH .

Si l'on voulait l'heure du coucher apparent de l'un des bords du soleil, il faudrait à la valeur de z ci-dessus ajouter le demi-diamètre apparent ou l'en retrancher suivant qu'il s'agirait du bord inférieur ou du bord supérieur, ce qui reviendrait à remplacer $d + r - p$ par $d + r - p \pm \frac{1}{2} \delta$ en appelant $\frac{1}{2} \delta$ ce demi-diamètre. (Voy. JOUR.)

COUD, changement brusque de direction d'une CONDUITE (Voy. ce mot). Ce changement brusque occasionne toujours une perte de charge, que l'on peut expliquer, sans pouvoir toutefois en donner la mesure. Lorsque une conduite s'infléchit brusquement, comme l'indique la figure 1, les filets placés du côté

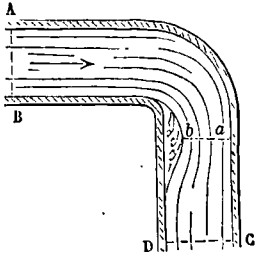


Fig. 1.

extérieur AC sont obligés de suivre la direction de la paroi; mais les filets placés du côté intérieur BD, suivent encore pendant un certain espace, au delà du point d'inflexion, leur direction primitive. Il en résulte un rétrécissement graduel de la section, en sorte qu'au delà du coude le liquide coule par une section *ab* moindre que la section de la conduite. Mais bientôt après le liquide remplit de nouveau la conduite, et dans une certaine section CD recommence à couler par filets parallèles. Il y a donc passage brusque d'une section plus petite *ab* à une section plus grande CD, et c'est ce CHANGEMENT BRUSQUE DE SECTION (Voy. ce mot) qui occasionne la perte de charge.

Dans les expériences de Daubuisson, cet observateur a vu la dépense réduite d'un quart par sept

coude à 45°. Il a toujours vu la résistance croître sensiblement comme le carré de la vitesse, et à peu près comme le carré du sinus de l'angle du coude; en sorte qu'en nommant H la hauteur piézométrique avant le coude, *h* la hauteur piézométrique immédiatement après, *v* la vitesse du fluide, et *i* l'angle du coude, on aurait

$$H - h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 i. \quad [1]$$

Cette formule peut être employée pour les valeurs de *i* comprises entre 20° et 90°; au delà il y a incertitude.

Lorsque l'embranchement se fait à angle droit (fig. 2), la perte de charge, d'après une expérience

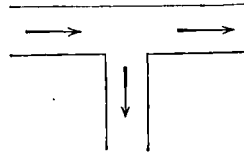


Fig. 2.

de MM. Bélanger et Gényès, serait égale au double de la hauteur due à la vitesse, ce qui exigerait que la formule [1] fût affectée du coefficient 2. Il serait à désirer que de nouvelles études théoriques et expérimentales fussent entreprises sur ce sujet.

Pour les gaz, les variations de pression d'un point à l'autre étant généralement très-faibles, on calcule la perte de charge comme s'il s'agissait d'un liquide de même densité.

COULISSE DE STEPHENSON, mécanisme employé dans les locomotives pour faire varier la détente ou pour renverser la marche. La figure [1]

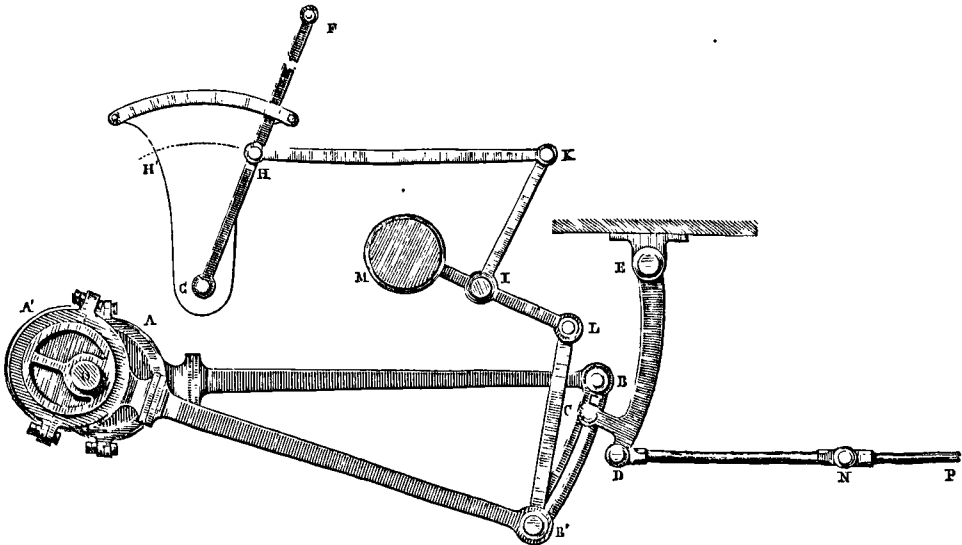


Fig. 1.

représente ce mécanisme. Sur l'essieu O des roues motrices sont montés deux excentriques circulaires A et A', destinés à commander tour à tour le tiroir de distribution correspondant à l'un des cylin-

dres. Ils sont calés en sens inverse, de telle sorte que si l'un d'eux A, marche en avant, l'autre A' marche en arrière, et *vice versa*. Les barres de ces deux excentriques sont articulées avec une cou-

lisse en arc de cercle BB', dans laquelle peut glisser un coulisseau C en acier trempé. Les extrémités de ce coulisseau sont articulées avec une fourche qui embrasse la coulisse, et qui forme l'extrémité inférieure d'un levier CDE, suspendu à un point fixe E pris sous la chaudière. Un levier FG, appelé *levier de changement de marche*, et qui est sous la main du mécanicien, est mobile autour du point G, et agit, par l'intermédiaire de la tringle HK, et de la manivelle KI, sur un axe horizontal I, qu'on appelle l'*arbre de relevage*. Celui-ci porte une manivelle IL qui, par l'intermédiaire de deux *bielles de relevage*, dont une seule LB' est visible sur la figure, agit sur l'extrémité inférieure B' de la coulisse. Il n'y a qu'un levier de changement de marche FG et qu'une tringle HK; mais sur l'arbre de relevage I sont montés deux manivelles KI correspondant à chacun des cylindres, ainsi que deux manivelles IL, et par conséquent quatre bielles de relevage LB', dont deux pour chaque cylindre, et enfin deux coulisses, une pour chaque tiroir de distribution. Un contre-poids M suspendu à l'arbre de relevage I sert à équilibrer les coulisses et les barres d'excentriques, de manière à rendre la manœuvre de l'appareil plus facile. Le levier EDC correspondant à chaque coulisse s'articule à une bielle DN, articulée elle-même en N avec la tige NP du tiroir.

Le jeu de ce mécanisme est facile à comprendre : si l'on tire vers l'arrière l'extrémité F du levier de changement de marche, de manière que, ce levier tournant autour du point G, le point H s'approche de H', les manivelles IK et IL tourneront d'un certain angle autour de l'arbre I; les bielles LB' soulèveront l'extrémité inférieure de la coulisse, et le coulisseau C, sans cesser d'être à la hauteur de la tige NP du tiroir, aura glissé dans la coulisse.

Or, d'après la manière dont les excentriques sont calés sur l'essieu O, l'extrémité B de la coulisse marche toujours en sens contraire de l'extrémité B', en sorte que la coulisse oscille sans cesse autour de son milieu. Le coulisseau prend donc un mouvement de va-et-vient d'une amplitude d'autant moindre qu'il est plus voisin du milieu de la coulisse. Dans la position indiquée sur la figure, c'est l'excentrique A qui commande le tiroir; on le désigne sous le nom d'*excentrique de marche en avant*; l'amplitude du mouvement alternatif du tiroir est alors la plus grande possible. Mais si à l'aide du levier FG on soulève la coulisse de manière que le coulisseau se rapproche du milieu, l'amplitude du mouvement du tiroir diminuera; les lumières d'admission resteront moins longtemps ouvertes, et la détente commencera plus tôt. On comprend donc comment à l'aide de la coulisse de Stephenson on peut faire varier la détente, depuis une limite inférieure qui répond à la disposition indiquée sur la figure, jusqu'à ce que la durée de la détente soit aussi longue qu'on voudra par rapport à la durée totale du mouvement du tiroir. Mais il faut bien remarquer qu'à mesure que la détente augmente, les orifices d'admission se rétrécissent, et la machine agit avec moins de puissance. Si l'on amenait la coulisse à une position telle que le coulisseau occupât le milieu de la distance BB', le tiroir deviendrait immobile, et la vapeur cesserait de faire mouvoir les pistons.

Lorsqu'on veut *renverser la marche*, il faut d'a-

bord fermer le régulateur, pour que la vapeur cesse d'affluer dans les cylindres; on agit alors sur le levier de changement de marche, de manière à amener l'extrémité inférieure B' de la coulisse en contact avec le coulisseau; puis on rouvre le régulateur. La vapeur vient agir de nouveau sur les pistons, et la marche recommence; mais elle a lieu en sens contraire, attendu que le mouvement de l'excentrique A' qui commande alors le tiroir, est l'inverse de celui de l'excentrique A. L'excentrique A' se nomme pour cette raison *excentrique de marche en arrière*.

Le mouvement de la coulisse BB' est très-complicé; il a été étudié d'une manière approfondie par M. Phillips, qui a fait voir que le centre instantané est placé sur la bielle LB', au point où cette bielle est rencontrée par la droite qui joint le point O au point de rencontre des deux barres d'excentrique.

La coulisse de Stephenson est un mécanisme très-ingénieux, et qui rend de grands services dans la manœuvre des locomotives. Il n'est cependant pas exempt de défauts. On vient de voir qu'en augmentant la détente on diminue les orifices d'admission de la vapeur et par conséquent la puissance de la machine. La coulisse présente un autre inconvénient relatif à l'*AVANCE DU TIROIR* (*Voy. ce mot*). Soit OB (fig. 2) la direction de la tige du tiroir prolongée,

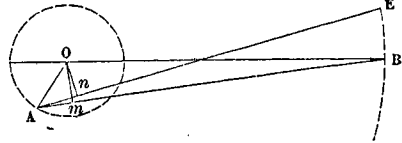


Fig. 2.

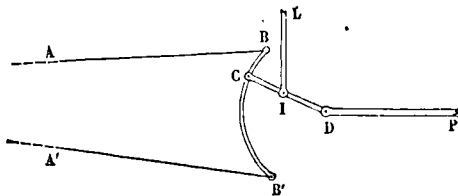
O la projection de l'axe de rotation; AB la direction de la barre de l'excentrique de marche en avant correspondante au point mort de la manivelle le plus éloigné. Si l'on joint OA, et qu'on abaisse sur AB la perpendiculaire Om, on aura en mOA l'avance angulaire du tiroir. Soit AE la direction de la même barre d'excentrique lorsque la coulisse a été relevée d'une certaine quantité pour augmenter la détente; la nouvelle avance angulaire du tiroir sera l'angle nOA, On étant la perpendiculaire abaissée du centre O sur OE. Or l'angle nOA est plus grand que mOA; on en conclut que l'avance angulaire du tiroir augmente quand on augmente la détente.

Si l'on fait la même construction pour le point mort le plus rapproché, on arrive encore à la même conclusion; mais on reconnaît que l'avance angulaire est toujours moindre pour ce second point que pour le premier. L'avance angulaire n'est donc pas la même des deux côtés du piston. Et si l'on règle le tiroir de manière que ce défaut disparaisse, on trouve que l'ouverture maxima des lumières n'est pas la même sur les deux faces du piston. Ces irrégularités sont encore accrues par cette circonstance que la ligne décrite par le coulisseau n'est pas une ligne droite, mais bien un arc de cercle décrit du point E (fig. 1) comme centre.

L'avance angulaire n'est pas non plus la même pour la marche en arrière que pour la marche en avant. (*Voy. pour plus de détails le Traité élémentaire des chemins de fer*, de M. Perdonnet; voyez aussi l'art. COULISSE RENVERSÉE.)

COULISSE RENVERSÉE, modification apportée à

la COULISSE DE STEPHENSON (Voy. ce mot). Dans ce système représenté ci-contre, la tige DP du tiroir s'articule avec une pièce CD, dont l'extrémité C s'engage à l'aide d'un bouton dans la coulisse BB',



laquelle a, dans ce cas, la forme d'un arc de cercle ayant pour centre le point d'articulation D. La bielle de relevage LI n'agit pas ici sur la coulisse, mais sur la pièce CD; en sorte que l'opération du relevage ne déplace pas la tige du tiroir, comme cela a lieu avec la coulisse de Stephenson. La coulisse n'en a pas moins son effet ordinaire. Le seul inconvénient de ce système est d'exiger un plus grand emplacement.

COUP DE BÉLIER, nom donné par les ingénieurs au choc qu'une colonne liquide en mouvement exerce contre les parois de la conduite dans laquelle elle se meut, lorsqu'on vient à fermer brusquement l'orifice par lequel elle s'écoulait. (Voy. BÉLIER HYDRAULIQUE, RÉSERVOIR D'AIR.)

COUPE, dessin géométral représentant l'intersection d'un édifice par un plan vertical parallèle à ses faces latérales. On multiplie les coupes autant qu'il est nécessaire pour faire connaître les principales dispositions de l'édifice.

Un mode de représentation analogue s'applique aux constructions de toute espèce, aux machines, etc. (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS.)

COUPE DES PIERRES, branche de la Géométrie appliquée qui a pour objet l'étude des formes qu'il convient de donner aux pierres de taille selon le genre de construction où elles doivent entrer et selon la place qu'elles doivent y occuper. La forme générale de l'édifice étant géométriquement définie, la nature des matériaux qu'on emploie, et les conditions de stabilité auxquelles le bâtiment doit satisfaire, déterminent les règles à suivre pour diviser le massif en parties juxtaposées dont chacune est formée d'un bloc distinct; le mode de division employé dans chaque partie de l'édifice est ce qu'on nomme l'appareil propre à cette partie de la construction. La forme de chacune des pierres qui doivent entrer dans le bâtiment se trouvant ainsi arrêtée, la Géométrie fournit des méthodes pour donner à chaque bloc la forme qu'il doit avoir; c'est ce qu'on appelle plus particulièrement la *taille*, ou l'application du *trait* sur la pierre.

Les surfaces le plus généralement employées dans les constructions sont le plan, le cylindre, le cône, les surfaces réglées en général, et les surfaces de révolution. Ce n'est qu'exceptionnellement et dans des cas assez rares que l'on fait usage de surfaces d'une autre nature, de l'ellipsoïde à trois axes inégaux par exemple. Les conditions auxquelles l'appareil doit satisfaire sont en général d'éviter les angles trop aigus, et de faire en sorte que les surfaces qui servent de joints soient, autant qu'il est possible, normales aux surfaces extérieures. L'épure

d'un appareil se trace le plus souvent en vraie grandeur sur un mur bien plan; elle doit fournir toutes les données nécessaires pour guider l'ouvrier chargé de la taille, telles que le contour des faces planes, et, selon le besoin, le développement des faces cylindriques, coniques, etc., indépendamment des projections de toutes les faces. On trouvera le tracé des principales épures de coupe de pierre aux articles : MURS (*droits, biais, en talus, rampants*), ENCOIGNURES, PLATES-BANDES, VOÛTES-PLATES, TOUR RONDE (*droite ou en talus*), BERCEAUX (*droits ou biais*), DESCENTE (*droite ou biaisée*), TROMPE (*cylindrique ou conique*), VOÛTES (*d'arête, en arc de cloître, conique, sphérique, elliptique*), PENDENTIFS, NICHE SPHÉRIQUE, VOÛTE D'ARÊTE EN TOUR RONDE, PORTE (*droite, biaisée, en talus, cylindrique, conique*), EMBRASURES, LUNETTE (*droite, biaisée, cylindrique, conique*), CŒIL DE BŒUF, BIAIS PASSÉ, ARRIÈRE-VOUSURES (*de Marseille, de Montpellier, conique*), ESCALIERS (*à noyau plein, vis-à-jour, irréguliers*), LIMONS, VIS-SAINT-GILLES, PONTS BIAIS, PÉNÉTRATIONS, TROMPES.

Les pierres employées aux constructions sortent des carrières sous la forme d'un parallépipède rectangle. Les faces qui, dans la carrière, étaient horizontales, portent le nom de *lits de carrière*; c'est dans le sens perpendiculaire à ces faces que la pierre résiste le mieux à la pression; et l'on doit, autant qu'il est possible, avoir égard à cette circonstance dans la disposition que l'on donne à la pierre. La face suivant laquelle une pierre s'applique sur les pierres précédemment posées se nomme son *LIT DE POSE*; il coïncide très-fréquemment avec le lit de carrière. Les faces planes qui doivent rester à découvert portent le nom de *parements*; si une pierre a deux parements dans le sens de sa longueur, elle prend le nom de *parpaing*; on lui donne le nom de *boutisse*, si les parements sont aux *extrémités*; une pierre qui n'a qu'un parement est un *carreau*; une pierre sans parement, et qui ne sert que de remplissage, porte le nom de *libage*. Aussi l'appareilleur, chargé de diriger le travail des ouvriers, a-t-il le soin de marquer à l'avance, par des signes connus d'eux, le lit de pose, la face opposée, ou *lit de dessus*, et les parements. Pour le lit de pose on emploie le signe 1 (fig. 1), pour le lit de dessus, le signe 2, pour les parements le signe 3.

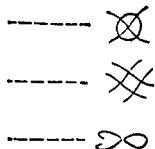


Fig. 1.

Pour dresser un parement, c'est-à-dire pour obtenir une face plane, on peut employer plusieurs méthodes; nous nous bornerons à faire connaître la suivante. L'ouvrier trace d'abord à la règle une droite AB (fig. 2) près du bord d'une des faces de la pierre, et pratique le long du trait une petite entaille plane, de 1 à 2 centimètres de large qu'on appelle une *ciselure*. Sur cette ciselure il pose sa règle de champ; puis il applique sur la face opposée une seconde règle CD, dont il fait varier la position jusqu'à ce que son arête supérieure soit dans un même plan avec l'arête inférieure de la première, ce dont il s'assure en visant le long de CD. Il trace alors une seconde ciselure le long de CD, puis une autre suivant BD. Il fait ensuite sauter l'excédant de pierre, de telle manière qu'une règle

posée sur les ciselures coïncide dans toutes les directions avec la surface obtenue. Il est certain alors que cette surface est plane.

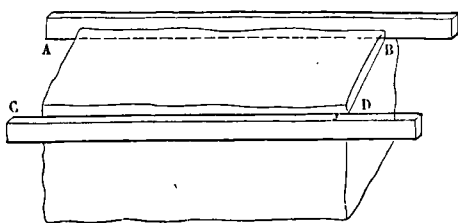


Fig. 2.

On emploie pour tailler les pierres deux méthodes connues sous le nom de *taille par équarissement* et *taille par beveau*. La première, qui est la plus exacte, fait subir à la pierre une série de transformations qui, en général, peuvent être résumées de la manière suivante. On choisit d'abord un bloc prismatique capable de contenir la pierre qu'il s'agit de tailler; on se guide ordinairement pour cela sur la projection de la pierre, soit sur un plan horizontal, soit sur un plan vertical, soit sur tout autre plan auxiliaire plus commode, comme par exemple le plan de la section droite d'une voûte cylindrique. On donne à la pierre une face plane sur laquelle on trace la projection dont il s'agit, laquelle peut être rectiligne ou curviligne; et, par *dérobement*, c'est-à-dire en enlevant avec soin l'excédant de pierre, on lui donne la forme d'un prisme droit ayant cette même projection pour base; ses faces sont alors planes ou cylindriques. Alors, soit en s'aidant de *panneaux* en matière flexible, comme du carton ou du fer-blanc mince, taillés à l'avance d'après l'épure, et qu'on applique sur les faces planes ou cylindriques de la pierre, soit en prenant les mesures convenables sur l'épure elle-même, on trace sur ces faces les lignes suivant lesquelles elles sont coupées par les faces qui ne sont pas encore obtenues. Le plus souvent ces dernières sont des surfaces réglées; et c'est en s'aidant, en effet, d'une règle appliquée sur les lignes déjà tracées que l'on fait sauter l'excédant de la pierre, et qu'on lui donne enfin la forme qu'elle doit conserver. On conçoit qu'il serait impossible de renfermer dans une formule unique les méthodes très-diverses qui peuvent conduire au résultat; mais, en général, elles se réduisent à des opérations du genre de celles dont il vient d'être question; et l'on en trouvera de nombreux exemples aux articles cités.

La *taille par beveau* consiste à donner à la pierre une première face plane, de laquelle on déduit toutes les autres au moyen des angles qu'elles font avec la première et entre elles. Elle tire son nom de l'instrument nommé *beveau* qui sert à mesurer les angles dièdres, et qui a beaucoup d'analogie avec la fausse-équerre. Il en diffère en ce que l'ouvrier le construit pour l'usage particulier qu'il en veut faire; ce sont ordinairement deux lattes ou règles clouées ensemble et faisant entre elles l'angle qu'il s'agit d'exécuter; quelquefois l'une des branches destinées à s'appliquer sur une surface courbe, a elle-même la forme courbe de cette surface; lorsqu'un beveau doit servir un grand nombre de fois, on le construit en fer. On comprend que la *taille par beveau* ne soit pas susceptible d'une

grande exactitude, parce que les erreurs inévitables vont en s'accumulant, et que les dernières faces construites peuvent différer notablement de ce qu'elles devraient être. Mais cette méthode offre l'avantage de n'exiger aucune taille préparatoire; l'ouvrier n'a à dresser que les faces qui doivent être conservées par la pierre; et il peut se dispenser de tailler celles qui sont tournées vers l'intérieur et ne sont pas des faces de joint. Aussi cette méthode est-elle préférée par les entrepreneurs qui se préoccupent avant tout de leurs intérêts. Mais il y a des cas nombreux où elle serait tout à fait insuffisante au point de vue de l'exactitude; cela arrive toutes les fois que la forme à donner à la pierre est contournée, lorsque, par exemple, certaines faces sont des surfaces réglées très-courbes.

Pendant longtemps la coupe des pierres n'a offert qu'une suite de procédés spéciaux sans lien commun; tel est l'esprit du *Traité d'Architecture* de Philibert Delorme (1576), des *Secrets de l'Architecture* de Mathurin Jousse (1642) revu par Lahire en 1702, de *l'Architecture des voûtes* par le P. Durand (1643), du *Traité de coupe des pierres*, de Delarue (1728). Cependant, dès 1643, la *Pratique du trait à preuves* de M. Desargues pour la coupe des pierres et *l'Architecture*, ouvrage publié par Abraham Bosse, avait montré l'application des principes de la géométrie à la coupe des pierres, et en 1738 Frézier publiait un *Traité de Stéréotomie*, où la coupe des pierres est expliquée par la géométrie. Mais c'est Monge qui, dans ses leçons à l'école de Mézières, de 1770 à 1784, a fixé les principes de cette science (*Voy. la préface du Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie).

On peut consulter sur la coupe des pierres, indépendamment des ouvrages cités plus haut, le *Traité de Géométrie descriptive* d'Hachette, le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, les *Applications de la Géométrie descriptive* d'Olivier, le *Cours de Mathématiques à l'usage de l'ingénieur civil* (Coupe des pierres) par J. Adhémar, l'ouvrage de M. Buck, ingénieur anglais, sur les *ponts biais*, traduit dans le *Manuel des ponts et chaussées*, et le *Mémoire* de M. de la Gournerie sur le même sujet, inséré dans les *Annales des ponts et chaussées* (1851).

COUPES, nom donné aux joints d'une voûte (*Voy. ce mot*), ou aux lignes qui les représentent en projection.

COUPLE, système de deux forces parallèles, égales et de sens contraire, appliquées à un même corps solide. On démontre (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*) qu'un couple ne saurait être remplacé par une force unique. C'est donc une cause de mouvement d'une nature particulière. D'après le principe sur le *mouvement du centre de gravité* (*Voy. CENTRE DE GRAVITÉ [mouvement du]*), un couple appliqué à un corps solide libre et en repos ne saurait déplacer son centre de gravité, d'où il résulte qu'il ne peut imprimer à ce corps qu'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce centre. M. Poinsoy a démontré dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps* que cet axe est le diamètre conjugué à la direction du plan du couple dans l'*ellipsoïde central* obtenu en menant par le centre de gravité une série de droites sur chacune desquelles on prend, à partir de ce centre, une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie du

corps par rapport à cette droite. L'effet d'un couple est donc d'une nature assez complexe, et il exige pour être compris, des connaissances supérieures aux éléments. L'ingénieuse Statique de M. Poinso, fondée en grande partie sur la considération des couples, est donc un élégant tour de force, qui restera comme un modèle de conception neuve et d'exposition correcte, mais qui ne pouvait avoir de succès durable dans l'enseignement, parce que les commençants, qui se font assez bien l'idée d'une force, auraient besoin d'une instruction beaucoup plus étendue, pour se faire une idée nette d'un couple. La considération des couples est restée sans utilité dans les applications, parce qu'en effet on n'y rencontre jamais de couples.

M. Poinso a donné le nom de *couple de rotation* à l'ensemble de deux rotations égales et de sens contraire autour de deux axes parallèles. On fait voir qu'un couple de rotation équivaut à une translation. (Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS.)

COUPLE DE ROTATION, ensemble de deux rotations simultanées, égales et parallèles, mais de sens contraire (Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS). Un couple de rotation équivaut à une translation et ne peut être réduit à une rotation unique. La considération des couples de rotation est due à M. Poinso.

COUPLES, pièces de la membrure de la coque d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Leur nom vient de ce qu'ils sont formés de deux demi-couples juxtaposés, dont les épaisseurs réunies forment l'épaisseur totale. Les couples sont symétriques par rapport au longitudinal; les deux parties séparées par ce plan peuvent être dans un même plan perpendiculaire à la quille; c'est ce qui a lieu dans la maîtresse partie; le couple prend alors le nom de *couple droit*; ces deux parties peuvent être dans des plans verticaux différents, mais également inclinés par rapport à la quille; c'est ce qui a lieu vers l'avant; le couple prend alors le nom de *couple dévoyé*.

L'avantage des couples dévoyés consiste dans l'économie du bois, et dans une plus grande solidité de la membrure. En effet, les flancs du navire ont une inclinaison de plus en plus grande par rapport à la quille, à mesure qu'on approche de la proue. Soit $abcd$ (fig. 1) la section horizontale d'un couple

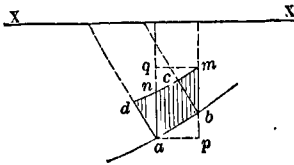


Fig. 1.

dévoyé faite à la flottaison, par exemple. Si l'on voulait le remplacer par un couple droit ayant la même épaisseur normale, il faudrait lui donner pour section le parallélogramme $abmn$, dont les côtés an et bm sont perpendiculaires au longitudinal. Or il est aisé de voir que, les bois qu'on emploie ayant ordinairement une section rectangulaire, on pourra travailler les allonges du couple dévoyé

avec des bois ayant la section $abcd$ à peu près, tandis que les allonges du couple droit devraient être prises dans des bois ayant au moins la section $apmq$ beaucoup plus grande que $abcd$; voilà pour l'économie du bois. En second lieu, les chevilles qui servent de lien entre le bordage et la membrure devant avoir une direction normale à la coque, il pourrait arriver, si l'on adoptait le couple droit, qu'une cheville enfoncée par un point de ab voisin de a allât ressortir par la face adjacente an , tandis que si c'est le couple dévoyé, elle ressortira par la face cd opposée à ab , et pourra être rivée sur cette face opposée; et il est évident que cette seconde disposition offrira beaucoup plus de garanties au point de vue de la solidité.

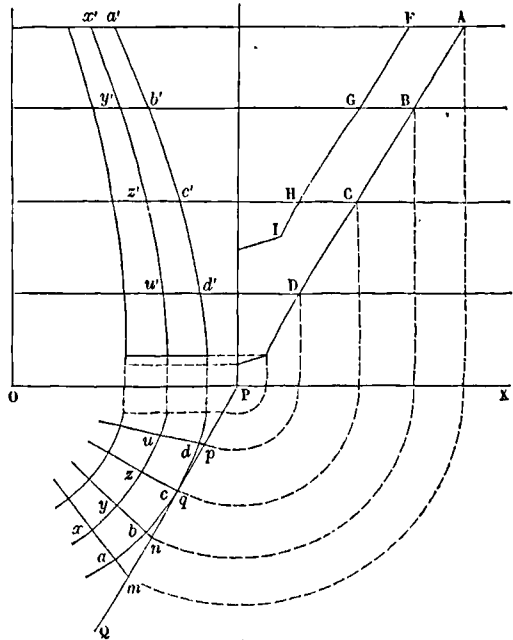


Fig. 2.

Quelques couples de la partie arrière sont également dévoyés. Dans les bâtiments de construction moderne, et particulièrement dans les navires à poupe ronde, on fait usage de couples dévoyés dont la partie inférieure est cylindrique, c'est-à-dire que, dans cette partie, les faces avant et arrière, au lieu d'être planes, sont des cylindres à génératrices verticales. L'avantage de cette disposition est d'offrir un meilleur clouage, et de permettre de donner plus facilement aux couples une direction normale à la coque. Les allonges supérieures se travaillent comme pour les autres couples; il n'y a que la partie cylindrique qui exige un travail particulier. Supposons une demi-varangue donnée par sa projection horizontale en $abcdxyz$ et $a'b'c'd'x'y'z'u'$ (fig. 2); et soient $ax, a'x'$; $by, b'y'$; $cx, c'x'$; $du, d'u'$; les projections des intersections de la face externe avec une série de plans horizontaux. On mène un plan vertical PQ tangent à la face cylindrique avant, vers sa partie moyenne; on prolonge jusqu'à leur rencontre avec ce plan les droites ou lignes d'eau $ax,$

$a'x'$; by , $b'y'$; etc., dont les traces détermineront sur ce plan une certaine courbe répondant à l'arête extérieure de la face avant. On se procure de la même manière une seconde courbe répondant à l'arête intérieure de la même face. On rabat le plan tangent sur le longitudinal, avec les deux courbes ABCD, FGHI qui y ont été tracées; et ces deux courbes servent à construire le gabarit d'après lequel la pièce devra être travaillée. Pour cela, on lui donne d'abord une face plane, qui représente le plan tangent. On applique le gabarit sur cette face, et l'on y trace les deux courbes ABCD, FGHI, ainsi que les directions des lignes d'eau qui ont servi à les déterminer. Les angles qui servent à équarrer la face externe de la demi-varangue sont les angles de ces lignes d'eau avec le plan tangent, c'est-à-dire les angles Pmx , Pny , Ppz , Pqu . Quand cette face externe est travaillée, on y porte, sur les lignes d'eau, les longueurs ma , mx ; nb , ny ; pc , pz ; qd , qu ; qui y détermineront les arêtes avant et arrière. On opère de même pour la face interne; puis on enlève le bois en excédant. Il ne reste plus qu'à pratiquer à la partie inférieure de la demi-varangue, les entailles qui doivent servir à l'assembler avec le massif arrière ou avant auquel elle correspond. Comme vérification, le fil à plomb doit s'appliquer exactement sur toute la surface cylindrique avant ou arrière quand la demi-varangue est en place; et un gabarit pris sur la courbe $abcd$ pour la face avant, ou sur la courbe $xyzu$ pour la face arrière, doit s'appliquer à toutes les hauteurs sur cette même surface, quand on le présente dans un plan horizontal.

Lorsque les dimensions de la pièce à travailler sont trop faibles pour qu'on puisse y trouver le plan tangent, on y supplée par un plan tangent auxiliaire construit avec des règles, ou par tout autre moyen analogue.

COUPOLE, voûte sphérique formant la face intérieure d'un dôme (Voy. ce mot).

COUPURE, tranchée faite dans toute la hauteur du massif d'un ouvrage de fortification pour en détacher une partie; par extension, on donne le nom de coupure à la partie détachée elle-même. On pratique quelquefois des coupures aux faces des demi-lunes qui ont un réduit; cette coupure empêche l'assiégeant, maître du saillant de la demi-lune, de venir s'établir à l'extrémité des faces pour chasser l'assiégé des places d'armes rentrantes. On ne se contente pas d'établir une solution de continuité entre les deux parties de la face coupée; on élève, sur la partie détachée, un parapet transversal, derrière lequel les défenseurs peuvent tirer sur le terre-plein de la demi-lune. On donne à cette face en retour 4 mètres d'escarpe; le fond du fossé de la coupure doit être d'à peu près autant au-dessus du fond du fossé du réduit, pour empêcher l'assaillant d'atteindre le pied de l'escarpe de la coupure. On ferme quelquefois ce fossé du côté de la campagne par un mur faisant suite à l'escarpe de la demi-lune; mais cela n'est pas indispensable. Quelquefois on se contente de le relever en glacis du côté de la campagne. Comme le parapet transversal est exposé aux coups de l'artillerie ennemie, on lui donne 6 mètres d'épaisseur; mais afin de donner plus d'espace aux défenseurs de la coupure, on peut réduire à 4 mètres l'épaisseur du parapet qui est

en prolongement de la face de la demi-lune. Le fossé de la coupure ne peut être flanqué que par le réduit.

Les coupures de demi-lune ont été imaginées par Cormontaigne; elles ralentissent les progrès de l'assaillant et favorisent les retours offensifs de la garnison. Mais ces petits ouvrages ne peuvent avoir une grande valeur par eux-mêmes, et ne sont propres qu'à loger un petit nombre de tirailleurs. (Voy. pour plus de détail les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

COURANT, mouvement général des eaux de la mer vers un point déterminé de l'horizon. Ce mouvement, dû aux inégalités de température à la surface des eaux, à l'action des marées, aux vents généraux, etc., a pour effet d'emporter le navire dans une direction et avec une vitesse qui sont celles du courant lui-même, indépendamment du mouvement dont le navire est animé par rapport à la masse d'eau dans laquelle il flotte. La vitesse propre du navire, due à l'action du vent sur les voiles ou à celle d'un propulseur quelconque, se compose donc avec la vitesse du courant pour donner une vitesse résultante, qui est celle dont le navire est réellement animé à la surface des mers. Si AB (fig. 1) re-

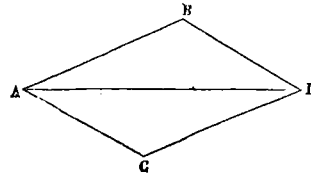


Fig. 1.

présente la vitesse propre v du navire, et AC la vitesse u du courant, la diagonale AD du parallélogramme ABDC construit sur AB et AC représentera la vitesse résultante w . Si AB représentait, non plus la vitesse propre du navire, mais le chemin parcouru dans le temps t en vertu de la vitesse v , c'est-à-dire vt , et que AC représentât le chemin que le navire aurait parcouru dans le même temps, entraîné par le courant seul, c'est-à-dire ut , AD représenterait le chemin réel wt parcouru par le navire à la surface des eaux. On peut remarquer que l'effet du courant, quant au déplacement définitif du navire, est le même que si, indépendamment du chemin AB parcouru en vertu de son mouvement propre, il avait parcouru en outre le chemin BD, égal à AC, en vertu de la vitesse du courant. Il suffit donc, pour avoir égard à l'influence d'un courant dont la direction et la vitesse sont connues, d'ajouter aux divers chemins partiels parcourus par le navire, et qui ont été déterminés par le LOCH et la BOUSSOLE (Voy. ces mots), un chemin partiel de plus dans la direction et avec la vitesse du courant, et calculé pour le temps pendant lequel on a été sous son influence. (Voy. RÉDUCTION DES ROUTES.)

Il peut arriver au contraire qu'ayant mesuré avec soin la vitesse du navire et déterminé exactement la direction de sa route, le point obtenu au bout d'un temps déterminé par estime ne concorde pas avec celui que donnent les observations astronomiques. Si la différence est notable, elle doit être attribuée à un courant, dont on peut alors déterminer la direction et la vitesse. Supposons que l'estime donne le point A (fig. 2), que les observations

astronomiques donnent le point B. Si t est le temps écoulé depuis la dernière estime, $\frac{AB}{t}$ sera la vitesse du courant. Menons AH parallèlement à l'équateur et BH dans le sens du méridien; la distance AB

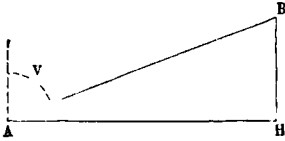


Fig. 2.

étant supposée peu considérable, le triangle ABH pourra être considéré comme un triangle rectiligne rectangle en H. En appelant V l'angle que le courant fait avec le méridien du point A (ou du point B), on aura donc

$$\text{tang } V = \frac{AH}{BH}.$$

Mais BH est la différence en latitude des points A et B; et AH est sensiblement égal à la différence en longitude de ces mêmes points, multipliée par le cosinus de la latitude moyenne. En nommant donc $\Delta\lambda$ la différence en longitude, λ_m la latitude moyenne, et ΔL la différence en longitude, on aura

$$\text{tang } V = \frac{\Delta L \cos \lambda_m}{\Delta\lambda}.$$

On connaîtra ainsi la vitesse et la direction du courant.

C'est à l'aide de calculs de ce genre que le lieutenant Maury a déterminé un nombre considérable de courants, et dressé la collection de cartes qu'il a publiées sous le nom de *Wind and current charts*, avec un volume de texte ayant pour titre : *Explanations and sailing directions to accompany the wind and current charts*. L'immense travail de M. Maury a été le point de départ des travaux d'ensemble qui s'exécutent sur les vaisseaux des principales nations d'Europe depuis la conférence tenue à Bruxelles en 1853, et qui ont pour objet la connaissance des moindres particularités relatives aux divers parages du globe. L'ouvrage du lieutenant Maury a été mis à la portée des lecteurs français dans une brochure intitulée : *Explication et usage des WIND AND CURRENT CHARTS*.

COURANT, nom donné à l'un quelconque des brins de la corde d'un PALAN (Voy. ce mot) qui vont d'une poulie de l'une des mouffes à une poulie de l'autre moufle.

COURBE A LONGUE INFLEXION, courbe décrite par le point d'articulation de la bielle et de la tige à guider, dans le système BALANCIER ET CONTREBALANCIER (Voy. ce mot. Voyez aussi PARALLÉLOGRAMME DE WATT).

COURBE DE DÉPLACEMENT, courbe dont l'usage remplace un TABLEAU DE DÉPLACEMENT (Voy. ce mot, et ECHELLE DE SOLIDITÉ).

COURBE DE JOUR, projection horizontale de la rampe d'un escalier à jour; c'est une courbe parallèle à la ligne de foulée et ayant même développée que cette courbe (Voy. VIS-A-JOUR).

COURBE D'ENTRÉE, l'une des deux courbes dont se compose l'intersection de deux surfaces lorsqu'il y a PÉNÉTRATION (Voy. ce mot. Voyez aussi INTERSECTIONS DE SURFACES). Quand les surfaces qui se ren-

contrent sont du second degré, si la courbe d'entrée est plane, il en est de même de la courbe de sortie. Ainsi, un cône oblique qui pénètre dans une sphère suivant un premier cercle, en sort nécessairement suivant un autre cercle.

COURBE DE POSE, courbe que l'on adopte pour le cintre d'une voûte (Voy. CINTRE), et qui est réglée de telle sorte qu'après le DÉCINTREMENT (Voy. ce mot) l'intrados de la voûte prenne la forme qu'elle doit avoir.

COURBE DE RÉGLEMENTATION, courbe qui règle les mouvements simultanés du tiroir et du piston dans les machines à vapeur. On lui donne quelquefois le nom de *courbe en œuf*. (Voy. AVANCE DU TIROIR.)

COURBE D'ERREUR, courbe qui a pour abscisses les hypothèses faites sur la valeur d'une inconnue, et pour ordonnées les erreurs résultant de ces hypothèses. On emploie généralement les courbes d'erreur pour le calcul des quantités qui ne sont pas susceptibles d'être évaluées rigoureusement, et dont on a une valeur approchée. On en fait aussi usage en Géométrie descriptive, pour la détermination de certains points qui ne peuvent être obtenus directement, comme par exemple, dans certains cas, le point le plus haut et le point le plus bas de l'intersection de deux surfaces (Voy. INTERSECTIONS DE SURFACES).

Le tracé d'une courbe d'erreurs revient au fond à la résolution graphique d'une équation. Si $\varphi(x) = 0$ est la relation à laquelle une grandeur inconnue x doit satisfaire, l'équation

$$y = \varphi(x)$$

sera l'équation de la courbe d'erreur. La valeur de x pour laquelle l'erreur y est nulle, est la vraie valeur de cette inconnue.

Pour construire la courbe, on attribue à x des valeurs, on en déduit les valeurs correspondantes de y , on construit les points qui ont pour coordonnées les couples de valeurs de x et de y , et par les points ainsi obtenus on fait passer un trait continu: c'est la courbe d'erreur. Si les valeurs de x ont été convenablement choisies, il y en aura deux consécutives qui donneront pour y des valeurs de signes contraires; la courbe d'erreur passera donc d'un côté à l'autre de l'axe des abscisses, et coupera cet axe en un point, dont l'abscisse sera la valeur cherchée de l'inconnue.

Dans les applications, l'inconnue que l'on cherche n'est ordinairement susceptible que d'une seule valeur, en sorte qu'il n'y a jamais d'ambiguïté.

Quand on emploie une courbe d'erreur pour résoudre un problème graphique, il faut choisir les quantités x et y de manière que, pour de légères variations de x , l'erreur y varie entre d'assez grandes limites. Ce choix dépend de la nature du problème, et l'on comprend qu'on ne puisse donner aucune règle à cet égard.

Afin d'en donner un exemple, supposons qu'il s'agisse de mener une normale commune à deux courbes AB, CD (fig. 1) auxquelles on sait mener la tangente.

On reconnaîtra toujours à la simple vue dans quelle région des courbes données doit se trouver la normale demandée. Dans cette région, prenons sur l'une AB des deux courbes un point I. Menons en ce point la tangente I*t*, et la normale I*n*,

qui rencontrera en un point 1' la seconde courbe CD; menons à cette courbe la tangente au point 1'. Si elle était parallèle à la tangente 1.t₁, le problème serait résolu, et 1.1' serait la normale cherchée.

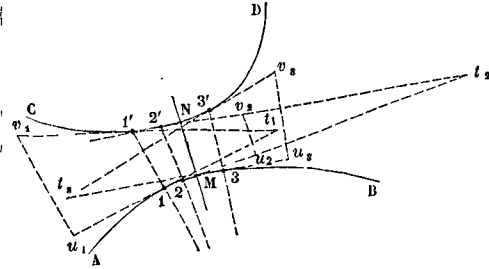


Fig. 1.

Mais il n'en sera pas généralement ainsi; et les tangentes en 1 et 1' se rencontreront en un point t₁. A partir de ce point, prenons sur la tangente une longueur t₁ u₁ égale à une longueur arbitraire mais donnée, que nous désignerons par l. Enfin au point u₁ élevons sur la première tangente la perpendiculaire u₁ v₁ terminée à la seconde.

La rencontre des deux tangentes ayant lieu vers la droite, on en conclut que le point cherché sur la courbe AB n'est pas le point 1, mais doit être situé à la droite de ce point. Prenons donc un point 2 sur AB, et faisons pour ce point les mêmes constructions; c'est-à-dire menons la tangente 2.t₂ et la normale 2.2'; au point 2' où cette normale rencontre CD menons-lui une tangente, qui rencontrera la première en un point t₂; prenons u₂ t₂ égal à l, et élevons sur 2.t₂ la perpendiculaire u₂ v₂.

La rencontre des deux tangentes ayant encore lieu à droite, le point cherché est à droite du point 2. Prenons sur AB un point 3 à droite de 2; et faisons encore les mêmes constructions. Cette fois les tangentes 3.t₃ et 3'.t₃ menées aux points 3 et 3' se rencontrent en t₃, à gauche. Prenons toujours t₃.u₃ égal à l, et élevons sur 3.t₃ la perpendiculaire u₃ v₃.

Cela fait, nous pouvons tracer la courbe d'erreur, en prenant pour abscisses les arcs 0. — 1.2. — 1.3, comptés à partir du point 1, et pour ordonnées les longueurs u₁ v₁, — u₂ v₂ — u₃ v₃ proportionnelles aux tangentes trigonométriques des angles en t₁, t₂ et t₃. Sur une droite XX (fig. 2) prenons arbitrairement

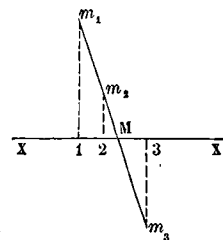


Fig. 2.

un point 1; portons à partir de ce point les longueurs 1.2 et 1.3 respectivement égales aux arcs de même nom sur la figure 1. Aux points 1, 2, 3 élevons des perpendiculaires à XX; et prenons sur ces perpendiculaires les longueurs 1.m₁ égale à u₁ v₁ de la figure 1, puis 2.m₂ égale à u₂ v₂, enfin 3.m₃ égale à u₃ v₃. Cette

dernière longueur doit être portée en sens contraire des premières, attendu que l'angle en t₃ est tourné en sens contraire des angles en t₁ et t₂. Par les points m₁, m₂, m₃ ainsi marqués, faisons passer un

trait continu; ce sera la courbe d'erreur. Elle coupe l'axe XX en un point M. Portons sur la courbe AB, à partir du point 1, un arc 1.M égal à l'abscisse de même nom sur XX; le point M ainsi obtenu sera le point cherché; c'est-à-dire que si l'on mène en M la normale à la courbe AB, elle coupera la courbe CD en un point N tel que les tangentes en M et en N feroient un angle dont la tangente trigonométrique est nulle, et seront par conséquent parallèles; d'où il résulte que MN sera la normale commune.

COURBE DES ESPACES, courbe représentative du mouvement d'un point matériel, et qui est tracée en prenant pour abscisses les temps et pour ordonnées les espaces. (Voy. MOUVEMENT VARIÉ.) Si la loi qui lie l'espace au temps est donnée sous la forme d'une équation, telle que

$$e = f(t), \quad [1]$$

cette équation est celle de la courbe des espaces, que l'on construira par points en la rapportant à deux axes rectangulaires. Soient OE et OT (fig. 1)

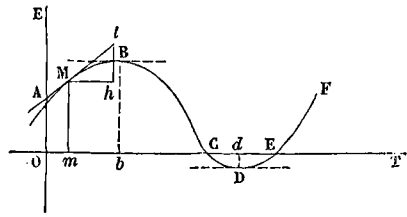


Fig. 1.

ces deux axes, on attribuera à t une valeur que l'on portera en abscisse Om, d'après une échelle arbitraire; la relation [1] donnera la valeur correspondante de e que l'on portera en ordonnée mM. Il y aura avantage à adopter la même longueur pour représenter l'unité de temps et l'unité d'espace, la seconde et le mètre; on verra tout à l'heure pourquoi. Le point M ainsi obtenu sera un point de la courbe demandée. En donnant à t un nombre suffisant de valeurs, on construira ainsi assez de points de la courbe pour pouvoir la tracer à la main.

Il pourra arriver que la loi mathématique qui lie l'espace au temps ne soit pas donnée, mais qu'on ait un certain nombre de valeurs de e correspondantes à autant de valeurs de t. On construira les points qui ont pour coordonnées ces couples de valeurs correspondantes; et si ces points sont suffisamment rapprochés, on pourra encore tracer la courbe à la main.

Enfin, il pourra se faire que le mobile trace lui-même la courbe; c'est ce qui arrive dans les appareils à indications continues. (Voy. APPAREIL DE M. MORIN.)

De quelque manière que la courbe des espaces soit obtenue, son aspect suffit pour donner une idée du mouvement que l'on étudie. Soit, par exemple, ABCDEF cette courbe, et considérons les points qui répondent à des abscisses croissantes à partir de zéro. Si l'ordonnée va en augmentant, comme cela a lieu de A en B, on en conclura que dans la période de temps correspondante à Ob le mobile va en s'éloignant de l'origine des espaces. Si l'ordonnée va en diminuant, comme cela a lieu de B en C, c'est que dans la période de temps corres-

pondante à *bc* le mobile va en se rapprochant de l'origine. Si la courbe coupe l'axe des abscisses, comme cela a lieu au point *C*, c'est qu'au bout du temps correspondant à *OC* le mobile se trouve à l'origine des espaces. Si l'ordonnée devient négative, comme cela a lieu de *C* en *D*, c'est que le mobile passe de l'autre côté de l'origine. Si l'ordonnée va de nouveau en croissant algébriquement, comme de *D* en *F*, c'est que le mobile reprend sa première direction, etc. En résumé, le mouvement est *progressif* lorsque l'ordonnée de la courbe des espaces va en augmentant algébriquement; il est *rétrogradé* lorsqu'elle va en diminuant.

Mais ces indications ne sont pas les seules que fournisse la courbe des espaces. Elle permet en outre d'apprécier les variations de la vitesse du mobile suivant la trajectoire. Cette vitesse ayant pour expression la dérivée de l'espace considéré comme fonction du temps, elle sera représentée par le coefficient angulaire de la tangente (*Voy.* la Géométrie analytique). Si, par exemple, *Mm* est l'espace correspondant au temps *Om*, on mènera la tangente en *M*; par le même point, on mènera la droite *Mh* parallèle à l'axe des temps, et égale à l'unité de l'échelle; puis on élèvera sur *Mh* la perpendiculaire *ht* qui sera la tangente trigonométrique de l'angle *tMh*, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente en *M*, et représentera par conséquent, à l'échelle du plan, la vitesse au bout du temps *Om*. Il résulte de ce mode de représentation que lorsque le mouvement est progressif, la vitesse va en augmentant si la courbe des espaces tourne sa convexité

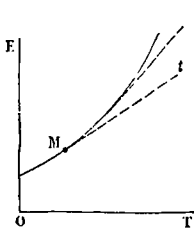


Fig. 2.

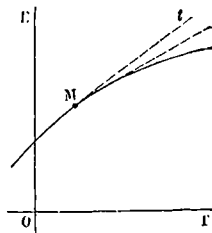


Fig. 3.

vers le bas, comme dans la figure 2, et en diminuant si la courbe tourne sa convexité vers le haut, comme dans la figure 3. Lorsque le mouvement est rétrogradé, la vitesse va en augmentant si la courbe

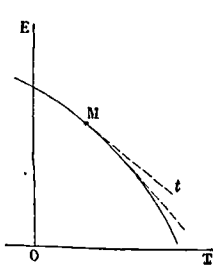


Fig. 4.

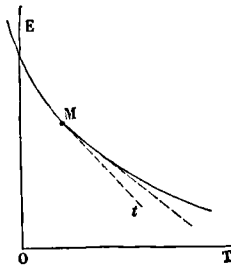


Fig. 5.

des espaces tourne sa convexité vers le haut, comme dans la figure 4, et en diminuant si la courbe tourne sa convexité vers le bas, comme dans la figure 5.

La vitesse est nulle toutes les fois que l'ordonnée de la courbe passe par un maximum ou par un minimum, comme cela a lieu en *B* et en *D* (fig. 1). Dans les deux cas de cette figure le mouvement change ordinairement de sens; il devient rétrograde de progressif qu'il était avant le maximum, ou progressif de rétrograde qu'il était avant le minimum. La vitesse pourrait devenir nulle sans que le sens du mouvement changeât, si la courbe des espaces avait un point d'inflexion où la tangente

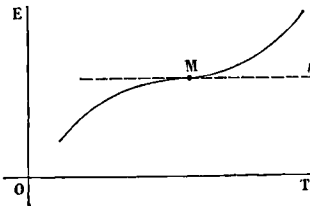


Fig. 6.

fût parallèle à l'axe des temps, comme on le voit en *M* (fig. 6).

Le lecteur exercé à la discussion des courbes apercevra facilement toutes les circonstances du mouvement.

Quant le MOUVEMENT est UNIFORMÉMENT VARIÉ (*Voy.* ce mot), l'espace étant représenté par une fonction de la forme

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2,$$

la courbe des espaces est une parabole du second degré dont l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées.

Quand le MOUVEMENT est UNIFORME (*Voy.* ce mot), l'espace a pour expression

$$e = e_0 + vt$$

et la courbe des espaces se réduit à une ligne droite faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente est *v*.

COURBE DE SORTIE, l'une des deux courbes dont se compose l'intersection des deux surfaces lorsqu'il y a PÉNÉTRATION (*Voy.* ce mot. Voyez aussi INTERSECTIONS DE SURFACES). — *Voy.* COURBE D'ENTRÉE.

COURBE DES PRESSIONS, nom donné à la ligne brisée ayant pour sommets les points d'application des réactions mutuelles des voussoirs d'une voûte (*Voy.* POUSSÉE DES VOÛTES).

COURBE DES VITESSES, courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, et ayant pour abscisses les temps et pour ordonnées les vitesses correspondantes d'un point matériel dont on étudie le mouvement. Soit *v* la vitesse du mobile suivant sa trajectoire au bout du temps *t*; et soit

$$x = \varphi(t)$$

la loi qui lie la vitesse au temps. On donnera à *t* un certain nombre de valeurs suffisamment rapprochées, et l'on calculera les valeurs correspondantes de *v*. On construira les points qui ont pour coordonnées rectangulaires les couples de valeurs correspondantes de *t* et de *v*, en ayant soin d'adopter la même longueur pour représenter la seconde et le mètre. Par tous les points ainsi obtenus, on fera passer une courbe continue, qui exprimera la loi des vitesses. Soit *ABCDEF* (fig. 1) cette courbe. Si l'ordonnée va en augmentant, comme cela a lieu de *A* en *B*, cela indique que la vitesse est croissante et que

le mouvement est accéléré. Si l'ordonnée va en décroissant, comme de B en C, cela montre que, dans l'intervalle de temps correspondant, le mouvement est retardé. Si l'ordonnée devient négative, comme

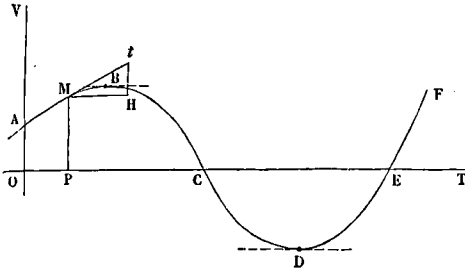


Fig. 1.

de C en E, c'est que le mouvement se fait en sens contraire. Au bout des temps exprimés par les abscisses OC et OE on voit que la vitesse est nulle. C'est ce qui arrive lorsqu'elle change de signe et passe du positif au négatif comme en C, ou du négatif au positif comme en E.

Mais la courbe des vitesses sert encore à déterminer géométriquement l'accélération (Voy. MOUVEMENT VARIÉ). En effet, l'accélération étant la dérivée de la vitesse considérée comme une fonction du temps, on voit que ce n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des vitesses ou la tangente trigonométrique de l'angle que cette tangente fait avec l'axe sur lequel se comptent les temps. Soit donc MP la vitesse correspondante au temps OP; pour avoir l'accélération au bout du même temps, on mènera la tangente en M, et par ce même point on mènera une droite MH parallèle à OT et égale à l'unité; puis on élèvera Ht perpendiculaire sur MH et terminée à la tangente Mt; cette perpendiculaire sera la valeur de l'accélération cherchée.

Il résulte de ce mode de représentation que lorsque l'ordonnée de la courbe des vitesses est croissante, l'accélération est positive, comme cela a lieu de A en B ou de D en F; quand l'ordonnée est décroissante, l'accélération est négative, comme cela a lieu de B en D. Aux points tels que B et D où l'ordonnée passe par un maximum ou par un minimum, la tangente à la courbe des vitesses est parallèle à l'axe des temps, et par conséquent l'accélération est nulle.

On pourrait se servir de la courbe des vitesses pour calculer les valeurs de l'espace parcouru par le mobile à partir de sa position initiale. En effet, la vitesse pouvant être considérée comme constante pendant un temps infiniment petit dt , ce qui revient à regarder le mouvement comme uniforme pendant ce temps, l'élément d'espace parcouru a pour expression le produit de la vitesse par le temps, c'est-à-dire qu'on a

$$de = v dt,$$

et, par conséquent,

$$e = \int_0^t v dt.$$

Mais cette intégrale exprime l'aire comprise entre la courbe des vitesses, l'axe des temps et les ordon-

nées qui correspondent aux valeurs 0 et t de l'abscisse; l'espace e est donc représenté par cette aire. Ainsi, l'espace parcouru par le mobile, à partir de sa position initiale, dans le temps exprimé par l'abscisse OP, est représenté par la figure mixtiligne OAMP. Dans ce mode de représentation, les portions de l'aire de la courbe situées au-dessous de l'axe des temps doivent être regardées comme négatives. L'aire CDEC, par exemple, représenterait un espace négatif. Et s'il arrivait que cette aire fût égale en valeur absolue à l'aire OACO, on en conclurait qu'au bout du temps représenté par OE l'espace parcouru par le mobile est nul, c'est-à-dire qu'il est revenu à sa position initiale. — Mais cette manière de représenter l'espace est peu usitée.

COURBE D'ÉTAMBOT, forte pièce courbe qui sert à relier plus solidement l'étambot à la quille. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

COUBBE DU TEMPS MOYEN, courbe qui marque sur les cadrans solaires la position de l'extrémité de l'ombre du style à l'instant du midi moyen aux différentes époques de l'année. Cette courbe a ordinairement la forme d'un 8 allongé; elle coupe la ligne de midi en 4 points qui répondent à peu près au 15 avril, au 15 juin, au 31 août et au 24 décembre, époques où l'équation du temps est nulle. (Voy. CADRANS SOLAIRES, ÉQUATION DU TEMPS.)

COURBE EN OEUF, courbe qui règle la marche correspondante du tiroir et du piston dans les machines à vapeur. (Voy. AVANCE DU TIROIR.)

COURBE MÉTACENTRIQUE, lieu des métacentres, ou lieu des centres de courbure de la courbe formée par les centres de carène. (Voy. MÉTACENTRE.)

COURBE RAMPANTE, nom donné, dans la charpente, aux parties courbes des escaliers, telles que le LIMON, la MAIN COURANTE, etc., et, par extension, à l'escalier tournant lui-même. (Voy. LIMON, ESCALIERS.)

COURBES DE NIVEAU, intersections de la surface d'un terrain par des plans horizontaux équidistants. (Voy. FIGURE DU RELIEF.)

COURROIE SANS FIN, organe de transformation de mouvement, qui sert à transformer un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu autour d'un axe le plus souvent parallèle, en modifiant la grandeur ou même le sens de la vitesse.

I. La courroie est généralement en cuir flexible, quoiqu'on ait quelquefois essayé de remplacer le cuir par des tissus spéciaux. Ses deux bouts sont réunis, et elle s'enroule sur la circonférence des deux poulies entre lesquelles il s'agit d'établir une communication de mouvement. Sa longueur est réglée de manière que l'enroulement ne puisse s'opérer sans donner à la courroie un certain degré de tension, indispensable pour que la transmission s'opère. La circonférence des poulies n'est point creusée en gorge, comme cela a lieu quand elle doit recevoir une corde; elle est au contraire bombée vers le milieu, comme l'indique la figure 1. De cette manière la courroie, un peu plus tendue au milieu, se maintient dans la position qu'on lui a donnée; tan-

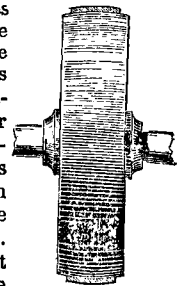


Fig. 1.

dis que si la circonférence était creusée, la courroie, plus tendue vers les bords, serait exposée à s'échapper. Cependant, lorsque la poulie tourne autour d'un axe vertical, on lui donne souvent un rebord à la partie inférieure, pour retenir la courroie dans le cas où elle tendrait à s'échapper de ce côté.

II. La courroie sans fin peut s'enrouler de deux manières différentes sur les poulies : soit suivant les tangentes extérieures aux deux circonférences, comme l'indique la figure 2, soit suivant les tan-

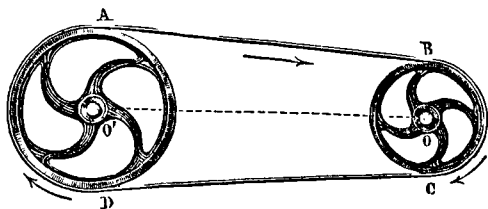


Fig. 2.

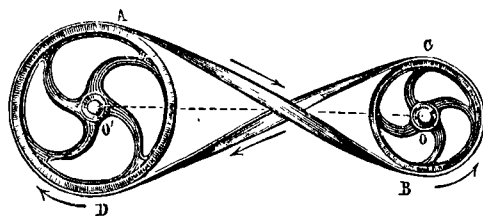


Fig. 3.

gentes intérieures, comme le montre la figure 3. Dans le premier cas, les poulies tournent dans le même sens ; dans le second, elles tournent en sens contraire. Les deux brins de la courroie, en se croisant, se touchent alors à plat, et le petit frottement qui en résulte n'a pas d'influence sensible sur le mouvement. Dans l'un et l'autre cas, les vitesses angulaires des deux poulies sont en raison inverse de leurs rayons ; car si ω et ω' sont les vitesses angulaires des poulies O et O', et si r et r' désignent leurs rayons, la vitesse à la circonférence est ωr pour la première, et $\omega' r'$ pour la seconde ; mais la vitesse à la circonférence est la vitesse de la courroie, si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement ; on doit donc avoir

$$\omega r = \omega' r', \text{ d'où } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}. \quad [1]$$

La communication du mouvement ne s'établit qu'en vertu de l'adhérence de la courroie sur les deux poulies ; et cette adhérence ne subsiste qu'à la condition d'une certaine tension de la courroie. Cependant il est très-remarquable qu'au moment où la poulie motrice se met en mouvement, elle n'entraîne pas immédiatement la courroie ; il y a toujours glissement pendant quelques instants ; quand la courroie obéit enfin à l'appel de la poulie motrice, elle n'entraîne pas immédiatement non plus la poulie conduite ; mais, une fois celle-ci en marche, la communication se maintient d'une manière indéfinie, si la tension de la courroie ne varie pas. Les poulies sont ordinairement en fonte. Cependant, quand un même arbre tournant doit transmettre le mouvement à plusieurs machines-outils, au lieu d'employer autant de poulies motrices, on les remplace par

un tambour en bois sur lequel passent les courroies qui transmettent le mouvement aux divers outils.

III. Au point de vue mécanique, le problème de la transmission du mouvement uniforme à l'aide d'une courroie sans fin consiste à déterminer la force mouvante F, qui, agissant à la distance b de l'axe de la poulie motrice, serait capable de faire équilibre à une résistance P agissant à la distance p de l'axe de la poulie conduite, en ayant égard au frottement des tourillons. Nous rappellerons d'abord

que la réaction R exercée par les coussinets sur les tourillons de la première poulie fait avec la normale, c'est-à-dire avec le rayon, un angle égal à l'angle φ du frottement (Voy. FROTTEMENT), et passe par conséquent à une distance de l'axe de cette poulie exprimée par $\rho \sin \varphi$, en appelant ρ le rayon de ses tourillons. Mais si f est le coefficient de frottement, ou tang φ , on en conclut $\sin \varphi =$

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1; \text{ on a donc, pour la distance de la}$$

réaction R à l'axe, $f_1 \rho$; et le moment de cette force, par rapport à cet axe, est $R \cdot f_1 \rho$ en valeur absolue. D'un autre côté, la force R est égale et opposée à la résultante des autres forces qui agissent sur la poulie, puisque toutes les forces peuvent être regardées comme situées dans un même plan, le plan de symétrie perpendiculaire à l'axe. Il en serait de même pour l'autre poulie. Cela posé, désignons par T la tension du brin AB de la courroie, et par t la tension du brin CD ; soit α l'angle que chacun de ces brins fait avec la ligne OO' qui joint les centres des deux poulies.

Supposons les forces F et P verticales pour fixer les idées ; et la ligne OO' horizontale. Les forces autres que R, qui agissent sur la poulie O, donnent en projection verticale

$$F + (T - t) \sin \alpha,$$

et en projection horizontale,

$$(T + t) \cos \alpha.$$

Il en résulte qu'on a

$$R = \sqrt{[F + (T - t) \sin \alpha]^2 + (T + t)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Si R' désigne la réaction exercée sur les tourillons de la poulie O', on trouvera de même

$$R' = \sqrt{[P + (T - t) \sin \alpha]^2 + (T + t)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Maintenant, en prenant les moments des forces qui agissent sur chaque poulie, par rapport à son axe, et remplaçant R et R' par leurs valeurs, on aura

$$Fb = (T - t)r$$

$$+ f_1 \rho \sqrt{[F + (T - t) \sin \alpha]^2 + (T + t)^2 \cos^2 \alpha}, \quad [2]$$

$$(T - t)r' = Pp$$

$$+ f_1 \rho' \sqrt{[P + (T - t) \sin \alpha]^2 + (T + t)^2 \cos^2 \alpha}. \quad [3]$$

Le problème ne fournit que ces deux équations pour déterminer F, T et t ; il reste donc indéterminé, ce qui tient à ce que la transmission peut en effet avoir lieu avec divers degrés de tension ; car si on augmentait la tension en écartant, par exemple, les axes des deux poulies, on conçoit que la transmission se ferait encore comme auparavant. On ne peut lever l'indétermination qu'en faisant une hypothèse sur le rapport de T à t. Ce rapport est plus grand que 1, car, en vertu de l'équation [3], T - t est positif. D'un autre côté, pour que la courroie ne glisse pas sur les poulies, il faut qu'on ait [Voy. CORDES (FROTTEMENT DES)]

$$T < t e^{f\sigma},$$

σ désignant le plus petit des deux angles auxquels correspondent les arcs embrassés par la courroie sur les deux poulies, ou plutôt l'arc qui mesure cet angle dans le cercle dont le rayon est 1. L'angle dont il s'agit diffère généralement peu de 180° , c'est-à-dire que σ diffère peu de π , du moins si les brins ne sont pas croisés; f a pour valeur $0,28$ pour une poulie en fonte; il en résulte que $e^{f\sigma}$ diffère peu de $2\frac{1}{2}$. Le rapport $\frac{T}{t}$ est donc compris entre 1 et $2,5$, mais plus près de ce dernier nombre. M. Bélanger conseille de prendre $\frac{T}{t} = 0,9 e^{f\sigma}$, ce qui revient à peu près à $T = 2t$. Si l'on adopte cette valeur, on a trois équations pour déterminer les trois inconnues. Pour les obtenir, on peut, après avoir remplacé T par $2t$ dans les équations [2] et [3], éliminer t entre ces deux équations pour en déduire la valeur de F . Mais il sera généralement plus commode d'opérer comme il suit. Après avoir mis $2t$ à la place de T dans les deux équations, on commencera par négliger dans l'équation [3] le terme relatif au frottement, ce qui donnera une valeur approchée de t ; en mettant cette valeur sous le radical, on calculera une seconde valeur de t plus approchée; et en substituant celle-ci dans l'équation [2], on en tirera la valeur de F .

Les courroies sans fin n'étant ordinairement employées que pour transmettre le mouvement à de grandes distances, il arrive souvent que l'angle α est très-petit et peut être négligé; c'est ce qui arrive quand les brins ne sont pas croisés et que les poulies ont des diamètres peu différents. Dans ce cas, il est clair que les formules [2] et [3] se simplifient. Elles se réduisent, en effet, à

$$Fb = (T - t) r + f_1 \rho \sqrt{F^2 + (T + t)^2} \quad [4]$$

et $(T - t) r' = Pp + f_1 \rho' \sqrt{P^2 + (T + t)^2}$, [5] formules sur lesquelles on opérera comme sur les formules [2] et [3].

IV. On peut remarquer que si les tensions T et t varient pendant le mouvement, leur somme $T + t$ reste constante. En effet, soit L la longueur de courroie qui, dans l'état naturel, occupe la distance AB (fig. 1 ou 2), et soit l l'allongement qu'il a fallu lui faire subir pour l'amener à la tension T , on aura, d'après les lois de l'allongement des prismes élastiques (Voy. ALLONGEMENT),

$$T = E\Omega \frac{l}{L},$$

Ω désignant l'aire de la section transversale de la courroie, et E le coefficient d'élasticité du cuir. L'allongement l s'est enroulé sur la poulie conductrice. Soit de même λ l'allongement qui correspond à la tension t , on aura

$$t = E\Omega \frac{\lambda}{L}.$$

De ces équations on tire

$$dT = \frac{E\Omega}{L} dl \quad \text{et} \quad dt = \frac{E\Omega}{L} d\lambda.$$

Mais si, pendant le mouvement, une nouvelle longueur de courroie dl s'enroule sur la poulie motrice, il faut qu'une quantité égale se déroule pour venir s'ajouter au brin CD ; c'est-à-dire que dl et $d\lambda$ sont égaux et de signe contraire; d'où il résulte qu'on a

$$dT + dt = 0, \quad \text{ou} \quad d.(T + t) = 0, \quad [6]$$

d'où $T + t = \text{constante}$.

Si cette constante était connue, l'équation [6] pourrait remplacer la relation arbitraire qu'on a établie plus haut entre les tensions T et t .

V. Il y a un cas qui ne laisse aucune indétermination dans le problème dont nous nous occupons: c'est celui où la tension de la courroie est obtenue à l'aide d'un rouleau de tension (fig. 4). La disposi-

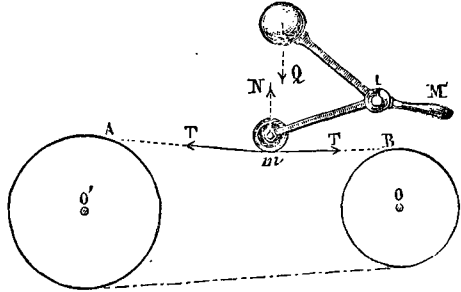


Fig. 4.

tion de cet appareil est très-variable; nous décrirons une des plus employées. Un levier à trois branches, mobile autour d'un axe I, s'appuie sur le brin AB de la courroie par l'intermédiaire d'un rouleau g ; un contrepois termine la seconde branche; la troisième sert à manœuvrer l'appareil. Le rouleau reçoit de la courroie une réaction N qui divise en deux parties égales l'angle AmB que forme la courroie au point de contact, si l'on admet que le frottement du rouleau soit négligeable. En nommant donc 2β l'angle AmB , on a

$$N = 2T \cos \beta \quad [7]$$

D'un autre côté, on a, pour l'équilibre du levier, en négligeant le frottement sur l'axe, et le poids des branches, vis-à-vis des forces N et Q , et nommant n et q les distances de ces forces à l'axe I,

$$Nn = Qq. \quad [8]$$

Éliminant N entre les relations [7] et [8], on obtient

$$\frac{Qq}{n} = 2T \cos \beta, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{Qq}{2n \cos \beta}. \quad [9]$$

Les équations [4] et [5] ne contiennent plus alors que deux inconnues F et t .

VI. L'emploi du rouleau de tension est surtout utile comme moyen d'embrayage et de désembrayage. Si la longueur de la courroie a été réglée de manière qu'elle flotte avec quelque liberté sur les poulies, la poulie motrice tournera sans entraîner la courroie, ni par conséquent la poulie à conduire. Qu'on fasse alors reposer le rouleau de tension sur la courroie; si le contrepois a été réglé d'une manière convenable, la tension deviendra suffisante pour déterminer la transmission du mouvement; mais en agissant sur la manette M on pourra, à volonté, relever le rouleau de tension, et rendre la liberté à la courroie, ce qui produira le désembrayage, ou faire retomber le rouleau, ce qui produira de nouveau l'embrayage.

VII. La flexibilité des courroies sans fin permet de les employer à transmettre le mouvement entre deux axes qui ne sont pas parallèles. Mais il y a alors une condition essentielle à remplir: il faut que le brin qui s'enroule sur la poulie conductrice soit dans le plan de la poulie qu'il s'agit de conduire. Si, par exemple, les axes doivent être à angle

droit, la courroie aura la disposition représentée l. s. 5. La poulie O est la poulie conductrice; le brin AB est dirigé suivant l'intersection des plans mé-

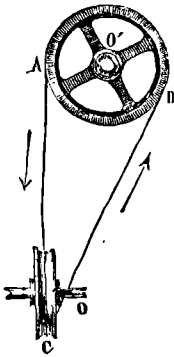


Fig. 5.

dians des deux poulies; le brin CD a une direction très-oblique, qui étonne au premier abord; cependant ce brin ne se dégage pas, et la transmission se fait d'une manière régulière.

On se sert des courroies sans fin pour faire mouvoir les meules de moulins, les blutoirs, les machines à nettoyer les blés, les scies circulaires, les ventilateurs, les polissoirs, les métiers à filer, à tisser, les machines à percer, à raboter, et la plupart des machines légères employées dans l'industrie.

VIII. On détermine la largeur de la courroie d'après la tension maximum qu'elle doit supporter. On peut admettre qu'une courroie peut supporter sans inconvénient une tension de $0^{\text{e}},25$ par millimètre carré de section. Si donc e représente l'épaisseur du cuir en millimètres, x la largeur de la courroie, rapportée à la même unité, et T la tension qu'elle supporte exprimée en kilogrammes, on aura

$$T = 0^{\text{e}},25 \cdot e \cdot x, \text{ d'où } x = \frac{T}{0,25 \cdot e} \quad [9]$$

Beaucoup de praticiens emploient la formule empirique

$$x = K \cdot \frac{N}{V}, \quad [10]$$

dans laquelle N est la force de la machine exprimée en chevaux, V la vitesse de la courroie, et K un coefficient que l'on prend égal à 0,15 pour les arbres de couche, et à 0,20 pour les axes verticaux. Mais la largeur x est alors rapportée au mètre. L'épaisseur ordinaire des cuirs employés pour les courroies sans fin varie de 2 à 3 millimètres.

IX. Dans les machines très-légères on substitue quelquefois à la courroie sans fin une corde mince ou une corde à boyau. La circonférence des poulies doit alors être creusée en gorge, ou suivant deux surfaces coniques. Pour de grands efforts, au contraire, on a quelquefois employé des câbles en fils de fer ou en fils d'acier. Mais on fait plus souvent usage de chaînes en fer, telle que la *chaîne anglaise* ou *chaîne de Galle*, représentée par la figure 6. Les maillons sont formés de platines égales

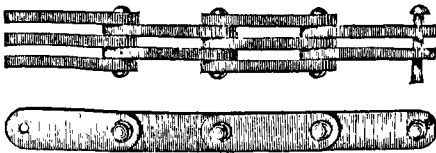


Fig. 6.

articulées deux à deux ou trois à trois. La circonférence des poulies est alors armée de saillies qui pénètrent dans les vides des maillons et assurent la communication du mouvement. Les poulies prennent alors le nom de *hérissons*.

(Voy. le *Cours de Mécanique* de M. Poncelet à l'École d'application de Metz, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bélanger, les *Leçons de Cinématique* de M. Faure à l'École centrale des arts et manufactures, etc.)

COURSIER, nom donné au fond du canal dans lequel coule l'eau, soit à son arrivée sur une roue hydraulique, soit pendant son action sur cette roue, soit enfin à sa sortie de la roue. On nomme *coursier circulaire*, le coursier dans lequel est emboîtée une roue de côté, ou une roue élévatrice à palettes. (Voy. ROUES A PALETTES, ROUES PONCELET, ROUES DE CÔTÉ, ROUES ÉLÉVATOIRES, etc.)

COURTINE, partie d'un front fortifié qui s'étend d'un bastion au bastion voisin. La courtine est parallèle au côté extérieur du polygone fortifié. Elle est défendue par les *flancs* des bastions adjacents. (Voy. FORTIFICATION.) C'est au milieu de la courtine qu'est placée la poterne qui conduit au fossé et aux ouvrages extérieurs. C'est aussi dans les courtines que sont ordinairement pratiquées les portes de ville et les passages pour les chemins de fer.

COUSSINETS, partie cylindrique des appuis sur lesquels reposent les tourillons d'un treuil ou d'une roue. Les coussinets sont ordinairement en métal, et particulièrement en fer ou en bronze. Leur diamètre ne dépasse celui des tourillons que d'une petite quantité qui forme le *jeu* indispensable. (Voy. TREUIL.)

COUSSINETS, nom donné dans l'appareil hélicoïdal des PONTS BIAIS (Voy. ce mot) aux pierres triangulaires contre lesquelles viennent s'appuyer les assises hélicoïdes. Ces pierres font ordinairement corps avec l'assise supérieure des piédroits.

COYAU, petit chevron supplémentaire qui sert à prolonger le chevron véritable jusqu'à la paroi extérieure du mur, et même un peu au delà, en s'appuyant sur la sablière. (Voy. FERMES.)

COYER, l'une des pièces de l'enrayure d'une CROUPE (Voy. ce mot); elle s'assemble d'une part avec les sablières et de l'autre avec le gousset; et joue le rôle de tirant dans la demi-ferme arêtière.

CRANS DE MIRE, saillie placée à la plate-bande de la culasse d'un canon ou d'un obusier, et au bourrelet ou à la plate-bande de la bouche, et qui déterminent la *ligne de mire naturelle* d'une bouche à feu. Les armes à feu portatives ont aussi leurs crans de mire.

CRAPAUDINE, boîte métallique qui supporte un PIVOT (Voy. ce mot).

CRÉDIT, partie d'un compte où l'on inscrit les valeurs fournies par la personne au nom de laquelle le compte est ouvert. Le crédit occupe le *recto* des feuillets du grand livre. (Voy. TENUE DES LIVRES.)

CRÉDIT FONCIER, institution créée pour servir d'intermédiaire entre les propriétaires fonciers qui ont besoin de capitaux, et les capitalistes qui ont des fonds à placer.

1. La *Société du crédit foncier de France* prête sur première hypothèque, et pour un temps qui peut varier de 20 à 50 ans, moyennant une annuité totale qui se compose :

- 1° Des intérêts à $4 \frac{1}{4}$ pour 100 du capital emprunté ;
- 2° De 60 centimes par 100^e pour frais d'administration ;

3° De l'annuité nécessaire pour amortir le capital emprunté au bout du temps fixé par l'acte de prêt, les intérêts se capitalisant par semestre. (En faisant la somme de ces trois parties pour un prêt de 100^f, on force le résultat de manière à compléter un nombre exact de centimes.)

EXEMPLE. *Quelle annuité un propriétaire aura-t-il à payer s'il emprunte 24 000^f pour 30 ans ?*

Pour un prêt de 100^f il aurait à payer :

1° Les intérêts à $4 \frac{1}{4}$ pour 100 soit...	4 ^f ,25
2° Les frais d'administration.....	0,60
3° L'amortissement qui, d'après le tableau rapporté à l'article ANNUITÉ, est..	1 ^f ,679036

Total..... 6^f,529036
ou, en complétant les centimes,..... 6,53.

Pour un prêt de 24 000^f, ou 240 fois 100^f, l'annuité sera de 240 fois 6^f,53, c'est-à-dire de 1567^f,20, ou de 783^f,60 par semestre.

II. Lorsque la durée du prêt est de 50 ans, la Société du crédit foncier offre au choix de l'emprunteur une autre combinaison par suite de laquelle le remboursement annuel, ou l'annuité, n'est que de 5^f pour un prêt de 100^f. Les intérêts sont alors calculés à 3,70 pour 100. (On verra plus loin à quel point de vue il peut être avantageux pour l'emprunteur de choisir la première combinaison, dans laquelle l'annuité est de 5^f,45.)

On peut remarquer que, dans ce second mode, les frais d'administration sont évalués à peu près au même taux que dans le premier. En effet, l'annuité à payer pour amortir en 50 ans une dette de 100^f, quand les intérêts sont calculés à 3,70 pour 100 et capitalisés par semestre, est de..... 0^f,704332
(Voy. à la fin de l'article ANNUITÉ.)

Si l'on ajoute à ce nombre les intérêts de 100^f ou.... 3,70

on obtient pour somme..... 4^f,404332
laquelle, retranchée de l'annuité totale de 5^f, donne pour les frais d'administration 0^f,595668, ou à très-peu près 0^f,60.

III. L'emprunteur a la faculté de se libérer avant le temps fixé par l'acte de prêt. La somme qu'il doit payer pour cela s'obtient en calculant la portion du capital déjà amortie et la retranchant du capital lui-même. Mais la Société du crédit foncier prend en outre un droit proportionnel sur ce qui reste, pour s'indemniser en partie des frais d'administration qu'elle perd par cette libération anticipée. Ce droit est de 3 pour 100 quand les intérêts sont calculés à $4 \frac{1}{4}$ pour 100.

Si, par exemple, un propriétaire qui a emprunté 60 000^f pour 40 ans veut se libérer au bout de 25 ans, on remarquera que, d'après le tableau rapporté à l'article ANNUITÉ, la somme à payer annuellement pour l'amortissement est de 0^f,970916. Au bout de 25 ans ou 50 semestres, cette annuité produit un capital définitif exprimé par

$$0^f.970916 [(1,02125)^{50} - 1] \text{ ou } 42^f,527577$$

Sur 100^f il resterait donc d'..... 57,472423

A quoi il faut ajouter 3 pour 100. 1,724173

La somme à payer serait donc 59^f,196596

Pour un prêt de 60 000^f, elle sera 600 fois plus grande, c'est-à-dire 35517^f,96.

IV. Lorsqu'il s'agit d'un prêt de 50 ans, et que les intérêts sont calculés à 3,70 pour 100, le remboursement anticipé s'opère d'une manière différente. Le droit proportionnel de 3 pour 100 est alors réduit à 2 pour 100. Mais, pour se couvrir de ses déboursés, la Société retient en outre une prime qui se calcule de la manière suivante : on prend le cinquième du capital non encore amorti, et sur ce cinquième on retranche autant de fois $1 \frac{1}{2}$ pour 100 qu'il y a eu de versements annuels effectués par l'emprunteur.

Dans cette hypothèse on calculera comme il suit la fraction du capital non encore amorti que l'emprunteur aura à payer en sus de ce capital, s'il veut se libérer au bout de n années, à partir de la date de l'emprunt. On aura à prendre 1^o 2 pour 100 ou 0,02 du capital non amorti ; 2^o le cinquième de ce capital, ou 0,20 ; 3^o il en faudra retrancher $n - 1$ fois $1 \frac{1}{2}$ pour 100 de ce cinquième, c'est-à-dire

$$0,20 \times 0,015 (n - 1) \text{ ou } 0,003 (n - 1).$$

La fraction demandée sera donc

$$0,22 - 0,003 (n - 1).$$

Il en résulte que si R désigne la portion de capital non encore amortie, l'emprunteur aura à payer pour se libérer

$$R + R [0,22 - 0,003 (n - 1)]$$

ou $R [1,22 - 0,003 (n - 1)]$

Au bout de 30 ans, par exemple, on aurait

$$R (1,22 - 0,003 \cdot 29), \text{ c'est-à-dire } 1,133 R.$$

V. Lorsqu'on veut comparer complètement les deux modes d'emprunt au point de vue du remboursement anticipé, il ne suffit pas de comparer les sommes que l'emprunteur devra payer, dans ces deux modes, au moment où il voudra se libérer ; il faut encore tenir compte des sommes qu'il a déjà versées à la caisse du Crédit foncier, et de leurs intérêts composés par semestre et calculés au taux de 3 pour 100, qui représente le taux ordinaire du bénéfice obtenu dans l'exploitation des propriétés foncières. Si l'on fait cette comparaison, on trouve que, si la libération doit avoir lieu avant 17 ans ou au bout de 17 ans, il y a avantage pour l'emprunteur à adopter le premier mode d'emprunt, dans lequel l'annuité totale pour 100^f empruntés est de 5^f,45 ; mais que si la libération doit avoir lieu plus tard, au bout de 18 ans par exemple, il y a avantage à adopter le deuxième mode d'emprunt, dans lequel l'annuité est de 5^f.

VI. L'emprunteur peut aussi se libérer partiellement, et il en résulte une diminution dans le chiffre de son annuité. Pour ne pas introduire dans la comptabilité une complication inutile, la Société n'admet la libération partielle que pour un multiple de 100^f. Il est entendu qu'en se libérant ainsi, l'emprunteur doit payer en outre l'indemnité de 3 pour 100 dans le premier mode d'emprunt, ou l'indemnité de 2 pour 100 et la prime dans le second mode.

Nous donnerons deux exemples de ce calcul.

1. Un cultivateur qui a emprunté 15 000^f pour

40 ans, veut se libérer de 3000^f au bout de 18 ans; qu'aura-t-il à payer, et de combien son annuité sera-t-elle réduite? La durée de l'emprunt étant moins de 50 ans, il ne peut être question que du premier mode d'emprunt. D'après le tableau rapporté à l'article ANNUITÉ, un emprunt de 100^f pour 40 ans donne lieu à un paiement annuel de 0^f,970916 pour amortissement. Un emprunt de 3000^f donne lieu à une annuité 30 fois plus grande, soit 29^f,127... ou, en complétant les centimes, 29^f,13. Cette annuité, servie pendant 18 ans ou 36 semestres, produit un capital définitif exprimé par

$$\frac{29^f,13 [(1,0125)^{36} - 1]}{0,0425} \text{ ou } 775^f,77.$$

Il reste dû par conséquent

$$3000^f - 775^f,77 \text{ ou } \dots \dots \dots 2224^f,23$$

$$\text{Ajoutant les 3 pour 100 ou } \dots \dots \dots 66,73$$

$$\text{on obtient pour la somme à payer } \dots \dots \dots 2290^f,96$$

L'annuité payée par l'emprunteur pour les 15000^f se trouvera diminuée de la portion qui se rapportait aux 3000^f remboursés. Pour 100^f l'annuité totale était de 0^f,970916 + 4^f,25 + 0^f,60 ou 5^f,820916. Pour 3000^f elle était de 30 fois cette somme, ou 174^f,63. C'est de cette quantité que l'annuité totale se trouvera diminuée.

2. Un propriétaire qui a emprunté 200 000^f pour 50 ans, d'après le second mode, veut se libérer de 40 000^f au bout de 25 ans; qu'aura-t-il à payer, et de combien son annuité sera-t-elle réduite? Une somme de 100^f empruntée pour 50 ans donne lieu à un amortissement annuel de 0^f,704332. Une somme de 40 000^f empruntée pour le même intervalle de temps et dans les mêmes conditions donne lieu à un amortissement annuel de 400 fois 0^f,704332, ou de 281^f,74. Cette annuité servie pendant 25 ans ou 50 semestres, à 3,70 pour 100, produit un capital définitif exprimé par

$$\frac{281^f,74 [(1,0185)^{50} - 1]}{0,037} \text{ ou } 11426^f,79.$$

Il reste dû ainsi, sur les 40 000^f, une somme de 28573^f,21. L'emprunteur, d'après ce qui a été dit plus haut, aura donc à payer

$$28573^f,21. [1,22 - 0,003(25 - 1)] \text{ ou } 32802^f,05.$$

L'annuité totale, qui était de 10000^f (à raison de 5 pour 100) se trouvera diminuée de celle qui se rapportait aux 40 000^f remboursés, c'est-à-dire de 2000^f.

VII. En même temps que la Société du crédit foncier prête aux conditions indiquées plus haut, ses statuts l'obligent à devenir emprunteur à son tour pour une somme précisément égale. A cet effet, elle émet des obligations foncières de 1000^f, au porteur, qui peuvent être divisées en dixièmes. Ces obligations donnent droit à un intérêt annuel de 3 pour 100, et sont remboursables par voie de tirage au sort, au plus tard au bout de 50 ans, et avec une prime de 20 pour 100.

On peut demander à quel taux réel le porteur d'une obligation foncière aura placé son argent si cette obligation est remboursée au bout de n années. Or, une prime de 20 pour 100 au bout de n années revient à une prime annuelle de $\frac{20}{n}$ pour 100; le porteur d'une obligation aurait donc placé

son argent à un taux exprimé par $3 + \frac{20}{n}$ pour 100.

On trouve ainsi que si la prime est remboursée: au bout de

10 ans, le taux réel du placement est	5	p. 100
20	—	4
30	—	3,66
40	—	3,50
50	—	3,40

VIII. Pour éteindre sa dette vis-à-vis des porteurs d'obligations foncières, la Société du crédit foncier affecte à l'amortissement une partie de sa recette, dont elle compose les intérêts par semestre au taux annuel de 2^f,50 pour 100. On peut demander la somme annuelle qu'elle doit appliquer à l'amortissement pour éteindre en 50 ans un dixième d'obligation et la prime de 20 pour 100 dont il a été question ci-dessus. Le capital définitif est ici 100^f + 20^f ou 120^f; et le centième du taux par semestre est 0,0125. L'annuité nécessaire pour l'amortissement des 120^f sera donc donnée par la formule (Voy. AMORTISSEMENT),

$$a = \frac{120 \times 0,025}{(1,0125)^{50} - 1},$$

puisque la Société servant les intérêts de la somme de 100^f ne doit que cette somme, augmentée de la prime de 20 pour 100, qui n'est due elle-même qu'au bout de 50 ans. En effectuant le calcul on trouve $a = 1^f,217827$.

IX. A chaque prêt de 100^f fait par la Société correspond, comme on l'a vu, l'émission d'un dixième d'obligation foncière. Si l'on cherche ce que lui rapporte l'un et ce que lui coûte l'autre, on trouve que la Société fait un minime bénéfice. En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse d'un prêt de 50 ans, d'après le deuxième mode. La Société reçoit annuellement 5^f; et si l'on en déduit les frais d'administration, soit 0^f,595668 (voir plus haut), il reste 4^f,404332.

D'un autre côté, elle a à déboursier, en dehors des frais d'administration,

1° Les intérêts d'un dixième d'obligation, soit. 3^f,000000

2° L'annuité correspondante à l'amortissement du capital et de la prime. 1,217827

En tout. 4^f,217827

Le bénéfice est donc 4^f,404332 moins 4^f,217827, ou. 0^f,186505

Mais sur ce bénéfice il faut encore que la Société prenne le prix des lots qu'elle accorde aux premiers numéros sortants lors du tirage des obligations.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse d'un prêt de moins de 50 ans, d'après le premier mode; et, afin de fixer les idées, supposons que la durée du prêt soit de 20 ans. La Société a à recevoir, pour un prêt de 100^f,

1° Les intérêts à $4 \frac{1}{4}$ pour 100, soit.. 4^f,250000

2° L'amortissement qui, d'après le tableau rapporté à l'article ANNUITÉ, s'élève à. 3^f,222374

3° Les frais d'administration. 0,600000

En somme. 8^f 072374

D'un autre côté, les déboursés annuels de la Société comprennent :

1° L'intérêt du dixième d'obligation..	3 ^f ,000000
2° L'amortissement du capital et de la prime de 20 p. 100.	1 ^f ,217827
3° Les frais d'administration.....	0,600000
En somme.....	4 ^f ,817827

La différence à l'avantage de la Société est donc..... 3^f,254547

Pendant les 20 années du prêt, cette différence produit à 2,50 pour 100, et à intérêts composés par semestre, un capital définitif exprimé par

$$\frac{3^f,254547 [(1,0125)^{40} - 1]}{0,025} \text{ ou } 83^f,787560,$$

et, au bout des 30 années suivantes, si l'obligation ne tombe au sort qu'au bout de ce temps, ce capital devient

$$83^f,787560 \cdot (1,0125)^{30} \text{ ou } 176^f,555530.$$

D'autre part, pendant ces 30 années, les déboursés de la Société s'élèvent à 4^f,817827 > 30 ou..... 144^f,534810

Son bénéfice en 50 ans est donc.... 32,020720 et par conséquent son bénéfice annuel en est le cinquième ou..... 0,640414

Par un calcul semblable, on trouverait que pour un prêt de 40 ans le bénéfice annuel pour 100^f prêtés est 0^f,786910.

X. Il résulte de la comparaison faite plus haut entre la recette et la dépense de la Société que tant que l'emprunteur paye son annuité, la Société se trouve entièrement couverte. Mais il n'en est plus de même quand l'emprunteur se libère par anticipation. En effet, dès qu'un emprunt de 100^f est remboursé, la Société est obligée par ses statuts de rembourser un dixième d'obligation ; l'emprunteur cessant de servir les intérêts pour la somme qu'il rembourse, il est nécessaire qu'il ajoute à cette somme 20 pour 100 pour tenir compte de la prime que la Société doit payer au porteur d'obligation.

Mais l'amortissement s'effectuant au taux de 3,70 pour l'emprunt, tandis qu'il s'effectue au taux de 2,50 pour l'obligation, les sommes qui restent dues de part et d'autre sur un prêt de 100^f ou sur un dixième d'obligation, au bout d'un même nombre *n* d'années, ne sont pas les mêmes. L'annuité à payer pour amortir un capital de 100^f en 50 ans, les intérêts étant calculés à 2^f,50 pour 100 et capitalisés par semestre, est

$$\frac{100^f \times 0,025}{(1,0125)^{100} - 1} \text{ ou } 1^f,014856.$$

On a déjà vu qu'au taux de 3,70 pour 100, l'amortissement annuel est 0^f,704332. La différence entre les capitaux amortis au bout de *n* années dans ces deux hypothèses est donc

$$\frac{0^f,704332 [(1,0185)^{2n} - 1]}{0,037} - \frac{1^f,014856 [(1,0125)^{2n} - 1]}{0,025}.$$

Cette différence exprime aussi l'excès du reste d'emprunt à amortir sur le reste d'obligation, excès qui est à l'avantage de la Société. On trouve que pour

<i>n</i> = 10 cet excès, ou ce bénéfice est...	3 ^f ,019024
<i>n</i> = 20	5,581259
<i>n</i> = 30	6,802046
<i>n</i> = 40	5,605661

C'est pour tenir compte de ces différences que, sur les 20 pour 100 du reste à payer par l'emprunteur dans le cas d'une libération anticipée, la Société remet autant de fois 1 1/2 pour 100 qu'il y a eu de versements effectués. Cette remise est un peu inférieure à la différence des deux amortissements. En effet, le reste *R* du capital à amortir, a pour valeur

$$R = 100^f - \frac{0^f,704332 [(1,0185)^{2n} - 1]}{0,037}$$

et, d'après ce qui a été dit plus haut, la remise faite par la Société a pour expression

$$R \times 0,20 \times 0,015 \times (n-1) \text{ ou } 0,003(n-1) \cdot R.$$

En effectuant les calculs on trouve que

pour <i>n</i> = 10, la remise accordée est	2 ^f ,472389
— <i>n</i> = 20,	4,528880
— <i>n</i> = 30,	5,381548
— <i>n</i> = 40,	4,274620

nombrés un peu inférieurs à la différence correspondante des deux amortissements. Mais la Société n'aurait pu, sans perte, porter la remise dont il s'agit à 2 pour 100 au lieu de 1 1/2 pour chacun des versements déjà effectués.

XI. L'emprunteur qui veut se libérer par anticipation, soit en totalité, soit en partie, peut payer en obligations foncières au lieu de payer en argent. Ces obligations, dont le cours est variable, sont alors reçues *au pair* par la Société du crédit foncier. Leur achat sur la place donne lieu à un courtage de $\frac{1}{8}$, ou 0,125, pour 100.

Lorsque l'emprunt a été contracté pour 50 ans, au taux de 3,70 pour 100, l'emprunteur en se libérant par anticipation est dispensé de la prime de 20 pour 100 s'il paye en obligations foncières ; car toute obligation qui rentre ainsi est immédiatement annulée, et la Société n'a plus de prime à servir.

CRÉMAILLÈRE, tige rectiligne armée de dents, qui engrène avec une roue dentée. Elle sert à transformer un mouvement circulaire continu en rectiligne continu, ou *vice versa* (*Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT*). L'engrenage formé par la crémaillère et la roue n'est qu'un cas particulier de l'engrenage cylindrique, c'est celui où le rayon de la circonférence primitive de l'une des deux roues est devenu infini ; cette circonférence se réduit alors à une droite, tangente à la circonférence primitive de la roue, et, par analogie, on donne encore le nom de *ligne des centres* au rayon qui va au point de contact, c'est-à-dire à la perpendiculaire abaissée du centre de la roue sur la direction de la crémaillère. L'engrenage se construit du reste par les mêmes méthodes, et à chaque solution de l'engrenage cylindrique répond une solution de l'engrenage de la crémaillère.

Considérons d'abord l'engrenage à flancs réciproque. Soit OA (fig. 1) la circonférence primitive de la roue, et CC, tangente A, la *droite primitive* de la crémaillère. Appliquons la méthode des roulettes. Décrivons une circonférence sur AO comme diamètre, et faisons-la rouler sur la droite CC et sur la circonférence primitive O de la roue ; dans le

premier mouvement, le point A, considéré comme mobile, décrira un arc de cycloïde; et dans le second, il décrira le rayon AO. Si l'on donne à la dent de la roue un flanc Af, on devra donc donner à la

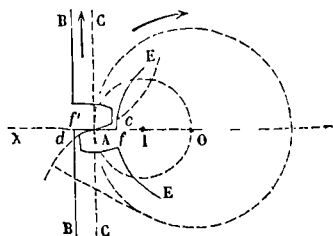


Fig. 1.

dent de la crémaillère un profil curviligne correspondant suivant l'arc de cycloïde Ac. Si l'on complète ensuite le profil de la dent de la crémaillère en lui donnant un flanc Af', la courbe correspondante de la dent de la roue devra être un arc Ad de la développante de sa circonférence primitive; de cette manière, la roue tournant dans le sens de la flèche, la dent de la crémaillère sera poussée parallèlement à elle-même d'une quantité égale à celle dont un point de la circonférence primitive aura tourné. Ainsi, avant la ligne des centres, le flanc Af poussera la cycloïde Ac; après la ligne des centres, la développante Ad poussera le flanc Af'. Si le mouvement a lieu en sens contraire des flèches, avant la ligne des centres le flanc Af' poussera la développante Ad, et après la ligne des centres la cycloïde Ac poussera le flanc Af. L'engrenage sera donc à retour. On donne aux dents un profil symétrique par rapport au rayon, s'il s'agit de la roue, et par rapport à une parallèle à la ligne des centres, s'il s'agit de la crémaillère. Pour limiter la saillie des dents, on tracera les deux dents suivantes, et par leur point de contact on fera passer une circonférence concentrique à AO qui

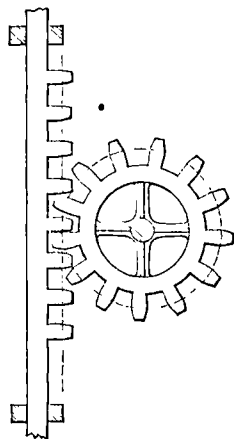


Fig. 2.

tronquera les deux dents de la roue, et une parallèle à CC qui tronquera les dents de la crémaillère. Pour limiter le creux, on tracera une circonférence EE du centre O, de manière à passer le plus près possible de la dent de la crémaillère tangente en A, en ne laissant que le jeu indispensable, et une droite BB parallèle à CC et passant le plus près possible de la dent correspondante de la roue. La figure 2 représente l'engrenage dont il vient d'être question.

L'engrenage cylindrique à développantes fournit également une solution de l'engrenage de la crémaillère.

Soit LL (fig. 3) une droite quelconque menée par le point A, et OP la perpendiculaire abaissée

du centre O sur cette droite; on décrira la circonférence qui a pour rayon OP; les dents de la roue devront être limitées par des développantes de la circonférence OP. Pour la crémaillère, la circonfé-

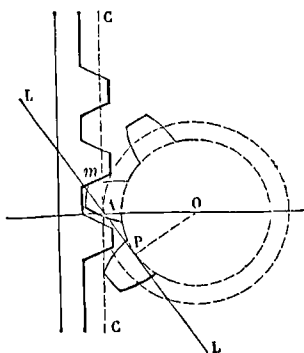


Fig. 3.

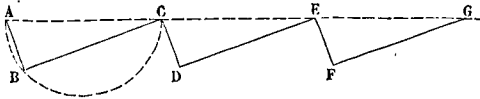
rence analogue à OP devient une droite perpendiculaire à LL, attendu que son rayon devient infini comme celui de CC; il en résulte que les dents de la crémaillère ont pour profil des droites perpendiculaires à LL. La figure 3 montre cette disposition.

On peut d'ailleurs appliquer à l'engrenage de la crémaillère les règles établies à l'art. ENGRENAGES pour le nombre et les dimensions des dents de l'engrenage cylindrique.

L'engrenage à lanternes fournit enfin une dernière solution pour l'engrenage de la crémaillère, ou plutôt deux solutions, car on peut donner des fuseaux soit à la roue, soit à la crémaillère. Si l'on donne des fuseaux à la roue, le centre du fuseau décrit dans le mouvement relatif, non plus une épicycloïde, mais bien une cycloïde; la courbe de l'alluchon de la crémaillère doit être alors une développante de cycloïde, car la développée d'une cycloïde étant une cycloïde, la courbe équidistante, qui doit limiter l'alluchon, doit être une développante de cette développée. Si l'on donne des fuseaux à la crémaillère, le centre du fuseau décrit dans le mouvement relatif une développante de la circonférence primitive de la roue, puisque la ligne primitive de la crémaillère est une droite tangente à cette circonférence primitive. La courbe équidistante qui doit limiter l'alluchon de la roue est donc une autre développante de la même circonférence. Les questions relatives à ce genre d'engrenage ont d'ailleurs plutôt un intérêt théorique qu'un intérêt pratique.

CRÉMAILLÈRE, ou ligne à crémaillères, suite de REDANS égaux et contigus (Voy. REDAN) offrant une série d'angles saillants et d'angles rentrants. Ordinairement, les faces adjacentes de cet ouvrage sont perpendiculaires entre elles, et la petite face AB est le tiers de la distance AC entre deux saillants consécutifs. Cet ouvrage est d'une défense imparfaite, puisqu'il présente un angle mort à chaque rentrant (Voy. FORTIFICATION). On l'emploie cependant dans les défilés, au bord des rivères, et dans diverses autres circonstances où l'on a besoin de plus de feu dans une direction que dans la direction perpendiculaire. Chacune des petites faces AB, CD, EF, ne bat que d'une manière incomplète

le secteur sans feux du saillant suivant; il est donc nécessaire que les coups puissent porter dans le secteur situé au delà; que AB, par exemple, porte des feux dans le secteur du saillant E. Ceci exige



que la distance de deux saillants consécutifs ne dépasse pas 120^m.

CRÉPUSCULE, lueur qui suit le coucher du soleil et précède son lever. Elle est due à la réflexion des rayons solaires par les couches supérieures de l'atmosphère. Cette lueur diminue d'intensité à partir d'un point central situé sur l'horizon dans le plan vertical passant par le centre du soleil, et s'étend dans tous les sens plus ou moins loin de ce centre, suivant les circonstances atmosphériques; sa durée moyenne, à l'équateur, répond au temps que le soleil emploie à parcourir un arc de 18°, c'est-à-dire qu'elle est d'environ 1^h 12^m; ainsi le crépuscule dure en s'affaiblissant depuis l'instant du coucher du soleil jusqu'à 1^h 12^m après ce coucher. Par contre, la lueur crépusculaire commence 1^h 12^m environ avant le lever du soleil, et va en augmentant d'intensité jusqu'au lever même de cet astre. (Voy. JOUR.) La durée du crépuscule augmente avec la latitude, parce que les parallèles décrits par le soleil sont de plus en plus obliques à l'horizon à mesure qu'on s'approche du pôle, et que par conséquent le soleil met plus de temps à parcourir l'arc de parallèle compris entre l'horizon et le cercle qui en est distant de 18°.

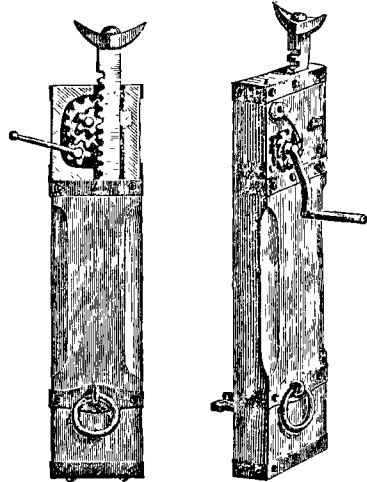
CRÊTES (d'un parapet), intersections du plan supérieur d'un parapet avec les talus; l'intersection avec le talus intérieur est la *crête intérieure*; l'intersection avec le talus extérieur est la *crête extérieure* (Voy. FORTIFICATION). Ces lignes sont ordinairement horizontales; cependant les exigences du DÉFILEMENT (Voy. ce mot) conduisent quelquefois à leur donner une inclinaison plus ou moins prononcée.

CRIC, machine à l'aide de laquelle on soulève d'une petite quantité des voitures pesantes, des pierres de taille, etc. Un cric se compose d'une crémaillère, qui engrène avec un pignon; sur l'axe de ce pignon est montée une roue dentée, qui engrène avec un second pignon; sur l'axe de ce dernier est montée une manivelle. Tout le rouage et la partie inférieure de la crémaillère sont logés dans une cavité creusée dans l'épaisseur d'une pièce de bois, et recouverte d'une plaque de fer; la manivelle seule se trouve placée à l'extérieur. Son axe est muni d'un ENCLIQUETAGE (Voy. ce mot) qui permet à la manivelle de tourner dans le sens convenable pour élever la crémaillère, mais qui l'empêche de tourner en sens contraire, à moins qu'on ne soulève à dessein le cliquet d'arrêt pour le dégager des dents de la roue à rochet. L'extrémité supérieure de la crémaillère se termine par un double crochet, qui sert à saisir plus aisément le fardeau qu'on veut soulever. La pièce de bois qui forme le corps du cric est munie d'armatures en fer pour empêcher le bois d'éclater, et d'un anneau pour faciliter le transport de l'appareil.

On se rend aisément compte de l'effet de cette machine. Soient ρ et ρ' les rayons des deux pignons, r celui de la roue, et R celui de la manivelle; P le poids à soulever, et F la force qu'il faut appliquer en m perpendiculairement au rayon de la manivelle. Soient enfin ω et ω' les vitesses angulaires des deux pignons. Le travail élémentaire de la force F dans le temps très-petit θ sera exprimé par

$$F \cdot R \omega' \cdot \theta.$$

Le travail élémentaire du poids P , dans le même temps, est égal à ce poids multiplié par le chemin



élémentaire que parcourt la crémaillère, lequel est égal au chemin élémentaire décrit par un point de la circonférence primitive du pignon p ; ce travail a donc pour expression

$$P \cdot \rho \cdot \omega \cdot \theta.$$

Mais, si l'on néglige le frottement, ces deux travaux doivent avoir la même valeur numérique. (Voy. EFFET DU TRAVAIL); on doit donc avoir

$$F R \omega' = P \rho \omega, \text{ d'où } F = P \cdot \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\omega}{\omega'};$$

mais le chemin élémentaire décrit à la circonférence primitive du pignon p' et de la roue r avec laquelle il engrène devant être le même, on a aussi

$$r \omega = \rho' \omega', \text{ d'où } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{r}.$$

Par conséquent, il vient en définitive

$$F = P \cdot \frac{\rho \rho'}{R r}, \quad [1]$$

formule qu'on aurait pu déduire aussi de la théorie des ROUAGES (Voy. ce mot).

Si, par exemple, on a $R = 5\rho'$ et $r = 3\rho$, on en déduira

$$F = \frac{1}{15} P.$$

Ainsi, pour soulever un poids de 600^k, il faudrait exercer sur le maneton de la manivelle un effort de $\frac{600}{15}$ ou 40^k.

CROSSETTE, brisure que l'on fait subir au joint du dernier claveau d'une plate-bande, pour l'empêcher de glisser sur le sommier (Voy. PLATE-BANDE). On taille quelquefois en crossette tous les claveaux, à l'exception de la clef. On retrouve les crossettes

dans l'appareil des VOÛTES PLATES (Voy. ce mot), et dans plusieurs autres problèmes de COUPE DES PIERRES.

On donne aussi le nom de *crossette* à une brisure qu'on fait subir au chambranle d'une porte ou d'une fenêtre, à la hauteur du linteau; c'est-à-dire qu'arrivé à ce point, le chambranle se brise à angle droit en s'éloignant de la baie, se brise de nouveau pour s'élever verticalement, et revient enfin dans le sens horizontal au-dessus de la baie. (Voy. PORTE, FENÊTRE.)

CROUPE, pan de charpente de figure triangulaire qui forme l'une des deux petites faces d'un COMBLE (Voy. ce mot). (Les grandes faces, dont la figure est celle d'un trapèze, sont désignées sous le nom de *longs pans*.) Une croupe est *droite* lorsque le bâtiment est de forme rectangulaire, et que par conséquent le plan supérieur de la croupe se trouve perpendiculaire au plan vertical mené par la ligne de faite. La croupe est *biaise* dans le cas contraire, c'est-à-dire quand la forme du bâtiment est celle d'un trapèze. L'étude d'une croupe, droite ou biaise, embrasse non-seulement toutes les pièces qui forment la croupe proprement dite, mais encore toutes celles par lesquelles elle se rattache au reste du comble, et qu'il convient d'abord d'énumérer. Dans le plan déterminé par la crête des murs on trouve d'abord une sorte de plancher, ou de pan de charpente horizontal, qui porte le nom d'*enrayure* ou de *plate-forme*; on y distingue (fig. 1) le *tirant* TT de

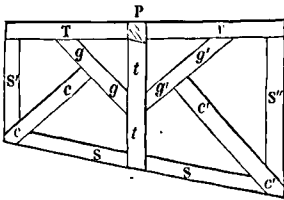


Fig. 1.

la première ferme de long pan, le *tirant* tt de la demi-ferme de croupe, qui s'assemble à tenon et mortaise dans le précédent (Voy. ASSEMBLAGES); les pièces obliques gg et g'g' nommées *goussets*, assemblées dans les tirants par des entailles à mi-bois; les pièces cc, c'c' nommées *coyers*, assemblées à tenon et mortaise dans les goussets; enfin la sablière de croupe SS et les sablières de longs pans, assemblées de la même manière avec les tirants et les coyers. Au point de rencontre P des deux tirants s'engage par un tenon une pièce verticale qui est le *poignon* (Voy. FERME) commun à la ferme de long pan, à la demi-ferme de croupe, et aux demi-fermes d'arêtier dont il sera question plus bas et dans lesquelles les coyers jouent le rôle de tirants. La ferme de long pan est une ferme ordinaire; mais pour simplifier l'étude de la croupe, on fait abstraction des arbalétriers, que l'on suppose remplacés par les chevrons correspondants; on fait la même hypothèse pour les demi-fermes. Si maintenant on fait abstraction de l'enrayure, à l'exception des sablières, pour ne considérer que les pièces en saillie, qui sont représentées en projection horizontale sur la figure 2, on trouvera : les chevrons CC de la

ferme de croupe, placé parallèlement à ces murs; les pièces obliques aa, a'a', nommées *arêtiers* ou *chevrons d'arête*, qui jouent le rôle de chevrons

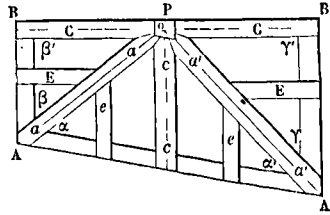


Fig. 2.

relativement aux demi-fermes d'arêtiers, et un certain nombre de pièces intermédiaires, telles que E, E, nommées *empanons de long pan*, et e, e, nommées *empanons de croupe*, placées parallèlement aux chevrons de long pan ou au chevron de croupe. Les chevrons et empanons de long pan ont leur face supérieure dans un même plan, que l'on appelle le *plan de lattis supérieur de long pan*. Les chevrons et empanons de croupe ont aussi leur face supérieure dans un même plan, appelé *plan de lattis supérieur de croupe*. Chacun des arêtiers, placé à l'intersection de deux plans de lattis supérieur de long pan et de croupe, présente à sa partie supérieure un angle dièdre dont les faces sont situées respectivement dans ces deux plans, et par conséquent une arête Oa ou Oa' qui a fait donner à cette pièce le nom d'*arêtier*. Les faces inférieures des chevrons et empanons de long pan forment de même le *plan de lattis inférieur de long pan*, et les faces inférieures des chevrons et empanons de croupe forment le *plan de lattis inférieur de croupe*. Les faces inférieures des arêtiers coupent ces plans de lattis inférieurs suivant des parallèles à l'arête. Chacun des plans de lattis supérieurs coupe le plan horizontal des sablières suivant une droite que l'on nomme *ligne d'about*; ainsi AB, A'B' sont les lignes d'about de longs pans, AA' est la ligne d'about de croupe. Chacun des plans de lattis inférieurs coupe de même le plan horizontal des sablières suivant une droite que l'on appelle *ligne de gorge*; aa' est la ligne de gorge de croupe; ββ' et γγ' sont les lignes de gorge de longs pans; ces lignes se coupent sur les droites OA et OA'. Le poignon est un prisme droit, dont la base, représentée par des hachures sur la figure 2, a ses côtés parallèles aux lignes d'about de long pan et de croupe; ses deux arêtes verticales antérieures sont dans les plans verticaux des arêtes correspondantes OA et OA'. Le point O situé à la rencontre des lignes milieu des projections horizontales des chevrons est le *centre* de la projection horizontale du poignon; c'est le point de concours des arêtes OA et OA'. Toutes ces dispositions sont justifiées par des considérations de symétrie et par conséquent de stabilité que le lecteur saisira aisément. Les chevrons C, C et c sont assemblés à tenon et mortaise avec le poignon; le plus souvent même ils sont embrévés; mais les arêtiers, qui ne sont mis en place qu'après, ne sont que posés sur le poignon; on y ménage pour cela des échancrures qui sont représentées en projection sur la figure 3. Les faces verticales latérales du

chevron de demi-ferme et de l'arêtier se coupent suivant une verticale projetée au point 1; on joint O1, et l'on a la trace 1.2 du plan vertical suivant lequel les deux pièces se touchent et que l'on

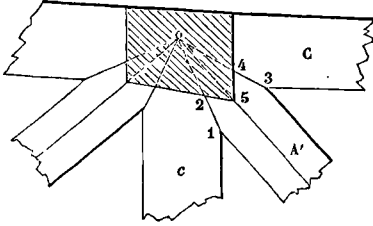


Fig. 3.

nomme *plan de déjoutement*; l'arêtier touche le chevron de grande ferme C suivant un autre plan de déjoutement dont la trace horizontale est 3.4. L'arêtier est en outre coupé par les faces verticales du poinçon suivant des plans verticaux dont les traces sont 2.5 et 4.5; ces plans portent le nom de *plans d'engueulement*, et ce sont ces deux plans qui forment l'échancrure par laquelle l'arêtier s'appuie sur le poinçon. Les chevrons et les arêtiers s'assemblent à tenon et mortaise avec les tirants ou les coyers; les empanons reposent sur les sablières par de simples embrèvements sans tenon.

Tel est l'ensemble des pièces qui constituent la croupe ou par lesquelles elle se trouve reliée au reste du comble. Quant aux opérations géométriques nécessaires pour déterminer la forme de ces pièces, on les trouvera expliquées aux deux articles suivants. Ces opérations consistent essentiellement à obtenir les projections de la pièce que l'on considère sur deux plans parallèles à ses faces latérales; pour chaque arêtier on emploie un plan de projection parallèle au plan vertical qui contient l'arête, et un plan parallèle à la face inférieure de l'arêtier; pour chaque chevron ou empanon on emploie un plan de projection parallèle aux faces latérales verticales de la pièce, et le second plan de projection

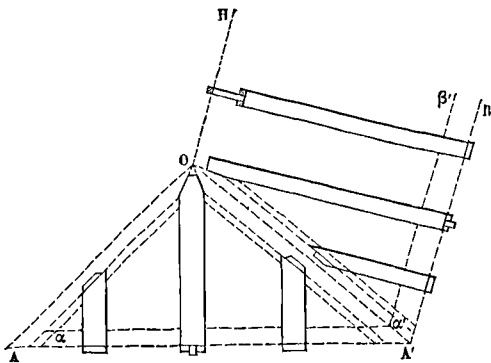


Fig. 4.

est le plan de lattis supérieur. Si l'on imagine que les plans de lattis supérieur de long pan et de croupe, contenant les projections des chevrons et empanons correspondants, soient ramenés dans un

même plan, on obtient une figure à laquelle on donne le nom de *herse*. Par extension, on donne le nom de *herse* à la projection d'une quelconque des pièces sur le plan de lattis supérieur, et l'on se sert de l'expression *projeter sur la herse* ou *à la herse*, signifiant *projeter sur le plan de lattis supérieur*. La herse est représentée figure 4. Les lignes AA' et A'B' sont les rabattements des lignes d'about; OA et OA' sont les arêtes saillantes des arêtiers; OH est le rabattement de la ligne de faite; $\alpha\alpha'$ et $\alpha'\beta'$ sont les rabattements des lignes de gorge. Les projections des chevrons et empanons sur la herse seront données avec plus de détails aux articles CROUPE DROITE et CROUPE BIAISE.

Les combles cylindriques peuvent aussi présenter des croupes, qui ont la même disposition générale que les croupes des combles plans, et se composent des mêmes pièces. La différence consiste en ce que les arbalétriers, les arêtiers, les chevrons et les empanons sont courbes, et ordinairement elliptiques. On trace ces ellipses par points ou d'un mouvement continu, en supposant les pièces rabattues horizontalement. Dans les croupes des combles elliptiques on ne fait point usage des EMPANONS DÉVERSÉS (Voy. ce mot).

CROUPE BIAISE, croupe dont le plan est oblique par rapport au plan vertical mené par la ligne de

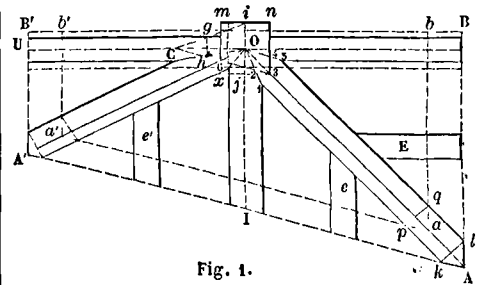


Fig. 1.

faite, et dont la ligne d'about est par conséquent oblique par rapport aux lignes d'about de longs pans; ce qui suppose que le comble dont la croupe fait partie recouvre un bâtiment ayant la forme d'un trapèze.

La figure 1 montre la disposition générale d'une croupe biaise, projetée sur le plan horizontal; pour ne pas compliquer le dessin, on a supprimé toutes les pièces de l'enrayure, à l'exception du tirant de la ferme de long pan, qui est figuré par des lignes ponctuées. La ligne milieu OI du chevron de demi-ferme se projette parallèlement aux lignes d'about de long pan AB et A'B' (Voy. CROUPE); les empanons de croupe e, e' ont leurs arêtes parallèles à celles du chevron de demi-ferme; les empanons de long pan E ont leurs arêtes parallèles à celles du chevron de la grande ferme qui leur correspond. Le nombre de ces derniers chevrons est nécessairement plus grand d'un côté que de l'autre, à cause de l'obliquité de la ligne d'about de croupe AA';

sur la figure il n'y a qu'un empanon sur la ligne d'about AB; il n'y en a pas sur la ligne d'about A'B'.

Après avoir placé d'une manière convenable le

aura ainsi en $3'3''4''4'$ la projection verticale de l'une des deux faces de déjoutement; on obtiendra de la même manière la projection $2'2''1'1''$ de la seconde. On opérera d'une manière semblable pour avoir la projection du tenon par lequel le chevron s'assemble avec le poinçon. Quant au tenon et à l'embranchement par lesquels le chevron s'assemble avec le tirant de demi-ferme, ils sont représentés sur la figure 3, qui montre suffisamment comment on doit opérer pour les obtenir.

Pour avoir la section droite de la pièce, on mè-

nera par le point γ' un plan $\gamma\gamma's$ perpendiculaire à $l'H$; ce plan coupe les arêtes en des points qui ont pour projection verticale les points a', b', c', d' ; en rabattant ce plan sur le plan horizontal, on amènera les quatre points dont on parle en a, b, d, γ ; le parallélogramme $abd\gamma$ sera donc la section droite demandée.

Il faut se procurer en second lieu la projection du chevron sur la herse, c'est-à-dire sur le plan de sa face supérieure. Soit $1.2.3.4.\delta.\alpha$ (fig. 4) la projection horizontale du chevron. On mènera d'a-

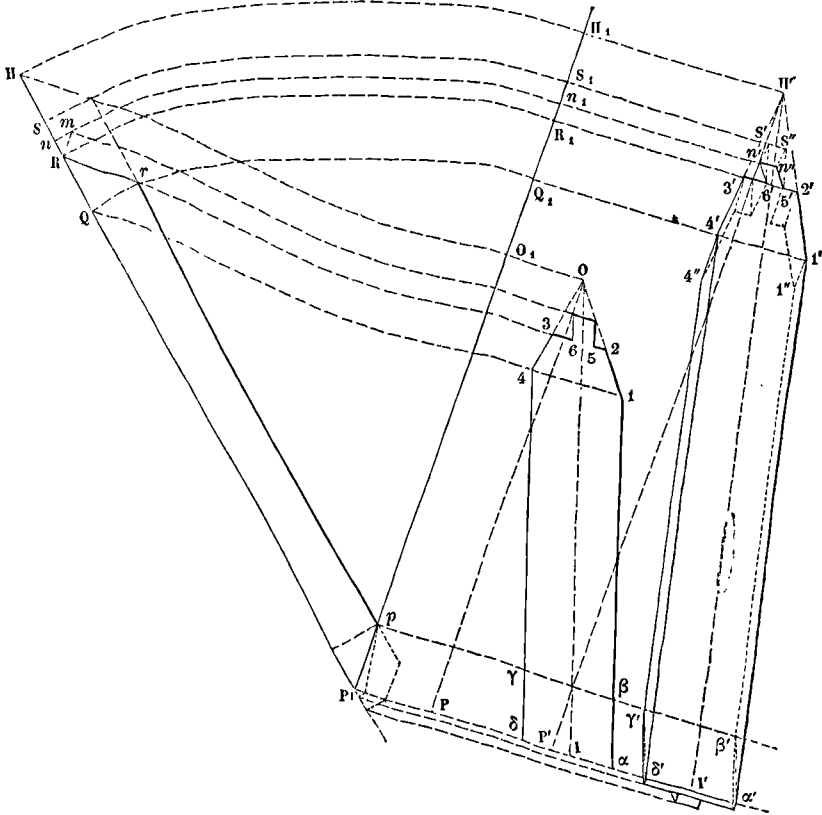


Fig. 4.

bord un plan vertical perpendiculaire à la ligne d'about de croupe $\alpha\delta$; soit O_1P_1 la trace horizontale de ce plan; et supposons-le rabattu sur le plan horizontal. Élevons sur O_1P_1 la perpendiculaire O_1H égale à $O'H$ de la figure 3, c'est-à-dire à la hauteur de la ligne de couronnement au-dessus du plan des tirants. La droite HP_1 sera le rabattement de l'intersection du plan considéré avec le plan de la herse; et si on lui mène une parallèle par le point p où la ligne de gorge $\beta\gamma$ rencontre O_1P_1 , on aura le rabattement pq de l'intersection de ce même plan avec le plan de lattis inférieur. Les droites Qq et Rr menées perpendiculairement à O_1P_1 par les points 4 et 3 seront respectivement dans les plans verticaux menés par les arêtes antérieures des

faces de déjoutement et par les arêtes postérieures de ces mêmes faces.

Cela posé, concevons qu'on projette le chevron sur le plan de lattis supérieur, et qu'on fasse ensuite tourner ce plan autour de la ligne d'about pour le rabattre sur le plan horizontal. La droite qui a pour projections O_1 et P_1H se rabattra suivant une perpendiculaire OP à la ligne d'about menée par le point O ; et les arêtes latérales du chevron se rabattront de même suivant des perpendiculaires à la ligne d'about menées par les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pour rendre la figure plus claire, nous transporterons ces quatre points, ainsi que les points P et I , d'une même quantité vers la droite, en $\alpha', \beta', \gamma', \delta', P', I'$. Si l'on prend $P'H'$ égal à P_1H , on

aura le rabattement du point H; et en tirant H' I' on aura la direction des arêtes du chevron projetées sur la herse; on aura donc ces projections elles-mêmes en menant des parallèles à I'H' par les points α' , β' , γ' , δ' . En rabattant le point Q en Q₁ par un arc de cercle décrit de P comme centre, et élevant au point Q₁ une perpendiculaire à H₁P, on aura les extrémités 1' et 4' des arêtes supérieures. En joignant ces points au point H', on aura les directions des arêtes supérieures des faces de déjoutement; pour terminer ces arêtes, on rabattra le point R en R₁, et on élèvera en R₁ une perpendiculaire à H₁P₁ qui donnera les points 2' et 3'. Quant aux arêtes antérieures et postérieures de ces faces, comme elles sont verticales, leurs projections sur le plan de lattis supérieur seront perpendiculaires à la ligne d'about; on n'a marqué sur la figure que les deux arêtes postérieures 4'4" et 1'1", dont la première seule est visible. — On prendra sur la projection horizontale l'épaisseur 5.6 du tenon, que l'on placera en 5'.6'. Si la face supérieure du tenon était le prolongement de la face supérieure du chevron, on mènerait par les points 5' et 6' des parallèles à I'H', ce seraient les arêtes supérieures du tenon; on les terminerait en s' et s" sur la perpendiculaire élevée à H₁P₁ par le rabattement s₁ du point s; et les arêtes verticales qui passent par les points s' et s" seraient projetées sur la herse par des perpendiculaires à la ligne d'about, ainsi qu'on l'a vu pour les arêtes antérieures et postérieures des faces de déjoutement. Mais le tenon étant coupé par un plan horizontal dont la trace verticale est Rm, la projection de cette face horizontale sur la herse devra être limitée par la droite n'n", menée perpendiculairement à H₁P₁ par le rabattement n₁ du point n, projection de m sur HP₁. Les arêtes supérieures du tenon seront donc les droites 5'.n" et 6'.n". La figure montre suffisamment comment il faut opérer pour obtenir la projection sur la herse, du tenon et de l'embrèvement par lesquels le chevron s'assemble avec le tirant.

Dans le système que nous décrivons, l'empanon de croupe doit être délardé comme le chevron; et ses projections, tant sur un plan vertical parallèle à ses faces latérales que sur le plan de lattis supérieur, s'obtiennent par des procédés identiques avec ceux qui viennent d'être indiqués pour le chevron.

Un autre système consiste à conserver au chevron et aux empanons de croupe leur équarissage primitif, et à placer leur face supérieure dans le plan de lattis supérieur; mais les faces latérales étant alors perpendiculaires à ce plan de lattis cessent d'être verticales, et l'on dit que la pièce est déversée. Les opérations géométriques nécessaires pour la tailler consistent dans ce cas à déterminer la projection de la pièce sur le plan horizontal et sur un plan parallèle à la face déversée; elles sont d'ailleurs les mêmes pour le chevron ou pour l'empanon. On les trouvera exposées à l'article EMPANON DÉVERSÉ.

Lorsque la croupe a beaucoup de biais, l'un des arêtiers se trouve très-voisin de la ferme de long pan, et il devient alors difficile d'établir convenablement le coyer et le gousset correspondants. On préfère employer une ferme de long pan oblique, comme l'indique la figure 5. Les empanons de long pan qui font partie de la croupe se placent parallèlement aux chevrons de cette ferme oblique. Les che-

vrons et empanons de croupe sont parallèles aux lignes d'about de long pan, et peuvent être délardés ou déversés comme précédemment. Entre la ferme oblique et la ferme droite qui suit, on est obligé

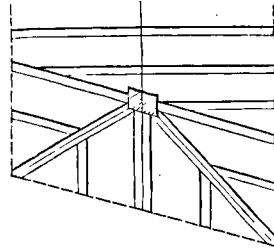


Fig. 5.

d'employer un ou plusieurs empanons droits ou chevrons-empanons, qui s'assemblent avec les chevrons de la ferme oblique, mais qui ont une direction perpendiculaire aux lignes d'about de long pan.

On pourrait, dans une croupe biaise, comme dans une croupe droite, placer le chevron et les empanons de croupe perpendiculairement à la ligne d'about, comme l'indique la figure 6; et, dans ce cas,

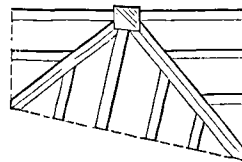


Fig. 6.

il serait inutile de les délarder ou de les déverser. Mais la composante horizontale du poids de la toiture que porte la croupe n'agirait plus alors dans le plan vertical mené par la ligne de faite; et, si le biais était considérable, il en résulterait un défaut de stabilité qui pourrait compromettre la solidité du bâtiment. C'est pourquoi, malgré la complication qui en résulte, on préfère placer les pièces dont il s'agit parallèlement aux lignes d'about de long pan, et recourir soit au délardement, soit au déversement. (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy.)

CROUPE DROITE, croupe dont le plan est perpendiculaire au plan vertical mené par la ligne de faite et dont la ligne d'about est par conséquent perpendiculaire aux lignes d'about de longs pans: ce qui suppose que le comble dont elle fait partie recouvre un bâtiment de forme rectangulaire. Les notions générales relatives à cette partie des combles ayant été exposées à l'article CROUPE, il s'agit ici de faire connaître les opérations graphiques nécessaires pour déterminer la forme des pièces de charpente qui entrent dans la composition d'une croupe droite. Conformément à l'usage, nous réduirons la longueur des pièces sans modifier leur équarissage, afin de rendre les détails de l'épure plus saisissables. Les pièces qui forment l'enrayure n'offrent aucune difficulté; nous nous occuperons particulièrement des pièces saillantes, c'est-à-dire du poinçon, des arêtiers, des chevrons et des empanons; nous continuerons à faire abstraction des

posante horizontale du poids de la toiture. Cette seconde considération est la plus importante parce que, le demi-tirant et les coyers n'étant rattachés à la ferme principale que par des tenons et des liens en fer, il est essentiel de diminuer la poussée qui tendrait à rompre ces assemblages. La distance du point O à la droite SL est ordinairement comprise entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{4}$ de la distance du même point à

la droite SK. La position du point O étant une fois fixée, on le joindra au point S; par les points A' et a' on mènera des perpendiculaires AB et ab à O'X, qui représenteront la ligne d'about et la ligne de gorge de long pan, et par les points A et a où ces lignes rencontreront OS on mènera des parallèles AC et ac à O'X, qui représenteront la ligne d'about et la ligne de gorge de croupe. La droite OA sera la projection horizontale de l'arête supérieure de l'arêtier.

Il s'agit maintenant de placer la base carrée du poinçon de manière que l'un de ses côtés soit parallèle à SL, et que l'un de ses sommets soit sur OA; c'est un problème de Géométrie élémentaire des plus simples: sur AI, à partir du point I, on portera une longueur égale au demi-côté du carré, et par l'extrémité de cette longueur on mènera une parallèle à OI qui rencontrera OA au sommet cherché O; le tracé du carré s'effectuera dès lors sans difficulté. On remarquera que, par suite de cette construction, le point O ne sera pas le centre du carré; ainsi la verticale du point O, à laquelle on donne le nom d'axe du poinçon, ne coïncidera pas avec l'axe de figure; on dit à cause de cela que le poinçon est *dévoiyé*. Pour qu'il ne le fût pas, il faudrait que le point O fût également éloigné de SK et de SL, c'est-à-dire que la pente de la croupe fût la même que celle des longs pans, ce qui arrive quelquefois.

On devoie de la même manière le tirant que porte le poinçon, c'est-à-dire qu'on le place de manière que les distances du point O aux deux arêtes supérieures parallèles à O'X soient dans le même rapport que les distances de ce même point aux côtés correspondants du carré. Pour remplir cette condition, on joindra le point O aux sommets 3 et 6 du carré; on prendra sur le prolongement de OI une longueur O7 égale à l'équarrissage du tirant; par le point 7 on mènera une parallèle à O3 jusqu'à la rencontre de O6 au point 8, et par le point 8 une parallèle à OI jusqu'à la rencontre de O3 au point 9; les points 8 et 9 seront sur les projections des arêtes latérales du tirant, et la projection de cette pièce sera dès lors facile à tracer. Le chevron de long pan devra être dévoyé de la même manière, et sa projection horizontale s'obtiendra par des opérations semblables. Pour obtenir la projection du chevron de demi-ferme, il suffira de mener des parallèles à OI, de part et d'autre de cette ligne, à des distances égales au demi-équarrissage du chevron, et de les terminer à la ligne d'about de croupe. Nous indiquerons plus loin les assemblages.

Quant à l'arêtier, sa forme primitive est celle d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes latérales sont parallèles à OA, et dont deux faces sont verticales. Son intersection par le plan supérieur des tirants, intersection que l'on appelle le *pas* de la pièce, est donc un rectangle dont un côté *mn* passe par le point A et est perpendiculaire à OA.

Mais, pour que les arêtes inférieures se trouvent respectivement dans le plan de lattis inférieur de long pan et dans le plan de lattis inférieur de croupe, il faut que le côté opposé *pq* du rectangle ait ses extrémités sur les lignes de gorge de long pan et de croupe, ce qui oblige à dévoyer aussi l'arêtier. Pour cela on prendra sur *mn*, à partir du point A, une longueur *Ai* égale à l'équarrissage de l'arêtier; on mènera *il* parallèle à SL, et terminé à la ligne de gorge de long pan; et par le point *l* une droite *lk* perpendiculaire à OA et terminée à la ligne de gorge de croupe; les points *l* et *k* appartiendront aux projections horizontales des arêtes latérales de l'arêtier, et l'on mènera par ces deux points les droites *lq* et *kp* parallèles à OA. Les conditions que l'on s'est imposées seront évidemment remplies. On peut démontrer qu'en plaçant l'arêtier de cette manière il en résulte une petite économie dans le bois employé (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy, n° 912), mais cette considération est de peu d'importance. L'arêtier ne conserve pas la forme d'un parallélépipède; il faut qu'il représente à la partie supérieure deux faces situées respectivement dans les plans de lattis supérieurs de long pan et de croupe; il est donc nécessaire d'enlever du parallélépipède les deux prismes triangulaires ayant leurs arêtes latérales parallèles à OA et qui ont pour bases sur le plan horizontal les triangles *Aml* et *Ank*. C'est ce que l'on appelle *déclarder* l'arêtier; l'opération du *déclardement* est celle par laquelle le charpentier termine la pièce. La face verticale qui a pour trace *kp*, rencontre la face verticale correspondante du chevron de demi-ferme, suivant une verticale représentée par le point I. On joint OI, qui rencontre au point 2 le côté du carré; et 1.2 est la trace de l'un des plans de déjoutement (Voy. CROUPE); l'arêtier et le chevron devront être taillés suivant ce plan vertical. De même, la face verticale qui a pour trace *lq* rencontre le chevron de la grande ferme suivant une verticale représentée par le point 5; on joint O5, qui rencontre au point 4 un autre côté du carré; la ligne 4.5 est la trace du second plan de déjoutement, suivant lequel l'arêtier et le chevron doivent être taillés. Enfin les lignes 2.3 et 2.4 sont les traces des deux plans d'engueulement suivant lesquels l'arêtier doit encore être taillé. Les empanons de long pan et de croupe ont leurs arêtes latérales perpendiculaires aux lignes d'about correspondantes; ils s'engagent dans l'arêtier par des tenons indiqués sur la figure 2 et dont le tracé n'offre aucune difficulté. Le *pas* de ces diverses pièces, compris entre les lignes d'about et de gorge, est marqué par des hachures sur la figure 2.

Pour pouvoir exécuter ces diverses pièces, il faut avoir la projection de chacune sur un plan parallèle à l'une de ses faces latérales, et sur un second plan qui, pour les chevrons et empanons, est le plan de lattis supérieur, et pour l'arêtier le plan de sa face inférieure. Il s'agit donc de reprendre ces pièces une à une afin de construire les deux projections indispensables.

La figure 1 donne la projection du chevron de la grande ferme sur un plan parallèle à l'une de ses faces latérales. Pour obtenir sa projection sur la herse, ou sur le plan de lattis supérieur de long pan, il faut imaginer que, sans changer la direction

horizontale 1 2; on la terminera à la rencontre de la perpendiculaire 2 . 6. La perpendiculaire élevée par le point 3 rencontrera HA, en un point 7 que l'on joindra au point 6; et l'on aura l'arête supérieure d'un des plans d'engueulement : celle qui est projetée horizontalement en 2 . 3. La perpendiculaire élevée au point 4 rencontrera 6 . 7 en un point ϵ qui, joint au point 7, donnerait la projection verticale de l'arête supérieure du second plan d'engueulement; cette projection se confond donc avec 6 . 7. Enfin la perpendiculaire élevée au point 5 rencontre $\alpha\beta$ en un point δ , qui, joint au point ϵ , donnera la projection verticale de l'arête supérieure du second plan de déjoutement. On l'a marquée en points sur la figure, parce qu'elle n'est pas visible pour le spectateur placé en avant du plan vertical de projection. On tracera aisément le tenon et l'embrèvement par lesquels l'arétier s'assemble avec le coyer; on l'a indiqué sur les projections horizontale et verticale par des lignes ponctuées.

Il faut ensuite projeter l'arétier sur un plan parallèle à la face inférieure; et, pour cela, on opérera comme pour les autres pièces; c'est-à-dire que, sans changer la direction de ses arêtes latérales, on lui fera faire un quart de tour sur lui-même. Si, dans cette nouvelle position, on le projette sur le plan vertical, on aura le même résultat que si l'on eût projeté l'arétier sur sa face inférieure sans lui donner aucun mouvement de rotation. Mais comme les charpentiers sont dans l'usage de tailler les plans de déjoutement et d'engueulement avant de délar- der l'arétier, il faut, dans cette dernière projection, supposer que la section droite de l'arétier est encore un carré; c'est-à-dire que, dans la projection précédente, il ne faut pas tenir compte des arêtes projetées en $\alpha\beta$. On prolongera donc les perpendiculaires élevées aux points 1, 2, 3, 4, 5, jusqu'à la rencontre de la droite HA, qui est la trace de la face supérieure de l'arétier avant le délar- dement; et, par les points 7, 8, 9, 10, 11 ainsi obtenus on mènera des perpendiculaires à HA. Puis, après avoir tracé deux parallèles à HA, distantes d'une quantité égale à l'équarrissage de l'arétier, il sera facile d'achever la figure 9, où les longueurs sont prises sur la projection verticale (fig. 8) et les largeurs sur la projection horizontale.

Quant au poinçon, sa forme est suffisamment indiquée sur la figure 1.

On a supposé, dans ce qui précède, que les chevrons et l'arétier étaient assemblés avec le poinçon par des tenons sans embrèvement. Lorsque les pièces sont embrévées, les faces d'engueulement ne sont plus verticales; et cette circonstance introduit une modification dans le tracé de l'arétier. Cette modification est indiquée sur la figure 10 qui doit, dans ce cas, remplacer la figure 8. A l'intérieur du carré abc qui représente la section droite du poinçon, on voit un contour 0.7.9 qui marque la profondeur de l'embrèvement. (On l'a un peu exagérée pour rendre la figure plus lisible.) Les plans d'engueulement, au lieu de se projeter horizontalement suivant les droites 2.3 et 3.4 comme dans la figure 8, se projettent suivant les trapèzes 2.3.7.6 et 3.4.8.7. Dès lors les points 2, 3, 4, au lieu d'être projetés verticalement sur les faces délar- dées, se projettent en 2', 3', 4' sur la face inférieure

de l'arétier; et ce sont les points 6, 7, 8 qui se projettent verticalement en 6', 7', 8' sur les faces délar- dées. L'intersection des deux plans d'engueulement, au lieu d'être une verticale projetée horizontale-

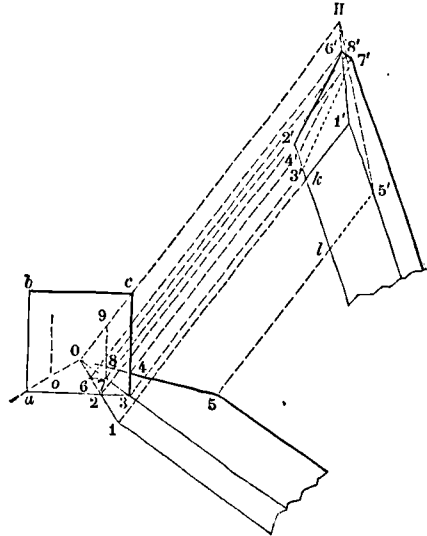


Fig. 10.

ment au point 3, est une droite inclinée dont les projections sont 3.7 et 3'.7'. Les intersections des plans d'engueulement avec les plans de déjoutement, au lieu de se projeter aux points 2 et 4, sont aussi des droites inclinées qui ont pour projections 2.6 et 2'.6' d'une part, 4.8 et 4'.8' de l'autre. Les faces d'engueulement se projettent verticalement suivant les quadrilatères 2'.3'.7'.6' et 3'.4'.8'.7'; les faces de déjoutement se projettent de même suivant les quadrilatères 1'.6'.2'.k et 5'.8'.4'.l. La projection de l'arétier sur un plan parallèle à sa face inférieure s'obtient d'ailleurs comme dans le cas précédent.

Le poinçon a la forme indiquée en perspective par la figure 11. (Voyez pour plus de détails le

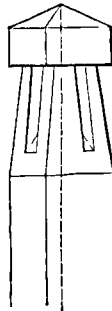


Fig. 11.

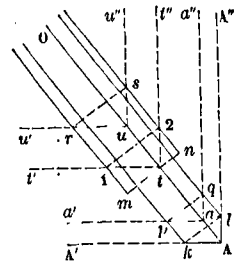


Fig. 12.

Traité de Charpente de J. Adhémar, n° 344 et suiv.)

En réalité, il y a au-dessous de l'arbalétrier un arbalétrier, auquel on donne le nom d'arbalétrier d'arétier. Cet arbalétrier se dévoie comme l'arétier

lui-même. Supposons que l'on ait construit le profil de croupe et le profil de long pan en ayant égard, dans chaque profil, au chevron et à l'arbalétrier, et soient AA' et AA'' (fig. 12) les deux lignes d'about des chevrons, aa' et aa'' les lignes de gorge correspondantes; soient tt' et tt'' les lignes d'about des arbalétriers, uu' et uu'' leurs lignes de gorge. Après avoir placé l'arétier comme il a été dit plus haut, on placera la ligne d'about mn de l'arbalétrier d'arétier de manière qu'elle passe par le point t , point de rencontre des lignes d'about des arbalétriers des deux profils, et que les arêtes latérales mr et ns rencontrent les lignes de gorge uu' et uu'' sur une perpendiculaire rs à OA , ce qui se fera comme pour l'arétier. Cette ligne rs sera la ligne de gorge de l'arétier. Le pas de l'arétier sera le pentagone $Akpql$ comme il a été dit plus haut; le pas de l'arbalétrier d'arétier sera le rectangle $mrsn$. Les côtés mr et ns couperont les lignes d'about des arbalétriers des deux profils suivant une droite 1.2 parallèle à mn .

CUBAGE, évaluation en mètres cubes, décimètres cubes, etc., ou plus généralement en mesures cubiques quelconques, du volume d'un corps solide, de la capacité d'un vase ou d'un bassin, et généralement d'une portion quelconque de l'espace à trois dimensions.

Toutes les fois que l'espace considéré a une forme géométrique, le cubage s'opère par les règles de la Géométrie (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 5^e édit., n^o 678 et suivants). Si cet espace, sans avoir une forme régulière, approche d'une forme géométrique, on applique le mode de calcul relatif à la figure géométrique dont il s'approche. Ainsi, pour la mesure des bois en grume (bois coupés, non encore dépouillés de leur écorce), on les assimile ou à un tronç de cône ou à un cylindre.

Si l'espace considéré a une forme tout à fait irrégulière, le cubage peut s'effectuer à l'aide de la formule de Th. Simpson (Voy. QUADRATURES). Pour en donner un exemple, supposons qu'il s'agisse d'évaluer le volume d'un monticule de terre. Concevons qu'on y ait pratiqué des sections horizontales équidistantes, et soient $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les aires des sections répondant aux hauteurs $0, h, 2h, \dots, nh$. Le contour de chacune de ces sections peut s'obtenir par un nivellement, car elles ne sont autre chose que les courbes de niveau considérées en topographie; ces sections ainsi obtenues, il est aisé d'en déterminer l'aire. Cela posé, on a tous les éléments nécessaires pour calculer avec une approximation suffisante le volume demandé. Supposons, en effet, qu'au lieu d'un nombre fini de sections horizontales, on en ait mené une infinité à des distances égales infiniment petites; soit ω l'aire d'une quelconque de ces sections, dx la différence de niveau de deux sections consécutives, Z la hauteur maximum du monticule, et V le volume demandé. Ce volume pourra être considéré comme la somme d'une infinité de prismes infiniment minces, ayant dx pour hauteur et pour base les différentes sections horizontales; on aura donc rigoureusement

$$V = \int_0^Z \omega dx.$$

Mais en vertu de la formule de Th. Simpson, appli-

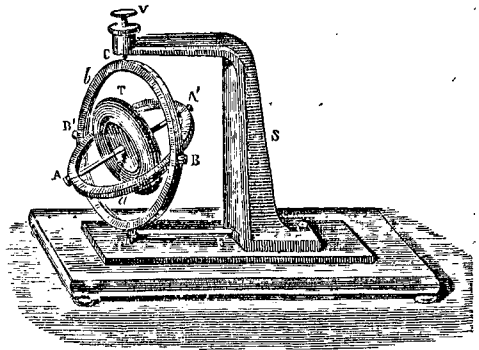
cable au calcul approché de toutes les intégrales définies, si l'on a $Z = nh$, on pourra écrire approximativement

$$V = \frac{h}{3} \left[(\omega_0 + \omega_n) + 4(\omega_1 + \omega_3 + \omega_5 + \dots) + 2(\omega_2 + \omega_4 + \dots) \right].$$

Cette formule donnera, avec une approximation généralement suffisante pour les besoins de l'application, le volume du monticule. (Voy. les articles JAUGEAGE, DÉPLACEMENT.)

CULBUTEUR DE M. HARDY, appareil propre à démontrer expérimentalement la tendance des axes de rotation à se placer parallèlement, de telle sorte que les rotations s'exécutent dans le même sens.

Un tore métallique pesant T est mobile autour de son axe de figure AA' , dont les extrémités s'enga-



gent dans un anneau AaA' . Cet anneau est mobile lui-même autour d'un axe horizontal BB' , formant un diamètre d'un anneau vertical CBC' , auquel il est articulé en B et B' . L'anneau CBC' est mobile à son tour autour d'un axe vertical CC' dont les extrémités sont fixes. A l'extrémité supérieure C est adaptée une vis V qui permet de serrer ce cercle pour l'empêcher de tourner. A l'extrémité inférieure C' est une petite poulie sur laquelle s'enroule une bande de caoutchouc dont l'autre extrémité est fixée en F au support S de l'appareil.

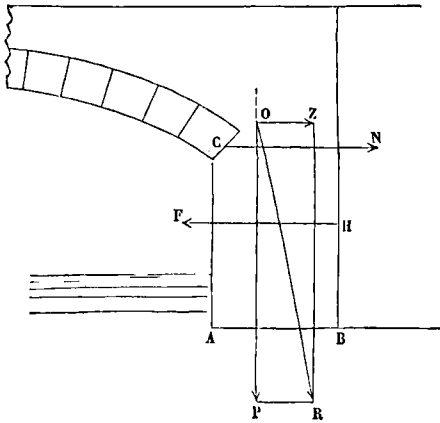
Supposons d'abord que le tore ne reçoive aucun mouvement de rotation autour de son axe AA' . Si l'on fait tourner le cercle vertical CBC' , on enroulera la bande de caoutchouc sur la poulie; et si alors on abandonne l'appareil à lui-même, la tension du caoutchouc fera tourner le cercle vertical dans le sens inverse de sa rotation primitive, jusqu'à ce que la bande de caoutchouc ait repris sa longueur naturelle. En vertu de sa vitesse acquise, le cercle vertical, continuant son mouvement, enroulera la bande de caoutchouc en sens inverse; et le même jeu recommencera jusqu'à ce que, les résistances passives diminuant l'amplitude des oscillations, elles finissent par s'éteindre.

Mais si le tore a reçu une grande vitesse initiale de rotation autour de son axe AA' , les choses se passent autrement. La bande de caoutchouc étant enroulée sur la poulie, et tendant à faire tourner le cercle vertical CBC' , cette rotation n'a pas lieu dans les premiers instants. Il faut, pour qu'elle s'effectue, que la rotation que tend à produire le

caoutchouc, se composant avec celle du tore, incline peu à peu l'axe de celui-ci jusqu'à ce qu'il devienne vertical, la rotation du tore s'effectuant dans le même sens que celle que tend à prendre le cercle vertical. C'est seulement alors que le cercle vertical se met à tourner. Quand le caoutchouc a été ainsi déroulé, puis enroulé en sens contraire, le cercle vertical redevient immobile, et ne peut revenir sur lui-même que lorsque, par suite de la composition de la rotation qu'il tend à prendre, avec celle dont le tore est animé, l'axe de celui-ci se renverse peu à peu et exécute une culbute complète, de manière que la rotation du tore se fasse autour de la verticale, dans le même sens que celle que le cercle vertical tend à prendre. Le même jeu recommence alors en sens contraire, chacun des mouvements alternatifs du cercle vertical étant suivi d'une culbute de l'axe du tore. Et le mouvement se continuerait ainsi indéfiniment, si son amplitude n'était peu à peu diminuée et anéantie par le travail des résistances passives.

CUL-DE-FOUR, l'un des APPAREILS employés dans la construction des VOÛTES SPHÉRIQUES (Voy. ce mot).

CULÉES, appuis extrêmes d'un pont, construits sur les deux rives du cours d'eau que le pont doit traverser. Si l'on fait abstraction des murs en retour d'équerre et de toutes les parties accessoires qui forment les abords d'un pont, la culée peut être considérée comme un parallélépipède de maçonnerie faisant suite à la dernière arche. La culée reçoit de cette dernière arche une réaction oblique qui se décompose en deux forces : l'une horizontale N est la poussée de la voûte (Voy. POUSSÉE DES



VOÛTES), l'autre verticale est le poids de la demi-arche. Ce poids, composé avec le poids de la culée elle-même, donnera un poids total que nous désignerons par P. La culée reçoit des terres contre lesquelles elle s'appuie une poussée horizontale F (Voy. POUSSÉE DES TERRES) dont on sait déterminer l'intensité et le point d'application. Les deux forces horizontales N et F, qui sont de sens contraire, donneront une résultante horizontale Z; et celle-ci, composée avec le poids P, donnera la réaction R que la culée exerce sur le sol. On devrait tenir compte, à la rigueur, de la pression exercée par

les eaux sur la culée, ce qui serait facile; on peut généralement en faire abstraction, et il arrive même souvent que la culée n'est point baignée par les eaux.

Il faudra pour l'équilibre et pour la stabilité de la culée : 1° que la force R rencontre la base AB dans son intérieur, et en un point I qui ne soit pas à une distance de B moindre que le tiers de AB, autrement il y aurait en A une pression négative, ce qu'on ne saurait admettre [Voy. COMPRESSION (Résistance à la)]; 2° que la composante verticale de R, c'est-à-dire P, divisée par la base de la culée, donne un quotient inférieur au poids par mètre carré que les matériaux employés peuvent supporter d'une manière permanente sans danger de rupture, c'est-à-dire inférieur à 10 000^k s'il s'agit de moellons, ou à 50 000^k s'il s'agit de pierres de taille; 3° que l'angle ROP que fait la force R avec la verticale, soit inférieur à l'angle du frottement de la pierre sur la pierre, c'est-à-dire inférieur à l'angle dont la tangente est 0,76, ou à 37° environ; autrement la culée pourrait glisser sur sa base (Voy. FROTTEMENT).

Ce procédé graphique est le moyen le plus simple et le plus clair de se rendre compte des effets qui tendent à se produire. Si les conditions énoncées ci-dessus n'étaient pas satisfaites, il faudrait augmenter l'épaisseur de la culée. On a proposé diverses formules pour calculer cette épaisseur; nous donnons ci-dessous, d'après M. Claudel, les formules de M. Léveillé; les résultats qu'elles fournissent, comparés aux épaisseurs réelles des culées d'un grand nombre de ponts existants, montrent que ces formules donnent une approximation suffisante. Voici ces formules :

Arches en plein cintre :

$$E = (0,60 + 0,612 d) \sqrt{\frac{h + 0,25 d}{H} \cdot \frac{0,865 d}{0,25 d + e}}$$

Arches en anse de panier :

$$E = (0,43 + 0,154 d) \sqrt{\frac{h + 0,54 d}{H} \cdot \frac{0,84 d}{0,465 f + e}}$$

Arches en arc de cercle :

$$E = (0,33 + 0,212 d) \sqrt{\frac{h d}{H f + e}}$$

Dans ces formules, E représente l'épaisseur de la culée, d l'ouverture de la voûte, f la flèche, e l'épaisseur de la voûte à la clef, h la hauteur comprise entre les naissances et la base de la culée, H la distance de la chaussée au-dessus de cette même base : on a généralement $H = h + f + e + 0^m,60$, ce dernier terme représente la hauteur de la surcharge et du pavage. La formule relative aux arches en anse de panier suppose que la flèche f diffère peu des deux tiers de la demi-ouverture.

Les ponts dont les arches sont en plein cintre sont ceux qui occasionnent la plus petite poussée, et dans lesquels les culées ont par conséquent la moindre épaisseur. Les ponts dont les arches sont en arcs de cercle sont au contraire ceux qui donnent lieu à la plus grande poussée, et dont les culées doivent avoir l'épaisseur la plus grande.

Dans les pays où la maçonnerie est chère et le bois abondant, on construit quelquefois en bois les culées des ponts en charpente. Une pareille culée se compose ordinairement d'une rangée de pieux, ayant la fiche nécessaire et s'élevant à la hauteur

de la travée, et recouverts d'une pièce horizontale appelée *chapeau*, sur laquelle s'appuient les poutres du plancher. De chaque côté s'étendent des ailes, ordinairement évasées, formées de pieux analogues, et d'un chapeau qui s'assemble à queue d'hironde avec celui de la culée proprement dite. La culée et les ailes reçoivent un revêtement formé de madriers placés horizontalement, et de paleplanches verticales jointives, derrière lesquelles on entasse des cailloux et du sable. Il peut être nécessaire de relier en outre les pieux par des tirants légèrement inclinés; dans tous les cas les ailes doivent être ainsi reliées à des pieux solidement battus dans la masse des terres au delà du prisme de poussée (*Voy. POUSSÉE DES TERRES*).

Les pieux de la culée doivent avoir une section suffisante pour résister d'une part à la force résultant du poids de la moitié de la première travée, laquelle force s'exerce dans le sens des fibres, et à la force résultant de la poussée des terres, laquelle s'exerce horizontalement. On aura donc à considérer chaque pieu comme une pièce prismatique encastree à l'une de ses extrémités, et soumise 1° à une force dirigée suivant sa longueur; 2° à une force transversale. (*Voy. FLEXION PLANE*.)

Pour les piles-culées en fonte, *Voy. l'article PALÉES*.

CULMINATION, passage supérieur du centre d'un astre au méridien, ou instant où ce centre traverse le plan du méridien en allant de l'est à l'ouest en vertu du mouvement apparent de la sphère céleste.

CULTELLATION, opération par laquelle on substitue à la surface réelle d'une terre sa projection horizontale. (*Voy. ARPENTAGE*.)

CUNETTE, canal que l'on creuse au fond du fossé d'un ouvrage fortifié, soit pour l'écoulement des eaux, soit pour ajouter à la défense. (*Voy. FORTIFICATION*.)

CUVETTE, entaille pratiquée dans une pièce de charpente pour recevoir le bout d'une autre pièce qui s'assemble avec elle par simple embrèvement. (*Voy. ASSEMBLAGES*.)

CUVETTE DE JAUGE, bassin établi près d'une pompe pour en évaluer le produit (*Voy. JAUGEAGE DES POMPES*).

CYCLE, nom donné, dans la théorie des machines thermiques, à la période au bout de laquelle la machine se retrouve dans l'état où elle était. Ainsi, dans une machine à vapeur, le cycle embrasse l'ensemble des phénomènes qui se produisent pendant une course du piston.

CYCLE LUNAIRE, période de 19 ans au bout de laquelle les lunaisons, et par suite les phases de la lune, reviennent aux mêmes dates. La durée moyenne de la révolution synodique de la lune, ou l'intervalle moyen de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs à la conjonction, est de 29,530588. Si l'on divise par ce nombre le nombre de jours contenus dans une période de 19 ans, c'est-à-dire $365,242264 \times 19$ ou 6939,603016, on trouve pour quotient 234,997035, nombre très-peu différent de 235. On peut donc admettre qu'une période de 19 ans renferme 235 lunaisons, d'où il suit qu'au bout de cette période de temps, les lunaisons doivent revenir aux mêmes dates. Ce cycle, imaginé ou introduit en Grèce par l'astronome

Méton, l'an 433 avant J.-C., excita à tel point l'admiration des Athéniens qu'ils le firent inscrire en lettres d'or dans leurs temples, d'où le nom de *Nombre d'or* (*Voy. ce mot*) qui a été conservé au rang de l'année dans le cycle lunaire.

Une période de 19 ans ne faisant pas exactement 235 lunaisons, on voit qu'il résulte de l'emploi du cycle lunaire une erreur en plus d'environ les 0,003 d'une lunaison, c'est-à-dire de $29,530588 \times 0,003$ ou de 0,08859... tous les 19 ans, soit de 1 jour au bout de 214 ans environ. (*Voy. ÉPACTE*.)

L'année qui a précédé notre ère est prise pour origine du cycle lunaire, parce qu'en cette année la nouvelle lune a eu lieu au commencement du 1^{er} janvier.

CYCLE SOLAIRE, période de 28 ans au bout de laquelle les dates des différents jours de l'année reviennent aux mêmes jours de la semaine. Si, par exemple, le 1^{er} janvier d'une année a été un samedi, et le 1^{er} mars un mardi, 28 ans après le 1^{er} janvier sera encore un samedi, et le 1^{er} mars un mardi. Pour s'en rendre compte, il faut remarquer que le nombre des jours d'une année commune, ou 365, est de la forme $7n + 1$, tandis que le nombre des jours d'une année bissextile est de la forme $7n + 2$; d'où il résulte que le nombre de jours contenus dans une période de 4 années consécutives, dont 3 communes et une bissextile, est de la forme $(7n + 1) \cdot 3 + 7n \cdot 2$ ou $28n + 5$. Aucune des périodes dont nous parlons ne ramènerait les dates aux mêmes jours de la semaine, puisque aucun de ces nombres n'est divisible par 7. Pour obtenir le résultat désiré, il faut donc prendre un multiple de 4 années, ou un multiple de $28n + 5$, qui soit divisible par 7. Or, le premier terme $28n$ multiplié par un nombre entier quelconque donnera toujours un multiple de 7; il faut donc que le multiplicateur cherché soit tel, qu'en multipliant le second terme 5 par ce multiplicateur on obtienne pour produit un multiple de 7, ce qui ne peut avoir lieu qu'en prenant pour ce multiplicateur 7 lui-même, ou un multiple de 7. La période cherchée se compose donc d'un nombre d'années marqué par 4 fois 7, ou 28, ou par un multiple de 28.

Ce calcul suppose une bissextile tous les 4 ans; mais si, dans le nombre des années considérées, il y a une année séculaire dont le millésime ne soit pas tel, que le nombre des centaines soit divisible par 4, cette année étant commune (*Voy. CALENDRIER*), le nombre des jours contenus dans les 28 années consécutives n'est plus un multiple de 7, il est de la forme $7N + 6$; et le 1^{er} janvier de l'année suivante, au lieu de revenir au même jour de la semaine que 28 ans auparavant, revient un jour plus tôt. Ainsi, l'année 1861 ayant commencé par un mardi, l'année 1861 + 28 ou 1889, commencera aussi par un mardi; mais il n'en sera pas de même de l'année 1889 + 28 ou 1917; elle commencera par un lundi, attendu que l'année 1900, au lieu d'être bissextile, aura été de 365 jours. (*Voy. LETTRE DOMINICALE*.)

—**CYCLOÏDE** (du grec κύκλος, cercle), courbe engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule dans son plan sur une droite fixe.

1. Cette courbe appartient à la famille des *roulettes* (*Voy. ROULETTE*), et elle a longtemps été désignée sous ce nom. Elle jouit donc de la propriété

fondamentale de ces courbes, c'est-à-dire que la normale à la cycloïde en un point donné de cette courbe passe par le point de contact correspondant de la droite fixe et du cercle mobile. Soit C_0 (fig. 1)

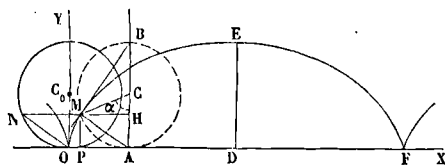


Fig. 1.

le cercle générateur dans sa position initiale, c'est-à-dire lorsque le point décrivant se trouve en O sur la droite fixe OX; soit C la position de ce cercle lorsque le point décrivant est arrivé en M, ce qui suppose que l'arc AM est égal à la longueur rectiligne OA, A étant le point de contact actuel. D'après la propriété générale rappelée ci-dessus, la normale en M à la cycloïde sera la droite MA.

II. Ceci fournit un moyen de tracer la cycloïde par points sans être obligé de tracer le cercle générateur dans ses positions successives. Menons, en effet, la droite MN parallèle à la droite fixe; les deux cercles C_0 et C étant égaux, il y aura égalité entre les arcs ON et AM; ces arcs auront donc des cordes égales, et de plus ces cordes seront également inclinées sur la droite fixe, et par conséquent parallèles. La figure AMNO sera donc un parallélogramme. On aura de plus arc ON = OA, puisque arc ON = arc AM. Pour avoir un point de la cycloïde, on pourra donc opérer comme il suit. On prendra sur le cercle C_0 un point quelconque N; on portera sur la droite fixe une longueur OA égale à l'arc ON développé; par le point N on mènera une parallèle à la droite fixe, et du point A comme centre avec la corde ON pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera cette parallèle au point cherché M. En joignant MA on aura la normale au point M, et en lui élevant une perpendiculaire MB, on aura la tangente. (On peut remarquer que cette tangente passe par l'extrémité supérieure du diamètre AB; mais la construction actuelle a précisément pour but d'éviter de tracer le cercle générateur dans la position C.)

Pour éviter d'avoir, pour chaque point que l'on veut construire, à déterminer le développement OA d'un arc de cercle ON, on peut opérer comme il suit. Connaissant le diamètre 2R du cercle générateur, on peut calculer la longueur développée de la circonférence de ce cercle. On portera cette longueur de O en F sur la droite fixe. On divisera la circonférence C_0 et la droite OF en un même nombre de parties égales, 16, 24, 32 par exemple, suivant la grandeur de l'épure. On numérotera les points de division à partir du point A sur le cercle et sur la droite, et l'on opérera pour deux points de division correspondants comme nous l'avons indiqué pour les points N et A. La courbe a la forme indiquée sur la figure. Elle est évidemment symétrique par rapport à la droite DE menée perpendiculairement à la droite fixe par le milieu D de OF; et le point E situé sur cette perpendiculaire à une distance de la droite fixe égale au diamètre du cercle générateur, est le point le plus élevé de la

courbe. La cycloïde se compose en réalité d'une infinité de courbes successives égales à OMEF, mais on n'en a ordinairement qu'une à considérer.

III. On peut démontrer directement par l'analyse le théorème que nous avons déduit de la propriété générale des roulettes. Prenons pour axe des x la droite fixe et pour axe des y la perpendiculaire OY. Soit $MP=y$ l'ordonnée du point quelconque M, et $OP=x$ son abscisse. Joignons MC; appelons α l'angle MCA; enfin prolongeons NM jusqu'en H. Nous aurons

$$x = OP = OA - AP = AM - MH = R\alpha - R\sin\alpha, [1]$$

$$y = MP = AH = AC - CH = R - R\cos\alpha.$$

On pourrait éliminer α entre ces deux relations pour obtenir l'équation de la cycloïde; mais il est plus commode de se servir des relations [1] elles-mêmes. On en tire

$$\frac{dx}{d\alpha} = R(1 - \cos\alpha) = y,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = R\sin\alpha.$$

Par conséquent

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{R\sin\alpha}{y}.$$

Par suite, l'expression de la sous-normale, c'est-à-dire yy' , a pour valeur

$$yy' = R\sin\alpha = MH = PA.$$

Par conséquent, la normale passe par le point A.

On vérifie aussi, à l'aide des équations [1] que la courbe est symétrique par rapport à DE. En effet, pour qu'on ait $x = OD = \pi R$ ou $\alpha - \sin\alpha = \pi$, il faut que α ait précisément la valeur π . Ainsi le point E de la courbe répond à $\alpha = \pi$. Or, si l'on pose $\alpha = \pi \pm \epsilon$, on trouve

$$x = \pi R \pm R(\epsilon - \sin\epsilon),$$

et

$$y = R(1 + \cos\epsilon),$$

coordonnées de deux points symétriquement placés par rapport à DE.

IV. La cycloïde jouit de propriétés géométriques curieuses, que l'on démontre aisément à l'aide du calcul infinitésimal; ainsi : la longueur OEF de la courbe est égale à 4 fois l' diamètre du cercle générateur; l'aire comprise sous cette courbe est égale à 3 fois l'aire du cercle générateur; le rayon de courbure en un point quelconque M est double de la normale MA, etc. Elle jouit aussi de propriétés mécaniques dont on trouvera la démonstration dans les traités de Mécanique rationnelle; ainsi : dans le vide, la cycloïde, renversée comme l'indique la figure 2, est *tautochrone* (du grec ταυτό, le même,



Fig. 2.

et χρόνος, temps), c'est-à-dire que, de quelque point de la courbe que parte un point matériel pesant soumis, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur, il arrive toujours dans le même temps au point le plus bas; la cycloïde est aussi *brachistochrone* (du grec βραχίστο:, le plus court, et χρόνος, temps), c'est-à-dire que c'est la courbe qu'un point matériel pesant doit parcourir pour descendre dans le temps le plus court d'un point donné à un autre point

donné. (Voy. le *Traité de Mécanique* de Poisson, et le *Cours de Mécanique* de M. Duhamel.)

La cycloïde trouve son application dans la théorie des ENGRENAGES. (Voy. ce mot.)

V. Si, au lieu de prendre pour point décrivant le point M (fig. 1), on prend un point quelconque situé sur le même rayon OM, mais plus près du centre ou plus loin du centre, on obtient des courbes analogues à la cycloïde et qui portent le nom de *cycloïde raccourcie* ou de *cycloïde allongée*. Elles sont représentées figure 3 avec la cycloïde

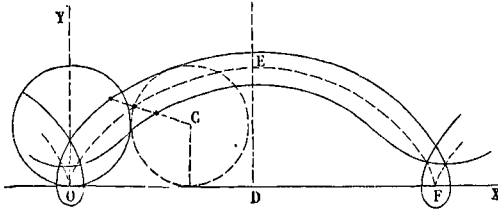


Fig. 3.

proprement dite qui y est figurée en points. Ces courbes sont des roulettes, et jouissent conséquemment de la propriété fondamentale de ces courbes qui a été rappelée en commençant. Si l'on désigne par d la distance du point décrivant au centre du cercle générateur, on trouve pour les équations de la cycloïde raccourcie ou allongée

$$x = R\alpha - d \sin \alpha \quad \text{et} \quad y = R - d \cos \alpha;$$

elle est raccourcie si l'on a $d < R$, allongée si l'on a $d > R$.

Pour $d = 0$ on obtient une parallèle à la droite fixe, à la distance R de cette droite.

CYLINDRE CIRCONSCRIT, cylindre enveloppe des plans tangents menés à une surface parallèlement à une même direction. Ce cylindre touche la surface suivant une ligne à laquelle on donne souvent le nom de *ligne d'ombre* à cause du rôle qu'elle joue dans les problèmes relatifs aux ombres; c'est en effet la ligne qui séparerait l'ombre propre de la surface de la portion éclairée, si les rayons lumineux étaient parallèles aux génératrices du cylindre circonscrit.

La méthode à employer pour déterminer le cylindre circonscrit à une surface parallèlement à une direction donnée est indiquée par la définition même; elle consiste à mener une série de plans tangents parallèles à la direction donnée (Voy. PLAN TANGENT), à déterminer le point de contact de chacun, et à mener par ce point de contact une parallèle à la direction donnée. Les parallèles ainsi menées sont autant de génératrices du cylindre circonscrit, et il est facile d'obtenir sa trace sur

les plans de projection ainsi que son contour apparent.

Le problème est souvent susceptible de simplification.

Si la surface donnée est un cylindre, le cylindre circonscrit se change en deux plans parallèles, et la ligne de contact se compose de deux génératrices.

Si la surface donnée est un cône, le cylindre circonscrit se compose de deux plans qui se coupent, et la ligne de contact est encore formée de deux génératrices.

Si la surface donnée est une surface du second ordre, le cylindre circonscrit est lui-même du second ordre, et la ligne de contact est une courbe du second degré ou une variété de ces courbes. Si, par exemple, la surface est un ellipsoïde, la courbe de contact est une ellipse; si la surface est un parabolôïde hyperbolique, la courbe de contact est une parabole; si la surface est un hyperbolôïde à une nappe, la courbe de contact est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant que le diamètre parallèle aux génératrices du cylindre est

non-transverse, ou bien transverse, ou qu'il se confond avec une génératrice de l'hyperbolôïde.

(Voy. pour plus de détails le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de La Gournerie. Voyez aussi dans ce dictionnaire l'article OMBRES.)

CYLINDRE PROJÉTANT (Géométrie descriptive), lieu des perpendiculaires abaissées des différents points d'une courbe sur l'un des plans de projection, et dont la trace est la projection de cette courbe.

CYLINDRES DE FRICTION, roues cylindriques à axes parallèles qui se transmettent mutuellement le mouvement de rotation par simple contact. Ce mode de transmission est quelquefois employé dans les mécanismes légers. Pour augmenter l'adhérence des surfaces, on garnit souvent les cylindres d'une peau de buffle. Il est aisé de voir que *les vitesses angulaires sont en raison inverse des rayons des cylindres*; car si r et r' sont ces rayons, ω et ω' les vitesses angulaires correspondantes, la vitesse des points de contact étant la même sur les deux cylindres, on doit avoir

$$\omega r = \omega' r', \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}.$$

Les cylindres de friction ne peuvent être employés que lorsque l'effort à transmettre est très-faible. Si l'effort est notable, il faut faire usage de roues dentées.

CYLINDRES PRIMITIFS, cylindres qui, en tournant autour de leurs axes, se conduiraient mutuellement par simple contact, de la même manière qu'un engrenage cylindrique donné (Voy. ENGRENAGES).

D

DANAÏDE, roue hydraulique à axe vertical, imaginée en 1813 par Manoury d'Ectot. Elle se compose de canaux hélicoïdes prenant l'eau à la partie supérieure, à une certaine distance de l'axe, et la versant à la partie inférieure en un point beaucoup plus rapproché de l'axe. La théorie de ces roues est

analogue à celle des turbines, et se rapproche particulièrement de celle de la TURBINE FOURNEYRON (Voy. ce mot). Elle montre qu'on peut régler la vitesse angulaire de la roue et la distance du point de sortie à l'axe, de manière à réduire à une quantité presque négligeable la puissance conservée par le

liquide à sa sortie de la roue, et porter ainsi le rendement théorique à un nombre très-peu inférieur à l'unité. Mais il est difficile avec cette disposition de débiter un volume d'eau un peu considérable ; et c'est probablement là la cause pour laquelle ce récepteur n'a pas été adopté dans l'industrie.

DATE, indication de l'année, du mois et du quantième où l'on se trouve. La détermination de la date n'offre aucune difficulté pour un observateur sédentaire ; mais, dans les voyages de circumnavigation, elle peut donner lieu à une erreur qui a été remarquée pour la première fois par les compagnons de Magellan à leur retour en Europe.

Concevons qu'un navigateur parte d'un port d'Europe, en emportant une montre marine réglée sur l'heure du port d'embarquement. S'il se dirige vers l'ouest, chaque fois qu'il aura parcouru 15° de longitude, la montre avancera d'une heure, puisque le soleil passera au méridien du lieu où le bâtiment se trouve, une heure plus tard qu'au méridien du port d'embarquement (*Voy. LONGITUDE*). Si donc le navigateur compte l'heure d'après les observations faites à bord, il sera en retard d'une heure sur l'heure comptée au port d'embarquement. Or 15° étant contenus 24 fois dans 360° , quand le navigateur aura fait le tour du globe en se dirigeant toujours vers l'ouest, et qu'il sera revenu au point de départ, il aura compté à bord 24 heures ou *un jour de moins* qu'on n'en a compté au port d'embarquement, et se croira, par exemple, au 6 lorsqu'au port on compte le 7. L'erreur aura lieu en sens contraire si le navigateur se dirige constamment vers l'est ; en revenant au port d'embarquement il se trouvera avoir compté *un jour de plus* qu'on n'en a compté dans ce port.

Pour remédier à cet inconvénient, les marins ont adopté une convention ; lorsqu'ils sont parvenus à 180° en longitude du point de départ, s'ils se dirigent vers l'ouest ils ajoutent un jour à la date du bord ; ils retranchent au contraire un jour lorsqu'ils se dirigent vers l'est.

DÉ, partie moyenne du piédestal. Sa hauteur est de 3 modules $\frac{2}{3}$ dans l'ordre toscan, de 4 modules dans l'ordre dorique, de 4 modules $\frac{8}{9}$ dans l'ordre ionique, de 5 modules $\frac{4}{9}$ dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite, si l'on donne au piédestal de ces deux ordres une hauteur égale au tiers de celle de la colonne, et de 5 modules $\frac{7}{3}$, si, comme le fait Vignole, on exhausse ces deux piédestaux de $\frac{1}{3}$ de module pour leur donner plus d'élégance (*Voy. ORDRES*).

DÉBILLARDEMENT, opération de Stéréotomie qui consiste à extraire d'un parallélépipède rectangle un prisme droit ayant des faces cylindriques, pour déduire de ce dernier un corps de forme hélicoïde. (*Voy. LIMON, VIS SAINT-GILLES*.)

DÉBIT, partie d'un compte où l'on inscrit les valeurs fournies à la personne au nom de laquelle ce compte est ouvert. Le débit occupe le *verso* des feuillets du grand livre. (*Voy. TENUE DES LIVRES*.)

DÉBLAIS ET REMBLAIS, volumes de terre qui doivent être enlevés ou rapportés pour la construction d'une route (*Voy. ROUTES*). Par des motifs d'économie faciles à comprendre, il faut que ces volumes soient aussi faibles que possible, et que les déblais approchent autant que possible d'être égaux aux remblais. Pour faciliter le calcul approximatif de ces volumes, on remplace la surface naturelle du sol par une surface gauche définie comme nous allons le dire. Si l'on suppose la route et le terrain coupés par une série de plans normaux à l'axe de la route, chacun de ces plans déterminera un *profil en travers* de la route et du terrain. Entre deux de ces profils consécutifs on substitue à la surface du terrain une surface gauche engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur les deux lignes qui représentent le terrain dans les deux profils, et à rester parallèle au plan vertical mené par l'axe de la route. Si les lignes du terrain dans les deux profils sont droites, la surface ainsi engendrée est un paraboloides hyperbolique. Cela posé, on mène des plans verticaux parallèles à l'axe de la route, et assez rapprochés pour que les portions des deux lignes du terrain comprises entre eux puissent être regardées comme des lignes droites. On a ainsi à évaluer des solides dont chacun est limité : 1° par deux des plans verticaux parallèles à l'axe de la route, dont il vient d'être parlé ; 2° par les plans des deux profils en travers ; 3° par la surface de la route ; 4° par la surface du terrain, ou du moins par la surface gauche qu'on lui substitue. Il peut alors se présenter trois cas : la route peut être en déblai dans les deux profils ; la route peut être en remblai dans l'un et l'autre ; elle peut être en déblai dans un des profils et en remblai dans l'autre. Examinons successivement ces trois cas.

1. *La route est en déblai dans les deux profils ;* les lignes du terrain *ab* et *cd* (fig. 1) sont toutes deux au-dessus des lignes correspondantes

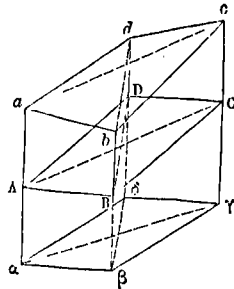


Fig. 1

AB et CD du projet. Le solide ABCDabcd qu'il s'agit d'évaluer est analogue à un prisme qui aurait pour base inférieure le quadrilatère ABCD, pour arêtes latérales les verticales Aa, Bb, Cc, Dd, qui ne sont autre chose que les *COTES ROUGES* (*Voy.* ce mot) des points *a, b, c, d*, et pour base supérieure la portion de la surface du terrain limitée par les quatre droites *ab, bc, cd, da*. On peut remarquer que la section droite de ce prisme est le rectangle $\alpha\beta\gamma\delta$ dont les sommets sont les projections horizontales des points *a, b, c, d*. Nous allons faire voir que le volume de ce solide est une moyenne arithmétique entre ceux qu'on obtiendrait si l'on remplaçait la surface du terrain par les deux plans *abc, cda* d'une part, et par les deux plans *abd, bcd* de l'autre. Menons, en effet (fig. 2), un plan vertical parallèle à l'axe de la route, et par conséquent parallèle aux plans verticaux contenant les génératrices *ad* et *bc* du paraboloides hyperbolique que l'on a substitué à la surface natu-

reite du terrain. Ce plan auxiliaire coupera le paraboloidé suivant une autre génératrice mn . Il coupera les plans abc et adc suivant les droites mp et nq parallèles à bc , et les plans abd et adc suivant les droites mq et np parallèles à ad . La figure $mnpq$ formée par ces quatre intersections sera un parallélogramme, dont le plan est vertical, et qui sera partagé par la génératrice mn en deux triangles égaux, l'un mpn situé au-dessus de la surface du pas-

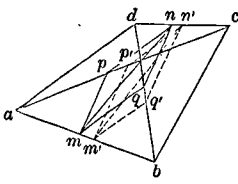


Fig. 2.

sement de la surface du paraboloidé, l'autre mqn situé au-dessous. Concevons un second plan vertical auxiliaire parallèle au premier et qui en soit infiniment voisin; il coupera les plans déjà nommés suivant les côtés d'un nouveau parallélogramme $m'n'p'q'$ qui aura pour diagonale une génératrice $m'n'$ du paraboloidé, infiniment voisine de mn . L'élément de surface courbe $mmn'm'$ pouvant alors être regardé comme plan, les volumes compris entre les plans mnp , $m'n'p'$ d'une part, mng , $m'n'q'$ de l'autre, peuvent être regardés comme des troncs de pyramides équivalents, puisqu'ils ont respectivement des bases égales, et que, dans l'un comme dans l'autre, la distance de ces bases est la même. Or l'espace compris entre les deux parallélogrammes est un élément du volume du tétraèdre $abcd$; et l'on voit que cet élément est divisé en deux parties équivalentes par l'élément de la surface gauche; comme il en serait évidemment de même de tout autre élément analogue, on reconnaît que le volume du tétraèdre abc est divisé en deux parties équivalentes par la surface du paraboloidé hyperbolique. Il est aisé d'en conclure, comme nous l'avions annoncé, que le volume de déblai $ABCDabcd$ (fig. 1) terminé à la surface gauche $abcd$ est une moyenne arithmétique entre les deux volumes prismatiques ayant la même base $ABCD$ et les mêmes arêtes latérales, mais qui seraient terminés, le premier aux deux plans $abcd$ et adc , le second aux deux plans abd et bc . Ces volumes sont faciles à évaluer. Soit L la distance des deux profils en travers, l celle des deux plans verticaux aD , bC parallèles à l'axe de la route, a , b , c , d les cotes rouges des points désignés par les mêmes lettres sur la figure 1; le volume du prisme triangulaire $ABCabc$ aura pour mesure sa section droite $\alpha\beta\gamma$ multipliée par la moyenne entre ses arêtes latérales, ou

$$\frac{1}{2} Ll \cdot \frac{1}{3} (a + b + c).$$

Le volume du prisme triangulaire $ADCadc$ sera exprimé de même par

$$\frac{1}{2} Ll \cdot \frac{1}{3} (a + d + c),$$

et leur somme aura conséquemment pour expression

$$\frac{1}{2} Ll \cdot \frac{1}{3} (2a + b + d + 2c).$$

On trouvera de même pour la somme des deux prismes $ABDabd$ et $BCDbcd$

$$\frac{1}{2} Ll \cdot \frac{1}{3} (a + 2b + 2d + c).$$

Par conséquent la moyenne de ces deux sommes sera

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Ll \cdot \frac{1}{3} (3a + 3b + 3d + 3c),$$

ou $\frac{1}{4} Ll \cdot (a + b + c + d)$,

ou bien $Ll \cdot \frac{a + b + c + d}{4}$, [1]

c'est-à-dire que le volume de déblai considéré a pour mesure la section droite Ll multipliée par la moyenne entre ses quatre arêtes latérales, ou encore la projection horizontale du quadrilatère gauche considéré $abcd$, multipliée par la moyenne entre les cotes rouges de ses quatre sommets.

La formule [1] peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2} L \cdot \left[\frac{1}{2} (a + b) \cdot l + \frac{1}{2} (c + d) l \right].$$
 [2]

Or $\frac{1}{2} (a + b) l$ représente l'aire du trapèze $Aabb$, et

$\frac{1}{2} (c + d) l$ représente celle du trapèze $CcdD$; on

peut donc dire encore que le volume du déblai a pour mesure la somme des faces situées dans les profils en travers multipliée par la moitié de la distance de ces profils.

Il est clair que les formules [1] ou [2] seraient encore applicables si une ou plusieurs des cotes rouges qui y entrent étaient nulles; c'est-à-dire si un ou plusieurs sommets du quadrilatère gauche formé par le terrain coïncidaient avec les points de la route situés sur la même verticale.

II. La route est en remblai dans les deux profils. Le volume à calculer a alors la disposition de $ABCDabcd$ (fig. 3); la surface gauche est en dessous. Mais on démontrerait comme tout à l'heure que ce volume est une moyenne arithmétique entre les deux volumes prismatiques qui, ayant la même base supérieure $ABCD$ et les mêmes arêtes latérales Aa , Bb , Cc , Dd , se termineraient d'une part aux plans abc , adc , de l'autre aux deux plans abd , bcd . Les formules [1] et [2] restent donc applicables en prenant pour a , b , c , d les valeurs absolues des cotes rouges des points représentés par les mêmes lettres.

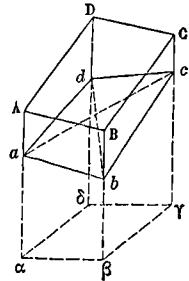


Fig. 3.

III. La route est en déblai dans l'un des profils et

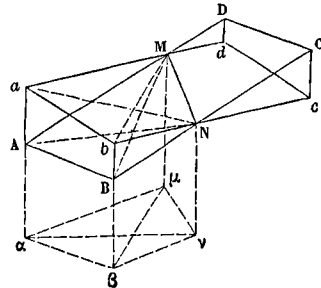


Fig. 4.

en remblai dans l'autre. Dans ce cas il y a nécessairement entre les deux profils une ligne de passage (Voy. ce mot) qu'il faut supposer déterminée. Soit $ABCD$ (fig. 4) la surface de la route, $abcd$ la surface

gauche qui remplace la surface naturelle du terrain; soit MN la ligne de passage. Cette ligne peut être considérée comme droite si les plans verticaux AD et BC sont suffisamment rapprochés. On aura donc à considérer un déblai ABNMab, et un remblai CDMNcd. Soit $\alpha\beta\mu\nu$ la projection horizontale du quadrilatère gauche abMN; soit toujours $\alpha\beta = l$; et posons $\alpha\mu = \lambda$, $\beta\nu = \lambda'$. On établirait comme plus haut que, pour obtenir le volume du déblai, il faut remplacer d'abord la surface gauche par les deux plans abN, aMN, puis par les deux plans abM, MbN, et prendre la moyenne des volumes obtenus. On trouvera ainsi....

$$\text{Vol. ABNba} = \frac{1}{2} l \lambda' \cdot \frac{1}{3} (a + b + \text{zéro}),$$

$$\text{Vol. ANMA} = \frac{1}{2} l \lambda \cdot \frac{1}{3} (a + \text{zéro} + \text{zéro}),$$

$$\text{Vol. ABMab} = \frac{1}{2} l \lambda \cdot \frac{1}{3} (a + b + \text{zéro}),$$

$$\text{Vol. BNMb} = \frac{1}{2} l \lambda' \cdot \frac{1}{3} (b + \text{zéro} + \text{zéro}).$$

Faisant la somme, et divisant par 2, on obtient pour résultat

$$\frac{1}{12} l \cdot [\lambda(2a + b) + \lambda'(2b + a)]. \quad [3]$$

Comme cette formule est assez compliquée, on lui substitue quelquefois la suivante :

$$l \cdot \frac{1}{2} (a + b) \cdot \frac{1}{4} (\lambda + \lambda'). \quad [4]$$

La différence entre les deux résultats a pour valeur

$$\frac{1}{24} (a - b) (\lambda - \lambda'); \quad [5]$$

elle fait connaître l'erreur commise en se servant de la formule [4].

Le volume de remblai CDMNcd se calculerait de la même manière.

Les formules [1] et [3] ou [2] et [3], seront applicables à tous les cas, et donneront des résultats suffisamment approchés, pourvu qu'on ait soin de mener les plans verticaux parallèles à l'axe de la route, par tous les points des deux profils où l'inclinaison soit du terrain, soit du projet, vient à changer, ainsi que par les points de passage sur chacun de ces profils, s'ils sont en partie en déblai et en partie en remblai. Si la nature du terrain change d'une manière notable, il faut aussi noter sur chaque profil les points où se fait le changement, et mener par ces points des plans verticaux parallèles à l'axe de la route. Cette précaution est nécessaire pour l'évaluation des frais de transport et de terrassements.

Lorsqu'on n'a pas le temps d'effectuer les calculs assez longs qu'exige l'emploi des formules précédentes, on peut calculer les déblais et remblais par les formules approchées que nous allons faire connaître. Si les deux profils sont tous deux en déblais ou tous deux en remblais, on calcule le volume à l'aide de l'expression

$$\frac{1}{2} (S + S') \cdot d, \quad [6]$$

dans laquelle S et S' désignent les surfaces de déblai ou de remblai sur les deux profils, et d la distance de ces profils. Cela revient à regarder le volume à évaluer comme équivalent à celui d'un prisme droit qui aurait pour base une moyenne arithméti-

que entre les surfaces des deux profils, et pour hauteur leur distance. Si l'une des surfaces, S par exemple, est en déblai, et que l'autre S' soit en remblai, on commence par substituer à la véritable ligne de passage une ligne de passage fictive dont la distance moyenne à chacun des deux profils est donnée par l'une des formules

$$d' = d \cdot \frac{S}{S + S'} \quad \text{ou} \quad d'' = d \cdot \frac{S'}{S + S'}. \quad [7]$$

Puis on mesure le volume du déblai par la formule

$$\frac{1}{2} S d' \quad [8]$$

et celui du remblai par la formule

$$\frac{1}{2} S' d'', \quad [9]$$

ce qui revient à regarder les volumes correspondants comme des prismes triangulaires, dans lesquels une des faces latérales étant S ou S', l'arête opposée serait située à la distance d' ou d'' de cette face. Si l'un des profils est complètement en déblai ou complètement en remblai, et que l'autre soit en partie en déblai et en partie en remblai, on mène par le point de passage sur ce second profil un plan vertical parallèle à l'axe de la route; ce plan partage l'espace compris entre les deux profils en deux parties dont l'une rentrera dans le cas de la formule [6] et l'autre dans le cas des formules [8] et [9]. Si les deux profils sont chacun partie en déblai, partie en remblai, et que les déblais se correspondent, ainsi que les remblais, on calcule le volume en déblai par la formule [6] sans s'inquiéter des différences de largeur que peuvent avoir les déblais sur les deux profils; on opère de même pour le remblai. Enfin si le déblai sur l'un des profils correspond au remblai sur l'autre, et vice versa, on applique les formules [8] et [9]. Si, par exemple, le premier profil présente une surface S₁ en déblai, et une surface S₂ en remblai; et que sur l'autre profil on ait une surface S'₁ en remblai correspondant à S₁ et une surface S'₂ en déblai correspondant à S₂, on appliquera les formules [8] et [9] d'abord aux surfaces S₁ et S'₁, puis aux surfaces S₂ et S'₂.

Dans les études d'avant-projet qui demandent de la célérité, on abrège encore le calcul des déblais et remblais en opérant de la manière suivante. On fait la somme des surfaces en déblai sur les deux profils, et on la multiplie par la moitié de la distance des deux profils; on a une valeur approchée du déblai. On opère de même pour les remblais. Ce mode d'évaluation donne des résultats trop forts; mais cela est sans inconvénient dans un premier aperçu.

Tout ce qui précède suppose qu'il s'agisse d'une route rectiligne. Dans les parties courbes, on remplace les plans verticaux parallèles à l'axe par des cylindres à génératrices verticales, ayant pour bases des courbes concentriques à l'axe. C'est sur ces courbes concentriques que l'on mesure les distances des deux profils; et c'est à l'aide des distances ainsi mesurées que l'on détermine les points de passage. On fait d'ailleurs usage des mêmes formules que dans les parties droites de la route. (Voy. le Cours de routes et ponts par M. Mary.)

Dans quelques cas particuliers, on peut abrégé les calculs en faisant usage du THÉORÈME DE GULLIN (Voy. ce mot). C'est ce qui arrive, par exemple,

dans le calcul des déblais occasionnés par l'établissement d'un canal. Si ce canal conserve une section constante, au-dessous d'un plan horizontal donné, le volume du déblai au-dessous de ce plan est le produit de sa section transversale par la ligne que décrit son centre de gravité.

Pour l'évaluation des distances de transport, voyez TRANSPORT DE TERRES.

DÉBOUCHÉ D'UN PONT, intervalle entre les culées. La détermination exacte de cet intervalle est d'une grande importance pour la construction d'un pont. Si le débouché est trop petit, la vitesse de l'eau à son passage entre les piles peut devenir assez grande pour produire des affouillements qui compromettent la solidité du pont; en même temps le remou qui se produit en amont peut causer du dommage aux propriétés riveraines. Si le débouché est trop grand, il peut en résulter, pendant les basses eaux, des atterrissements qui, à l'époque des crues, offrent tous les inconvénients d'un débouché trop petit.

Pour déterminer le débouché d'un pont, il faut d'abord jager avec soin la rivière (Voy. JAUGEAGE DES COURS D'EAU), c'est-à-dire mesurer le volume d'eau Q qui passe en une seconde dans une section transversale quelconque. On fixe ensuite la limite de vitesse moyenne U, que l'eau ne doit pas dépasser pour ne pas produire d'affouillements. D'après les expériences de Dubuat, le fond des canaux et rivières commence à être entraîné quand la vitesse W au fond atteint les valeurs données par le tableau suivant :

Terre brune détrempee.....	0,076
Argile tendre.....	0,152
Sable.....	0,305
Gravier.....	0,609
Cailloux.....	0,614
Pierres cassées, silex anguleux.....	1,22
Cailloux agglomérés.....	1,52
Roches lamellaires.....	1,83
Roches dures.....	3,00

Suivant le même auteur, en appelant V la vitesse à la surface, on a sensiblement

$$U = 0,8V \text{ et } U = \frac{1}{2}(V + W),$$

d'où il est facile de conclure

$$U = \frac{4}{3}W.$$

Pour obtenir les valeurs de U il faudrait donc prendre les $\frac{4}{3}$ des nombres inscrits dans le tableau suivant. Connaissant la dépense Q et la vitesse moyenne U, on obtient la section Ω du courant en divisant le premier nombre par le second. Cette section peut généralement être considérée comme un rectangle; en la divisant par la hauteur h du niveau des eaux au-dessus du fond, on obtient enfin le débouché. Il est bon de faire ce calcul pour les basses eaux, pour l'époque des crues et pour les eaux moyennes; les deux premiers calculs donnent les limites entre lesquelles le débouché doit être compris pour qu'il n'y ait ni affouillements ni atterrissements, et le troisième fait connaître celui qui se rapporte au régime ordinaire du cours d'eau; on le modifie dans le sens convenable pour être certain de satisfaire à toutes les conditions. Il faut s'assurer en outre que la hauteur du remous produit

en amont du pont n'est pas assez grande pour endommager les rives. (Voy. REMOUS.)

Lorsqu'il ne s'agit que d'un *ponceau*, il peut arriver que le cours d'eau sur lequel il doit être jeté ait un régime trop variable pour qu'il soit possible d'exécuter un jaugeage exact. On peut alors déterminer approximativement le débouché à l'aide des remarques suivantes. L'expérience a indiqué que, dans les pays plats, on pouvait régler le débouché à 0^m,45 ou 0^m,50 par 1000 hectares du terrain dont les eaux affluent sous le ponceau. On peut prendre 1^m,25 par 1000 hectares si le terrain est en pente, mais que les plus grandes hauteurs servant de limite au bassin ne soient pas à plus de 50^m au-dessus du THALWEG (Voy. ce mot). Il faudrait augmenter encore le débouché si le bassin était environné de montagnes très-élevées et présentant de grandes inclinaisons. On peut encore se guider par la considération des eaux pluviales. Il faut que pendant un orage prolongé le ponceau puisse débiter par seconde la quantité d'eau qui tombe pendant le même temps dans toute l'étendue du bassin. Cette quantité d'eau paraît être, au maximum, de 10 centimètres cubes par mètre carré; mais des pluies aussi abondantes sont de courte durée. Pour que le mode d'évaluation dont il s'agit puisse être appliqué à la détermination du débouché, il faut que la pluie dure assez de temps pour que la première eau tombée sur les points les plus éloignés du bassin arrive au ponceau avant la cessation de la pluie. La plus longue durée d'une pluie abondante paraît être de 17 heures; et le volume d'eau tombé par seconde peut varier de 2 à 6 centimètres cubes par mètre carré. Il faudrait tenir compte aussi de la quantité d'eau absorbée par le sol, qui est de 43 pour 100 dans les terrains argileux et de 57 pour 100 dans les terrains perméables.

Ayant déterminé approximativement le volume d'eau Q qui doit pouvoir passer en une seconde sous le ponceau, on peut calculer la hauteur à laquelle l'eau s'élèvera au-dessus du fond du ravin. Si dans la formule du mouvement uniforme des eaux courantes (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS), savoir :

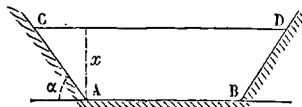
$$RI = aU + bU^2,$$

on remplace le rayon moyen R par sa valeur $\frac{\Omega}{\chi}$, quotient de la section par le périmètre mouillé, et la vitesse moyenne U par sa valeur $\frac{Q}{\Omega}$, on obtient :

$$\frac{\Omega I}{\chi} = a \frac{Q}{\Omega} + b \frac{Q^2}{\Omega^2}, \quad [1]$$

relation dans laquelle on a $a = 0,000024$ et $b = 0,000365$.

On pourra, en général, assimiler la section du



ravin à un trapèze symétrique CABD dans lequel on connaît la base AB, que nous représenterons par l, et l'angle en A, dont nous désignerons le supplément par α . On aura alors, en appelant x la hauteur d'eau,

$$\chi = l + \frac{2x}{\sin \alpha} \quad [2]$$

et $\Omega = x(l + \chi \cot \alpha)$. [3]
 Substituant ces valeurs dans la relation [1] on aura une équation en x d'où l'on pourra, par tâtonnements, déduire la valeur de cette inconnue, et par suite les quantités χ , Ω et U .

La détermination du débouché se fera ensuite comme pour un pont ordinaire. Il faut remarquer seulement que l'on n'est pas limité ici par la crainte de produire des affouillements en restreignant le débouché; parce qu'il est facile de relier les culées par un fond artificiel ou *radier* construit de manière à résister aux efforts du courant. — On construit même quelquefois un radier général sous un pont à plusieurs arches, malgré la dépense qu'un pareil travail occasionne, lorsque le fond naturel est indéfiniment affouillable.

DÉBRAYAGE, action de séparer un mécanisme de l'arbre moteur. C'est le contraire de l'embrayage (Voy. EMBRAYAGES).

DÉCAGRAMME, unité de poids qui vaut 10 grammes (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE), et qui équivaut au poids de 10 centimètres cubes d'eau distillée.

DÉCALITRE, unité de capacité qui vaut 10 litres ou 10 décimètres cubes (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE).

DÉCAMÈTRE, unité de longueur qui vaut 10 mètres (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). La *chaîne d'arpenteur* a 1 décamètre; le côté du carré qui sert d'unité des mesures agraires sous le nom d'*are*, a aussi 1 décamètre.

Un *décamètre carré* vaut 100 mètres carrés. Un *décamètre cube* vaut 1000 mètres cubes; mais cette mesure n'est point usitée.

DÉCASTÈRE, mesure employée pour les bois de chauffage, et qui équivaut à 10 stères (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE).

DÉCHARGE, pièce de charpente peu inclinée à l'horizon (moins de 45°) et servant à relier les potelets d'un pan de bois (Voy. PANS DE BOIS), et à supporter une partie du poids des trumeaux.

DÉCIGRAMME, dixième partie du gramme (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Poids qui équivaut à celui de 100 millimètres cubes d'eau distillée.

DÉCILITRE, dixième partie du litre (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Un *décilitre* équivaut à 100 centimètres cubes.

DÉCIME, dixième partie du franc (Voy. MONNAIES FRANÇAISES). La pièce de 1 décime est en cuivre, et son poids est de 10 grammes.

DÉCIMÈTRE, dixième partie du mètre (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le *décimètre carré* est la 100^e partie du *mètre carré*. Le *décimètre cube* est la 1000^e partie du *mètre cube*.

DÉCINTREMENT, enlèvement méthodique des cintres qui soutiennent les arches d'un pont ou une voûte quelconque. C'est une opération délicate et qui doit être conduite avec soin. Au moment de l'enlèvement des fermes, il se produit, par l'effet de la compression des mortiers, une contraction de la voûte dans le sens perpendiculaire à son axe, et par conséquent un abaissement à la clef qu'on appelle *tassement*. Il faut s'arranger de manière que ce mouvement s'opère avec une extrême lenteur; car si les voussoirs prenaient une vitesse appréciable, il en résulterait, en raison de l'énorme masse en mouvement, une force vive considérable qui pourrait occasionner les effets les plus fâcheux. Les

fermes ne doivent être abaissées que graduellement et par un mouvement insensible. Pour obtenir ce résultat, on faisait autrefois reposer les fermes sur leurs appuis par l'intermédiaire de doubles coins à petit angle, placés en sens contraire (fig. 1); il

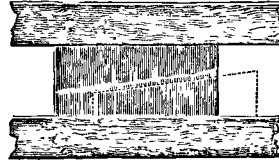


Fig. 1.

suffisait alors de frapper à petits coups sur la petite face du coin inférieur pour faire descendre peu à peu le coin supérieur et toute sa charge. Mais ce moyen, difficile à régler, était en outre dangereux, parce que le coin inférieur, cédant à la pression verticale qu'il éprouvait, était souvent lancé avec force et pouvait occasionner des accidents. On remplace aujourd'hui les coins par des boîtes cylindriques en tôle contenant du sable, et percées d'orifices à leur partie inférieure (fig. 2). La ferme

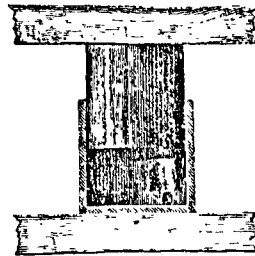


Fig. 2.

repose sur le sable par l'intermédiaire d'un piston en bois qui entre exactement dans le cylindre. Lorsqu'on ouvre les orifices, le sable, s'il est bien sec, s'écoule d'une manière très-uniforme, et sa

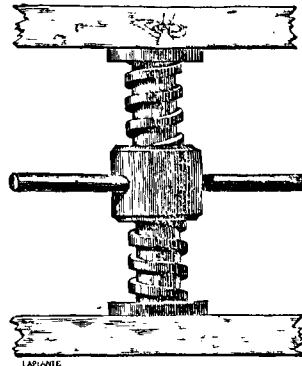


Fig. 3.

ferme descend elle-même avec la plus grande uniformité. Pour régler le jeu simultané de toutes les boîtes à sable qui soutiennent un même cintre, on a tracé à l'avance sur les pistons des lignes horizon-

tales colorées qui permettent de juger de l'égalité de la descente de tous les pistons, et d'arrêter au besoin le mouvement quand tous les supports se sont abaissés d'une même quantité déterminée. On a aussi employé avec succès des **VERRINS** (Voy. ce mot) pour remplacer les coins; en faisant tourner l'écrou dans un sens convenable, les deux vis, filetées en sens contraire (fig. 3) s'y engagent toutes deux, et la semelle supérieure descend. Un certain nombre de verrins manœuvrés avec ensemble permettent de faire descendre une ferme de cintre d'un mouvement aussi régulier et aussi lent qu'on le veut. En tournant les écrous en sens contraire, on ferait remonter la ferme, avantage qui peut être précieux dans quelques occasions.

DÉCISTÈRE, dixième partie du **stère** (Voy. **Système MÉTRIQUE**).

DÉCLIC, nom donné à divers mécanismes qui offrent ce caractère commun d'opérer un changement brusque de mouvement par le jeu d'un cliquet, analogue au cliquet d'arrêt des encliquetages à dents, mais dont l'axe se transporte dans l'espace (Voy. **ENCLIQUEMENT**). La figure ci-contre en montre un exemple. Une roue AA, mobile autour d'un axe

horizontal, est folle sur cet axe; c'est-à-dire qu'elle peut tourner indépendamment de lui. Mais l'extrémité de l'arbre porte un mentonnet *b* qui repose sur le bout recourbé d'un levier à détente ou cliquet *cd* mobile autour d'un axe *O* fixé à la roue *A*, et maintenu dans cette position par un ressort *r* fixé également à la roue. Dans cet état de choses, si l'arbre tourne dans le sens indiqué par la flèche, le mentonnet agissant sur le cliquet force la roue à tourner dans le

même sens; et si une corde est enroulée sur sa circonférence, un poids *P* suspendu à l'extrémité de cette corde sera élevé à une certaine hauteur. Mais dans ce mouvement la queue *d* du levier vient rencontrer une cheville d'arrêt *f*, fixe dans l'espace; le levier est obligé de tourner autour de l'axe *O*, le mentonnet se dégage, et la roue, sollicitée par le poids *P*, tournera en sens contraire, et la corde se déroulera. Une fois que la queue *d* du levier s'est dégagée par l'effet même de la rotation, le levier pressé par le ressort *r* reprend sa première position par rapport à la roue; le mentonnet en tournant vient de nouveau saisir l'extrémité *c* du cliquet, et le jeu de l'appareil recommence.

Dans les **sonnettes à déclin** (Voy. **SONNETTE**), le mouton est saisi entre les branches inférieures de deux cliquets adossés symétriquement, mobiles autour d'un même axe ou de deux axes très-voisins. Quand le mouton est parvenu à une certaine hauteur, les branches supérieures s'engagent dans un espace qui va en se rétrécissant et qui les oblige à se rapprocher; les branches inférieures s'écartent, et le mouton abandonné à lui-même retombe.

L'horlogerie présente de nombreux exemples de mécanismes analogues (Voy. **HORLOGE**, **PENDULE**,

MONTRÉ A RÉPÉTITION, etc.); mais ils y sont plus particulièrement désignés sous le nom de **DÉTENTES** (Voy. ce mot), quand l'axe du levier demeure fixe et que c'est la cheville, ou l'obstacle quelconque agissant sur la queue de levier ou cliquet, qui est mobile.

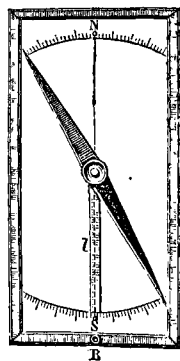
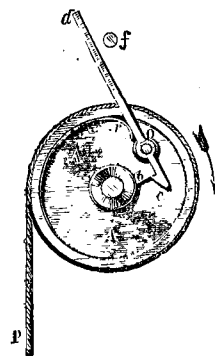
DÉCLINAISON, arc de méridien céleste compris entre l'équateur et le centre d'un astre placé sur ce méridien. La déclinaison se compte de zéro à 90°; elle est *boréale* ou *australe*. La déclinaison est le complément de la distance polaire; il suffit par conséquent pour l'obtenir, d'observer, au moment où l'astre passe au méridien, la distance de cet astre au pôle. Pour cela, on se sert du **CERCLE MURAL**. (Voy. ce mot.) On a observé préalablement une étoile circumpolaire à son passage supérieur et à son passage inférieur; la moyenne des nombres donnés dans ces deux cas par la graduation du cercle est le nombre qui répond à l'axe du monde; on note le nombre de la graduation du cercle auquel répond la direction de la lunette quand on observe l'astre dont on cherche la déclinaison; la différence entre ce nombre et celui qui répond à l'axe du monde, exprime la distance polaire de l'astre. Si elle est moindre que 90°, en en prenant le complément on obtient la déclinaison demandée, qui est alors *boréale*; si cette différence est plus grande que 90°, on en retranche 90°; le reste donne la déclinaison qui, dans ce cas, est *australe*. — Lorsqu'il s'agit de la déclinaison d'un astre ayant un diamètre apparent, comme le soleil ou la lune, par exemple, il faut déterminer la distance polaire de son bord supérieur, celle de son bord inférieur, et prendre la moyenne pour avoir la distance polaire du centre, et par suite sa déclinaison.

Ces observations doivent être corrigées de la **RÉFRACTION** (Voy. ce mot).

DÉCLINAISON, se dit aussi de l'angle que fait un plan vertical avec la ligne *est* et *ouest*; c'est le complément de son azimut. (Voy. **CADRANS SOLAIRES**.)

DÉCLINATOIRE, petite boussole qui sert à orienter les plans (Voy. **ORIENTATION**). L'aiguille est renfermée dans une boîte rectangulaire dont le plus grand côté est parallèle à la ligne *NS*; et le limbe n'embrasse qu'un arc d'une vingtaine de degrés de part et d'autre de ces deux points. La boîte est recouverte d'une glace très-rapprochée de l'aiguille; et un levier *L*, qu'on peut faire mouvoir en appuyant sur le bouton *B*, soulève l'aiguille et la fait appuyer contre la glace (Voy. **BOUSSOLE**). Le couvercle à coulisse, qui ferme la boîte en pressant sur le bouton *B*, produit aussi ce même effet.

Lorsqu'on lève un plan à la **PLANCHETTE** (Voy. ce mot), dès qu'on a déterminé sur le terrain la direction d'une droite et qu'elle est tracée sur le plan, on pose sur ce plan le **déclinatoire**, et on tourne la boîte de manière que l'aiguille aimantée marque sur le limbe la déclinaison au moment de l'expérience: 20° 6' Ouest



par exemple; le grand côté de la boîte est alors parallèle au méridien du lieu, et l'on peut s'en servir comme d'une règle pour tracer cette direction sur le plan. — Si c'est la direction du méridien magnétique que l'on veut rapporter sur le plan, on tourne le déclinatoire jusqu'à ce que la ligne NS coïncide avec la direction de l'aiguille; le grand côté de la boîte est alors parallèle au méridien magnétique, et peut servir à tracer sur le plan cette direction.

DÉCOMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, opération qui consiste à remplacer une accélération unique par plusieurs accéléérations simultanées. On démontre que les accéléérations se composent comme les vitesses (*Voy. COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS*); il en résulte que la décomposition des accéléérations s'opère comme celle des vitesses (*Voy. DÉCOMPOSITION DES VITESSES*).

DÉCOMPOSITION DES FORCES, opération qui a pour objet de remplacer une force donnée par plusieurs forces simultanées, appliquées soit au même point matériel, soit au même corps solide; ce problème est l'inverse de la *COMPOSITION DES FORCES* (*Voy. ce mot*).

1. Considérons d'abord le cas d'une force appliquée à un point matériel, et supposons qu'il s'agisse de la décomposer en deux autres. Soit R (*fig. 1*) la force donnée, et soient F et F' les deux forces demandées; si AB, AC, AD sont les droites qui représentent les forces F, F' et R en grandeur et en direction, AD doit être la diagonale du parallélogramme ABDC construit sur AB et AC; et comme BD est égal à AC, on voit que les trois forces ont entre elles les mêmes relations que les trois côtés AB, BD, AD d'un même triangle ABD; et le problème de la décomposition revient à trouver les éléments inconnus d'un triangle au moyen d'éléments donnés en nombre suffisant. Désignons par (F, F'), (F, R), (F', R) les angles que les composantes font entre elles et avec la résultante.

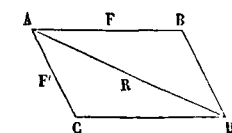


Fig. 1.

1° On peut donner, et c'est le cas le plus ordinaire, les directions des deux composantes. Si l'on veut obtenir leurs intensités par une construction graphique, on mènera par le point D une droite faisant avec DA un angle ADB égal à l'angle donné DAC ou (F', R), et par le point A une droite faisant avec AD un angle DAB égal à l'angle donné (F, R); on formera ainsi le triangle ABD, dans lequel les côtés AB et BD représenteront les forces F et F'; il ne restera qu'à mener AC égal et parallèle à BD.

Si l'on veut employer le calcul, on aura

$$\frac{F}{\sin(F', R)} = \frac{R}{\sin(F, F')} \quad \text{et} \quad \frac{F'}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, F')}$$

d'où

$$F = R \cdot \frac{\sin(F', R)}{\sin(F, F')} \quad \text{et} \quad F' = R \cdot \frac{\sin(F, R)}{\sin(F, F')}$$

2° On peut donner une des composantes en grandeur et en direction, par exemple F et l'angle (F, R). Si l'on opère graphiquement, ayant pris AD pour représenter R, on fera l'angle DAB égal à (F, R), et l'on prendra AB égal à la longueur qui re-

présente l'intensité de F; on joindra BD; on mènera AC égal et parallèle à BD; cette droite représentera F' en grandeur et en direction. Par le calcul on aurait à résoudre un triangle connaissant deux côtés AD et AB, et l'angle compris DAB. (*Voy. les Traités de Trigonométrie.*)

3° On peut donner en grandeur les deux composantes F et F'. Si l'on opère graphiquement, on décrira des points A et D comme centres, avec des rayons respectivement égaux à F et à F', c'est-à-dire aux longueurs qui représentent ces forces, deux arcs de cercles, qui devront se couper en un point B; on joindra AB et BD; on mènera AC égal et parallèle à BD; les droites AB et AC auront les directions cherchées. Par le calcul on aurait à résoudre un triangle connaissant les trois côtés. (*Voy. les Traités de Trigonométrie.*)

4° Le cas où l'on donnerait l'intensité d'une des composantes et la direction de l'autre n'est pas usité; il répondrait à ce problème de trigonométrie: Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; et il donnerait lieu à une discussion semblable.

5° Le cas qui se présente le plus fréquemment est celui où l'on veut décomposer une force R suivant deux directions perpendiculaires entre elles. Le triangle ABD est alors rectangle en B; et les formules données ci-dessus (1°) se simplifient. En appelant α l'angle (F, R), on a

$$F = R \cos \alpha \quad \text{et} \quad F' = R \sin \alpha,$$

puisque (F, F') étant égal à 90°, on a $\sin(F, F') = 1$.

Lorsqu'on a à décomposer une force R en trois forces simultanées, on les suppose ordinairement perpendiculaires deux à deux; en d'autres termes, on se place dans le cas où les composantes sont les trois arêtes contiguës d'un parallélépipède rectangle dont la résultante donnée est la diagonale. Si F, F', F'' désignent alors les composantes demandées, et α, β, γ les angles qu'elles font respectivement avec la résultante R, on a immédiatement

$$F = R \cos \alpha, \quad F' = R \cos \beta, \quad F'' = R \cos \gamma.$$

Le cas où les trois composantes seraient obliques entre elles n'est pas usité; mais il n'offrirait pas de difficulté réelle. On connaîtrait alors les angles (F, F'), (F, F''), (F', F'') que les composantes font entre elles, ainsi que les angles (F, R), (F', R), (F'', R) qu'elles font avec la résultante R. Or il y a entre ces forces et ces angles les relations (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*).

$F + F' \cos(F, F') + F'' \cos(F, F'') = R \cos(F, R)$,
 $F \cos(F, F') + F' + F'' \cos(F', F'') = R \cos(F', R)$,
 $F \cos(F, F'') + F' \cos(F', F'') + F'' = R \cos(F'', R)$,
 équations du premier degré en F, F', F'', d'où il serait facile de tirer les valeurs de ces inconnues.

Si les directions des trois composantes étaient données dans un même plan (contenant la direction de la résultante), le problème serait indéterminé; car on pourrait se donner arbitrairement la grandeur de l'une des trois composantes, F par exemple; décomposer la force R en deux forces, dont l'une soit précisément F; l'autre serait une certaine force φ , que l'on pourrait décomposer à son tour suivant les directions données pour F' et F''.

Si l'on proposait de décomposer une force donnée en plus de trois forces appliquées au même point, le problème serait également indéterminé; car si n désigne le nombre des composantes, on pourrait se

donner arbitrairement la grandeur de $n - 3$ de ces composantes, les composer en une seule R' ; décomposer la force donnée R en deux forces, dont l'une soit précisément R' ; l'autre serait une certaine force φ , que l'on pourrait décomposer à son tour suivant les directions des trois dernières composantes.

Il est bon de remarquer enfin que si l'on proposait de décomposer une force suivant deux directions qui ne fussent pas dans un même plan avec celle de cette force donnée, le problème serait évidemment impossible.

II. Considérons maintenant le cas où le point d'application de la force donnée fait partie d'un corps solide. On peut encore demander de décomposer la force donnée en deux ou trois forces appliquées au même point; la décomposition s'opérera comme il a été expliqué ci-dessus. Mais on peut aussi demander de décomposer la force donnée en deux ou trois forces parallèles, appliquées en des points convenables du corps solide; nous allons examiner ce problème.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de décomposer une force donnée R (fig. 2) en deux forces parallèles, appliquées en des points A et B donnés dans un même plan avec la direction de R , et situés de part et d'autre de cette direction. Les deux composantes F et F' devront être de même sens que R ; et l'on aura (Voy.

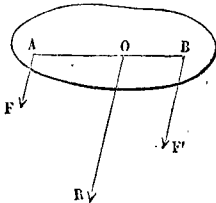


Fig. 2.

$$F + F' = R \text{ et } \frac{F}{F'} = \frac{OB}{OA}.$$

On tire de la seconde relation

$$\frac{F}{F + F'} = \frac{OB}{OB + OA}, \text{ d'où } F = R \cdot \frac{OB}{AB}.$$

On obtiendrait de la même manière

$$F' = R \cdot \frac{OA}{AB}.$$

Ces formules donnent les valeurs des deux composantes.

Si les points A et B (fig. 3) étaient donnés d'un même côté de la force R , les deux composantes devraient être de sens contraire; la plus grande, F , appliquée en A aurait le sens de la force R ; et l'on aurait

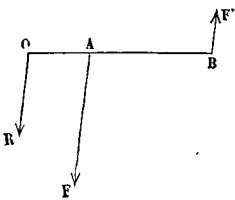


Fig. 3.

$$F - F' = R \text{ et } \frac{F}{F'} = \frac{OB}{OA}.$$

On tire de la seconde relation

$$\frac{F}{F - F'} = \frac{OB}{OB - OA}, \text{ d'où } F = R \cdot \frac{OB}{AB}.$$

On en déduit aisément

$$F' = R \cdot \frac{OA}{AB}.$$

On pourrait donner l'une des composantes, F par exemple; on aurait alors à trouver la grandeur et le

point d'application de la seconde composante F' . Dans le cas de la figure 2, on aurait

$$F' = R - F \text{ et } OA = AB \cdot \frac{F'}{R} = AB \cdot \frac{R - F}{R}.$$

Dans le cas de la figure 3, on aurait

$$F' = F - R \text{ et } OA = AB \cdot \frac{F'}{R} = AB \cdot \frac{F - R}{R}.$$

On peut avoir à décomposer une force en trois forces parallèles appliquées en des points donnés. — Soient A, B, C (fig. 4) ces points d'application, que nous ne supposons pas situés en ligne droite; soit O le point où la force donnée rencontre le plan des trois points A, B, C ; nous pourrions supposer la force donnée R appliquée au point O . Pour opérer la décomposition, on procédera de la manière suivante :

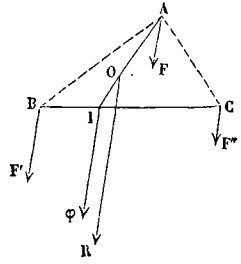


Fig. 4.

On joindra OA , dont le prolongement viendra couper en un point I la droite qui joint les points B et C . On décomposera la force R en deux forces parallèles, l'une F appliquée en A , l'autre φ appliquée en I ; on décomposera ensuite la force φ en deux autres forces parallèles, l'une F' appliquée en B , l'autre F'' appliquée en C . Les intensités des trois composantes sont faciles à obtenir. On a d'abord, d'après ce qui a été dit ci-dessus :

$$F = R \cdot \frac{OI}{AI} \text{ et } \varphi = R \cdot \frac{OA}{AI}.$$

On a ensuite

$$F' = \varphi \cdot \frac{IC}{BC} = R \cdot \frac{OA}{AI} \cdot \frac{IC}{BC}$$

et

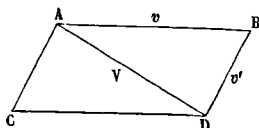
$$F'' = \varphi \cdot \frac{BI}{BC} = R \cdot \frac{OA}{AI} \cdot \frac{BI}{BC}.$$

On peut remarquer que si l'on avait $OI = \frac{1}{3} AI$, et $BI = IC$, les trois composantes seraient égales chacune à $\frac{1}{3} R$. C'est ce qui arriverait si le point O était le CENTRE DE GRAVITÉ (Voy. ce mot) du triangle ABC .

Le problème serait indéterminé si les trois points A, B, C étaient donnés en ligne droite, et dans un même plan avec la direction de R ; car on pourrait se donner arbitrairement l'une des composantes, F par exemple; décomposer R en deux forces, dont l'une soit précisément F ; l'autre serait une force φ , que l'on pourrait décomposer à son tour en deux forces parallèles appliquées aux deux autres points donnés.

Le problème serait encore indéterminé si l'on demandait de décomposer une force donnée en plus de trois composantes parallèles; car si n désigne le nombre de ces composantes, on pourrait se donner $n - 3$ de ces composantes, les composer en une seule R' , ce qui serait généralement possible, décomposer R en deux forces parallèles, dont l'une soit précisément R' ; l'autre serait une force φ , que l'on pourrait décomposer à son tour en trois forces parallèles passant par les trois derniers points d'application donnés.

DÉCOMPOSITION DES VITESSES, opération qui consiste à remplacer une vitesse donnée par plusieurs vitesses simultanées; c'est le problème inverse de celui qu'on se propose dans la COMPOSITION DES VITESSES (Voy. ce mot). Supposons d'abord qu'il s'agisse de décomposer une vitesse donnée V en deux autres; comme les deux composantes et la résultante doivent former deux côtés AB , AC et la diagonale AD d'un même parallélogramme, il y a



entre ces trois vitesses les mêmes relations qu'entre les trois côtés AB , BD , AD du triangle ABD ; et le problème de la décomposition ramène aux différents cas de la résolution d'un triangle. Désignons par v et v' les deux composantes AB et AC (ou BD), et par (v, v') , (v, V) , (v', V) les angles que les composantes font entre elles et avec la résultante.

1° On peut donner les directions des composantes, c'est-à-dire les angles (v, V) et (v', V) , d'où l'on déduit (v, v') ; c'est le cas le plus ordinaire. Pour obtenir les composantes par une construction graphique, on prendra une longueur AD pour représenter la vitesse V donnée; on mènera par le point A une droite AB faisant avec AD l'angle donné (v, V) , et par le point D une droite DB faisant avec DA l'angle donné (v', V) ; on formera ainsi le triangle ADB , dans lequel les côtés AB et BD représenteront les vitesses demandées v et v' , à la même échelle que AD représente V .

Si l'on veut opérer par le calcul, on aura

$$\frac{v}{\sin(v', V)} = \frac{V}{\sin(v, v')} \quad \text{et} \quad \frac{v'}{\sin(v, V)} = \frac{V}{\sin(v, v')}$$

d'où $v = V \cdot \frac{\sin(v', V)}{\sin(v, v')}$ et $v' = V \cdot \frac{\sin(v, V)}{\sin(v, v')}$.

2° On peut donner une des composantes en grandeur et en direction, par exemple v et l'angle (v, V) . Si l'on opère graphiquement, ayant mené, sous un angle égal à (v, V) deux droites AB et AC représentant à la même échelle les vitesses V et v , on n'aura qu'à joindre BD , qui représentera à la même échelle la composante demandée v' ; en faisant l'angle $CAD = ADB$, on aura la direction de cette composante. Par le calcul, on aura à résoudre un triangle connaissant deux côtés v, V et l'angle compris (v, V) ; on suivra donc les méthodes indiquées pour ce cas dans les Traités de Trigonométrie.

3° On peut donner en grandeur les deux composantes v et v' . Pour obtenir leur direction par un procédé graphique, on décrira deux arcs de cercle, l'un du point A comme centre avec v pour rayon, l'autre du point D comme centre avec v' pour rayon; ces deux arcs devront se couper en un point B que l'on joindra aux points A et D ; on mènera par le point A une droite AC parallèle à BD , et l'on aura les directions des deux composantes AB et AC . Par le calcul on aurait à résoudre un triangle connaissant les trois côtés. (Voy. la Trigonométrie.)

4° Le cas où l'on donnerait la grandeur de l'une des composantes et la direction de l'autre, n'est point usité; il répondrait à celui où l'on donne dans un triangle deux côtés et l'angle opposé à l'un

d'eux; il donnerait par conséquent lieu à la même discussion.

5° Le cas le plus ordinaire est celui où l'on demande de décomposer une vitesse donnée V en deux autres perpendiculaires entre elles. Les formules données ci-dessus se simplifient alors; et si l'on appelle α l'angle qui fait l'une des composantes v avec la résultante, on a

$$v = V \cos \alpha \quad \text{et} \quad v' = V \sin \alpha,$$

attendu que

$$\sin(v, v') = \sin 90^\circ = 1.$$

Lorsqu'on a à décomposer une vitesse donnée en trois vitesses simultanées, on les suppose ordinairement perpendiculaires entre elles deux à deux; c'est-à-dire qu'on regarde les composantes comme les trois arêtes contiguës d'un parallélépipède rectangle dont la vitesse donnée est la diagonale. En appelant alors v, v', v'' les trois composantes, et α, β, γ les angles qu'elles font respectivement avec la diagonale, et qu'on suppose donnés, on a immédiatement

$$v = V \cos \alpha, \quad v' = V \cos \beta, \quad v'' = V \cos \gamma.$$

Le cas où les trois composantes seraient obliques entre elles n'est point usité

On peut remarquer que si les directions des trois composantes étaient données dans un même plan (contenant la direction de la résultante), le problème serait indéterminé; car on pourrait se donner arbitrairement la grandeur de l'une des trois composantes, v par exemple; décomposer la vitesse V en deux dont l'une soit v ; l'autre serait une certaine vitesse u , que l'on pourrait décomposer à son tour suivant les directions données pour v' et v'' .

Le problème serait encore indéterminé si l'on proposait de décomposer une vitesse donnée V en plus de trois composantes, de directions données dans l'espace; car si n désigne le nombre de composantes, on pourrait se donner arbitrairement la grandeur de $n-3$ de ces composantes, les composer en une seule V' , décomposer la vitesse donnée V en deux autres dont l'une soit V' ; l'autre serait une certaine vitesse u , que l'on pourrait décomposer à son tour suivant les trois directions non encore employées.

Si l'on proposait de décomposer une vitesse donnée suivant deux directions qui ne fussent pas dans un même plan avec celle de cette vitesse, il est clair que le problème serait impossible.

DÉFENSE DES PLACES. Elle comprend la FORTIFICATION (Voy. ce mot), et les opérations purement militaires. Elle ne donne lieu, pendant le cours d'un siège, qu'à un petit nombre d'opérations géométriques. Lorsque l'assiégeant a ouvert la première parallèle et fait connaître le point d'attaque, l'assiégé établit sur le glacis même des batteries dites de *contre-approche*, destinées à prendre d'enfilade les boyaux de communication; ces batteries, construites à la *sape volante* (Voy. ATTAQUE DES PLACES) ne sont formées que de 3 ou 4 pièces de 8, qui rentrent après une cannonade de quelques heures. Pendant les cinq ou six premières nuits on renouvelle ces contre-approches en variant leur position, qui doit toujours être à peu près perpendiculaire à la direction d'un boyau de tranchée. Pendant le cours du siège, l'assiégé élève un RETRANCHEMENT (Voy. ce mot) à la gorge du bastion attaqué, si ce retranchement n'existe pas déjà. Les autres opéra-

tions de défense consistent à armer successivement les points d'où l'on peut avoir vue sur les travaux d'approche ou contre-batte les batteries de l'assiégeant, à faire des sorties, à préparer des fourneaux de mine pour faire sauter les batteries ennemies, ou les emplacements qu'il doit successivement occuper, etc., etc. *Voy. le Traité sur la défense des places, de Carnot; le Résumé de Fortification, de Zaccane; les Principes de Fortification, par le général Noizet.*

DEFÉRENT (CERCLE), cercle qui, dans le *Système de Ptolémée* (*Voy. SYSTÈMES ASTRONOMIQUES*), est décrit par le centre de l'épicycle que parcourt chaque planète. Les cercles déferents ont pour centre le centre de la terre.

DEFILEMENT, opération par laquelle on modifie le relief d'un ouvrage de fortification de manière à mettre les défenseurs à l'abri des coups qui peuvent partir des points dominants du terrain qui environne cet ouvrage. (Il ne peut être question ici que des coups sensiblement rectilignes portés par la mousqueterie ou l'artillerie, et non des feux courbes qui peuvent plonger dans l'intérieur des retranchements.) Cormontaigne est le premier qui ait cherché, en France, à soumettre le défilement à des règles précises; mais depuis lui les méthodes se sont perfectionnées. Pour se bien rendre compte du problème, il faut imaginer que le terrain environnant soit relevé d'une hauteur égale à celle d'un parapet ordinaire, c'est-à-dire 2^m,50. Un ouvrage de fortification est dit *défilé* de tous les points dangereux environnants lorsque le plan mené par une crête quelconque tangentielllement au terrain ainsi relevé laisse au-dessous de lui les terre pleins et tous les objets placés dans l'intérieur de l'ouvrage; parce qu'il est évident alors que les hommes postés sur le terre-plein, et à plus forte raison ceux qui sont réunis dans l'intérieur de l'ouvrage, ne peuvent être atteints par les coups rectilignes partis du terrain environnant. Un plan porte le nom de *plan de défilement* toutes les fois que les hommes ou les objets placés au-dessous sont cachés aux vues de l'ennemi, tandis que s'ils étaient au-dessus, ils seraient vus de quelques-uns des points que l'ennemi pourrait occuper.

La première chose à faire, quand on s'occupe du défilement, est de déterminer la distance à laquelle un point doit être réputé dangereux. On fixe aujourd'hui cette distance à 1500^m environ : non que les projectiles ne puissent porter beaucoup plus loin, mais parce que l'ennemi ayant intérêt à resserrer, dès l'abord, la place au plus près possible, il est rare qu'il y ait avantage pour lui à placer ses batteries à une distance plus grande. La distance de 1500^m s'applique au corps de la place; pour les demi-lunes on peut la réduire à 1000^m, parce que ces ouvrages ne sont ordinairement occupés que lorsque les tranchées sont ouvertes, et qu'il n'est pas vraisemblable que l'ennemi établisse des batteries spéciales en arrière de ses parallèles pour battre une demi-lune qu'il pourra bientôt attaquer de plus près. Pour les chemins couverts la distance peut être réduite encore, et fixée à 500^m et 600^m, parce qu'ils ne sont couverts de défenseurs que lorsque l'ennemi a ouvert sa seconde parallèle. Il est clair qu'on peut négliger les points dominants que l'ennemi ne pourrait occuper d'une manière efficace.

L'assiette d'un ouvrage de fortification doit tou-

jours être choisie de manière qu'il soit à peu près défilé par son relief naturel, et qu'on n'ait à faire varier ses crêtes ou ses terre-pleins qu'entre des limites restreintes pour opérer un défilement complet. A moins de circonstances extraordinaires, on n'admet pas de plan de défilement dont la pente soit supérieure à $\frac{1}{10}$. Lorsque plusieurs ouvrages

sont placés les uns en avant des autres, il est indispensable que chaque ouvrage soit défilé de ceux qui sont en avant de lui, afin que ceux-ci ne deviennent pas dominants lorsque l'ennemi s'en empare.

Le défilement repose sur la solution de quatre problèmes géométriques dont nous nous occuperons d'abord. On suppose le plan du terrain levé, et son nivellement effectué, de manière qu'on dispose d'un plan topographique où les courbes horizontales soient suffisamment rapprochées. (*Voy. PLAN TOPOGRAPHIQUE.*)

1. Le premier problème consiste à mener par une horizontale donnée un plan tangent au terrain et qui ne le coupe en aucun des points compris dans l'étendue que l'on considère.

Soit AB (fig. 1) l'horizontale donnée, et concevons

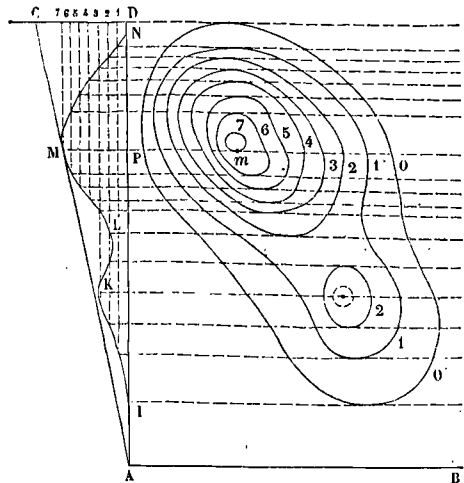


Fig. 1.

qu'une droite parallèle à AB se meuve en restant toujours tangente à la surface du terrain; elle engendrera un cylindre tangent lui-même à cette surface, et le plan demandé devra être tangent à ce cylindre. On obtiendra autant de génératrices qu'on voudra en menant des tangentes aux courbes horizontales parallèlement à AB. Concevons par le point A un plan vertical AD perpendiculaire à AB; il rencontrera les génératrices en des points dont on obtiendra le rabattement en prolongeant les horizontales au delà de AD de quantités respectivement égales à leurs cotes; ce qui donnera la courbe IKLMN, rabattement de la section droite du cylindre. On mènera par le point A une tangente AC à cette courbe. Soit M le point de contact; l'horizontale correspondante mP sera la génératrice de contact du plan tangent au cylindre mené par la droite AB. Ce plan sera tangent au terrain au point m où l'horizontale mP touche la courbe hori-

zontale qui lui correspond. Toutes les conditions du problème seront remplies si, comme dans la figure 1, la tangente AC laisse d'un même côté toute la courbe IKLMN, ou du moins toute la portion de cette courbe comprise dans l'étendue de terrain que l'on considère. L'ÉCHELLE DE PENTE (Voy. ce mot) du plan tangent s'obtiendrait en divisant AP en 7 parties égales, puisque la cote du point P est 7.

II. Le second problème a pour objet de mener par une droite donnée quelconque AX (fig. 2) un plan tangent à la surface du terrain et ne le coupant en aucun point dans l'étendue considérée.

Pour cela, on marquera sur AX les cotes équi-

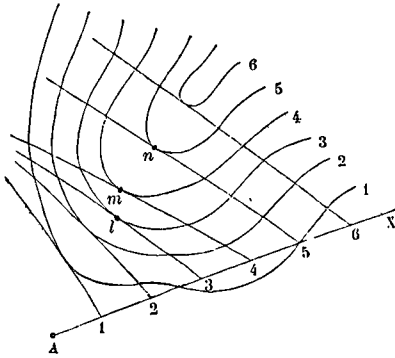


Fig. 2.

distantes 1, 2, 3, etc., correspondantes aux courbes horizontales, et par chacun des points 1, 2, 3, etc., on mènera une tangente à la courbe horizontale de même cote. Si 4m est celle qui fait avec AX, et du côté de A, le plus petit angle, le plan tangent sera celui qui passe par AX et par l'horizontale 4m; et le point m sera le point de contact. En effet, si l'on menait par le point 3 une horizontale de ce plan, elle serait parallèle à 4m, et passerait par conséquent à gauche de 3l, puisque, par hypothèse, l'angle m4A est moindre que 3A. Il en résulte que l'horizontale 3l est au-dessous du plan mAX; il en est de même, à plus forte raison, de la courbe horizontale 3. De même, si par le point 5 on menait une horizontale du plan mAX, elle serait parallèle à 4m et passerait à gauche de 5n, puisque l'angle m4A est moindre que n5A; donc 5n est au-dessous du plan mAX; et il en est de même, à plus forte raison, de la courbe horizontale 5. On démontrerait de même que toutes les courbes horizontales sont au-dessous du plan mAX, excepté le point m de la courbe 4 qui est dans ce plan. Donc le plan mAX est tangent en m à la surface du terrain. Dans l'exécution, on se dispense de mener les tangentes; il suffit de promener une règle sur le plan pour reconnaître quel est le point de la droite AX pour lequel la tangente fait avec cette droite le plus petit angle. La solution n'est qu'approchée, puisque les courbes horizontales ne sont pas à des distances infiniment petites; mais l'approximation est généralement suffisante.

L'échelle de pente du plan tangent s'obtiendrait en abaissant du point A une perpendiculaire sur l'horizontale m4, et en la divisant en 4 parties égales.

III. Le troisième problème consiste à mener par

un point donné une droite tangente à la surface du terrain, connaissant la projection horizontale de cette tangente. On pourrait résoudre cette question en menant le plan vertical qui passe par la projection donnée et qui doit conséquemment contenir la tangente cherchée, en déterminant l'intersection de la surface du terrain par ce plan, et en rabattant cette intersection sur le plan horizontal. Par le point donné on mènerait une tangente à cette intersection rabattue, ce qui ferait connaître le rabattement du point de contact cherché; il n'y aurait plus qu'à relever ce point, ce qui se réduit à lire sa cote dans le rabattement. Cette solution si naturelle et si simple n'est cependant pas la plus commode, surtout lorsque l'opération doit être répétée un certain nombre de fois, parce qu'il faut alors faire un rabattement particulier pour chaque tangente. Il est plus avantageux, dans la pratique, d'opérer comme il suit :

Soit AB (fig. 3) la direction donnée. On mène

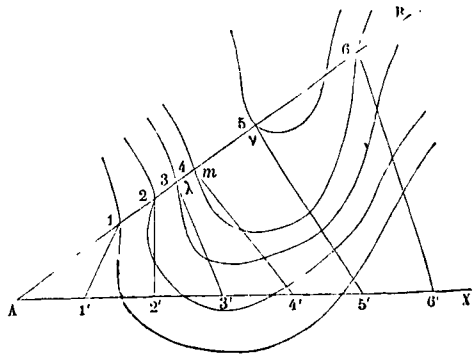


Fig. 3.

par le point A une droite quelconque AX dont on détermine la pente par des cotes équidistantes 1', 2', 3', 4', 5', etc. Les courbes horizontales coupent le plan vertical mené suivant AB, en des points qui ont la même cote que ces courbes. Concevons que l'on joigne ces points d'intersection avec les points de même cote sur la droite AX, on aura des horizontales qui se projettent horizontalement suivant les droites

1'.1, 2'.2, 3'.3, 4'.4, 5'.5, etc.

On cherchera quelle est celle de ces droites qui fait avec AX, et du côté de A, le plus petit angle.

Supposons que ce soit la droite 4'.4; la droite cherchée sera celle qui va du point A au point qui a pour projection m et pour cote 4. En effet, désignons, pour abrégé le discours, la droite ainsi déterminée par AT, et soient L, M, N les points de cette droite qui ont pour cote 3, 4, 5. Soient L', M', N' les points de la droite projetée suivant AX qui ont les mêmes cotes; enfin soient λ et ν les points où le plan vertical mené par AB rencontre les courbes horizontales cotées 3 et 5. Si l'on joignait L'L, cette droite serait parallèle à M'M, et se projetterait par conséquent suivant une parallèle à 4'.4; elle rencontrerait donc AB à gauche du point 3, puisque l'angle 33'A est supposé plus grand que 44'A. Il en résulte que le point λ du terrain est situé à droite du point L de la droite AT et par conséquent au-dessous de cette droite, puis-

qu'ils sont tous deux dans le plan TAB et sur une même horizontale. De même, si l'on joignait N'N, cette droite serait parallèle à M'M et se projetterait suivant une parallèle à 4'. 4; elle rencontrerait AB à gauche du point 5, puisque l'angle 44'A est supposé moindre que 55'A. Il en résulte que le point v du terrain est à droite du point N, et par conséquent au-dessous de la droite AT. On démontrerait de la même manière que tous les points du terrain compris dans le plan vertical TAB sont au-dessous de la droite AT, excepté le point M qui est sur cette droite. Cette droite est donc tangente au terrain au point M.

Cette solution n'est qu'approximative, puisque les courbes horizontales ne sont pas infiniment rapprochées; mais elle est expéditive, parce qu'il suffit de faire prendre à une règle les positions successives 1'. 1, 2'. 2, 3'. 3, etc., pour reconnaître, sans être obligé de tracer les droites correspondantes, quelle est celle qui fait avec AX le plus petit angle, du côté de A. On peut d'ailleurs obtenir une approximation plus grande en traçant à vue, ou par une interpolation géométrique, quelques courbes horizontales intermédiaires dans le voisinage de la position qui répond à l'angle minimum.

La même méthode permet de mener par un point donné A un cône circonscrit à la surface du terrain, et de déterminer la courbe de contact. Il suffit pour cela de répéter pour un nombre suffisant de directions partant du point A l'opération qu'on a faite pour AB. La même droite auxiliaire AX peut servir pour trouver toutes les génératrices du cône; la courbe de contact se trouve déterminée par les projections et les cotes d'autant de points qu'on a employé de génératrices.

IV. Le quatrième problème est le suivant : mener par un point donné un plan tangent à la surface du terrain, et qui laisse, au-dessous de lui tous les autres points de ce terrain compris dans l'étendue considérée. Pour résoudre ce problème, on commence par mener par le point donné un cône circonscrit au terrain, et par le point donné, c'est-à-dire par le sommet du cône, on lui mène un plan tangent qui laisse au-dessous de lui tous les points du terrain. A cet effet, on coupe le cône par un plan auxiliaire, que l'on prend horizontal pour plus de simplicité; on détermine l'intersection du cône par le plan auxiliaire, et l'on mène à la courbe d'intersection une tangente qui laisse toute la courbe du côté opposé au point donné; cette tangente est une horizontale du plan tangent, qui se trouve ainsi complètement déterminé.

Soient, par exemple (fig. 4) Aa, Ab, Ac, ..., AK les projections des génératrices du cône circonscrit, déterminées comme il a été dit à l'occasion du problème III, et soient 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2 la projection de la courbe de contact. Pour obtenir l'intersection du cône par un plan horizontal, il suffit de prendre sur les génératrices successives les points qui ont une même cote, la cote 4 par exemple; on obtient ainsi la courbe 4. 4. 4. 4. ... Si l'on mène la droite TT' tangente à cette courbe aux points m et n, de manière à laisser la courbe tout entière au delà de la tangente par rapport au point A, on aura une horizontale du plan cherché. Ce plan sera donc déterminé; on obtiendrait son ÉCHELLE DE PENTE (Voy ce mot) en

abaissant du point A une perpendiculaire sur TT' et en la divisant en 4 parties égales, puisque la cote de TT' est celle des points m et n, c'est-à-dire 4.

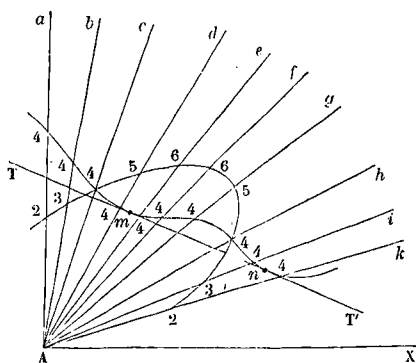


Fig. 4.

Ces questions résolues, nous pouvons indiquer la marche à suivre pour exécuter le défilement. Supposons d'abord qu'on n'ait à considérer qu'un seul front, et que tous les points dangereux soient situés en avant de ce front. Par la crête de l'ouvrage, on mènera un plan tangent au terrain, supposé relevé de 2^m. 50, de manière que ce plan laisse au-dessous de lui tous les points de ce terrain compris dans l'étendue que l'on considère; c'est le problème I ou le problème II suivant que la crête donnée sera horizontale, ce qui est le cas le plus ordinaire, ou qu'elle sera inclinée, ce qui peut arriver par suite des mouvements du terrain sur lequel la fortification est assise. Ce plan tangent sera le plan de défilement; en tenant le terre-plein de l'ouvrage parallèle à ce plan, on sera certain que les défenseurs seront à l'abri des coups directs derrière le parapet. Si le plan de défilement allait en s'élevant de la crête vers l'intérieur de l'ouvrage, il suffirait de tenir le terre-plein horizontal.

Supposons en second lieu qu'on ait à défilé un ouvrage composé de deux fronts AB et AC (fig. 5),

formant saillant en A. Si tous les points dangereux sont placés en face de AB, on se donnera la crête de AC, et par cette crête on mènera un plan tangent au terrain relevé, situé à gauche et en face

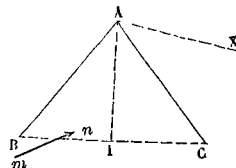


Fig. 5.

de AB; ce sera le plan de défilement. On placera la crête de AB dans ce plan, et l'on tiendra les terre-pleins parallèles à ce même plan. — S'il y a des points dangereux à droite et à gauche de l'ouvrage, on se donnera le saillant A; par ce point on imaginera un cône circonscrit au terrain relevé, et on lui mènera un plan tangent, qui laisse tout le cône au-dessous de lui; c'est le problème IV. Ce plan sera le plan de défilement; il devra contenir les crêtes de AB et de AC. — Si cette solution donnait pour ces crêtes des pentes trop fortes, et exagérât ainsi le relief, on pourrait mener par le point A une droite auxiliaire AX, tangente au terrain re-

levé, et ne le coupant en aucun point dans l'éten- due considérée; c'est le problème III, résolu plus haut. Par cette droite auxiliaire, à laquelle on donne le nom de *charnière*, on mènerait un plan tangent au terrain relevé (problème II), ce serait le plan de défilement. Comme on peut faire varier à volonté la direction de AX, on peut par quelques tâtonnements réussir à la choisir de manière à diminuer la pente du plan de défilement, et par suite celle des crêtes de AB et de AC. On prend quelquefois aussi pour charnière une droite qui ne passe pas par le saillant; par exemple, une droite parallèle à BC. Les circonstances locales et l'expérience de l'ingénieur sont les seuls guides dans la résolution d'un problème essentiellement indéterminé comme celui-ci. — On peut encore se contenter de défilé chacune des faces séparément contre les points dangereux situés en avant de chacune d'elles, et abaisser ensuite les terre-pleins de manière à les tenir au-dessous des deux plans de défilement. C'est ce qu'on appelle *défilé par le terre-plein*. Mais cette solution est souvent incommode. On y remédie en élevant dans la direction AI un ouvrage qu'on appelle une *traverse*, et dont la hauteur dépasse l'intersection des deux plans de défilement. Chaque face est alors défilée des coups directs par son parapet et des coups de revers par la traverse.

A plus forte raison est-on obligé d'élever une, ou même plusieurs traverses, lorsque l'ouvrage est exposé à des coups de revers tels que celui qui est figuré par la flèche *mn*, et qui prendraient à dos les défenseurs postés sur le terre-plein de la face AC. La crête de la traverse doit être réglée de manière que la face AC soit à l'abri de pareils coups. Il peut arriver qu'un ouvrage analogue à celui de la figure 5 soit tellement exposé aux coups de revers par la gorge qu'il faille élever une masse couvrante à la gorge même, ou au moins établir un glacis en pente ascendante de A vers BC. Enfin le terrain qui environne l'ouvrage peut être tellement dominant qu'on ne puisse mettre les défenseurs à l'abri des coups de revers, ou même des coups directs qu'à l'aide de vottes ou de blindages. Mais il est clair que lorsqu'un ouvrage de fortification ne peut être défilé par aucun moyen, c'est que son assiette même est vicieuse; car c'est de son assiette surtout qu'un ouvrage doit tirer sa force, ainsi que nous l'avons fait remarquer en commençant.

Ce que nous venons de dire d'un ouvrage formé de deux fronts seulement s'étend sans peine à un ouvrage formé d'un plus grand nombre de faces. Il faut toujours que chaque face soit défilée des coups directs par son propre parapet, et des coups de revers par la crête des autres fronts.

La hauteur de 2^m,50 dont le terrain doit être relevé, n'est pas une donnée absolue. Si les points dangereux dont on doit se défilé sont placés au delà de 600 mètres ou 800 mètres des saillants les plus avancés de la place, c'est-à-dire en arrière de la première parallèle, une hauteur de 2 mètres peut suffire, parce que c'est ordinairement celle des batteries que l'ennemi pourra élever. Si ces points dangereux sont en deçà de la distance de la première parallèle, mais non encore à la bonne portée de la mousqueterie, on pourra se contenter de relever le terrain de 1^m,50, parce que, dit M. le général Noizet, l'ennemi ne construit guère de batteries

que sous la protection de ses parallèles, et n'élève pas les plates-formes des pièces au-dessus du sol naturel. Mais à la bonne portée de la mousqueterie le terrain doit être relevé de 2^m,50, afin que l'assaillant ne puisse pas, en montant sur le parapet de ses tranchées, plonger dans l'intérieur des ouvrages. Il serait même désirable que les chemins couverts fussent défilés de 3 mètres au-dessus des points où l'ennemi construit ordinairement ses cavaliers de tranchée. (Voy. ATTAQUE DES PLACES.)

Dans la fortification de campagne on emploie pour se défilé d'une hauteur un procédé pratique qu'il est utile de connaître. Après avoir tracé l'ouvrage sur le sol et planté des perches verticalement sur les directions qui représentent la projection horizontale des crêtes, on cloue une règle AB (fig. 6), parallèlement au sol, à deux piquets très-bas, placés à la gorge de l'ouvrage; on fait planter en avant, à une petite distance, deux autres piquets plus élevés P et P', et deux hommes, commandés par un sous-officier, appuient contre ces deux piquets une latte CD dont on peut faire varier la position dans le plan vertical déterminé par P et P'. Un autre sous-officier se couche

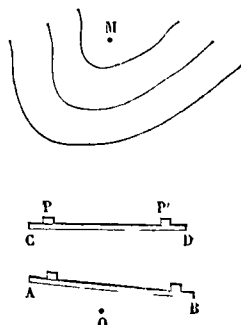


Fig. 6.

alors en arrière de la règle AB, et même par cette règle un rayon visuel qui soit tangent au mamelon dont on veut se défilé. Sur ses indications, les hommes placés en C et en D élèvent ou abaissent les extrémités de la latte jusqu'à ce qu'elle soit dans le plan tangent déterminé par l'œil O du défilé et par la règle AB. La règle et la latte sont alors dans un même plan, tangent au mamelon. Le défilé vise alors successivement les différentes perches, et y fait faire une marque au point où chacune d'elles est rencontrée par le plan de AB et de CD. En coupant alors les perches à 2^m,50 au-dessus des marques, on a autant de points des crêtes qu'il s'agissait de déterminer.

Les premiers ingénieurs qui se sont occupés du défilé substituaient au terrain environnant un plan s'appuyant sur ce terrain, et auquel ils donnaient le nom de *plan de site*; ils construisaient ensuite leurs fortifications comme si elles étaient réellement établies sur le plan de site. Ce procédé avait l'inconvénient d'exagérer le relief de certains ouvrages ou de certaines parties de la fortification. D'après ce qui a été dit plus haut, on voit que le défilé doit être opéré pour chaque ouvrage et pour chaque face en particulier.

Le problème du défilé a eu une certaine célébrité, qui tenait surtout à ce que la question paraissait encore obscure. Les méthodes de la Géométrie descriptive et l'emploi des plans cotés l'ont rendue familière aux ingénieurs modernes. Voy. l'*Introduction aux Cours de Topographie et de Fortification*, par le capitaine Hudelot; les *Leçons sur les plans cotés*, par M. Bardin; le *Résumé de Fortification*, par Zaccane; les *Principes de Fortification*,

par le général Noizet, et tous les Traités de Fortification.

DÉGAUCHISSEMENT, opération pratique qui a pour objet, étant donnée une droite fixe A, et une droite B mobile autour d'un de ses points et assujettie à s'appuyer sur une troisième droite C, de déterminer la position de B de manière qu'elle soit dans un même plan avec A. Cette opération trouve son application dans le **PROFILEMENT** (Voy. ce mot); elle s'effectue par une simple visée; il faut qu'en mettant l'œil dans le plan déterminé par la droite A et par le point de B qui est fixe, la droite B soit cachée par la droite A.

DEGRÉS DE PARALLÈLES (LONGUEUR DES), quantité variable avec la latitude. On sait mesurer la longueur d'un arc de parallèle correspondant à une latitude donnée connaissant les longitudes de ses extrémités (Voy. ARCS DE PARALLÈLE). En divisant la longueur obtenue par la différence de longitude des extrémités, on a la valeur moyenne du degré de parallèle à la latitude considérée. C'est ainsi que l'on a pu former le tableau suivant, extrait de la Base du système métrique, dans lequel l'aplatissement du globe est supposé égal à $\frac{1}{309}$ ou 0,00324.

L		L		L		L		L	
0°	111277,5 ^m	18°	105863,9 ^m	36°	90162,2 ^m	54°	65546,3 ^m	72	34487,8 ^m
1	111260,8	19	105251,1	37	89974,5	55	63965,3	73	32631,2
2	111210,3	20	104606,2	38	87795,5	56	62364,5	74	30764,4
3	111126,1	21	103929,7	39	86589,9	57	60744,5	75	28888,3
4	111008,2	22	103221,6	40	85357,7	58	59105,7	76	27003,0
5	110856,7	23	102482,1	41	84099,4	59	57448,8	77	25109,3
6	110671,9	24	101711,5	42	82815,4	60	55774,2	78	23207,8
7	110453,5	25	100910,0	43	81506,0	61	54082,5	79	21299,3
8	110201,7	26	100077,9	44	80171,7	62	52374,0	80	19384,0
9	109916,3	27	99215,1	45	78812,6	63	50649,3	81	17462,8
10	109597,8	28	98322,5	46	77429,6	64	48909,0	82	15536,2
11	109246,0	29	97399,6	47	76022,8	65	47153,4	83	13604,7
12	108861,1	30	96447,1	48	74592,6	66	45383,3	84	11669,1
13	108443,2	31	95465,4	49	73139,6	67	43599,4	85	9719,3
14	107992,6	32	94454,6	50	71664,1	68	41801,8	86	7787,4
15	107509,3	33	93414,8	51	70166,5	69	39991,3	87	5842,6
16	106993,2	34	92346,7	52	68647,4	70	38168,4	88	3896,1
17	106444,7	35	91250,4	53	67107,1	71	36333,8	89	1948,5

Si l'on compare ce tableau avec celui de la longueur des degrés du méridien, on remarque que ce n'est pas à l'équateur, mais vers 6° de latitude que le degré dans le sens du méridien est égal au degré dans le sens du parallèle.

Lorsque l'on considère la terre comme sphérique, la longueur du degré de parallèle s'exprime très-simplement en fonction de la latitude; car en appelant R le rayon du globe, r celui du parallèle et λ la latitude, on a $r = R \cos \lambda$.

D'ailleurs le degré, sur le cercle dont le rayon est r, a pour longueur $\frac{2\pi r}{360}$;

la longueur du degré de parallèle a donc alors pour expression $\frac{2\pi R \cos \lambda}{360}$.

Il est inutile d'ajouter que pour $\lambda = 90^\circ$ le degré est nul dans toutes les hypothèses, puisque le parallèle lui-même est nul.

DEGRÉS DU MÉRIDIEN (LONGUEUR DES), quantité variable avec la latitude par suite de la forme elliptique du méridien. Lorsqu'on a mesuré un arc de méridien, en divisant sa longueur par la différence des latitudes extrêmes exprimée en degrés, on a la longueur moyenne du degré entre ces latitudes. Ainsi, en France, c'est-à-dire entre le 42° et le 51° degré de latitude environ, la longueur moyenne du degré du méridien est 111 134^m. En resserrant ces limites, on a pu obtenir la longueur du degré moyen pour une latitude donnée. On peut aussi la déduire analytiquement de la forme du méridien lorsqu'on a déterminé

le rayon équatorial et l'aplatissement (Voy. FIGURE DE LA TERRE). C'est ainsi que l'on a pu former le tableau suivant, extrait de la Base du système métrique, dans lequel l'aplatissement est supposé de $\frac{1}{309}$ ou 0,00324.

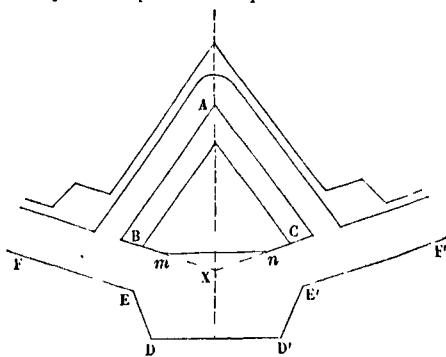
L		L		L		L		L	
0°	110571,4 ^m	18°	110679,5 ^m	36°	110952,1 ^m	54°	111286,3 ^m	72°	111554,5 ^m
1	110572,1	19	110691,0	37	110970,1	55	111304,1	73	111565,1
2	110573,4	20	110703,1	38	110988,5	56	111321,7	74	111575,2
3	110575,4	21	110715,6	39	111006,9	57	111339,0	75	111584,7
4	110578,0	22	110728,7	40	111025,5	58	111356,0	76	111593,7
5	110581,2	23	110742,2	41	111044,1	59	111372,7	77	111602,0
6	110585,1	24	110756,1	42	111062,9	60	111389,2	78	111609,7
7	110589,6	25	110770,5	43	111081,7	61	111405,2	79	111616,9
8	110594,8	26	110785,4	44	111100,6	62	111421,0	80	111623,4
9	110600,6	27	110800,5	45	111119,4	63	111436,3	81	111629,2
10	110607,0	28	110816,1	46	111138,3	64	111451,2	82	111634,5
11	110614,0	29	110832,0	47	111157,1	65	111465,8	83	111639,1
12	110621,6	30	110848,3	48	111176,0	66	111479,9	84	111643,0
13	110629,9	31	110864,9	49	111194,7	67	111493,6	85	111646,3
14	110638,7	32	110881,8	50	111213,3	68	111506,7	86	111649,0
15	110648,0	33	110899,0	51	111231,8	69	111519,5	87	111651,0
16	110658,0	34	110934,2	52	111250,1	70	111531,7	88	111652,0
17	110668,4	35	110916,5	53	111268,3	71	111543,4	89	111653,0

Lorsqu'on suppose la terre sphérique, et le quart du méridien égal à 10 000 000^m, la valeur du degré devient indépendante de la latitude; elle est égale au quotient de 10 000 000^m par 90, c'est-à-dire à 111 111^m, 1. On peut remarquer que c'est à peu près la valeur du degré véritable entre 44° et 45° de latitude.

DÉJOUTEMENT, section plane faite dans deux pièces de bois obliques qui doivent s'appuyer l'une contre l'autre. Le plan suivant lequel elles doivent se toucher est le *plan de déjoutement*. (Voy. GROUPE.)

DEMI-LUNE, ouvrage extérieur (Voy. FORTIFICATION) qui couvre la courtine et les flancs des bastions adjacents. Il avait primitivement une forme demi-circulaire (d'où le nom de demi-lune) et n'était destiné qu'à servir de tête de pont pour les communications de la place avec l'extérieur. Mais son étendue s'est accrue peu à peu, à mesure qu'on a mieux apprécié ses propriétés défensives; et son angle saillant est porté aujourd'hui jusqu'à 200° en avant des faces des bastions adjacents. La demi-lune défend ainsi avec efficacité l'approche de ces bastions, en même temps qu'elle est à son tour défendue par eux. Cet ouvrage se compose de deux faces AB et AC, dont le profil transversal est ana-

logue à celui du corps de place, avec cette différence que la hauteur d'escarpe est un peu moindre, et le fossé moins large et moins profond. La contrescarpe de la place ainsi que le chemin couvert



contournent la demi-lune, qui reste ouverte à la gorge, c'est-à-dire de B en C du côté de la courtine. La contrescarpe de la demi-lune est souvent dirigée suivant les prolongements BX et CX des contrescarpes des bastions; quelquefois cependant

elle est coupée suivant une droite *mn* parallèle à la courtine. Les points B et C sont généralement situés sur le côté extérieur du polygone qui sert de base au tracé de la fortification. Les faces de la demi-lune ne doivent masquer, du côté de l'angle d'épaule du bastion, E ou E', que l'espace nécessaire pour placer une ou deux pièces qui enfilent la crête de ces faces et battent le terre-plein; le reste de la face du bastion, c'est-à-dire de 45 à 50 mètres, doit être démasqué, pour pouvoir défendre les faces de la demi-lune, le chemin couvert et le glacis jusqu'à la capitale du bastion. L'angle saillant A doit être le plus petit possible pour que les faces de la demi-lune défendent plus efficacement les approches du bastion; mais on ne saurait donner à cet angle moins de 60° sans compromettre la solidité des constructions. Les conditions que nous venons d'énumérer déterminent le tracé de la demi-lune. Le fossé a ordinairement de 15 à 25 mètres de largeur, et sa profondeur est moindre que celle des fossés du corps de place, afin que l'ennemi, maître du premier fossé, ne puisse pas se répandre immédiatement dans le second. Pour que l'assiégeant ne puisse pas non plus profiter de la trouée formée par le fossé de la demi-lune pour battre l'escarpe du bastion, on donne quelquefois au fond de ce fossé une pente qui en fait une sorte de glacis masquant la trouée dont nous venons de parler. Cette disposition oblige à relever parallèlement à ce glacis les crêtes des faces de la demi-lune du côté des points B et C. Ces crêtes ont au contraire une légère pente vers la place, disposition qui donne plus de relief au saillant A et favorise le DÉFILEMENT (Voy. ce mot). On ne donne guère plus de 8^m d'escarpe aux faces de la demi-lune, afin qu'elle soit commandée par le corps de place. Indépendamment du terre-plein qui règne le long des faces, il y a un terre-plein bas, formant le sol intérieur de la demi-lune, lequel doit être commandé, non-seulement par la courtine, mais par les TENAILLES (Voy. ce mot) s'il y en a. — L'escarpe de la demi-lune est ordinairement revêtue en maçonnerie jusqu'à la hauteur de la magistrale; ce revêtement n'est point indispensable. La capitale AX de la demi-lune est ordinairement perpendiculaire sur le milieu de la courtine; cela n'est pas indispensable non plus; et quoique la symétrie présente ordinairement des avantages, on n'hésite pas aujourd'hui à en faire le sacrifice lorsqu'il y a lieu d'assurer, par exemple, une meilleure défense à celui des deux bastions adjacents que sa position pourrait désigner à l'avance comme devant être choisi pour point d'attaque. L'angle saillant A est quelquefois défendu par une batterie à BARBETTE, (Voy. ce mot), c'est-à-dire par une pièce portée sur une plate-forme assez élevée pour pouvoir tirer sans embrasure par-dessus le parapet, et dans une direction quelconque. Les ingénieurs modernes ne conseillent pas l'emploi des barbottes dans les demi-lunes, parce que ces batteries ne rendent de services réels que les premiers jours du siège, et qu'il faut les remplacer par des batteries ordinaires dès que l'ennemi a élevé les siennes. — Lorsqu'une demi-lune est désignée par sa position comme devant être choisie pour point d'attaque, elle est ordinairement munie d'un RÉDUIT (Voy. ce mot). Enfin, les portes de ville étant ordinairement placées au milieu de la courtine, la route qui y conduit tra-

verse l'une des faces de la demi-lune, et franchit, à l'aide de PONT-LEVIS (Voy. ce mot), le fossé de la demi-lune et celui du corps de place. (Voy. les Principes de Fortification, par le général Noizet.)

DEMI-PLACES D'ARMES, bouts de parallèles que l'on trace dans l'ATTAQUE DES PLACES (Voy. ce mot), entre les parallèles véritables, pour former une sorte de station intermédiaire, où l'on réunit les détachements destinés à soutenir les travailleurs.

DENIVELLATION, différence de niveau qui s'établit à l'avant et à l'arrière d'un corps flottant en mouvement à la surface d'un liquide. Cette dénivellation a pour effet d'accroître la résistance. (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES.)

DENTICULES, ornements qui, dans l'ordre dorique, remplacent souvent les mutules, et qu'on retrouve dans les ordres ionique, corinthien et composite. Ce sont des saillies, à section carrée, qui soutiennent la corniche. Elles sont plus petites et plus nombreuses dans l'ordre dorique que dans les trois autres ordres ci-dessus nommés (Voy. ORDRES).

DENTS DES ENGRENAGES, saillies dont on arme les roues pour assurer la transmission du mouvement de l'une à l'autre. Leur forme est déterminée d'après des considérations géométriques dont on trouvera le développement à l'article ENGRENAGES. Il ne sera question ici que des dimensions à donner aux dents pour résister à des efforts connus.

Chaque dent peut être considérée comme encastree dans la jante; le moment fléchissant (Voy. FLEXION PLANE) est le plus grand possible lorsque la dent a parcouru un pas, à partir de la ligne des centres, et qu'elle reçoit la réaction de la dent en contact par son extrémité. Si *a* désigne l'épaisseur de la dent comptée sur la circonférence primitive, *b* sa largeur parallèlement à l'axe de la roue, *λ* sa saillie, et *F* l'effort transmis, on aura pour le moment fléchissant $\mu = F\lambda$; par suite,

$$R = \frac{v F \lambda}{I};$$

mais $v = \frac{1}{2} a$ et $I = \frac{1}{12} b a^3$,

par conséquent $R = \frac{6 F \lambda}{b a^2}$;

généralement on fait

$$b = 4,5 a \text{ et } \lambda = 1,2 a;$$

par suite, la formule devient

$$R = \frac{6 F 1,2 a}{4,5 a^3} = \frac{1,6 F}{a^2}, \text{ d'où } a = \sqrt{\frac{1,6 F}{R}}.$$

Cependant il est plus convenable de faire varier le rapport de *b* à *a* avec la réaction *F*, conformément au tableau suivant :

Valeurs de F,	Rapport de b à a.
100 ^k à 250 ^k	3,0
250	3,5
500	4,0
800	5,0
1200	5,5
2000	6,0

Pour les engrenages qui ne transmettent que de faibles efforts, on prend quelquefois $\lambda = 1,5 a$. Eu égard aux chocs imprévus, il convient de réduire le coefficient R à la valeur

$$R = 1500000 \text{ pour la fonte.}$$

$$\text{On prend } R = 870000 \text{ pour le bois dur.}$$

Voici, d'après M. Claudel, les valeurs de a calculées pour les dents en fonte :

FORCE en chevaux.	VITESSE PAR SECONDE A LA CIRCONFÉRENCE.					
	0 ^m ,50	1 ^m ,00	1 ^m ,50	2 ^m ,00	2 ^m ,50	3 ^m ,00
1	0,012	0,008	0,007	0,006	»	»
2	0,017	0,012	0,010	0,009	0,008	0,007
3	0,021	0,015	0,012	0,011	0,010	0,009
4	0,024	0,017	0,014	0,012	0,011	0,010
5	0,027	0,019	0,015	0,014	0,012	0,011
6	0,030	0,021	0,017	0,015	0,013	0,012
7	0,032	0,022	0,018	0,016	0,014	0,013
8	0,034	0,024	0,020	0,017	0,015	0,014
9	0,036	0,026	0,021	0,018	0,016	0,015
10	0,038	0,027	0,022	0,019	0,017	0,016
12	0,040	0,030	0,024	0,021	0,018	0,017
14	0,045	0,032	0,026	0,022	0,020	0,018
16	0,049	0,034	0,028	0,024	0,021	0,020
18	0,051	0,036	0,030	0,026	0,023	0,021
20	0,054	0,038	0,031	0,027	0,024	0,022
25	»	0,043	0,035	0,030	0,027	0,025
30	»	0,047	0,038	0,033	0,030	0,027
35	»	0,051	0,041	0,036	0,032	0,029
40	»	0,054	0,044	0,038	0,034	0,031

M. Poncelet donne à l'épaisseur a les valeurs suivantes, dans lesquelles F est toujours l'effort transmis, en kilogrammes :

Pour les dents en fonte

$$a = 0,105 \sqrt{F}$$

— en bronze ou en cuivre

$$a = 0,131 \sqrt{F}$$

— en bois (charme, poirier, sorbier)

$$a = 0,183 \sqrt{F}$$

DÉPENSE, terme employé en Hydraulique pour désigner le volume de liquide qui traverse une section déterminée d'un courant dans une seconde. (Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES, CONDUITES, CANAUX DÉCOUVERTS.)

DÉPLACEMENT, volume d'eau déplacé par un navire. Quand le poids du navire et celui de sa charge sont connus, on en déduit le déplacement en le divisant par le poids du mètre cube d'eau de mer, qui est 1026^k. Sachant, par exemple, qu'un vaisseau de premier rang, tout armé, pèse 6000 tonneaux métriques environ, on en conclut que, lorsqu'il flotte, il déplace un volume d'eau de mer exprimé par $\frac{6000000}{1026}$, c'est-à-dire 5847^m,95 environ.

Réciproquement, lorsque le déplacement en volume est connu, on en déduit le poids du navire chargé en multipliant le nombre de mètres cubes exprimant le volume par 1026^k. Ayant constaté, par exemple, qu'une corvette déplace 1000^m, on en conclura que son poids, y compris sa charge, est de 1026^k \times 1000 ou 1026 tonneaux métriques.

Le déplacement se déduit du *tirant d'eau*, c'est-à-dire de la hauteur au-dessus de quille de la ligne de flottaison. Mais les dimensions fournies par le devis étant données *hors membres*, c'est-à-dire abstraction faite du bordage, il est nécessaire d'en déduire le contour des lignes d'eau *hors bordages*, ainsi que les sections parallèles au latitudinal, hors bordages également. Voici comment on opère pour les lignes d'eau. Soient l_1, l_2 , et l'_1, l'_2 (fig. 1) les pro-

jections horizontales et verticales de deux lignes d'eau consécutives et suffisamment rapprochées. Par un point b quelconque de la courbe extérieure l_2 , menons une droite PQ sensiblement normale aux deux courbes l_1 et l_2 ; le plan vertical RPQ qui aura la droite PQ pour trace horizontale, pourra

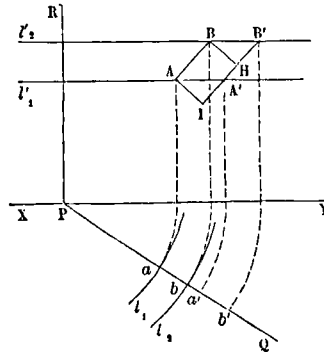


Fig. 1.

être regardé comme sensiblement normal à la coque. Rabattons sur le plan vertical ce plan normal et son intersection avec le bordage. Les points de la coque qui ont pour projections horizontales les points a et b où PQ rencontre l_1 et l_2 , se rabatront en A et B; et AB sera le rabattement de l'intersection du plan normal avec la coque. Perpendiculairement à AB prenons les longueurs AI et BH égales à l'épaisseur connue du bordage, et joignons IH; ce sera le rabattement de l'intersection du plan RPQ avec la face extérieure du bordage. Prolongeons IH jusqu'en B'; les points A' et B' où cette droite rencontre les projections verticales des lignes d'eau appartiendront à l'intersection des plans horizontaux de ces lignes d'eau avec la face extérieure du bordage. Si donc on les projette sur XY, et qu'on ramène le plan normal dans sa position primitive, les points a' et b' ainsi obtenus appartiendront aux lignes d'eau hors bordages. On se procurera de la même manière autant de points que l'on voudra de ces nouvelles lignes d'eau, et on n'aura plus qu'à les joindre par un trait continu.

La même méthode donnera les sections paral-

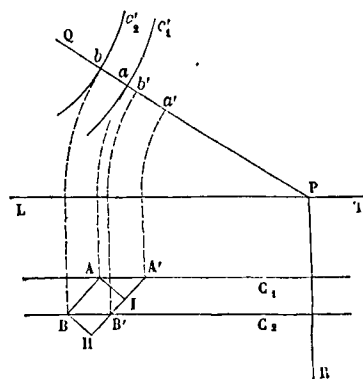


Fig. 2.

lèles au latitudinal, hors bordages. Soient c_1, c_2 et c'_1, c'_2 (fig. 2) les projections horizontales et latitudi-

dinales de deux couples consécutifs, suffisamment voisins. On mènera une droite PQ sensiblement normale aux deux courbes c' et c'' ; on la considérera comme la trace verticale d'un plan perpendiculaire au latitudinal, que l'on rabattra sur le plan horizontal. Les points qui ont pour projections verticales a et b se rabatront en A et B; on prendra les perpendiculaires AI et BH égales à l'épaisseur du bordage; on joindra IH qui coupera c_1 et c_2 en A' et B'; ces points, quand on ramènera le plan normal dans sa position primitive, viendront se projeter en a' et b' ; ce seront deux points appartenant aux sections hors bordages, parallèles au latitudinal. On obtiendra de même autant de points qu'on voudra sur ces sections.

On peut éviter ces constructions en employant, pour tenir compte de l'épaisseur du bordage, une méthode approximative qui suffira dans beaucoup de cas; elle consiste à regarder les volumes hors membres et hors bordages comme des volumes semblables. Si V est le volume hors membres, L la demi-largeur du bâtiment à la flottaison au maître couple, e l'épaisseur du bordage, et V' le volume hors bordage, on aura sensiblement :

$$\frac{V'}{V} = \frac{(L+e)^3}{L^3}, \quad \text{d'où} \quad V' = V \left(1 + \frac{e}{L}\right)^3,$$

ou, en négligeant les puissances du rapport $\frac{e}{L}$ supérieures à la première,

$$V' = V \left(1 + \frac{3e}{L}\right).$$

Dans les bâtiments de haut bord, la fraction $\frac{e}{L}$ n'est guères que $\frac{1}{30}$; ainsi il est permis de négliger ses puissances supérieures à la première.

Voyons maintenant comment on peut calculer le déplacement, en se servant des lignes d'eau ou des sections parallèles au latitudinal, soit hors membres, soit hors bordages. Il faut d'abord se rappeler que pour évaluer l'aire comprise entre une courbe, un axe rectiligne quelconque, et deux ordonnées extrêmes perpendiculaires à cet axe, on divise l'intervalle de ces ordonnées en un nombre pair de parties égales, par les points de division on mène des ordonnées intermédiaires, et l'on applique la formule de Thomas Simpson (*Voy. QUADRATURES APPROCHÉES*) :

$$\frac{1}{3} \delta \left[y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + \dots + Y \right], \quad [1]$$

dans laquelle y_0, y_1, y_2, \dots, Y désignent les ordonnées, et δ l'intervalle de deux ordonnées consécutives. Pour calculer l'aire des lignes d'eau, il sera commode de se servir des ordonnées équidistantes déjà tracées sur le plan horizontal (*Voy. DEVIS DE CONSTRUCTION*) et qui représentent les traces des couples de levée; si ces ordonnées n'étaient pas en nombre impair, on appliquerait la formule de Simpson pour l'aire comprise entre la première ordonnée et l'avant-dernière, et l'on évaluerait à part le dernier trapèze curviligne comme si c'était un trapèze rectiligne. Les ordonnées employées n'étant que les demi-ouvertures des couples, il faudra doubler le résultat pour avoir l'aire totale de la ligne d'eau. On opérera de la même manière pour obtenir l'aire des surfaces immergées des couples. Il sera commode d'employer pour cela les horizon-

tales équidistantes déjà tracées sur le latitudinal pour représenter les lignes d'eau; et si ces ordonnées équidistantes ne sont pas en nombre impair, on évaluera le trapèze excédant comme s'il était rectiligne. — Cela posé, deux méthodes se présentent pour évaluer le déplacement. En premier lieu, on peut décomposer le volume à mesurer en tranches horizontales répondant aux lignes d'eau. Si U représente l'aire d'une des sections horizontales, dh sa distance à la section suivante, Udh représentera le volume de la tranche élémentaire comprise entre ces deux sections, et le volume total cherché sera représenté par l'intégrale définie

$$\int_0^H Udh,$$

dans laquelle H représente le tirant d'eau. On sait qu'une pareille intégrale peut toujours s'évaluer approximativement par la formule de Simpson, en sorte que si $U_0, U_1, U_2, U_3, \dots, U_{2n+1}$ représentent les aires des sections horizontales faites à des distances égales à $\frac{H}{2n}$, le volume demandé aura pour l'expression

$$V = \frac{H}{6n} \left[U_0 + 4U_1 + 2U_2 + 4U_3 + 2U_4 + \dots + U_{2n+1} \right]. \quad [2]$$

Si l'on se sert des lignes d'eau tracées sur le devis, et qu'elles ne soient pas en nombre impair, on évaluera la tranche supérieure comme un prisme de même hauteur qui aurait pour base la moyenne entre les deux dernières sections.

En second lieu, on peut partager le volume à mesurer en tranches verticales par des sections perpendiculaires à la quille. La formule approchée qui donnera le volume sera alors

$$V = \frac{L}{6n} \left[S_0 + 4S_1 + 2S_2 + 4S_3 + 2S_4 + \dots + S_{2n+1} \right], \quad [3]$$

en appelant L la longueur de la partie immergée du navire, et S_0, S_1, S_2, \dots , les sections verticales employées. Si l'on se sert des sections verticales tracées sur le devis et correspondant aux couples de levée, il pourra arriver que leur nombre ne soit pas un nombre impair; on évaluera l'une des tranches extrêmes comme un prisme de même hauteur ayant pour base la moyenne entre les deux dernières sections. Il peut arriver même qu'il reste aux deux extrémités des volumes ayant une hauteur moindre que la distance de deux couples; on les évaluera de même approximativement, en les assimilant soit à des prismes, soit à des pyramides.

Après avoir évalué ainsi le volume principal, il reste à tenir compte du fluide déplacé par la quille, par l'étrave et par l'étambot. Le volume de la quille s'obtient sans difficulté, puisque c'est un parallélépipède rectangle. Pour l'étrave, on connaît son épaisseur sur le droit; on mesure en trois endroits son épaisseur sur le tour, savoir en bas, à la flottaison, et en un point intermédiaire; on prend la moyenne de ces trois épaisseurs; on mesure ensuite la droite qui joindrait le point A (fig. 3) de l'arête extérieure de l'étrave située à la hauteur de la flottaison, avec le point B situé sur l'arête intérieure au-dessus de l'angle C que l'étrave fait avec la direction de la quille; cette droite, l'épaisseur sur le droit et la moyenne des épaisseurs sur le tour étant multipliées entre elles donnent approximativement le volume immergé de l'étrave. Pour l'étambot, on

multiple de même la section moyenne par la longueur de l'arête immergée, du talon à la flottaison. Voici, pour les bâtiments à hélice de la marine militaire française, le tableau des surfaces à la flottai-

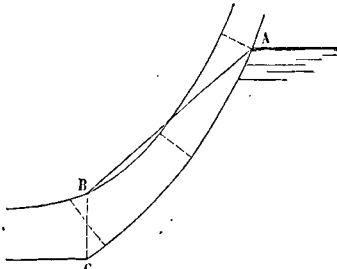


Fig. 3.

son, des surfaces immergées du maître-couple, du tirant d'eau et du déplacement :

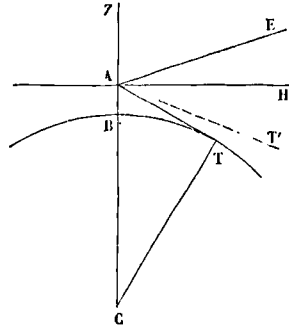
	Surface à la flottaison.	Surface immergée du maître-couple.	Tirant d'eau.	Déplacement.
	m ²	m ²	m	m. cub.
Vaisseau de 1 ^{er} rang, de 1200 chevaux...	1219,3	112,9	8,20	6302,2
Vaisseau de 1 ^{er} rang, de 600 chevaux...	1003,9	107,5	7,92	5154,6
Vaisseau de 2 ^e rang, de 900 chevaux...	1005,6	99,5	7,72	4903,4
Vaisseau de 3 ^e rang, de 450 chevaux...	866,1	95,1	7,50	4049,8
Frégate de 1 ^{er} rang, de 800 chevaux...	918,5	70,5	6,33	3700,3
Frégate de 2 ^e rang, de 650 chevaux...	761,8	53,4	5,95	2622,7
Frégate de 3 ^e rang, de 400 chevaux...	582,7	40,7	4,91	1815,8
Corvette de 400 chevaux.....	501,2	36,0	4,59	1419,5
Aviso de 1 ^{re} classe, de 250 chevaux.....	451,4	26,7	3,70	1063,7
Aviso de 2 ^e classe, de 150 chevaux.....	327,3	16,1	3,10	589,6
Aviso en fer, de 60 chevaux.....	151,0	9,2	2,26	192,3
Canonnière à vapeur, de 110 chevaux....	276,9	12,4	2,10	382,1
Chaloupe canonnière, de 25 chevaux.....	152,7	5,2	1,12	110,4
Transport de 1200 tonnes et de 160 chevaux.....	768,4	49,1	5,10	2650,9
Batterie cuirassée, de 150 chevaux.....	636,9	30,7	2,36	1424,8

Nous avons supposé jusqu'ici que le navire était sans différence, c'est-à-dire que le tirant d'eau était le même à l'avant et à l'arrière, ou que le plan de flottaison était parallèle à la quille. Lorsque cela n'a pas lieu, la décomposition en tranches perpendiculaires à la quille est la méthode qu'il convient d'employer. Les points où chaque couple est rencontré par le plan de flottaison étant déterminés, on en déduira, comme il a été dit plus haut, l'aire de la surface immergée de chaque couple ; on pourra donc appliquer la formule [3], en appelant L la longueur de la partie immergée du navire, mesurée parallèlement à la quille ; car SdL sera alors l'élément du volume cherché ; ce volume lui-même sera exprimé par $\int SdL$; et cette intégrale, évaluée approximativement par la formule de Thomas Simpson, donnera lieu à l'emploi de la formule [3]. Les observations que nous avons faites au sujet des tranches extrêmes sont évidem-

ment applicables à ce cas. (Voy. TABLEAU DE DÉPLACEMENT ; ÉCHELLE DE SOLIDITÉ ; EXPOSANT DE CHARGE.)

DÉPORT, terme de bourse. C'est le nom que prend le REPORT (Voy. ce mot) quand il arrive, par exception, que le cours de la rente au comptant soit plus élevé que le cours de la rente fin courant.

DÉPRESSION, correction qu'il faut faire subir à la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon lorsqu'on l'observe d'un point situé au-dessus de la mer, par exemple du pont d'un navire. Soit A le



point d'observation situé à une hauteur $AB = h$ au-dessus du niveau BT de la mer ; soit $BO = R$ le rayon du globe, ou le rayon de la sphère osculatrice au point B. Soit AE le rayon visuel mené vers l'astre qu'on observe ; soit AH une horizontale menée par le point A dans le plan vertical de AE. L'angle qu'il s'agit d'observer est l'angle EAH ; mais celui qu'on observe en réalité, ou du moins qu'on observerait s'il n'y avait pas de réfraction, est l'angle EAT, formé avec le rayon visuel AT tangent à la surface de la mer. La hauteur observée est donc trop grande de l'angle HAT ; c'est cet angle qui est la *dépression* vraie.

Le triangle ACT, rectangle en T, donne

$$CT = BC \cos C \text{ ou } R = (R + h) \cos C,$$

$$\text{d'où } \cos C = \frac{R}{R + h}, \text{ ou } 1 - \frac{C^2}{2} = 1 - \frac{h}{R},$$

en négligeant les puissances supérieures de C et de $\frac{h}{R}$. On a donc très-approximativement

$$\frac{C^2}{2} = \frac{h}{R} \text{ ou } C = \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Cet angle C, égal à HAT, est la *dépression* vraie. Mais, à cause de la réfraction, le rayon visuel AT paraît se relever d'un angle T'AT, qui est sensiblement proportionnel à l'angle BCT, et qu'on peut représenter par nC, n désignant le coefficient de réfraction (Voy. RÉFRACTION GÉODESIQUE). En appelant D la *dépression apparente*, on a donc

$$D = C - nC.$$

$$\text{Par conséquent } D = (1 - n) \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Dans cette formule, D se trouve exprimé en parties du rayon ; si on veut l'avoir en degrés, il faut multiplier par 360 et diviser par 2π , ce qui revient à diviser par $\sin 1''$; on a donc en degrés

$$D_1 = \frac{1 - n}{\sin 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Le coefficient n est très-variable pour un rayon

qui rase ainsi la surface de la mer; les marins donnent à n la valeur adoptée en Géodésie, ou $n = 0,08$.

La formule de la dépression a été réduite en table pour les besoins de la navigation; cette table donne, pour des valeurs de h croissant de *pied* en

pied, depuis 1 pied jusqu'à 80 pieds, la valeur de la dépression en minutes et secondes. Une colonne à part traduit en mètres les hauteurs de l'œil données en pieds. Dans l'intervalle considéré la dépression varie de 1'1" à 9'5". Elle est de 3 à 4 minutes dans les circonstances ordinaires de la navigation.

HAUTEUR.		DÉPRESSION.	HAUTEUR.		DÉPRESSION.	HAUTEUR.		DÉPRESSION.	HAUTEUR.		DÉPRESSION.
Pi	m	1' - 1"	Pi	m	4' - 39"	Pi	m	6' - 30"	Pi	m	7' - 56"
1	0,3		21	6,8		41	13,3		61	19,8	
2	0,6	1-26	22	7,2	4-45	42	13,6	6-34	62	20,1	8-0
3	0,9	1-45	23	7,5	4-52	43	14,0	6-39	63	20,5	8-4
4	1,3	2-2	24	7,8	4-58	44	14,3	9-43	64	20,8	8-8
5	1,6	2-16	25	8,1	5-4	45	14,6	6-48	65	21,1	8-13
6	1,9	2-29	26	8,4	5-10	46	14,9	6-52	66	21,4	8-15
7	2,3	2-41	27	8,8	5-17	47	15,3	6-57	67	21,8	8-19
8	2,6	2-52	28	9,1	5-22	48	15,6	7-1	68	22,1	8-23
9	2,9	3-2	29	9,4	5-28	49	15,9	7-6	69	22,4	8-26
10	3,2	3-12	30	9,7	5-33	50	16,3	7-11	70	22,7	8-30
11	3,6	3-22	31	10,1	5-39	51	16,6	7-16	71	23,1	8-33
12	3,9	3-31	32	10,4	5-44	52	16,9	7-20	72	23,4	8-37
13	4,2	3-39	33	10,7	5-50	53	17,3	7-24	73	23,7	8-40
14	4,5	3-48	34	11,0	5-55	54	17,6	7-28	74	24,0	8-44
15	4,9	3-55	35	11,4	6-1	55	17,9	7-32	75	24,4	8-47
16	5,2	4-3	36	11,7	6-5	56	18,2	7-36	76	24,7	8-51
17	5,5	4-11	37	12,0	6-11	57	18,5	7-40	77	25,0	8-55
18	5,8	4-18	38	12,3	6-15	58	18,8	7-44	78	25,3	8-59
19	6,2	4-25	39	12,7	6-21	59	19,2	7-48	79	25,6	9-2
20	6,5	4-32	40	13,0	6-25	60	19,5	7-52	80	26,0	9-5

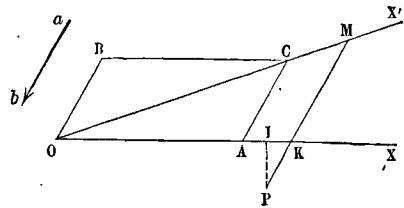
DÉRIVATION, mot employé en Balistique comme synonyme de DÉVIATION (Voy. ce mot), mais que l'on applique aussi d'une manière spéciale à la déviation produite sur les projectiles par l'effet du vent. Cette déviation peut être calculée. On remarque pour cela que l'on peut, sans changer le mouvement relatif du projectile par rapport à l'air, supposer celui-ci en repos, à la condition d'appliquer au projectile, indépendamment de sa vitesse réelle, une vitesse fictive égale et opposée à la vitesse du vent (Voy. VITESSE RELATIVE).

Soit donc OX la trace horizontale du plan de tir, c'est-à-dire du plan vertical déterminé par l'axe de la bouche à feu. Soit α l'angle de tir, v_0 la vitesse initiale, et $OA = v_0 \cos \alpha$ la projection horizontale de cette vitesse. Soit u la vitesse ab du vent, que nous supposons horizontale; soit enfin W la vitesse relative, et α' l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal. Sa composante verticale sera égale à

celle de la vitesse v_0 , puisque le vent souffle horizontalement; on aura donc :

$$W \sin \alpha' = v_0 \sin \alpha. \quad [1]$$

Sa composante horizontale OC, que nous nomme-



rons w , sera la résultante de $v_0 \cos \alpha$ et d'une vitesse OB égale et opposée à u ; on aura donc dans le parallélogramme OACB, construit sur OA et OB,

$$OC = w = \sqrt{u^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha + 2 u v_0 \cos \alpha \cos \beta}, \quad [2]$$

en appelant β l'angle BOA que fait la direction du vent avec OX. On aura ensuite

$$W^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha + w^2,$$

et par conséquent

$$W = \sqrt{w^2 + v_0^2 + 2uv_0 \cos \alpha \cos \beta}. \quad [3]$$

Puis, comme on a $W \cos \alpha' = w$, on déduit de cette relation et de l'équation [1]

$$\tan \alpha' = \frac{v_0 \sin \alpha}{w} = \frac{v_0 \tan \alpha}{\left(\frac{w}{\cos \alpha}\right)},$$

ce qu'on peut écrire :

$$\tan \alpha' = \tan \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{u \cos \beta}{v_0 \cos \alpha} + \frac{u^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}}. \quad [4]$$

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer la position du projectile au bout d'un temps quelconque t , en employant les formules de BALISTIQUE (*Voy.* ce mot). Soit OM = x' l'abscisse, au bout de ce temps, calculée à l'aide de ces formules, et portée dans la direction OC. Pour avoir la véritable projection horizontale du projectile, on remarquera que pendant le temps t le vent a parcouru l'espace ut ; on obtiendra donc la projection cherchée en menant par le point M une parallèle à ab ou à CA, et en prenant sur cette parallèle une longueur MP égale à ut , car on reviendra ainsi du mouvement relatif au mouvement absolu. Si maintenant on abaisse PI perpendiculaire sur OX, ce sera la dérivation latérale due à l'effet du vent; et IK sera la dérivation due à la même cause, mais estimée dans le plan du tir. Désignons par x la longueur OK, nous aurons, en vertu de la similitude des triangles OAC et OKM,

$$OM : OK = OC : OA, \text{ ou } x' : x = w : v_0 \cos \alpha,$$

$$\text{d'où } x' = \frac{w}{v_0 \cos \alpha} \cdot x$$

$$\text{et } KM : OK = AC : OA, \text{ ou } KM : x = u : v_0 \cos \alpha,$$

$$\text{d'où } KM = \frac{u}{v_0 \cos \alpha} \cdot x.$$

On a d'ailleurs PK = MP - KM.

En vertu des formules de Balistique, on peut écrire, en nommant y l'ordonnée verticale du projectile,

$$y = x' \tan \alpha' - \frac{g}{2W^2 \cos^2 \alpha'} \cdot x'^2 \cdot \psi \beta' \quad [5]$$

$$\text{et } t = \frac{x'}{w} \mathcal{Q}', \quad [6]$$

en désignant par $\psi \beta'$ et par \mathcal{Q}' ce que deviennent les fonctions $\psi \beta$ et \mathcal{Q} quand on y remplace l'abscisse du mobile par x' et sa vitesse initiale par W . En mettant pour x' sa valeur, et se rappelant que $W \cos \alpha' = w$, on obtient

$$y = \frac{w}{v_0 \cos \alpha} \cdot x \tan \alpha' - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \psi \beta', \quad [7]$$

équation qui fera connaître y . On trouve en même temps

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \mathcal{Q}', \text{ d'où } MP = ut = \frac{u}{v_0 \cos \alpha} x \mathcal{Q}'.$$

$$\text{Par suite } PK = \frac{u}{v_0 \cos \alpha} x \mathcal{Q}' - \frac{u}{v_0 \cos \alpha} x,$$

$$\text{ou } PK = \frac{ux}{v_0 \cos \alpha} (\mathcal{Q}' - 1), \quad [8]$$

c'est la dérivation dans le sens du vent. En la désignant par δ , on aura ensuite

$$PI = \delta \sin \beta \text{ et } IK = \delta \cos \beta. \quad [9]$$

Les trois coordonnées rectangulaires du mobile au bout du temps t sont donc OI ou $x - IK$, y , et IP ; on obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de la trajectoire.

Le vitesse du vent est ordinairement assez faible par rapport à celle du projectile pour qu'on puisse, sans atténuer sensiblement la valeur de w , ajouter $-u^2 \sin^2 \beta$ sous le radical du second membre de [2]; il vient alors simplement

$$w = u \cos \beta + v_0 \cos \alpha, \quad [10]$$

et, en faisant le même changement dans la relation [4], on obtient

$$\tan \alpha' = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha + u \cos \beta} = \tan \alpha \cdot \frac{1}{1 + \frac{u \cos \beta}{v_0 \cos \alpha}}$$

$$\text{ou } \tan \alpha' = \tan \alpha \left(1 - \frac{u \cos \beta}{v_0 \cos \alpha}\right), \quad [11]$$

en négligeant le carré et les puissances supérieures du second terme de la parenthèse vis-à-vis de l'unité.

Si le vent souffle perpendiculairement au plan de tir, on a $\cos \beta = 0$; par suite $w = v_0 \cos \alpha$ et $\tan \alpha' = \tan \alpha$. On a en même temps $IK = 0$; et l'abscisse du projectile au bout du temps t est OK. Si le vent souffle dans le plan de tir lui-même, on a $\beta = 0$, par suite $PI = 0$; et la dérivation latérale est nulle.

Nous donnons ici, d'après M. le général Didion, les dérivations dans le sens du vent pour un certain nombre de projectiles, à la distance de 600^m; la vitesse du vent étant supposée de 5^m par seconde, ce qui répond à un vent assez fort. On y a joint la dérivation dans les mêmes circonstances pour une balle d'infanterie :

Désignation des bouches à feu.	Poids du projectile.	Charge.	Inclinaison initiale.	Vitesse initiale.	Dérivation.	
Mortier de 32 cent.	75	"	45°	82,0	6,13	
Id. de 27.....	50	"	45	82,3	6,82	
				30	93,3	7,40
Id. de 22.....	23	"	45	85,7	11,15	
			60	96,6	17,50	
Obusier de côte.....	26,5	3,5	"	338 ^m	1,81	
Id. de place....	23	2,0	"	291	2,27	
Id. de siège....	23	1,5	"	256	2,50	
Id. de campagne						
Id. de 16 cent....	11,2	{ 1,50	"	384	2,31	
		{ 0,75	"	280	2,76	
Id. de 15.....	7,4	{ 1,00	"	373	2,38	
		{ 0,50	"	276	2,83	
Id. de montagne.	4,4	0,27	"	244	4,62	
Canon- { boulet... 6.0	1,40	"	454	2,14		
obusier { obus.... 4,4	1,00	"	450	3,40		
Canon de siège de 12.	12.0	4,00	"	500	1,57	
Id. de 8.	8	{ 2,667	"	505	1,86	
		{ 0,400	"	215	3,08	
Canon { de 6. 6	1,853	"	488	2,14		
de campagne, { de 4. 4	1,224	"	486	2,53		

Fusil, balle de 16^{mm}, 7 0,0274 0,002 " 445 à 150^m 0,61

(Voyez le *Traité d'Artillerie* de M. Didion.)

DÉROBEMENT, opération qu'on exécute dans la COUPE DES PIERRES (*Voy.* ce mot), et qui consiste à enlever avec soin toutes les parties d'une pierre qui excèdent le volume déterminé par la forme que lui assigne une épure.

DESCENTE ou **berceau rampant**, berceau dont les génératrices sont inclinées par rapport à l'horizon. Lorsque l'inclinaison est peu considérable, on dispose l'appareil comme pour un berceau ordinaire (*Voy.* BERCEAU).

Mais lorsque l'inclinaison est assez grande pour faire craindre que les pierres ne glissent dans le sens longitudinal par l'effet de la pesanteur, on emploie la disposition représentée par la figure 1,

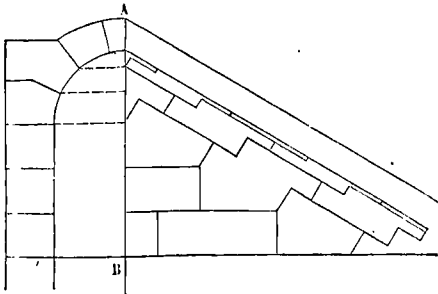


Fig. 1.

qui montre la section verticale de la voûte à gauche de la droite AB, et la projection verticale de l'appareil à droite de cette ligne. On voit que chaque pierre fait partie de deux cours de voussoirs, et qu'elle a la même forme que si, après avoir adopté

l'appareil ordinaire, on soudait chaque pierre d'une rangée longitudinale de voussoirs avec une autre pierre appartenant à la rangée voisine. Celles qui touchent au plan de naissance peuvent être regardées comme soudées alternativement avec celles qui forment la seconde rangée de voussoirs et avec celles qui forment l'assise supérieure du mur rampant (*Voy. Mur*) servant de piedroit à la descente. Ce mode d'appareil rend tout glissement impossible dans le sens des génératrices; mais il a l'inconvénient d'occasionner un assez grand déchet de matériaux; il faut en effet tailler d'abord chaque voussoir comme s'il avait en longueur et en largeur l'étendue de deux voussoirs adjacents d'un berceau ordinaire, et enlever ensuite l'excédant de pierre pour obtenir la forme voulue; ce qui donne lieu en outre à une perte de travail, attendu qu'il a fallu dresser des portions de surfaces destinées à disparaître.

La principale difficulté des descentes résulte de leur pénétration dans des murs ou dans d'autres voûtes. Nous en donnerons quelques exemples.

DESCENTE DROITE DANS UN MUR EN TALUS. Soit ABCD...F (fig. 2) la section verticale du berceau rampant, et IKUR sa projection verticale rabattue

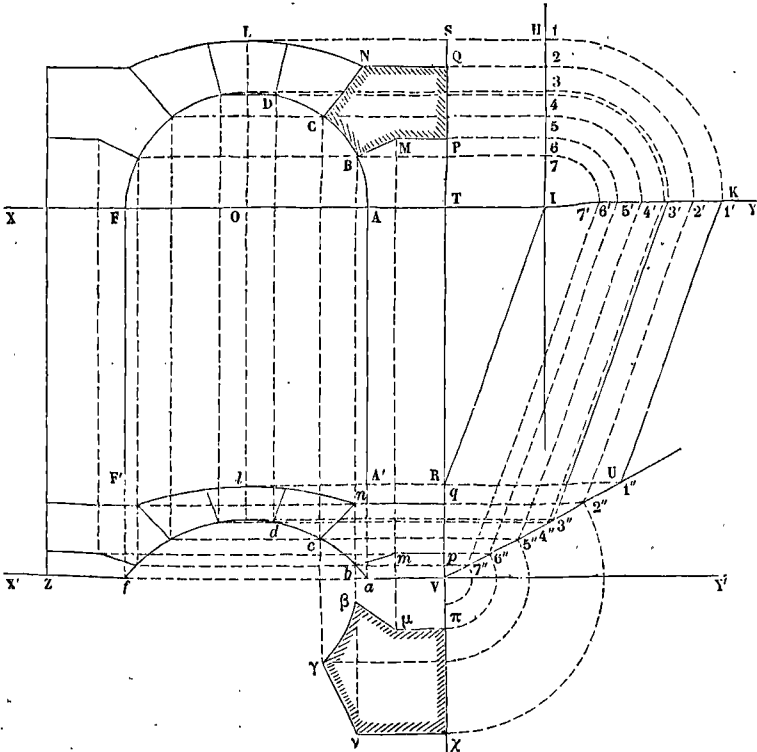


Fig. 2.

en tournant autour de l'horizontale TR. (Pour plus d'exactitude, la section ABCD...F devrait être placée à une distance de la ligne de terre égale à la hauteur IT de l'extrémité postérieure des lignes de naissance au plan horizontal; mais la position que

nous avons donnée à cette section exige moins d'espace, et elle est consacrée par l'usage.) Soit UV le rabattement de la ligne de plus grande pente de la face du mur qui est en talus; XY la trace horizontale de la face verticale du même mur, X'Y' celle

de la face inclinée; AA' et FF' les traces des piédroits de la descente. Pour trouver d'abord l'intersection de la douelle du berceau rampant avec la face en talus, on opérera de la manière suivante. Concevons par le point B, par exemple, une génératrice de cette douelle (ici c'est une arête de douelle); en menant par le point B une perpendiculaire à la ligne de terre XY, on aura la projection horizontale de cette génératrice; pour avoir sa projection verticale rabattue, on mènera par le même point B une parallèle à XY jusqu'à la rencontre, au point 7, de la droite IH parallèle à TR; on ramènera ce point sur IK en 7' par un arc de cercle décrit du point I, et de là sur UV en 7'' par une parallèle à la droite IR, qui représente l'inclinaison du berceau. La droite 7'7'' sera la projection verticale de la génératrice. Enfin, par ce dernier point 7'' on mènera une parallèle à X'Y', qui rencontrera en b la perpendiculaire abaissée de B; ce point b sera celui où la génératrice passant par le point B perce la face en talus; car, d'après la construction, les points b et 7'' sont les projections d'un même point de la génératrice, et ce point appartient à la face en talus, puisque sa projection verticale est sur UV. On opérera de la même manière pour obtenir d'autres points de l'intersection de la face en talus avec la douelle, et l'on pourra tracer la projection horizontale *abcd...f* de cette intersection. On opérera encore de même pour trouver les points *m* et *n* où la face en talus est percée par les parallèles aux génératrices, menées respectivement par M et N; on pourra donc tracer les droites *bm* et *cn*, projections horizontales de l'intersection de la face en talus avec les joints correspondants à BM et à CN; et l'on obtiendra de la même manière les projections des intersections des autres joints avec la même face du mur.

Pour tailler les voussoirs, il est nécessaire de connaître leur panneau de tête sur la face inclinée du mur; on les obtiendra en rabattant cette face inclinée sur le plan horizontal, en la faisant tourner autour de sa trace X'Y'. Si, par exemple, on veut obtenir le rabattement du panneau qui répond à la projection *bcnqpm*, on décrira du point V comme centre des arcs de cercle passant par les points 7'', 5'', 2'', 6'', et on les arrêtera au prolongement de TR; puis, par les points ainsi obtenus, on mènera des parallèles à X'Y' jusqu'à la rencontre des droites Bb, Cc, Nn, etc., prolongées, ce qui déterminera les points β , γ , ν , χ , π , μ ; on se procurera aisément le rabattement d'un point intermédiaire pris sur l'arc *bc*; on pourra tracer alors l'arc $\beta\gamma$, puis les droites $\gamma\nu$, $\nu\chi$, $\chi\pi$, $\mu\beta$, et l'on n'aura le panneau demandé. On préparera une pierre de forme prismatique, ayant pour base la figure 2''7''7''', prise sur la projection verticale; et sur les faces correspondantes à 2'7' et à 2''7'' on appliquera d'une part le panneau BCNQPM, de l'autre le panneau $\beta\gamma\nu\chi\pi\mu$ (fig. 3); les arcs BC et $\beta\gamma$ serviront de directrices pour tailler la douelle cylindrique; toutes les autres faces seront des plans déterminés chacun par deux droites CN, $\gamma\nu$, ou bien BM, $\beta\mu$, ou encore MP, $\mu\pi$. Le voussoir se trouvera ainsi taillé. Il est clair que si la descente était trop longue pour que le voussoir pût être formé d'une seule pierre, on le diviserait par un plan vertical parallèle à XY.

Au lieu d'employer la section verticale du Ber-

ceau rampant, on pourrait faire usage de sa section droite; et si ABCD...F était cette section droite, il faudrait mener IK perpendiculaire à la direction IR de la descente; et c'est à la droite IK ainsi menée que devraient s'arrêter les arcs de cercle décrits du point I. La construction et l'application du trait sur la pierre demeuraient d'ailleurs les mêmes.

DESCENTE BIAISE DANS UN BERCEAU HORIZONTAL. Les projections horizontales des génératrices du berceau incliné rencontrent les piédroits

du berceau horizontal sous un angle différent de 90°; de là le nom de *descente biaise* donné dans ce cas au berceau rampant. Soit ABCD...F (fig. 4) la section verticale de la descente par un plan parallèle aux piédroits TT' et o'o' du berceau horizontal; soit RS la direction des piédroits de la descente; O'V la projection verticale de la ligne de naissance de cette descente, rabattue sur le plan horizontal en la faisant tourner autour d'une perpendiculaire A'W à la ligne de terre; enfin, soit A'B'C'D' la section droite du berceau horizontal, rabattue de la même manière. La méthode la plus directe pour traiter le problème qui nous occupe consiste à se procurer d'abord la section droite du berceau rampant, et à la rabattre sur le plan horizontal. Pour cela, on opérera de la manière suivante. Par le point o, où le piédroit extérieur de la descente rencontre le piédroit intérieur du berceau horizontal, concevons un plan perpendiculaire aux génératrices de la descente; sa trace sera une droite oh perpendiculaire à RS; c'est ce plan que nous prendrons pour celui de la section droite et que nous rabattons autour de sa trace oh. Il faut trouver d'abord le rabattement de l'intersection de ce plan avec le plan de naissance. Ce plan de naissance passe par le point o, et il contient la génératrice menée par le point o'; rabattons d'abord cette génératrice autour de R'o', il suffira pour cela d'élever en R' une droite R'φ perpendiculaire sur R'o' et égale à O'W, et de joindre o'φ. Cette génératrice est coupée par le plan de la section droite en un point dont le rabattement s'obtiendra en abaissant du point h une perpendiculaire sur o'φ, ce qui donnera le point u. Quand maintenant on rabattra le plan de la section droite autour de sa trace oh, le point u se rabattra sur R'o' à une distance du point h égale à hu; on aura donc le rabattement v du point u en décrivant l'arc uv du point h comme centre. Ainsi, uv sera le rabattement de l'intersection du plan de la section droite avec le plan de naissance; et si l'on coupe le plan de la section droite par un plan quelconque parallèle au plan de naissance, dans le rabattement leur intersection sera parallèle à ov. Cela posé, supposons que l'on veuille obtenir, dans le rabattement de la section droite, le point qui correspond au point B, on mènera par ce point une parallèle à la ligne de terre XY, jusqu'à la rencontre de la trace O'H du plan vertical auxiliaire, ce qui

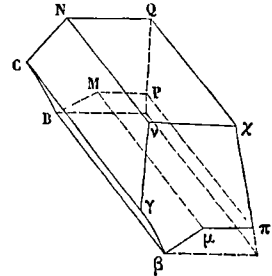


Fig. 3.

après avoir mené des plans perpendiculaires à $\omega\delta'$ par les points δ' et ω , tracer dans ces plans deux rectangles égaux à $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$; y placer de la même manière deux panneaux égaux à $B'C'N'Q'P'M'$, et se

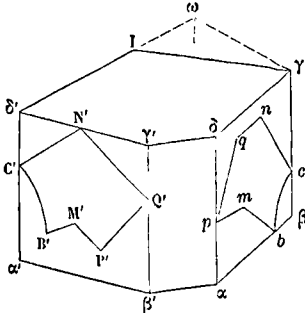


Fig. 5.

servir des lignes correspondantes de ces deux panneaux comme de directrices pour tailler plus sûrement, du côté de $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, soit la douelle cylindrique, soit les plans indiqués par ces panneaux; après quoi il deviendrait facile d'achever le voussoir en taillant la pierre perpendiculairement au panneau $bcnqpm$. Ce voussoir aura la forme indiquée

par les figures 6 et 7, dont l'une montre le voussoir du côté de son angle rentrant, et l'autre du côté de son angle saillant. — On pourrait aussi s'aider de panneaux de douelle se rapportant à la descente, et que l'on construirait par la méthode ordinaire, en développant en ligne droite la section droite $abcd...f$, et élevant aux points de division des perpendiculaires dont on prendrait la longueur sur la projection verticale. (Voy. BERCEAU.) On emploierait au même usage les panneaux de joint relatifs à la descente et construits d'une manière analogue. Mais avec de l'attention les panneaux inscrits dans les rectangles $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ peuvent suffire.

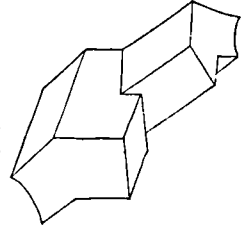


Fig. 6.

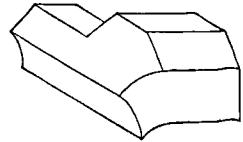


Fig. 7.

Il existe pour résoudre le même problème une autre méthode dans laquelle on n'emploie pas la

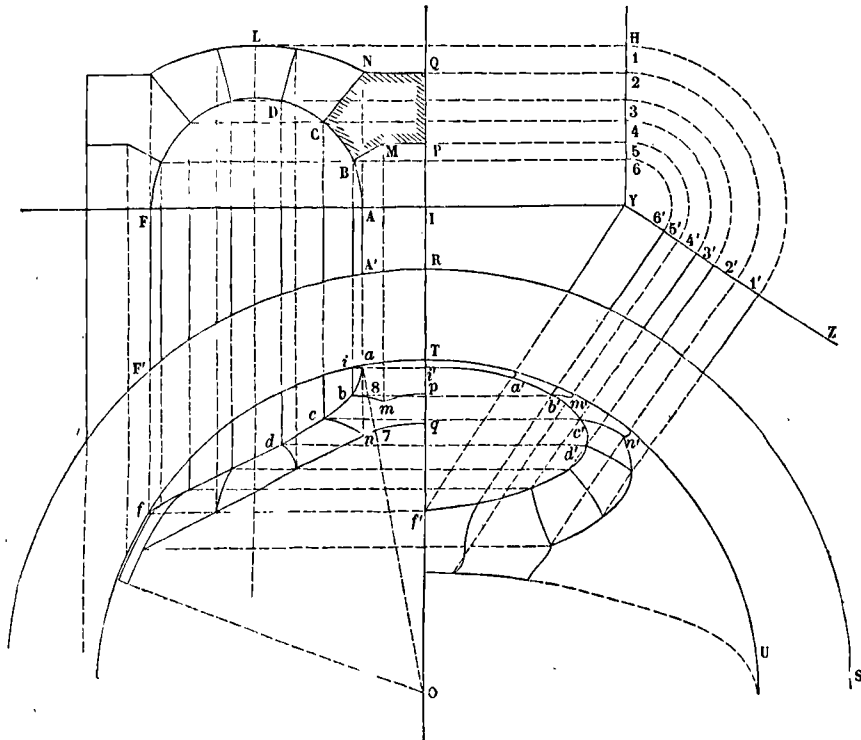


Fig. 8.

section droite de la descente; mais il faut alors construire l'intersection du berceau horizontal par les plans verticaux qui contiennent les arêtes de douelle de la descente. Ces sections sont égales, et l'on peut se contenter d'en tracer une qui sert

comme d'une cerce pour remplacer les autres. On trouvera cette méthode développée dans le *Traité de la coupe des pierres* de J. Adhémar, pages 136 et suiv. Mais elle est en définitive moins directe et moins simple que celle que nous venons de don-

ner, et dont on trouvera aussi le développement dans l'ouvrage cité.

DESCENTE BIAISÉ DANS UNE VOÛTE SPHÉRIQUE. Soit ABCD...F (fig. 8) la section droite de la descente, AA' et FF' les traces horizontales de ses piédroits, XY la ligne de terre, Yf la projection verticale des lignes de naissance, rabattues sur le plan horizontal en tournant autour de la droite OI, perpendiculaire à la ligne de terre. (On fera ici, au sujet de la position donnée à la section droite, la remarque faite plus haut.) Soit YZ le rabattement de la trace du plan de la section droite; enfin, soient AF'', af les cercles, ayant le point O pour centre, qui forment les lignes de naissance de la voûte sphérique; et soient RS et TU les sections méridiennes de l'extrados et de l'intrados rabattues sur le plan horizontal, autour de OI. Nous supposons que la voûte sphérique est construite en maçonnerie. Il s'agira de déterminer l'intersection de la sphère intérieure par la douelle cylindrique de la descente et par ses plans de joints.

Pour cela, il faut savoir trouver l'intersection d'une droite parallèle aux génératrices de la descente, avec la surface de la sphère. Considérons, par exemple, l'arête de douelle passant au point B. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur la ligne de terre XY, ce sera la projection horizontale de l'arête de douelle. Par le point B menons B6 parallèle à la ligne de terre; ramenons le point 6 en 6' sur YZ par un arc de cercle décrit du point Y; et menons 6' b' parallèle à Yf''; ce sera le rabattement de la projection verticale de cette même arête de douelle. Pour obtenir son intersection avec la sphère, concevons par cette droite un plan vertical: sa trace horizontale sera Bb; il coupera la sphère suivant un petit cercle qui se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical rabattu; or ce cercle passe par le point i, où Bb rencontre af; sa projection verticale passera donc par le pied i' de la perpendiculaire abaissée du point i sur OT. Si donc on décrit du point O, projection du centre du petit cercle considéré, l'arc i' a' b' jusqu'à la rencontre de 6' b', on aura au point b' la projection verticale de l'intersection de l'arête de douelle considérée avec la sphère; et en menant b'b perpendiculaire à OT jusqu'à la rencontre de Bi, on aura en b la projection horizontale de la même intersection.

On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra sur les projections de l'intersection de la douelle cylindrique avec la sphère; et l'on pourra tracer les courbes *abcd...f* et *a'b'c'...f'*. L'arc i'a' sera la projection verticale de l'intersection du piédroit Aa avec la sphère.

Les joints BM, CN, etc., coupent la sphère suivant des cercles, qui ont pour projections des arcs d'ellipses. En suivant la même marche que pour le point B, on obtiendra autant de points que l'on voudra de ces arcs d'ellipses; et l'on pourra tracer les courbes *bm, cn, etc., b'm', c'n', etc.*, ainsi que les projections de l'intersection de l'extrados de la descente avec la surface sphérique.

Pour tailler les voussoirs, par exemple celui qui a pour panneau de tête la figure BCNQPM, on préparera un prisme droit ayant cette figure pour base, et l'on donnera aux arêtes qui passent par les points B, C, N, M, etc., les longueurs respectivement *b'6', c'4', n'2', m'5'*, etc., prises sur le rabat-

tement de la projection verticale. On taillera sans difficulté la douelle cylindrique, et les faces planes répondant aux droites BM, CN, MP, NQ, PQ. Il restera à tailler la surface sphérique qui a pour projections *bcnqpm* et *b'c'n'q'p'm'*, et dont il faudra préalablement déterminer le contour en se procurant des points intermédiaires entre ceux qui répondent à B, C, N, M, etc. On taillera alors la surface sphérique au moyen d'une CERCE (Voy. ce mot), construite d'après la section méridienne de la sphère. Il faudra pour cela se procurer des points de repère sur le contour de la face à tailler; on les obtiendra comme il suit. Par le point O, menons une droite quelconque coupant la figure *bcnqpm*, par exemple la droite O.7.8; les points 7 et 8 seront les projections de deux points du contour appartenant à la même section méridienne, et pourront par conséquent être pris pour deux de ceux sur lesquels il faudra poser la cerce. Ces points 7 et 8, ramenés sur le contour BCNQPM par des perpendiculaires à XY, donneront sur ce contour les points par lesquels il faudra élever sur les faces du prisme de pierre des parallèles à ses arêtes latérales, pour avoir les points que l'on veut obtenir sur le contour de la face sphérique. On taillera de la même manière les autres voussoirs.

Si la voûte sphérique, au lieu d'être construite en maçonnerie, était construite en pierres de taille, chaque voussoir présentant une portion de l'intersection des deux voûtes, devrait appartenir à la fois à l'appareil de la descente et à celui de la voûte sphérique. Il y aurait donc à opérer des raccordements d'assises analogues à ce qui a été fait à l'occasion de la descente dans un berceau horizontal, et aux exemples qu'on trouvera à l'article LUNETTE. En même temps, il y aurait lieu d'avoir égard à l'extrados de la voûte sphérique. Les voussoirs auraient une forme analogue à celle de la figure 7, avec cette différence que la douelle cylindrique du grand berceau serait remplacée par une portion de sphère, et les joints plans de ce grand berceau par des joints coniques ayant leur sommet sur la verticale du point O. (Voy. VOÛTES SPHÉRIQUES.)

Il se présenterait en outre une circonstance particulière: c'est que le premier joint de la descente, à partir du plan de naissance, pourrait ne pas rencontrer le joint conique correspondant de la sphère. Dans ce cas, on a recours à un joint auxiliaire: par un point quelconque du petit cercle de la sphère, par lequel passe le joint conique, on fait passer un arc de grand cercle aboutissant à l'extrémité de l'arête de douelle de la descente; le plan de ce grand cercle coupe à la fois le joint conique de la sphère et le joint plan du berceau rampant, et opère ainsi le raccordement des deux joints. Les voussoirs ont alors une face plane de plus.

Voyez pour plus de détails le *Traité de la coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 199 et suiv.

DESCENTE DE FOSSÉ, passage que l'assiégeant, maître du chemin couvert, s'ouvre pour descendre dans le fossé. La section de ce passage a 2 mètres de haut et autant de large. Pour déterminer sa direction, ayant tracé le profil du glacis, du chemin couvert et de la contrescarpe, on prend, près de la contrescarpe, à 1 mètre au-dessous du fond du fossé, un point P, par lequel on mène une droite inclinée à 4 ou 6 de base sur 1 de hauteur, suivant

la nature des terres et la profondeur du fossé; on mène une seconde droite parallèle au glacis, à 1 mètre au-dessous de la surface; la rencontre de ces deux droites donne le point de départ de la descente. Le passage doit être blindé jusqu'à ce que la partie supérieure soit arrivée à 1^m,20 au-dessous du glacis; au delà, l'effet des projectiles creux n'étant plus à craindre, on se contente de soutenir les terres par des châssis; ce qui divise le passage en deux parties désignées sous les noms de *descente blindée* et de *descente souterraine*. On prend pour point d'arrivée un point P situé à 1 mètre au-dessous du fond du fossé, afin de pouvoir entrer en sape dans le fossé, dès qu'on est parvenu à ce point.

Quelquefois la descente de fossé part du couronnement du chemin couvert, passe sous la première traverse, tourne ensuite à droite ou à gauche, suivant le côté où se trouve la brèche, longe, en descendant, la contrescarpe, et se retourne enfin perpendiculairement pour s'ouvrir dans le fossé.

Lorsque le fossé a peu de profondeur, on opère la descente à ciel ouvert, c'est-à-dire au moyen d'une simple tranchée; mais la difficulté du DÉFILEMENT (Voy. ce mot) rend cette méthode dangereuse.

DESSIN GÉOMÉTRAL, représentation géométrique d'un édifice, d'une construction ou d'une machine quelconque en *plan*, en *coupe*, ou en *élévation*, d'après la méthode géométrique des projections orthogonales, et sans avoir égard à la perspective. Les diverses parties d'un dessin géométral conservent leurs dimensions relatives, conformément à l'échelle adoptée. Les ombres y sont ordinairement tracées. Quelquefois elles n'y sont qu'indiquées par un *trait de force* ou TRAIT RESENTI (Voy. ce mot; voyez aussi l'article REPRÉSENTATION DES CORPS). C'est ce qui a lieu notamment pour les simples croquis.

DESSIN LINÉAIRE, éléments du dessin graphique, à la règle et au compas. On comprend ordinairement sous cette dénomination les tracés élémentaires de Géométrie (parallèles, perpendiculaires, polygones, cercles, polygones réguliers, etc.), et la représentation des objets les plus simples en plan, coupe et élévation. On y ajoute, dans l'enseignement primaire, les éléments du dessin de l'ornement.

DÉTENTE, diminution graduelle de la tension d'une masse gazeuse dont le volume va en augmentant. La détente donne lieu à un travail moléculaire T qui a pour expression (Voy. ÉLASTICITÉ)

$$T = Ph + 2,3026 \cdot P_0 V_0 \log \frac{P_0}{P_1} \quad [1]$$

P désignant le poids du gaz, h le chemin parcouru dans le sens vertical par son centre de gravité, V₀ son volume initial, P₀ sa pression initiale par mètre carré, et P₁ sa pression finale. Cette formule est indépendante de la forme qu'affecte la masse gazeuse.

C'est surtout aux machines à vapeur que s'applique la considération de la détente. Dans presque toutes ces machines, on règle aujourd'hui la distribution de manière que la lumière d'admission ne reste ouverte que pendant une partie de la course du piston; pendant le reste de la course, la vapeur agit en se détendant, et il résulte de cette disposition une notable économie de vapeur et par conséquent de combustible, ce qui revient à un accroisse-

ment de puissance de la machine pour une consommation donnée de combustible ou de vapeur. Quelquefois la détente se fait dans un même cylindre, comme dans les machines à basse pression de Watt, ou dans les machines à haute pression et les locomotives; quelquefois la détente se fait dans un cylindre à part, comme dans les machines de Woolff. Mais, quel que soit le mode adopté, le calcul du travail de la détente reste le même, puisque la formule [1] ne dépend pas de la forme de la masse gazeuse.

La détente, malgré ses avantages, est nécessairement limitée, attendu que la tension à la fin de la course du piston doit être assez grande encore pour vaincre les résistances qui s'opposent au mouvement de la machine. On dit que la détente se fait *au tiers, au quart, au cinquième*, etc., lorsque le volume final de la vapeur est égal à 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc., le volume primitif. On a quelquefois poussé la détente jusqu'*au dixième*; mais au delà elle serait désavantageuse. Dans les locomotives, la détente se fait quelquefois aux $\frac{4}{5}$, souvent aux $\frac{2}{3}$,

rarement au $\frac{1}{3}$, parce qu'à cette limite la tension de la vapeur à la fin de la course est déjà trop faible pour obtenir un démarrage facile dans les gares et aux stations. Ceci revient à dire que la lumière d'admission ne se ferme que lorsque le piston a parcouru les $\frac{4}{5}$, les $\frac{2}{3}$, ou au moins $\frac{1}{3}$ de sa course.

Dans la formule [1], le terme Pp qui représente le travail de la pesanteur, est généralement négligeable. On peut remarquer en même temps que le produit P₀V₀ exprime le travail avant la détente; car si Ω désigne l'aire du piston, et x₀ la portion de course effectuée avant le commencement de la détente, on a V₀ = Ωx₀; par conséquent

$$P_0 V_0 = P_0 \Omega x_0$$

Or P₀Ω est la pression totale exercée sur le piston, et x₀ est le chemin parcouru, P₀Ωx₀ exprime donc le travail de la vapeur avant la détente. Il résulte de cette remarque que le rapport entre le travail de la détente et le travail avant détente est exprimé par

$$2,3026 \log \frac{P_0}{P} \quad \text{ou par} \quad 2,3026 \log \frac{x}{x_0}$$

x désignant la course totale du piston, puisque en vertu de la loi de Mariotte on a $\frac{P_0}{P} = \frac{x}{x_0}$.

Voici la valeur de ce rapport pour les détenteles les plus usitées :

VALEURS de $\frac{x}{x_0}$	VALEUR du rapport r entre le travail de la détente et le travail avant détente.	$\frac{x}{x_0}$	r	$\frac{x}{x_0}$	r	$\frac{x}{x_0}$	r
10	2,3020	7	1,9469	4	1,3863	1,60	0,4055
9	2,1972	6	1,7918	3	1,0986	1,25	0,2231
8	2,0795	5	1,6094	2	0,6932	1,20	0,1823

On donne aussi le nom de DÉTENTE au mécanisme employé pour produire la détente de la vapeur. Le plus ordinairement cette détente est obtenue en

donnant au tiroir, au delà des lumières, un rebord en saillie que l'on appelle le *recouvrement extérieur*. Nous ferons comprendre cet effet en décrivant la *détente Clapeyron*, généralement employée aujourd'hui dans les locomotives. Le tiroir *aa'* (fig. 1) est

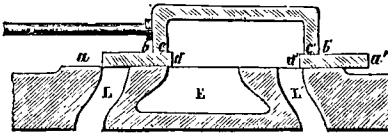


Fig. 1.

une boîte renversée, glissant sur une surface plane où aboutissent les lumières d'admission L, L', communiquant avec le cylindre, et la lumière d'échappement E, communiquant avec l'extérieur. Les bandes *abcd*, *a'b'c'd'*, par lesquelles la boîte mobile est en contact avec le plan des lumières, présentent à l'extérieur les saillies ou recouvrements extérieurs *ab*, *a'b'*, et à l'intérieur les saillies ou recouvrements intérieurs *cd*, *c'd'*; ces dernières saillies sont beaucoup moindres que les premières; on en verra l'usage tout à l'heure. Dans la position représentée sur la figure 1, la vapeur placée à l'avant du piston s'échappe à l'extérieur par la lumière L' et par l'intérieur du tiroir. Celui-ci marchant vers la droite, la lumière L se découvre, et la vapeur afflue de la chaudière derrière le piston par la boîte à vapeur et la lumière L. Le tiroir continue à marcher vers la droite jusqu'à ce que la lumière L soit entièrement découverte, puis il retourne sur ses pas; et les effets précédemment décrits continuent à se produire jusqu'à ce que la lumière L soit totalement fermée. A ce moment la vapeur cesse d'affluer derrière le piston; et celui-ci continuant à marcher vers la droite, la vapeur n'agit plus que par sa détente. Cette détente continue jusqu'à ce que, le tiroir continuant à marcher vers la gauche, la lumière L soit mise en communication avec l'intérieur du tiroir. Il faut remarquer toutefois que vers la fin de la détente la lumière L' se trouve fermée, et qu'il en résulte une pression en sens contraire de la marche du piston, à laquelle on a donné le nom de *compression*, et qui est produite par la petite quantité de vapeur qui reste enfermée en avant du piston. Il faut remarquer encore que la lumière L se trouve mise en communication avec l'intérieur du tiroir un peu avant que le piston ait atteint l'extrémité de sa course: c'est ce que l'on appelle l'*avance à l'échappement*; et, le tiroir continuant à se mouvoir vers la gauche, la lumière L' se trouve aussi découverte et mise en communication avec la chaudière, un peu avant la fin de la course du piston; c'est ce que l'on appelle l'*avance à l'admission*. Ces avances sont nécessaires pour éviter, au commencement de la course en sens contraire qui va suivre, d'une part la contre-pression que produirait la vapeur restée à gauche du piston, et d'autre part la résistance qu'éprouverait la vapeur affluant à droite par un orifice trop étroit (*Voy. AVANCE DU TIROIR*). Dès que la lumière L' commence à être mise en communication avec la chaudière, les phénomènes précédemment décrits se reproduisent, en appliquant à la lumière L' ce qui a été dit de la lumière L, et *vice versa*; et à la gauche du piston ce qui a été dit de la droite, et *vice versa*.

En étudiant attentivement ces phénomènes, on voit que le recouvrement extérieur produit une détente qui commence d'autant plus tôt et finit d'autant plus tard que ce recouvrement est plus long. Mais la compression croît avec la détente, ce qui est un inconvénient. Cependant il est en partie compensé par cette circonstance que la vapeur produisant cette compression remplit l'espace nuisible qui existe toujours entre le piston et le fond du cylindre, y prend à la fin de la course une pression peu différente de celle de la vapeur affluant de la chaudière, et économise par conséquent une quantité de vapeur correspondante, au commencement de la course en sens contraire. Le recouvrement intérieur sert à accroître la détente, et en même temps à régler l'avance à l'échappement. Il ne faut pas qu'il soit trop considérable, parce que la compression commence d'autant plus tôt que ce recouvrement intérieur est plus grand; en même temps l'avance à l'échappement est d'autant plus grande que ce même recouvrement intérieur est plus petit.

M. Clapeyron a donné, dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences et admis à l'insertion dans le *Recueil des savants étrangers*, les moyens de déterminer le recouvrement extérieur, le recouvrement intérieur, et l'avance du tiroir, suivant les effets que l'on veut produire. Il emprunte pour cela le secours des considérations géométriques et du calcul. Le tiroir (fig. 2) étant supposé placé dans sa position moyenne, désignons par X la distance HA, entre le bord externe H de la lumière L et l'arête externe de la bande AB, distance qui est à proprement parler ce qu'on nomme le recouvrement extérieur; soit Y la distance IB entre le bord interne de la lumière L et l'arête interne de la bande, distance qui constitue le recouvrement intérieur. Soient X' et Y' les quantités analogues pour la lumière L',

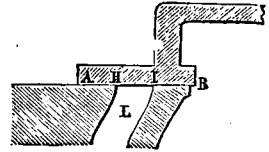


Fig. 2.

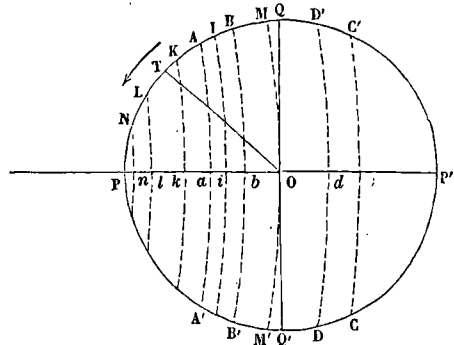


Fig. 3.

lesquelles peuvent être différentes de X et de Y. Cela posé, soit O (fig. 3) le centre d'un cercle dont le diamètre PP', supposé dirigé suivant l'axe de la tige du piston, représentera, à une certaine échelle,

la course du tiroir. Par le point O faisons passer un arc de cercle ayant son centre à gauche sur le prolongement de P'P, et pour rayon la longueur qui, à l'échelle de la course du tiroir, représente la barre d'excentrique (comptée à partir du centre de la bague); les points M et M' où cet arc rencontrera la circonférence PP' seront les positions du centre de la bague correspondantes à la position moyenne du tiroir. Prenons successivement

$$Oa = X', Ob = Y, Oc = X, Od = Y';$$

et, par les points a, b, a', b', ainsi déterminés sur PP', faisons passer des arcs de cercle ayant leurs centres à gauche sur le prolongement de ce diamètre, et pour rayon la longueur de la barre d'excentrique; les points A, A', B, B', C, C', D, D' ainsi déterminés sur la circonférence PP', seront les positions du centre de la bague d'excentrique correspondantes à celles du tiroir quand il aura marché des quantités X', Y vers la gauche, ou X, Y vers la droite. Le mouvement de l'excentrique ayant lieu dans le sens de la flèche, la position B répondra à l'instant où l'échappement commence sur la face gauche du piston, la position A à l'instant où l'admission commence sur la face droite, la position D à l'instant où l'échappement commence sur la face droite, et la position C à l'instant où l'admission commence sur la face gauche. La position B' répondra à l'instant où l'échappement cesse sur la face gauche du piston, la position A' à l'instant où l'admission cesse sur la face droite, la position D' à l'instant où l'échappement cesse sur la face droite, et la position C' à l'instant où l'admission cesse sur la face gauche. Il en résulte que la détente correspondra aux arcs C'B et A'D, et la compression aux arcs B'C et D'A.

Le piston étant à l'extrémité droite de sa course, et le bouton de manivelle en P', il faudra que le centre de la bague d'excentrique ait dépassé le point A qui répond à l'instant où l'admission commence sur la face droite; il devra donc se trouver en un point T; et si QQ' est le diamètre perpendiculaire à PP', l'angle QOT sera l'avance angulaire du tiroir (Voy. AVANCE DU TIROIR). Les positions correspondantes du bouton de manivelle et du centre de la bague conserveront, pendant toute la durée du mouvement, une distance égale à l'arc P'T. — Lorsque le centre de la bague sera parvenu au point A' où la détente commence, il aura parcouru un arc TA'; et le bouton de manivelle aura décrit dans le même temps un arc égal P'I. Cet arc s'exprime facilement; si θ désigne l'arc QT exprimé en degrés, α l'arc QA et β l'arc QB, l'arc

$$TA' = TP + PA$$

aura pour expression

$$90^\circ - \theta + 90^\circ - \alpha \text{ ou } 180^\circ - (\theta + \alpha);$$

on obtiendra donc le point I en prenant

$$PI = \theta + \alpha.$$

Et si l'on fait passer par le point I un arc de cercle ayant son centre sur le prolongement de P'P, et pour rayon la longueur de la bielle, lequel arc coupera PP' en un point i, la distance P'i sera la distance parcourue par le piston depuis le commencement de sa course vers la gauche jusqu'au moment où la détente commence.

La compression commence au moment où l'échappement cesse sur la face gauche du piston, c'est-à-dire quand le centre de la bague est en B'.

On verra, comme ci-dessus, que l'arc parcouru soit par ce centre, soit par le bouton de manivelle, a pour expression $180^\circ - (\theta + \beta)$; et par conséquent on aura la position du bouton de manivelle répondant au commencement de la compression en prenant $PK = \theta + \beta$. On décrira ensuite un arc de cercle passant par le point K, ayant son centre sur le prolongement de P'P, et pour rayon la longueur de la bielle, lequel arc coupera PP' en un point k; la distance P'k sera la distance parcourue par le piston depuis le commencement de sa course jusqu'à l'instant où la compression commence.

La détente cesse quand l'échappement commence sur la face du piston, c'est-à-dire quand le centre de la bague est en D. L'arc parcouru TD est égal à TP + PD, ou, en nommant β' l'arc Q'D, à

$$90^\circ - \theta + 90^\circ + \beta',$$

c'est-à-dire à $180^\circ - (\theta - \beta')$.

On aura donc la position correspondante du bouton de manivelle en prenant $PL = \theta - \beta'$; puis on décrira, avec la bielle pour rayon, et d'un centre situé sur le prolongement de P'P, un arc qui coupera PP' en un point l; P'l sera le chemin parcouru par le piston depuis le commencement de sa course jusqu'à l'instant où la détente cesse.

Enfin la marche à contre-vapeur commence au moment où l'admission commence sur la face gauche du piston, c'est-à-dire quand le centre de la bague est en C. L'arc parcouru sera

$$TC = TP + PC;$$

et, en appelant α' l'arc Q'C, on voit que l'arc parcouru a pour valeur

$$90^\circ - \theta + 90^\circ + \alpha' \text{ ou } 180^\circ - (\theta - \alpha').$$

On aura donc la position correspondante du bouton de manivelle en prenant $PN = \theta - \alpha'$; on décrira ensuite, avec la bielle pour rayon, et d'un centre situé sur le prolongement de P'P, un arc qui coupera PP' en un point n, et P'n sera le chemin décrit par le piston depuis le commencement de sa course jusqu'au moment où commence la marche à contre-vapeur.

On opérera de la même manière pour la course suivante du piston, et l'on trouvera que la détente commence quand le bouton de manivelle a parcouru, à partir du point P, l'arc $180^\circ - (\theta + \alpha)$;

Que la compression commence quand l'arc parcouru est $180^\circ - (\theta + \beta)$;

Que la détente cesse quand l'arc parcouru est $180^\circ - (\theta - \beta)$;

Que la marche à contre-vapeur commence quand l'arc parcouru est $180^\circ - (\theta - \alpha)$.

Ces relations permettent de déterminer les quantités X, Y, X' et Y'. Pour cela, on se donne d'abord l'avance linéaire Pn à l'admission; elle ne doit pas dépasser 4 à 5 millimètres; dans les machines à vapeur employées à la navigation, on prend cette

quantité égale à $\frac{1}{100}$ de la course du piston. Cependant, dans les machines fixes à basse pression,

cette quantité peut aller jusqu'à $\frac{1}{40}$ de la course. —

On se donne de même l'avance linéaire Pl à l'échappement; dans les machines fixes on la prend en général de manière que l'arc PL soit de 20 à 25 degrés, et dans les locomotives de 25 à 30 degrés; dans les machines employées à la navigation

en fait $P'l$ égal à $\frac{1}{10}$ de la course du piston; dans les machines fixes on peut réduire cette quantité jusqu'à $\frac{1}{30}$ de la course. On détermine ensuite sur $P'P$ un point i tel, que le rapport de $P'l$ à $P'i$ soit celui qu'on a choisi pour le rapport entre le volume après détente et le volume avant détente; ce sera, par exemple, le rapport de 3 à 2, fréquemment adopté dans les machines employées à la navigation et dans les locomotives. Pour la course suivante, on détermine la portion de la course décrite pendant l'admission, de manière que le volume de vapeur introduit soit le même pour les deux courses. Soit h la distance $P'i$, et h' la distance analogue pour la course suivante; soit D le diamètre du piston et d celui de sa tige; si h se rapporte à l'introduction de la vapeur du côté de la tige, et h' à l'introduction sur la face opposée, on devra avoir

$$\frac{1}{4} h \cdot \pi (D^2 - d^2) = \frac{1}{4} h' D^2 \text{ ou } h(D^2 - d^2) = h' D^2, [2]$$

relation qui donnera h' . On s'impose ensuite la condition que la détente soit la même sur les deux faces du piston; par conséquent, si H désigne la distance $P'l$ et H' la distance analogue pour la course suivante, on posera

$$H : H' = h : h', [3]$$

ce qui déterminera H' .

Les points i, l, n étant connus, on en déduit les points I, L, N , et par suite les arcs PI, PL, PN , que nous désignerons respectivement par les lettres I, L, N . Désignons par I', L', N' , les arcs analogues pour la course suivante, dont les deux premiers sont connus, par suite de la détermination des distances h' et H' . Nous aurons, en vertu des relations établies plus haut :

$$I = \theta + \alpha, \quad L = \theta - \beta', \quad N = \theta - \alpha', [4]$$

$$\text{et } I' = \theta + \alpha', \quad L' = \theta - \beta, \quad N' = \theta - \alpha. [5]$$

On tire de ces relations :

$$N + I' = 2\theta, \text{ d'où } \theta = \frac{1}{2} (N + I'),$$

puis

$$\begin{aligned} \alpha &= I - \theta, \\ \beta &= \theta - L', \\ \alpha' &= \theta - N, \\ \beta' &= \theta - L. \end{aligned}$$

Ces relations donneront les points T, A, B, C, D , et par suite, d'une part, l'avance angulaire QOT du tiroir, et de l'autre les distances Oa, Ob, Oc, Od , ou bien X', Y, X, Y' , qui représentent les recouvrements extérieurs et intérieurs.

L'avance à l'admission, relative à la seconde course, est donnée par la relation

$$n' = \theta - \alpha.$$

Il faudra choisir les données de manière que cette quantité reste comprise dans les limites voulues.

La période de compression, relative à la première course, répond à l'arc IK , ou à la différence des arcs PK et PL , que nous représenterons par K et L . Nous avons déjà la valeur de L ; celle de K est donnée, d'après ce qui a été dit plus haut, par la relation

$$K = \theta + \beta.$$

Il en résulte qu'on a

$$K - L = (\theta + \beta) - (\theta - \beta') = \beta + \beta'.$$

On obtiendrait la même valeur pour la seconde course. On voit que, pour diminuer cette période de

compression, il faut faire en sorte que les arcs β et β' soient aussi petits que possible, c'est-à-dire qu'il faut réduire autant que possible les recouvrements intérieurs. Or, les angles β et β' varient en sens inverse des angles L et L' ; il faut donc ne pas faire ces derniers trop petits, ou, ce qui revient au même, ne pas pousser trop loin la détente.

Quelques essais suffiront dans chaque cas pour régler les données de manière que toutes les quantités que nous venons de considérer restent comprises entre les limites que l'expérience indique comme étant les plus avantageuses.

Nous avons raisonné, dans ce qui précède, comme si le tiroir marchait dans le même sens que le piston; dans les locomotives, c'est le contraire qui a lieu : mais cette circonstance ne modifie point la méthode, et les résultats seraient semblables.

D'autres dispositions ont été employées pour produire la détente. Dans les premières machines oscillantes de M. Cavé, l'échappement de la vapeur est réglé par un tiroir comme à l'ordinaire; mais l'admission se fait d'une manière différente. La vapeur passe de la boîte au cylindre en traversant des orifices en forme de trapèzes circulaires A et B (fig. 4) pratiqués dans une plaque circulaire horizontale fixe, ou *dormante*; ces orifices, embrassant chacun un angle de 60° , communiquent chacun avec une des faces du piston. Une plaque circulaire de même diamètre, et mise en mouvement par l'arbre du volant, à l'aide de 3 paires de roues d'angle égales, est placée contre la plaque fixe. Elle est percée d'un orifice analogue, mais unique; il est représenté en $mnpq$ sur la figure. Cette plaque tourne autour de son centre, qui est aussi celui de la plaque fixe, et fait un tour entier à chaque double course du piston. Il s'ensuit que la vapeur ne peut passer par l'un des orifices A ou B que lorsque l'ouverture $mnpq$ coïncide en tout ou en partie avec cet orifice; et, par conséquent, il est facile de reconnaître qu'il y a admission par chaque orifice pendant un tiers de tour, et que l'admission est interceptée pendant les deux autres tiers; on voit

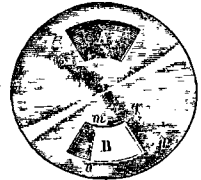


Fig. 4.

aussi que l'orifice s'ouvre graduellement pendant $\frac{1}{6}$ de tour, et se ferme graduellement pendant un autre sixième. La détente commence aussitôt que l'orifice est fermé, et elle ne cesse que lorsque l'échappement anticipé commence du côté où la vapeur vient d'être admise. On se rendrait compte des diverses circonstances de la détente par un moyen analogue à celui qui vient d'être exposé pour la détente Clapeyron : le diamètre PP' (fig. 3) représenterait à une certaine échelle la course du piston, et, à une autre échelle, la circonférence moyenne de la plaque mobile. On a renoncé à ce mode de distribution, parce qu'il occasionne une perte considérable de puissance vive au passage de la vapeur par les orifices d'admission, toujours plus ou moins étranglés par la plaque mobile, et l'on remplace cette plaque par un tiroir ordinaire. Ce mode de distribution à l'aide de deux tiroirs, dont l'un règle l'admission et l'autre l'échappement, se-

rait très-avantageux s'il n'avait l'inconvénient de compliquer le mécanisme. On retrouve toutefois une disposition analogue dans plusieurs autres machines.

Dans quelques-unes, par exemple, l'entrée de la vapeur dans la boîte est réglée par une glissoire *ab* (fig. 5) mise en mouvement par un excentrique à

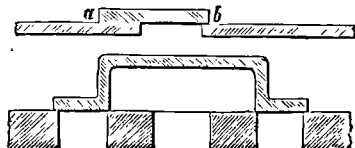


Fig. 5.

intermittences (Voy. EXCENTRIQUES) ; l'orifice d'entrée s'ouvre rapidement au moment où l'admission doit commencer, et se ferme rapidement pour produire la détente. Le tiroir principal a la disposition ordinaire, sauf que le recouvrement du côté de l'admission est extrêmement réduit, puisqu'il n'a plus pour fonction de produire la détente.

Dans d'autres, la glissoire est placée dans la boîte à vapeur même. Tel est, par exemple, le système Meyer, représenté fig. 6. Dans ce système, le tiroir

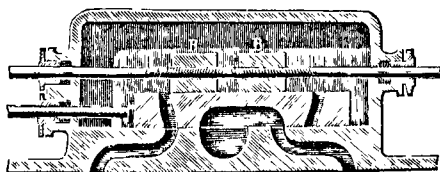


Fig. 6.

est percé de deux orifices qui peuvent correspondre aux lumières. Sur la figure, l'orifice de gauche correspond à la lumière de gauche, et la vapeur passe de la boîte à la face gauche du piston. La lumière de droite correspond au contraire à l'extérieur par le centre du tiroir. L'inverse pourrait avoir lieu si l'on déplaçait le tiroir vers la gauche. Sur le tiroir reposent deux blocs prismatiques B, B', emmanchés à une tige commune; cette tige est articulée à l'extrémité d'un levier, mobile autour d'un axe horizontal et dont l'extrémité opposée participe, à l'aide d'une rainure, au mouvement alternatif du piston. Il en résulte que la tige dont il s'agit reçoit un mouvement de va-et-vient en sens contraire du piston. Par l'effet de ce mouvement, les blocs viennent alternativement fermer les orifices du tiroir, mettre fin à l'admission, et produire ainsi la détente.

Pour étudier les circonstances de la distribution, il faut alors tracer deux courbes de réglementation (Voy. AVANCE DU TIROIR), l'une pour le bord externe de l'orifice du tiroir, et l'autre pour le bord externe du bloc correspondant. Les points où les deux courbes se coupent font connaître les positions du piston pour lesquelles l'admission cesse ou recommence. La période de marche à pleine vapeur s'étend depuis l'instant où l'admission commence sur l'une des faces du piston jusqu'à l'instant où elle cesse; et la période de détente s'étend depuis l'instant où l'admission cesse jusqu'au moment où elle recommence sur l'autre face du piston.

Nous citerons encore le système *Gonzenbach*, employé dans quelques locomotives. Dans ce système, la boîte à vapeur est divisée en deux compartiments, parallèlement au mouvement du piston. Dans l'un de ces compartiments se meut un tiroir ordinaire. Dans l'autre se meut un second tiroir, mis en mouvement par l'excentrique de marche en arrière; il est percé de deux lumières qui viennent se placer en regard de deux orifices par lesquels communiquent les deux compartiments de la boîte lorsqu'il faut donner passage à la vapeur, ou qui se placent en regard des parties pleines de la cloison lorsqu'il faut intercepter le passage.

On retrouve la même disposition dans le système *Delpêche*, sauf une différence que nous indiquerons tout à l'heure. On voit que le principe commun à ces divers systèmes est d'effectuer la distribution proprement dite, c'est-à-dire l'admission et l'échappement, à l'aide d'un tiroir ordinaire, et d'employer un tiroir spécial pour produire la détente.

Le travail éminemment variable que les locomotives ont à effectuer, exige qu'on puisse au besoin faire varier la puissance de la machine, ce qui peut se faire de deux manières, soit en diminuant l'ouverture du régulateur, soit en diminuant la durée de l'admission et augmentant la durée de la détente. Mais, dans les machines sans condensation, il est avantageux de marcher à la pression la plus forte possible, car le travail qui s'effectue en sens contraire de cette pression reste sensiblement constant. Il y a donc intérêt, au point de vue de l'emploi économique de la vapeur, à conserver à ce fluide toute sa pression, mais à diminuer la période d'admission pour accroître la période de détente. De tous les moyens proposés pour faire varier la détente, le plus généralement employé en France est la COULISSE DE STEPHENSON (Voy. ce mot). En agissant sur le levier de changement de marche, on peut donner à cette coulisse une position de plus en plus rapprochée de sa position moyenne; le coulisseau se rapproche ainsi de plus en plus du milieu de la coulisse, et l'amplitude du mouvement de va-et-vient du tiroir diminue de plus en plus. Il en résulte que la période d'admission diminue et que la période de détente augmente.

La détente Meyer est disposée de manière à être employée au même usage. Pour cela la tige qui commande les deux blocs B et B' (fig. 6) est filetée, et s'engage dans ces blocs comme dans des écrous; mais elle est filetée en sens inverse pour chacun d'eux; en sorte que le mécanicien, en faisant tourner cette tige autour de son axe à l'aide d'une manivelle, écarte ou rapproche à volonté les deux blocs, et fait varier ainsi la détente, puisque les orifices du tiroir restent fermés plus ou moins longtemps. Ce système de détente variable est employé sur les chemins de fer autrichiens. Il a sur la coulisse de Stephenson plusieurs avantages : 1° les orifices d'admission présentent toujours la même section, quel que soit le degré de détente; tandis qu'avec la coulisse de Stephenson ces orifices sont d'autant plus rétrécis que la détente est poussée plus loin; 2° l'avance à l'admission et l'avance à l'échappement ne varient pas; 3° enfin la période de compression reste constante, tandis qu'elle croît très-rapidement avec la détente dans le système Stephenson. Cependant le système Meyer a été abandonné en France, à cause

de la complication des organes et des fréquentes réparations auxquelles il donne lieu.

Dans le système Gonzenbach on fait varier la détente à l'aide d'un levier terminé par une coulisse dans laquelle s'engage un coulisseau fixé à l'extrémité de la tige du tiroir de détente. Dans le système Delpêche, ce levier à coulisse est remplacé par une coulisse fixe suspendue sous la chaudière, et présentant vers son extrémité inférieure un élargissement qui permet de supprimer complètement la détente. Nous n'insisterons pas sur ces systèmes de détente à deux tiroirs, qui ont été abandonnés par les mêmes motifs que la détente Meyer. (Voy. pour plus de détails, les *Leçons de Mécanique pratique*, de M. Morin, tome III, et le *Traité élémentaire des chemins de fer*, de M. Perdonnet, tome II.)

DÉTENTE, nom donné à divers mécanismes qui ont pour objet de suspendre l'action d'un moteur pour le laisser agir à des intervalles de temps déterminés, ou à la volonté de celui qui gouverne la machine. Ils se composent en général d'un levier, dont la forme varie suivant la machine où il est employé; dans une certaine position, ce levier arrête le mouvement; dans une autre position il lui laisse toute liberté; le passage d'une position à l'autre est déterminé par la pression d'une cheville, ou d'un corps mobile de forme quelconque, sur l'extrémité du levier opposée à celle qui forme l'arrêt. L'horlogerie en offre de nombreux exemples. Concevons, par exemple, qu'une roue AA (fig. 1)

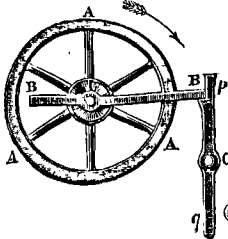


Fig. 1.

sollicitée par une force motrice, tende à tourner dans le sens de la flèche. Un bras BB monté sur le même axe, s'appuie par l'une de ses extrémités sur le bout, échancré à cet effet, d'un levier pq mobile autour d'un axe fixe O. Dans cette position, le mouvement de la roue AA est impossible. Mais si une cheville m, ou tout autre corps mobile, vient presser l'extrémité q du levier, l'extrémité p s'écarte vers la droite; le bras BB échappe, et la roue tourne dans le sens indiqué.

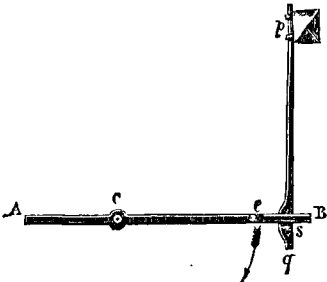


Fig. 2.

On peut, comme l'a fait M. Bréguet, remplacer le levier pq par un ressort. Le bras AB (fig. 2) tend à tourner dans le sens de la flèche autour de l'axe projeté en C; il est arrêté par une saillie s

adaptée à un ressort pq fixé en p. Mais le bras AB porte en e une échancrure qui peut laisser passer la saillie s. Si une cheville, ou un corps mobile quelconque, viennent presser de droite à gauche l'extrémité q du ressort, celui-ci s'infléchit; la saillie s passe dans l'échancrure e, et le bras AB se dégage.

On trouvera des exemples de détente dans le mécanisme de sonnerie des PENDULES et des MONTRES À RÉPÉTITION (Voy. ces mots).

Les détentes diffèrent des dé clics, en ce que l'axe du levier est fixe dans les détentes, tandis qu'il est mobile dans les dé clics; cependant ces deux expressions sont quelquefois prises l'une pour l'autre.

(Voy. le *Traité de Cinématique*, par M. Ch. Laboulaye.)

DÉVELOPPANTE DE CERCLE, courbe décrite par l'extrémité d'un fil flexible et inextensible, qui, enroulé sur la circonférence d'un cercle fixe, se déroule en restant toujours tendu. Soit O (fig. 1)

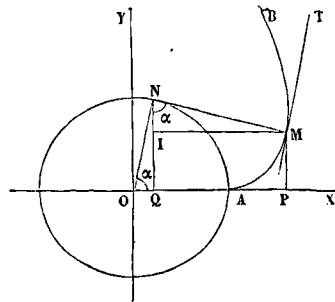


Fig. 1.

le cercle fixe, A l'extrémité du fil lorsqu'il est complètement enroulé, et NM la position de ce fil lorsqu'il s'est déroulé d'une quantité égale à l'arc AN; le point M sera un point de la développante.

On obtient aisément les coordonnées de ce point en fonction de l'angle $NOA = \alpha$ que fait le rayon ON avec le rayon OA. Prenons, en effet, pour axes le rayon OA et une perpendiculaire menée par le centre; traçons les coordonnées du point M; et menons MI parallèle à OA. Nous aurons

$$MN = AN = R\alpha,$$

en appelant R le ra , on du cercle; puis

$$x = OP = OQ + QP = OQ + IM = R \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha,$$

$$y = MP = IQ = NQ - IN = R \sin \alpha - R\alpha \cos \alpha, [1]$$

attendu que MN est une tangente, et que par conséquent l'angle MNI est égal à α .

Ces équations permettraient de construire la courbe par points.

$$\text{On en tire } dx = R\alpha \cos \alpha \cdot d\alpha,$$

$$dy = R\alpha \sin \alpha \cdot d\alpha,$$

$$\text{par suite } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha,$$

ce qui montre que la tangente à la courbe au point M est parallèle au rayon ON.

On aurait pu prévoir ce résultat. En effet, la courbe peut encore être engendrée par un point déterminé d'une droite qui roulerait sans glisser sur la circonférence fixe; cette courbe appartient donc à la famille des ROULETTES (Voy. ce mot), et par conséquent elle jouit de la propriété fondamentale

de ces courbes, c'est-à-dire que la normale en un point quelconque passe par le point de contact correspondant de la droite mobile avec la circonférence fixe. La normale en M passe donc au point N, c'est-à-dire que cette normale est MN lui-même, et que par conséquent la tangente en M est parallèle au rayon ON perpendiculaire à la normale MN.

La développante de cercle a la forme représentée

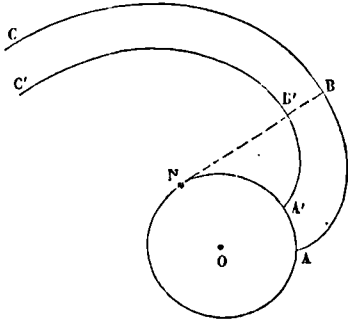


Fig. 2.

par la fig. 2. Elle tourne indéfiniment autour du cercle fixe en s'en éloignant de plus en plus.

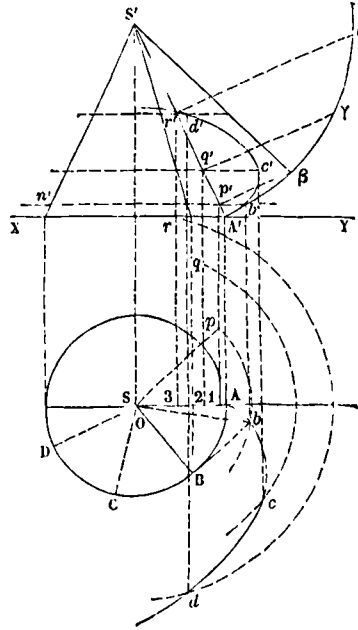
On peut remarquer en outre que deux points quelconques A et A' du même fil décrivent des développantes égales, et qui de plus sont équidistantes; car si l'on considère le fil dans une position quelconque BN, on voit que la direction de ce fil est une normale commune aux deux développantes, et que les deux points B et B' où cette normale rencontre les deux courbes sont à une distance constante l'un de l'autre.

Les propriétés de la développante de cercle sont utilisées dans le tracé des ENGRENAGES (*Voy.* ce mot).

DÉVELOPPANTE SPHÉRIQUE, courbe engendrée par un point de la surface d'un cône droit à base circulaire, lorsque cette surface se déroule suivant un plan constamment tangent au cône. Dans ce mouvement, le point considéré demeure à une distance constante du sommet du cône, et la courbe qu'il décrit peut être considérée comme tracée sur une sphère; de là le nom de *développante sphérique*. On peut concevoir cette courbe comme engendrée de deux autres manières. On peut la regarder comme décrite par un point d'un plan qui roule sans glisser sur un cône de révolution; c'est le premier mode de génération sous une autre forme. On peut encore, et ce mode de génération rappelle mieux la développante de cercle, imaginer qu'un fil ayant été enroulé sur un petit cercle d'une sphère, se déroule en se plaçant toujours suivant un arc de grand cercle tangent au petit cercle donné; dans ce mouvement son extrémité tracera sur la sphère la développante sphérique de ce petit cercle. Il est facile de voir que ce dernier mode de génération revient au premier. En effet, la circonférence de base du cône est un petit cercle de la sphère qui a son sommet pour centre; si l'on imagine que la surface du cône se déroule suivant un plan tangent au cône, la circonférence de base se déroulera sur ce plan suivant un arc ayant pour centre le sommet

du cône, c'est-à-dire suivant un arc de grand cercle de la sphère considérée; et cet arc sera tangent à la circonférence de base puisque le plan formé par la surface déroulée est tangent au cône.

Pour construire les projections de la développante sphérique nous adopterons le premier mode de génération. Nous supposons, pour fixer les idées, que l'axe du cône soit vertical; nous ferons passer le plan horizontal par le point décrivant, supposé primitivement sur le cône, et nous prendrons le plan vertical parallèle à la section méridienne qui contient ce point dans sa position initiale. Soit donc XY la ligne de terre, S, S' les projections du som-



met du cône, OA le rayon de sa base parallèle à la ligne de terre. Le point décrivant sera le point A, A'. Concevons que, dans le développement de la surface conique suivant un plan tangent, la génératrice de contact ait pris la position dont la projection horizontale est SB. Il faut chercher ce qu'est devenu à cet instant le point décrivant situé primitivement en A, A'; et déterminer ses projections. Pour cela, faisons tourner tout le système, jusqu'à ce que la génératrice de contact soit venue se placer parallèlement au plan vertical. Le plan tangent deviendra perpendiculaire au plan vertical, et aura pour trace sur ce plan la droite S'A'. La portion de surface conique développée forme, dans un plan tangent, un secteur circulaire dont le rayon est S'A', et dont l'arc est égal en longueur à l'arc AB. Faisons tourner ce secteur autour de la génératrice de contact jusqu'à ce qu'il soit vertical; il se projettera verticalement suivant le secteur A'S'β, dans lequel l'arc A'β est égal en longueur à l'arc AB, et qu'il est par conséquent facile de construire. Si nous le ramenons dans sa position perpendiculaire au plan vertical, le point β viendra se projeter verticalement sur S'A', au pied p' de la perpendiculaire abaissée du point β. Pour obtenir la projection horizontale cor-

respondante, on abaissera de p' une perpendiculaire sur la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de OA en 1, et l'on prendra sur cette perpendiculaire, à partir du point 1, une longueur $1.p$ égale à $\beta p'$. Les points p et p' seront les projections du point décrivant, dans la situation que lui a fait prendre la rotation autour de l'axe du cône. Il reste à le ramener dans sa position véritable par une nouvelle rotation en sens contraire. Dans ce mouvement, le point décrivant demeurera à la même hauteur au-dessus du plan horizontal; la projection verticale de ce point sera donc sur la droite $n'p'$ menée parallèlement à la ligne de terre. Pour obtenir la projection horizontale, on remarquera que, dans la rotation, les trois points O, p , A conserveront leurs distances relatives. Le point A viendra en B; le point p décrira un arc de cercle dont le centre est O; si donc on décrit de B comme centre, avec la distance Ap pour rayon, un second arc de cercle qui coupe le premier en b , on aura la projection horizontale définitive du point décrivant; et, en menant par le point b une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de $n'p'$, on aura en b' la projection verticale correspondante. Les points $c, c' - d, d'$, ont été obtenus de la même manière; et l'on en obtiendra de même autant qu'on le voudra. Les projections de la développante sphérique sont donc les courbes $abcd... et A'b'c'd'...$

Si l'on veut avoir la tangente au point b, b' , on remarquera que l'axe instantané du plan tangent mobile (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ) étant la génératrice de contact, dont les projections sont SB et $S'B'$, l'élément de développante est un arc de cercle qui a son centre sur cette génératrice; la tangente cherchée est donc située dans le plan mené par b, b' perpendiculairement à la droite SB, $S'B'$. D'un autre côté, la développante étant tracée sur la sphère dont le centre est S, S' , sa tangente est dans le plan tangent à cette sphère, c'est-à-dire dans le plan mené par b, b' perpendiculairement à la droite $Sb, S'b'$. La tangente demandée n'est donc autre chose que l'intersection de ces deux plans.

On a à considérer, dans le tracé rigoureux de certains engrenages coniques (Voy. ENGRENAGES) la surface conique qui aurait pour directrice la courbe $abcd, A'b'c'd'$, et pour sommet le point S, S' . La génératrice de cette surface qui passe au point b, b' aurait pour projections les droites $Sb, S'b'$. Il serait facile de déterminer son intersection avec une surface donnée, telle que celles qui terminent la roue dentée. Mais on remplace généralement ces constructions rigoureuses, mais longues et assez pénibles par le procédé approximatif de Tredgold, qui suffit dans la pratique et qui est beaucoup plus expéditif.

DÉVELOPPEMENT (Géométrie descriptive), opération qui consiste à amener dans un même plan les faces successives d'un polyèdre, ou les éléments successifs d'une surface développable (Voy. SURFACES COURBES), sans opérer ni déchirure ni duplication, s'il s'agit d'une pareille surface.

I. On peut concevoir comme il suit le développement d'un polyèdre. Soient A, B, C, D, E, etc., ses faces successives, c'est-à-dire tellement choisies que deux quelconques de ces faces consécutives aient toujours une arête commune. Soit a l'arête commune aux faces A et B; soit b l'arête commune aux faces B et C; c l'arête commune aux faces C

et D; et ainsi de suite. Si l'on choisit pour plan du développement celui de la première face A, il faut imaginer que l'on ouvre la surface du polyèdre suivant toutes les arêtes de la face A, hormis l'arête a qui lui est commune avec B. On pourra alors faire tourner l'ensemble des faces B, C, D, E, autour de l'arête a jusqu'à ce que la face B vienne se placer dans le plan de la face A, supposé prolongé. On ouvre alors le polyèdre suivant toutes les arêtes de la face B, hormis l'arête b qui lui est commune avec C. On peut dès lors faire tourner l'ensemble des faces C, D, E, etc., autour de l'arête b jusqu'à ce que la face C vienne se placer dans le plan des deux faces A et B prolongé. On ouvre de nouveau le polyèdre suivant toutes les arêtes de la face C, hormis l'arête c qui lui est commune avec D. On peut alors faire tourner l'ensemble des faces D, E, etc., autour de l'arête c jusqu'à ce que la face D vienne se placer dans le plan des faces A, B, C prolongé. En continuant ainsi on amène toutes les faces du polyèdre dans le plan de la face A, sans qu'aucune d'elles recouvre une des précédentes, ce qui est une des conditions essentielles du développement.

Si une ligne L est tracée sur la surface du polyèdre, on obtient son développement en traçant dans chaque face la portion de cette ligne qui y était contenue. Nous allons en donner quelques exemples.

II. **Développement d'un prisme.** Étant données les projections d'un prisme ABCD, $A'A''C''C'$ (fig. 1),

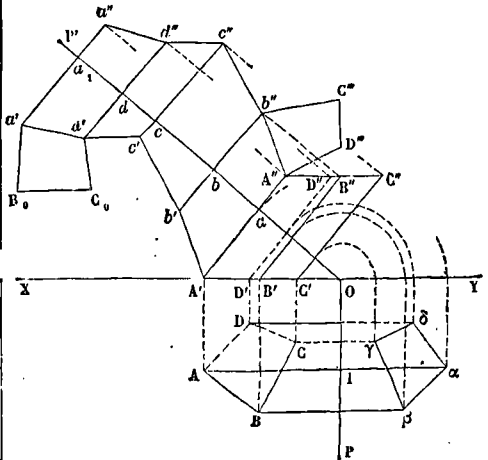


Fig. 1.

nous nous proposons de développer sa surface sur le plan vertical, et d'indiquer dans le développement les traces de la section droite du prisme. Pour cela nous commencerons par déterminer cette section droite $\alpha\beta\gamma\delta$, comme il est expliqué à l'art. SECTION PLANE. Cela fait, si l'on suppose qu'on ait transporté le prisme de manière à faire coïncider l'arête projetée en AI, $A'A''$ avec la droite $A'A''$ elle-même, puis, qu'après avoir ouvert la surface latérale suivant cette même droite, on développe cette surface sur le plan vertical, les traces de la section droite $s'y$ placeront en ligne droite suivant OP' , puisque les arêtes latérales sont perpendiculaires au plan sécant POP' , perpendiculaire

lui-même au plan vertical. Portons donc successivement sur OP' les longueurs

$$ab = \alpha\beta, \quad bc = \beta\gamma, \quad cd = \gamma\delta, \quad da = \delta\alpha,$$

et par les points b, c, d, a , menons des perpendiculaires à OP', nous aurons les directions des arêtes latérales. Pour obtenir leurs extrémités, on remarquera que, dans le développement, elles sont restées à des distances constantes du plan POP'; il suffira donc de mener par les points A'', B'', C'', D'', des parallèles à OP', qui couperont ces arêtes aux points a'', b'', c'', d'' que l'on voulait obtenir. Pour avoir les extrémités inférieures, on pourrait de même mener par les points A', B', C', D' des parallèles à OP'; mais il est plus simple de prendre les longueurs $a'a'', b''b', c''c', d''d'$ égales à A''A'. En tirant ensuite les lignes A'b', b'c', c'd', d'a', et A''b'', b''c'', c''d'', d''a'', on a le développement de la surface latérale. Il ne reste plus qu'à y joindre, si l'on veut, les deux bases en a'B, C, d' et en A''b''C''D''.

III. Développement d'une pyramide. Nous supposons donnée une pyramide régulière, dont la base est le pentagone ABCDE (fig. 2) et dont le sommet

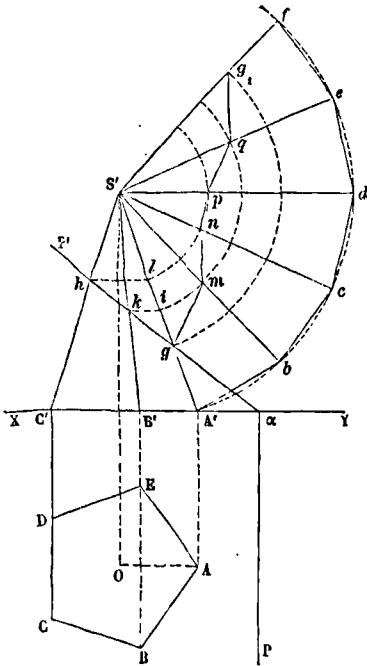


Fig. 2.

est projeté en O et en S'. Le rayon OA de la base est parallèle à la ligne de terre. La pyramide est coupée par un plan PαP', perpendiculaire au plan vertical de projection. On se propose de développer la surface latérale de la pyramide sur le plan vertical, et d'indiquer dans le développement les traces de la section faite par le plan PαP'.

Pour cela remarquons que l'arête OA, S'A' se projette sur le plan vertical en vraie grandeur. Si l'on suppose que la pyramide soit transportée de manière que cette arête coïncide avec la droite S'A', puis, qu'après avoir ouvert la surface latérale suivant cette arête, on développe cette surface sur le

plan vertical, toutes les arêtes latérales étant égales, leurs extrémités viendront se placer sur une circonférence décrite du point S' comme centre avec S'A' pour rayon. Si donc on inscrit dans cette circonférence des cordes successives A'b, bc, cd, de, ef, égales au côté AB de la base, et qu'on joigne Sb, Sc, Sd, Se, Sf, on aura le développement de la surface entière de la pyramide. On aurait le développement de la surface entière, en construisant sur l'une des cordes un polygone égal à ABCDE; mais cela n'est pas nécessaire.

Il reste à indiquer sur le développement les traces du plan sécant PαP'. Pour cela il faut y marquer des points où ce plan rencontre les arêtes latérales. Le point g est un de ces points, et l'on en obtient la reproduction sur S'g, en prenant S'g', égal à S'g. L'arête OB, S'B' est coupée par le plan PαP' en un point qui se projette verticalement en k. Si par ce point on mène un plan horizontal, il coupera toutes les arêtes latérales à la même distance du point O, S'; et, pour avoir cette distance, il suffit de mener par le point k une parallèle à la ligne de terre, jusqu'à sa rencontre en i avec S'A'. Si donc on décrit du point S' comme centre un arc de cercle ayant S'i pour rayon, il donnera par sa rencontre avec S'b le point m, où cette arête est coupée par le plan sécant. Le même arc de cercle donnera le point q, où le plan sécant coupe l'arête S'e. Par des raisonnements semblables, on verra que, pour obtenir les points où le plan sécant coupe les arêtes S'c et S'd, il faut mener, par le point h, une parallèle à la ligne de terre, jusqu'à sa rencontre en l avec S'A', et décrire du point S' comme centre, avec S'l pour rayon, un arc de cercle qui donnera sur S'c et S'd les points n et p que l'on cherche. Joignant alors gm, mn, np, pq, qg, on a la trace du plan coupant développée.

IV. Développement d'un polyèdre régulier. Nous prenons pour exemple l'octaèdre régulier, dont la surface se compose de 8 triangles équilatéraux égaux. On obtient le développement demandé en traçant ces 8 triangles à côté les uns des autres dans l'ordre indiqué sur la figure 3. En effet, les 4 triangles A, B, C, D forment le développement de la surface latérale d'une pyramide régulière à base carrée, dont le sommet serait en S; et les 4 triangles E, F, G, H forment le développement de la surface latérale d'une pyramide égale dont le sommet serait en T. Si l'on imagine que l'on fasse tourner cette seconde pyramide autour de l'arête ab jusqu'à ce que sa base carrée vienne coïncider avec celle de la première pyramide, on aura reconstruit l'octaèdre.

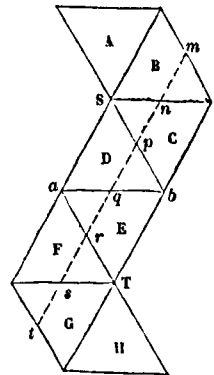


Fig. 3.

La droite mt, qui est la médiane du parallélogramme formé par la réunion des triangles B, C, D, E, F, G, est la trace d'un plan mené par le centre du polyèdre, et par les milieux m et n de deux des côtés d'une même face B. Ce plan est paral-

lèle aux faces A et H, et il coupe toutes les autres suivant des droites *np, pq, qr, rs, st* qui joignent les milieux de deux côtés de chaque face, et qui, dans le développement, supposé effectué dans l'ordre qu'indique la figure 3, viennent se placer en ligne droite. Cette propriété se démontre sans difficulté, il est inutile que nous nous y arrêtions.

V. On distingue quelquefois les surfaces polyédrales en *développables* et en *non développables*. On range une surface polyédrale donnée dans le premier groupe lorsque, pour opérer le développement, il suffit d'ouvrir la surface suivant une arête. S'il faut l'ouvrir suivant plusieurs arêtes, la surface appartient au second groupe. Ainsi la surface latérale d'un prisme, ou celle d'une pyramide, seraient des surfaces polyédrales développables; la surface d'un polyèdre régulier serait une surface non développable. Cette distinction n'a rien de fondamental; car dans un polyèdre regardé comme non développable les faces constituant un même angle solide forment une surface que l'on peut toujours considérer à part, et qui est développable; et, à l'inverse, une surface regardée comme développable n'est autre chose qu'une portion de la surface totale d'un polyèdre que l'on considère également à part.

VI. On peut concevoir comme il suit le développement d'une surface courbe développable. Dans une pareille surface, deux génératrices rectilignes infiniment voisines peuvent toujours être considérées comme étant dans un même plan, qui est celui de deux éléments consécutifs de l'arête de rebroussement (*Voy. SURFACES COURBES*); cette manière de voir suppose uniquement que l'on néglige les infiniment petits du 3^e ordre (*Voy. un mémoire de M. Bouquet, inséré dans le Journal de M. Liouville, t. XI, 1846*). Soient donc *G, G', G'', G'''*, etc., une série de génératrices consécutives assez rapprochées pour qu'on puisse admettre qu'elles se coupent consécutivement deux à deux. On peut faire tourner le premier élément de surface, limité par les génératrices *G* et *G'*, autour de *G'*, jusqu'à ce que le plan de cet élément vienne se placer dans le prolongement de celui du second élément, limité aux génératrices *G'* et *G''*; puis on fera tourner le plan des trois génératrices *G, G', G''* autour de *G''*, jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans le prolongement du troisième élément, limité aux génératrices *G''* et *G'''*; puis on fera tourner le plan des quatre génératrices *G, G', G'', G'''* autour de *G'''* jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans le prolongement du quatrième élément, etc. En continuant ainsi, on amènera dans un même plan tous les éléments de la surface.

On peut aussi concevoir le développement d'une autre manière, qui revient au fond à la première, mais qui est plus en rapport avec l'exécution pratique. On fait tourner toute la surface, moins son premier élément *G, G'*, autour de *G'* jusqu'à ce que le second élément vienne se placer dans le plan du premier; puis on fait tourner toute la surface, moins ces deux premiers éléments, autour de *G''*, jusqu'à ce que le troisième élément vienne se placer dans le plan des deux premiers; et ainsi de suite. Tous les éléments de la surface se trouvent ainsi amenés successivement dans le plan du premier; et l'on dit que le développement est effectué sur le plan de ce premier élément, ou sur le plan tangent, qui n'est autre chose que cet élément prolongé.

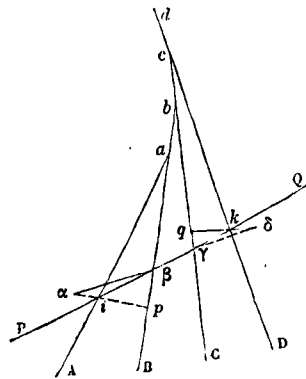
Quel que soit le mode employé, l'arête de rebroussement se trouve transformée en une courbe plane; et les analystes ont recherché la loi qui lie la courbe plane à la courbe gauche, et en particulier le rayon de courbure de la première au rayon de courbure de la seconde. Ils ont trouvé que *le rayon de courbure de la courbe plane est égal au rayon de courbure de la courbe gauche, divisé par le cosinus de l'angle que le plan osculateur de la courbe gauche fait avec le plan tangent*. On déduit, par exemple, de ce théorème que, dans le cas d'un hélicoïde développable, l'arête de rebroussement, qui est une hélice, se transforme en une circonférence de cercle. Nous n'insisterons pas sur ces propriétés géométriques, qui sont sans application.

VII. Il y a cependant deux remarques générales à faire, qui nous seront utiles dans ce qui va suivre.

En premier lieu : *Une ligne quelconque tracée sur une surface développable fait, avec une même génératrice, un même angle avant et après le développement, car la rotation autour d'une génératrice ne saurait altérer cet angle.*

En second lieu : *Si un plan P coupe une surface développable, et qu'il soit normal en un point M de cette surface, la section faite par le plan P se transformera par le développement en une courbe qui aura une inflexion au point correspondant à M.*

Cette propriété pourrait se démontrer par l'analyse, ou par la considération des plans osculateurs; mais nous préférons emprunter à M. de la Gournerie, en la généralisant un peu, l'explication géométrique qu'il a donnée pour le cas du cône dans son *Traité de Géométrie descriptive*. Soit BbC (fig. 4) un



élément d'une surface développable, et soient AaB et CcD les projections des deux éléments qui précèdent et qui suivent sur le plan de l'élément BbC qui sera celui de la figure. Soit PQ la trace d'un plan perpendiculaire au plan BbC. Imaginons que l'élément AaB tourne autour de la génératrice Bb jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans le plan de la figure. Dans ce mouvement, le point de la génératrice Aa qui se projetait en *i*, à l'intersection des droites Aa et PQ, décrira un arc de cercle dont le centre sera le pied *p* de la perpendiculaire abaissée du point *i* sur Bb; et il viendra se placer sur cette perpendiculaire à une distance *ap* plus grande que *ip*, puisque *ip*

est la projection du rayon αp . L'élément de la section faite par le plan PQ dans la surface qui avait pour projection $i\beta$, viendra donc se placer en $\alpha\beta$, *au-dessus* de la ligne PQ. Imaginons de même que l'élément C*d* tourne autour de la génératrice C*c* jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans le plan de la figure. Le point de D*d* qui se projetait en k décrira un arc de cercle ayant pour centre le pied q de la perpendiculaire abaissée du point k sur C*c*, et viendra se placer sur cette perpendiculaire à une distance δq plus grande que sa projection kq . L'élément de la section qui se projetait suivant ky viendra donc se placer suivant δy , *au-dessous* de la droite PQ. Ainsi les éléments $\alpha\beta$ et δy de la section transformée par développement seront situés de part et d'autre de l'élément βy ; ce qui revient à dire que cette transformée aura une inflexion au point qui répond à l'élément B*b*C auquel le plan PQ est perpendiculaire.

Cette démonstration suppose que, des deux angles $\alpha\beta P$ et $\beta y Q$ l'un est aigu et l'autre obtus; or on peut toujours prendre la génératrice C*c* assez voisine de la génératrice B*b* pour que cette condition soit remplie. Il n'y a d'exception que pour le cas où le plan PQ est perpendiculaire à la génératrice B*b*. Dans ce cas, les points α et δ sont situés sur PQ, c'est-à-dire sur le prolongement de βy ; en sorte que la section transformée a avec sa tangente un contact du troisième ordre, ce qu'on peut, en effet, démontrer par le calcul.

VIII. Les seuls développements dont on fasse usage dans les applications sont le développement du cylindre et celui du cône.

Développement d'un cylindre. Pour développer un cylindre on se sert de sa section droite. Considérons d'abord un cylindre droit à base circulaire AB, A'B'B''A'' (fig. 5), coupé par un plan P*a*P' perpendiculaire au plan vertical de projection. On suppose

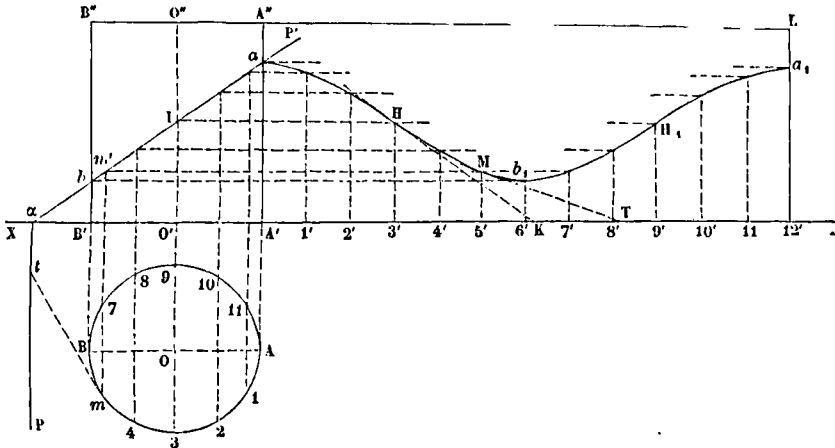


Fig. 5.

la surface ouverte suivant la génératrice projetée en A, A''A''; et l'on se propose de la développer sur le plan vertical, en traçant le développement de la section plane faite par le plan P*a*P'. Pour cela, on remarque que la base du cylindre est sa section droite. On divise sa circonférence, à partir du point A, en un certain nombre de parties égales A.1, 1.2, 2.3, 3.4, etc., et l'on porte sur la ligne de terre, à partir du point A', une série de longueurs A'.1', 1'.2', 2'.3', 3'.4', etc., égales aux arcs A.1, 1.2, 2.3, etc., développés. Les génératrices qui passent par les points A, 1, 2, 3, etc., viendront se placer suivant les verticales élevées aux points A', 1', 2', 3', etc. Les longueurs de ces génératrices comprises entre le plan horizontal et le plan sécant P*a*P' n'ont pas varié dans ce mouvement. Par conséquent si, par les points où $\alpha P'$ rencontre les perpendiculaires à la ligne de terre élevées par les points A, 1, 2, 3, etc., on mène des parallèles à XY jusqu'à la rencontre des verticales des points A', 1', 2', 3', etc., on aura autant de points du développement de la section faite par le plan P*a*P'. Quant à la base supérieure du cylindre, qui est aussi une section droite, elle se développe suivant la droite A''L parallèle à la ligne de terre.

Au lieu de porter sur la ligne de terre les parties de la circonférence AB rectifiées, il est plus exact dans la pratique d'y porter une longueur totale A'.12' égale à la longueur de cette circonférence, calculée d'après son diamètre, et de diviser ensuite la distance A'.12' en autant de parties égales qu'il y a de divisions sur la circonférence AB.

Pour tracer la courbe aMa₁, développement de la section oblique faite par le plan P*a*P', il est utile de savoir mener la tangente à cette courbe. Supposons qu'il s'agisse du point M, correspondant au point m, m' du cylindre. On sait que, pour mener la tangente en m, m' à la section oblique, il suffit de mener la tangente en m à la base jusqu'à sa rencontre en t avec la trace horizontale du plan P*a*P'; le point t est la trace horizontale de la tangente (Voy. PLAN TANGENT). Or, la rotation autour des génératrices successives, par laquelle on opère le développement, n'altère pas l'angle que la tangente fait avec la génératrice du point de contact; il suffit donc, pour obtenir la tangente en M, de mener par ce point une droite qui fasse avec la verticale M5' un angle égal à celui que la tangente en m, m' fait avec la verticale du point m . Pour cela, il n'y a qu'à considérer le triangle ayant pour sommets le point m , le point

t, et le point dont les projections sont m, m' ; l'angle en m, m' dans ce triangle est l'angle dont il s'agit. On prendra donc sur la ligne de terre, à partir du point $5'$ correspondant à m , une longueur $5'T$ égale à mt , et l'on joindra MT ; ce sera la tangente demandée, puisque le point M est à la même hauteur que m' au-dessus du plan horizontal.

Il est utile également de déterminer les points d'inflexion. D'après ce qui a été dit plus haut, ils correspondent aux points où le plan sécant est normal. Or, dans le cas où nous sommes, il est évident que ces points sont ceux qui se projettent verticalement en I et horizontalement aux points 3 et 9 ; car le diamètre qui se projette en I et en 3.9 est une horizontale du plan sécant. On aura donc les points d'inflexion en menant par le point I une parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre en H et en H_1 des verticales élevées aux points $3'$ et $9'$ qui correspondent aux points 3 et 9 . Si l'on prend $3'K$ égal à $O'\alpha$ et qu'on joigne KH , on aura la tangente en H ; la courbe, en arrivant en ce point, passe d'un côté à l'autre de la tangente KH . On opérerait de même par le point H_1 .

Plus généralement, on peut remarquer que, pour qu'un point de la section devienne un point d'inflexion dans le développement, il faut que le plan tangent en ce point soit parallèle à une perpendiculaire au plan sécant. Pour obtenir ce point, on mènera donc, par un point quelconque de l'espace, une parallèle aux génératrices du cylindre et une perpendiculaire au plan sécant; ces deux droites détermineront un plan, dont la trace horizontale sera parallèle à celle du plan tangent cherché; on pourra donc mener ce plan tangent (V. PLANS TANGENTS). La génératrice de contact coupera le plan sécant au point qui, dans le développement, doit devenir un point d'inflexion.

IX. On construit d'une manière analogue le développement du cylindre oblique, en se servant de sa section droite. On prend le plan vertical parallèle aux génératrices du cylindre, le plan de la section droite est alors perpendiculaire au plan vertical. On détermine cette section droite, comme il est expliqué à l'article SECTIONS PLANES. On divise le contour de la section droite en parties assez petites pour pouvoir être considérées comme droites; on porte ces parties sur la trace verticale de la section droite, et par les points de division on mène des parallèles aux génératrices du cylindre; on obtient ainsi les positions que prennent, dans le développement sur le plan vertical, les génératrices correspondantes à ces points de division. Il est facile alors d'obtenir le développement de l'intersection du cylindre par un plan quelconque. Si ce plan est celui de la base du cylindre, les portions de génératrices comprises entre cette base et le plan de la section droite se projettent en vraie grandeur sur le plan vertical; il suffit donc, pour avoir le développement de la base, de mener par les projections verticales des traces des différentes génératrices considérées, des parallèles à la trace de la section droite, jusqu'à la rencontre des droites qui représentent les génératrices dans le développement. La construction est tout à fait analogue à celle qui a été donnée ci-dessus pour le développement d'un prisme. Si le plan coupant est un plan quelconque, il faut déterminer la portion de chaque

génératrice comprise entre ce plan et celui de la section droite; et porter cette distance, dans le développement, sur la génératrice correspondante, à partir de la trace verticale de la section droite. Comme les génératrices sont parallèles au plan vertical, leur intersection avec le plan coupant, quel qu'il soit, se détermine avec facilité, et la portion de génératrice que l'on cherche, se projette en vraie grandeur sur le plan vertical. Cette solution générale de la question est du reste peu usitée. On suppose généralement le plan coupant perpendiculaire au plan vertical, et alors la portion de chaque génératrice comprise entre ce plan et celui de la section droite est immédiatement donnée par la portion de la projection verticale de cette génératrice comprise entre les traces verticales des deux plans.

X. Des constructions du même genre serviraient à trouver la transformée par développement d'une courbe quelconque tracée sur la surface d'un cylindre. On sait, par exemple, qu'une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire donne, dans le développement, une ligne droite. Au contraire, des constructions analogues, exécutées dans un ordre inverse, permettraient de trouver sur la surface d'un cylindre la courbe qui, après le développement, se change en une ligne donnée. On sait, par exemple, que toute ligne droite tracée dans le développement du cylindre droit à base circulaire correspond à une hélice sur la surface du cylindre, ce qui revient à dire que si l'on enroulait cette droite sur le cylindre, elle se transformerait en une hélice. On pourrait déterminer l'hélice provenant de l'enroulement d'une droite donnée.

XI. Développement d'un cône. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un cône droit à base circulaire. Soit $AB, A'B'$ (fig. 6) la base, et O, S' le sommet. Prenons le plan sécant $P\alpha P'$ perpendiculaire au plan vertical de projection, et proposons-nous de développer le cône sur ce plan vertical, en y indiquant le développement de son intersection avec le plan $P\alpha P'$. Si l'on imagine que l'on transporte le cône de manière que sa génératrice $OA, S'A'$ coïncide avec la droite $S'A'$ elle-même; puis, qu'après avoir ouvert la surface suivant cette génératrice, on la développe sur le plan vertical; la circonférence de la base se développera suivant un arc de cercle décrit du point S' avec $S'A'$ pour rayon. Divisons la circonférence AB en parties égales à partir du point A ; soient $A.1, 1.2, 2.3$, etc., les parties successives obtenues; portons sur l'arc décrit du point S' une série de distances $A'.1', 1'.2', 2'.3'$, etc., respectivement égales aux parties de AmB rectifiées. Les génératrices qui avaient pour trace horizontale les points $A, 1, 2, 3$, etc., viendront se placer en $S'A', S'1', S'2', S'3'$, etc. Il s'agit d'y marquer les points où ces génératrices étaient rencontrées par le plan sécant. Considérons, par exemple, la génératrice $Om, S'm'$. Elle perce le plan sécant en un point qui se projette verticalement en n' , à l'intersection des droites $S'm'$ et $\alpha P'$. Il faut avoir la distance de ce point au sommet. Or, le sommet est à égale distance de tous les points d'un même parallèle de la surface; si donc on mène la trace $n'n''$ du parallèle considéré, la distance $S'n''$ sera la distance cherchée, projetée en vraie grandeur. En décrivant donc du point S'

comme centre, avec $S'n''$ pour rayon, un arc de cercle, le point N où il rencontrera la ligne $S'M$, position de la génératrice $Om, S'm'$ après le développement, sera, dans le développement, la position

savoir mener la tangente. On s'appuie pour cela sur ce que, dans le développement, l'angle d'un élément de la courbe avec la génératrice qu'il rencontre reste le même. Proposons-nous, par exemple,

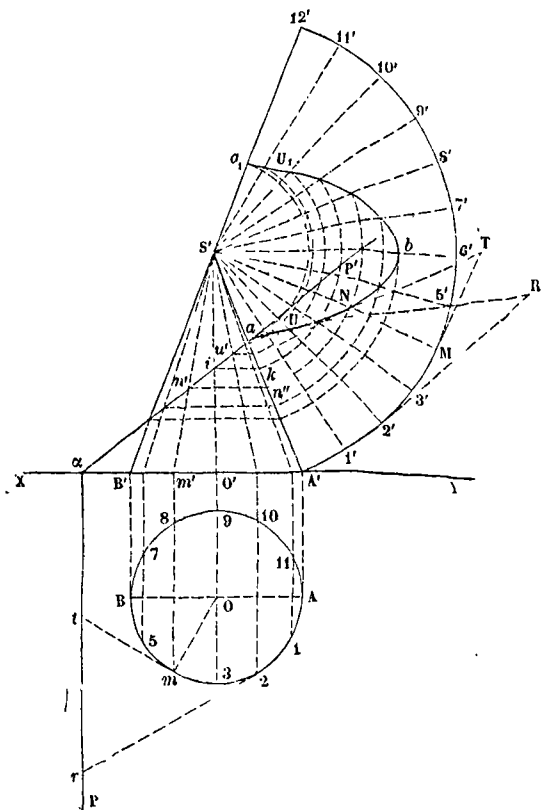


Fig. 6.

du point où cette génératrice perce le plan sécant. En opérant de même pour toutes les autres génératrices, et joignant par une courbe continue les points ainsi déterminés, on obtient le développement $aU\eta U_1a_1$ de la courbe d'intersection. Le point le plus éloigné du sommet S' est le point b , qui répond à la génératrice $OB, S'B'$; et le point le plus rapproché est le point a ou a_1 , qui répond à la génératrice $OA, S'A'$.

Au lieu de porter sur l'arc de cercle $A'.M.12'$ les parties de $A\eta B$ rectifiées, il est plus exact dans la pratique, quoique moins conforme à l'esprit de la Géométrie descriptive, de déterminer par le calcul l'angle $A'.S'.12'$. L'arc $A'.12'$ devant être égal au développement de la circonférence AB , on doit avoir $A'.12' = 2\pi \cdot OA$.

Mais, par un principe élémentaire connu, on a $A'.12' : 2\pi S'A' = \text{angle } A'.S'.12' : 180^\circ$; mettant pour $A'.12'$ sa valeur et simplifiant, on en tire $\text{angle } A'.S'.12' = 180^\circ \cdot \frac{OA}{S'A'}$.

Cet angle étant connu, on divise l'arc $S'.12'$ en autant de parties égales qu'il y a de divisions sur la circonférence AB .

Pour tracer la courbe, développement de l'intersection du cône par le plan $P\alpha P'$, il est utile de

chercher d'abord la trace horizontale de la tangente à la courbe d'intersection elle-même, au point projeté en n' . On sait (Voy. PLAN TANGENT) qu'il suffit pour cela de mener la tangente mt à la base du cône par la trace horizontale m de la génératrice qui contient le point considéré, et de déterminer sa rencontre t avec la trace horizontale du plan sécant. Considérons dans l'espace le triangle qui a pour sommets t, m et le point projeté en n' ; dans ce triangle, l'angle opposé au côté mt est l'angle de la tangente avec la génératrice. Prenons donc la longueur mt , portons-la perpendiculairement à $S'M$ en MT , et joignons NT , nous aurons la tangente au point N. On opérerait de la même manière pour tout autre point, excepté pour les points a, a_1 , et b où la tangente est évidemment perpendiculaire à la génératrice.

Il est utile aussi de déterminer les points d'inflexion de la courbe, dans le développement. D'après ce qui a été dit plus haut, il faut pour cela déterminer les points de la section où le plan sécant est normal à la surface du cône. Or, ces points sont faciles à trouver, puisque ce sont ceux où le plan sécant contient la normale; cette normale doit donc se projeter suivant $\alpha P'$. Mais on sait que les normales élevées à une surface de révolution par les différents points d'un même parallèle vont rencontrer l'axe en un même point. Puisque la normale doit se projeter sur $\alpha P'$, ce point ne peut être autre que le point de l'axe

qui se projette en ϵ , à l'intersection des droites $\alpha P'$ et $S'O'$. Abaissons donc du point ϵ sur $S'A'$ la perpendiculaire ϵk ; ce sera la projection verticale de la normale contenue dans le plan vertical qui a pour trace AB . Par le point k menons la droite ku parallèle à la ligne de terre, ce sera la projection verticale du parallèle considéré. Le point u' sera donc la projection verticale du point de ce parallèle où la normale se projette suivant $\alpha P'$, c'est-à-dire du point où le plan sécant est normal. Ce point répond dans le développement aux points U et U' , ce sont les points d'inflexion de la courbe transformée. Si l'on mène par le procédé indiqué ci-dessus la tangente UR au point U , la courbe passera d'un côté à l'autre de cette tangente en arrivant au point U .

Plus généralement, pour qu'un point de la section devienne un point d'inflexion dans le développement, il faut que le plan tangent en ce point soit parallèle à une perpendiculaire au plan sécant. La question revient donc à mener un plan tangent à une surface conique parallèlement à une droite donnée, problème que l'on sait résoudre (Voy. PLANS TANGENTS). La génératrice de contact percera le plan sécant au point qui, dans le développement, deviendra un point d'inflexion. Mais il

pourra se faire que le développement de la section n'ait pas de point d'inflexion; c'est ce qui arrivera si une perpendiculaire au plan sécant menée par le sommet du cône tombe dans l'intérieur de la surface conique.

Lorsque le plan sécant rencontre ces deux nappes, et que par conséquent la courbe d'intersection est une hyperbole, cette courbe transformée par le développement a encore des branches infinies, et ces branches ont deux asymptotes rectilignes, qui s'obtiennent comme les autres tangentes. On mène par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant; il coupe le cône suivant deux génératrices parallèles aux asymptotes, et sur lesquelles se trouvent les points de la courbe d'intersection situés à l'infini. On détermine la position de chacune de ces génératrices dans le développement. On construit, comme pour une tangente ordinaire, le point analogue au point T; pour avoir l'asymptote il n'y a plus qu'à joindre ce point au point de contact, ce qui revient à mener par le point analogue à T une parallèle à la génératrice sur laquelle doit se trouver le point de contact.

On a d'ailleurs rarement à considérer ce cas dans les applications.

XII. Des constructions analogues aux précédentes permettraient de trouver le développement d'une courbe quelconque tracée sur la surface du cône. Et, en effectuant ces constructions dans un ordre inverse, on pourrait déterminer sur la surface du cône la courbe qui, dans le développement, donne une ligne déterminée.

XIII. On peut développer également un cône oblique, mais la construction est moins simple. Il faut diviser la base en parties assez petites pour qu'elles puissent être considérées comme rectilignes; déterminer les longueurs des génératrices qui ont pour traces les points de division; et construire la série des triangles formés par deux de ces génératrices consécutives et par l'arc qu'elles interceptent sur la base du cône, triangles dans chacun desquels on connaît les trois côtés. Mais cette construction n'est jamais exacte, et ne conduit jamais à un résultat satisfaisant; il est rare qu'elle soit employée dans les applications.

XIV. Le développement du cylindre et du cône sont d'un fréquent usage dans diverses industries; ils fournissent des patrons qui, exécutés en matière flexible, comme le carton, le fer-blanc, la tôle, etc., et enroulés sur la surface du cylindre ou du cône, reproduisent les lignes qui ont été développées, et particulièrement les sections planes.

Pour en donner un exemple, supposons qu'il s'agisse d'aboucher à angle droit deux tuyaux cylindriques de même diamètre. Les cylindres devront se rencontrer mutuellement suivant un plan incliné de 45° sur chacun des deux axes. Il faudra donc construire le développement de chaque cylindre, avec son intersection avec un plan incliné de 45° sur les génératrices. On taillera, sur ce développement, comme sur un patron, les feuilles de métal, de tôle par exemple, qui doivent former les tuyaux. En les enroulant sur un cylindre ayant le rayon intérieur du tuyau on leur donnera la forme cylindrique; et la courbe ondulée qui les termine, comme celle de la figure 5, s'enroulera suivant une ligne plane; ce sera une ellipse, dont le

plan aura, par rapport aux génératrices, l'inclinaison donnée. Et en faisant coïncider les deux ellipses, on abouchera les deux tuyaux dans les conditions voulues. Les coudes des tuyaux de poêle offrent un système de ce genre.

On exécuterait de la même manière la rencontre de deux tuyaux coniques, ou d'un tuyau conique avec un tuyau cylindrique.

DÉVERSOIR, orifice rectangulaire, découvert à sa partie supérieure, et par lequel s'écoule l'eau d'un réservoir. Lorsqu'une rivière est barrée dans une partie de son cours, et que l'eau passe par-dessus le barrage, on dit aussi qu'elle s'écoule en déversoir. Le côté horizontal de l'orifice que nous considérons ici est ce qu'on nomme le seuil du déversoir.

Jusqu'ici la théorie n'est point encore parvenue à expliquer d'une manière générale l'écoulement des eaux en déversoir; elle ne rend compte du phénomène d'une façon à peu près satisfaisante que dans un seul cas; et ce cas est exceptionnel. C'est celui où le seuil présente dans le sens du courant une longueur EF (fig. 1) assez grande pour que le liquide

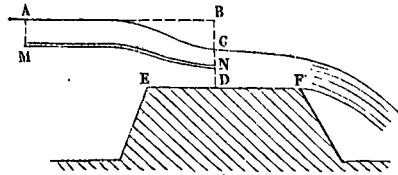


Fig. 1.

puisse y être considéré comme s'écoulant d'un mouvement uniforme. Les pressions dans une section transversale CD de cette partie du courant peuvent alors être évaluées d'après les règles de l'hydrostatique, et l'on reconnaît que tous les filets qui traversent cette section ont une même vitesse facile à calculer. Considérons, en effet, un filet quelconque MN, partant d'un point M assez éloigné du déversoir pour que la vitesse en ce point puisse être regardée comme nulle. La pression en ce point a pour expression $P_0 + \Pi z$, en appelant P_0 la pression atmosphérique, z la distance AM du point M au-dessous du niveau supérieur, et Π le poids du mètre cube d'eau. La pression en N a pour expression $P_0 + \Pi y$, en appelant y la distance CN du point N au-dessous du niveau du fluide dans cette partie de son cours. Soit v la vitesse en N, et soit h la différence BC entre les deux niveaux du liquide avant le déversoir et sur le seuil même. Si l'on applique au filet considéré le THÉORÈME DE D. BERNOULLI (Voy. ce mot) en prenant pour plan horizontal de comparaison celui qui passe par le point N, on obtient

$$0 + \frac{P_0}{\Pi} + z + \left(h + y - z \right) = \frac{v^2}{2g} + \frac{P_0}{\Pi} + y + 0,$$

d'où $v = \sqrt{2gh}$. [1]

Ainsi tous les filets traversent la section CD avec la vitesse due à la différence h des deux niveaux avant le déversoir et sur le déversoir. Il en résulte que la dépense a pour expression cette vitesse multipliée par l'aire de la section CD. Si l'on désigne par L la largeur du déversoir, dans le sens transversal, et H la hauteur du niveau supérieur A au-

dessus du seuil, l'aire dont il s'agit a pour expression $L(H - h)$; en nommant Q la dépense, on a donc

$$Q = L(H - h) \sqrt{2gh} \quad [2]$$

Dans cette formule h n'est point donné. On le détermine en admettant que la différence de niveau BC qui s'établit est celle qui répond au maximum de dépense, ce qui paraît assez vraisemblable. Or, si l'on cherche le maximum du second membre de l'équation [2] on trouve qu'il répond à $h = \frac{1}{3} H$; substituant donc pour h cette valeur, on obtient

$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot LH \sqrt{2gH} = 0,385 LH \sqrt{2gH} \quad [3]$$

Comme il y a toujours une contraction latérale (Voy. CONTRACTION DE LA VEINE), due aux parois verticales de l'orifice, la dépense réelle n'atteint pas tout à fait cette valeur, et l'expérience donne 0,35 au lieu de 0,385. Néanmoins la formule [3] peut être regardée comme donnant une approximation satisfaisante.

Dans le cas où, comme le montre la figure 2, le seuil du déversoir n'est pas assez long dans le sens du courant pour que le mouvement uniforme puisse s'y établir, on ne peut plus appliquer la théorie précédente. Néanmoins, on emploie encore une formule analogue à la formule [3] et l'on pose

$$Q = mLH \sqrt{2gH} \quad [4]$$

m étant un coefficient qui varie en

général de 0,386 à 0,424, et qu'on peut prendre en moyenne égal à 0,405. Voici le résultat des expériences faites par MM. Poncelet et Lesbros sur un déversoir de 0^m,20 de large, et sous diverses charges au-dessus du seuil. La première colonne de coefficients se rapporte au cas où la contraction n'est supprimée sur aucun des trois côtés, la seconde au cas où la contraction est supprimée sur le fond de l'orifice par un évasement intérieur (fig. 2), la troisième au cas où la contraction est supprimée sur les trois côtés (fig. 2 bis).

CHARGES sur le seuil.	COEFFICIENT m			CHARGES sur le seuil.	COEFFICIENT m		
	1 ^{er} cas.	2 ^e cas.	3 ^e cas.		1 ^{er} cas.	2 ^e cas.	3 ^e cas.
0,01	0,424	0,384	0,492	0,10	0,395	0,408	0,434
0,02	0,417	0,402	0,478	0,12	0,394	0,408	0,434
0,03	0,412	0,410	0,459	0,14	0,393	0,408	0,434
0,04	0,407	0,411	0,449	0,16	0,393	0,407	0,433
0,05	0,404	0,411	0,442	0,18	0,392	0,406	0,432
0,06	0,401	0,410	0,437	0,20	0,390	0,405	0,432
0,07	0,398	0,409	0,435	0,22	0,386	0,405	0,430
0,08	0,397	0,409	0,434	0,25	0,379	0,404	0,428
0,09	0,396	0,409	0,434	0,30	0,371	0,403	0,424

On voit que, lorsque la contraction n'est supprimée sur aucun des trois côtés de l'orifice, le coef-

ficient m diminue à mesure que la charge augmente, ce qui s'explique par l'accroissement de la vitesse, laquelle a pour conséquence une augmentation de contraction. Le coefficient m est plus grand, pour une même charge, lorsque la contraction est supprimée sur les trois côtés; mais il diminue encore lorsque la charge augmente; ce qui donne lieu de croire que la contraction n'avait pas été entièrement détruite dans les expériences dont il s'agit.

Pour se servir de la table ci-dessus, on prendra le rapport entre la charge sur le seuil et la largeur du réservoir, et l'on adoptera pour m la valeur qui dans la table correspond au même rapport. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un déversoir de 2^m,50 de large, et que la charge sur le seuil soit de 0^m,80, on aura pour le rapport dont il s'agit $\frac{8}{25}$ ou 0,32; multipliant par la largeur 0^m,20 du déversoir dans les expériences de MM. Poncelet et Lesbros, on obtient 0,064 pour la charge sur le seuil. La valeur de m à prendre est donc comprise entre celle qui répond à une charge de 0^m,06 et celle qui répond à une charge de 0^m,07, c'est-à-dire entre 0,401 et 0,398. Par interpolation on obtient $m = 0,400$. Par conséquent on aurait, dans l'exemple que nous traitons,

$$Q = 0.4 \cdot 2^m,50 \cdot 0,8 \sqrt{2 \cdot 9,8088 \cdot 0,8}$$

$$Q = 3^m \text{ cubes, } 176.$$

M. Clarinval, capitaine d'artillerie, a déduit de la discussion des expériences de MM. Castel, Lesbros et Boileau sur les déversoirs une formule empirique qui donne la dépense avec une assez grande approximation dans les circonstances ordinaires de la pratique. Cette formule est la suivante :

$$Q = LHh \sqrt{\frac{g}{H + h}}$$

dans laquelle h est l'épaisseur de la lame d'eau au-dessus de l'arête intérieure du seuil, supposé incliné vers l'aval. Mais elle exige, comme on voit, une mesure de plus, celle de h .

DEVIATION DES PROJECTILES, mouvement par lequel un projectile s'écarte de sa trajectoire normale, c'est-à-dire de celle qu'il suivrait s'il n'était soumis qu'à l'action de la pesanteur et à la résistance de l'air (Voy. BALISTIQUE). Cette déviation, souvent considérable, mais dont la loi est très-difficile à saisir, a été depuis longtemps constatée par l'expérience; il suffit pour cela de placer sur le trajet du projectile, et à des distances connues, des cadres remplis d'un réseau en ficelle ou en fils métalliques très-minces, que le boulet traverse en y laissant une trace visible, mais sans que sa vitesse soit sensiblement altérée; on peut ainsi se procurer un certain nombre de points de la trajectoire réelle, et la comparer à la trajectoire normale, déduite des formules. Lorsqu'on tire de la sorte un certain nombre de coups avec une même bouche à feu, sous une même inclinaison, avec des projectiles de même poids et avec la même charge, si l'on prend les ordonnées verticales moyennes, répondant à des abscisses déterminées, on reconnaît qu'elles appartiennent à une sorte de trajectoire moyenne qui est assez exactement représentée par les formules. Mais il n'en est plus de même d'une des trajectoires en particulier; les différences que l'on

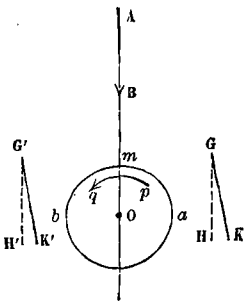
obtient entre les ordonnées observées et les ordonnées calculées sont souvent assez grandes. En même temps, on reconnaît aussi que la trajectoire réelle n'est pas plane; c'est une courbe à double courbure, qui s'éloigne plus ou moins du *plan de tir*, c'est-à-dire du plan vertical déterminé par l'axe de la bouche à feu. La déviation n'est pas toujours de même sens pour les diverses trajectoires que l'on compare; de plus, elle peut changer de sens pour une même trajectoire pendant la durée du trajet; en sorte qu'au premier abord les effets paraissent souvent très-capricieux. Il peut arriver, par exemple, qu'un boulet, qui au départ déviait à gauche du plan de tir, se trouve à droite au bout d'un parcours de 200^m, et se retrouve à gauche de ce plan après un parcours de 600^m. Dans une série d'expériences faites à Metz sur ce sujet en 1846, on a lancé 100 boulets de 16, sous une inclinaison constante de 1° 29' 7", avec une charge constante de 1^k,333; et l'on a observé la position du projectile à 7^m,75 de la bouche à feu, à 200^m, à 400^m, à 600^m, et au point de chute sur le sol horizontal, c'est-à-dire à des distances comprises entre 590^m et 790^m. Les résultats *moyens* sont représentés par les formules de balistique à 1 centimètre près; pour les trajectoires particulières, les hauteurs calculées sont encore exactes à 3 ou 4 centimètres près; mais il y a des déviations latérales, soit à gauche, soit à droite, qui, au point de chute, s'élèvent pour certaines trajectoires jusqu'à 3^m,90 et 4^m,20, et même, pour l'une d'elles, jusqu'à 4^m,90, quoique pour la plupart la déviation soit beaucoup moindre. On verra plus loin que ces déviations croissent considérablement avec les portées.

La déviation des projectiles est due à plusieurs causes, dont quelques-unes sont connexes. En premier lieu, il est rare que le projectile sorte de l'âme de la pièce dans la direction même de son axe. Comme le boulet a toujours un diamètre un peu moindre que celui de l'âme, les gaz qui passent, au premier instant de l'explosion, au-dessus du boulet, exercent sur lui une pression verticale assez forte pour qu'il se produise dans l'âme de la pièce, après quelques coups, à l'emplacement occupé primitivement par le projectile en avant de la charge, une dépression sensible que les artilleurs appellent le *logement* du boulet. Le projectile ne peut sortir de cette dépression sans prendre une direction légèrement inclinée par rapport à l'axe de la bouche à feu. Si l'âme est courte, le boulet peut sortir dans cette direction inclinée; si l'âme est longue, il peut arriver que le boulet aille frapper la paroi supérieure de l'âme, s'y réfléchisse et sorte en faisant avec l'axe un petit angle en sens contraire du premier: dans le premier cas, il y a un *relèvement* du projectile; dans le second cas, il y a un *abaissement*. Il peut arriver même, si la pièce est assez longue, et l'inclinaison primitive par rapport à l'axe assez grande, que le boulet se réfléchisse une seconde fois sur la paroi inférieure et se relève de nouveau. Ces mouvements, au lieu d'avoir lieu dans le plan vertical, peuvent se produire dans un plan incliné à l'horizon.

La seconde cause de déviation réside dans le mouvement de rotation dont le projectile est nécessairement animé. La pression verticale exercée sur le boulet par les gaz qui, au premier instant, s'é-

chappent entre le boulet et l'âme, donne naissance à un frottement qui oblige le boulet, au moment où il se met en mouvement, à rouler sur la paroi inférieure, et à prendre ainsi un mouvement de rotation. Mais cette rotation n'est pas la seule, ni même la plus importante. Il est extrêmement rare que le centre de gravité du projectile coïncide avec son centre de figure; or la résultante des pressions qui mettent le projectile en mouvement, peut être considérée comme une force passant par son centre de figure; il doit donc prendre, indépendamment du mouvement de translation qui est l'objet du tir, un mouvement de rotation autour de son centre de gravité, mouvement d'autant plus rapide que le boulet est plus excentrique, ou que son centre de gravité est plus éloigné de son centre de figure. Les deux rotations dont nous venons de parler se composent pour donner une rotation résultante, qui peut être modifiée par les chocs qu'éprouve le projectile dans l'âme de la pièce, mais qui ne saurait s'annuler. Le boulet sort donc de l'âme animé d'un mouvement de rotation plus ou moins rapide. Si cette rotation s'effectue autour d'un des AXES PRINCIPAUX D'INERTIE, majeur ou mineur du projectile (*Voy. ce mot*), le mouvement de rotation est stable, l'axe reste parallèle à lui-même pendant toute la durée du trajet (*Voy. le Traité de Mécanique* de Poisson, t. II, chap. IV); c'est particulièrement ce qui arrive si la rotation a lieu autour de l'axe *majeur*, c'est-à-dire autour de celui par rapport auquel le MOMENT D'INERTIE (*Voy. ce mot*) est le plus grand. Mais si la rotation primitive s'exécute autour d'un axe autre qu'un des trois axes principaux, cet axe n'est qu'instantané; il se déplace continuellement dans l'intérieur du projectile.

Voici maintenant comment cette rotation devient une cause de déviation dans l'air. Une expérience de M. G. Magnus, répétée en 1853 à Vincennes, met cette influence hors de doute. Dans un courant d'air horizontal, produit par un ventilateur, est placé un petit cylindre vertical O, pouvant prendre un mouvement de rotation autour de son axe, dans le sens de la flèche *pq*. Dans le même courant sont placées deux petites girouettes GH et G'H', qui prennent naturellement la direction du courant d'air AB, tant que le cylindre est immobile. Mais si l'on met le cylindre en mouvement, on voit les girouettes se déplacer et prendre les positions GK et G'K', c'est-à-dire que, la rotation se faisant, comme le suppose la figure, de droite en avant, c'est la girouette G qui s'éloigne du cylindre, tandis que la girouette G' s'en rapproche. Si la rotation du cylindre s'effectuait en sens contraire, ce serait la girouette G' qui s'écarterait du cylindre, tandis que la girouette G s'en rapprocherait. On ne peut expliquer ce résultat qu'en admettant que la veine fluide éprouve de la part des aspérités de la surface cylindrique une résistance plus grande du côté *am*, où elles marchent en sens inverse du courant, que du



côté mb où elles marchent dans le même sens; par suite, la pression augmente dans la portion de la veine qui passe entre le cylindre et la girouette G , parce qu'elle éprouve plus de difficulté à s'y mouvoir; la pression diminue au contraire dans la portion de la veine qui passe entre le cylindre et la girouette G' , parce que, de ce côté, les aspérités en se mouvant dans le sens mb , et poussant devant elles le fluide, font en même temps un vide partiel derrière. Si l'axe du cylindre s'inclinait sur l'horizon, les résultats seraient encore les mêmes, mais avec une moindre intensité; ils cesseraient de se manifester si l'axe était dirigé dans le sens du courant ou en sens contraire; c'est ce que l'expérience confirme. Il est clair que si le cylindre est remplacé par une sphère, les phénomènes sont encore de même nature. Enfin si le corps tournant, au lieu d'occuper une position fixe dans un fluide en mouvement, se meut lui-même dans un fluide en repos, le mouvement relatif restant le même, les mêmes phénomènes se manifestent encore. Un projectile sphérique éprouve donc de la part de l'air une pression plus grande du côté de l'hémisphère dont les différents points marchent dans le sens de la trajectoire, que du côté de l'hémisphère opposé; il en résulte que ce projectile doit éprouver une déviation dont la direction est perpendiculaire au plan déterminé par la tangente à la trajectoire normale et par l'axe de rotation, et dont le sens est défini de la manière suivante : le plan déterminé par l'axe de rotation et la tangente à la trajectoire coupe la surface du projectile suivant une circonférence de grand cercle; considérons les points de la demi-circonférence *antérieure*, c'est-à-dire celle qui est tournée du côté du but; le sens de la rotation de ces points est celui de la déviation.

A l'aide de ces considérations, on peut se rendre compte de tous les cas particuliers de déviation, inexplicables quelquefois en apparence. Si, par suite des effets qui se sont produits dans l'âme de la pièce, le boulet sort animé d'un mouvement de rotation autour d'un de ses axes principaux, autour de son axe majeur par exemple, cet axe demeurera fixe dans le corps et se mouvra parallèlement à lui-même dans l'espace; la déviation aura donc lieu dans le même sens pendant toute la durée du trajet. Supposons, par exemple, l'axe perpendiculaire au plan de tir, et le sens de la rotation de haut en avant; la déviation sera verticale et de haut en bas: il y aura abaissement; si la rotation est de sens contraire, la déviation sera encore verticale, mais il y aura relèvement. Supposons l'axe situé dans le plan de tir; la déviation aura lieu perpendiculairement à ce plan, c'est-à-dire dans le sens horizontal: vers la droite, si le sens de la rotation est d'avant à droite; vers la gauche, au contraire, si le sens de la rotation est d'avant à gauche. Si l'axe est incliné par rapport au plan de tir, il y aura à la fois déviation verticale, soit vers le bas, soit vers le haut, et déviation latérale, soit à droite, soit à gauche.

En supposant toujours que l'axe de rotation conserve son parallélisme, la déviation sera, comme nous l'avons dit, de même sens pendant tout le trajet; mais elle n'aura pas pour cela une direction constante, puisque cette direction, perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la tangente à la tra-

jectoire, varie nécessairement avec l'inclinaison de cette dernière. Enfin si l'axe de rotation ne reste pas parallèle à lui-même, la déviation pourra changer non-seulement de direction, mais encore de sens, ce qui explique les anomalies apparentes qu'on observe dans le tir. On peut remarquer que lorsque l'axe de rotation se confond accidentellement avec la tangente à la trajectoire, la déviation à cet instant est nulle.

Indépendamment des effets que nous venons de signaler, la rotation du projectile en produit encore d'autres, dus au frottement de l'air, mais cette influence est très-faible; elle aurait du reste pour résultat de faire dévier le projectile dans le sens opposé au mouvement de son hémisphère antérieur. (On peut consulter sur les effets de la rotation des projectiles les savants mémoires de Poisson insérés dans les XVI^e et XVII^e cahiers du *Journal de l'École Polytechnique*.)

Parmi les causes qui peuvent expliquer les différences qu'on observe dans des circonstances de tir en apparence identiques, il faut compter la densité de l'air qui peut varier dans l'intervalle de deux expériences. Cette variation a pour effet de modifier proportionnellement le coefficient A de la résistance de l'air (*Voy. BALISTIQUE*), et par suite les fonctions \mathfrak{B} , \mathfrak{S} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{V} relatives à une même abscisse.

Enfin, le vent produit sur les projectiles une déviation, à laquelle on donne plus particulièrement le nom de DÉRIVATION (*Voy. ce mot*), et dont il est nécessaire de tenir compte, surtout lorsqu'il s'agit de projectiles d'un faible poids ou d'une faible densité.

En reprenant l'examen des causes de la déviation des projectiles, on peut déterminer les circonstances les plus favorables à l'amplitude du jet et à la justesse du tir. Le relèvement dû au logement du boulet n'est jamais considérable; on le mesure à l'aide d'une feuille mince de plomb, placée à 8 ou 9 mètres de la bouche à feu, et que le projectile est obligé de traverser en y faisant un trou circulaire, dont le centre représente le point d'impact. La position de ce point par rapport à l'axe de la pièce fait connaître la direction de la vitesse initiale, pourvu qu'on ait soin de relever le point d'impact de la quantité dont la pesanteur a abaissé le projectile pendant le court trajet considéré. L'inclinaison

ainsi obtenue est d'environ $3\frac{1}{2}$ en moyenne pour les canons; les plus grands écarts ne dépassent pas $8\frac{1}{2}$ dans le sens vertical, et $4\frac{1}{2}$ dans le sens horizontal. Pour les obus, le relèvement moyen est de $10\frac{1}{2}$; les plus grands écarts ne dépassent pas $15\frac{1}{2}$.

Cette déviation n'en est pas moins un inconvénient; on ne peut y remédier, ou du moins l'empêcher de dépasser les limites indiquées, qu'en rebutant les bouches à feu qui présentent à l'emplacement du boulet ou de l'obus une dégradation trop marquée.

La déviation la plus considérable est, comme on l'a vu, celle qui est due au mouvement de rotation du projectile. Avant l'adoption des canons rayés et des projectiles oblongs, on avait essayé d'obliger le

boulet à prendre un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal; cette rotation produisant en effet une déviation verticale, il suffit pour y remédier de faire varier l'angle de tir. Pour obtenir ce mode de rotation, il faut placer le projectile de manière que son centre de gravité et son centre de figure soient tous deux dans le plan de tir. Et dans ce cas, il est préférable que le centre de gravité soit situé au-dessus du centre de figure; en effet, la rotation s'effectuant autour du centre de gravité, et la résultante des actions de la poudre passant par le centre de figure, cette force fait tourner le projectile dans le sens du bas en avant, et produit par conséquent une déviation du bas en haut, ou un relèvement, qui a pour effet d'accroître la portée, sauf dans le cas des bombes tirées sous une inclinaison supérieure à 45°. L'expérience a effectivement constaté une très-grande différence dans les portées des projectiles excentriques, suivant que l'un ou l'autre des deux centres occupe la position supérieure. Dans des expériences faites à Metz avec des obus de 22 centimètres, ayant une excentricité de 0^m,002, on a obtenu, suivant les charges, des portées de 518, 712, 1072 mètres lorsque le centre de gravité était au-dessous du centre de figure, tandis qu'avec les mêmes charges on a obtenu des portées de 950, 1163, 1557 mètres lorsque le centre de gravité était au-dessus. Avec les obus ordinaires, dont l'excentricité est comprise entre $\frac{1}{75}$ et $\frac{1}{125}$ du rayon,

les différences sont beaucoup moindres, mais elles sont encore très-sensibles. Elles sont inappréciables avec les boulets pleins, dont l'excentricité est très-faible. Avec les bombes, la différence est moindre qu'avec les obus, et elle change de sens selon que l'angle de tir est inférieur ou supérieur à celui qui correspond au maximum d'amplitude.

En adoptant les armes à canons rayés et les projectiles oblongs (*Voy. ARMES RAYÉES*), on a resserré la déviation entre de plus étroites limites, et le sens de la déviation est devenu constant pour chaque arme; mais on ne l'a pas fait disparaître. Le projectile sort animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe du canon lui-même, et sa figure est telle que ce mouvement est stable; en sorte que l'axe de rotation se transporte parallèlement à lui-même. Dans les premiers instants, la déviation est nulle: c'est une conséquence de ce qui a été dit plus haut; mais à mesure que la tangente à la trajectoire change de direction, l'axe de rotation fait avec cette tangente un angle de plus en plus grand, et la déviation se manifeste de plus en plus. Elle a toujours lieu dans le même sens, mais non dans une même direction, puisque cette direction est toujours perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la tangente. De plus, si, malgré les soins apportés à l'exécution de l'arme et du projectile, le mouvement ne s'effectue pas exactement autour d'un axe parallèle à celui du canon, ou si cet axe varie parce qu'il ne coïncide pas exactement avec l'un des axes principaux d'inertie, majeur ou mineur, la déviation peut en être augmentée.

Les expériences faites à La Fère en 1858 sur le canon-obusier rayé de 12, à la charge de 1 kilogramme, et sous différentes inclinaisons, ont donné les résultats suivants :

Portées.	Déviation à droite.	Durée du trajet.
671,0 ^m	1,28 ^m	2,6 ^s
990,7	3,79	3,9
1301,3	7,90	5,3
1726,6	15,97	7,3
2162,5	18,60	9,2
2448,5	42,76	11,1
2822,7	64,45	13,5
3179,5	96,55	"

Pour le canon-obusier rayé de 4, à la charge de 0^k,55, les résultats ont été ceux qui suivent :

Portées.	Déviation à droite.
262 ^m	0,75 ^m
608	3,05
890	5,42
1177	8,62
1527	15,67
1800	22,85
2110	32,22
2452	46,79
2730	86,80
3114	124,64

Les déviations sont un peu moindres pour les projectiles d'un fort calibre. D'après les expériences faites en Angleterre en 1850 sur un projectile creux oblong pesant 29 kilogrammes, et sous les angles de 5°, 10°, et 15°, on obtient les portées et les déviations suivantes, à la charge de 4^k,534 (10 livres) :

Portées.....	1946 ^m	3239 ^m	4279 ^m
Déviation.....	23 ^m	92 ^m	115 ^m
Durée du trajet.	6 ^s ,7	12 ^s ,2	17 ^s ,4

A la charge de 3^k,628 (8 livres) et sous les mêmes inclinaisons, on a obtenu :

Portées.....	1770 ^m	2919 ^m	3907 ^m
Déviation.....	14 ^m	57 ^m	97 ^m
Durée du trajet.	6 ^s ,4	11 ^s ,6	16 ^s ,4

Ne pouvant empêcher la déviation, qui croît, comme on le voit, avec la portée, on a cherché les moyens de la calculer. Pour cela, on a assimilé la force déviatrice à une force constante comme la pesanteur, ou plutôt à deux forces constantes, l'une verticale, l'autre horizontale. Remarquante que dans l'équation de la trajectoire normale (*Voy. BALISTIQUE*), savoir :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \sin \alpha,$$

le second terme du second membre exprime la déviation due à la pesanteur, on a cherché à représenter les deux composantes de la force déviatrice nouvelle à introduire, par

$$\frac{g'}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \sin \alpha \quad \text{et} \quad \frac{g''}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \cos \alpha.$$

En prenant $g' = 0,618$, on représente assez bien les déviations verticales; mais pour représenter les déviations horizontales il faut faire varier g'' avec les distances de 0,46 à 0,88. On a essayé de quelques autres formules; mais on n'a point encore réussi à représenter exactement les déviations observées. [Pour les armes rayées, il faut prendre $A = 0,018$ au lieu de 0,027.]

L'influence due aux variations de la densité de l'air est en général très-faible; cependant elle n'est pas toujours négligeable. La résistance de l'air variant proportionnellement à la densité, le coefficient A varie dans le même rapport; il en est par conséquent de même de la quantité αx

(Voy. BALISTIQUE); et par suite il en résulte une certaine variation de la fonction η , et des autres fonctions analogues qui entrent dans les formules de Balistique. On trouve qu'une variation de 15° dans la température et de 3 centimètres dans la hauteur du baromètre donne un abaissement de plus de $0^m,5$ dans la hauteur d'un boulet de 16 lancé à 600 mètres, à la charge de $\frac{1}{6}$ du poids du boulet. Une pareille différence mérite d'être prise en considération; et il serait à désirer que les résultats de toutes les expériences de Balistique fussent ramenées, par des corrections convenables, à une même température et à une même pression; elles seraient ainsi plus utilement comparables.

(Voy. le *Traité de Balistique*, de M. Didion; le *Traité d'Artillerie*, de M. Plobert, et les articles POINTAGE, TABLES DE TIR, PROBABILITÉ DU TIR.)

DEVIS DE CONSTRUCTION, ensemble des documents fournis par l'ingénieur pour la construction d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Ce devis est ainsi nommé pour le distinguer du *devis d'estimation*, qui fixe les prix de revient, et du *devis d'armement*, qui comprend les données relatives au nombre des bouches à feu, au nombre des hommes d'équipage, au poids de poudre, de projectiles et de vivres nécessaires pour une expédition dont la durée est déterminée, au tonnage, etc., etc. Le devis de construction règle les formes principales de la membrure; il se compose de plans et de tableaux numériques. Le navire est représenté par ses projections sur trois plans rectangulaires entre eux: le *longitudinal*, ou plan de symétrie du navire; le *latitudinal*, ou plan du maître-couple; enfin le plan *horizontal*. La projection longitudinale montre en vraie grandeur la quille, l'étrave, l'étambot, la section médiane de la voûte et du tableau, et un certain nombre de sections longitudinales de la coque faites à diverses distances du longitudinal par des plans verticaux parallèles à ce plan de symétrie; elle donne en projections l'estain, les lisses d'accastillage et les livets de ponts; les plans des couples de levée y sont représentés par des perpendiculaires à la quille, et les sections horizontales, ou lignes d'eau, par des parallèles à cette quille. La projection latitudinale montre en vraie grandeur les couples de levée; elle donne en projections l'estain et les lisses d'accastillage; les lisses de carène y sont représentées par des droites inclinées par rapport à la ligne médiane ou *ligne du milieu*; les sections longitudinales par des parallèles à la ligne du milieu, et les sections horizontales par des perpendiculaires à cette ligne. La projection horizontale montre en vraie grandeur les lignes d'eau, ou lignes d'intersection de la coque par des plans horizontaux; elle donne en projections les lisses d'accastillage, la barre d'hourdy et les arêtes de la voûte et du tableau qui lui sont parallèles; les plans des couples de levée y sont représentés par des perpendiculaires à l'axe de symétrie, et les sections longitudinales par des parallèles à cet axe.

La symétrie du navire par rapport au longitudinal permet de n'en représenter qu'une moitié dans la projection longitudinale et dans la projection horizontale. La projection latitudinale se place sur la projection longitudinale, de manière que la verticale qui dans la projection longitudinale représente le

maître-couple, serve de ligne du milieu dans la projection latitudinale. Comme il reste un côté libre sur la projection horizontale, on s'en sert pour placer le rabattement des lisses de carène. Les figures 1 à 5 montrent cette disposition. La figure 1 est la projection longitudinale; la figure 2 est la projection latitudinale de la *partie avant*, c'est-à-dire de la partie située en avant du maître-couple; la figure 3 est la projection longitudinale de la *partie arrière*; la figure 4 est la projection horizontale; la figure 5 donne le rabattement des lisses de carène. Sur la projection longitudinale, (fig. 1), la ligne MM indique le plan du maître-couple; les autres couples de levée sont représentés par les verticales qui correspondent aux chiffres 1, 2, 3, etc., tant à l'avant qu'à l'arrière; les lisses d'accastillage sont représentées en L_1, L_2, L_3 ; les sections longitudinales en S_1, S_2, S_3 ; l'estain en EF; la ligne de flottage en XX ou H_1, H_1 , les lignes d'eau en H_2, H_2, H_3, H_3 , etc. Sur la projection latitudinale (fig. 2 et 3), le maître-couple est représenté en C, les couples d'avant en c_1, c_2, c_3 , etc., à droite de la ligne du milieu MM, et les couples d'arrière en c_1, c_2, c_3 , etc., à gauche de la ligne du milieu; l'estain en E'E'; les lignes d'eau par les mêmes droites que sur la figure 1; on n'a pas figuré les parallèles à MM qui devraient représenter les sections longitudinales. Quant aux lisses de carène, leur partie avant n'appartient pas au même plan que leur partie arrière; ces deux plans se coupent suivant la tangente à la lisse au point où elle rencontre le maître-couple; les plans de leur partie avant sont représentés par les droites f, l_1, l_2, l_3, l_4 (fig. 2) situées à droite de la ligne du milieu, et les plans de leur partie arrière par les droites affectées des mêmes lettres (fig. 3) à gauche de la ligne du milieu. Sur la projection horizontale (fig. 4), les lisses d'accastillage sont représentées en L', L'', L''' ; les lignes d'eau en H', H'', H''' ; et les sections longitudinales en S', S'', S''' ; les plans des couples sont figurés par des perpendiculaires à l'axe de symétrie AB, correspondant aux chiffres 1, 2, 3, etc., pour l'avant comme pour l'arrière. Enfin les rabattements des lisses de carène sont représentés au-dessous de AB, savoir en F pour la fausse-lisse, et en R_1, R_2, R_3, R_4 pour les autres lisses.

L'échelle nécessairement réduite que nous avons été obligés d'adopter n'a pas permis de figurer les projections de la membrure de l'arcasse; elle est donnée dans les devis ordinaires qui s'exécutent généralement au 50^e .

Les données numériques nécessaires pour construire l'épure sont fournies sous forme de tableaux. On commence ordinairement par le tracé du maître-couple. Un premier tableau donne les coordonnées des différents points de son contour par rapport à la ligne du milieu, et à l'horizontale passant par le dessus de la quille; c'est-à-dire que ce tableau donne, en regard des hauteurs au-dessus de quille inscrites dans une première colonne, les demi-largeurs horizontales correspondantes. — Après avoir tracé le maître-couple sur le latitudinal, on figure sur le longitudinal la quille, dont la longueur est fournie par un deuxième tableau contenant diverses données générales; puis on élève sur cette quille, à des distances fournies par le même tableau, deux perpendiculaires appelées *perpendiculaire avant* et *perpendiculaire arrière*, lesquelles passent respecti-

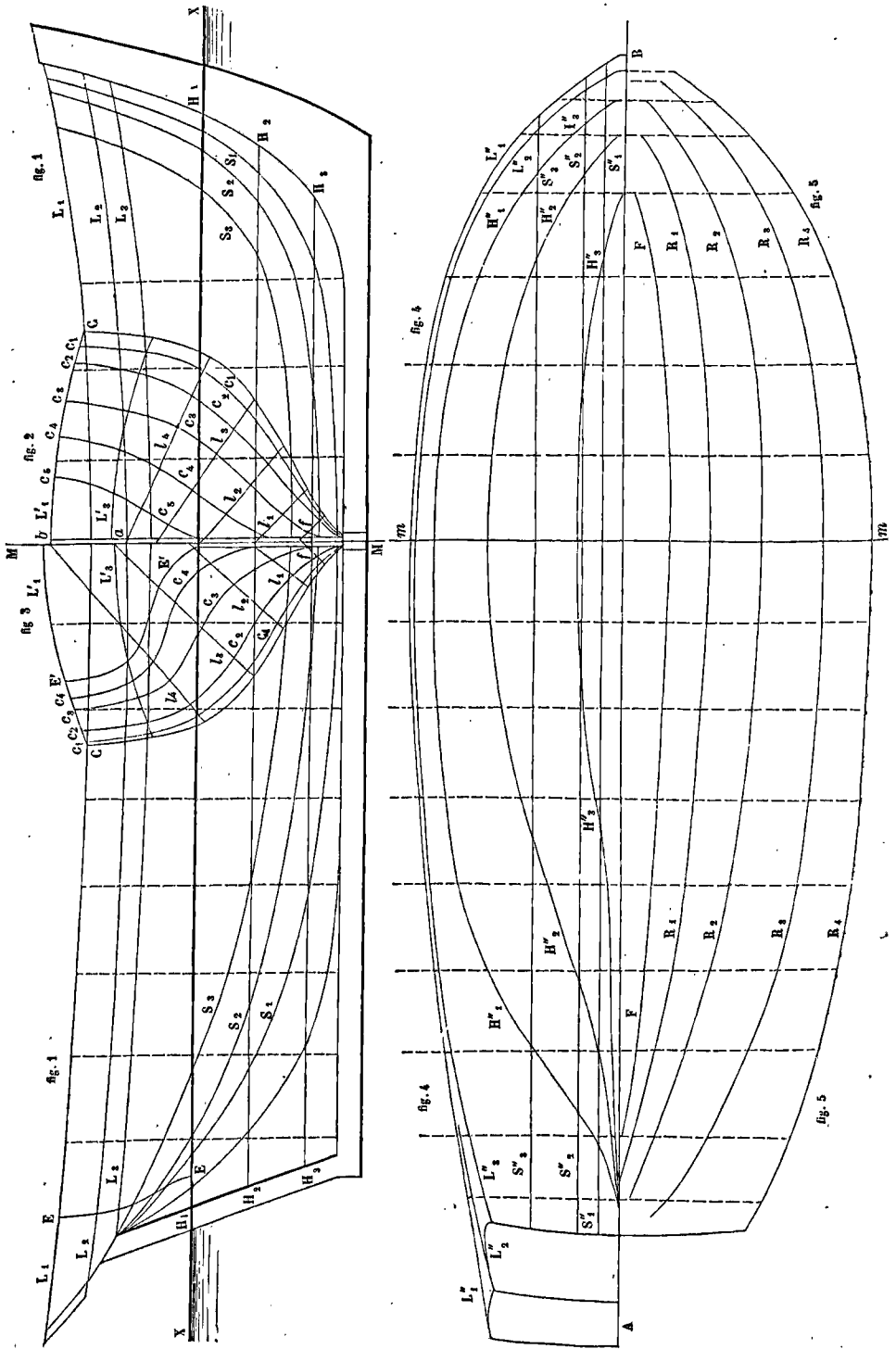


Fig. 1, 2, 3, 4 et 5.

vement par les points où le trait intérieur de la râblure d'étrave et de la râblure d'étambot rencontre le plan de flottaison en charge. Pour tracer l'étrave, on se sert d'un troisième tableau, qui donne, par rapport à la perpendiculaire avant et au dessous de quille, les coordonnées de l'arête extérieure de l'étrave. Un petit tableau spécial, n° 4, donne la quête de l'étambot, et sa hauteur totale, ce qui suffit pour le tracer. On distribue ensuite sur la quille les plans de gabariage des couples de levée, d'après un cinquième tableau qui donne la distance de ces plans soit au plan du maître-couple, soit à la perpendiculaire arrière ou avant.

Le tableau n° 1 fournit, indépendamment des données dont nous avons parlé ci-dessus, les hauteurs au-dessus de quille des points où les lisses de carène rencontrent le contour du maître-couple; un tableau spécial, n° 6, donne les hauteurs au-dessus de quille des axes de ces lisses, c'est-à-dire les hauteurs des points où ces lisses rencontrent la ligne du milieu sur le latitudinal; on a dès lors les données nécessaires pour tracer ces lisses. — Les projections des couples de levée sur le latitudinal peuvent se tracer à l'aide de tableaux analogues au tableau n° 1. Un tableau, n° 7, relatif à la projection latitudinale, peut servir également à obtenir ces couples ou à les vérifier; il a pour titre : *Ouverture des couples suivant l'obliquité des lisses*; c'est-à-dire qu'il donne, pour chaque lisse, les distances comprises entre son axe, situé sur la ligne du milieu du latitudinal, et les points où elle rencontre les différents couples; ce tableau se divise naturellement en deux parties, l'une correspond à l'avant du navire, l'autre correspond à l'arrière. Mais ce même tableau est en outre nécessaire pour construire sur le plan horizontal le rabattement des lisses. Pour obtenir ce rabattement, il suffit en effet de prendre (fig. 2 et 3) les longueurs f , l_1 , l_2 , l_3 , etc.; et de les porter (fig. 5) sur les perpendiculaires à AB qui représentent les plans des différents couples. Il y a toutefois une attention à avoir : comme une même lisse a deux axes, suivant qu'il s'agit de sa partie avant ou de sa partie arrière, en opérant comme nous venons de le dire, les deux rabattements ne se raccorderaient pas. Pour les faire raccorder, on opère de la manière suivante :

Pour fixer les idées, nous supposons qu'il s'agit de la quatrième lisse. Soit TT (fig. 6) la tan-

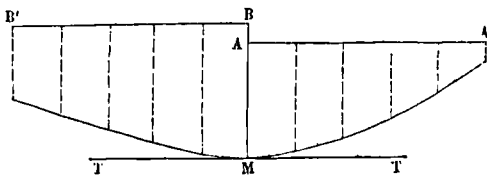


Fig. 6.

gente à cette lisse au point M où elle rencontre le maître-couple. Perpendiculairement à cette tangente prenons la longueur MA égale à l_4 (fig. 2) et la longueur MB égale à l_4 (fig. 3); et par les points A et B menons AA' et BB' parallèles à TT; ces parallèles représenteront dans le rabattement l'axe d'avant et l'axe d'arrière de la lisse considérée. Perpendiculairement à l'axe AA', portons, à des distances successives égales à celles qui séparent les plans de

gabariage des couples de levée, des distances respectivement égales à celles qui séparent le point a (fig. 2) de ceux où la lisse l_4 rencontre les couples c_1 , c_2 , c_3 , etc.; puis, perpendiculairement à l'axe BB', et sur les traces successives des couples, portons de même des distances respectivement égales à celles qui séparent le point b (fig. 3) de ceux où la lisse l_4 , représentée sur cette figure, rencontre les couples d'arrière. Nous aurons ainsi deux séries de points appartenant aux rabattements des parties avant et arrière de la quatrième lisse; nous les joindrons par un trait continu, et les deux rabattements ML et ML₂ se raccorderont au point M, où ils devront être tous deux tangents à TT.

C'est pour ne pas interrompre l'exposé relatif aux lisses de carène que nous avons parlé tout de suite de leur rabattement; mais auparavant on trace d'ordinaire les lisses d'accastillage. Le devis fournit pour chacune d'elles un tableau qui donne, pour chaque angle, la hauteur au-dessus de quille du point où il est rencontré par la lisse, et la distance de ce point à la ligne du milieu; cette seconde donnée n'est pas indispensable quand les couples sont déjà tracés sur le latitudinal, mais la surabondance des données offre des moyens de vérification indispensables. A l'aide de ces tableaux, on tracera aisément les lisses d'accastillage sur le latitudinal; les hauteurs des points où elles rencontrent ces couples suffiront pour tracer la projection de chaque lisse sur le longitudinal; et les distances de ces mêmes points à la ligne du milieu, ou au plan de symétrie du navire, suffiront également pour tracer la projection horizontale de ces mêmes lisses.

On a vu que les sections longitudinales sont représentées sur le latitudinal par des parallèles à la ligne du milieu. Pour avoir leur projection sur le longitudinal, on prendra sur le latitudinal les hauteurs au-dessus de quille des points où la trace verticale de chacune d'elles rencontre les couples successifs, et on portera ces hauteurs à partir de la quille sur les verticales qui représentent ces couples dans le longitudinal.

On a vu de même que les lignes d'eau sont représentées sur le latitudinal comme sur le longitudinal par des droites horizontales. Pour avoir leur projection horizontale, on prendra sur le latitudinal les distances de la ligne du milieu aux points où chacune d'elles rencontre les couples successifs, et l'on portera ces distances à partir de AB (fig. 4), sur les perpendiculaires à cette ligne qui représentent ces divers couples. Ces lignes d'eau sont ce que l'on appelle les lignes d'eau *hors membres*, c'est-à-dire abstraction faite du bordage. On verra à l'article DÉPLACEMENT comment on obtient les lignes d'eau *hors bordages*, dont la connaissance est nécessaire pour évaluer le volume d'eau déplacé par le navire.

Un tableau spécial fournit les données relatives à la barre d'hourdy; elles comprennent: la hauteur au-dessus de quille de la *ligne droite* de la barre, c'est-à-dire de la corde de son arête supérieure interne, la distance de cette même corde à la perpendiculaire arrière, la demi-longueur de cette même corde, le bouge vertical et le bouge horizontal de l'arête considérée, la largeur de la barre dans le sens de la longueur du navire et son épaisseur dans le sens vertical. On a ainsi les éléments nécessaires

pour placer la barre sur le latitudinal et sur le plan horizontal, et pour tracer ses projections par la méthode du QUART DE NONANTE (*Voy.* ce mot).

De ces deux projections on déduirait aisément la projection sur le longitudinal; mais, à moins que l'épure ne soit faite à une grande échelle, cette projection est sensiblement droite, en sorte qu'il suffit d'en déterminer les extrémités. A l'aide des données fournies par le tableau, on peut tracer la section de la barre par le longitudinal, et en déduire les projections des trois autres arêtes, qui sont parallèles à la première. On opérerait d'une manière analogue pour les autres barres; leurs projections sur le longitudinal sont des droites parallèles entre elles, et ordinairement parallèles à la quille (*Voy.* BARRES D'ARCASSE).

La section longitudinale de la voûte et du tableau est déterminée d'une part par la hauteur au-dessus de quille des extrémités de la jambette et d'un point pris vers la partie moyenne de la quenouillette, et d'un autre côté par les distances de ces points à la perpendiculaire arrière.

L'estain est donné par la distance de son pied à la perpendiculaire arrière; comme il aboutit à l'extrémité de la barre d'hourdy, sa projection horizontale, qui est une ligne droite, se trouve ainsi déterminée. On en déduit ses projections verticales par la méthode qui va être exposée pour les couples dévoyés.

On exécute ordinairement le tracé de la membrure comme si tous les couples étaient droits; et ce n'est qu'après coup qu'on dévoie quelques-uns d'entre eux, en faisant tourner le plan vertical qui contient chaque branche autour de la verticale du point où cette branche rencontre la lisse du plat bord. Il suffit alors pour déterminer la position du couple dévoyé de se donner la distance de son pied à la perpendiculaire avant ou à la perpendiculaire arrière. Mais il faut ensuite obtenir le contour réel du couple

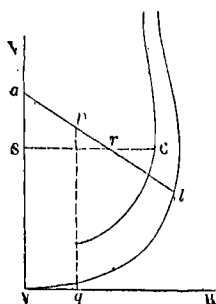


Fig. 7.

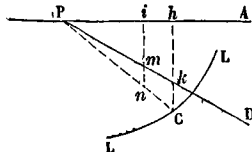


Fig. 8.

rabattu sur le latitudinal; on cherche pour cela les points où ce contour rencontre les lisses. Soit *al* (fig. 7) la trace du plan d'une lisse de carène sur le latitudinal, et *LL* (fig. 8) le rabattement de cette lisse sur le plan horizontal. Soit *PD* la trace horizontale du couple dévoyé. Considérons un point quelconque *M* du contour du couple, dont la projection horizontale est *m*; abaissons *mi* perpendiculaire sur l'axe de rabattement *PA*; si nous menons la verticale *pq* à une distance de la ligne du milieu *VV* égale à *mi*, nous aurons la projection sur le latitudinal de la verticale du point *m*. Cette projection rencontre en *p* la trace *al* du plan de la lisse; ce point *p* est donc la projection d'un point commun au plan

de la lisse et au plan du couple; d'ailleurs ce point commun étant sur la verticale du point *m*, est dans le plan vertical dont la trace est *im*; et il est distant de l'axe de la lisse d'une quantité égale à *ap*; si donc on prend sur la direction *im* une longueur *in* égale à *ap*, on aura en *n* le rabattement de ce point commun. L'intersection du plan de la lisse et du plan du couple, supposée rabattue sur le plan horizontal passe donc en *n*; mais le point *P* est évidemment un point de ce rabattement; en joignant *Pn* on aura donc cette intersection rabattue; et en prolongeant la ligne de jonction jusqu'à la rencontre de *LL*, on aura en *C* le rabattement du point où la lisse rencontre le contour du couple.

Cela posé, abaissons sur *PA* la perpendiculaire *Ch*, qui rencontre *PD* en un point *k*; cette perpendiculaire exprimera la distance du point *C* à l'axe de la lisse; si donc nous la portons de *a* en *r*, nous aurons la projection *r* du point *C* sur le latitudinal. Lorsque le plan de la lisse reprendra sa position, le point *C* décrivant une circonférence dont le plan est vertical et *a* pour trace horizontale *Ch*, viendra se projeter horizontalement en *k*; en sorte que la distance du point *C* à l'axe du couple, c'est-à-dire à sa trace verticale, est exprimée par *Pk*. Si maintenant nous faisons tourner le plan du couple autour de sa trace verticale pour le rabattre sur le latitudinal, la projection verticale du point *C* décrira une horizontale passant par *r*; et ce point *C* viendra se rabattre sur cette horizontale en un point *C₁*, distant de la ligne du milieu d'une quantité *sC₁* égale à *Pk*; et le point *C₁* sera un point du rabattement du couple. On obtiendra de la même manière le rabattement de tous les points où le contour du couple rencontre les lisses de carène. Quant aux points où il rencontre les lisses d'accastillage, ils s'obtiendront beaucoup plus simplement. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de la lisse dont les projections sont *L₂* et *L₃* (fig. 2 et 4). On déterminera le point d'intersection de la trace horizontale du couple avec la projection horizontale *L₃*; la distance du point d'intersection à l'axe *AB* exprimera la distance du point cherché au longitudinal; menant donc (fig. 2) une parallèle à la ligne du milieu *MM*, à la distance dont on vient de parler, on cherchera le point où elle rencontre la projection verticale *L₃*, et l'on aura la projection latitudinale du point cherché. Le rabattement sur le latitudinal se fera ensuite comme il vient d'être dit plus haut.

On trouvera dans les ouvrages spéciaux les détails de charpente qui se rapportent aux aboutissements; nous ne saurions en parler ici. (*Voy.* le *Cours de construction navale* de l'école de Brest, et l'ouvrage de M. Viel ayant pour titre : *Construction des bâtiments de mer.*)

DIAGRAMME (du grec διά, au travers, et γράμμα, écrit, caractère), ligne tracée sur le papier par les appareils à indications continues, et particulièrement par l'INDICATEUR DE WATT (*Voy.* ce mot. Voyez aussi DYNAMOMÈTRES, APPAREIL DE M. MORIN).

DIAMÈTRE APPARENT, angle sous lequel le diamètre d'un astre est vu de la Terre.

Le diamètre apparent du Soleil ou de la Lune s'observe avec la lunette méridienne; le temps qui s'écoule entre le passage du bord occidental de l'astre sous le fil du réticule, et le passage de son bord oriental sous le même fil, converti en degrés à

point b comme centre avec ba pour rayon on décrit l'arc aa_1 terminé à cette parallèle; c'est la projection de l'arc décrit par le point a, a' lui-même, et a_1 est sa nouvelle projection horizontale. D'ailleurs, dans ce mouvement, le point a, a' demeurant à la même distance au-dessus du plan horizontal, la projection verticale de l'arc qu'il décrit est une parallèle à la ligne terre; on obtiendra donc la nouvelle projection verticale du point en menant par le point a' une parallèle à XY , et par le point a_1 une perpendiculaire à cette ligne; le point de rencontre a'_1 de ces deux droites sera la projection demandée. Si donc on joint $a'_1 b'$, on aura la distance des deux points. Cette construction est simple, et elle a l'avantage d'occuper moins de place sur l'épure.

La figure 1 suppose les deux points donnés au-dessus du plan horizontal. Si l'un d'eux était situé au-dessous, sa verticale se rabattrait, dans la première construction, en sens inverse de l'autre, comme le montre la figure 2. Les constructions in-

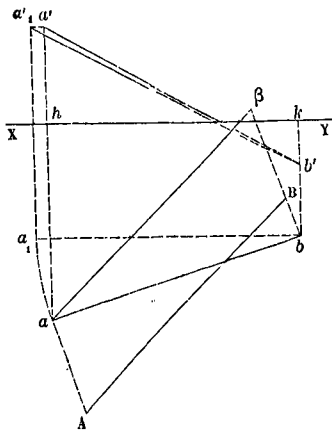


Fig. 2.

diquées ci-dessus demeureraient d'ailleurs applicables. La distance demandée est toujours la droite AB , ou la droite $a\beta$, ou la droite $a'_1 b'$.

Les constructions s'appliqueraient encore si les deux points étaient situés tous deux au-dessous du plan horizontal.

On peut se proposer ce problème inverse : *Étant donnée une droite et un point sur cette droite, trouver sur la droite un second point qui soit distant du premier d'une longueur donnée.* La droite étant donnée par deux de ses points a, a' et b, b' , on peut, comme on l'a indiqué plus haut, rabattre cette droite en AB (fig. 1) sur le plan horizontal. Si A est le point à partir duquel la distance donnée doit être comptée, on prendra sur AB , à partir du point A , une longueur AM égale à cette distance; le point M sera le rabattement du point cherché. Pour relever ce point, il suffit d'abaisser sur ab une perpendiculaire Mm , le point m est la projection horizontale du point cherché, et si l'on mène par le point m une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de $a'b'$, on obtient en m' la projection verticale correspondante.

Le problème a évidemment deux solutions, puis-

que la distance donnée peut être portée à partir du point A dans le sens AB ou en sens contraire.

II. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE. La méthode générale pour construire cette distance consiste à déterminer le plan qui contient la droite et le point, à le rabattre sur l'un des plans de projection, à abaisser une perpendiculaire du point rabattu sur la droite rabattue, et à relever (Voy. RABATTEMENT) cette perpendiculaire.

La figure 3 représente la suite de ces opérations.

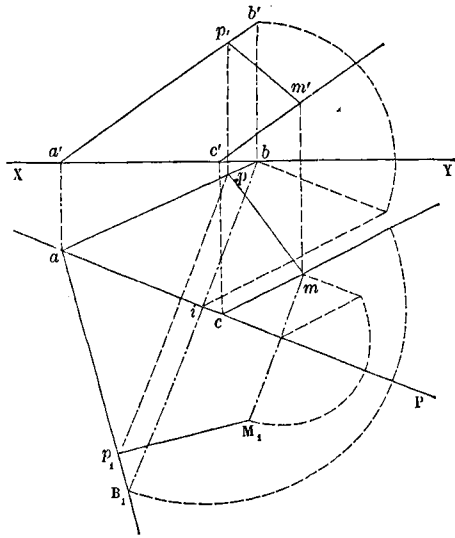


Fig. 3.

La droite donnée a pour projections $ab, a'b'$; le point donné a pour projections m, m' . Par ce point on mène une droite $mc, m'c'$ parallèle à la première, et l'on détermine sa trace horizontale c . On joint ac , qui est la trace horizontale du plan contenant la droite et le point. On rabat ce plan sur le plan horizontal. Le point b, b' vient en B_1 ; le point a ne change pas; la droite donnée se rabat donc suivant aB_1 . Le point donné se rabat en M_1 . Du point M_1 on abaisse sur aB_1 la perpendiculaire $M_1 p_1$, qui est la distance demandée. Il reste à relever cette perpendiculaire. Pour cela on abaisse du point p_1 une perpendiculaire sur ac ; la projection horizontale du point p_1 relevé doit se trouver sur la projection horizontale ab de la droite donnée, elle se trouve donc à leur rencontre en p . Par le point p on élève une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la projection verticale $a'b'$ de la droite donnée, et l'on a la projection verticale p' du point p_1 relevé. Joignant enfin mp et $m'p'$, on a les projections de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée. — Comme vérification, la distance des points m, m' et p, p' doit être égale à $M_1 p_1$.

Au lieu de mener par le point m, m' une parallèle à la droite donnée, on pourrait joindre le point m, m' à un point quelconque de cette droite; on aurait ainsi une seconde droite située dans le plan déterminé par la droite donnée et par le point donné. La trace horizontale de cette seconde droite appartiendrait à la trace horizontale de ce plan. Cette remar-

que peut être utile quand le point c se trouve situé hors du cadre de l'épure.

III. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN. On pourrait abaisser du point donné une perpendiculaire sur le plan donné, en déterminer le pied, et ensuite la vraie grandeur. Mais cette solution, bien qu'exacte, n'est pas dans l'esprit de la Géométrie descriptive qui cherche autant qu'il est possible à rendre la solution manifeste aux yeux.

La meilleure méthode consiste à mener par le point donné un plan perpendiculaire à l'une des traces du plan donné, à la trace horizontale par exemple; ce plan auxiliaire coupe le plan donné suivant une droite dont la distance au point donné est précisément celle que l'on cherche, et en rabattant ce plan auxiliaire, la distance dont il s'agit s'obtient et se voit immédiatement. La figure 4 montre la suite des opérations.

Le plan donné a pour traces αP et $\alpha P'$; le point

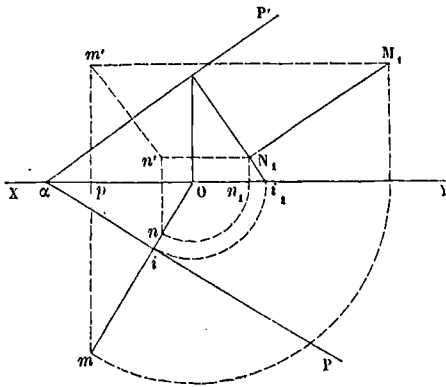


Fig. 4.

donné a pour projections m et m' . La trace du plan mené par le point m, m' perpendiculairement à αP est une droite miO perpendiculaire à αP , et sa trace verticale est la droite Oh perpendiculaire à la ligne de terre. La droite qui va du point i au point h dans l'espace, c'est-à-dire l'intersection du plan auxiliaire et du plan donné, contient le pied de la perpendiculaire abaissée du point m, m' sur le plan donné. Faisons tourner le plan auxiliaire autour de sa trace Oh pour le rabattre sur le plan vertical, les points i et m viendront sur la ligne de terre en i_1 et m_1 , en décrivant des arcs de cercle ayant le point O pour centre. L'intersection des deux plans se rabattra donc suivant hi_1 ; et le point m, m' se rabattra sur la verticale de m_1 à une hauteur égale à $m'p$, c'est-à-dire à l'intersection de m_1M_1 perpendiculaire à XY et de $m'M_1$ parallèle à cette ligne. Abaissons du point M_1 sur hi_1 la perpendiculaire M_1N_1 , ce sera la distance demandée. Il reste à relever le point N_1 . Pour cela, projetons-le d'abord en n_1 sur la ligne de terre; puis remarquons que si l'on ramène le plan auxiliaire dans sa position primitive, le point N_1 décrira un arc de cercle horizontal, ayant pour projection verticale une parallèle N_1n' à la ligne de terre; les projections du point N_1 relevé seront donc n et n' . Comme vérification, la droite $m'n'$ doit être perpendiculaire à $\alpha P'$, et la distance des points m, m' et n, n' doit être égale à M_1N_1 .

On pourrait, à l'aide de constructions analogues, résoudre ce problème inverse : Trouver sur la verticale d'un point m un point tel, que sa distance à un plan donné $\alpha P'$ soit égale à une longueur donnée. Menons, comme ci-dessus, par le point m un plan auxiliaire perpendiculaire à αP , et rabattons-le sur le plan vertical; l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan donné se rabattra encore suivant hi_1 , et la verticale du point m viendra se placer suivant m_1x . Si l'on mène une parallèle à hi_1 à une distance de cette droite égale à la longueur donnée, le point M_1 où cette parallèle rencontrera m_1x sera le rabattement du point cherché. Pour obtenir la projection verticale correspondante à m , il suffit de mener par le point M_1 une parallèle à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre en m' de la verticale du point m .

Il y a deux solutions, attendu que l'on peut mener deux parallèles à hi_1 à une distance donnée de cette droite, l'une au-dessus, l'autre au-dessous.

IV. DISTANCE DE DEUX DROITES PARALLÈLES. La distance de deux droites parallèles est la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de l'une d'elles sur l'autre. On prendra donc un point quelconque sur l'une des deux droites, et l'on appliquera la construction de la figure 3.

V. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES. Il existe plusieurs solutions de ce problème. On peut d'abord exécuter pas à pas, à l'aide de la méthode des projections, la construction indiquée dans les éléments de Géométrie. (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, n° 427). Cette solution est peu élégante, et elle n'est point dans l'esprit de la Géométrie descriptive, qui veut que le résultat se manifeste clairement à la seule inspection de l'épure.

On peut mener par chaque droite un plan parallèle à l'autre, puis un plan perpendiculaire au premier; l'intersection des deux derniers plans est la droite que l'on cherche, car il résulte de la construction qu'elle est perpendiculaire aux deux droites données. Cette solution, un peu plus simple que la précédente, donne lieu à une épure moins confuse quand on dirige convenablement les constructions. On trouvera cette solution exposée dans notre *Géométrie* déjà citée, n° 534.

On peut, comme l'a indiqué Olivier, changer d'abord de plan vertical (Voy. CHANGEMENT DE PLANS) et prendre le nouveau parallèle à l'une des deux droites; puis amener cette droite, par une rotation (Voy. ROTATIONS [Méthode des]), à devenir perpendiculaire au plan horizontal. Dans cette situation la solution se manifeste d'elle-même. Car, si $ab, a'b'$ (fig. 5) sont les projections de la seconde droite, et $c, c'd'$ celles de la première, la plus courte distance est une horizontale qui se projette horizontalement suivant une parallèle à elle-même; et comme elle doit être perpendiculaire au plan vertical contenant la seconde droite, sa projection est la perpendiculaire cp abaissée du point c sur la projection horizontale de la seconde droite. Par suite, l'une des extrémités de la plus courte distance cherchée, est le point p, p' ; et pour obtenir l'autre extrémité, il suffit de mener par le point p' une parallèle $p'q'$ à la ligne de terre; les points c et q' sont les projections de l'extrémité cherchée. Cette solution n'a d'autres inconvénients que ceux

qu'entraîne l'emploi simultané d'un changement de plan et d'une rotation.

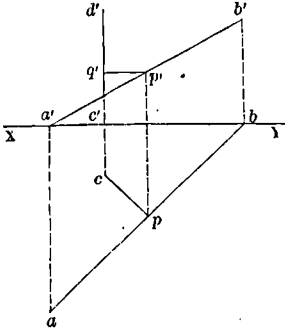


Fig. 5.

La solution qui prévaut aujourd'hui (Voy. le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie) n'emploie qu'un simple changement de plan vertical.

Remarquons d'abord que si les deux droites données avaient des projections verticales parallèles, la plus courte distance s'obtiendrait avec la plus grande facilité. Soient en effet $ab, a'b'$ et $cd, c'd'$ (fig. 6) les droites données dont les projections ver-

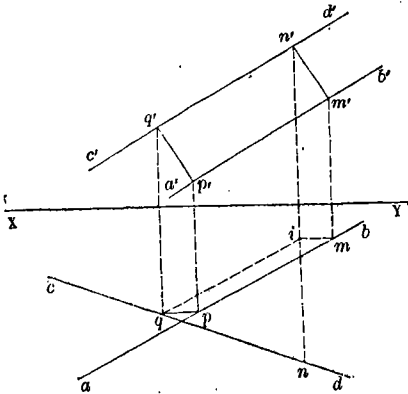


Fig. 6.

icales $a'b'$ et $c'd'$ sont parallèles. Les deux droites se trouvant dans deux plans parallèles perpendiculaires au plan vertical, leur plus courte distance est perpendiculaire à ces deux plans, et par conséquent parallèle au plan vertical; elle doit donc se projeter en vraie grandeur sur le plan vertical, et sa projection horizontale doit être parallèle à la ligne de terre. Si l'on mène une perpendiculaire commune $m'n'$ aux deux projections verticales, on aura la grandeur de la plus courte distance cherchée. Mais les points m et n correspondants à m' et à n' n'étant pas, en général, sur une parallèle à la ligne de terre, il faut remplacer la perpendiculaire commune $m'n'$ par une autre pour laquelle cette condition soit remplie. Or, si l'on mène iq parallèle à ab et qp parallèle à XY , la figure $miqp$ étant un parallélogramme, on aura $pq = mi$. Je dis que les points p et q sont les projections horizontales des extrémités de la perpendiculaire commune

aux deux droites proposées. Élevons, en effet, la verticale pp' ; puis faisons glisser la droite $m'n'$ parallèlement à elle-même, sur les droites $a'b'$ et $c'd'$. Quand le point m' sera venu en p' , la verticale mm' aura pris la direction $p'p$; le point n' sera venu en un point q' , pied de la perpendiculaire abaissée de p' sur $c'd'$, et la verticale $n'n$ viendra passer à une distance du point p égale à mi ; elle passera donc par le point q . Donc pq et $p'q'$ sont les projections de la plus courte distance. Elles remplissent, comme on voit, la condition d'être, l'une perpendiculaire à $a'b'$ et à $c'd'$, l'autre parallèle à la ligne de terre.

Cela posé, quand les droites données sont quelconques, la méthode consiste à prendre un nouveau plan vertical sur lequel les deux droites se projettent parallèlement. Il suffit pour cela de mener par un point de la seconde droite une parallèle à la première, de déterminer la trace horizontale du plan qui contient cette parallèle et la seconde droite, et de prendre la nouvelle ligne de terre per-

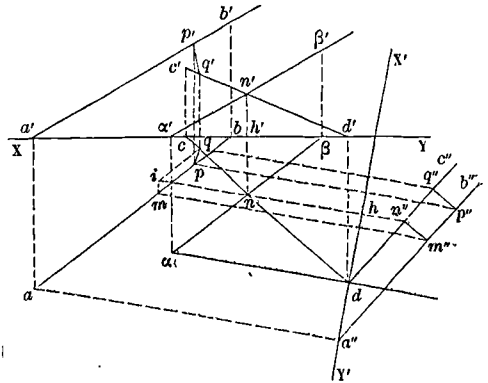


Fig. 7.

pendiculaire à cette trace. La figure 7 représente la suite des opérations.

Les droites données sont $ab, a'b'$ et $cd, c'd'$. Par un point n, n' de la seconde on mène une parallèle $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ à la première. On détermine les traces horizontales α et d de ces deux droites, et on joint αd . Par le point d on fait passer une droite $X'Y'$ perpendiculaire à αd , c'est la nouvelle ligne de terre. Le nouveau plan vertical est supposé rabattu à droite de $X'Y'$. Le point n, n' se projette en n'' sur ce plan à une distance n, h' égale à $n'h$. Ce point n'' est un point de la trace verticale du plan des deux droites $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ et $cd, c'd'$, puisque c est la projection d'un point de ce plan sur un plan qui lui est perpendiculaire. En joignant donc dn'' on aura la projection verticale commune des droites dont on vient de parler. Projétons la trace α de la première droite donnée, en a'' sur la nouvelle ligne de terre : ce sera un point de la nouvelle projection verticale de la première droite; en menant donc $a''b''$ parallèle à dc'' , on aura cette projection. La question se trouve ainsi ramenée, comme nous l'avions dit, à trouver la plus courte distance de deux droites dont les projections verticales sont parallèles. On appliquera donc les constructions de la figure 6, et l'on obtiendra en $pq, p''q''$ les projections de la plus courte distance. On en déduira facilement la pro-

jection verticale primitive $p'q'$ de cette plus courte distance. Quant à sa longueur, elle est exprimée par $p'q'$, comme on l'a vu.

Si les projections horizontales des droites données étaient parallèles, on emploierait une construction analogue à celle de la figure 6.

Si l'une des deux droites données était la ligne de terre, la méthode ci-dessus développée serait applicable, mais l'épure se simplifierait. — Soit ab , $a'b'$ (fig. 8) la droite donnée. Menons par sa trace

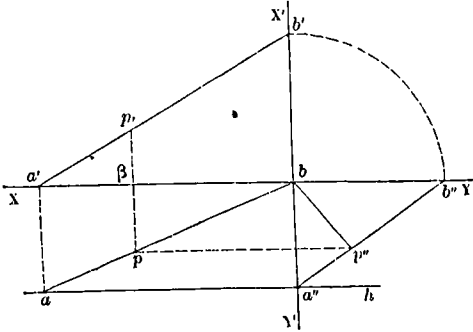


Fig. 8.

horizontale a une parallèle ah à la ligne de terre : ce sera la trace d'un plan mené par ab , $a'b'$ parallèlement à la ligne de terre. Prenons bb' pour nouvelle ligne de terre. Le point a se projettera en a'' sur le nouveau plan vertical; le point b' s'y projettera en b'' , à une distance $b''b = b'b$ de la nouvelle ligne de terre. La nouvelle projection verticale de la droite donnée sera donc $a''b''$. Quant à la nouvelle projection verticale de la ligne de terre, elle se réduira au point b . La plus courte distance cherchée se projettera donc suivant la perpendiculaire bp'' . Pour obtenir les projections de l'extrémité de la plus courte distance correspondante à p'' , il suffira de mener $p''p'$ parallèle à l'ancienne ligne de terre, et pp' perpendiculaire à cette ligne. Quant à l'autre extrémité, elle sera évidemment sur la ligne de terre XY au point β où elle est rencontrée par un plan perpendiculaire mené par p , p' .

VI. DISTANCES D'UNE DROITE A UN PLAN PARALLÈLE. Cette distance est celle d'un point quelconque de la droite donnée au plan parallèle donné. On pourra donc appliquer la construction de la figure 4.

VII. DISTANCE DE DEUX PLANS PARALLÈLES. On pourrait prendre à volonté un point sur l'un des deux plans, abaisser de ce point une perpendiculaire sur l'autre, en déterminer le pied, et en construire par suite la vraie longueur. Mais cette méthode ne serait pas conforme à l'esprit de la Géométrie descriptive. La suivante, analogue à celle de la figure 4, montre plus clairement le résultat.

Soient $P\alpha P'$, $R\beta R'$ (fig. 9) les deux plans parallèles donnés. Coupons-les par un plan vertical auxiliaire perpendiculaire à leurs traces horizontales. Les intersections seront des droites parallèles dont la distance sera précisément celle que l'on cherche. Soit $\alpha OP'$ ce plan auxiliaire. Rabattons-le sur le plan vertical en le faisant tourner autour de OP' . Les points a et b où sa trace horizontale coupe

celles des deux plans donnés viendront en a_1 et b_1 en décrivant des arcs de cercle dont O est le centre. Les deux intersections se rabatront donc suivant les droites $a_1 P'$ et $b_1 R'$, ces droites devront être paral-

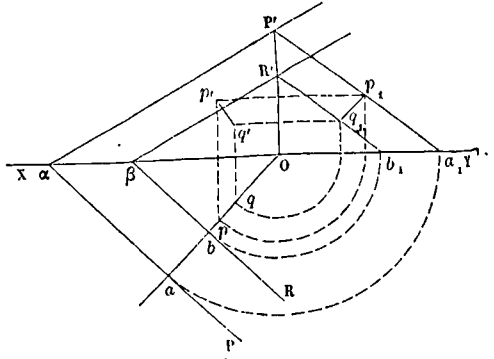


Fig. 9.

lèles. — Menons-leur une perpendiculaire commune $p_1 q_1$; ce sera la distance demandée. Il reste à relever les points p_1 et q_1 . Pour cela, on projettera d'abord le point p_1 sur la ligne de terre, et l'on ramènera cette projection en p par un arc de cercle décrit du point O ; le point p sera la projection horizontale du point p_1 relevé. Sa projection verticale sera en p' , à la rencontre de la droite pp' , perpendiculaire à la ligne de terre, avec la droite $p_1 p$ parallèle à XY ; car, lorsqu'on ramène le plan auxiliaire dans sa position primitive, la hauteur du point p_1 au-dessus du plan horizontal ne change pas. On obtiendra de la même manière les projections q et q' du point q_1 relevé. Et les droites ppq , $p'q'q'$ seront les projections de la perpendiculaire commune menée aux deux plans. Comme vérification, $p'q'$ devra être perpendiculaire aux traces verticales $\alpha P'$ et $\beta R'$.

Une construction analogue permet de résoudre ce problème inverse : *Mener un plan parallèle à un plan donné, à une distance donnée du premier.* Soit $P\alpha P'$ le plan donné. On le coupera, comme ci-dessus, par un plan auxiliaire $\alpha OP'$ perpendiculaire à sa trace horizontale, et l'on rabattra ce plan auxiliaire sur le plan vertical. L'intersection du plan auxiliaire avec le plan donné se rabattra en $a_1 P'$. Par un point quelconque p_1 de cette intersection rabattue on lui élèvera une perpendiculaire $p_1 q_1$ égale à la distance donnée, et par le point q_1 on mènera $b_1 R'$ parallèle à $a_1 P'$; ce sera le rabattement de l'intersection du plan auxiliaire avec le plan demandé. Il en résulte que le point R' sera un point de sa trace verticale. Pour avoir un point de sa trace horizontale, on ramènera le plan auxiliaire dans sa position primitive; le point b_1 viendra en b sur αO ; le point b appartiendra à la trace horizontale demandée. Par ce point b on mènera donc βR parallèle à αP , puis on joindra $\beta R'$, qui devra être parallèle à $\alpha P'$.

Il y aura deux solutions, puisqu'on peut porter la longueur $p_1 q_1$ au-dessus de $a_1 P'$ aussi bien qu'au-dessous.

En combinant les constructions indiquées fig. 4 et fig. 9, on résoudrait aisément ce problème : *Mener par un point donné un plan parallèle à un plan*

donné. Mais ce problème est susceptible d'une solution plus simple. (Voy. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.)

DISTANCES GÉOGRAPHIQUES. (CALCUL DES), calculs nécessaires pour déterminer la distance de deux points du globe dont les latitudes et les longitudes sont connues. Si ces points sont assez rapprochés pour que dans l'intervalle le globe puisse être considéré comme sphérique, la distance cherchée est un arc de grand cercle facile à déterminer; car les deux points donnés A et B et le pôle P sont les sommets d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés PA et PB, respectivement égaux aux compléments des latitudes des points A et B, et l'angle en P qui n'est autre chose que la différence des longitudes de ces points. On calculera donc le troisième côté par les formules ordinaires de la trigonométrie sphérique. Ce troisième côté une fois connu en degrés, minutes et secondes, il sera facile d'obtenir sa longueur, connaissant le rayon de la sphère; car si x est cette longueur, R le rayon du globe, et α l'expression de x en degrés, on aura

$$x : 2\pi R = \alpha : 360^\circ; \text{ d'où } x = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

Mais il peut arriver que les points considérés soient trop éloignés pour que le globe puisse être considéré comme sphérique dans l'intervalle; on substitue alors à l'ellipsoïde terrestre la sphère *transversalement osculatrice* en l'un des points donnés (Voy. COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES [Calcul des]).

Les formules établies à cet article sont :

pour la différence des latitudes,

$$l' - l = -Pk \cos A - Qk^2 \sin^2 A;$$

pour celle des longitudes,

$$l' - L = \frac{Rk \sin A}{\sin l};$$

formules dans lesquelles k désigne précisément la distance géographique qu'on se propose de calculer, et A l'azimut du côté AB par rapport au méridien du point A.

Si l'on pose $k \cos A = x$ et $k \sin A = y$, il vient

$$l' - l = -Px - Qy^2 \text{ et } l' - L = \frac{Ry}{\cos l}.$$

On en tire

$$y = \frac{l' - l}{R} \cos l \text{ et } x = \frac{l - l'}{P} - \frac{Q(l' - l)^2}{R^2} \cos^2 l.$$

Ayant calculé x et y , on trouve ensuite

$$\tan A = \frac{y}{x} \text{ et } k = \frac{x}{\cos A} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On rencontre cette question en Géodésie lorsque, ayant à faire la triangulation d'un pays, on n'a point le temps ou les moyens de mesurer directement une base; on s'en procure ainsi une par le calcul. On rencontre encore le même problème lorsqu'on a à rattacher une île au continent. C'est ainsi que M. Puissant a opéré pour la Corse.

Mais les calculs précédents supposent que k ne dépasse pas l'ordre de grandeur des côtés géodésiques ordinaires; dans le cas contraire, il faudrait recourir au développement en série de l'expression des lignes géodésiques à la surface de l'ellipsoïde. (Voy. LIGNE GÉODÉSIQUE.)

DISTANCE ZÉNITHALE, l'une des coordonnées azimutales qui servent à fixer dans le ciel la position d'un astre; c'est l'angle que fait avec la verticale le rayon visuel mené au centre de l'astre.

Cet angle, qui est le complément de la hauteur de l'astre considéré au-dessus de l'horizon, se mesure ordinairement à l'aide du THÉODOLITE (Voy. ce mot).

Les distances zénithales doivent être corrigées de la RÉFRACTION et de la PARALLAXE (Voy. ces mots.). La première correction est toujours additive; la seconde est toujours soustractive; en sorte que l'ensemble de ces deux corrections se formule ordinairement sous cette forme mnémotechnique, *plus réfraction, moins parallaxe*. Le milieu du jour est le moment le plus favorable pour l'observation des distances zénithales, parce que les erreurs dues à la réfraction sont alors moins sensibles que le matin et le soir. Dans les opérations géodésiques, les distances zénithales doivent être réduites au sommet du signal (Voy. RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES AU SOMMET DU SIGNAL). Les distances zénithales doivent enfin être corrigées du *demi-diamètre apparent* (Voy. DIAMÈTRE APPARENT), puisqu'on ne peut observer qu'un des bords de l'astre.

Les mesures de distances zénithales peuvent être affectées d'une erreur qui tient à la flexion de la lunette dans les instruments de grandes dimensions; cette erreur varie à peu près comme le sinus de la distance zénithale; elle tend toujours à faire paraître cette distance moindre qu'elle ne l'est en réalité; on l'élimine en faisant deux observations, l'une directe et l'autre par réflexion à la surface d'un bain de mercure.

Pour obtenir la *distance zénithale du pôle*, on observe la distance zénithale d'une étoile circumpolaire, à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien. La moyenne est la distance zénithale du pôle (Voy. HAUTEUR).

DISTRIBUTION, mécanisme à l'aide duquel, dans les machines à vapeur, on met la boîte à vapeur en communication alternative avec les deux faces du piston, et les deux capacités du cylindre en communication alternative avec le condenseur. La distribution se fait d'ordinaire au moyen d'une pièce mobile, nommée *tiroir*, qui reçoit de la machine même un mouvement rectiligne alternatif, et qui ferme ou découvre aux instants voulus les orifices de communication. (Voy. MACHINES À VAPEUR, DÉTENTE, AVANCE DU TIROIR.)

Dans quelques machines on a remplacé le tiroir par un disque mobile autour de son centre, et analogue au RÉGULATEUR À PAPILLON (Voy. ce mot) des locomotives. (Voy. DÉTENTE.)

DISTRIBUTION D'EAU, système de conduites prenant l'eau dans un ou plusieurs réservoirs pour la conduire, soit dans d'autres réservoirs, soit en des points d'écoulement déterminés, en alimentant sur leur parcours, et en des points donnés de ce parcours, d'autres écoulements déterminés.

I. Les calculs auxquels une distribution d'eau donne lieu sont une application des formules du mouvement permanent de l'eau dans les conduites (Voy. ce mot), savoir :

$$[1] \quad \frac{1}{4} DJ = 0,001 \varphi(U) \text{ et } Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U. \quad [2]$$

Pour simplifier ces calculs, on peut, à l'exemple de M. Dupuit, réduire la première équation à la forme

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2,$$

qui, à l'aide de l'équation [2], se transforme en la suivante :

$$J = \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2}{D^5}, \text{ ou } y = \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2 L}{D^5},$$

en appelant L la longueur développée de la conduite, et y la perte de charge totale due au frottement de l'eau contre les parois. A la rigueur, d'après les expériences de M. Darcy, le coefficient b_1 devrait varier avec le diamètre; mais si ce diamètre est supérieur à 0^m,06, ce qui a le plus ordinairement lieu dans les distributions d'eau, les variations de b_1 deviennent peu importantes, et la formule peut être mise sous la forme très-simple

$$y = \frac{Q^2 L}{(3D)^5}, \quad [3]$$

ce qui revient à prendre pour b_1 la valeur constante 0,00063162, intermédiaire entre les valeurs 0,000723 et 0,000520 que prend ce coefficient, d'après la formule de M. Darcy, pour $D = 0^m,06$ et pour $D = 1^m$.

II. Le problème le plus simple qui se présente est le suivant: Une conduite, d'un diamètre constant, prend l'eau en un point A_0 (fig. 1) d'un réservoir

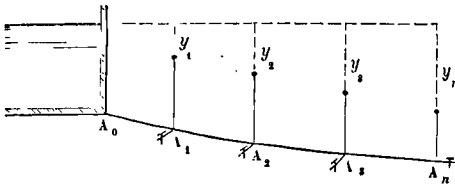


Fig. 1.

dont le niveau est constant et connu, et débite en des points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de son parcours des volumes d'eau donnés. On demande de déterminer le diamètre de la conduite, de manière que la charge près du dernier orifice soit suffisante pour produire la dépense voulue. Cette charge, que nous nommerons h , dépend de la forme de l'orifice, et est déterminée par le mode d'écoulement (Voy. ECOULEMENT DES LIQUIDES). Pour une borne-fontaine ordinaire, cette hauteur doit être d'au moins 0^m,50. Cela posé, connaissant la dépense de chaque orifice, on peut en déduire la dépense totale; c'est celle qui est relative à la portion $A_0 A_1$ de la conduite; nous la nommerons q_1 . Retranchant de q_1 le volume débité par le premier orifice, on aura la dépense q_2 relative à la portion $A_1 A_2$. Retranchant de nouveau le volume débité par le second orifice, on aura la dépense q_3 relative à la portion $A_2 A_3$, et ainsi de suite. Soient $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ les longueurs respectives de ces différentes portions de la conduite. Désignons par $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ les distances des niveaux piézométriques (Voy. PIÉZOMÈTRE) aux points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, au-dessous du niveau du réservoir. En appliquant la formule [3] aux portions successives de la conduite, ou aura

$$y_1 = \frac{q_1^2 l_1}{(3D)^5}, \quad y_2 - y_1 = \frac{q_2^2 l_2}{(3D)^5}, \quad y_3 - y_2 = \frac{q_3^2 l_3}{(3D)^5}, \dots,$$

$$y_n - y_{n-1} = \frac{q_n^2 l_n}{(3D)^5}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient une relation que l'on peut écrire

$$y_n = \frac{\Sigma q^2 l}{(3D)^5}. \quad [4]$$

Si tout est connu dans le second membre de cette

équation, elle donnera la valeur de y_n , et il restera à vérifier si, en retranchant y_n de la hauteur H du niveau du réservoir au-dessus du point A_n , on obtient un reste au moins égal à la charge h que l'on s'est imposée.

L'équation [4] résoudre également le problème inverse. Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, à l'exception du diamètre que l'on suppose inconnu, déterminer ce diamètre de manière que la charge au-dessus du dernier orifice soit égale à une hauteur donnée h . On a dans ce cas $y_n = H - h$, et par conséquent

$$H - h = \frac{\Sigma q^2 l}{(3D)^5}, \text{ d'où } D = \frac{1}{3} \sqrt[5]{\frac{\Sigma q^2 l}{H - h}}. \quad [5]$$

III. Par un motif d'économie, on peut demander que le diamètre de la conduite diminue à mesure que le volume qu'elle débite décroît, en raison de la dépense effectuée par les orifices successifs. Si l'on néglige d'abord les pertes de charges dues aux rétrécissements brusques (Voy. CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION), ce qui est permis quand les points A_0, A_1, A_2, \dots , sont suffisamment distants les uns des autres pour que ces pertes accidentelles disparaissent vis-à-vis de la perte occasionnée par le frottement des tuyaux, on aura, en appelant $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ les diamètres successifs des différentes parties de la conduite,

$$y_1 = \frac{q_1^2 l_1}{(3D_1)^5}, \quad y_2 - y_1 = \frac{q_2^2 l_2}{(3D_2)^5}, \dots,$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = \frac{q_{n-1}^2 l_{n-1}}{(3D_{n-1})^5},$$

$$y_n - y_{n-1} = \frac{q_n^2 l_n}{(3D_n)^5}. \quad [6]$$

D'où l'on déduira $y_n = \Sigma \frac{q^2 l}{(3D)^5}. \quad [7]$

Si tous les diamètres sont donnés, cette relation fournira y_n ; et l'on vérifiera si, en retranchant y_n de H, le reste est au moins égal à la charge h , nécessaire pour produire l'écoulement par le dernier orifice. Si les diamètres ne sont pas donnés, on peut se donner y_n de manière que la condition dont nous parlons soit remplie, et l'équation [7] sera une première relation entre les diamètres. On pourra, en outre, s'imposer la condition que la vitesse moyenne soit la même dans tous les tuyaux, ce qui donnera

$$\frac{q_1}{D_1^2} = \frac{q_2}{D_2^2} = \frac{q_3}{D_3^2} = \dots = \frac{q_n}{D_n^2}. \quad [8]$$

Au moyen de ces dernières relations, on exprimera tous les diamètres en fonction de l'un d'eux, et l'équation [7] fera connaître ce diamètre; on obtiendra ensuite tous les autres à l'aide des relations [8].

Si l'on voulait avoir égard aux pertes de charges occasionnées par les rétrécissements successifs, on se rappellerait que pour chaque rétrécissement la perte est exprimée (Voy. CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION) par

$$\zeta = \frac{U^2}{2g} \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2,$$

U représentant la vitesse moyenne dans le plus petit tuyau, et m le coefficient de contraction. On a d'ailleurs, en nommant Q la dépense dans ce tuyau et D son diamètre,

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

la perte de charge due au rétrécissement serait donc exprimée par

$$\zeta = \frac{16Q^2}{2g \cdot \pi^2 D^5} \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2.$$

On pourrait donc dans les équations [6] introduire les termes nécessaires pour tenir compte des pertes dont il s'agit. Mais les problèmes de distribution d'eau ne sont pas par eux-mêmes susceptibles d'une exactitude assez rigoureuse pour qu'il y ait lieu de tenir compte de ces termes, dont l'introduction compliquerait les relations [6] et [7] et rendrait la résolution de cette dernière très-pénible, dans le cas où il y aurait à en tirer un des diamètres. D'ailleurs, si l'on met pour m la valeur 0,62, et qu'on prenne le rapport de ζ à la valeur de y donnée par l'équation [3], on trouve

$$\frac{\zeta}{y} = 7,43 \cdot \frac{D}{L},$$

quantité toujours très-petite, attendu que la longueur L de chaque tuyau est toujours très-grande par rapport à son diamètre D .

IV. Considérons maintenant le cas où deux conduites AD et BD (fig. 2), prenant l'eau dans deux

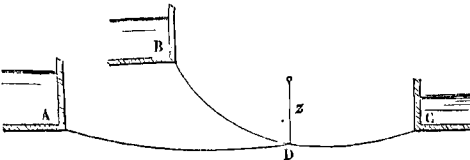


Fig. 2.

réservoirs supérieurs, se réuniraient en une seule DC, à partir du point D, pour conduire les eaux dans un troisième réservoir C. Soient l, l', l'' les longueurs des trois conduites, D, D', D'' leurs diamètres, q, q', q'' les volumes d'eau qu'elles débitent; soit ζ la hauteur piézométrique au point d'embranchement D, et h, h', h'' les hauteurs des niveaux des trois bassins au-dessus du point D. En négligeant les pertes de charges dues aux changements de section, on aura

$$h - \zeta = \frac{q^2 l}{(3D)^5}, \quad h' - \zeta = \frac{q'^2 l'}{(3D')^5}, \quad \zeta - h'' = \frac{q''^2 l''}{(3D'')^5}. \quad [9]$$

Si les diamètres sont donnés, et qu'il s'agisse de déterminer les volumes débités, on fera une hypothèse sur la hauteur ζ , et on tirera de ces trois équations les valeurs de q, q' et q'' ; elles devront satisfaire à la relation $q + q' = q''$; et si cela n'a pas lieu, on modifiera dans le sens convenable l'hypothèse faite sur ζ , jusqu'à ce que la condition soit remplie.

Il peut arriver au contraire que les volumes q, q' et q'' soient donnés, et que les diamètres soient inconnus. On n'a plus alors que trois équations pour déterminer les quatre inconnues D, D', D'' et ζ . Pour en obtenir une quatrième, on s'impose la condition que le prix des tuyaux soit un minimum. En général, le prix d'une conduite est proportionnel à l'étendue de sa surface, c'est-à-dire au produit de sa longueur par son diamètre; et, à Paris, ce prix peut être représenté, pose comprise, par $100' \cdot lD$. Il faut donc rendre minimum la quantité

$$\varphi = lD + l'D' + l''D'',$$

ou, en remplaçant les diamètres par leurs valeurs tirées des équations [9],

$$\varphi = \frac{1}{3} l^{\frac{2}{5}} q^{\frac{2}{5}} (h - \zeta)^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} l'^{\frac{2}{5}} q'^{\frac{2}{5}} (h' - \zeta)^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} l''^{\frac{2}{5}} q''^{\frac{2}{5}} (\zeta - h'')^{-\frac{1}{5}}.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée de φ par rapport à ζ , on trouve

$$l^{\frac{2}{5}} q^{\frac{2}{5}} (h - \zeta)^{-\frac{6}{5}} + l'^{\frac{2}{5}} q'^{\frac{2}{5}} (h' - \zeta)^{-\frac{6}{5}} - l''^{\frac{2}{5}} q''^{\frac{2}{5}} (\zeta - h'')^{-\frac{6}{5}} = 0, \quad [10]$$

c'est la quatrième équation cherchée. On en tirera par tâtonnement la valeur de ζ , qui, substituée dans les équations [9], permettra d'en tirer les trois diamètres.

Si les conduites devaient faire ce qu'on appelle un *service en route*, c'est-à-dire si elles devaient alimenter une série d'écoulements déterminés en des points donnés de leur parcours, il faudrait remplacer les numérateurs des équations [9] par des quantités de la forme $\Sigma q^2 l$, obtenues en multipliant la longueur de chaque partie de la conduite comprise entre deux écoulements consécutifs, par le carré du volume d'eau qu'elle débite par sa section transversale, et faisant la somme des produits analogues pour chaque conduite. Cela résulte des considérations qui ont servi à établir l'équation [4]. La marche serait d'ailleurs la même; les équations [9] et [10] seraient remplacées par des équations analogues, dont on ferait le même usage pour déterminer ζ et les diamètres D, D' et D'' .

On traiterait de la même manière le cas où une conduite prenant l'eau dans un réservoir supérieur se bifurquerait en un point de son parcours pour conduire les eaux dans deux réservoirs inférieurs.

V. En général, les conduites complexes peuvent donner lieu à deux problèmes.

Dans le premier on donne toutes les dimensions, les cotes de nivellement de tous les points d'embranchement, ainsi que celles des niveaux des réservoirs, et l'on se propose de déterminer les volumes débités.

Dans le second, on dispose des mêmes données, sauf les diamètres, et l'on demande de déterminer ceux-ci de manière que les volumes débités soient égaux à des volumes donnés.

On prendra pour inconnues auxiliaires les hauteurs piézométriques correspondantes à tous les points d'embranchement. Soit n le nombre des tuyaux, et n' le nombre des embranchements. On aura pour chaque tuyau une équation analogue à l'une des équations [9], ce qui fera n équations. En chaque point d'embranchement, on exprimera que la somme des volumes débités par les conduites qui amènent l'eau est égale à la somme des volumes débités par les conduites qui l'emportent, ce qui fera encore n' équations, en tout $n + n'$ équations, c'est-à-dire autant d'équations que d'inconnues, savoir les n volumes débités, et les n' hauteurs piézométriques auxiliaires.

Dans le second problème les conditions relatives aux volumes débités à chaque point d'embranchement devant nécessairement être supposées satisfaites, il ne restera que n équations pour déterminer les n diamètres et les n' hauteurs piézométriques. Mais on se procurera n' équations nouvelles en s'im-

posant, comme plus haut, la condition que le prix total des tuyaux soit un minimum. On posera

$$\varphi = \Sigma lD$$

et, en remplaçant chaque diamètre D par sa valeur en fonction des hauteurs piézométriques auxiliaires ζ , ζ' , ζ'' , etc., on aura φ en fonction de ces n' hauteurs.

On égalera à zéro la dérivée de φ par rapport à chacune de ces inconnues auxiliaires, ce qui donnera les n' équations nécessaires pour les déterminer, et en déduire ensuite tous les diamètres.

Il est clair que le calcul sera d'autant plus pénible qu'il y aura plus de tuyaux et plus d'embranchements; mais on voit que le problème est déterminé.

VI. Il y a encore une question que l'on peut avoir à traiter dans les distributions d'eau. C'est celle d'une conduite alimentée par ses deux extrémités, et alimentant elle-même divers écoulements déterminés en des points donnés de son parcours.

Si le diamètre est donné, on peut se proposer de déterminer les écoulements qui sont alimentés par l'une des extrémités, et ceux qui sont alimentés par l'autre.

Pour cela, soient h et h' les hauteurs des niveaux des deux réservoirs au-dessus d'un plan horizontal de comparaison, et soit ζ la distance entre le niveau piézométrique répondant à un orifice d'écoulement quelconque au-dessus de ce même plan. Si l_1 , l_2 , l_3 , etc., l_n sont les distances successives entre le réservoir de gauche et le premier orifice, puis entre les orifices successifs en allant de gauche à droite, et q_1 , q_2 , q_3 , ... q_n les volumes débités par les portions successives de conduite comprises entre ces points, on aura, en vertu de l'équation [4],

$$h - \zeta = \frac{\Sigma q^2 l}{(3D)^5} \quad [11]$$

Si l_1 , l_2 , l_3 , ... sont de même les distances successives entre le réservoir de droite et le premier orifice, puis entre les orifices successifs, en allant de droite à gauche, et q'_1 , q'_2 , q'_3 , ... les volumes correspondants, on aura, en appelant ζ' la hauteur du niveau piézométrique correspondant à un orifice quelconque, au-dessus du plan de comparaison,

$$h' - \zeta' = \frac{\Sigma q'^2 l'}{(3D)^5} \quad [12]$$

On calculera ainsi les valeurs de ζ pour les orifices successifs en partant du bassin de gauche, et les valeurs de ζ' pour les orifices successifs en partant du bassin de droite. On arrivera à un orifice pour lequel ζ sera sensiblement égal à ζ' . Tous les orifices situés à gauche seront alimentés par le réservoir de gauche; tous les orifices situés à droite seront alimentés par le réservoir de droite, et l'orifice pour lequel $\zeta = \zeta'$ sera alimenté par les deux réservoirs.

On vérifiera si la hauteur ζ correspondante à cet orifice est suffisante pour assurer l'écoulement.

Une conduite alimentée par les deux bouts peut encore donner lieu à un autre problème. On la suppose composée de deux parties de diamètres différents: l'une portant tous les orifices alimentés par le bassin de gauche, l'autre tous les orifices alimentés par le bassin de droite. Les positions de ces orifices étant connues ainsi que les volumes à débiter, on peut se proposer de déterminer les diamètres des deux parties. Si ζ désigne alors la distance entre le niveau piézométrique et le plan de

comparaison, au point de réunion des deux parties de la conduite, on aura

$$[13] \quad h - \zeta = \frac{\Sigma q^2 l}{(3D)^5} \quad \text{et} \quad h' - \zeta = \frac{\Sigma q'^2 l'}{(3D')^5} \quad [14]$$

On se donnera ζ par la condition que la charge au point de réunion soit suffisante pour assurer l'écoulement en ce point; les relations [13] et [14] seront alors connaître les deux diamètres D et D' .

(Voy. le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

DÔME, voûte sphérique surmontant une tour ronde (Voy. VOÛTES SPHÉRIQUES).

Il existe aussi des dômes construits sur un plan polygonal; ils se composent d'autant de surfaces cylindriques à génératrices horizontales que le polygone a de côtés. Ces surfaces se coupent successivement suivant des arêtes courbes, mais planes, égales entre elles, et allant concourir au sommet du dôme.

Si ces dômes se construisent en pierre, les constructions sont analogues à celles qui se rapportent aux voûtes en ARCS DE CLOÎTRE (Voy. ce mot).

S'ils se construisent en bois, les arêtes sont occupées par des arêtiers, qui reposent sur les points de jonction des sablières, et se réunissent à la partie supérieure soit par un noyau d'assemblage, soit par un poinçon si les fermes sont pourvues d'entraits. Les arêtiers sont réunis par des liernes droites horizontales.

DÔMES TORS. On nomme ainsi les dômes dont les arêtes, au lieu d'être planes, sont des espèces d'hélices plus ou moins contournées. Si l'on suppose que le plan du dôme soit un polygone régulier, on peut se représenter le dôme tors en imaginant que toutes les sections horizontales du dôme normal, c'est-à-dire du dôme composé d'autant de surfaces cylindriques égales, à génératrices horizontales, que le polygone a de côtés, aient tourné successivement autour de leur axe commun d'une certaine quantité les unes par rapport aux autres. Les arêtes du dôme normal, qui eussent été des lignes courbes planes, se changent en courbes à double courbure. Le dôme tors le plus régulier est celui dans lequel, les sections droites des surfaces cylindriques normales étant des quarts de cercle, les arêtes planes se changent en LOXODROMIES (Voy. ce mot), et font ainsi des angles égaux avec tous les méridiens.

Nicolas Fourneau avait construit un petit dôme tors sur l'église de la chartreuse de Gaillon; ce dôme n'existe plus. Ce genre de construction n'est plus employé aujourd'hui que dans les *chefs-d'œuvre* des ouvriers charpentiers.

DOMINICALE (LETTRE). Voy. LETTRE DOMINICALE. **DORIQUE** (ORDRE), l'un des cinq ordres d'architecture (Voy. ORDRES D'ARCHITECTURE).

DOTATION, dénomination qui, appliquée à la Caisse d'amortissement (Voy. AMORTISSEMENT), exprime la somme annuellement consacrée par un État à l'amortissement de la dette publique.

DOUBLE ÉQUERRE, instrument à l'aide duquel on peut déterminer la direction d'une perpendiculaire à un plan. Il se compose de deux equerres égales réunies à charnière par l'un des côtés de l'angle droit. Si l'on ouvre les deux branches perpendiculaires à la charnière, et qu'on pose l'instrument par ces deux branches sur un plan, la charnière prend une direction perpendiculaire au plan. Cet instrument est peu employé.

DOUBLE JOINT DE HOOKE. Voy. JOINT UNIVERSEL.

DOUCINE, sorte de moulure circulaire (Voy. MOULURES).

DOUELLE, portion de l'intrados d'un berceau, comprise entre deux joints de lit consécutifs. Par extension, portion de l'intrados d'une voûte, ou cet intrados lui-même.

DOUELLE PLATE, plan déterminé par deux arêtes de douelle consécutives, et que l'on substitue provisoirement à la douelle dans la solution de certains problèmes de coupe des pierres.

DRAGAGE (de l'anglais *drag*, traîner), opération qui a pour objet d'extraire du lit d'une rivière, ou du fond d'un port, les sables, les graviers, la glaise, etc., qui gênent la navigation. Suivant les circonstances, on emploie pour cette opération la *drague à main* ou une *machine à draguer*.

La drague à main est une sorte de pelle creuse emmanchée au bout d'une longue perche et garnie d'un sac. Il faut deux hommes pour la manœuvrer. Le premier, placé à l'arrière d'un bateau, appuie la drague contre le fond, l'ouverture tournée dans la direction que prend le bateau. Le second ouvrier, quand le sac est rempli, fait mouvoir un treuil, fixé à l'avant du bateau, et sur lequel s'enroule une corde fixée à la drague, qu'il relève ainsi hors de l'eau. Le contenu du sac est versé dans le bateau, on déroule le treuil, et l'opération recommence. Ce système ne peut être employé que pour les dragages peu importants.

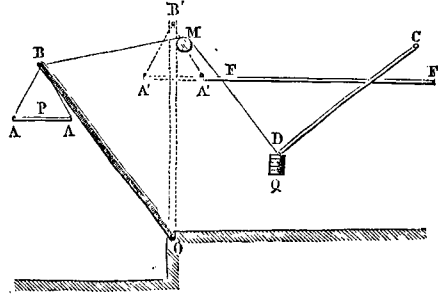
Il existe un grand nombre d'espèces de machines à draguer. La plus répandue consiste en une sorte de chapelet incliné, placé sur le côté d'un bateau, et formé de dragues ou hottes, fixées à une double chaîne sans fin, qui s'enroule sur deux cylindres horizontaux. Le cylindre supérieur est mis en mouvement par une machine à vapeur ou, le plus souvent, par un manège à deux chevaux. Les hottes en passant sous le cylindre inférieur mordent le fond que l'on veut attaquer, se remplissent, sont élevées par la chaîne sans fin, puis, arrivées au cylindre supérieur, se déversent dans un canal qui amène le gravier dans le bateau. Une machine à draguer peut extraire ainsi de 100 à 200 mètres cubes par journée de 10 heures selon la nature du terrain.

On donne le nom de *bateau dragueur* à un semblable bateau portant une machine à draguer. On emploie quelquefois, pour le service des ports, des bateaux dragueurs très-puissants, qui opèrent jusqu'à une profondeur de 8^m,50 au-dessous du niveau de l'eau, et qui peuvent enlever jusqu'à 95 mètres cubes de sable ou de gravier par heure.

DRILLE. Voy. TRÉPAN.

DROP, nom donné par les Anglais à un appareil servant au chargement des navires. La figure ci-contre en représente les parties essentielles. Un plateau AA, d'assez grandes dimensions pour pouvoir contenir un wagon, est suspendu à la partie supérieure d'un cadre OB, mobile autour d'un axe horizontal O (la figure ne montre que la projection de ce cadre). Lorsque le cadre est placé verticalement en OB', le plateau A' A' vient se placer dans le prolongement d'un chemin de fer FF. Lorsqu'au contraire le cadre est complètement abattu, le plateau AA vient se placer sur le pont du navire à charger. A la partie supérieure du cadre sont fixés

deux câbles (dont un seul est visible sur la figure); ils viennent s'enrouler sur un arbre horizontal M, et se fixer par leur autre extrémité, à des pièces de bois DC, mobiles autour d'un axe horizontal C. En D sont suspendus des contre-poids.



Le plateau occupant la position A' A', on y amène un wagon chargé; le poids de celui-ci fait tourner le cadre autour de son axe O. Son mouvement est ralenti par les contre-poids Q que le câble BMD élève en faisant tourner les pièces CD autour de l'axe C. Quand le wagon, descendu sur le pont du navire, a été déchargé, l'action des contre-poids Q l'emporte; le cadre se relève avec le wagon vide et le plateau vient reprendre la position A' A'. On emmène le wagon vide, on le remplace par un wagon plein, et le jeu de l'appareil recommence.

Sur l'arbre M est monté un tambour, sur lequel on fait agir un *FREIN* (Voy. ce mot) afin de modérer la descente des wagons. Le rôle des pièces de bois CD est de faire croître la tension de la corde BMD à mesure que le plateau descend. Cet accroissement est nécessaire pour contre-balancer l'accroissement du moment du poids du plateau et de sa charge par rapport à l'axe O. Et l'on reconnaît qu'en effet, à mesure que le contre-poids s'élève, la direction de MD s'éloigne de plus en plus de la verticale, et la composante du poids Q suivant cette direction augmente. Cet effet n'aurait pas lieu si le poids Q était simplement suspendu à la corde MD, devenue verticale.

DYNAMIQUE (du grec δύναμις, force), partie de la Mécanique qui traite de l'action des forces (Voy. MÉCANIQUE).

DYNAMOMÈTRES (du grec δύναμις, force, et μέτρον, mesure), instruments destinés à mesurer les forces, et, par extension, le travail qu'elles produisent.

Il existe différentes espèces de dynamomètres pour mesurer les forces; mais tous sont fondés sur le même principe. Leur partie principale est un ressort dont on peut noter la flexion; toute force qui, appliquée à l'instrument, produit la même flexion qu'un poids de n kilogrammes, est dite une force de n kilogrammes (Voy. FORCE). C'est sur ce principe que l'instrument est gradué.

Le plus simple des dynamomètres est le *peson* du commerce (fig. 1). Il se compose d'un ressort AOB à deux branches. A l'une BO est fixé, par l'une de ses extrémités, un arc de cercle métallique qui traverse la branche OA, et qui porte à son autre extrémité un anneau E auquel on peut suspendre un poids ou appliquer une force quelconque, un

effort musculaire par exemple. A la branche OA est fixé, par l'une de ses extrémités, un second arc de cercle, qui peut glisser sur le premier, et qui traverse la branche OB du ressort, et se termine en

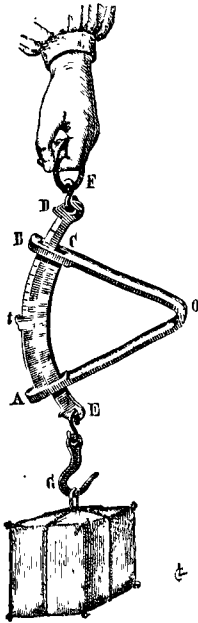


Fig. 1.

D par un anneau qui sert à tenir l'instrument ou à le suspendre à un point fixe. Ce second arc de cercle est gradué, comme nous le dirons, depuis l'extrémité D jusqu'à un point *t* où se trouve un talon dont nous expliquerons l'usage tout à l'heure. Supposons que, l'instrument étant attaché par l'anneau D à un point fixe, on suspende à l'anneau E un poids de 1 kilogramme, les branches du ressort se rapprocheront, l'arc D*t* dépassera la branche OB d'une certaine quantité, et l'on pourra marquer sur cet arc le point où la branche OB s'est arrêtée. On pourra ensuite répéter la même opération pour des poids de 2^k, 3^k, etc.; et l'instrument sera gradué. Pour pouvoir apprécier les fractions de kilogramme, on peut, sans

avoir recours à des expériences directes, se contenter de diviser en 10 parties égales les intervalles successifs qui séparent les marques correspondantes aux nombres entiers de kilogrammes; on obtient ainsi une approximation suffisante pour les besoins ordinaires auxquels l'emploi du peson s'applique. Si maintenant, après avoir enlevé les poids, on applique en E une force, et que, par suite de la flexion du ressort, la branche OB s'arrête au même point de l'arc D*t* que lorsqu'on a suspendu à l'anneau E un poids de *n* kilogrammes par exemple, on en conclura que la force dont il s'agit équivaut à *n* kilogrammes. En un mot, pour évaluer une force en kilogrammes, il suffira de l'appliquer en E, et de lire sur l'arc D*t* le nombre marqué à côté du point où la branche OB s'arrêtera.

Le talon *t* est destiné à prévenir la rupture de l'instrument, dans le cas où l'on appliquerait en E une force capable de faire fléchir le ressort au delà de sa limite d'élasticité.

Il existe d'autres pesons dans lesquels le ressort est disposé en hélice (fig. 2). Il est renfermé dans une boîte cylindrique en laiton, à la base supérieure de laquelle il est fixé en un point *d* par son extrémité supérieure; son extrémité inférieure est fixée à un disque A formant piston, et dont la tige traverse le ressort suivant son axe et vient sortir de la boîte par un orifice percé au centre de la base supérieure. L'extrémité de cette tige porte un anneau B par lequel on peut tenir l'instrument ou le suspendre en un point fixe. A la base inférieure de la boîte est adapté un crochet auquel on peut suspendre un poids, ou appliquer la force que l'on veut

mesurer. Sous l'action de cette force, le ressort en hélice se comprime dans le sens vertical, et la tige sort de la boîte d'une quantité d'autant plus grande que la force, et par suite la flexion, sont plus considérables. On lit sur la tige même la quantité dont elle est sortie de la boîte, ou la mesure de la force dont il s'agit. Le mode de graduation est le même que dans le premier peson.

Les instruments que nous venons de décrire suffisent pour les besoins du commerce auxquels ils s'appliquent. Pour mesurer avec exactitude des forces supérieures à 100 kilogrammes, on se sert d'un appareil plus précis qui porte le nom de *dynamomètre de Régnier* (fig. 3). Il consiste essentiellement en un ressort AB à deux branches réunies par leurs extrémités. On fixe le milieu C de l'une des branches, et l'on applique au milieu D de l'autre branche, dans le plan du ressort et suivant la droite qui joindrait les points C et D, la force que l'on veut mesurer. L'écart des deux branches est accusé par l'aiguille Oz, dont la pointe parcourt une portion de circonférence. La graduation de cette circonférence a été primitivement obtenue en plaçant l'appareil verticalement, et en appliquant des poids au point D. L'appareil présente deux gra-



Fig. 2.

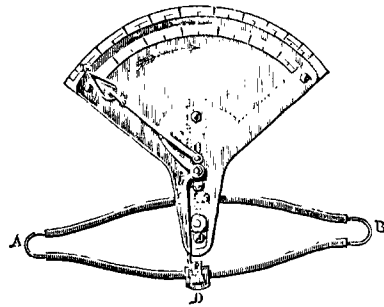


Fig. 3.

duations: l'une se rapporte au cas où ayant fixé le point C, comme on vient de le dire, au moyen d'une vis de pression placée en ce point, on applique la force au point D; l'autre se rapporte au cas où l'on fixe le point A et où on applique la force au point B. Dans ce second cas, la force est mesurée par l'écartement des points A et B, qui implique le rapprochement des points C et D; et ce rapprochement est accusé par une seconde pointe *y* de l'aiguille, qui parcourt une deuxième portion de circonférence, concentrique avec la première. En effet, quand les points C et D se rapprochent, une tige adaptée au point D fait mouvoir un levier coudé auquel elle est articulée en *i*; et la plus grande branche de ce levier coudé pousse l'aiguille dans le sens de la flèche inférieure; tandis que quand les points C et D s'écartent, le levier coudé marche en sens contraire, et l'aiguille restant appuyée contre ce levier par l'effet de son poids, marche dans le sens de la flèche supérieure. La seconde manière d'employer l'instru-

ment, en fixant le point A et appliquant la force en B, sert pour mesurer les forces considérables, comme la force musculaire d'un cheval, par exemple.

M. Poncelet a imaginé un dynamomètre beaucoup plus simple, dont M. Morin a fait usage dans ses recherches sur le FROTTEMENT (Voy. ce mot). Il consiste en deux lames d'acier égales et parallèles AB, A' B' (fig. 4), articulées à leurs extrémités. On

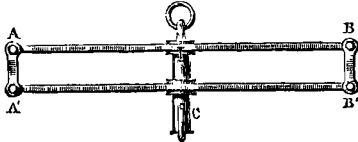


Fig. 4.

fixe le milieu I de l'une d'elles, et l'on applique la force à un crochet C disposé à cet effet au milieu de l'autre lame. La force est mesurée par l'écart qui se produit entre les milieux des deux lames, écart qui est accusé par les lames elles-mêmes sur une règle divisée fixée à l'une d'elles. L'avantage de cette disposition consiste en ce que, si la force ne dépasse pas une certaine limite, la variation de l'écart, c'est-à-dire l'excès de l'écart observé sur l'écart primitif, correspondant à l'état naturel, est proportionnel à la force qui le produit; en sorte que lorsqu'on connaît cet excès pour une force déterminée, il suffit de mesurer l'écart correspondant à une force donnée pour en déduire la mesure de cette force par une simple proportion. Si les forces à mesurer sont considérables, on peut donner aux lames la forme parabolique, comme l'a fait M. Morin, et comme le montre la figure 5; les flexions obtenues,

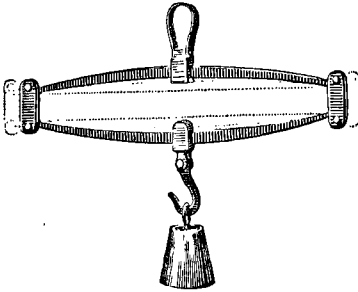


Fig. 5.

pour un même effort, sont alors doubles de celles qu'on obtiendrait avec des lames offrant la même résistance, mais ayant une épaisseur uniforme (Voy. SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE), ce qui augmente la précision de l'appareil. D'après les expériences de M. Morin, les flexions obtenues demeurent proportionnelles aux efforts exercés, tant que ces flexions ne dépassent $\frac{1}{10}$ de la longueur des lames, comptée à partir des points d'encastrement.

Les dynamomètres n'ont pas seulement pour objet la mesure des forces, on les emploie aussi pour évaluer le travail développé par ces forces; ils portent

alors le nom de *dynamomètres à style* ou de *dynamomètres à compteur*; selon le principe de leur construction; et ils reçoivent deux dispositions différentes suivant que le mouvement qu'il s'agit d'étudier est un mouvement de translation, tel que celui d'une voiture, ou un mouvement de rotation, tel que celui de l'arbre moteur d'une machine. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse d'un mouvement de translation, auquel cas le dynamomètre prend le nom de *dynamomètre de traction*.

Deux lames égales AA', BB' (fig. 6) d'environ

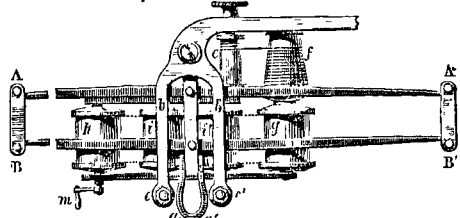


Fig. 6.

0^m,68 de long, planes à leur face interne, paraboliques à leur face externe, et articulées à leurs extrémités, sont saisies à leur milieu par deux griffes; l'une, celle de la lame AA', se fixe au véhicule en expérience; l'autre, celle de la lame BB', porte un anneau aa' auquel s'accroche la volée ou la corde sur laquelle doit agir le moteur. Pour que les lames ne puissent pas être forcées, on fixe à la lame postérieure AA' deux brides d'arrêt, l'une au-dessus, l'autre au-dessous des lames; celle de dessus est seule visible sur la figure, en bb'. Ces deux brides sont réunies par des entre-toises ee' contre lesquelles la lame antérieure vient buter.

A la griffe antérieure est adapté un pinceau, au-dessous duquel est disposée une bande de papier, animée d'un mouvement proportionnel à celui du véhicule, mais dans une direction perpendiculaire. Pour obtenir ce mouvement, on fait passer sur le moyeu de l'une des roues de devant une corde sans fin, qui passe également sur une poulie de renvoi; l'axe de cette poulie porte une vis sans fin qui engrène avec un petit pignon, sur l'axe duquel est monté le petit cylindre c. Sur ce petit cylindre s'enroule une corde de soie, qui transmet le mouvement à une fusée conique f, sur l'axe de laquelle est monté le cylindre g qui reçoit le papier primitivement enroulé sur le cylindre h. Le papier est soutenu par deux cylindres intermédiaires i et i' qui le maintiennent en contact avec le pinceau. Une manivelle m sert à l'enroulement du papier sur le cylindre h. On comprend l'utilité de la fusée conique f. Si le mouvement du véhicule était transmis directement du petit cylindre c au cylindre récepteur g, comme le papier qui s'y enroule augmente peu à peu son diamètre, le mouvement du véhicule demeurant uniforme, celui du papier s'accélérait. On évite cet inconvénient, en interposant la fusée f, dont les diamètres sont calculés de telle sorte, que son mouvement de rotation, déterminé par le petit cylindre c, aille en se ralentissant à mesure que le papier s'enroule sur le cylindre g, et que, par suite, le mouvement du papier demeure uniforme.

Un second pinceau, fixé à l'une des brides d'arrêt, trace sur le papier une droite qui sert de terme de comparaison pour évaluer l'écart des lames, accusé par la courbe que trace le pinceau adapté à la griffe antérieure. On place le pinceau fixe de manière que la droite qu'il trace corresponde à l'état naturel des lames, c'est-à-dire à un effort nul du moteur. Il en résulte que les ordonnées de la courbe, comptées à partir de cette droite, sont proportionnelles aux efforts exercés; d'ailleurs, les abscisses parallèles à cette droite, ou les chemins décrits par le papier, sont proportionnels aux chemins parcourus par le véhicule; par conséquent, le travail développé par le moteur est proportionnel à l'aire de la courbe tracée par le pinceau mobile, et comprise entre cette courbe et la droite que trace le pinceau fixe (Voy. TRAVAIL).

Cette aire peut être évaluée par les procédés ordinaires de QUADRATURE (Voy. ce mot), ou par l'emploi d'un PLANIMÈTRE (Voy. ce mot). Mais M. Morin a remarqué qu'on pouvait employer un moyen plus simple. Le papier dont on se sert pour ce genre d'expériences est du papier fabriqué à la mécanique, et d'une grande homogénéité; on peut donc admettre que son poids est proportionnel à son étendue superficielle. D'après cela, on se contente de découper le papier suivant la courbe et suivant la droite fixe; on pèse la bande ainsi obtenue; on a eu soin de peser une superficie connue du même papier, par exemple la bande rectangulaire tout entière, dont les dimensions sont connues; et, par une simple proportion, on en déduit l'aire cherchée.

On sait à quel effort correspond un écart donné des deux lames, ou une ordonnée quelconque de la courbe. On sait d'autre part, d'après les transmissions de mouvement, le chemin que décrit le papier pendant que le véhicule avance d'une quantité donnée, d'un mètre par exemple; on déduit donc aisément de l'aire obtenue, le nombre de kilogrammètres représentant le travail effectué. Soit, en effet, λ l'écart des lames produit par une force d'un kilogramme, et y l'écart produit par une force F , on aura

$$F : 1^k = y : \lambda, \text{ d'où } F = \frac{y}{\lambda}, \text{ en kilogrammes.}$$

Soit ϵ le chemin décrit par la bande de papier pour 1^m de déplacement du véhicule, et x le chemin décrit par le papier pour un déplacement de e mètres, on aura

$$x : \epsilon = e : 1^m, \text{ d'où } e = \frac{x}{\epsilon} \text{ et } de = \frac{dx}{\epsilon}.$$

Or, le travail T effectué par la force F a pour expression

$$T = \int F de, \text{ ou } T = \int \frac{y}{\lambda} \cdot \frac{dx}{\epsilon} = \frac{1}{\lambda \epsilon} \int y dx;$$

mais l'aire A de la courbe tracée par le pinceau mobile est exprimée par

$$A = \int y dx$$

entre les mêmes limites. Il vient donc

$$T = \frac{A}{\lambda \epsilon}$$

et cette valeur sera exprimée en kilogrammètres. Supposons, par exemple, que l'aire A ait été trou-

vée de $0^m,75$; soit $\lambda = 0^m,000125$ et $\epsilon = 0^m,018$, on en conclura

$$T = \frac{0,75}{0,000125 \cdot 0,018} = 333333^k m.$$

On peut, avec des bandes de papier de 16 à 18 mètres prolonger l'expérience sur un chemin de plus d'un kilomètre.

Quand l'expérience doit être prolongée sur une étendue de chemin plus considérable, le dynamomètre à style ne peut plus suffire, et on lui substitue un dynamomètre à compteur. A la griffe postérieure est adapté un axe de rotation vertical, portant à sa partie inférieure une poulie qui reçoit le mouvement d'une des roues de devant par l'intermédiaire d'une corde sans fin et de poulies de renvoi. Sur le même axe est monté un plateau horizontal, qui tourne avec la poulie. A la griffe antérieure est adapté un axe de rotation horizontal, portant à son extrémité une roulette dont la circonférence est en contact avec le plateau horizontal, et qui par conséquent reçoit le mouvement de celui-ci, mouvement d'autant plus rapide que la roulette est plus éloignée du centre du plateau, et qui par conséquent est proportionnel à l'effort qui écarte les lames, attendu qu'au repos la roulette coïncide avec le centre. Le nombre de tours que fait la roulette dans un temps donné très-court est donc proportionnel d'une part à la vitesse de rotation du plateau, et par conséquent au chemin élémentaire décrit par le véhicule, d'autre part à l'effort exercé sur le dynamomètre; il est donc proportionnel en définitive au produit de ces deux grandeurs, c'est-à-dire au travail élémentaire développé par la force. Le nombre total de tours faits par la roulette pendant l'expérience représente donc la somme des travaux élémentaires de la force, c'est-à-dire le travail total de cette force. Pour que l'on puisse compter aisément le nombre de tours de la roulette, on dispose sur son axe une vis sans fin qui, par l'intermédiaire d'engrenages convenables, transmet son mouvement à des aiguilles parcourant deux limbes divisés, et marquant sur l'un les tours et les dizaines de tours, sur l'autre les centaines et les mille (Voy. COMPTEURS).

Dans les expériences sur le halage des bateaux, où la bande de papier ne peut plus être mise en mouvement par le véhicule lui-même, on la fait mouvoir par un appareil d'horlogerie qui lui donne un mouvement sensiblement uniforme. La courbe tracée par le pinceau ne donne plus alors le travail de la force, mais bien son IMPULSION (Voy. ce mot) ou $\int F dt$; et, en la divisant par la durée totale de l'expérience, on obtient la valeur moyenne de l'effort exercé. Si l'on veut, dans ce cas, évaluer le travail, on peut se ménager sur la rive des points de repère, et faire une marque sur le papier chaque fois que le bateau passe devant un de ces points. Les marques ainsi faites divisent la courbe en parties pour chacune desquelles on peut évaluer, comme il vient d'être dit, la valeur moyenne de l'effort; en la multipliant par la distance connue des deux points de repère correspondants, on obtient une valeur approchée du travail qui répond à l'intervalle de ces repères; on agit de même pour les autres intervalles, et l'on fait la somme des travaux obtenus, pour avoir le travail total;

mais on ne peut compter ainsi que sur une approximation assez faible.

Les mêmes moyens sont employés dans les expériences sur les charrues sans avant-train.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer le travail dans le mouvement de rotation, auquel cas le dynamomètre prend le nom de **DYNAMOMÈTRE DE ROTATION**. Le mouvement est transmis, par l'intermédiaire d'une courroie sans fin, à un arbre auxiliaire AA', sur lequel est montée à frottement doux une poulie B de 0^m,89 de diamètre environ (fig. 7),

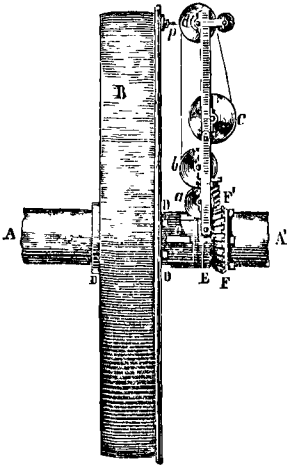


Fig. 7.

destinée à transmettre, à l'aide d'une seconde courroie sans fin, le mouvement de l'arbre auxiliaire aux autres organes de la machine, et à vaincre les résistances auxquelles elle est soumise. L'arbre AA' ne pourrait pas entraîner la poulie B qui n'est pas solidaire avec lui; mais une lame de ressort, dont le bout C est visible sur la figure, est implantée dans cet arbre dans le sens d'un rayon; et, dans le mouvement de l'arbre AA', son extrémité vient rencontrer un arrêt D ou D' fixé à la poulie, et entraîne celle-ci après avoir subi une flexion proportionnelle à l'effort qu'elle doit transmettre. Sur l'arbre AA' est monté un cadre, dont un côté se voit en EE'; ce cadre, mobile avec l'arbre, porte un système de cylindres analogue à celui que nous avons décrit à l'occasion du dynamomètre de translation, et qui fait mouvoir une bande de papier, sur laquelle s'appuie le bout d'un pinceau p fixé à la poulie. Voici comment le papier reçoit un mouvement proportionnel à celui de l'arbre. Cet arbre est embrassé par un collier FF' qui peut être rendu fixe dans l'espace; ce collier forme une roue conique avec laquelle engrène un pignon conique en partie caché sur la figure; l'axe de ce pignon est adapté à l'arbre AA' et porte une vis sans fin qui engrène avec un pignon cylindrique monté sur l'axe du petit cylindre a. Sur ce petit cylindre s'enroule la soie qui fait tourner la fusée conique b; sur l'axe de cette fusée est monté un cylindre sur lequel s'enroule la bande de papier, laquelle se déroule du cylindre c en passant sur le cylindre d. On conçoit que le pignon conique étant entraîné avec l'arbre AA' et le collier FF' étant fixe dans l'espace,

le pignon est obligé de prendre un mouvement de rotation autour de son axe, et il le communique, comme on vient de le voir, à la bande de papier. Si le pinceau p était solidaire avec l'arbre AA', il tracerait sur cette bande une ligne droite, qui, d'après la disposition adoptée, serait la médiane du rectangle qu'elle forme; mais comme le pinceau est adapté à la poulie, et suit conséquemment la flexion du ressort, il trace sur le papier une courbe, dont les ordonnées, rapportées à cette médiane, représentent les flexions de la lame, c'est-à-dire les efforts transmis; tandis que les abscisses comptées, suivant cette même médiane, c'est-à-dire les chemins parcourus par la bande de papier, représentent les chemins décrits par le point d'application de cet effort. Le travail développé est donc représenté encore par l'aire de la courbe tracée sur le papier. Nous ferons remarquer que l'axe du pignon conique est dans un plan perpendiculaire à celui de l'arbre AA', mais que ces deux axes ne se rencontrent pas; on a ici un exemple d'un engrenage hélicoïde (Voy. ENGRENAGES) qu'on pourrait remplacer par un engrenage hyperboloïde.

La lame de ressort est équilibrée par un contre-poids placé à l'extrémité opposée du diamètre suivant lequel elle est dirigée. Et pour que la lame ne coure pas le risque d'être forcée, le déplacement de la poulie est limité par un arrêt placé sur l'arbre AA'.

On peut, comme pour le dynamomètre de traction, remplacer la bande de papier et le style par un compteur à roulette. Le plateau, perpendiculaire à l'axe AA', est mis en mouvement par une roue dentée que fait tourner la vis sans fin adaptée à l'axe du pignon conique. Le compteur à roulette est adapté à la poulie B. Dans l'état de repos, la roulette occupe le centre du plateau; mais dans l'état de mouvement, elle s'en écarte de quantités proportionnelles à la flexion du ressort; en sorte que le nombre de tours qu'elle fait dans un temps donné est encore proportionnel au produit de l'effort exercé par le chemin parcouru, c'est-à-dire au travail développé. On peut, à l'aide de cet appareil à compteur, prolonger l'expérience pendant une journée, une semaine, et même un mois, si les diverses parties sont convenablement proportionnées. (Voy. pour plus de détails la notice de M. Morin sur les *Appareils dynamométriques*. Voy. aussi l'art. MANIVELLE DYNAMOMÉTRIQUE.)

C'est à M. Poncelet qu'est dû le principe des appareils que nous venons de décrire, et qui ont été habilement réalisés par M. Morin. C'est sur les mêmes principes que sont fondés le *dynamomètre de Bental* et le *dynamomètre Taurines*.

Le premier de ces instruments sert à évaluer le travail des charrues. Sa partie principale est un ressort en hélice, porté sur roues, fixé d'une part à la charrue, et de l'autre au palonnier sur lequel agit l'attelage. L'extrémité antérieure du ressort est liée à l'axe horizontal d'une roulette qui repose sur un plateau horizontal; celui-ci reçoit un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, qui est proportionnel à celui du véhicule; et la roulette s'éloigne du centre d'une quantité proportionnelle à la flexion du ressort; d'où il résulte, comme on l'a vu plus haut, que le nombre de tours qu'elle fait dans un temps donné est propor-

tionnel) à la fois à l'effort exercé et au chemin parcouru, et par conséquent au travail développé par le moteur. Ce nombre de tours est accusé par un compteur. Malheureusement cet appareil est sujet à se déranger par l'effet des inégalités du sol, et il ne donne pas toujours des résultats exacts.

Le dynamomètre introduit assez récemment par M. Taurines dans la marine militaire sert à évaluer le travail consommé par les PROPULSEURS HÉLICOÏDES (*Voy. ce mot*). On sait que dans les navires à hélice l'arbre des manivelles des machines à vapeur est dans le prolongement de l'arbre de l'hélice, auquel il est lié par un manchon ou de toute autre manière. Le dynamomètre Taurines se place au point d'interruption des deux arbres. Au bout de l'arbre des manivelles sont fixés deux bras égaux diamétralement opposés; et au bout correspondant de l'arbre de l'hélice sont fixés deux bras semblables, mais placés à angle droit par rapport aux deux premiers. Les extrémités de ceux-ci sont liées aux extrémités des deux autres par des ressorts plats, plus minces au milieu qu'aux bouts, et présentant une courbure naturelle qui tend à diminuer par un effort de traction longitudinale. On voit que l'arbre des manivelles ne peut entraîner l'arbre de l'hélice que par l'intermédiaire de ces ressorts qui se déforment d'une quantité proportionnelle à l'effort exercé. Ce n'est pas toutefois cette déformation que l'on mesure directement. Les milieux des ressorts opposés sont liés entre eux par des lames d'acier; lorsque les ressorts, en se déformant, tendent à devenir droits, leurs milieux se rapprochent de l'axe de rotation, et forcent les lames d'acier à se courber. C'est cette courbure qu'on utilise pour évaluer le travail transmis. A cet effet, sur un cylindre fixe, ayant le même axe que les arbres tournants, on a collé une feuille de papier; et, perpendiculairement à la surface de ce cylindre, on a disposé deux crayons entraînés dans le mouvement général de rotation. Le premier, qui est

fixe par rapport à l'arbre des manivelles, trace sur le papier la ligne *xéro*, celle qui répond à un effort de transmission nul. Le second, lié aux lames d'acier, qui tendent à l'entraîner dans le sens de la longueur de l'arbre, mais retenu en même temps par un ressort, tracé sur le cylindre une courbe qui s'écarte de la ligne *xéro* de quantités proportionnelles à l'effort transmis. L'aire comprise entre cette courbe et la ligne *xéro* est donc proportionnelle au travail effectué. — Ce dispositif, imaginé par M. Taurines, a permis d'évaluer commodément le travail considérable transmis à l'hélice des vaisseaux de haut bord, lequel atteint et dépasse souvent 2000 chevaux. Toutefois, pour qu'il donne de bons résultats, il faut que les machines motrices n'exercent pas sur l'arbre un effort trop variable.

M. Bourdon a imaginé, il y a peu de temps, un dynamomètre de rotation d'une disposition toute nouvelle. Il se compose de deux roues dentées égales, à denture hélicoïdale, et à axes parallèles, qui engrenent l'une avec l'autre. L'une d'elles reçoit le mouvement du moteur par l'intermédiaire d'une courroie sans fin passant sur une poulie calée sur le même axe; l'autre transmet de même à l'opérateur le mouvement qu'elle a reçu de la pre-

mière. Mais son axe peut se déplacer dans le sens longitudinal, en s'appuyant par l'une de ses extrémités contre une lame d'acier. La pression que cette seconde roue reçoit de la première a une composante parallèle à l'axe, qui lui est proportionnelle; cette composante produit un petit déplacement de l'axe, qui fait fléchir la lame d'acier d'une certaine quantité. Cette flexion est transmise à une aiguille qui parcourt un arc de cercle divisé. A l'aide de ce dispositif on peut mesurer des efforts très-considérables en n'employant que des ressorts minces et très-flexibles. Connaissant en outre le chemin décrit par le point d'application de la force motrice, on a tous les éléments nécessaires pour évaluer le travail transmis.

Il nous reste à dire un mot de l'appareil connu sous le nom de *Dynamomètre américain*, et qui est fondé sur un principe tout différent de ceux qui précèdent. Ce dynamomètre, qui sert à évaluer le travail des machines, offre une application de la balance romaine. Il est représenté en plan et en élévation sur la figure 8. Sur un axe horizontal *ab*

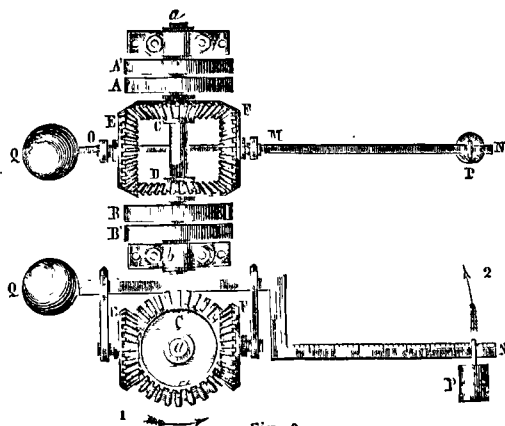


Fig. 8.

sont montées: 1° une poulie A qui reçoit le mouvement du moteur, par l'intermédiaire d'une courroie sans fin; 2° une poulie folle A', égale à la première, sur laquelle on fait passer la courroie quand on veut débrayer; 3° une poulie B qui transmet le mouvement de la machine et est destinée à vaincre les résistances; 4° une poulie folle égale B'; 5° deux roues d'angle C et D, qui engrenent toutes deux avec deux autres roues d'angle égales entre elles E et F. L'axe de chacune de celles-ci est lié au fléau d'une sorte de balance romaine OMN, équilibrée par un contre-poids Q. Sur le grand bras MN de ce fléau glisse un poids curseur P, et ce bras est divisé en parties égales.

Supposons que le mouvement de la poulie motrice A ait lieu dans le sens de la flèche 1. Si l'on débraye du côté de la résistance, le fléau tend à être entraîné dans le sens de la flèche 2, et l'équilibre dynamique ne peut être rétabli qu'en accrochant le poids P au curseur et en lui faisant prendre sur le fléau une position convenable, d'où l'on déduit aisément le moment de la force P, égal à celui de la résistance, et par suite la résistance elle-même, puisqu'elle agissait tangentiellement à la poulie B dont le rayon est connu. Un compteur

mis en mouvement par l'arbre de rotation, à l'aide d'une vis sans fin, donne le nombre de tours et fraction de tour que l'arbre exécute dans un temps donné. On a donc ainsi les deux éléments du travail à mesurer, et par suite ce travail lui-même.

Pour éviter, pendant l'expérience, les oscillations du fléau, ou du moins pour en réduire l'amplitude, on attache son extrémité à un piston qui se meut dans l'intérieur d'un cylindre en y comprime-

ment de l'air. Le dynamomètre américain est dû à White.

DYNAMODE (du grec δύναμις, force, et ὅδος, chemin), nom donné par Coriolis à un travail de 1000 kilogrammètres. Cette grande unité de travail est d'un emploi commode quand le travail à évaluer est considérable, comme lorsqu'il s'agit du travail journalier d'un moteur (*Voy. TRAVAIL*). M. Ch. Dupin avait proposé pour la même unité de travail le nom de *dynamie*.

E

EBRASUREMENT, paroi verticale, mais oblique, d'un jambage de porte ou de fenêtre, qui va de la feuillure au parement du mur, et dont l'obliquité a pour objet de favoriser l'entrée de la lumière et le libre jeu du vantail de la porte ou du battant de la croisée.

ÉCART, assemblage de deux pièces de charpente bout à bout par une face oblique. (*Voy. ASSEMBLAGE, CONSTRUCTION NAVALE*.)

ÉCART MOYEN, moyenne des différences, prises positivement, entre la valeur moyenne d'une mesure et ses valeurs particulières fournies par l'observation. (*Voy. MOYENNES, PROBABILITÉ DU TIR*.)

ÉCARVER, réunir deux pièces de bois par ÉCART (*Voy. ce mot. Voyez aussi les articles ASSEMBLAGES et CONSTRUCTION NAVALE*.)

ÉCHAFAUDAGES, constructions passagères en charpente qui sont employées dans divers travaux. Ils se composent ordinairement de montants et de sablières, reliés par des contre-fiches, des croix de Saint-André, et quelquefois par de grandes moises qui servent à les contreventer. Sur les sablières sont placées les solives qui portent les planchers, objet principal de la construction. Les principes qui servent de guide dans la construction des pans de bois, et des ouvrages de charpente en général, sont applicables aux échafaudages. Il faut remarquer toutefois que ces constructions n'ayant à porter aucune partie pleine, peuvent être réduites aux parties strictement nécessaires à leur solidité; et que la section des pièces elles-mêmes peut être notablement réduite. On emploie aux échafaudages du sapin ou des bois de peu de valeur.

On distingue les échafauds fixes, les échafauds volants, les échafauds roulants, les échafauds tournants, les échafauds suspendus.

Les échafauds fixes s'emploient pour les constructions dont la durée doit être longue. On peut citer comme exemple l'échafaud qui a servi à la construction du Panthéon, à Paris, et qui est décrit par Rondelet dans l'*Art de bâtir*.

Les échafauds volants s'emploient pour les travaux qui se renouvellent d'une manière périodique; ils se démontent et se remettent facilement en place. On cite comme un modèle l'échafaud volant du dôme de Saint-Pierre de Rome, construit en 1773 par Pierre Albertini.

Les échafauds roulants servent aux ragréages ou aux réparations qui se font d'une manière successive. Tel est l'échafaud roulant construit par le même architecte pour les réparations de la nef de Saint-Pierre.

Les échafauds tournants s'emploient dans les mêmes circonstances que les échafauds roulants; mais ils s'appliquent à l'intérieur des édifices circulaires. Tel est l'échafaud roulant construit en 1756 par Campanino pour le Panthéon de Rome.

Les échafauds suspendus servent au ragréage des ponts. On peut citer comme exemple celui qui a été construit par Perronnet pour le pont d'Orléans.

(*Voy. le Traité de l'art de la charpente, de M. Emy, et tous les traités spéciaux de charpente*.)

ÉCHAPPEMENT, organe important des mécanismes d'horlogerie, dont la fonction consiste à suspendre à des intervalles de temps égaux l'action du moteur, et à restituer au régulateur la force vive que le choc lui a fait perdre. On distingue un grand nombre d'échappements; les plus parfaits sont l'échappement libre d'Arnold et l'échappement libre à pivot de M. Henri Robert, employés dans les *chronomètres*; viennent ensuite l'échappement Duplex, l'échappement à cylindre, l'échappement à verge ou à roue de rencontre, employés dans les *montres*; dans les *horloges* on fait usage de l'échappement à ancre, ou de l'échappement à chevilles, de Lepaute; dans les *pendules* d'appartement on adopte soit l'échappement à ancre, soit l'échappement à demi-repos, etc. — *Voy. aux mots CHRONOMÈTRE, MONTRE, HORLOGE, PENDULE*, la description de ces échappements principaux. Pour de plus amples détails, voyez les traités spéciaux d'horlogerie, et particulièrement le *Traité d'Horlogerie*, de Berthoud; les *Principes généraux de l'exacte mesure du temps*, par Jurgensen; le *Traité d'Horlogerie*, de P. Moinet; les *Études sur diverses questions d'Horlogerie*, par H. Robert, etc.

ÉCHARPE, pièce de charpente inclinée à 45° et servant à relier les tournisses d'un pan de bois (*Voy. PANS DE BOIS*), lorsque les trumeaux ont une grande largeur.

ÉCHÉANCE COMMUNE. Il peut arriver qu'un commerçant, porteur de lettres de change à diverses échéances, les remette à un banquier pour obtenir en échange un effet unique, indiquant la même somme totale, et produisant le même intérêt total; il s'agit alors pour le banquier de déterminer l'échéance qu'il convient de fixer pour que ces conditions soient remplies; c'est ce que l'on appelle l'*échéance commune*, et qu'on pourrait appeler avec plus d'exactitude l'*échéance moyenne*.

On l'obtient par cette considération que, puisque l'intérêt total doit être le même, la somme des

nombres (Voy. INTÉRÊT SIMPLE), c'est-à-dire des produits des sommes par les nombres correspondants de jours, doit être aussi la même pour le billet unique que pour les effets réunis.

Supposons, par exemple, qu'un commerçant remette à un banquier, le 21 mars, cinq effets à diverses échéances, savoir :

Un effet de 1870 francs payable le 30 mars.		
— 918	—	3 avril.
— 2000	—	29 avril.
— 500	—	15 mai.
— 1200	—	7 juin.

On remarquera d'abord que :

Du 21 mars au 30 mars il y a 9 jours.

— 3 avril	— 13	—
— 29	— 39	—
— 15 mai	— 55	—
— 7 juin	— 78	—

En multipliant les sommes par les jours, on formera donc le tableau suivant :

Sommes.	Jours.	Nombres.
1870 fr.	9	16830
918	13	11934
2000	39	78000
500	55	27500
1200	78	93600
<hr/> 6488 fr.		<hr/> 227864

La somme énoncée dans le billet unique devra donc être 6488 fr. ; et, puisque l'intérêt total doit être le même, le nombre devra être 227824. On déterminera donc le nombre de jours compris depuis le 21 mars jusqu'à l'échéance cherchée, en divisant 227864 par 6488, ce qui donne 35,1. On adoptera 35 jours : l'échéance cherchée sera donc le 25 avril.

De là on peut tirer cette règle que, pour trouver l'échéance commune, il faut calculer, pour chacun des effets, le nombre qui résulte de la multiplication du capital énoncé par le nombre de jours à courir jusqu'à l'échéance, faire la somme des nombres, et la diviser par la somme des capitaux.

Comme on ne calcule le quotient qu'à une unité près, puisque le nombre de jours cherché doit être entier, il peut y avoir une légère différence entre la somme des intérêts des billets séparés, et l'intérêt du billet unique; mais elle est toujours négligeable.

ÉCHELLE, rapport que l'on établit entre les longueurs des lignes tracées sur un PLAN TOPOGRAPHIQUE, et les longueurs des lignes correspondantes mesurées sur le terrain. Ce rapport varie suivant l'étendue du terrain et suivant la destination du plan. Les plans des propriétés particulières sont souvent à l'échelle de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{1000}$; les plans parcellaires du Cadastre sont à l'échelle de $\frac{1}{250}$ ou $\frac{1}{500}$; on adopte $\frac{1}{2000}$ ou $\frac{1}{2500}$ pour le lever des places fortes, des villes, des fortifications de campagne; les plans des communes sont à l'échelle de $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{20000}$, suivant leur étendue; la grande carte de France du Dépôt de la Guerre est construite à

à l'échelle de $\frac{1}{80000}$; la carte de Cassini est à l'échelle

de $\frac{1}{86400}$. Les échelles plus petites ne sont usitées qu'en Géographie. Les échelles décimales sont les seules en usage aujourd'hui; elles offrent cet avantage que le mètre et ses multiples se trouvent exprimés par un nombre exact et simple de quelques-unes de ses subdivisions; ainsi :

L'échelle de $\frac{1}{100}$	correspond à 1 cent.	par mètre.
— $\frac{1}{200}$	—	5 millim. „
— $\frac{1}{250}$	—	4 millim. „
— $\frac{1}{1000}$	—	1 millim. „

et ainsi des autres. L'échelle de $\frac{1}{80000}$ revient à 25 millimètres par kilomètre. L'échelle de Cassini répondait à 1 ligne pour 100 toises.

Une considération importante peut servir de guide dans le choix d'une échelle; c'est le degré d'exactitude qu'on peut espérer dans un dessin. L'expérience prouve que dans le tracé graphique, $\frac{1}{5}$ de millimètre, ou 0^m,0002, et, à plus forte raison, toute quantité plus petite est inappréciable, soit à l'œil, soit à l'aide du compas. L'échelle devra donc être choisie, d'après la nature des instruments employés à lever le plan, de manière que les erreurs inévitables commises dans les mesures sur le terrain, deviennent inappréciables à l'échelle du plan. Or, soit BB' (fig. 1) l'erreur commise sur le côté CB

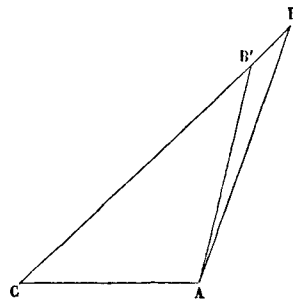


Fig. 1.

d'un triangle par suite de l'erreur BAB' ou α , commise sur l'angle BAC ou A : le triangle BAB' donne

$$BB' : AB = \sin \alpha : \sin (B + \alpha),$$

d'où

$$BB' = \frac{AB \sin \alpha}{\sin (B + \alpha)}.$$

Si donc on s'arrange de manière que le second membre soit moindre que 0^m,0002, on en déduira une limite supérieure de AB; on trouve

$$AB < \frac{0^m,0002 \cdot \sin (B + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

En posant $AB < \frac{0^m,0002 \cdot \sin B}{\alpha}$, on satisfera à fortiori à l'inégalité précédente, attendu que l'on doit surtout considérer le cas où B est un angle aigu et

qu'alors $\sin(B + \alpha)$ est plus grand que $\sin B$. Supposons $B = 30^\circ$, comme limite inférieure, il viendra

$$AB < \frac{0^m,0001}{\alpha}$$

Si l'angle A a été mesuré au graphomètre, l'erreur δ pourra être d'une minute, ou $\frac{2\pi}{21600}$, ou $\frac{\pi}{10800}$; on devra donc satisfaire à l'inégalité

$$AC < \frac{0^m,0001 \times 10800}{\pi} \text{ ou } AC < 0^m,3437 \dots$$

Si, par conséquent, le plus grand côté du polygone topographique a 1000 mètres, il devra être représenté par moins de $0^m,3437\dots$, c'est-à-dire que l'échelle ne devra pas dépasser 3 millimètres ou $3^{\text{mill}},4$ pour 1000 mètres.

Si l'angle A a été mesuré à la boussole, auquel cas l'erreur peut être de $15'$, on devra prendre AC au moins 15 fois plus petit, c'est-à-dire $AC < 0^m,0209$; et si le plus grand côté est toujours 1000 mètres, ils devront être représentés par $0^m,02$, c'est-à-dire que l'échelle devra être de 1 millimètre pour 50 mètres.

On arriverait à des résultats analogues si l'erreur δ était en plus au lieu d'être en moins. Mais il est

clair qu'on peut se tenir, sans grand inconvénient, un peu au-dessus de la limite rigoureuse indiquée par le calcul.

On donne aussi le nom d'ÉCHELLE DE RÉDUCTION, ou simplement d'ÉCHELLE, à une droite divisée en parties égales, dont chacune représente une unité mesurée sur le terrain. Le double décimètre, taillé en biseau sur ses deux bords et divisé des deux côtés en centimètres et millimètres, forme une échelle commode pour la plupart des cas. Ce petit instrument est fort employé dans le lever des plans, parce qu'il sert à la fois d'échelle, de règle, et même d'équerre, attendu que les traits qui se correspondent sur les deux bords sont sur une même droite perpendiculaire à chacun d'eux. Mais chaque plan doit être accompagné d'une échelle fixe qui sert à son intelligence. Pour la construire, on trace, au bas du dessin, une droite horizontale sur laquelle on porte, de gauche à droite, à partir d'un point arbitraire que l'on marque d'un zéro, une série de longueurs égales représentant chacune 10 unités de longueur mesurées sur le terrain; on porte une même longueur à partir du zéro, vers la gauche, et on la divise en parties égales que l'on numérote de droite à gauche (fig. 2)

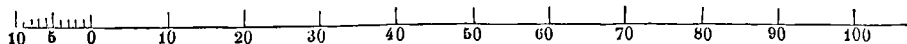


Fig. 2.

Supposons que l'unité soit le mètre; si l'on veut prendre une longueur exprimée par un nombre de mètres moindre que 10, par exemple 7 mètres, on placera l'une des pointes du compas sur le zéro, et l'autre sur le 7^e trait à gauche; si l'on veut prendre une longueur exprimée par un multiple exact de 10 mètres, par exemple 40 mètres, on placera une des pointes du compas sur le zéro et l'autre sur le 4^e trait à droite; si enfin on veut prendre une longueur exprimée en mètres par un nombre de deux chiffres, 47 mètres par exemple, on ajoutera les deux longueurs précédentes en plaçant une des pointes du compas sur le 4^e trait à droite du zéro, et l'autre pointe sur le 7^e trait à gauche.

Si la longueur à prendre contient des fractions de l'unité, on les apprécie à vue d'œil, ce qui suffit toujours en Topographie, vu les erreurs dont les mesures sur le terrain sont elles-mêmes nécessairement affectées. Mais si l'on a intérêt à apprécier exactement les dixièmes, on peut y parvenir sans pour cela multiplier les divisions de l'unité. Audessous de l'échelle primitive, on trace 10 parallèles distantes d'une unité, et, par les points de division primitifs qui répondent aux dixaines, on mène des perpendiculaires à ces parallèles (fig. 3); on numérote les parallèles de 1 à 10, et l'on répète sur la dernière les chiffres portés sur l'échelle primitive. Cela fait, on mène des obliques qui joignent les

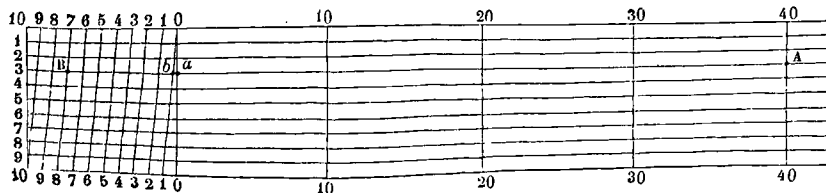


Fig. 3.

points 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 marqués primitivement à gauche sur l'échelle avec les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 marqués à gauche du zéro sur la dernière parallèle. Il est aisé de voir que les portions de parallèles comprises entre la perpendiculaire 0—0 et l'oblique 0—1 sont proportionnelles au rang de ces parallèles; la portion ab , par exemple, est les $\frac{3}{10}$ de l'unité. Si donc on veut prendre une longueur exprimée en mètres

par $47^m,3$, on placera une pointe du compas en A sur la 3^e parallèle et sur la perpendiculaire répondant à 40, et la seconde pointe du compas en B sur la même parallèle, mais sur l'oblique 7—8; l'ouverture de compas se composera, en effet, de la distance Aa qui vaut 40 mètres; de la distance Bb égale à 0—7 et valant par conséquent 7 mètres; enfin de la distance ab valant, comme on vient de le voir, $0^m,3$; ce qui fait bien en tout $47^m,3$. On opérerait d'une manière analogue pour tous autres nombres.

Dans le dessin de l'architecture, on ne se sert pas des unités métriques. L'unité adoptée est le demi-diamètre inférieur de la colonne, auquel les architectes donnent le nom de *module*. Le module se subdivise en 12 parties égales dans l'ordre toscan et dans l'ordre dorique, et en 18 parties égales dans les trois autres ordres; dans tous les cas, ces parties égales se nomment *minutes*. (Voy. ORDRES.)

ÉCHELLE DE PENTE D'UN PLAN, projection horizontale graduée de sa ligne de plus grande pente. On la distingue des projections horizontales des autres droites en employant un double trait. (Voy. PLANS COTÉS.)

ÉCHELLE DE SOLIDITÉ, ou COURBE DE DÉPLACEMENT, courbe qui remplace un TABLEAU DE DÉPLACEMENT (Voy. ce mot), et donne le déplacement d'un navire quand on connaît son tirant d'eau, ou bien son tirant d'eau pour un déplacement donné. — On peut employer pour tracer cette courbe des coordonnées rectangulaires ou des coordonnées polaires. Si l'on emploie des coordonnées rectangulaires, on prend pour ordonnées les tirants d'eau et pour abscisses les déplacements. Si, par exemple, on veut remplacer par une courbe le tableau donné à l'article cité, et qui est relatif à une frégate à vapeur, on trouvera, en adoptant pour les tirants d'eau l'échelle de 1 centimètre par mètre, et pour les déplacements l'échelle de 1 millimètre par 50 mètres cubes, la courbe AB (fig. 1), qui n'a,

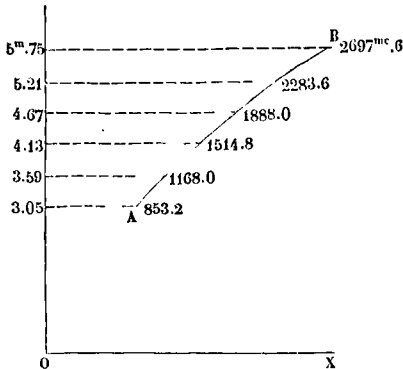


Fig. 1.

comme on voit, qu'une faible courbure dont la convexité est tournée vers le haut; en sorte qu'entre les limites de tirant d'eau considérées, l'accroissement de déplacement ne s'éloigne pas beaucoup d'être proportionnel à l'accroissement de tirant d'eau.

Si l'on fait usage des coordonnées polaires, on prend les angles polaires pour représenter les déplacements; ordinairement l'angle de 60° représente 1000 mètres cubes; il en résulte que les 360° font 6000 mètres cubes, et que par conséquent la courbe embrasse rarement plus de 360°. On prend pour rayons vecteurs, non pas les tirants d'eau eux-mêmes, mais l'excès d'une certaine constante sur ces tirants d'eau; c'est-à-dire qu'après avoir tracé d'un rayon arbitraire une circonférence, et l'avoir divisée en parties égales, on porte sur les rayons, à partir de cette circonférence, et vers le centre, des

distances proportionnelles aux tirants d'eau correspondants aux déplacements représentés par les arcs de cette circonférence comptés à partir d'une même origine. — Si, par exemple, on veut remplacer par une courbe polaire le tableau que nous avons déjà traduit ci-dessus en coordonnées rectangulaires, on trouvera facilement que 1000 mètres cubes répondant à 60°, les déplacements de 853m.2 — 1168m.0 — 1514m.8 — 1888m.0 — 2283m.6 — 2697m.6 répondent aux arcs de 51°,2 — 70° — 90°,8 — 113°,3 — 137° — 161°,8, qu'on portera sur la circonférence OC (fig. 2) à partir du point O; on aura ainsi les points

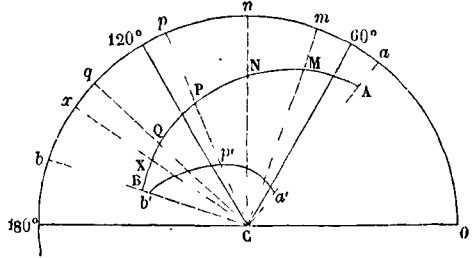


Fig. 2.

a, m, n, p, q, b. On joindra ces points au centre; et sur les rayons correspondants, on prendra, à partir de ces points, les longueurs aA, mM, nN, pP, qQ, bB proportionnelles aux tirants d'eau 3m,05 — 3m,59 — 4m,13 — 4m,67 — 5m,21 — 5m,75. Nous avons adopté sur la figure l'échelle d'un demi-millimètre pour mètre. On obtient ainsi les points A, M, N, P, Q, B, par lesquels on fait passer une courbe continue; c'est la courbe polaire demandée.

Si l'on veut, à l'aide de cette courbe, trouver le tirant d'eau correspondant à un déplacement donné, à 2400 mètres cubes par exemple, on convertira ce nombre en degrés, à raison de 60° pour 1000 mètres cubes, ce qui donnera 144°, qu'on portera sur la circonférence à partir du point O. On obtiendra ainsi un point x, qu'on joindra au centre; on mesurera la distance xX comprise entre la circonférence et la courbe AB; cette distance représentera le tirant d'eau, à raison de ¼ millimètre pour mètre. On trouve sur la figure xX = 24 millimètres; le tirant d'eau cherché est donc 4m,80.

Réciproquement, si l'on veut, à l'aide de la même courbe, obtenir le déplacement qui répond à un tirant d'eau donné, on opérera de la manière suivante. On prendra, à l'échelle d'un demi-millimètre par mètre, une longueur égale au tirant d'eau donné; on retranchera cette longueur de celle du rayon OC de la circonférence. Avec la différence pour rayon, et du point C comme centre, on décrira un arc de cercle qui coupera la courbe AB en un certain point X; on joindra CX; on prolongera la droite CX jusqu'à sa rencontre en x avec la circonférence; on mesurera l'arc Ox, et ayant trouvé le nombre de degrés qu'il renferme, on le convertira en mètres cubes, à raison de 1000 mètres cubes pour 60 degrés, on aura ainsi le déplacement demandé.

Il est aisé de comprendre pourquoi l'on ne prend pas les rayons vecteurs eux-mêmes pour représenter les tirants d'eau. En premier lieu, ces rayons

devant tous être mesurés à partir du pôle, la feuille sur laquelle l'échelle est tracée, fatiguée en ce point par la pointe du compas, serait bientôt hors d'usage. En second lieu, les plus petits déplacements étant ceux qui répondent aux variations les plus rapides du tirant d'eau, ces variations sont plus nettement exprimées par la forme de la courbe, construite d'après la méthode indiquée ci-dessus, qu'elles ne le seraient si les tirants d'eau étaient comptés à partir du p^{le}, attendu que, dans ce dernier cas, la courbe a'p'b' qu'on obtiendrait aurait beaucoup moins de développement, et l'usage de cette courbe présenterait beaucoup plus d'incertitude que celui de la courbe APB.

C'est pour mieux faire comprendre le principe sur lequel est fondée l'échelle de solidité de forme circulaire, que nous avons supposé un calcul de conversion des volumes en degrés ou des degrés en volumes. En réalité, l'échelle est disposée de manière à éviter cette conversion. Au lieu d'une seule circonférence, on emploie plusieurs circonférences concentriques. Sur la plus intérieure on ne marque que les volumes de 1000 mètres cubes, 2000 mètres cubes, 3000 mètres cubes, etc.; sur la seconde, dont le rayon est plus grand, on marque les centaines de mètres cubes; sur la troisième les dizaines de mètres cubes. Enfin, pour pouvoir apprécier les unités, on trace au delà de cette troisième circonférence 6 autres circonférences concentriques équidistantes, sur lesquelles on opère comme nous allons le dire. Les dimensions nécessairement très-réduites de la figure 3 n'ont pas permis d'exprimer

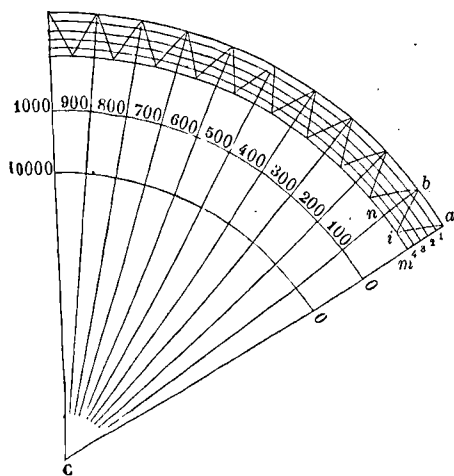


Fig. 3.

les unités; mais le procédé à l'aide duquel y sont exprimées les dizaines, est celui qui s'emploie, à une plus grande échelle, pour évaluer les unités de mètre cube. Soit *ab* un arc représentant 100 mètres cubes; on prend le milieu *i* de l'arc intérieur *mn*, et l'on joint ce milieu aux points *a* et *b* par les droites *ia* et *ib*. Les droites de jonction rencontrent les circonférences intermédiaires en des points qui répondent, sur ces circonférences, à des arcs représentant de 10 en 10 mètres cubes, sinon exact-

tement, du moins avec une approximation suffisante. En effet, les arcs compris entre *ab* et *mn* pouvant être regardés comme des droites parallèles sont coupés par les droites *ai* et *ib* proportionnellement aux distances *a1*, *a2*, *a3*, *a4*, *a5*; les distances de *aC* aux intersections successives de ces arcs avec *ai* sont donc proportionnelles aux nombres 1, 2, 3, 4, 5; c'est-à-dire que si l'on joignait ces intersections au centre, on aurait une série de rayons faisant entre eux des angles égaux, et avec *aC* des angles représentant $\frac{1}{10}$ de 100 mètres

cubes, $\frac{2}{10}$ de 100 mètres cubes, $\frac{3}{10}$ de 100 mètres cubes, etc., soit des angles représentant 10 mètres cubes, 20 mètres cubes, 30 mètres cubes, etc. Il est clair que, les arcs compris entre *ib* et *bn* étant divisés de la même manière, en joignant au centre les points d'intersection de ces arcs avec *ib* on aurait de nouveaux rayons faisant entre eux des angles égaux, et avec *aC* des angles représentant 60 mètres cubes, 70 mètres cubes, 80 mètres cubes, 90 mètres cubes, jusqu'à *bCa* qui représente 100 mètres cubes.

Ceci n'est point rigoureux; si l'on joignait successivement les points qui sur les arcs intermédiaires répondent à des angles égaux au dixième de *bCa*, on aurait, non pas des lignes droites, comme *ai* et *ib*, mais des arcs de spirale d'Archimède. Mais ces arcs sont assez peu étendus pour pouvoir être confondus avec des lignes droites. — On pourrait également éviter d'avoir à mesurer au compas et à rapporter à une échelle les distances telles que *aA*, *mM*, *nN*, etc. Il suffirait pour cela de tracer des circonférences concentriques équidistantes qui diviseraient les rayons de la circonférence *CO* (fig. 2) en parties égales à l'unité de l'échelle. (Voy. pour plus de détail l'ouvrage de M. Viel ayant pour titre *Construction des bâtiments de mer.*)

ÉCHIFFRE, partie courbe du limon d'un ESCALIER (Voy. ce mot). L'évaluation de son volume est une application du THÉORÈME DE GULDIN (Voy. ce mot); ce volume équivaut à la section normale multipliée par la ligne que décrit son centre de gravité pour engendrer l'échiffre.

ÉCLIMÈTRE (du grec κλίνω, incliner, et de μέτρον, mesure), boussole dont la lunette parcourt un cercle vertical divisé, et peut ainsi servir à la mesure des inclinaisons. (Voy. NIVEAU.)

ÉCLIPSE (du grec εκλειψις, manque, défaut), disparition momentanée du disque d'un astre, ou d'une partie de ce disque, par l'interposition d'un autre astre, soit entre le premier et l'observateur, soit entre le premier et le soleil. Mais on n'applique la dénomination dont il s'agit qu'aux éclipses de lune, aux éclipses de soleil, et aux éclipses des satellites de Jupiter; pour les autres astres, les éclipses prennent les noms d'OCCULTATION ou de PASSAGE (Voy. ces mots).

ÉCLIPSES DE LUNE. Il y a éclipse de lune quand cet astre pénètre en tout ou en partie dans le cône d'ombre que la terre projette dans l'espace. Il est facile de s'assurer que cela est possible; soient *S* et *T* (fig. 1) les centres du soleil et de la terre; le sommet *O* du cône d'ombre projeté par la terre dans l'espace est le point de concours des tangentes

extérieures AB et A' B' menées aux cercles d'intersection du soleil et de la terre par un plan quelconque mené suivant ST; en menant les rayons SA et TB, on a donc, par des similitudes évidentes,

$$\frac{OT}{OS} = \frac{BT}{AS}$$

$$\text{ou } \frac{OT}{OT + ST} = \frac{BT}{AS};$$

mais si le rayon terrestre BT est pris pour unité, on a AS = 112, et ST = 24068 (Voy. SOLEIL); il vient donc

$$\frac{OT}{OT + 24068} = \frac{1}{112}$$

d'où OT = 216,8, c'est-à-dire que la longueur du cône d'ombre projeté par la terre vaut plus de 216 fois le rayon terrestre. Or, la distance de la terre à la lune est au plus de 64 fois le rayon terrestre (Voy. LUNE); ainsi la lune peut pénétrer dans le cône d'ombre projeté par la terre. Elle peut même être contenue tout entière dans ce cône; car si l'on désigne par π le rayon de la section droite de ce cône faite à une distance de la terre égale à 64, ou à une distance du sommet égale à 216 - 64 ou à 152, on aura la proportion

$$\frac{x}{1} = \frac{152}{216}, \text{ d'où } x = \frac{19}{27} \text{ du rayon terrestre.}$$

Or le rayon de la lune n'est que les $\frac{3}{11}$ du rayon de la terre; la fraction $\frac{3}{11}$ étant moindre que $\frac{19}{27}$, il en résulte que, même à la plus grande distance de la terre, la lune peut être contenue tout entière dans le cône d'ombre que projette notre globe.

La lune serait donc éclipsée à chaque opposition, ou à chaque pleine lune, si son orbite coïncidait avec le plan de l'écliptique; mais comme cette orbite est inclinée de 5 degrés environ sur ce plan, la lune peut, au moment de l'opposition, se trouver au-dessus ou au-dessous du cône d'ombre projeté par la terre, et, dans ce cas, il n'y a point d'éclipse. Pour que l'éclipse ait lieu, il faut qu'au moment de l'opposition la lune soit très-près de l'écliptique, c'est-à-dire près de l'un de ses nœuds, et que, par conséquent, la ligne des nœuds soit sensiblement dirigée vers le soleil. Il faut en outre que la latitude de la lune soit au-dessous d'une certaine limite, facile à déterminer. Soient (fig. 2) S, T, O le centre du soleil, celui de la terre et le sommet du cône d'ombre; supposons que les sections AS et BT soient perpendiculaires au plan de l'écliptique; imaginons que la latitude de la lune soit telle, que cet astre vienne toucher en I le cône d'ombre projeté par la

lune, auquel cas il n'y aurait pas d'éclipse, mais un simple contact de l'ombre avec le disque lunaire; menons IT et BS. La latitude du point I est l'angle ITO, et l'on a

$$ITO = BIT - IOT;$$

mais

$$IOT = AOS = ABS - BST,$$

donc

$$ITO = BIT + BST - ABS.$$

Or BIT est l'angle sous lequel on verrait, de la lune, le rayon BT de la terre; c'est donc la parallaxe π de la lune; l'angle BST est de même la parallaxe p du soleil, et ABS est le demi-diamètre apparent du soleil, ou

$\frac{1}{2} d$. D'ailleurs la latitude du point I est évidemment égale à la latitude l du centre de la lune, diminuée de son demi-diamètre apparent $\frac{1}{2} \delta$. On a donc dans le cas de la figure

$$l - \frac{1}{2} \delta = \pi + p - \frac{1}{2} d.$$

Pour que l'éclipse soit possible, il faut donc que l'on ait en général

$$l < \frac{1}{2} \delta + \pi + p - \frac{1}{2} d.$$

En mettant pour les quantités qui figurent dans le second membre les limites entre lesquelles elles peuvent varier, on trouve que l'éclipse est impossible lorsque l est supérieure à 63' 45", et qu'elle est certaine au contraire lorsque l est inférieure à 51' 57".

Il faut enfin qu'au moment de l'opposition la distance du soleil au nœud de la lune le plus voisin soit comprise entre 12° 3' et 9° 31'; cette condition se lie d'ailleurs à la précédente, car la distance du soleil au nœud de la lune le plus voisin est égale à la distance de l'autre nœud au point où l'axe du cône d'ombre projeté par la terre perce la sphère céleste; or ce point, le nœud voisin et le centre de la lune sont les sommets d'un triangle sphérique rectangle dont l'un des angles est l'inclinaison de l'orbite lunaire, et le côté opposé la latitude de la lune.

Quand on a reconnu que l'éclipse est possible, on en détermine les principales circonstances à l'aide du procédé suivant. On connaît pour l'instant de l'opposition la distance de la lune à la terre et celle de la terre au soleil; on peut donc en conclure, comme nous l'avons vu tout à l'heure, la longueur du cône d'ombre projeté par la terre, et le rayon de la section droite de ce cône au point où la lune peut y pénétrer. Pendant la courte durée de l'éclipse on peut admettre sans erreur sensible que la portion de la sphère céleste sur laquelle se meurent la lune et l'ombre de la terre soit remplacée par un plan, et que les mouvements de ces deux mobiles soient uniformes. Soit O (fig. 3) le centre de l'ombre, et EE' la droite qui représente l'écliptique; du point O comme centre décrivons un cercle CA

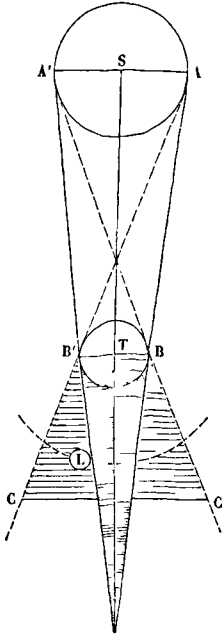


Fig. 1.

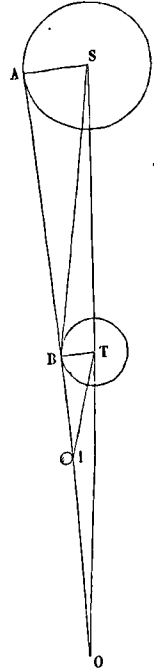


Fig. 2.

qui nous représentera, à une certaine échelle, la section droite du cône d'ombre au point où la lune y pénètre. On peut, pour plus de facilité, regarder ce cercle comme immobile, à la condition de n'attribuer à la lune que la différence des mouvements

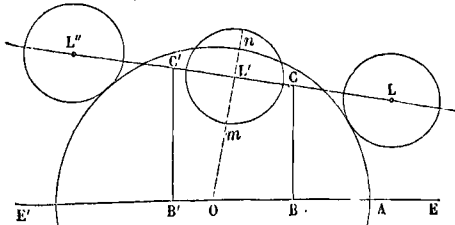


Fig. 3.

en longitude de la lune et de ce cercle; leur mouvement relatif ne sera point changé. Cela posé, ayant calculé la différence des longitudes pour un instant déterminé qui précède l'opposition, on porte cette différence en abscisse de O en B, à l'échelle qui a servi à tracer le cercle OA, et l'on élève au point B une perpendiculaire à EE' sur laquelle on porte, à la même échelle, une longueur BC représentant la latitude correspondante de la lune; ayant calculé de même la différence des longitudes pour un instant déterminé qui suit l'opposition, on porte cette différence de O en B', et l'on élève la perpendiculaire B'C' égale à la latitude correspondante; la droite CC' représente le chemin relatif du centre de la lune par rapport au cercle d'ombre OA. L'éclipse commencera et finira quand le centre de la lune sera à une distance du point O égale au rayon OA augmenté du demi-diamètre de la lune; on cherchera donc sur la droite CC' deux points L et L' remplissant cette condition, ce qui peut se faire par une construction graphique, et plus exactement par le calcul, comme on le verra plus bas; ces points seront les positions occupées par le centre de la lune au commencement et à la fin de l'éclipse. Connaissant le temps employé par la lune pour se transporter de C en C', on en déduira par une proportion le temps qu'elle devra employer pour aller de L en C, ce qui fera connaître l'instant précis où l'éclipse commence; on obtiendra de même l'instant précis où elle finit, et par conséquent la durée de l'éclipse. Le point L', milieu de LL'', répondra au milieu de l'éclipse, c'est-à-dire à l'instant de la plus grande intensité du phénomène. On appelle *grandeur* de l'éclipse le rapport qui existe entre la portion mn du diamètre de la lune perpendiculaire à CC' qui est comprise dans le cercle d'ombre OA, et le diamètre tout entier; pour l'exprimer, les astronomes divisent le diamètre de la lune en 12 parties qu'ils appellent *doigts*, et ils indiquent le nombre de ces doigts contenus dans mn. Dans l'exemple de la figure, l'éclipse serait d'environ 10 doigts. L'éclipse est *totale* quand tout le disque lunaire L' est compris dans le cercle

d'ombre OA; elle est *partielle* dans le cas contraire.

Nous avons dit que les principales circonstances de l'éclipse pouvaient être déterminées par le calcul. Soit, en effet, EE' (fig. 4) l'écliptique, O le centre

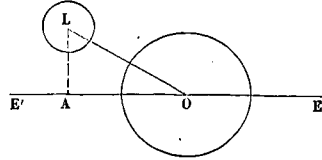


Fig. 4.

de la section droite du cône d'ombre au point où la lune y pénètre, et L le centre de la lune. Menons LA perpendiculaire sur EE' et joignons OL. Soit t le temps, positif ou négatif, qui sépare l'instant considéré de celui de l'opposition. La longueur OA sera le chemin relatif parcouru dans le temps t par la projection A du centre de la lune sur l'écliptique, en vertu de la différence des vitesses de la lune et du cercle O en longitude, et si v désigne la vitesse relative des points L et O en longitude, on aura $OA = vt$. La longueur LA, ou la latitude actuelle de la lune, se compose de sa latitude au moment de l'opposition, que nous représenterons par λ , plus le chemin que le point L a parcouru en latitude dans le temps t ; le mouvement de ce point en latitude peut être regardé comme uniforme pendant le temps très-court que l'on considère, et sa vitesse peut être déduite de l'inspection des tables de la lune; en désignant cette vitesse par u , on aura donc $LA = \lambda + ut$. Le triangle rectangle OAL donnera par conséquent, en désignant OL par d ,

$$v^2 t^2 + (\lambda + ut)^2 = d^2, \quad [1]$$

relation dans laquelle les quantités v, u, d sont supposées exprimées en degrés.

Le commencement et la fin de l'éclipse répondront aux instants pour lesquels les deux cercles O et L sont tangents extérieurement; en désignant par R et r leurs rayons, on aura donc les instants dont il s'agit en cherchant les valeurs de t qui répondent à

$$d = R + r.$$

Si t' et t'' désignent les temps ainsi obtenus, leur moyenne algébrique $\frac{1}{2}(t' + t'')$ répondra au milieu de l'éclipse, c'est-à-dire à l'instant où les centres O et L sont le plus rapprochés possible, ce qu'on verrait également en égalant à zéro la dérivée de d par rapport à t . La durée totale de l'éclipse sera au contraire la différence algébrique des valeurs t' et t'' .

La grandeur de l'éclipse s'obtiendra en remarquant que l'on a (fig. 3)

$$mn = mL' + L'n = mL' + On - OL',$$

c'est-à-dire que mn n'est autre chose que l'excès de la somme des rayons sur la distance des centres; le rapport de cet excès au diamètre du cercle L' représentera donc la grandeur cherchée; et si l'on veut l'exprimer en doigts, il suffira de multiplier le dividende par 12 et d'évaluer le quotient à une unité près.

Si l'éclipse est totale, ce qui aura lieu quand l'excès dont on vient de parler surpassera le dia-

mètre du cercle L, on déterminera l'instant où l'éclipse commence à être totale et celui où elle cesse de l'être en cherchant, à l'aide de l'équation [1], les valeurs de t pour lesquelles on a

$$d = R - r,$$

puisque les instants dont il s'agit sont ceux pour lesquels les deux cercles sont tangents intérieurement.

Les valeurs t' et t'' considérées plus haut pourraient être imaginaires; dans ce cas, il n'y aurait point d'éclipse; si elles étaient égales, il n'y aurait qu'un simple contact de la lune et du cône d'ombre, contact auquel on donne le nom d'*appulse*.

Pour déterminer la portion de la surface terrestre d'où l'éclipse sera visible, on cherche d'abord celle d'où l'on verra le milieu de l'éclipse. Pour cela on cherche le lieu qui, à cet instant, aura la lune à son zénith; dans ce lieu il sera évidemment minuit; et comme on connaît l'heure qu'il sera à Paris, on peut en déduire la longitude géographique de ce lieu (après avoir converti le temps moyen en temps vrai). Quant à la latitude géographique de ce même lieu, elle est égale à la déclinaison du centre de la lune, qui est donnée, pour l'instant considéré, par la *Connaissance des temps*. Si l'on regarde le lieu ainsi déterminé comme le pôle d'un grand cercle terrestre, ce grand cercle séparera le globe en deux hémisphères dont l'un verra le milieu de l'éclipse, tandis que l'autre ne le verra pas. On déterminera de la même manière l'hémisphère qui verra le commencement de l'éclipse et celui qui en verra la fin; et l'on obtient ainsi tous les lieux du globe pour lesquels l'éclipse sera visible. On reconnaît que ces lieux embrassent plus d'une moitié de la surface terrestre.

Nous avons raisonné jusqu'ici comme si la lune passait brusquement de la partie éclairée du ciel dans le cône d'ombre pure projetée par la terre; il n'en est point ainsi. Si l'on mène (fig. 1) les tangentes intérieures $O'C$ et $O'C'$ et qu'on les fasse tourner autour de ST , on obtient un second cône, ayant son sommet en O' ; tous les points de l'espace compris entre ce second cône et le premier aperçoivent une partie du disque solaire, et reçoivent de lui une certaine quantité de lumière, d'autant plus grande qu'ils sont plus rapprochés de la surface de ce second cône. Il en résulte que l'ombre pure projetée par la terre est entourée d'une *pénombre* dans laquelle la lune doit d'abord pénétrer; en sorte qu'elle passe graduellement de la partie éclairée du ciel à la partie qui est dans l'ombre pure; et que sa lumière, au lieu de disparaître brusquement, va en s'affaiblissant peu à peu jusqu'à ce qu'elle ait disparu. On peut déterminer par le calcul l'instant où la lune entre dans la pénombre et l'instant où elle en sort; Mayer a trouvé que pour tenir compte de la pénombre, il faut augmenter d'un soixantième le diamètre de l'ombre. Mais l'observation directe laisse toujours quelque incertitude sur l'instant précis où le phénomène commence et sur celui où il finit. C'est pourquoi les éclipses de lune ne sont point employées avec succès pour mesurer les longitudes.

Nous avons supposé que les rayons solaires tangents au globe terrestre continuaient leur route en ligne droite, et c'est d'après cette hypothèse que nous avons calculé la longueur du cône d'ombre

projeté par la terre; en réalité ces rayons s'infléchissent en traversant l'atmosphère, et vont concourir beaucoup plus près de la terre que nous ne l'avions supposé. On a calculé que l'ombre pure ne s'étend guère au delà de 42 rayons terrestres; en sorte que la lune n'y pénètre jamais. Dans l'ombre que la lune traverse, il y a toujours une petite quantité de lumière solaire; aussi le disque de la lune reste-t-il visible même dans les éclipses totales. Il prend alors une teinte rougeâtre, qui provient de ce que les rayons de l'extrémité rouge du spectre sont moins absorbés par l'atmosphère que les rayons de l'extrémité violette.

L'observation des éclipses de lune fournit une preuve de la rondeur de la terre; on remarque, en effet, que l'échancrure produite sur le disque de la lune par l'ombre de la terre a la forme d'un arc de cercle.

ÉCLIPSES DE SOLEIL. Il y a éclipse de soleil lorsque la lune s'interpose entre le soleil et la terre; mais les apparences sont diverses suivant les distances relatives de ces trois corps. Si l'on procède comme nous avons fait ci-dessus pour calculer la longueur du cône d'ombre projeté par la terre, on trouve que la longueur du cône d'ombre projeté par la lune varie entre 57,76 et 59,73, l'unité étant le rayon de l'équateur terrestre; d'un autre côté la distance de la lune à la terre varie entre 37,34 et 64,00 (*Voy. LUNE*). Il peut donc arriver ou que la surface de la terre coupe le cône d'ombre projeté par la lune, comme le montre la figure 5; ou que le sommet

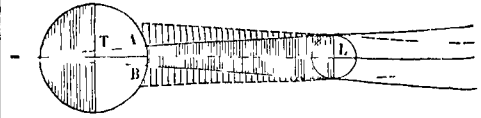


Fig. 5.

seulement de ce cône atteigne la surface terrestre, comme l'indique la fig. 6; ou enfin que ce sommet

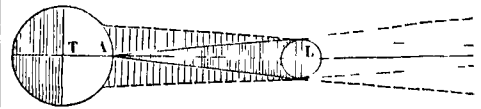


Fig. 6.

n'atteigne pas la terre, comme on le voit sur la fig. 7. Dans le premier cas, l'éclipse est *totale* pour

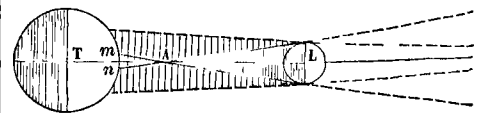


Fig. 7.

les spectateurs placés sur la partie AB de la surface terrestre plongée dans le cône d'ombre; elle est *partielle* pour tous les lieux situés dans la pénombre lunaire, et il n'y a point éclipse pour les lieux placés en dehors de cette pénombre.

Dans le deuxième cas, l'éclipse n'est totale que pour les spectateurs placés au point A .

Dans le troisième cas, l'éclipse est *annulaire* pour les lieux placés sur la portion mn de la surface ter-

restre comprise dans la seconde nappe du cône; c'est-à-dire que pour ces lieux l'éclipse présente un disque circulaire obscur entouré d'un anneau lumineux, la partie obscure correspondant aux rayons visuels qui traversent le cône d'ombre, et l'anneau lumineux aux rayons visuels qui vont des points de *mn* au soleil sans traverser ce cône. Dans les deux derniers cas l'éclipse est *centrale* pour le point de la surface terrestre placé sur l'axe du cône d'ombre. Ces résultats s'expliquent également bien par la considération des diamètres apparents.

Les éclipses de soleil ne peuvent avoir lieu qu'à l'époque des conjonctions, c'est-à-dire aux nouvelles lunes; et il y aurait éclipse à chaque conjonction si l'orbite lunaire coïncidait avec l'écliptique. Il faut pour qu'il y ait éclipse, qu'au moment de la conjonction la lune se trouve près de l'un de ses nœuds. Par des considérations analogues à celles que nous avons employées pour les éclipses de lune, on trouve que, pour qu'il y ait éclipse de soleil, la latitude de la lune, à l'époque de la conjonction, doit satisfaire à l'inégalité

$$l < \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\delta + \pi - p,$$

dans laquelle les lettres ont la même signification

que ci-dessus; et, en ayant égard aux limites entre lesquelles varient ces quantités, on reconnaît que l'éclipse est impossible si l'on a $l > 1^{\circ}34'52''$, et qu'elle est certaine si l'on a $l < 1^{\circ}23'18''$. Il faut en outre que la distance de la lune à son nœud ne dépasse pas $18^{\circ}26'$.

La possibilité de l'éclipse une fois reconnue, on en détermine les principales circonstances par un procédé analogue à celui qui a été indiqué pour les éclipses de lune, c'est-à-dire en étudiant le mouvement relatif du disque solaire et du disque lunaire; on calcule à cet effet la position relative de ces deux disques à des intervalles de temps très-rapprochés, par exemple de 10 minutes en 10 minutes, et l'on obtient l'instant précis où le phénomène commence, celui où il finit, sa durée et le moment où il est parvenu à son maximum d'intensité. La grandeur de l'éclipse s'évalue en *doigts*, comme pour les éclipses de lune.

Lorsque les astronomes ont fait les calculs d'une éclipse de soleil, ils en consignent ordinairement les résultats sur une carte qui permet d'embrasser d'un coup d'œil la marche du phénomène dans tous les lieux du globe.

La figure 8 représente une de ces cartes.

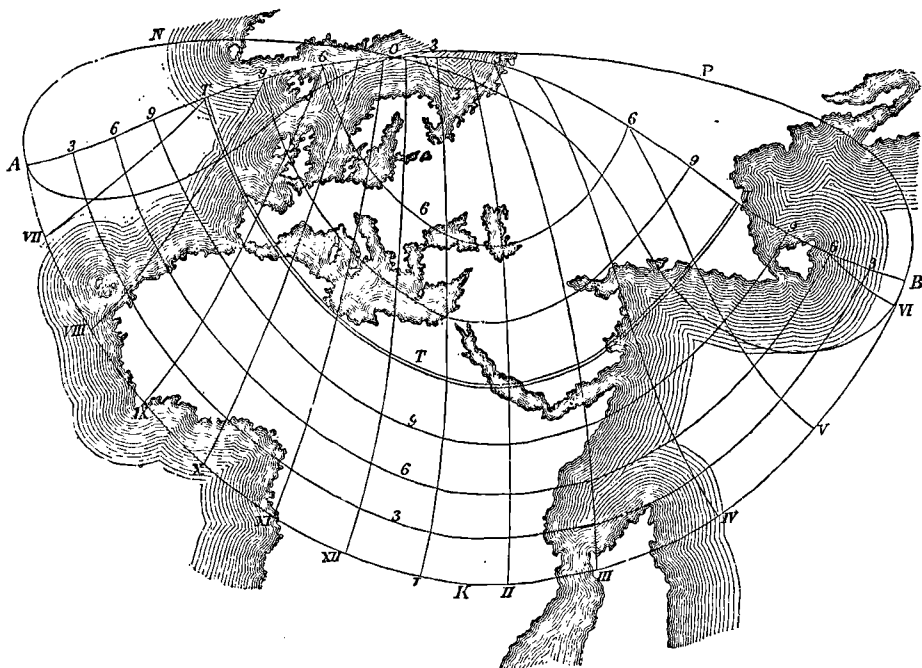


Fig. 8.

La courbe OMA réunit les lieux du globe pour lesquels l'éclipse commence au lever du soleil; la courbe ONA ceux pour lesquels l'éclipse finit au lever du soleil; la courbe OTA ceux pour lesquels le milieu de l'éclipse coïncide avec le lever du soleil. La courbe OPB réunit les lieux du globe pour lesquels l'éclipse commence au coucher du soleil; la courbe OQB ceux pour lesquels elle finit au coucher du soleil; la courbe OTB ceux pour lesquels le milieu

de l'éclipse coïncide avec le coucher du soleil. Le nœud O de cette courbe en forme de 8 est le point du globe où le soleil ne fait qu'apparaître un instant le jour de l'éclipse. Les courbes qui se terminent aux points VII, VIII, IX, etc., passent par les lieux du globe pour lesquels le milieu de l'éclipse répond à VII heures, à VIII heures, à IX heures, etc. Les courbes 3, 3, 3 réunissent les lieux où la grandeur de l'éclipse est de 3 doigts; les courbes 6, 6, 6

ceux où elle est de 6 doigts; les courbes 9, 9, 9 ceux où elle est de 9 doigts; enfin la bande TTT passe par les lieux où l'éclipse est totale; c'est en quelque sorte la trace que l'extrémité du cône d'ombre projetée par la lune laisserait sur la surface du globe. La courbe AKB passe par les points du globe pour lesquels l'éclipse se réduit à un simple contact du bord du disque lunaire avec le bord du disque du soleil.

Les éclipses de soleil sont des phénomènes extrêmement remarquables, qui ont été longtemps un objet de terreur. A mesure que l'ombre de la lune échancre le disque solaire, la lumière s'affaiblit; mais les ombres conservent leur netteté; la température s'abaisse; certains animaux donnent des signes d'effroi. Lorsque l'éclipse est totale, une véritable nuit succède au jour; cependant l'obscurité n'est jamais complète, à cause des rayons solaires réfléchis par les parties supérieures de l'atmosphère terrestre. Le disque noir qui couvre le soleil est entouré d'une auréole lumineuse analogue à ce que l'on appelle une *gloire*; et les bords de la lune paraissent hérissés de protubérances roses dont la cause est encore inconnue. Mais bientôt le soleil reparaît sous la forme d'un mince filet lumineux, qui va graduellement en s'élargissant, l'échancrure du disque solaire diminue peu à peu, le disque reparaît dans toute sa splendeur, et l'éclipse est terminée. La durée totale d'une éclipse de soleil ne peut à l'équateur excéder $4^{\text{h}} 29^{\text{m}} 44^{\text{s}}$; et, à la latitude de Paris, $3^{\text{h}} 26^{\text{m}} 32^{\text{s}}$. Le temps pendant lequel le disque solaire peut être entièrement caché ne peut excéder $7^{\text{m}} 58^{\text{s}}$ à l'équateur et $6^{\text{m}} 10^{\text{s}}$ à la latitude de Paris.

REMARQUES SUR LES ÉCLIPSES DE SOLEIL ET DE LUNE. On peut remarquer que dans les éclipses de soleil, aussi bien que dans les éclipses de lune, c'est toujours par le contact du bord oriental de la lune que l'éclipse commence. En effet, le soleil ou l'ombre de la terre ont, l'un et l'autre, un mouvement propre en sens inverse du mouvement diurne; la lune a aussi un mouvement propre en sens inverse du mouvement diurne; mais il est environ 13 fois plus rapide que celui du soleil, ou que celui de l'ombre de la terre sur la sphère céleste. Il en résulte qu'une éclipse de lune commence lorsque le bord oriental de la lune pénètre dans l'ombre de la terre; et le commencement d'une éclipse de soleil répond à l'instant où le bord oriental de la lune vient toucher le bord occidental du disque du soleil.

Il y a, dans un nombre d'années déterminé, plus d'éclipses de soleil que d'éclipses de lune; mais ces dernières étant visibles de plus d'un hémisphère, tandis que les premières ne sont visibles que d'une portion restreinte de la surface du globe, il en résulte que, dans un même lieu, les éclipses de lune sont plus fréquentes que les éclipses de soleil. Il ne peut y avoir dans une même année plus de 7 éclipses, ni moins de 2; quand il y en a 2, ce sont des éclipses de soleil. Dans une période de 19 ans, il y a 70 éclipses, dont 41 de soleil et 29 de lune; mais nous répétons que, dans un lieu déterminé, il y a plus d'éclipses de lune que d'éclipses de soleil.

Les anciens étaient parvenus à prédire le retour des éclipses, par la considération d'une certaine période astronomique, qui n'est autre chose que le SAROS des Chaldéens (*Voy.* ce mot). Ils avaient re-

marqué que 19 révolutions synodiques du nœud de la lune forment une période de temps sensiblement égale à 223 révolutions synodiques de la lune elle-même. Il en résulte qu'au bout de ce temps le soleil, la lune et son nœud sont revenus aux mêmes positions, et que par conséquent les éclipses doivent se reproduire dans le même ordre; en sorte que pour pouvoir prédire le retour des éclipses, il suffit de les avoir observées avec soin pendant 19 ans (plus exactement 18 ans et 11 jours).

C'est ainsi sans doute que Thalès put prédire l'éclipse de l'an 603 avant J. C. qui mit fin à la guerre des Mèdes et des Perses; c'est encore ainsi que Halley prédit l'éclipse du 2 juillet 1684.

Aujourd'hui cette période n'est plus employée que comme un moyen facile et prompt d'obtenir approximativement l'époque des éclipses; c'est sur l'étude attentive de la marche de la lune et de celle du soleil qu'est fondée la possibilité de prédire les éclipses avec exactitude.

Les plus anciennes observations d'éclipses sont dues aux Chinois; un de ces phénomènes est mentionné par eux 2155 ans avant J. C. Les Chaldéens avaient, dès l'an 721 avant l'ère actuelle, fait des observations d'éclipses dont Ptolémée a fait usage plus tard. La théorie des éclipses, perfectionnée par Képler, s'est successivement agrandie par les travaux des astronomes modernes, et est devenue une source d'observations intéressantes. La géographie, la navigation, la chronologie y ont continuellement recours.

ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER. Jupiter projette dans l'espace, dans la direction opposée au soleil, un cône d'ombre dans lequel ses satellites peuvent pénétrer. En effet, la moyenne distance de la planète au soleil est exprimée par 5,203, celle de la terre étant 1; en sorte que si l'on exprime cette dernière en rayons terrestres, la distance de Jupiter au soleil sera exprimée par $24000 \times 5,203$. D'un autre côté, le rayon équatorial de Jupiter est exprimé par 11,225, celui de la terre étant 1. Si donc on représente par x la longueur du cône d'ombre, on aura

$$24000 \times 5,203 + x : x = 112 : 11,225,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{24000 \times 5,203 \times 11,225}{112 - 11,225}$$

$$= 13908 \text{ rayons terrestres.}$$

Enfin la moyenne distance du quatrième satellite au centre de Jupiter est exprimée par 27, le rayon équatorial de cette planète étant 1; si donc on exprime ce dernier en rayons terrestres, la distance du satellite à la planète sera représentée par $11,225 \times 27$ ou par 303 rayons terrestres. On voit donc que la longueur du cône d'ombre est très-grande par rapport à la distance du quatrième satellite à la planète; les satellites peuvent donc y pénétrer. Les trois premiers y pénètrent, en effet, à chaque révolution, parce que le plan de leur orbite est très-peu incliné sur celui de la planète; le quatrième satellite seul passe quelquefois au-dessus ou au-dessous du cône d'ombre.

Quand un des satellites de Jupiter pénètre ainsi dans le cône d'ombre que cette planète projette dans l'espace, il en résulte une éclipse de ce satellite tout à fait analogue à une éclipse de lune. On emploie quelquefois ces éclipses à la détermina-

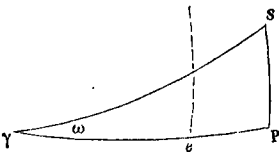
tion des longitudes géographiques, quoique, en raison de la pénombre dont l'ombre principale est entourée, l'observation de l'éclipse ne soit pas susceptible d'une très-grande précision. La *Connaissance des temps* donne, en temps moyen de Paris, l'heure à laquelle doit avoir lieu soit l'immersion, soit l'émergence de chaque satellite; pour les deux premiers les tables ne donnent que l'instant de l'immersion ou celui de l'émergence, parce que ces deux satellites sont trop près de la planète pour qu'on puisse observer leur entrée dans le cône d'ombre et leur sortie.

Les éclipses des satellites de Jupiter sont des phénomènes très-fréquents, puisque le premier satellite accomplit sa révolution en 1^h,77, le second en 3^h,55, le troisième en 7^h,15, le quatrième en 16,69. Il y a donc de 300 à 400 éclipses de ce genre dans une année; mais elles ne sont pas toujours observables; vers l'époque de la conjonction Jupiter est presque entièrement effacé à nos yeux par l'éclat du soleil; et pendant plusieurs mois les éclipses de ces satellites ne peuvent être observées.

Lorsqu'un des satellites de Jupiter passe sur le disque de la planète, il en résulte un phénomène analogue à une éclipse de soleil; mais ces éclipses ne peuvent être observées qu'avec des instruments puissants; tandis qu'une lunette médiocre suffit pour observer les éclipses des satellites. (*Voy.* CONFIGURATIONS des satellites de Jupiter.)

ECLIPTIQUE, grand cercle de la sphère céleste que le centre du soleil décrit d'occident en orient dans son mouvement propre apparent. Si l'on détermine chaque jour l'ascension droite et la déclinaison du soleil à son passage au méridien, et que l'on marque sur un globe les positions successives déterminées par ces éléments, on reconnaît qu'elles sont situées sur un grand cercle, incliné d'environ 23° 27' 30" sur l'équateur. Ce cercle se nomme *écliptique*, parce que les éclipses (*Voy.* ce mot) ne peuvent avoir lieu que lorsque la lune est dans le plan de ce cercle, ou très-voisine de ce plan. Les points où l'écliptique coupe l'équateur se nomment les *équinoxes*, parce que lorsque le soleil y est arrivé, la durée du jour est égale à celle de la nuit pour toutes les contrées du globe; celui des deux équinoxes qui répond à l'instant où le soleil passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal est l'*équinoxe du printemps*, ou *point vernal*; l'autre est l'*équinoxe d'automne*. Les points situés sur l'écliptique à 90° de distance des équinoxes se nomment les *solstices*, parce que lorsque le soleil y est arrivé, sa déclinaison, qui devient décroissante, de croissante qu'elle était, reste sensiblement la même pendant plusieurs jours, en sorte que le soleil semble s'arrêter, dans son mouvement en déclinaison.

L'équinoxe du printemps et l'obliquité de l'éclip-



tique peuvent être déterminés en même temps par deux observations du soleil dans lesquelles on rapporte provisoirement les ascensions droites au mé-

ridien d'une étoile déterminée. Soient α et α' ces ascensions droites provisoires, et x l'ascension droite de l'étoile rapportée au point vernal inconnu; les ascensions droites définitives seront $\alpha - x$ et $\alpha' + x$, Soient d et d' les déclinaisons observées. Soit γ le point vernal, S la position du soleil relative à la première observation, et SP l'arc du méridien qui mesure la déclinaison correspondante d ; γP sera l'ascension droite définitive $\alpha + x$; et en nommant ω l'angle $S\gamma P$, ou l'obliquité de l'écliptique, on aura dans le triangle $S\gamma P$ rectangle en P

$$\sin(\alpha + x) \cdot \text{tang } \omega = \text{tang } d. \quad [1]$$

Pour la seconde observation on aura de même

$$\sin(\alpha' + x) \cdot \text{tang } \omega = \text{tang } d'. \quad [2]$$

Ces deux équations donneront ω et x .

Pour les résoudre, on développe les premiers membres; et en posant

$$\cos x \text{ tang } \omega = x' \text{ et } \sin x \text{ tang } \omega = y', \quad [3]$$

les équations [1] et [2] deviennent

$$x' \sin \alpha + x' \cos \alpha = d; \quad y' \sin \alpha' + y' \cos \alpha' = d'; \quad [4]$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{d' \cos \alpha - d \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \text{ et } y' = \frac{d \sin \alpha' - d' \sin \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}. \quad [5]$$

x' et y' étant déterminés, on déduit des relations [3]

$$\text{tang } x = \frac{y'}{x'} = \frac{d \sin \alpha' - d' \sin \alpha}{d' \cos \alpha - d \cos \alpha'}$$

$$\text{et tang } \omega = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\sqrt{d^2 + d'^2 - 2dd' \cos(\alpha' - \alpha)}}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

Comme $\sin(\alpha' - \alpha)$ est en dénominateur, il convient pour plus d'exactitude de faire les deux observations à des époques pour lesquelles $\alpha' - \alpha$ soit le plus près possible de 90°. Ordinairement on fait la première observation vers l'équinoxe et la seconde vers le solstice suivant.

Les observations modernes comparées à celles des anciens ont fait voir que l'obliquité de l'écliptique a subi depuis l'antiquité une diminution lente et progressive; la Mécanique céleste donne l'explication de ce phénomène et démontre que l'obliquité, après avoir diminué pendant une certaine période de temps, doit varier en sens contraire, en oscillant autour d'une valeur moyenne. La diminution de l'obliquité est actuellement d'environ 48" par siècle.

La valeur moyenne de l'obliquité au 1^{er} janvier 1862 était de 23° 27' 27",24.

La droite menée par le centre de l'écliptique perpendiculairement au plan de ce cercle porte le nom d'*axe de l'écliptique*; et les points où cet axe perce la sphère céleste sont les *pôles de l'écliptique*.

Si l'on a égard, non plus aux mouvements apparents, mais aux mouvements réels, l'écliptique est l'orbite de la terre, ellipse dont le centre du soleil occupe l'un des foyers. Si l'on néglige la *PRÉCESSION* (*Voy.* ce mot), le plan de l'équateur peut être regardé comme restant sensiblement parallèle à lui-même; les équinoxes répondent aux époques où ce plan vient passer par le centre du soleil. Les solstices répondent aux époques où le soleil se trouve dans un plan mené par le centre de la terre perpendiculairement à la ligne des équinoxes.

Nous avons admis en commençant que les diverses positions du soleil observées étaient sur un cercle de la sphère. Voici comment on s'en assure par le calcul. En appelant α l'ascension droite du soleil, rapportée pour plus de simplicité au point équinoxial, on a entre cette ascension droite, la déclinaison

raison d du soleil et l'angle ω que l'écliptique fait avec l'équateur, la relation

$$\text{tang } d = \text{tang } \omega \sin a. \quad [1]$$

Pour deux autres positions du soleil on aura de même, en appelant d' et d'' les nouvelles déclinaisons, a' et a'' les ascensions droites correspondantes,

$$\text{tang } d' = \text{tang } \omega \sin a', \quad [2]$$

$$\text{tang } d'' = \text{tang } \omega \sin a''. \quad [3]$$

Si l'on multiplie l'équation [1] par $\sin(a'' - a')$, l'équation [2] par $\sin(a - a'')$, l'équation [3] par $\sin(a' - a)$, et qu'on ajoute membre à membre les équations obtenues, le coefficient de $\text{tang } \omega$ devient identiquement nul, et il reste

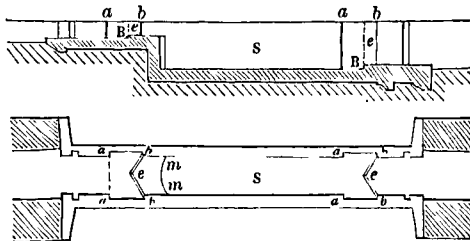
$$\text{tang } d \sin(a'' - a') + \text{tang } d' \sin(a - a'') + \text{tang } d'' \sin(a' - a) = 0;$$

c'est la condition pour que les trois positions considérées soient sur un grand cercle coupant l'équateur au point γ . Or, si l'on prend trois positions quelconques du soleil, cette condition est toujours satisfaite, on en conclut que cet astre, dans son mouvement annuel apparent, décrit un grand cercle de la sphère céleste.

(Voy. ORBITE APPARENTE DU SOLEIL.)

ÉCLUSES A SAS, mode particulier de communication établi, pour le service de la navigation, entre deux portions d'un cours d'eau situées à des niveaux différents. Ces écluses, imaginées vers 1480 par Léonard de Vinci, ont été appliquées pour la première fois en France au canal de Briare, puis au canal du Languedoc.

I. Une écluse simple est un pertuis fermé par une porte à deux vantaux, légèrement inclinés vers l'amont, et dans lesquels sont pratiquées des ouvertures fermées par des VANNES (Voy. ce mot). Une écluse à sas se compose de deux écluses simples e, e ,



séparées par un intervalle S que l'on nomme le *sas*. Cet intervalle est limité latéralement par des murs verticaux auxquels on donne le nom de *bajoyers*. Sa capacité doit être égale au moins à celle qui est nécessaire pour contenir un bateau. Le système des écluses à sas a beaucoup varié; voici les dispositions actuellement adoptées. L'arête de rencontre des deux vantaux de chaque porte ou écluse simple est en saillie vers l'amont sur le plan des tourillons de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{5}$ de la largeur du pertuis. Le tourillon de chaque porte est logé dans un refouillement ab du bajoyer, qui peut recevoir le vantail entier quand la porte est ouverte, et que l'on nomme l'*enclave*. Le fond ou radier de l'écluse présente une saillie B appelée *busc* contre laquelle les deux vantaux s'appuient quand la porte est fermée, de manière à empêcher l'eau de passer, et à permettre aux vantaux de s'ouvrir sans porter par le bas. Le *busc*

se prolonge à l'aval et se termine par un mur vertical cylindrique mm qu'on appelle le *mur de chute*. L'espace compris entre les enclaves, le plan vertical aa qui réunit leurs arêtes d'amont, et les deux vantaux de l'écluse se nomme la *chambre des portes*.

La largeur d'un sas d'écluse doit dépasser de quelques centimètres celle des bateaux qui fréquentent l'écluse. Voici les largeurs adoptées dans les canaux de l'État: au canal du Cher, 2^m,70; aux canaux de Bourgogne, du Nivernais, du Centre, 5^m,20; au canal de la Somme, 6^m,50; aux canaux Saint-Denis et Saint-Martin, 7^m,80; sur l'Oise, 8^m; sur la Seine, au-dessous de Paris, 12^m.

La longueur des sas à un seul bateau est calculée sur celle des plus grands bateaux qu'ils aient à recevoir; il faut que le bateau puisse tenir avec son gouvernail, les portes étant fermées derrière lui. Les sas doivent parfois avoir la capacité nécessaire pour contenir plusieurs bateaux; c'est ainsi que, dans les ports de l'Océan auxquels aboutit un canal, il est nécessaire que le sas puisse contenir tous les bâtiments arrivés dans une même marée.

II. La manœuvre d'une écluse à sas est facile à comprendre. Supposons qu'un bateau se présente à l'aval pour monter dans le bief supérieur. On lui ouvre les portes d'aval; il entre dans le sas; on referme les portes d'aval; on ouvre les vannes de l'écluse d'amont; l'eau qui s'introduit dans le sas soulève le bateau; quand le niveau dans le sas est arrivé à la même hauteur qu'en amont, on ouvre les portes d'amont, et le bateau passe. Supposons, au contraire, qu'un bateau se présente du côté d'amont pour descendre dans le bief d'aval. Si le sas est vide, il faut d'abord le remplir comme on vient de l'indiquer; on ouvre alors les portes d'amont; le bateau entre dans le sas; on referme derrière lui les portes d'amont; on ouvre les vannes de l'écluse d'aval; le sas se vide peu à peu, et le bateau descend; quand le niveau dans le sas est le même que dans le bief d'aval, on ouvre les portes d'aval, et le bateau passe. Chacune de ces manœuvres emploie de 10 à 12 minutes, selon les dimensions du sas et des orifices de vannes.

On peut aisément se rendre compte du volume d'eau dépensé à chaque passage. Soit A la section horizontale du sas, h la différence de niveau des deux biefs, et Q le volume d'eau déplacé par le bateau. Supposons d'abord que le bateau monte. La quantité d'eau nécessaire pour élever de h le niveau dans le sas est le volume du prisme qui a pour base A et pour hauteur h , c'est-à-dire le produit Ah . Mais quand le bateau sort du sas pour entrer dans le bief supérieur, il faut encore que l'eau de ce bief fournisse au sas le volume Q que le bateau y déplaçait; par conséquent le volume d'eau introduit dans le sas est $Ah + Q$. A la vérité le volume Q emprunté au bief supérieur s'y trouve remplacé par celui que le bateau y déplace; mais il n'y en a pas moins eu une dépense d'eau exprimée par $Ah + Q$.

Supposons, en second lieu, que le bateau descende. La quantité d'eau qui s'écoule du sas depuis l'instant où le bateau y est entré jusqu'au moment où il en sort, est encore le prisme dont le volume est Ah . Mais quand le bateau sort du sas pour entrer dans le bief inférieur, celui-ci restitue au sas le volume Q que le bateau y déplaçait; le volume

d'eau dépensé réellement est donc $Ah - Q$. A la vérité le volume Q emprunté au bief inférieur s'y trouve remplacé par celui que le bateau y déplace; mais il n'en résulte pas moins que la dépense d'eau effective est exprimée par $Ah - Q$.

Si un bateau descend immédiatement après qu'un autre bateau semblable est monté, la dépense d'eau occasionnée par ces deux passages est la somme des quantités $Ah + Q$ et $Ah - Q$, c'est-à-dire $2Ah$, ou deux fois la quantité d'eau qui peut être introduite dans le sas et qu'on peut appeler une *écluse*.

III. On peut calculer exactement le temps nécessaire pour emplir ou pour vider un sas d'écluse. Supposons que, les portes d'aval ayant été ouvertes puis refermées, l'orifice des vannes d'amont soit au-dessous du niveau d'aval d'une certaine quantité. Soit h la différence primitive des deux niveaux, z leur différence au bout du temps t . Désignons par V le volume Ah de l'écluse, par q le volume d'eau variable qui s'écoule, dans l'unité de temps, et enfin par v celui qui s'écoulerait dans l'unité de temps si la différence de niveau des deux biefs restait constante et égale à h , comme cela arriverait si les portes d'aval restaient ouvertes. A l'instant où la différence de niveau est devenue z , la vitesse d'écoulement (*Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES*) est $\sqrt{2gz}$, et le volume dq dépensé dans le temps dt est exprimé par

$$dq = m \omega \sqrt{2gz} \cdot dt,$$

ω désignant l'aire des orifices de vannes et m le coefficient de contraction. Mais le volume d'eau qui s'introduit dans le sas dans le temps dt a aussi pour expression Adx ; on peut donc écrire

$$m \omega \sqrt{2gz} \cdot dt = - Adx,$$

en remarquant que z décroît quand t augmente. On tire de là

$$dt = -A \frac{dx}{m \omega \sqrt{2gz}} = -\frac{A}{m \omega \sqrt{2g}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$\text{et } t = -\frac{A}{m \omega \sqrt{2g}} \int_h^0 z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{2A \sqrt{h}}{m \omega \sqrt{2g}},$$

valeur qu'on peut écrire

$$t = \frac{2Ah}{m \omega \sqrt{2gh}}.$$

Or le dénominateur est précisément le volume d'eau v qui s'écoulerait dans l'unité de temps par les orifices de vanne si les portes d'aval restaient ouvertes, et Ah est le volume V de l'écluse; on a donc

$$t = 2 \cdot \frac{V}{v}. \quad [1]$$

Mais $\frac{V}{v}$ est le temps qu'il faudrait pour écouler le volume V si les portes d'aval restaient ouvertes; donc enfin : le temps employé au remplissage du sas est le double de celui qu'il faudrait pour écouler une écluse si les portes d'aval restaient ouvertes.

Soit, par exemple, $A = 200^m$, $h = 3^m$, $\omega = 1^m, 25$; en prenant $m = 0,625$, on trouvera

$$V = Ah = 200.3 = 600^m \text{ cub.},$$

$$v = 0,625, 1,25 \sqrt{2.9,81.3} = 5^m \text{ cub. } 9934.$$

Par conséquent

$$t = 2 \cdot \frac{600}{5,9934} = 200,2 = 3^m 20,2.$$

On obtient exactement les mêmes résultats en

cherchant le temps nécessaire pour vider le sas; les calculs sont identiquement les mêmes si l'on continue à appeler z la différence de niveau entre le sas et le bief inférieur au bout du temps t .

IV. Il peut arriver que les orifices de vanne de l'écluse d'amont aient leur centre à une distance h' au-dessus du niveau dans le bief d'aval. Il faut alors faire deux calculs distincts. On calculera d'abord le temps nécessaire pour élever le niveau de l'eau du sas jusqu'à la hauteur du centre des orifices de vanne; ce temps est le quotient du volume Ah' à écouler, par le volume qui s'écoule dans l'unité de temps par les orifices dont les aires font une somme égale à ω et ont leur centre à une distance donnée h au-dessous du niveau d'amont, c'est-à-dire par $m \omega \sqrt{2gh}$. Cette première partie t_1 du temps cherché est donc

$$t_1 = \frac{Ah'}{m \omega \sqrt{2gh}}.$$

On calculera ensuite, comme plus haut, le temps t_2 nécessaire pour élever le niveau de la hauteur h , puisque les orifices seront alors immergés; et l'on aura

$$t_2 = \frac{2Ah}{m \omega \sqrt{2gh}},$$

et par conséquent, en appelant T le temps total,

$$T = \frac{A(2h+h')}{m \omega \sqrt{2gh}}.$$

Si l'on partage l'écluse en deux volumes l'un Q compris entre le niveau du bief supérieur et le centre des orifices des vannes d'amont, l'autre Q' entre ce centre et le niveau du bief d'aval, v désignant toujours le volume qui s'écoulerait dans l'unité de temps si les portes d'aval restaient ouvertes, on peut mettre l'expression ci-dessus sous la forme

$$T = 2 \frac{Q}{v} + \frac{Q'}{v}, \quad [2]$$

c'est-à-dire que le temps du remplissage est égal au double de celui qu'il faudrait pour écouler, avec les portes d'aval ouvertes, le premier volume Q , plus au temps qu'il faudrait pour écouler le second volume Q' .

Si, par exemple, on suppose comme ci-dessus

$$A = 200^m, h = 3^m, \omega = 1^m, 25, m = 0,625,$$

et de plus $h' = 0^m, 50$,

on trouvera comme ci-dessus

$$Ah = 600^m, v = 5^m, 9934.$$

On aura de plus

$$Q' = Ah' = 200.0,50 = 100.$$

Par conséquent

$$T = 2 \cdot \frac{600}{5,9934} + \frac{100}{5,9934} = 200,2 + 16,7 = 216,9$$

ou $T = 3^m 36,9$.

V. Lorsqu'on a plusieurs sas étagés, comme cela arrive souvent dans les canaux, on peut avoir à chercher le temps nécessaire pour qu'en ouvrant les vannes de communication entre deux bassins consécutifs, où les niveaux étaient différents, un même niveau s'établisse dans les deux bassins. Nous supposons les vannes au-dessous du niveau inférieur à l'origine de l'écoulement. Soient A et a les sections horizontales des deux bassins, h la différence primitive des deux niveaux, Z la quantité dont le niveau dans le bassin supérieur s'est abaissé au bout du temps t , z celle dont le niveau dans le bassin inférieur s'est élevé au bout du même temps.

Il résulte de ce que l'eau sortie du bassin supérieur est entrée dans le bassin inférieur, l'égalité

$$AZ = az. \quad [3]$$

La vitesse d'écoulement au bout du temps t est

$$\sqrt{2g[h - (Z + z)]},$$

puisque la distance des deux surfaces a diminué de $Z + z$. On a donc

$$m\omega \sqrt{2g[h - (Z + z)]} \cdot dt = adz,$$

ou, en mettant pour Z sa valeur tirée de [3],

$$m\omega \sqrt{2g\left[h - \frac{A+a}{A}z\right]} \cdot dt = adz.$$

Nous mettons le signe + cette fois dans le second membre parce que z croît en même temps que t . On tire de là

$$t = \frac{a}{m\omega \sqrt{2g}} \int \frac{dz}{\sqrt{h - \frac{A+a}{A}z}},$$

intégration qu'il faut effectuer depuis $z=0$ jusqu'à la valeur de z pour laquelle les deux niveaux sont devenus les mêmes. Cette valeur est celle pour laquelle on a $Z + z = h$, ou, à cause de [3],

$$\frac{a}{A}z + z = h, \text{ d'où } z = \frac{A}{A+a}h.$$

Si l'on effectue l'intégration entre ces limites, ce que l'on fera plus aisément en multipliant d'abord par $\frac{A+a}{A}$ sous le signe \int et divisant par cette même quantité hors du signe, on trouvera

$$t = \frac{2Aa\sqrt{h}}{m\omega \sqrt{2g} \cdot (A+a)} = \frac{2a}{A+a} \cdot \frac{Ah}{v},$$

en appelant v le volume qui s'écoulerait dans une seconde si la différence de niveau des deux biefs restait constante et égale à h . Il en résulte que $\frac{Ah}{v}$ exprime le temps qui serait nécessaire pour écouler dans ces conditions le volume d'eau contenu primitivement dans le bassin supérieur au-dessus du niveau dans le bassin inférieur. Donc enfin le temps demandé est à celui-là comme le double $2a$ de la section du bassin inférieur est à la somme $A+a$ des sections des deux biefs.

Si les bassins avaient même section, ces deux durées seraient égales.

Si, par exemple, on a

$$A = a = 200^{\text{m}^2}, \quad h = 3^{\text{m}}, \quad \omega = 1^{\text{m}^2}, 25,$$

en prenant $m = 0,625$, on trouvera

$$t = \frac{Ah}{v} = \frac{600}{5,9934} = 100^{\text{s}}, 1 = 1^{\text{m}}, 40^{\text{s}}, 1.$$

On trouvera dans l'*Aide-Mémoire de Mécanique pratique* de M. Morin les mêmes formules sous une autre forme.

ÉCOPE, pelle creuse en bois, employée pour les épaissements à de petites profondeurs; l'ouvrier remplit son écope d'eau, et la lance à un mètre de haut environ. On estime que dans un travail journalier de 8 heures un manoeuvre peut élever ainsi à 1^m de 48 à 60 mètres cubes d'eau.

On appelle *écope hollandaise* une grande écope suspendue sur un support à trois pieds, ou plutôt sur trois perches; l'ouvrier manoeuvre l'écope par son long manche; il la remplit d'eau et en la lançant jette l'eau à une hauteur qui ne doit pas excéder 1^m. On obtient ainsi un produit journalier

plus que double de celui que donne l'emploi de l'écope ordinaire.

ÉCOULEMENT DES GAZ. Cette question générale embrasse trois questions particulières: l'écoulement par un orifice percé en mince paroi, l'écoulement par un ajutage cylindrique, l'écoulement par un tuyau de conduite d'une longueur assez grande pour qu'il y ait lieu d'avoir égard au frottement du gaz contre ses parois.

1. *Écoulement par un orifice percé en mince paroi.* Soit \mathcal{P}_0 la pression du gaz dans le réservoir d'où il s'écoule, \mathcal{P} sa pression dans la section contractée de la veine, v la vitesse dans cette section; on aura, en remarquant que, si le réservoir est assez grand, la vitesse du gaz peut être regardée comme nulle dans ce réservoir en un point peu distant de l'orifice, où la pression est \mathcal{P}_0 , et que la distance de ce point au centre de la section contractée peut aussi être regardée comme nulle,

$$\frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \mathcal{P}_0 = \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \mathcal{P} + \frac{v^2}{2g}$$

(Voy. le THÉORÈME DE BERNOULLI, modifié pour les gaz), \mathcal{P}_a désignant la pression atmosphérique, exprimée en kilogrammes par mètre carré, Π_0 le poids du mètre cube du gaz à zéro et sous la pression \mathcal{P}_a , t la température, qui peut être regardée comme étant la même à l'orifice et dans le réservoir, enfin a le coefficient de dilatation du gaz. De cette équation on tire

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}, \quad [2]$$

formule qui donnera la vitesse de sortie.

Pour l'air sec, par exemple, on aura en mettant pour \mathcal{P}_a le nombre 10334^k, pour Π_0 sa valeur 1^k, 3; et remplaçant $\log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}$ par 2,3026 $\log \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}$,

$$\frac{v^2}{2g} = 18304(1+at) \log \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}. \quad [3]$$

Ayant déterminé la vitesse v , on aura la dépense en multipliant cette vitesse par la section ω de l'orifice, et par un coefficient de contraction qui, d'après les expériences de d'Aubuisson, peut être pris égal à 0,65. La formule de la dépense par un orifice en mince paroi est ainsi

$$Q = 0,65 \omega \sqrt{2g \cdot \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \cdot \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}}. \quad [4]$$

Pour l'air sec, on peut écrire, en effectuant toutes les réductions,

$$Q = 386,62 \cdot \omega \sqrt{(1+at) \cdot \log \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}}. \quad [5]$$

Si, par exemple, de l'air à 100° s'écoule d'un réservoir où la pression est de deux atmosphères, dans l'air libre, par un orifice de 0^m, 02 de diamètre, on trouvera

$$Q = 386,62 \cdot \pi \cdot (0,01)^2 \sqrt{(1+0,366) \log 2},$$

ou $Q = 0^{\text{m}^3}, 077887$.

Il faut bien remarquer que les formules [4] ou [5] donnent le volume du gaz à la température t et à la pression \mathcal{P} . Si l'on voulait ce volume à une autre pression et à une autre température, il faudrait multiplier le volume Q par le rapport du nouveau module de dilatation à l'ancien, et par le rapport de l'ancienne pression à la nouvelle.

On peut demander, non plus le volume, mais le poids P du gaz écoulé dans une seconde. Pour l'ob-

tenir, il faut multiplier le volume Q par le poids Π du mètre cube du gaz à la température t et à la pression \mathcal{P} . Or on a

$$\Pi = \Pi_0 \cdot \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \cdot \frac{1}{1+at}$$

le poids P du gaz écoulé a donc pour expression

$$P = \Pi \cdot \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \cdot \frac{1}{1+at} \cdot 0,65 \omega \sqrt{2g \cdot \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \cdot \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}}$$

$$\text{ou } P = 0,65 \omega \sqrt{2g \cdot \frac{\Pi_0}{\mathcal{P}_0(1+at)} \cdot \mathcal{P}^2 \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}} \quad [6]$$

La pression dans la section contractée est ordinairement la pression atmosphérique, parce que le plus habituellement la veine débouche dans l'air. Mais si la pression \mathcal{P} est différente de la pression atmosphérique, on peut rechercher la valeur qui rend P un maximum. En égalant à zéro la dérivée par rapport à \mathcal{P} de la quantité variable

$$\mathcal{P}^2 \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}},$$

on obtient

$$\log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}, \text{ d'où } \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}} = e^{\frac{1}{2}} = 1,649$$

et

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_0}{1,649} \quad [7]$$

Mais pour que cette pression, qui est celle qui s'exerce dans la veine contractée, puisse être regardée comme égale à celle du gaz dans lequel débouche la veine, il faut que \mathcal{P}_0 ne soit pas trop grand par rapport à cette pression extérieure, car autrement il y aurait au sortir de l'orifice un rapide épanouissement de la veine, et, les filets ne coulant plus parallèlement, il ne serait plus permis d'évaluer la pression dans la veine comme dans l'état hydrostatique. On ne doit donc considérer la valeur [7] que comme une limite qui n'est jamais atteinte dans la pratique, si l'on désigne par \mathcal{P} la pression du gaz dans lequel la veine jaillit.

On s'est souvent demandé quelle est la *vitesse de rentrée de l'air dans le vide*, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle l'air atmosphérique rentrerait, par un orifice en mince paroi, dans une capacité où l'on aurait fait un vide absolu. Pour résoudre cette question, il faudrait connaître la pression \mathcal{P} qui s'exerce dans la veine, pression qui n'est certainement pas nulle. Si l'on admettait que la pression qui s'établit alors dans la veine est celle qui correspond au maximum de dépense en poids, il faudrait, dans la formule [2] faire $\log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}$.

Supposant, par exemple, $t = 0$, faisant

$$\mathcal{P}_0 = 10334^h \text{ et } \Pi_0 = 1^h, 3,$$

on aurait ainsi

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{10334}{1,3} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{g \cdot 7949,2} = 279^m, 23;$$

mais l'hypothèse aurait besoin d'être confirmée par expérience.

II. *Écoulement par un ajutage*. D'après d'Aubuisson, la vitesse du gaz peut être calculée par les formules [2] ou [3]. Mais pour évaluer la dépense, il faut remplacer le coefficient 0,65 par 0,93 si l'ajutage est cylindrique, ou par 0,94 s'il est légèrement conique, l'angle de convergence ne dépassant pas 12 degrés.

III. *Écoulement par une conduite*. On ne peut

plus, dans ce cas, négliger le frottement du gaz contre les parois. Par analogie avec les formules adoptées pour l'eau, on admet que ce frottement est proportionnel à une fonction du second degré de la vitesse moyenne U; et, comme la vitesse d'écoulement d'un gaz est toujours très-grande, en raison de sa faible densité, on réduit cette fonction au terme en U². On admet encore, comme pour l'eau, que le frottement est proportionnel à l'aire de la paroi, ou à χ , en appelant l la longueur de la conduite et χ le périmètre de sa section transversale. Enfin l'expérience a montré que ce frottement est proportionnel à la densité du gaz; en sorte qu'en nommant Π le poids du mètre cube du gaz considéré, et ϕ le frottement dont il s'agit, on peut poser

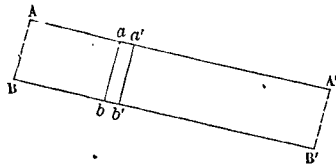
$$\phi = \Pi \chi \cdot \beta U^2, \quad [1]$$

dans l'hypothèse où U serait constant dans toute l'étendue de la conduite. D'après les expériences de d'Aubuisson et de Girard, on fait

$$\beta = 0,000355,$$

valeur qui s'éloigne peu de celle qui est adoptée pour l'eau.

Cela posé, considérons un gaz en mouvement permanent dans une conduite rectiligne ABB'A' : et



soit $abb'a'$ une tranche infiniment mince de ce gaz. On peut admettre que la pression qui s'exerce en un point de la section ab est la même pour tous les points de cette section; car les filets étant supposés couler parallèlement, on peut évaluer les pressions comme dans l'état hydrostatique, et dès lors la pression ne varie avec la hauteur que d'une manière insensible, vu la faible densité du gaz. Nous désignerons par \mathcal{P} cette pression; celle qui s'exerce sur la face $a'b'$ sera représentée par $\mathcal{P} + d\mathcal{P}$. La vitesse des filets n'est pas rigoureusement la même en tous les points d'une même section; mais, dans l'ignorance où l'on est de la loi suivant laquelle cette vitesse varie, on simplifie la question en remplaçant, en chaque point de cette section, la vitesse véritable par la vitesse moyenne U, ce qui revient à supposer que le fluide coule, non par filets, mais par tranches. On applique au mouvement de la tranche $abb'a'$ le théorème de la QUANTITÉ DE MOUVEMENT (Voy. ce mot), et l'on écrit que l'accroissement de la quantité de mouvement de la tranche considérée, projetée sur la direction de la conduite, équivaut à la somme des impulsions des forces qui la sollicitent, pour un déplacement infiniment petit de cette tranche égal à son épaisseur. La vitesse étant U dans la section ab , elle est $U + dU$ dans la section $a'b'$; en nommant donc m la masse de gaz contenue dans la tranche considérée, on aura, pour l'accroissement de la quantité de mouvement,

$$m(U + dU) - mU \text{ ou } m \cdot dU.$$

D'ailleurs $m = \frac{\Pi \Omega U \theta}{g}$, en appelant Ω la section de la conduite, et θ la durée infiniment petite du dé-

placement considéré; l'accroissement de quantité de mouvement est donc

$$\frac{\Pi\Omega U dU \cdot \theta}{g}$$

La pression sur ab est $\mathcal{P}\Omega$; elle se projette en vraie grandeur; la pression sur $a'b'$ est $(\mathcal{P} + d\mathcal{P})\Omega$, en sens contraire; la somme algébrique de ces deux forces est donc

$$-\Omega d\mathcal{P}.$$

Le poids de la tranche considérée est $\Pi\Omega ds$, en désignant par ds son épaisseur, ou le déplacement de la section ab dans le temps θ . L'angle que cette force verticale fait avec l'axe de la conduite, a pour cosinus $\frac{dx}{ds}$, en désignant par x la distance du centre de la section ab à un plan horizontal de comparaison, et dx étant par suite le déplacement vertical de ce centre dans le temps dt . La projection du poids de la tranche est donc

$$\Pi\Omega dx.$$

D'ailleurs, le frottement de cette tranche pendant le déplacement considéré est en valeur absolue

$$\Pi\chi ds \cdot \beta U^2.$$

On a donc, en ayant égard aux signes des forces et de leurs impulsions,

$$\frac{\Pi\Omega U dU \theta}{g} = \Pi\Omega dx \cdot \theta - \Omega d\mathcal{P} \cdot \theta - \Pi\chi ds \cdot \beta U^2 \cdot \theta,$$

ou, en divisant par $\Pi\Omega\theta$,

$$\frac{U dU}{g} = dx - \frac{d\mathcal{P}}{\Pi} - \frac{\chi}{\Omega} \beta U^2 ds. \quad [2]$$

La conduite étant généralement cylindrique, si l'on nomme D son diamètre, il en résulte $\frac{\chi}{\Omega} = \frac{4}{D}$. D'un autre côté, il y a entre les variables \mathcal{P} et Π la relation

$$\Pi = \Pi_0 \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0 (1 + at)},$$

et, en représentant par n la quantité $\frac{\mathcal{P}_0 (1 + at)}{\Pi_0}$, on peut écrire

$$\Pi = \frac{\mathcal{P}}{n}. \quad [3]$$

La relation [2] devient ainsi

$$\frac{U dU}{g} = dx - n \frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} - \frac{4}{D} \beta U^2 ds. \quad [4]$$

On diminue le nombre des variables qui entrent dans cette équation en observant que, par suite de la permanence du mouvement, le poids P de gaz qui s'écoule dans l'unité de temps par une section quelconque est une quantité constante; on a donc

$$\Pi\Omega U = \text{constante} = P \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \mathcal{P}\Omega U = P,$$

et par conséquent

$$\mathcal{P}U = \text{constante} = n' = \frac{nP}{\Omega}. \quad [5]$$

On tire de cette relation

$$U = \frac{n'}{\mathcal{P}}, \quad \text{d'où} \quad dU = -\frac{n' d\mathcal{P}}{\mathcal{P}^2}.$$

Substituant dans [4] et multipliant tout par $-\mathcal{P}^2$, on obtient

$$\frac{n'^2 \cdot d\mathcal{P}}{g \cdot \mathcal{P}} = -\mathcal{P}^2 dx + n\mathcal{P} d\mathcal{P} + \frac{4}{D} n'^2 \beta ds. \quad [6]$$

La conduite étant supposée rectiligne, M. Bresse observe que dx est proportionnel à ds , et que si

par conséquent on pose $dx = k ds$, k désignant la tangente de l'angle que la conduite fait avec l'horizon, l'équation différentielle ne renferme plus que les deux variables \mathcal{P} et s , et pourrait être intégrée. Mais le résultat serait compliqué. Il est plus simple de remarquer, avec M. Bélanger, que la différence de niveau Z des extrémités de la conduite est ordinairement négligeable, et que d'ailleurs la pression \mathcal{P} varie très-peu dans l'étendue de la conduite; il est donc permis de remplacer la variable \mathcal{P}^2 par la moyenne de ses valeurs extrêmes \mathcal{P}_0^2 et \mathcal{P}_1^2 , c'est-à-dire par $\frac{1}{2}(\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{P}_1^2)$. En faisant cette substitution et intégrant, on trouve

$$\frac{n'^2}{g} \cdot \log \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0} = -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{P}_1^2) + \frac{1}{2}n(\mathcal{P}_1^2 - \mathcal{P}_0^2) + \frac{D}{4}n'^2\beta L. \quad [7]$$

Cette équation donnera la pression à l'une des extrémités de la conduite si la pression à l'autre extrémité est connue, et l'on en déduira facilement les vitesses. Si, par exemple, \mathcal{P}_0 est donné, l'équation [7] donnera \mathcal{P}_1 . La formule [5] donnera ensuite $U_1 = \frac{n'}{\mathcal{P}_1}$, et $U_0 = \frac{n'}{\mathcal{P}_0}$.

Ceci suppose que le poids P est connu. S'il était inconnu, mais que les pressions extrêmes fussent données, on déduirait de l'équation [7] la valeur de n'^2 , et n' étant obtenu, la relation [5] donnerait P .

IV. Supposons, par exemple, qu'une conduite rectiligne de 600 mètres de long et de 0^m,15 de diamètre, présentant une pente totale de 25 mètres, conduise de l'air sec à 300 degrés d'un réservoir où la pression est représentée par une colonne de mercure de 0^m,80, dans une atmosphère où la pression est représentée par une colonne de mercure de 0^m,76, et que l'on demande la dépense, rapportée à la température zéro et à la pression 0^m,76. On a d'abord

$$n = \frac{10334(1 + 0,366)}{1,3} = 10858,6.$$

On tire ensuite de l'équation [7] la valeur de n'^2 , savoir :

$$n'^2 = \frac{\frac{1}{2}Z(\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_0^2) + \frac{1}{2}n(\mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_1^2)}{\frac{4}{D}\beta L + \frac{1}{g}\log\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}} \\ = \frac{1}{2}\mathcal{P}_1^2 \cdot \frac{Z\left[1 + \left(\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}\right)^2\right] + n\left[\left(\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}\right)^2 - 1\right]}{\frac{4}{D}\beta L + \frac{1}{g}\log\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}}.$$

Or, $\mathcal{P}_1 = 10334^k$, $Z = 25^m$, $\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1} = \frac{80}{76} = 1,0526$,

$$D = 0^m, 15, \quad \beta = 0,000355, \quad L = 600^m, \\ g = 9,8088.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$n'^2 = (10334)^2 \cdot 114850, \quad \text{d'où} \quad n' = 10334^k \sqrt{114850} \\ \text{ou} \quad n' = 1034^k \cdot 338^m, 8 = 3501159,2.$$

On trouve ensuite

$$P = \Omega \cdot \frac{n'}{n} = \frac{1}{4} \pi (0,15)^2 \cdot \frac{3501159,2}{10858,6} = 5^k, 697.$$

Le volume correspondant, rapporté à la température zéro et à la pression normale, s'obtiendra en divisant ce poids par 1^k,3, ce qui donne 4^m,382.

On a enfin pour la vitesse de sortie

$$U_1 = \frac{n'}{\Phi_1} = \frac{10334^k \cdot 338^m \cdot 8}{10334^k} = 338^m \cdot 8.$$

V. Si la conduite, au lieu de déboucher directement dans l'atmosphère, était terminée par une courte buse, formant ajutage cylindrique, d'un diamètre donné d , on ferait une hypothèse sur la pression Φ' immédiatement en amont de l'ajutage, et l'on calculerait, comme nous venons de le faire, le poids P' dépensé par une section quelconque de la conduite. On aurait ensuite $U' = \frac{n'}{\Phi'}$, et, par le théorème de Bernoulli, modifié pour les gaz,

$$\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U'^2}{2g} = n \cdot \log' \frac{\Phi'}{\Phi_1}. \quad [8]$$

Ayant d'ailleurs $U_1 = \frac{n'}{\Phi_1}$, on tirerait de la relation [8] la valeur de U' ; la formule de l'ajutage donnerait le volume dépensé par la buse, et en le multipliant par le poids du mètre cube à la pression Φ_1 et à la température de 300 degrés, on aurait le poids P'' dépensé par la buse. Les poids P' et P'' devraient être égaux, et l'on ferait varier l'hypothèse sur Φ' jusqu'à ce que cette condition fût remplie; on aurait ainsi le poids réellement écoulé, et l'on en déduirait, comme ci-dessus, la dépense en volume à zéro et sous la pression Φ_1 . (Voy. les *Cours de Mécanique appliquée*, de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, et de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES. Cette question générale embrasse un grand nombre de questions particulières.

I. La première est relative à un liquide qui s'écoule d'un réservoir par un orifice percé en mince paroi. La vitesse du liquide dans l'orifice se détermine à l'aide du THÉOREME DE TORRICELLI (Voy. ce mot); et l'on calcule la dépense en ayant égard à la CONTRACTION DE LA VEINE (Voy. ce mot). La formule de la dépense est, dans ce cas,

$$Q = m \omega \sqrt{2g \left(h + \frac{\Phi - \Phi'}{\Pi} \right)}, \quad [1]$$

en appelant Q la dépense, ou le volume qui s'écoule dans l'unité de temps, m le coefficient de contraction, ω l'aire de l'orifice, g l'accélération due à la pesanteur, h la distance du niveau supérieur du liquide au-dessus du centre de gravité de l'orifice, Φ la pression par mètre qui s'exerce sur le niveau supérieur, Φ' celle qui s'exerce dans la section contractée, ou autour de cette partie de la veine, enfin Π le poids du mètre cube du liquide considéré.

Lorsque l'orifice est complètement évasé, le coefficient m peut être remplacé par l'unité, ou plus exactement par 0,98. S'il n'est qu'incomplètement évasé, il faut adopter pour m la valeur qui, dans le tableau des expériences de MM. Poncelet et Lesbros, rapporté à l'article CONTRACTION DE LA VEINE, se rapporte à l'orifice le plus analogue à l'orifice proposé, et effectuer au besoin une interpolation. On ne peut du reste, dans l'application, se flatter d'une exactitude mathématique, attendu que les bords de l'orifice sont toujours plus ou moins irréguliers, et qu'on ne se trouve jamais dans les circonstances exceptionnelles où se sont placés les expérimenta-

teurs. Une approximation relative de $\frac{1}{20}$ est tout ce qu'on peut se promettre dans ce genre d'application.

Si l'orifice, au lieu de déboucher dans l'air, débouche dans un réservoir rempli du même liquide, on admet que la contraction a encore lieu, et que, dans la section contractée, les filets coulant parallèlement et d'un mouvement sensiblement uniforme, on peut y évaluer la pression d'après les règles de l'hydrostatique (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE). Si h' désigne alors la hauteur du niveau du liquide dans le second réservoir au-dessus du centre de gravité de l'orifice, et que Φ soit la pression atmosphérique qui est supposée s'exercer sur les deux niveaux, on a

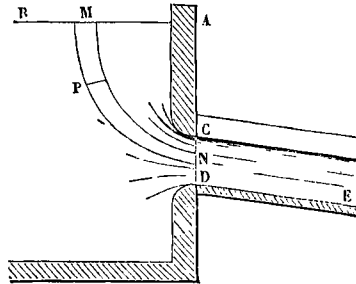
$$\Phi' = \Phi + \Pi h'.$$

En substituant cette valeur dans l'équation [1] on obtient

$$Q = m \omega \sqrt{2g(h-h')}, \quad [2]$$

formule dans laquelle $h-h'$ exprime la différence des niveaux dans les deux réservoirs.

II. La seconde question est relative au cas où un liquide s'échappe d'un réservoir par un orifice, ordinairement rectangulaire, suivi d'un canal de fuite, ayant la même section, et présentant la pente nécessaire pour que le fluide y coule d'un mouvement uniforme. Si l'orifice est évasé intérieurement comme l'indique la figure, la dépense s'obtient en



multipliant l'aire ω de la section CD par la vitesse due à la hauteur $AC = h$ du niveau supérieur dans le réservoir au-dessus du sommet C de l'orifice. Considérons, en effet, un filet liquide MN partant du niveau supérieur pour aboutir à la section CD. En M la vitesse peut être considérée comme nulle si l'orifice, comme cela a lieu d'ordinaire, est très-petit par rapport à l'étendue du niveau supérieur; la pression en M est la pression atmosphérique Φ_0 ; la différence de niveau des points M et N est égale à $h + x$, en appelant x la distance CN. En N la vitesse a une valeur que nous représenterons par v ; la pression en ce point peut être évaluée d'après les règles de l'hydrostatique, puisque le mouvement du liquide dans le canal de fuite est uniforme; cette pression est donc exprimée par

$$\Phi_0 + \Pi x$$

(Voy. PRESSION D'UN FLUIDE), en appelant toujours Π le poids du mètre cube du liquide considéré. En appliquant au filet considéré le théorème de Bernoulli, ce qui suppose le mouvement permanent et les frottements négligeables, circonstances générale-

ment réalisées, au moins à très-peu près, on a donc

$$0 + \frac{Q_0}{11} + h + z = \frac{v^2}{2g} + \frac{Q_0}{11} + z + 0,$$

d'où $v = \sqrt{2gh}$,

résultat indépendant de la distance z de l'extrémité N du filet considéré au-dessous du sommet C de l'orifice. On en conclut que tous les filets qui traversent l'orifice ont la même vitesse v , donnée par la formule ci-dessus. En appelant donc Q la dépense et ω la section de l'orifice, on peut écrire

$$Q = \omega \sqrt{2gh}, \quad [2]$$

conformément à ce que nous avons avancé.

Si le filet considéré, au lieu de partir du niveau supérieur, partait d'un point P situé à une distance x' au-dessous de ce niveau, dans une région du réservoir où la vitesse peut encore être regardée comme nulle, on arriverait encore au même résultat, car la pression au point P serait $Q_0 + 11x'$; la hauteur de ce point au-dessus du point N serait $h + z - x'$; en appliquant le théorème de Bernoulli, on verrait x' disparaître ainsi que z ; et l'on arriverait toujours à l'équation

$$v = \sqrt{2gh},$$

et par conséquent à la formule [2].

Si l'orifice n'est point évasé à l'intérieur, il faut affecter cette formule d'un coefficient de dépense dont on prendra la valeur dans la table de MM. Poncelet et Lesbros déjà citée. C'est ce qui arrivera notamment dans le cas de l'écoulement par une ouverture de vanne (Voy. VANNE).

Si la pression n'était pas la même en M et en C, les pressions ne disparaîtraient plus de la formule, et la formule à employer ne serait autre chose que la formule [1] ci-dessus, dans laquelle h représenterait la hauteur AC.

III. La troisième question est relative à l'écoulement par un DÉVERSOIR (Voy. ce mot). La formule à employer dans ce cas est

$$Q = mL\gamma\sqrt{2gy}, \quad [3]$$

m désignant un coefficient généralement peu différent de 0,40; L la largeur du déversoir ou la longueur du seuil, et y la distance de ce seuil au-dessus du niveau supérieur du fluide.

Les divers genres d'écoulement qui viennent d'être rappelés comprennent le cas d'un liquide qui sort d'un réservoir par l'orifice d'une vanne droite ou inclinée; il n'y a de différence que dans le coefficient de contraction, que l'on prend égal à 0,623 si la vanne est verticale, à 0,74 si elle est inclinée à 1 de base pour 2 de hauteur, et à 0,80 si l'inclinaison est de 1 de base pour 1 de hauteur (Voy. VANNE).

IV. La quatrième question est relative aux AJUTAGES (Voy. ce mot). Dans le cas d'un ajutage cylindrique, la formule de la dépense est

$$Q = 0,85 \omega \sqrt{2g \left(h + \frac{Q - Q_0}{11} \right)}. \quad [4]$$

On trouvera à l'article AJUTAGE la discussion relative aux ajutages divergents.

V. La cinquième question concerne l'écoulement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite, en ayant égard à la résistance des parois au mouvement, et au frottement des filets liquides les uns

contre les autres (Voy. CONDUITES). Cette question conduit à l'emploi de la formule

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2, \quad [5]$$

ou, plus généralement,

$$\frac{1}{2} DJ = \varphi(U),$$

dans laquelle D désigne le diamètre de la conduite, U la vitesse moyenne et J la charge par mètre, qui, en désignant par h la différence de niveau de l'eau dans les deux réservoirs, supérieur et inférieur, et par L la longueur développée de la conduite, a pour valeur

$$J = \frac{h - 1,49 \frac{U^2}{2g}}{L}.$$

Si l'on emploie la formule [5], il convient de donner aux constantes a et b les valeurs

$$a = 0,0000222 \text{ et } b = 0,000280.$$

VI. La sixième question est relative à l'écoulement uniforme de l'eau dans les CANAUX DÉCOUVERTS (Voy. ce mot). Elle conduit à l'emploi de la formule

$$RI = aU + bU^2, \quad [6]$$

dans laquelle R désigne le rayon moyen, c'est-à-dire le quotient de la section transversale du courant par la longueur du périmètre mouillé, I la pente par mètre, U la vitesse moyenne, et a et b des coefficients numériques dont la valeur est

$$a = 0,000024 \text{ et } b = 0,000366.$$

On peut au second membre de l'équation [6] substituer une autre fonction de U; on trouvera à l'article CANAUX DÉCOUVERTS les détails relatifs à cette discussion.

VII. Une septième question concerne le mouvement varié des eaux dans les canaux et rivières (Voy. CANAUX). La formule de la dépense est la suivante

$$z = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega'^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) + aQ \int_0^s \frac{\chi}{\Omega^2} ds + bQ^2 \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} ds, \quad [7]$$

dans laquelle z désigne la pente totale entre les deux sections transversales dont les aires sont Ω' et Ω , Q la dépense, Ω l'aire d'une section transversale quelconque, χ le périmètre mouillé dans cette même section, et s la distance des deux sections extrêmes considérées.

La formule [7] et l'équation différentielle d'où elle est déduite servent à résoudre divers problèmes qui se rencontrent dans la pratique.

VIII. Indépendamment des questions fondamentales qui viennent d'être énumérées, la théorie générale de l'écoulement des liquides renferme plusieurs autres questions particulières qu'on trouvera développées aux articles : CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION, DISTRIBUTIONS D'EAU, RESSAUT SUPERFICIEL, REMOUS, JAUGEAGE DES COURS D'EAU, BARRAGES, etc.

ÉCRASEMENT (RÉSISTANCE À L'), résistance maximum qu'un prisme peut opposer à un effort longitudinal qui tend à le rompre par compression. Un grand nombre d'auteurs ont fait des expériences sur ce sujet; nous citerons ici les principales, celles qui doivent inspirer le plus de confiance.

Bois. D'après Rondelet (*Traité de l'art de bâtir*).

un cube de chêne chargé debout, c'est-à-dire dans le sens de la longueur de ses fibres, s'écrase sous une charge qui est en moyenne de 428^{kl} par centimètre carré de superficie. Un cube de sapin, chargé de la même manière, s'écrase sous une charge de 450^{kl} en moyenne.

Les expériences faites par M. Rennie, ingénieur anglais, sur la résistance des cubes de bois à l'écrasement, ont donné les résultats suivants, qui se rapportent vraisemblablement à un état de dessiccation incomplète des bois :

Bois	Charges d'écrasement par centim. carré
Chêne anglais.....	271 ^k ,3
Sapin blanc.....	137,8
Pin d'Auvergne.....	112,8
Orme.....	90,24

M. Hodgkinson, savant physicien anglais, a fait de nombreuses expériences sur la résistance des bois à l'écrasement. Les bois mis en expérience étaient façonnés en cylindres de 25^{mm},4 de diamètre sur 50^{mm},8 de hauteur; nous donnons ici ses résultats, insérés dans le XI^e volume des *Transactions philosophiques*.

ESSENCE DES BOIS.	CHARGE D'ÉCRASEMENT par centimètre carré de superficie.	
	BOIS à l'état de sécheresse ordinaire.	BOIS très-secs.
	k	k
Aune.....	480,1	489,1
Frêne.....	610,2	658,0
Laurier.....	528,3	528,3
Hêtre.....	543,4	658,0
Bouleau d'Amérique.....	"	819,6
Bouleau d'Angleterre.....	231,7	449,9
Cèdre.....	398,7	412,0
Pommier sauvage.....	456,7	502,3
Sapin rouge.....	403,9	462,8
Sapin blanc.....	476,5	512,5
Sureau.....	523,6	700,9
Orme.....	"	726,0
Sapin de Prusse.....	456,7	479,2
Horn beam.....	318,6	512,2
Acajou.....	576,1	576,1
Chêne de Québec.....	297,3	421,1
Chêne anglais.....	455,7	706,8
Chêne de Dantzick.....	"	543,3
Pin résineux.....	477,2	477,2
Pin jaune rempli de térébenthine.....	377,7	382,6
Pin rouge.....	379,1	528,3
Peuplier.....	218,4	360,1
Prunier sec.....	579,1	737,4
Sycamore.....	497,7	"
Teak.....	"	850,3
Larix.....	224,9	391,3
Noyer.....	426,1	507,9
Saule.....	203,0	430,7

On voit que la plus grande résistance est celle du bois de teak desséché, et la plus faible celle du saule à l'état de sécheresse ordinaire. Tous les bois sont plus résistants lorsqu'ils ont subi une dessiccation complète.

PIERRES. Il n'existe pas de caractère physique qui puisse faire prévoir d'une manière certaine le degré de résistance d'une pierre à l'écrasement. Cependant les parties les plus denses d'une pierre ont aussi les plus résistantes, et, dans une même

carrière, les couches supérieures et les couches inférieures sont moins résistantes que celles qui occupent une position intermédiaire. Pour des prismes semblables, la résistance est sensiblement proportionnelle à la section transversale; mais, à hauteur égale, la résistance est d'autant moindre que la forme de la base s'éloigne davantage du cercle ou du carré. On observe, au moment de l'écrasement, que les pierres les plus dures, qui n'avaient d'abord cédé que fort peu à la pression, se divisent tout à coup avec éclat en lames ou aiguilles d'une faible consistance et se réduisant facilement en poussière. Les pierres tendres au contraire se partagent dès les premiers instants en pyramides ayant leur sommet au centre et leurs bases sur les bases supérieure et inférieure du prisme; elles agissent comme des coins pour chasser au dehors les parties latérales; et bientôt ces parties et les pyramides elles-mêmes se décomposent en aiguilles ou en petits prismes qui finissent par tomber en poussière. Voici, d'après M. Poncelet, les résultats, en nombres ronds, des principales expériences faites par divers auteurs sur l'écrasement de petits cubes de pierre de 30 à 50 millimètres de côté.

Pierres volcaniques, granitiques, siliceuses et argileuses.

NATURE DES PIERRES	CHARGE par centim. carr. qui produit l'écrasement
Basalte de Suède et d'Auvergne.....	2000
Lave dure du Vésuve (p.perno).....	590
Lave tendre de Naples.....	230
Porphyre.....	2470
Granit vert des Vosges.....	620
Granit gris de Bretagne.....	650
Granit de Normandie, dit <i>gatmos</i>	700
Granit gris des Vosges.....	420
Grès très-dur, blanc ou roussâtre.....	870
Grès tendre.....	4
Pierre porc ou puante (argileuse).....	680
Pierre grise de Florence (argileuse, à grains fins).....	420

Pierres calcaires.

Marbre noir de Flandre.....	790
Marbre blanc veiné, statuaire, et turquin...	310
Pierre noire de Saint-Fortunat, très-dure et coquillière.....	630
Roche de Châtillon, près Paris, dure et un peu coquilleuse.....	170
Liais de Bagneux, près Paris, très-dur, à grain fin.....	440
Roche douce de Bagneux.....	130
Roche d'Arcueil, près Paris.....	250
Pierre de Saillancourt, près Pontoise, 1 ^{re} qual.	140
— 2 ^e qual.	90
Pierre ferme de Conflans.....	90
Pierre tendre (lambourde et vergelée) employée à Paris.....	60
Lambourde de qualité inférieure, résistant mal à l'eau.....	20
Calcaire dur de Givry, près Paris.....	310
Calcaire tendre de Givry.....	120
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz, 1 ^{re} qualité.....	180
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz, 2 ^e qualité.....	120

Calcaire jaune oolitique d'Amanvillers, près Metz, 1 ^{re} qualité.....	120
Calcaire jaune oolitique d'Amanvillers, près Metz, 2 ^e qualité.....	100
Roche vive de Saulny, près Metz.....	300
Roche jaune de Rozérieulles, près Metz....	180
Calcaire bleu à gryphites.....	300
<i>Briques.</i>	
Brique dure, très-cuite.....	150
Brique rouge.....	50
Brique rouge pâle (mal cuite).....	40
Brique de Hammirsmith.....	70
— — brulée ou vitrifiée..	100
<i>Plâtres et mortiers.</i>	
Plâtre gâché à l'eau.....	50
— au lait de chaux.....	73
Mortier ordinaire en chaux et sable.....	35
— en ciment ou tuileaux pilés.....	48
— en grès pilé.....	29
— en pouzzolane de Naples et de Rome.	37

Enduit d'une conserve antique, près de Rome..... 76
 Enduit en ciment, des démolitions de la Bastille..... 55
 On trouvera dans la *Résistance des matériaux* de M. Morin de très-nombreux résultats d'expériences sur l'écrasement des pierres des Vosges, de la Marne, de la Meuse, de l'Aisne, sur les briques de diverses localités, les plâtres, les mortiers et les pierres factices.

MÉTAUX. Les métaux aigres, durs et cassants, tels que l'acier, l'airain, la fonte, et surtout la fonte blanche, ne se compriment que de quantités insensibles jusqu'à l'instant de la rupture par écrasement; ils éclatent tout à coup en fragments plus ou moins gros, avec bruit et dégagement de lumière et de chaleur. Les métaux ductiles, tels que le plomb, l'étain, l'argent, le cuivre, le fer très-doux, se compriment au contraire avec lenteur, en se renflant de plus en plus à la surface latérale, et offrent ainsi un bourrelet qui se déchire du centre à la circonférence.

D'après les expériences de Rondelet, de Regnolds, de Rennie et de Karsten sur des cubes de fonte grise dont le côté a varié de 6 à 27 millimètres, la résistance de ce métal à l'écrasement serait en moyenne de 10000^k par centimètre carré. On doit à M. Hodgkinson des expériences nombreuses et précises d'où il semblerait résulter que la résistance de la fonte (de Carron, n° 2) n'est que de 8061^k en moyenne par centimètre carré, pour la fonte à l'air chaud, et de 7818^k,6 pour la fonte à l'air froid; et si l'on considère l'ensemble des expériences faites sur des fontes de toutes provenances, la moyenne de la résistance à l'écrasement s'abaisse à 7600^k par centimètre carré.

La fonte employée à la fabrication des canons de la marine paraît offrir une résistance beaucoup plus grande, que M. Poncelet évalue à 25000^k par centimètre carré.

Le fer résiste beaucoup moins bien que la fonte à un effort de compression; et pour le fer forgé la résistance à l'écrasement n'est que de 4900^k par centimètre carré.

Les expériences de Rennie sur de petits cubes d'un quart de pouce anglais, en plomb, en étain et en cuivre, ont donné les résultats suivants :

Nature du métal.	Grandeur de la compression.		Charge par centimètre carré
Plomb coulé.....	$\frac{1}{10}$	de la hauteur	— 145 ^k
id.	$\frac{1}{2}$	—	— 540
Étain coulé.....	$\frac{1}{10}$	—	— 620
id.	$\frac{1}{3}$	—	— 1087
Cuivre battu.....	$\frac{1}{10}$	—	— 3855
id.	$\frac{1}{8}$	—	— 7245
Laiton.....	$\frac{1}{10}$	—	— 3615
id.	$\frac{1}{2}$	—	— 11587

Pour les métaux ductiles la lenteur de la compression est telle qu'elle peut se prolonger jusqu'à 18 et même 24 heures, comme l'a observé Coriolis. (Voy. l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet, et la *Résistance des matériaux* par M. Morin.)

Voyez aussi l'art. COMPRESSION (*Résistance à la*).

ÉCROU, organe complémentaire d'une vis; pièce qui offre en creux la forme que la vis présente en relief, et dans laquelle la vis pénètre en avançant dans le sens de son axe et en tournant autour de cet axe. Quelquefois la vis est fixe, c'est alors l'écrou qui est mobile, et susceptible de prendre deux mouvements simultanés de translation parallèle à l'axe et de rotation autour de cet axe. Dans d'autres cas, l'écrou ne peut prendre que le mouvement de translation; c'est alors la vis qui tourne autour de son axe sans avancer suivant cet axe. Dans tous les cas, le mouvement relatif est le même: à chaque tour, le déplacement dans le sens de l'axe est égal au pas de la vis (Voy. VIS).

ÉCU, ancienne monnaie usitée en France. On distinguait l'*écu de trois livres* ou *petit écu*, et l'*écu de six livres*. Au moment de leur démonétisation le petit écu ne valait plus que 2^l,75 et l'écu de six livres 5^l,80. Dans le langage ordinaire, le mot *écu* est resté comme *monnaie de compte*; on lui attribue alors une valeur de 3^l; et l'on dit dans ce sens *mille écus* pour 3000^l.

ÉCUELLE (MÉTHODE DE L'), l'une des méthodes employées pour tailler les voussoirs d'une voûte sphérique (Voy. ce mot).

EFFET DU TRAVAIL (PRINCIPE DE L'), principe qui établit une relation entre la puissance vive totale d'un système et le travail des forces qui y sont appliquées, et qui sert de base à la Mécanique des machines. Il consiste en ce que: *dans un système de points matériels quelconque, l'accroissement de la puissance vive totale, entre deux instants considérés, est égale à la somme des travaux de toutes les forces, tant extérieures que moléculaires, qui agissent sur le système entre ces deux instants.* (Voy. PUISSANCE VIVE, TRAVAIL.)

Il ne faut pas confondre ce principe avec le *Principe des forces vives* démontré dans les traités de Mécanique abstraite. Dans le principe des forces vives on n'introduit que les forces *extérieures* qui

agissent sur le système ; les forces moléculaires n'interviennent que d'une manière indirecte par les liaisons établies entre les différents points du système et exprimées par des équations. Il en résulte des restrictions analytiques qui limitent considérablement l'application du principe. Dans le *Principe de l'effet du travail* on a égard à toutes les forces, tant extérieures que moléculaires qui agissent sur le système ; chaque point matériel est regardé comme soumis aux forces extérieures et aux actions moléculaires que ce point matériel reçoit de tous les autres. Il en résulte qu'il peut être regardé comme un point entièrement libre, et que le principe a lieu *sans restriction*. Nous croyons devoir insister sur cette distinction parce que beaucoup de personnes instruites paraissent ne pas la comprendre.

Voici comment on démontre le principe de l'effet du travail.

I. On considère d'abord une force constante agissant sur un point matériel dans la direction de sa vitesse initiale, auquel cas le mouvement est rectiligne et uniformément varié. Les équations de ce mouvement sont (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ) :

$$v = v_0 + jt, \\ e = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2,$$

v_0 désignant la vitesse initiale, v la vitesse finale, j l'accélération, e l'espace parcouru par le mobile à partir de la position initiale, et t le temps employé à le parcourir. On élimine le temps t entre ces deux équations ; pour cela on élève les deux membres de la première au carré, et on la met sous la forme

$$v^2 - v_0^2 = 2v_0 jt + j^2 t^2$$

ou
$$v^2 - v_0^2 = 2j \left(v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 \right),$$

ou, en remplaçant la quantité entre parenthèses par sa valeur e ,

$$v^2 - v_0^2 = 2je.$$

Mais on a $j = \frac{F}{m}$, en désignant par F la force constante qui produit le mouvement et par m la masse du mobile. Mettant pour j cette valeur, multipliant par m et divisant par 2, on obtient

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = Fe = \mathfrak{C}F. \quad [1]$$

Or, le premier membre est la différence entre la puissance vive finale et la puissance vive initiale ; c'est donc l'accroissement de puissance vive, accroissement algébrique bien entendu, car v pourrait être moindre que v_0 si F était négatif. Quant au second membre, c'est le travail de la force F . La relation [1] exprime donc que *l'accroissement de puissance vive est égal au travail de la force*.

II. On considère en second lieu une force constante agissant sur un mobile animé d'une vitesse de direction quelconque. On sait qu'alors le mouvement est parabolique (Voy. MOUVEMENT PARABOLIQUE), et que si l'on projette ce mouvement sur un axe, on obtient un mouvement varié (Voy. PROJECTION DU MOUVEMENT), dans lequel la vitesse initiale est la projection de la vitesse initiale du mobile dans l'espace, et dans lequel la force qui produirait l'accélération est la projection de la force constante qui produit le mouvement parabolique (en supposant

toutefois que la projection ait la même masse que le mobile lui-même). Si donc on représente par v_{0x} la projection de la vitesse initiale v_0 sur l'axe, par v_x la vitesse de la projection, ou, ce qui revient au même, la projection de la vitesse, et par F_x la projection de la force constante F , on aura, en vertu de l'équation [1],

$$\frac{1}{2} mv_x^2 - \frac{1}{2} mv_{0x}^2 = \mathfrak{C}F_x.$$

Si l'on projette le mouvement sur deux autres axes perpendiculaires entre eux et au premier, on obtiendra de même, en changeant les indices x en y ou en z ,

$$\frac{1}{2} mv_y^2 - \frac{1}{2} mv_{0y}^2 = \mathfrak{C}F_y,$$

et
$$\frac{1}{2} mv_z^2 - \frac{1}{2} mv_{0z}^2 = \mathfrak{C}F_z.$$

Ajoutant terme à terme ces trois équations, on peut écrire

$$\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2) \\ = \mathfrak{C}F_x + \mathfrak{C}F_y + \mathfrak{C}F_z, [2].$$

Mais v_x, v_y, v_z étant les projections rectangulaires de la vitesse v du mobile dans l'espace, ou, ce qui revient au même, les composantes rectangulaires de cette vitesse, on a (Voy. COMPOSITION DES VITESSES)

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Par une raison analogue on a de même

$$v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2.$$

De plus, F_x, F_y, F_z étant aussi les composantes rectangulaires de la force F , la somme de leurs travaux élémentaires est constamment égale au travail élémentaire de leur résultante F ; et par conséquent la même relation a lieu entre le travail total de ces forces, ou à donc

$$\mathfrak{C}F_x + \mathfrak{C}F_y + \mathfrak{C}F_z = \mathfrak{C}F.$$

Faisant ces substitutions dans l'équation [2] ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{C}F,$$

qui exprime encore que l'accroissement de puissance vive du mobile est égal au travail de la force constante.

III. Pour étendre le théorème à une force variable, on décompose la durée de son action en un nombre n de parties assez petites, pour que, pendant la durée de chacune d'elles la force puisse être considérée comme constante en intensité et en direction, ce qui revient à regarder le mouvement comme composé d'un nombre très-grand de petits mouvements paraboliques se raccordant entre eux. Soit v_0 la vitesse initiale, et v_1 la vitesse au bout du premier instant ; elle devient vitesse initiale pour le second instant, à la fin duquel la vitesse est devenue v_2 ; cette vitesse devient vitesse initiale pour le troisième instant, à la fin duquel la vitesse est devenue v_3 ; et ainsi de suite ; au commencement du $n^{\text{ième}}$ instant la vitesse initiale est v_{n-1} , et à la fin de ce dernier instant elle est devenue v_n ou v . Soit F_1 la valeur constante de la force pendant le premier instant, F_2 sa valeur pendant le deuxième instant, F_3 sa valeur pendant le troisième, etc., enfin F_n sa valeur pendant le $n^{\text{ième}}$ ou dernier instant. Si l'on applique à chacun des mouvements

paraboliqnes élémentaires la relation démontrée ci-dessus, on aura successivement, en remarquant qu'il s'agit de travaux élémentaires,

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = d \mathfrak{C} F_1,$$

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = d \mathfrak{C} F_2,$$

$$\frac{1}{2} mv_3^2 - \frac{1}{2} mv_2^2 = d \mathfrak{C} F_3,$$

$$\frac{1}{2} mv^n^2 - \frac{1}{2} mv_{n-1}^2 = d \mathfrak{C} F_n.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre; toutes les vitesses intermédiaires disparaîtront, et le premier membre se réduira à $\frac{1}{2} mv^n^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$.

Quant au second membre, il ne sera autre chose que la somme des travaux élémentaires de la force variable, ou, ce qui revient au même, le travail total de cette force, ou $\mathfrak{C}F$; on pourra donc écrire

$$\frac{1}{2} mv^n^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{C}F, \quad [3]$$

ce qui exprime que l'accroissement de puissance vive du mobile est égal au travail total de la force variable.

Si le mobile était soumis à l'action simultanée de plusieurs forces, le théorème subsisterait pour la résultante de ces forces, puisque le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composants.

IV. Une fois le théorème démontré pour un point matériel soumis à des forces quelconques, on l'étend aisément à un système quelconque. Soit m la masse d'un premier point matériel, v_0 sa vitesse initiale, v sa vitesse finale, F la résultante de toutes les forces, tant extérieures que moléculaires, qui agissent sur lui; soit m' la masse d'un second point matériel, v'_0 sa vitesse initiale, v' sa vitesse finale, F' la résultante de toutes les forces tant extérieures que moléculaires qui agissent sur lui; soient m'' , v''_0 , v'' , F'' , les quantités analogues pour un troisième point matériel; et ainsi de suite. L'équation [3] aura lieu pour chacun d'eux; on aura donc

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{C}F,$$

$$\frac{1}{2} m'v'^2 - \frac{1}{2} m'v'_0^2 = \mathfrak{C}F',$$

$$\frac{1}{2} m''v''^2 - \frac{1}{2} m''v''_0^2 = \mathfrak{C}F'',$$

.....

et ainsi de suite. Si l'on ajoute ces équations terme à terme, l'ensemble des termes positifs du premier membre sera la somme des puissances vives finales de tous les points matériels du système; ce sera donc la puissance vive totale du système à la fin du temps considéré; l'ensemble des termes négatifs du premier membre sera la somme des puissances vives initiales de tous les points du système ou la puissance vive totale du système à l'instant initial; la différence de ces deux sommes sera donc l'accroissement total de puissance vive du système. Quant à la somme des seconds membres, ce sera la somme des travaux de toutes les forces, tant extérieures que moléculaires, qui agissent sur le système. On pourra donc écrire, en se servant du signe Σ placé

devant un terme pour représenter la somme de tous les termes analogues,

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{C}F, \quad [4]$$

relation qui revient à l'énoncé général du principe de l'effet du travail.

Ce principe a reçu ce nom, parce qu'il exprime que l'effet du travail des forces appliquées à un système est de faire varier la puissance vive totale de ce système d'une quantité numériquement égale à ce travail. Si la somme des travaux est positive, la puissance vive finale est plus grande que la puissance vive initiale, et il y a réellement accroissement de puissance vive. Si la somme des travaux est négative, la puissance vive finale est moindre que la puissance vive initiale; et il y a réellement diminution de puissance vive. Le mot *accroissement algébrique* comprend les deux cas. Si la somme des travaux est nulle, la puissance vive finale est égale à la puissance vive initiale.

C'est au même cas que se rapporte le principe de la conservation des forces vives, énoncé d'abord par Huyghens dans un cas particulier, puis démontré et étendu par Jean et Jacques Bernoulli, et suivant lequel la somme des forces vives (ou des puissances vives) demeure constante dans un système de corps qui n'exercent les uns sur les autres que des pressions mutuelles.

V. En écrivant le principe de l'effet du travail, on distingue ordinairement les travaux des forces extérieures des travaux des forces moléculaires; et si l'on représente d'une manière générale les premières par F , et les secondes par f , on écrit

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{C}F + \Sigma \mathfrak{C}f; \quad [5]$$

ce qui s'énonce en disant que l'accroissement total de puissance vive est égal à la somme des travaux des forces extérieures, augmentée (algébriquement) de la somme des travaux des forces moléculaires.

Le terme $\Sigma \mathfrak{C}f$ pourrait être nul; c'est ce qui arriverait pour un système rigoureusement solide. Les points matériels qui le composent conservant alors leurs distances réciproques, le travail élémentaire des forces mutuelles, ou égales et contraires, qui s'exercent entre ces points considérés deux à deux, serait nul à chaque instant (Voy. TRAVAIL); il en serait donc de même de leur travail total. Dans ce cas, l'accroissement total de puissance vive serait égal à la somme des travaux des forces extérieures.

Le plus souvent le terme $\Sigma \mathfrak{C}f$ est négatif, et l'accroissement de puissance vive est moindre que la somme des travaux des forces extérieures. Dans les MACHINES (Voy. ce mot), ce travail négatif est dû au FROTTEMENT, à la ROIDEUR DES CORDES, aux CHOCs, aux ébranlements que la machine reçoit et qui déforment plus ou moins les corps en contact (Voy. les mots soulignés); il peut être dû aussi à l'élévation de température de quelques-uns de ces corps. (Voy. TRAVAIL DÙ A LA CHALEUR.)

VI. L'équation qui exprime le principe de l'effet du travail se simplifie lorsque le système auquel on l'applique est animé d'un mouvement de translation rectiligne, ou d'un mouvement de rotation autour d'un axe, qui sont les mouvements le plus fréquemment employés dans les machines.

Si le système est animé d'un mouvement de

translation rectiligne, la puissance vive initiale sera exprimée (Voy. PUISSANCE VIVE) par $\frac{1}{2} Mv_0^2$, en désignant par M la masse totale du système, et par v_0 la vitesse initiale d'un point quelconque de ce système; la puissance vive finale sera exprimée de même par $\frac{1}{2} Mv^2$, v désignant la vitesse finale d'un point quelconque. Le travail élémentaire d'une des forces appliquées au système sera exprimé par $\Delta x \cdot F_x$, en désignant par Δx le chemin élémentaire décrit par un point quelconque du corps, et par F_x la projection, sur la direction de ce chemin, de la force F appliquée à ce point. La somme des travaux élémentaires simultanés, développés par l'ensemble des forces, sera exprimée par $\Delta x \Sigma F_x$, ou par $\Delta x \cdot R_x$, en désignant par R la résultante de translation des forces extérieures (Voy. TRAVAIL). Le travail total de ces forces aura donc pour expression

$$\int \Delta x \cdot R_x;$$

ainsi l'on aura

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \int R_x \cdot \Delta x. \quad [6]$$

Si le système est animé d'un mouvement de rotation, la puissance vive initiale sera exprimée par $\frac{1}{2} \omega_0^2 I$, en appelant ω_0 la vitesse angulaire initiale, et I le moment d'inertie du système par rapport à l'axe; la puissance vive finale sera exprimée de même par $\frac{1}{2} \omega^2 I$, en appelant ω la vitesse angulaire finale. Le travail élémentaire d'une des forces appliquées au système sera exprimé par $\Delta \alpha \mathcal{M} \mathcal{L} F$, en désignant par $\Delta \alpha$ l'arc élémentaire décrit par un point situé à 1 mètre de distance de l'axe, et par $\mathcal{M} \mathcal{L} F$ le moment de la force F par rapport à l'axe. La somme des travaux élémentaires simultanés développés par l'ensemble des forces sera exprimée par $\Delta \alpha \Sigma \mathcal{M} \mathcal{L} F$; le travail total de ces forces aura donc pour expression $\int \Delta \alpha \Sigma \mathcal{M} \mathcal{L} F$; et l'on aura

$$\left(\frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \right) I = \int \Delta \alpha \Sigma \mathcal{M} \mathcal{L} F. \quad [7]$$

C'est sous les formes [6] et [7] que le principe de l'effet du travail est le plus souvent employé dans la théorie des machines.

EFFETS DE COMMERCE, nom commun donné aux LETTRES DE CHANGE ou TRAITES, MANDATS et BILLETS à ORDRE. (Voy. LETTRE DE CHANGE et BILLET à ORDRE.)

EFFORT MOYEN, force constante qu'il faudrait appliquer à un point matériel, tangentiellement à sa trajectoire, pour produire le même travail total qu'une force variable donnée. Il arrive souvent qu'une force, quoique variable, reste cependant comprise entre des limites assez peu éloignées; c'est ce qui arrive particulièrement pour les moteurs animés. Il est alors quelquefois commode de remplacer cette force variable par une force fictive constante, que l'on suppose ordinairement dirigée suivant la trajectoire même du mobile, afin de ne pas avoir à la projeter sur la tangente. Cette force fictive est l'effort moyen. Si F désigne la force variable, e le chemin parcouru par le mobile sur sa

trajectoire, et F' l'effort moyen, on devra avoir, d'après la définition,

$$F' \cdot e = \mathcal{E} F, \text{ d'où } F' = \frac{\mathcal{E} F}{e}.$$

Ainsi l'effort moyen s'obtient en divisant le travail total de la force variable par le chemin total qu'a décrit son point d'application.

Si l'on suppose ce chemin divisé en n parties égales, et que $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ représentent les valeurs que prend la projection de la force variable F sur la tangente à la trajectoire pour les positions correspondantes à l'origine des espaces et aux points de division successifs, on sait qu'on a approximativement (Voy. TRAVAIL)

$$\mathcal{E} F = \frac{e}{3n} [(P_0 + P_n) + 4(P_1 + P_3 + \dots) + 2(P_2 + P_4 + \dots)].$$

Par conséquent, la valeur approchée de l'effort moyen serait

$$F' = \frac{1}{3n} [(P_0 + P_n) + 4(P_1 + P_3 + \dots) + 2(P_2 + P_4 + \dots)].$$

EFFORT TRANCHANT, somme des projections sur un axe mené dans le plan de flexion perpendiculairement à la fibre moyenne, de toutes les forces extérieures qui sollicitent un prisme solide, depuis une section normale déterminée jusqu'à son extrémité (Voy. FLEXION PLANE). Cette somme est égale et contraire à celle des projections, sur le même axe, des forces élastiques qui s'exercent, dans la section considérée, de la part de la portion du prisme située en deçà de cette section, sur la portion située au delà.

ÉGOUTS, plans inclinés sur lesquels s'appuie la couverture d'un COMBLE (Voy. ce mot). Un comble peut être à un égout, à deux égouts.

ÉLANCEMENT, dénomination qui, appliquée à l'étrave d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE), exprime la distance entre le point de la quille où commence l'étrave, ou plutôt sa partie inférieure appelée *brion*, et la verticale menée par le point de la râblure de l'étrave qui correspond à la ligne de flottaison.

ÉLASTICITÉ, propriété des corps en vertu de laquelle ils tendent à reprendre leur forme primitive lorsque les forces qui les avaient déformés cessent d'agir.

On trouvera les lois de l'élasticité des solides exposées aux articles ALLONGEMENT, COMPRESSION, FLEXION PLANE, TORSION. Pour ce genre de corps la propriété dont il s'agit n'a rien d'absolu; elle n'a lieu qu'entre certaines limites, au delà desquelles la déformation subsiste ou entraîne la rupture du corps, et que l'on désigne par le nom de *limites d'élasticité*.

Les liquides, quoique réputés incompressibles, ne sont point dépourvus d'élasticité; mais cette propriété ne se manifeste que dans les phénomènes vibratoires, et elle n'intervient pas d'ordinaire dans les problèmes qui intéressent l'application.

Les gaz sont éminemment élastiques, et cette propriété se montre chez eux entre des limites très-étendues. La loi de l'élasticité des gaz n'est autre chose que la *loi de Mariotte*, d'après laquelle *le volume d'un gaz est en raison inverse de la pression qu'il supporte* (la température demeurant la même).

I. Toute déformation d'un corps représente un

travail moléculaire, qui peut être exactement évalué dans beaucoup de cas.

Supposons, pour premier exemple, qu'il s'agisse de l'allongement d'un prisme. Soit L la longueur primitive du prisme, Ω sa section, et x l'allongement qu'il a subi, à un certain instant, sous l'action d'une force longitudinale; on aura, en nommant E le coefficient d'élasticité [Voy. ALLONGEMENT (Résistance à l')] et R la résistance à l'allongement, correspondante à l'instant considéré,

$$R = E\Omega \frac{x}{L}$$

Si l'allongement s'accroît de dx , le travail élémentaire de la force R sera, en valeur absolue Rdx , et si λ désigne l'allongement total définitif, on aura

$$\mathcal{E}R = \int_0^\lambda Rdx = \frac{E\Omega}{L} \int_0^\lambda xdx = \frac{E\Omega\lambda^2}{2L}$$

On peut se procurer une autre expression de ce travail; car, en appelant P la force qui a produit l'allongement λ , on a

$$P = E\Omega \frac{L}{\lambda}$$

Par conséquent $\mathcal{E}R = \frac{1}{2}P\lambda$,

c'est-à-dire que le travail moléculaire résistant correspondant à l'allongement considéré est égal à la moitié du produit de cet allongement par la force à laquelle il est dû.

On arriverait à un résultat analogue dans le cas de la compression.

Supposons, pour second exemple, qu'il s'agisse de la torsion d'un prisme. Soit θ l'angle de torsion à un certain instant, I le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe de torsion, G le coefficient de torsion, et f l'une quelconque des forces élastiques développées par la torsion, on aura [Voy. TORSION (Résistance à la)]

$$\Sigma \mathcal{N}f = G\theta I,$$

les moments \mathcal{N} étant pris par rapport à l'axe de torsion. Si l'angle de torsion augmente de $d\theta$, le travail élémentaire des forces f sera égal, en valeur absolue, à la somme de leurs moments multipliée par $d\theta$ (Voy. TRAVAIL), c'est-à-dire à

$$G\theta Id\theta,$$

et si θ_1 est l'angle de torsion définitif, on aura

$$\Sigma \mathcal{E}f = \int_0^{\theta_1} G\theta Id\theta = GI \frac{\theta_1^2}{2}$$

Mais si P désigne l'une des deux forces formant le couple qui a produit la torsion, et p le bras de levier de ce couple, on aura

$$Pp = G\theta_1 I,$$

par conséquent $\Sigma \mathcal{E}f = \frac{1}{2}Pp\theta_1$,

c'est-à-dire que le travail moléculaire résistant correspondant à la torsion considérée est égal à la moitié du produit de l'angle de torsion par le moment du couple auquel elle est due.

II. Le travail moléculaire correspondant au changement de volume d'un gaz se calcule par une formule facile à établir. Considérons une masse de gaz renfermée dans une enveloppe ABC (fig. 1) et soumise à une pression que nous appellerons \mathcal{Q} . Concevons que, sous l'action de cette pression, l'enveloppe se dilate infiniment peu, et vienne prendre la posi-

tion A'B'C', sans que le centre de gravité G de la masse gazeuse ait changé. Considérons un élément $d\omega$ de l'enveloppe ABC, situé en A. Normalement à cette enveloppe élevons un cylindre ayant pour base $d\omega$ et terminé en A' à l'enveloppe A'B'C'. La pression qui s'exerce sur l'élément $d\omega$ étant $\mathcal{Q}d\omega$, son travail élémentaire est $\mathcal{Q}d\omega \cdot AA'$. Mais $d\omega \cdot AA'$ représente le volume du cylindre; en le désignant par dv on aura pour le travail élémentaire de la pression exercée sur l'élément $d\omega$, l'expression $\mathcal{Q}dv$. Par conséquent la somme des travaux élémentaires exercés sur toute l'enveloppe

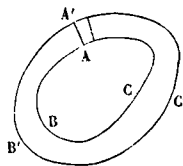


Fig. 1.

est $\int \mathcal{Q}dv$ ou $\mathcal{Q}v$; v désignant l'accroissement de volume de l'enveloppe. Or, si V désigne le volume ABC, l'accroissement v peut être représenté par dV ; ainsi la somme des travaux élémentaires développés pendant le changement de volume infiniment petit que nous venons de considérer serait $\mathcal{Q}dV$.

Supposons maintenant que le gaz ait subi ainsi une série de changements de volume infiniment petits, pour passer d'un volume initial V_0 à un volume final V_1 , et d'une pression initiale \mathcal{Q}_0 à une pression finale \mathcal{Q}_1 . On aura, d'après la loi de Mariotte,

$$\mathcal{Q}V = \mathcal{Q}_0V_0, \text{ d'où } \mathcal{Q} = \frac{\mathcal{Q}_0V_0}{V}$$

Par suite l'expression $\mathcal{Q}dV$ du travail élémentaire devient

$$\mathcal{Q}_0V_0 \frac{dV}{V}$$

Pour avoir le travail moléculaire total, il faut intégrer cette expression depuis V_0 jusqu'à V_1 , ce qui donne, en représentant le travail moléculaire total par T ,

$$T = \mathcal{Q}_0V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = \mathcal{Q}_0V_0 \log' \frac{V_1}{V_0}, \quad [1]$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{V_1}{V_0}$ par son égal $\frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{Q}_1}$,

$$T = \mathcal{Q}_0V_0 \log' \frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{Q}_1} = 2,3026 \mathcal{Q}_0V_0 \log \frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{Q}_1} \quad [2]$$

Si l'on considérait au contraire le retour du volume V_1 au volume V_0 , on trouverait un travail moléculaire T' égal et contraire à T , savoir

$$T' = P_1V_1 \log' \frac{P_1}{P_0} = 2,3026 \mathcal{Q}_0V_0 \log \frac{P_1}{P_0} \quad [3]$$

III. Il peut arriver qu'en même temps que le volume du gaz change, son centre de gravité se déplace, par exemple sous l'action de la pesanteur. Supposons donc que la masse gazeuse qui occupait primitivement la position ABC (fig. 2) vienne prendre la position A'B'C'; le centre de gravité G s'étant transporté en G' , le résultat sera le même que si l'enveloppe AEC s'était d'abord transportée en abc , sans changer de volume, pour venir en A'B'C' sans déplacer son centre de gravité. Soit P le poids du gaz, et h la distance verticale des points G et G' . Dans le premier mouvement, le travail de la pesanteur est Ph ; quant au travail des pressions exercées par le gaz sur l'enveloppe, il est nul; car,

pour en obtenir la valeur, il faudrait projeter ces pressions sur la direction GG', en faire la somme algébrique, et la multiplier par GG'; or, la somme des projections, sur un axe quelconque, des pres-

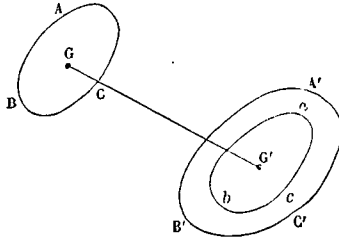


Fig. 2.

sions exercées par un gaz sur une enveloppe fermée est égale à zéro (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE). Dans le second mouvement, le travail de la pesanteur est nul, puisque le centre de gravité ne se déplace pas, et le travail des pressions exercées sur l'enveloppe a pour expression le second membre de la relation [2]. En réunissant les travaux développés dans les deux mouvements, on a donc, en désignant par \mathcal{C} ces travaux,

$$\mathcal{C} = Ph + \mathcal{Q}_0 V_0 \log \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}$$

Si le centre de gravité demeure au même niveau, il reste simplement $\mathcal{Q}_0 V_0 \log \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1}$.

On peut établir cette formule en considérant simultanément les deux mouvements que nous avons séparés; mais la démonstration est moins simple.

Les formules [2], [3] ou [4] qui ne supposent au-

cune forme particulière à l'enveloppe, s'appliquent à la détente et à la compression des gaz dans toutes les circonstances. Elles constituent un *théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz*, qu'on a souvent occasion d'invoquer.

ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT PLANÉTAIRE, données indispensables pour déterminer le mouvement d'une planète. Ces éléments sont au nombre de 7, qui peuvent en réalité se réduire à 6. La *longitude du nœud ascendant* fait connaître l'intersection du plan de l'orbite de la planète avec l'écliptique, et l'*inclinaison de l'orbite* fixe dans l'espace la position du plan de la courbe. La *longitude du périhélie* détermine dans ce plan la direction du grand axe de l'ellipse; la *moyenne distance au soleil* donne cet axe lui-même; et l'*excentricité* achève de déterminer la forme de la courbe. Les deux autres éléments se rapportent au mouvement de la planète sur son orbite; ce sont: la *durée de la révolution sidérale* qui fait connaître le moyen mouvement, et la *longitude moyenne de l'époque*, c'est-à-dire la longitude moyenne de la planète à l'époque qui a été choisie pour origine du temps. Pour les planètes principales l'époque choisie est aujourd'hui le 1^{er} janvier 1850; pour chacune des planètes télescopiques placées entre Mars et Jupiter, on adopte une époque particulière. (Il serait à désirer que la même époque servît pour toutes les planètes.) La durée de la révolution sidérale pourrait se déduire de la moyenne distance au soleil par la 3^e loi de Képler. La longitude moyenne de l'époque est souvent remplacée par l'époque du passage de la planète au périhélie. — Les longitudes sont toujours comptées à partir de l'équinoxe moyen de l'époque.

Voici, d'après l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour l'année 1865, le tableau des éléments des planètes connues :

PLANÈTES PRINCIPALES.

NOMS des planètes.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON de l'orbite.	LONGITUDE du périhélie.	MOYENNE distance au Soleil.	EXCENTRICITÉ.	DURÉE de la révolution sidérale.	LONGITUDE moyenne de l'époque (1 ^{er} janv. 1850).
Mercure.....	46° 33' 9"	7° 0' 8"	75° 7' 14"	0,3870985	0,20560478	87,9692578	327° 15' 20"
Vénus.....	75 19 52	3 23 35	129 27 15	0,7233322	0,00684331	224,7007869	245 33 15
La Terre....	0 0 0	0 0 0	100 21 22	1,0000000	0,0167701	365,2563744	100 46 44
Mars.....	48 23 53	1 51 2	333 17 54	1,5236913	0,09326113	686,9796458	83 40 31
Jupiter.....	98 54 20	1 18 40	11 54 53	5,202798	0,0482388	4332,6848212	160 1 20
Saturne.....	112 21 44	2 29 28	90 6 12	9,538852	0,0559956	10759,2198174	14 50 41
Uranus.....	73 14 14	0 46 30	168 16 45	19,182639	0,0465775	30686,820820	28 26 42
Neptune.....	130 6 52	1 46 59	47 14 37	30,03697	0,0087195	60126,72	335 8 59

PLANÈTES TÉLESCOPIQUES.

NOMS des planètes.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON	LONGITUDE du périhélie.	MOYENNE distance au Soleil.	EXCENTRICITÉ.	DURÉE de la révolution sidérale.	LONGITUDE moyenne de l'époque.	ÉPOQUES entemps moyen de Paris.
Flore.....	110° 20' 53"	5° 53' 3"	32° 49' 45"	2,201727	0,1567974	1193,281	174° 46' 5"	24,0 mars 1852.
Ariane.....	277 13 40	3 27 48	264 28 58	2,203838	0,1675649	1194,9983	211 20 32	17,0 avril 1857.
Harmonia...	93 34 24	4 15 52	1 2 42	2,267723	0,0463141	1247,3331	225 48 2	12,0 mai 1863.
Feronia....	107 37 1	5 25 56	309 48 28	2,274958	0,1164640	1253,3081	3 12 45	23,5 oct. 1864.
Melpomène..	250 3 50	10 9 17	15 5 31	2,295689	0,2176710	1270,4367	95 10 39	0,0 janv. 1851.
Victoria....	35 34 42	8 23 19	301 39 25	2,332812	0,2189196	1301,4193	7 42 36	0,0 janv. 1851.
Euterpe....	93 44 35	1 35 31	87 39 0	2,347304	0,1728961	1313,5658	260 44 3	14,9 juin 1859.
Vesta.....	103 22 5	7 8 16	250 46 29	2,360630	0,0901787	1324,7670	84 44 29	17,0 déc. 1856.

NOMS des planètes.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON	LONGITUDE du périhélie.	MOYENNE distance au Soleil.	EXCENTRICITÉ.	DURÉE de la révolution sidérale.	LONGITUDE moyenne de l'époque.	ÉPOQUES moyennes de Paris.
Uranie.....	308° 11' 6"	2° 5' 56"	30° 48' 47"	2,365591	0,1263971	1328,9446	26° 28' 46"	0,0 janv. 1855.
Némausa....	175 38 56	9 56 55	175 27 22	2,366448	0,0663953	1329,6673	154 21 1	0,0 janv. 1858.
Iris.....	259 47 44	5 28 2	41 23 2	2,386225	0,2308292	1346,3709	207 31 11	0,0 janv. 1850.
Métis.....	68 29 31	5 35 58	71 11 45	2,386646	0,1228713	1346,7272	128 8 49	30,0 juin 1858.
Écho.....	192 0 49	3 34 27	98 19 59	2,392879	0,1854280	1352,0062	47 51 42	19,5 oct. 1864.
Ausonia....	338 3 27	5 45 25	268 7 33	2,397163	0,1273185	1355,6394	180 14 48	16,0 mars 1861.
Phocéa.....	214 4 55	1 35 54	302 46 9	2,401061	0,2525329	1358,9479	294 46 43	10,0 juill. 1857.
Massalia....	206 42 29	0 41 7	98 36 35	2,409302	0,1438337	1365,9491	323 52 35	22,0 août 1859.
Asia.....	202 42 23	5 59 33	306 19 47	2,420899	0,1844392	1375,8285	144 53 34	1,0 janv. 1864.
Nysa.....	131 3 0	3 41 43	111 28 33	2,423247	0,1503446	1377,9792	116 18 47	28,0 janv. 1860.
Hébé.....	138 31 55	14 46 32	15 15 16	2,425368	0,2000777	1379,635	47 26 23	13,0 juill. 1852.
Lutetia....	80 27 57	3 5 9	327 3 12	2,435442	0,1620332	1388,2357	41 24 31	2,0 janv. 1853.
Isis.....	84 31 7	8 34 30	317 59 39	2,439998	0,2085777	1392,1371	247 46 48	1,0 janv. 1860.
Fortuna....	211 25 39	1 32 31	30 21 50	2,441357	0,1592266	1393,3007	148 59 26	5,0 mars 1858.
Eurymone..	206 41 31	4 36 49	44 14 5	2,443530	0,1949424	1395,1600	18 57 15	19,0 sept. 1863.
Parthénope.	125 1 1	4 37 1	316 3 7	2,451633	0,0986266	1402,1601	37 27 9	10,0 nov. 1865.
Théthis....	125 25 55	5 35 28	259 22 44	2,472598	0,1267732	1420,1300	214 30 40	21,0 avril 1856.
Hestia....	181 26 47	2 17 49	354 31 21	2,530335	0,1661494	1470,1607	197 16 11	25,5 mars 1860.
Amphitrite.	356 26 52	6 7 50	56 39 7	2,554866	0,0723828	1491,5190	293 11 50	9,0 juill. 1859.
Egérie....	43 17 34	16 32 14	149 45 7	2,576860	0,0691127	1540,8931	144 56 37	19,0 fév. 1856.
Astrée....	141 27 48	5 19 23	135 42 32	2,577400	0,1887517	1511,3699	197 37 33	19,5 avril 1851.
Irène.....	86 49 4	9 6 44	178 51 11	2,585260	0,1687130	1518,2866	222 1 50	1,0 mai 1851.
Pomone....	220 48 38	5 29 3	194 21 32	2,586799	0,0824398	1519,6435	57 35 30	5,0 janv. 1855.
Mélele....	194 24 28	8 1 49	293 40 11	2,597651	0,2308701	1529,2167	323 23 59	24,0 oct. 1861.
Calypso....	143 29 56	5 3 39	94 38 20	2,61289	0,1802592	1542,6971	169 52 24	27,0 avril 1858.
Diane.....	333 58 57	8 38 29	121 54 8	2,623642	0,2039816	1552,2299	160 4 1	9,0 mars 1863.
Thaïs.....	67 38 14	10 13 11	124 0 18	2,628546	0,2318078	1556,5754	320 32 36	1,0 janv. 1860.
Panope....	48 16 28	11 31 57	299 47 32	2,629114	0,1959190	1557,0846	250 34 42	0,0 juin 1861.
Fides.....	8 12 35	3 7 11	66 9 11	2,642371	0,1749865	1568,875	42 38 58	0,0 aniv. 1856.
Eunomia..	293 52 18	11 44 17	27 52 1	2,643679	0,1822489	1570,0404	149 57 57	0,0 janv. 1854.
Virginia..	10 28 43	2 47 46	173 29 6	2,650995	0,2871466	1576,5625	175 1 14	5,0 oct. 1857.
Proserpine.	45 55 2	3 35 48	236 27 15	2,656071	0,0873359	1581,0933	227 31 36	11,0 juin 1853.
Maïa.....	8 13 12	3 2 25	38 13 5	2,663544	0,1339165	1587,7695	188 39 37	27,0 mai 1861.
Juno.....	170 57 46	13 3 21	54 9 41	2,668613	0,2565382	1592,3044	342 0 35	7,0 août 1856.
Clytie.....	7 32 48	2 24 34	60 35 46	2,669359	0,04103 8	1592,9722	190 39 20	28,0 mai 1862.
Eurydice..	359 55 43	5 0 1	334 25 8	2,670834	0,3067462	1594,2932	18 12 47	0,0 janv. 1863.
Frigga....	2 7 2	2 27 55	58 9 1	2,6137519	0,1358156	1596,9063	39 25 51	0,0 janv. 1863.
Angéline..	311 4 47	1 19 52	123 43 50	2,680554	0,1290951	1603,0041	182 57 30	28,0 mai 1861.
Circé....	184 48 27	5 26 28	149 33 24	2,687161	0,1077618	1608,9353	257 28 45	17,0 janv. 1860.
Concordia.	161 15 40	5 1 50	184 36 40	2,699318	0,0416189	1619,8652	186 6 13	23,0 avril 1860.
Alexandra.	313 49 27	11 46 58	294 16 0	2,709332	0,1986866	1628,8498	346 27 46	30,0 déc. 1858.
Olympia..	170 20 41	8 37 35	16 48 44	2,714191	0,1174912	1633,2708	7 5 40	22,0 sept. 1860.
Eugénie..	148 5 53	6 34 58	230 2 0	2,721430	0,0824275	1639,8094	294 35 2	0,0 janv. 1858.
Léda.....	296 27 35	6 58 26	100 44 31	2,739980	0,1552524	1656,6042	112 56 44	0,0 janv. 1856.
Atalante..	359 27 35	18 42 9	42 23 48	2,749890	0,2981715	1665,6000	36 21 31	0,0 janv. 1856.
Nobé.....	316 18 48	23 18 30	221 58 47	2,756160	0,1737289	1671,2998	343 0 38	0,0 janv. 1863.
Pandore..	10 52 10	7 13 50	11 9 48	2,759068	0,1447359	1673,9454	46 52 23	25,0 oct. 1863.
Cérés....	80 48 25	10 36 28	149 25 39	2,766541	0,0795155	1678,5155	146 44 31	15,0 fév. 1857.
Daphné..	179 3 3	16 5 31	220 4 32	2,767402	0,2703509	1681,5354	334 51 28	24,0 sept. 1862.
Pallas....	172 38 28	34 42 41	122 5 27	2,769582	0,2391191	1683,5241	119 18 3	22,0 janv. 1857.
Lætitia..	157 19 22	10 20 58	2 3 7	2,770595	0,1104248	1684,4466	146 44 21	1,0 janv. 1856.
Bellone..	144 42 58	9 22 33	122 18 20	2,775089	0,1548616	1688,5464	159 2 5	0,0 mars 1864.
Galatée..	197 59 46	3 58 19	7 19 35	2,778516	0,2384049	1691,6759	33 9 56	15 0 fév. 1863.
Terpsichore.	2 49 10	8 45 43	23 40 53	2,779990	0,1312712	1693,0215	15 13 8	23 0 oct. 1864.
Lélio....	44 53 11	7 57 35	345 5 58	2,780404	0,1884613	1693,3997	78 58 44	20,0 déc. 1863.
Polymnie..	9 7 20	1 56 18	342 31 3	2,805343	0,3384058	1774,5778	39 45 19	10,0 déc. 1864.
Aglaé....	4 16 58	5 0 0	314 6 45	2,883421	0,1310131	1788,3794	83 46 57	5,0 janv. 1859.
Calliope..	66 36 55	13 44 52	58 8 0	2,909049	0,1036645	1812,2754	76 59 12	0,0 aniv. 1853.
Psyché...	150 32 54	3 5 56	15 23 47	2,923282	0,1351617	1825,5913	51 28 33	24,5 nov. 1865?
Hesperia..	187 1 7	8 28 19	109 6 25	2,971690	0,1738340	1874,1260	163 53 48	3,0 juin 1861.
Danaé....	334 18 35	18 17 10	341 34 56	2,985416	0,1822451	1884,1052	346 6 5	29,0 sept. 1860.
Leucothée.	355 51 39	8 10 48	201 31 37	3,004755	0,2141174	1902,4447	154 41 34	7,0 fév. 1865.
Palès....	290 32 17	3 8 46	32 14 50	3,082494	0,2372070	1976,7464	52 15 41	14,0 nov. 1863.
Europa....	129 56 57	7 24 35	102 14 26	3,099883	0,1009387	1994,4978	136 26 21	0,0 janv. 1858.
Doris....	185 5 30	6 29 28	74 20 42	3,109402	0,0766364	2002,6865	309 32 30	25,0 juill. 1862.
Érato....	126 11 4	2 12 21	34 4 53	3,130850	0,1710999	2023,4432	96 3 30	0,0 janv. 1862.
Thémis...	35 49 29	3 49 26	134 20 19	3,141564	0,1226585	2033,3389	171 46 1	5,0 mai 1853.
Hygie....	287 38 27	3 47 11	218 2 29	3,151388	0,1009159	2043,3886	356 45 31	28,5 sept. 1851.
Euphrosyne.	31 25 23	26 25 12	93 51 7	3,186160	0,2160126	2048,0294	53 50 10	0,0 janv. 1855.
Mnémosyne.	200 5 25	15 8 2	52 53 13	3,177288	0,104115	2049,1276	28 35 45	1,0 janv. 1859.
Fréia....	213 2 22	2 1 52	92 51 5	3,386424	0,1871775	2276,1968	45 7 42	24,5 oct. 1862.
Maximiliana.	158 53 48	3 28 10	258 22 17	3,419849	0,1201720	2309,9785	192 17 38	18,0 mars 1861.

L'Annuaire de 1867 donne les éléments de 8 autres planètes télescopiques, savoir :

Sapho.....	218° 29' 30"	8° 36' 22"	354° 55' 43"	2,297090	0,2004785	1271,6414	258° 1' 16"	5,0 mai 1864.
Clio.....	327 20 55	9 22 28	339 25 43	2,367454	0,2375757	1330,5158	353 2 31	10,0 nov. 1865.
Béatrix....	27 34 10	5 2 11	188 28 21	2,428770	0,0841516	1382,5232	205 38 37	4,5 mai 1865.
La 89°....	311 28 52	15 13 9	318 15 2	2,534064	0,2050043	1473,4114	331 47 48	0,0 août 1866.
Io.....	203 52 31	15 13 16	322 37 45	2,653588	0,19065 8	1578,8754	8 42 32	14,0 nov. 1865.
Alcmène..	26 59 57	2 51 26	131 13 9	2,754766	0,2234023	1689,9773	93 32 1	0,0 janv. 1865.
Thïsbé...	277 44 10	5 14 58	308 55 30	2,770186	0,1650270	1684,0730	305 0 55	4,5 à ùt 1865.
Sémélé....	87 55 30	4 47 45	28 39 4	3,098786	0,2049539	1884,7287	37 2 39	8,0 janv. 1866.

Trois autres planètes télescopiques, portant les numéros 88, 90 et 91, ont encore été découvertes dans le cours de l'année 1866; leurs éléments ne figurent point dans l'Annuaire de 1867.

Ces planètes sont rangées dans l'ordre de leur distance au soleil, et par conséquent aussi dans l'ordre de la durée de leur révolution sidérale (*Voy. Lois de KÉPLER*). De ces 88 petites planètes, *Pallas* est celle dont l'orbite est la plus inclinée sur l'écliptique; son inclinaison est de plus d'un tiers d'angle droit; *Massalia* est au contraire celle dont l'orbite approche le plus de se confondre avec l'écliptique, puisque son inclinaison n'est que de 41' 7"; *Polymnie* est celle dont l'orbite est la plus allongée, puisque son excentricité surpasse $\frac{1}{3}$; *Clytie* est au

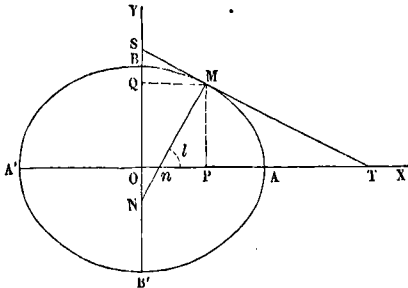
contraire, celle dont l'orbite se rapproche le plus du cercle. On peut remarquer aussi l'analogie qui existe entre les éléments des deux planètes *Iris* et *Métis*.

ÉLÉVATION, projection de la façade d'un édifice sur un plan vertical parallèle. On peut faire autant d'élévations qu'il y a de façades, soit extérieures, soit intérieures (sur les cours).

Le même mode de représentation s'applique à toutes les constructions, aux machines, et en général à tous les corps susceptibles d'une description géométrique. (*Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS.*)

ELLIPSOÏDE CENTRAL, nom donné par M. Poinsot à l'ellipsoïde qu'on détermine en menant par un point quelconque d'un corps une série de droites, et prenant sur chacune d'elles, à partir de ce point, une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie du corps par rapport à cette droite. Cet ellipsoïde joue un rôle important dans la recherche des *moments d'inertie* (*Voy. MOMENT D'INERTIE*), et M. Poinsot en a tiré un parti ingénieux pour peindre aux yeux le mouvement d'un corps dans lequel il y a un point fixe, en démontrant que le corps, qui a reçu l'impulsion initiale d'un couple, se meut comme si l'ellipsoïde central roulait sur un plan fixe parallèle au plan du couple. (*Voy. la Théorie nouvelle de la rotation des corps*, par M. Poinsot.)

ELLIPSOÏDE TERRESTRE (FORMULES RELATIVES A L'). Lorsque l'on considère le globe terrestre comme un ellipsoïde de révolution autour de la



ligne des pôles, on a besoin, dans les calculs géométriques, d'exprimer certaines lignes de l'ellipsoïde en fonction du rayon équatorial a , de l'excentricité e , et de la latitude l du point que l'on considère sur la surface. Soit $ABA'B'$ l'ellipse méridienne, $OA = a$ son demi grand axe, $OB = b$ son demi petit

axe. Soit M le point que l'on considère, MT la tangente en ce point, et MN la normale; cette dernière rencontre le grand axe en un point n et le petit axe en un point N ; la longueur Mn est ce que l'on appelle la *petite normale*, et la longueur MN est la *grande normale*; nous les désignerons par n et N . L'angle MnX que fait la normale avec le grand axe est la latitude l du point M .

L'excentricité e a pour valeur

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e;$$

on tire de là pour la valeur du *demi petit axe*

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad [1]$$

Si l'on abaisse MP perpendiculaire sur OA , et MQ perpendiculaire sur OB , la ligne MQ , ou OP , est le *rayon du parallèle* sur lequel se trouve le point M . C'est l'*abscisse x* de ce point. Or on a

$$\text{tang } l = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Si l'on met pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et qu'on résolve par rapport à x , on trouve, en remplaçant b par sa valeur [1],

$$x = \frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [2]$$

La *grande normale* s'obtient en remarquant que dans le triangle MQN on a

$$MN = \frac{MQ}{\cos l} = \frac{x}{\cos l}; \text{ d'où } N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [3]$$

De la valeur [2] de l'abscisse du point M on conclut aisément celle de son *ordonnée*

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [4]$$

La *petite normale* s'en déduit en remarquant que dans le triangle MnP on a

$$Mn = \frac{MP}{\sin l} = \frac{y}{\sin l}, \text{ d'où } n = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [5]$$

Cette valeur peut s'écrire

$$n = N(1 - e^2). \quad [6]$$

La *sous-tangente* PT s'obtient en remarquant que le triangle MPT donne

$$PT = MP \text{ tang } l = y \text{ tang } l,$$

$$\text{d'où } PT = \frac{a(1 - e^2) \text{ tang } l \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [7]$$

La *sous-normale* nP est donnée par le triangle MnP , dans lequel on a

$$nP = Mn \cos l = n \cos l = \frac{a(1 - e^2) \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}, \quad [8]$$

$$\text{ou bien } nP = N(1 - e^2) \cos l. \quad [9]$$

On démontre que dans l'ellipse le *rayon de courbure* équivaut au cube de la petite normale divisé par le carré du demi-paramètre. On a trouvé plus haut [5] la valeur de la petite normale; celle du paramètre, ou $\frac{2b^2}{a}$, se déduit de la formule [1]; il est égal à $2a(1 - e^2)$. En appelant ρ le rayon de courbure au point M , on a donc

$$\rho = \frac{n^3}{a^2(1 - e^2)^2} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}. \quad [10]$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$\rho = \frac{N(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 l} \quad [11]$$

Si par la normale on fait passer un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse méridienne, on coupe l'ellipsoïde suivant une nouvelle ellipse dont le rayon de courbure au point M est précisément la grande normale N. Or, en vertu du théorème d'Euler, si ρ' désigne le rayon de courbure de la section obtenue en menant par la normale MN (qui est normale à la surface de révolution) un plan faisant avec la section méridienne un angle quelconque θ , on a, puisque les sections dans lesquelles les rayons de courbure ont pour valeur ρ et N sont perpendiculaires entre elles,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{N} \sin^2 \theta + \frac{1}{\rho} \cos^2 \theta,$$

ou, à cause de la valeur de ρ [11],

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho'} &= \frac{1}{N} \left[\sin^2 \theta + \frac{1-e^2 \sin^2 l}{1-e^2} \cdot \cos^2 \theta \right] \\ &= \frac{1}{N} \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 l \cos^2 \theta \right) \end{aligned} \quad [12]$$

$$\text{d'où } \rho' = N \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 l \cos^2 \theta \right)^{-1} \quad [13]$$

formule qui fait connaître le rayon de courbure d'une section normale quelconque dont l'azimut θ est donné.

Si l'on avait besoin des longueurs MT, MS, On, ON, on trouverait facilement

$$MT = N(1-e^2) \operatorname{tang} l, \quad [14]$$

$$MS = N \cot l, \quad [15]$$

$$On = Ne^2 \cos l, \quad [16]$$

$$ON = Ne^2 \sin l. \quad [17]$$

Si s désigne la longueur d'un arc de l'ellipse méridienne, on a aisément sa différentielle ds en considérant cet arc infiniment petit comme un élément du cercle osculateur. L'angle de deux normales consécutives n'étant autre chose que dl , on a

$$ds = \rho dl = \frac{a(1-e^2) dl}{(1-e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}. \quad [18]$$

Développant en série, et intégrant de 0 à l , on obtient la valeur de l'arc s compté à partir de l'équateur jusqu'au point dont la latitude est l . (Voir le résultat de cette intégration à l'article FIGURE DE LA TERRE, équation [4]).

ÉLONGATION, distance angulaire d'une planète au soleil (Voy. PLANÈTES).

EMBASE, renflement en forme de disque, que l'on donne aux pièces tournantes des machines, dans le voisinage de l'axe de rotation, et qui a pour objet d'augmenter leur solidité, en assurant leur assiette. On donne le même nom à beaucoup de renflements analogues usités dans la construction des machines et des outils.

EMBRASURE, échancrure pratiquée dans un parapet pour donner passage à la volée d'artillerie. On appelle *directrice* de l'embrasure la projection horizontale de l'axe de la pièce en batterie. La paroi inférieure de l'embrasure se nomme le *fond* ou le *glacis*; il est incliné à 20 de base sur 1 de hauteur; les parois latérales sont les *faces* de l'embrasure. La partie du talus intérieur du parapet comprise entre le fond de l'embrasure et la plate-forme, ou le sol, qui porte la pièce, est ce qu'on appelle la *hauteur de genouillère*.

Supposons d'abord que la directrice OO' (fig. 1) soit perpendiculaire à la ligne de feux $ac, a'c'$, ce qui est le cas des embrasures *directes*. Soit KHMABD le profil du parapet. Pour tracer les projections de

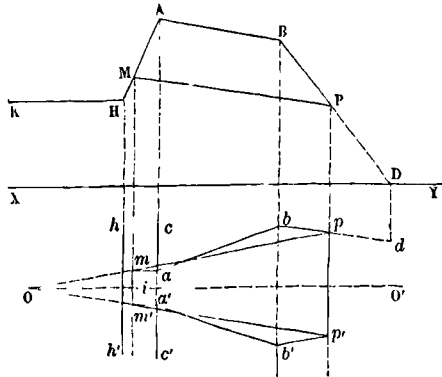


Fig. 4.

l'embrasure, on prendra d'abord $HM = 0^m,80$; et par le point M on mènera une droite MP inclinée à 20 de base sur 1 de hauteur; sa rencontre avec le talus extérieur BD donnera le point P; par les points H, M, A, B, P on mènera des perpendiculaires à la ligne de terre. Au-dessus ou au-dessous du point i , où la directrice OO' est rencontrée par la perpendiculaire correspondante au point M, on prendra les longueurs $mi = im' = 0^m,225$; et par les points m, m' on mènera des parallèles à OO' jusqu'à la rencontre de cc' ; on aura ainsi en $amm'a'$ la projection horizontale de l'ouverture intérieure de l'embrasure. Par le point m on mènera une droite mp , faisant avec OO' un angle égal à celui dont la tangente est $\frac{1}{4}$; on mènera de même une droite $m'p'$

symétrique de mp . Par la droite mp on fera passer un plan P incliné à 1 de base sur 3 de hauteur; et l'on cherchera son intersection avec le talus extérieur. Pour cela, conformément aux règles de la Géométrie descriptive, on déterminera d'abord la trace horizontale t de la droite MP, mp (cette trace n'est point marquée sur la figure); et, par cette trace, on mènera une tangente au cercle décrit du point m comme centre avec un rayon égal au tiers de la différence de cotes entre cette trace t et le point M; cette tangente sera la trace horizontale du plan cherché P. Elle rencontrera en un point d la trace horizontale du talus extérieur; ce point d appartiendra donc à la projection de l'intersection du plan P avec le talus extérieur; par conséquent, en joignant dp , que l'on prolongera jusqu'en b , on aura la projection horizontale de cette intersection. On opérera de même pour $m'p'$, et l'on aura en $bpp'b'$ la projection horizontale de l'ouverture extérieure de l'embrasure. Les faces sont des paraboloides hyperboliques engendrés chacun par une droite qui s'appuie constamment sur les droites MA, ma et BP, bp , ou sur les droites symétriques MA, ma et BP, $b'p'$, en restant parallèle au fond de l'embrasure.

Lorsque la directrice n'est pas perpendiculaire à la ligne de feux, auquel cas l'embrasure est *oblique*, le fond de la construction reste la même; nous ne

signalerons que les différences. Dans la figure 1 les droites mp et $m'p'$ viennent concourir en un point O sur la directrice. Dans le cas de l'embrasure oblique (fig. 2), on prend un point O à la même distance de

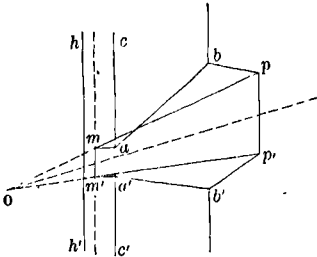


Fig. 2.

la ligne de feux que dans la figure 1. Soit OO' la directrice; on mène les droites Op et Op' faisant avec OO' des angles dont la tangente est $\frac{1}{4}$; ces droites rencontrent la perpendiculaire à la ligne de terre correspondante au point M , en deux points m et m' ; on mène ma et $m'a'$ perpendiculaires à mm' , jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire à la ligne de terre correspondant au point A ; et l'on a en $amm'a'$ la projection horizontale de l'ouverture intérieure de l'embrasure; elle est un peu plus large que dans le cas de l'embrasure directe, et d'autant plus large que l'embrasure est plus oblique. On termine les droites mp et $m'p'$ à la rencontre de la perpendiculaire à la ligne de terre correspondant au point P , comme dans la figure 1; et le reste s'achève comme dans le cas de l'embrasure directe; avec cette seule différence que, les faces n'étant plus symétriques par rapport à la directrice, il faut recommencer la construction pour chacune d'elles.

Pour les pièces de siège, la hauteur de genouillère est de $1^m,19$, et l'ouverture intérieure de l'embrasure a $0^m,54$ de largeur.

Les embrasures des obusiers se construisent d'après les mêmes principes; mais la largeur de l'ouverture intérieure est de $0^m,60$ pour les obusiers de campagne et de $0^m,80$ pour les obusiers de siège. De plus, le fond de l'embrasure, au lieu d'être incliné vers l'extérieur, est au contraire incliné vers l'intérieur, attendu que ces bouches à feu sont toujours tirées à une certaine inclinaison qui est souvent de 10° à 12° , mais qui peut aller jusqu'à 18° et même davantage. Pour déterminer le fond de l'embrasure, on prend sur le talus intérieur, à partir du sol ou de la plate-forme, une longueur de $0^m,60$ ou $0^m,80$ suivant la nature de l'obusier, ce qui donne l'intersection de ce talus avec le fond de l'embrasure; pour avoir le point correspondant de l'ouverture extérieure, on considère un point situé à $2^m,30$ en arrière de la crête intérieure, et à $1^m,50$ au-dessus du sol; ce point représente la position de l'œil du pointeur; par ce point, et dans le plan vertical de la directrice, on mène une droite inclinée de 5° au-dessus de l'horizon; cette droite rencontre le talus extérieur en un point appartenant au fond de l'embrasure. On achève comme pour les embrasures des canons. (Voy. le *Résumé de fortification*, de Zaccone.)

EMBRAYAGE, action de faire participer une pièce

d'une machine au mouvement de la machine motrice. Mécanisme à l'aide duquel on produit cette action. L'étude de l'embrayage comprend nécessairement le *désembrayage*, c'est-à-dire l'action contraire par laquelle on soustrait une pièce d'une machine à l'action du moteur.

I. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse d'établir la communication entre deux axes situés dans le prolongement l'un de l'autre. L'embrayage le plus simple consiste dans l'emploi d'un *manchon* ou *botte d'accouplement*; c'est un prisme creux dont la section droite est la même que celle des bouts des deux arbres à accoupler; ce prisme enveloppe le bout de l'un de ces arbres; si on le fait glisser longitudinalement de manière que le bout du second arbre s'y engage, les deux arbres deviennent solidaires, et le mouvement imprimé à l'un se trouve par cela même imprimé à l'autre. La forme donnée à la section droite du manchon est très-variable; le plus souvent c'est un simple carré, comme le montre la figure 1, ou une figure en trèfle, comme l'indique

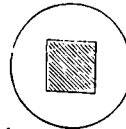


Fig. 1.



Fig. 2.

la figure 2. La seconde forme est préférable; car la section des bouts d'arbres devant toujours être un peu moindre, il résulte du jeu laissé ainsi entre le manchon et l'arbre, que celui-ci peut tourner d'une petite quantité dans le manchon; et si sa section présente des arêtes trop vives, il peut entailler la surface interne du manchon et le détériorer en peu de temps.

Lorsque le travail à effectuer exige que les deux arbres ne puissent prendre aucun jeu l'un par rapport à l'autre, on tourne exactement les bouts à assembler; le manchon est lui-même exactement alésé au même diamètre; on pratique dans les bouts d'arbres une rainure dans laquelle on engage une clef de calage, pressée extérieurement par un boulon; les deux arbres sont ainsi rendus parfaitement solidaires. La figure 3 montre cette disposition: A , A sont les bouts des deux arbres; MM représente le manchon, C est la clef de calage, et B est le boulon. Ce genre d'embrayage porte le nom d'*embrayage fixe*; c'est moins un embrayage, comme on le voit, qu'un mode d'assemblage temporaire.

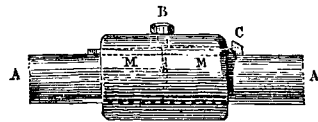


Fig. 3.

II. Les dispositions que l'on vient de décrire supposent que les deux arbres doivent être accouplés pendant un temps notable. Mais s'il est nécessaire de pouvoir embrayer et désembrayer instantanément, on emploie un mode d'embrayage différent, qui consiste dans l'emploi de deux *manchons à crans* (fig. 4). Ces manchons M et M' présentent des saillies et des

creux disposés de manière à pouvoir pénétrer les uns dans les autres et coïncider exactement. L'un des manchons M est calé à demeure sur l'arbre A; l'autre M' peut glisser le long de l'arbre A'. Le glis-

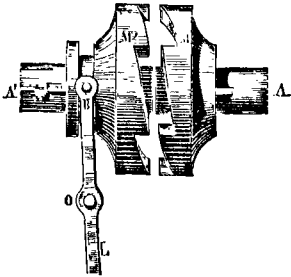


Fig. 4.

sement est opéré au moyen d'un levier BL, mobile autour d'un point fixe O, et dont l'extrémité B est formée d'une fourche embrassant une sorte de collier qui termine le manchon mobile. On embraye en poussant vers la gauche l'extrémité L du levier; on désembraye en la poussant vers la droite.

Dans les machines puissantes, le poids du manchon mobile peut être assez considérable pour que la fourche d'embrayage ne puisse plus être manœuvrée à la main, on la relie par une bielle à un autre levier parallèle que l'on fait mouvoir à l'aide d'une vis et d'une manivelle, comme l'indique la fig. 5.

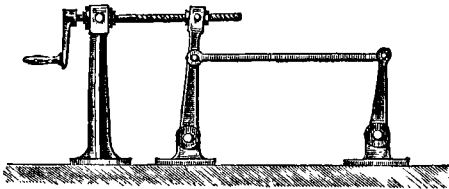


Fig. 5.

L'embrayage et le désembrayage sont nécessairement plus lents dans ce système que dans le précédent.

Lorsqu'on a besoin d'un désembrayage rapide, comme cela arrive quelquefois dans les laminoirs, on donne aux deux manchons des rebords, dont l'un est simplement annulaire, tandis que l'autre va en se rapprochant du premier jusqu'à le toucher en un point de son pourtour, comme l'indique la figure 6, en *a*. Pour opérer le désembrayage l'ouvrier introduit entre les deux rebords, au point où leur écart est le plus grand, une forte barre de fer posée sur le sol et maintenue entre des guides. Par la rotation même des deux arbres le bout *b* de cette barre s'engage graduellement entre les parties de plus en plus rapprochées des deux rebords, et oblige ainsi le manchon mobile à se séparer du manchon fixe.

La forme des crans qui terminent les deux manchons est arbitraire, cependant il est bon que, depuis le moment où les manchons commencent à se toucher jusqu'à l'instant où les faces planes arrivent à coïncider, il y ait frottement des surfaces en contact; parce que ce frottement contribue à faire

prendre graduellement à l'arbre conduit la vitesse de l'arbre conducteur, et atténue ainsi le choc au moment du contact des faces planes. M. Bélanger conseille de donner aux saillies la forme de sur-

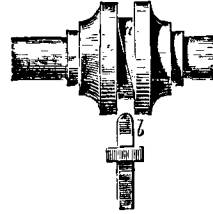


Fig. 6.

faces hélicoïdes, les faces planes étant dirigées vers l'axe.

III. En raison de l'avantage qu'offre le frottement des manchons pour rendre la transmission graduelle et atténuer l'effet du choc, on emploie, dans les machines où l'effort à transmettre est peu considérable, des manchons coniques auxquels on donne le nom de *cônes de friction* (fig. 7). Le manchon

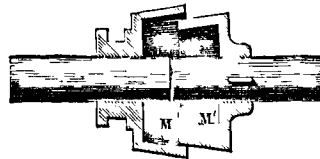


Fig. 7.

mobile M est amené par la fourche d'embrayage en contact avec la surface externe du manchon fixe M'; et lorsque les deux surfaces sont appliquées l'une contre l'autre, le glissement cesse, et le cône extérieur entraîne le cône intérieur. L'effort nécessaire pour faire adhérer les deux cônes est d'autant moindre que l'angle des génératrices avec l'axe est plus petit. Dans la figure 7, c'est le cône mobile qui est extérieur; la disposition inverse est également adoptée. Ce mode d'embrayage est fréquemment employé dans le *tour*.

IV. Nous considérerons actuellement le cas où les deux axes entre lesquels il s'agit d'établir la transmission sont parallèles. Cette transmission peut s'opérer par un engrenage ou par une courroie sans fin.

Dans le premier cas, l'une des deux roues d'engrenage peut tourner autour de son axe sans entraîner l'arbre correspondant; on dit alors que cette roue est *folle*. Mais sur le même arbre est établi un manchon M (fig. 8), qui ne peut tourner autour de son axe sans entraîner l'arbre A, mais qui peut glisser longitudinalement suivant son axe; cette double condition est remplie à l'aide de languettes longitudinales en saillie sur l'arbre et qui pénètrent dans autant de rainures pratiquées à la surface interne du manchon. Celui-ci porte en outre sur sa face adjacente à la roue folle R un certain nombre de saillies telles que *s, s*, pouvant pénétrer dans des cavités correspondantes pratiquées à la surface latérale de la roue R. Lorsqu'à l'aide d'une fourche

d'embrayage on amène le manchon contre la roue R de manière que les saillies *ss* pénètrent dans les creux qui leur correspondent, la roue R devient solidaire avec le manchon, et par conséquent avec

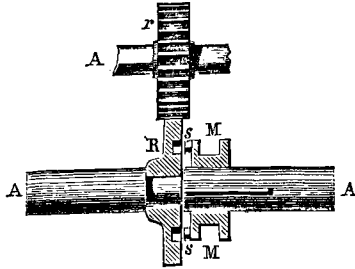


Fig. 8.

l'axe A ; il en résulte que le mouvement de l'arbre A' est transmis à l'axe A par l'engrenage des roues *r* et R. L'arbre moteur pourrait être l'arbre A, le jeu de l'appareil serait le même. Dans les deux cas, il faut arrêter le mouvement pour embrayer ; mais on peut au contraire déembrayer pendant le mouvement même. Il est clair qu'un dispositif analogue pourrait être adapté à un engrenage conique.

On peut encore, dans le cas d'un engrenage cylindrique, déembrayer en faisant glisser l'un des deux arbres suivant son axe avec la roue dentée qu'il porte ; et l'on embraye en ramenant l'arbre dans sa position normale. On fixe l'arbre dans chacune de ces deux positions à l'aide d'un levier d'arrêt, que l'on introduit dans deux gorges correspondantes fixées sur l'arbre.

V. Si la transmission s'opère à l'aide d'une courroie sans fin, le mode d'embrayage le plus usité est le suivant. Soit P (fig. 9) l'une des poulies sur lesquelles passe la courroie, et qui est calée à demeure sur l'arbre AA. A côté de cette poulie, et sur le même arbre, on place une poulie semblable P' qui peut tourner indépendamment de l'arbre ; c'est ce qu'on appelle une *poulie folle*. Si l'on fait passer la courroie sur la poulie folle, l'arbre A n'est pas entraîné ; mais si on la fait passer sur la poulie P, comme elle est solidaire avec l'arbre, elle entraîne celui-ci, et l'embrayage est effectué. Pour faire passer la courroie d'une poulie sur l'autre, on se sert encore d'une fourche d'embrayage, à l'aide de laquelle on saisit la courroie dans la région qui va s'enrouler sur la poulie P ou P', et on la fait aisément passer de l'une à l'autre. Ce mode d'em-

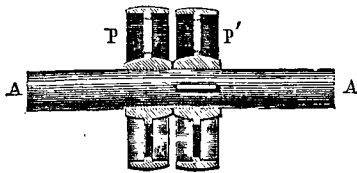


Fig. 9.

brayage est employé dans les machines à carder, à filer, à tisser, etc.

VI. Lorsque la poulie conductrice et la poulie con-

duite sont dans un même plan vertical, on peut encore opérer l'embrayage à l'aide d'un *tendeur* ou *rouleau de tension* (Voy. COURROIES SANS FIN). Soient R et r (fig. 10) les deux poulies. On donne à la

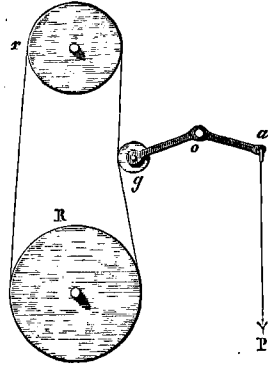


Fig. 10.

courroie assez de jeu pour que, dans l'état ordinaire le mouvement ne puisse se transmettre par son intermédiaire d'une poulie à l'autre. Dans le plan des poulies est établi un levier coudé *aog*, mobile autour d'un axe horizontal *o*, et portant à son extrémité *g* un galet, ou roulette. Lorsqu'on veut embrayer, on agit sur l'extrémité *a* du levier pour la faire baisser ; l'extrémité opposée se relève, le galet *g* appuie sur la courroie ; on peut régler ainsi la tension de manière que le mouvement se transmette d'une poulie à l'autre. Lorsque l'on veut déembrayer, on abandonne le levier à son propre poids ; le galet cesse d'appuyer sur la courroie, et la transmission cesse.

On peut encore obtenir le même effet en écartant un peu les deux axes pour embrayer, et les rapprochant pour déembrayer.

VII. Dans le cas où les efforts à transmettre sont peu considérables, on peut opérer l'embrayage par simple pression entre deux rouleaux, ou entre un rouleau et une tige guidée. Soit A (fig. 11) la roue

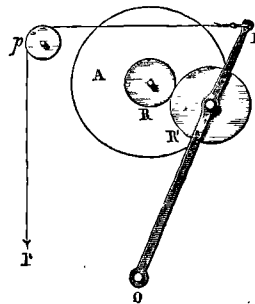


Fig. 11.

à laquelle on veut donner le mouvement. Sur son axe est monté un rouleau R. Un autre rouleau R' peut tourner autour d'un axe parallèle à celui du rouleau R, et ses tourillons reposent sur des paliers adaptés à deux montants parallèles OB mobiles autour d'un axe horizontal O. Dans l'état ordinaire, le

pois des montants et du rouleau R' suffit pour écarter le rouleau R' du rouleau R, en maintenant les montants appuyés contre des supports fixes. Mais si l'on rapproche les montants, à l'aide, par exemple, d'une corde passant sur une poulie de renvoi p et chargée d'un poids convenable P, les deux rouleaux prennent assez d'adhérence pour que le mouvement de rotation de l'un se transmette à l'autre. Ce mécanisme est fréquemment employé dans les moulins, où il est connu sous le nom de *tire-sacs*.

On peut, par un moyen analogue, faire mouvoir une tige verticale guidée. Soit A (fig. 12) une roue animée

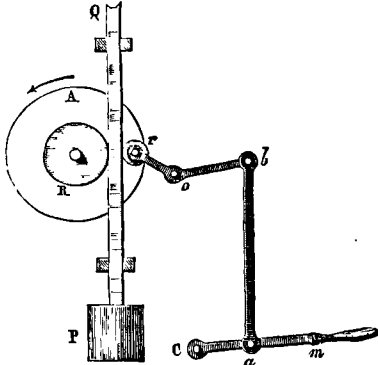


Fig. 12.

d'un mouvement de rotation dans le sens de la flèche; sur son axe est monté un rouleau R, et très-près de ce rouleau passe une tige PQ verticale, mobile entre des guides. Un levier coudé bor, mobile autour d'un axe fixe o, porte à son extrémité une roulette r, et est articulé par l'autre extrémité à une bielle ab, articulée elle-même à un levier mC, mobile autour de l'axe fixe C. Si un ouvrier élève l'extrémité m de ce second levier, la roulette s'appuie sur la tige PQ et force celle-ci à adhérer avec le rouleau R; il en résulte aussitôt un mouvement ascendant de la tige PQ. Quand l'ouvrier lâche le levier mC, la roulette r s'écarte de la tige, qui retombe aussitôt par son poids.

Ce dernier mode d'embrayage est employé avec succès dans les forges pour la manœuvre du *marteau-pilon*, qui offre, entre autres avantages, celui de permettre à l'ouvrier de régler à volonté la hauteur de chute du marteau, et de tourner librement autour de l'enclume.

VIII. On peut encore ranger parmi les embrayages l'ENCLIQUETAGE (Voy. ce mot) appliqué aux meules des moulins. Soit AAA (fig. 13) une meule folle sur son axe. Sur le même axe est montée à demeure une roue à rochets aaa; un cliquet d'arrêt cc fixé sur la meule, et maintenu par un ressort r, établit la liaison entre l'arbre et la meule, qui est obligée de tourner avec celui-ci dans le sens de la flèche. Mais si l'arbre s'arrête instantanément, il faut, pour éviter les ruptures, que la meule puisse continuer à tourner indépendamment de l'arbre; en d'autres termes, il faut que l'on puisse débrayer instantanément. Or, c'est à quoi le mécanisme lui-même pourvoit; car si l'arbre est arrêté, et que la meule continue à tourner, le cliquet saute successivement un certain

nombre de dents de la roue à rochet devenue fixe, en forçant le ressort r à céder momentanément. Lorsque l'arbre se remet en mouvement, le cliquet est entraîné de nouveau par la roue à rochet, et

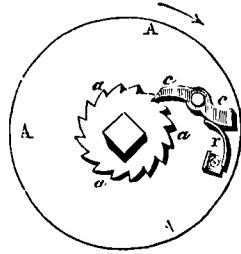


Fig. 13.

entraîne lui-même la meule. Ce dispositif a été souvent employé dans les moulins, et particulièrement dans ceux qui sont mis en mouvement par des chevaux.

On l'emploie aussi dans les scieries à scies circulaires pour pouvoir arrêter la scie sans arrêter instantanément le volant monté sur le même arbre, ce qui offrirait des dangers. Pour atteindre ce but, on laisse le volant libre de tourner autour de l'arbre sans l'entraîner; mais sur l'arbre est monté une roue à rochet, qui vient buter contre un cliquet d'arrêt fixé au volant. Lorsqu'on arrête la scie, et par conséquent l'arbre qui la porte, le volant peut continuer à tourner pendant un certain temps, parce que le cliquet d'arrêt saute successivement les dents de la roue à rochet. Lorsque l'arbre et la scie se remettent en marche, la roue à rochet entraîne de nouveau le cliquet et par suite le volant auquel il est fixé. (Voy. MODIFICATEURS DU MOUVEMENT.)

Enfin le même mécanisme se rencontre dans l'horlogerie et sert au remontage des HORLOGES, PENDULES, MONTRES CHRONOMÈTRES (Voy. ces mots).

EMBRÈVEMENT, saillie triangulaire ménagée à l'extrémité d'une pièce de charpente qui s'assemble obliquement avec une autre pièce. Cette saillie, en pénétrant dans une cavité égale creusée dans l'autre pièce, produit un arc-boutement favorable à la résistance qu'on veut obtenir. L'embrèvement accompagne fréquemment l'assemblage par tenon et mortaise. (Voy. ASSEMBLAGES.)

ÉMERSION, réapparition d'un astre éclipsé, ou que la lumière du soleil empêchait d'être visible.

EMMARCHÉMENT, longueur d'une marche d'escalier, comptée sur son arête saillante depuis le mur de la cage jusqu'à la *courbe de jour*. (Voy. ESCALIERS.)

EMPANON DÉVERSÉ, empanon de GROUPE BIAISE (Voy. ce mot), qui a ses faces latérales perpendiculaires au plan du lattis supérieur; ces faces ne sont par conséquent plus verticales; si l'on imagine que la pièce, ayant son axe parallèle à celui du chevron de demi-ferme, ait d'abord ses faces latérales verticales, on voit qu'il faudra la faire tourner d'un certain angle autour de cet axe pour amener la face supérieure dans le plan du lattis; d'où le mot *déversé*. Le problème de l'empanon déversé a été célèbre, parce qu'il servait d'épreuve pour la réception des compagnons charpentiers; il exige en

effet diverses opérations de Géométrie descriptive horizontale de l'arête, ainsi que sa projection sur un plan vertical parallèle à l'arête supérieure. OA et

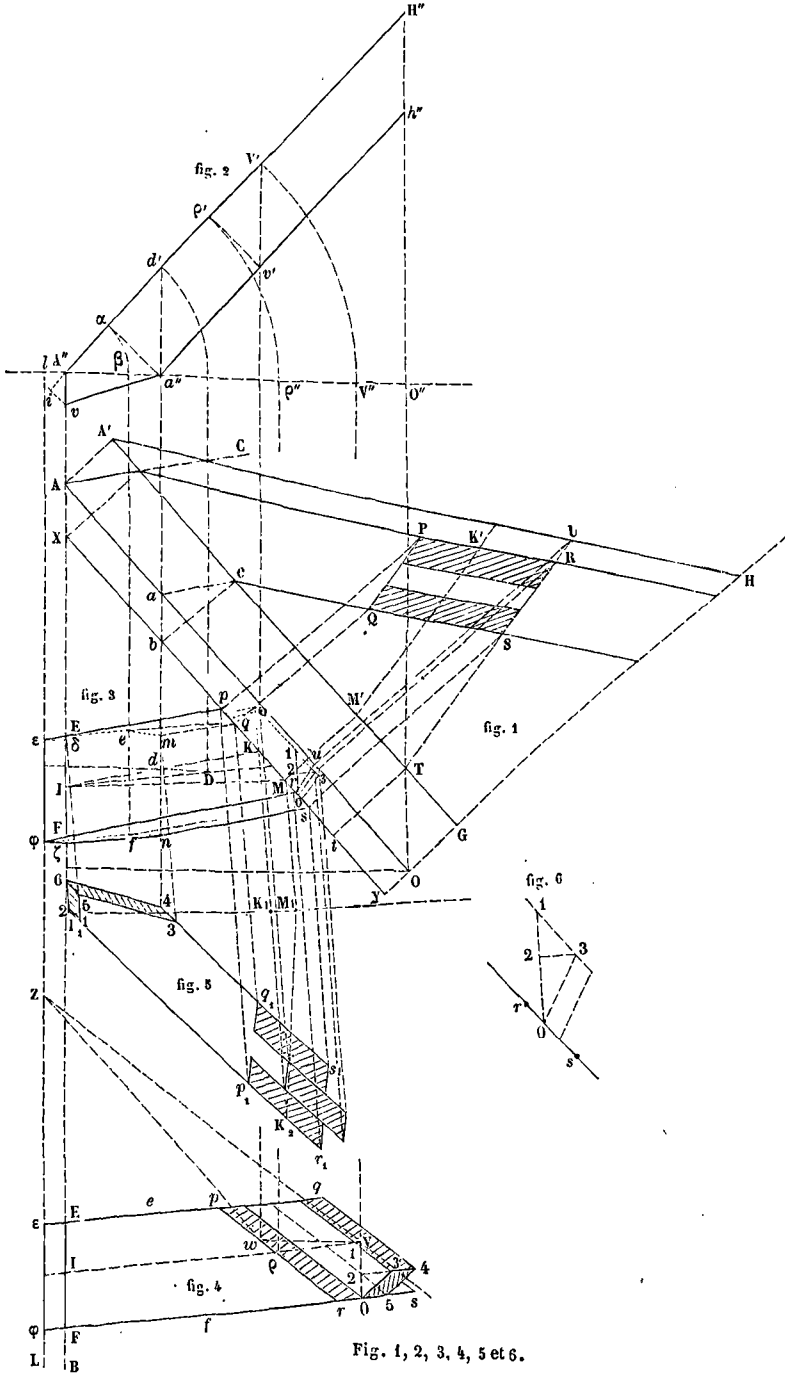


Fig. 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

A'H sont les projections de cette arête. AB est la long pan; ab et ac sont les lignes de gorge. Enfin ligne d'about de croupe; AC est la ligne d'about de | on donne la projection horizontale IK (fig. 3) de la

ligne milieu de l'empanon. — Il s'agit d'obtenir la projection de l'empanon sur la herse, et sa projection sur un plan parallèle aux faces déversées, projections qui sont indispensables pour tailler la pièce.

La première chose à faire est de tracer ce qu'on appelle le *profil de croupe*, c'est-à-dire les intersections des plans de lattis supérieur et inférieur par un plan perpendiculaire à la ligne d'about de croupe. Soit $A''O''$ (fig. 2) la trace horizontale de ce plan; on prolongera les lignes d'about et de gorge AB et ab jusqu'à leur rencontre avec cette trace aux points A'' et a'' ; si O est la projection horizontale du sommet de l'angle trièdre du comble, on mènera par ce point une parallèle à la ligne d'about AB , et l'on prendra sur cette parallèle une longueur $O''H''$ égale à GH ; joignant alors $A''H''$, on aura la trace du plan de lattis supérieur, et, en lui menant la parallèle $a''h''$, on aura celle du plan de lattis inférieur.

Cela posé, il faut déterminer la projection de l'empanon sur la herse. Pour cela, on suppose que le plan du lattis supérieur vienne se rabattre sur le plan horizontal en tournant autour de la ligne d'about AB . Dans ce mouvement, le point dont les projections sont d, d' [le point d (fig. 3) étant l'intersection de IK avec la ligne de gorge], décrira un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne d'about, et viendra se rabattre en D ; si donc on joint ID , on aura le rabattement de la ligne milieu de l'empanon. On lui mènera des parallèles Ee, Ff , à une distance égale au demi-équarrissage de l'empanon; et l'on aura le rabattement des arêtes supérieures de cette pièce. Le point a'' , qui appartient à la ligne de gorge, se projette en α sur la trace du lattis supérieur; si l'on rabat ce point en β , et qu'on mène par le point β une parallèle à la ligne d'about, on aura le rabattement de la projection de la ligne de gorge sur le plan du lattis supérieur; et si l'on prend les points e et f sur cette ligne, le parallélogramme $EFfe$ sera le rabattement de la projection du *pas* de l'empanon sur la herse.

Pour achever le tracé de la projection de l'empanon sur le plan du lattis supérieur, et particulièrement pour obtenir le tracé de la tête, c'est-à-dire du bout où se trouve ménagé le tenon qui sert à assembler la pièce avec l'arétier, il est nécessaire d'avoir d'abord la projection horizontale, dont on n'a encore que la ligne milieu IK . Pour cela, il faut imaginer qu'on relève le plan de la herse précédemment rabattu. Dans ce mouvement, les points e et f viendront se placer en m et n sur la ligne de gorge, en décrivant des droites em et fn perpendiculaires à la charnière AB . En joignant Em et Fn , on formera le parallélogramme $EFnm$ qui sera le *pas* de l'empanon sur le plan horizontal. Pour avoir les projections horizontales des arêtes latérales, il suffira donc de mener par les points E, F, m, n des parallèles à la projection IK de la ligne milieu. Soient Ep, mq, Fr et ns ces parallèles.

On peut maintenant tracer sur l'arétier la face d'occupation de l'empanon, ainsi que la mortaise qui doit recevoir le tenon de cette pièce. Il suffit pour cela de projeter les extrémités p, q, r, s des arêtes de l'empanon sur les projections verticales des arêtes latérales de l'arétier, aux points P, Q, R, S , et de joindre PQ et RS . La mortaise s'obtien-

dra en menant des parallèles à PR ou à QS ; ordinairement on divise l'intervalle entre ces deux lignes en 5 parties égales, et l'on donne à la mortaise le cinquième de la largeur totale; sur la figure, on lui a donné le tiers de cette largeur totale, afin de rendre plus sensibles les détails relatifs au tenon.

Du côté de la face $Epqm$, ce tenon a ses arêtes parallèles à celles de l'empanon; ainsi, après avoir tracé à volonté une parallèle à ps pour limiter la saillie du tenon, on divisera pq en trois parties égales, et par les points de division on mènera des parallèles à IK ; on aura ainsi les arêtes du tenon situées de ce côté. De l'autre côté, le tenon se termine par une face perpendiculaire à la face latérale $PQRS$ de l'arétier, et passant par la ligne qui a pour projections rs et RS . Ce plan normal, qui a pour traces RS et Tt , coupe au point U , u l'arête supérieure de l'arétier; son intersection avec le plan du lattis supérieur, contenant les points R, r et U, u , est donc la droite qui a pour projections ur et UR . Or les joues du tenon sont parallèles à la face supérieure de l'empanon, c'est-à-dire au plan du lattis; par conséquent les arêtes du tenon doivent être parallèles à la droite ur, UR . On divisera donc la distance rs en trois parties égales, et par les points de division on mènera des parallèles à ur , ce seront les projections horizontales des arêtes du tenon.

Pour compléter la projection horizontale et le rabattement de la projection sur la herse, il faut y figurer le prisme triangulaire qui forme l'embrèvement (*Voy. ASSEMBLAGES*) par lequel le pied de l'empanon s'assemble avec la sablière. On tracera à volonté sur le profil de croupe (fig. 2) la droite $a''v$ pour figurer l'embrèvement. Le point v se projette en i sur le lattis supérieur; et le point i se rabat en l sur le plan horizontal; par conséquent si par ce point l on mène une parallèle à la ligne d'about AB , cette parallèle limitera le rabattement de la projection de l'empanon sur la herse. C'est donc à cette ligne qu'il faudra arrêter le prolongement des arêtes Ee et Ff . Les points ϵ et φ , dans la projection horizontale, viennent se placer en δ et ζ ; ainsi les faces triangulaires du prisme d'embrèvement se projettent sur le plan horizontal suivant les triangles δEm et ζFn . Ces triangles se voient plus nettement sur la figure 3 bis où les dimensions de la figure 3 ont été doublées.

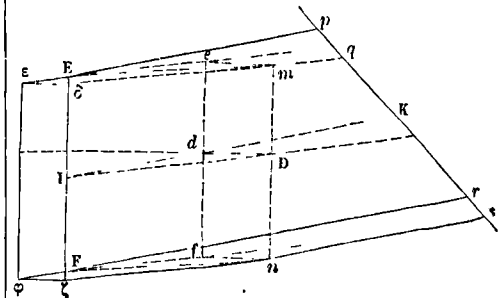


Fig. 3 bis.

Nous pouvons maintenant construire d'une manière complète la projection de l'empanon sur la herse, et particulièrement la tête de l'empanon. Afin d'éviter la confusion des lignes, nous

transporterons plus bas (fig. 4) la partie de la projection déjà obtenue. Pour obtenir la tête de l'empanon, il faut couper cette pièce par le plan vertical XY de la figure 1. Remarquons d'abord que le point K, extrémité de la projection horizontale de la ligne milieu de l'empanon, est la projection d'un point V' (fig. 2) qui se rabat en V'' sur le plan horizontal; si donc par ce point V'' on mène une parallèle à la ligne d'about AB, le point V (fig. 4), où elle rencontrera la ligne milieu de l'empanon, sera l'extrémité de cette ligne milieu. Quand on relève le plan de la herse d'abord rabattu, ce point V vient se placer en w, à la rencontre d'une perpendiculaire à la ligne d'about, menée par le point V, et d'une parallèle à la ligne d'about menée par le point K. Si par ce point w on mène une parallèle à XY de la figure 1, on aura la trace du plan vertical XY transporté sur la figure 4. Cette trace rencontre la ligne d'about en un point Z; donc en joignant ZV on aura le rabattement de ZW sur le plan horizontal. Cette droite sera l'une de celles qui doivent limiter les abouts de la pièce. Pour avoir l'autre limite, on remarquera que sur la verticale du point K se trouve, dans le lattis inférieur, un point qui se projette en v' (fig. 2); ce point se projette en p' sur le lattis supérieur, et ce dernier se rabat en p''; si donc par le point p'' on mène une parallèle à la ligne d'about AB, elle rencontrera la ligne milieu de l'empanon en un point p (fig. 4) qui appartiendra à la limite cherchée; et l'on obtiendra cette dernière en menant par le point p une parallèle à ZV. On divisera en trois parties égales l'intervalle de ces deux parallèles, et l'on aura la racine du tenon. Pour tracer le tenon lui-même, menons par le point 0 (fig. 3), pris sur une arête antérieure du tenon et à sa racine, la droite 0.1 parallèle à la ligne d'about, et du sommet opposé, 3, de la même arête, abaissons sur cette droite la perpendiculaire 3.2. (Ces détails sont représentés avec de plus grandes dimensions sur la figure 6.) — Dans le mouvement que l'on imagine, soit pour rabattre, soit pour relever le plan du lattis supérieur, la droite r.1 parallèle à la charnière conservera sa grandeur, et la perpendiculaire 3.2, dirigée dans un plan perpendiculaire à la charnière, ne cessera pas d'être perpendiculaire à la droite 0.1. Par conséquent si, par le point de division 0 (fig. 4) nous menons la droite 0.1 parallèle à EF, et égale à 0.1 de la figure 1, nous aurons un point de l'arête supérieure du tenon. Prenons 0.2 (fig. 4) égal à 0.2 de la figure 3, et élevons au point 2 une perpendiculaire à 0.1; le point 3 où elle rencontre la parallèle à ZV menée par le point 1, sera le sommet d'un des angles du tenon. Le sommet correspondant 4 s'obtiendra en menant par le point 3 une parallèle à IV, et par le point de division 5 une parallèle à 0.3. Par le point 4 on mènera une parallèle à ZV, qu'on limitera au prolongement de Ee, comme celle qu'on a menée par le point 1, et celle qu'on mènera par les points 0 et r. Le tenon se trouvera ainsi tracé; car ses arêtes, du côté de Ee, étant dans le prolongement d'une face perpendiculaire à la herse, se projettent sur le plan du lattis supérieur suivant le prolongement de Ee.

Il reste à obtenir la projection de l'empanon sur un plan parallèle à la face déversée. Pour cela, on mène par la ligne milieu de l'empanon un plan

perpendiculaire au plan du lattis supérieur; ce plan auxiliaire, parallèle aux faces latérales de la pièce, coupe le plan horizontal suivant une droite IM, parallèle à la trace de chaque face latérale sur le plan horizontal, c'est-à-dire parallèle à Em ou à Fn (fig. 3); et il coupe la face verticale XY de l'arêtier suivant une droite qui a pour projection horizontale KM, et par conséquent qui a pour projection verticale K'M'. Considérons le triangle dont les trois sommets sont I, M et (K, K'); il est facile de le construire en le transportant parallèlement à lui-même, et en le rabattant ensuite sur le plan horizontal. Menons (fig. 5) une parallèle I₁M₁ à IM; abaissons des points I, K, M des perpendiculaires sur cette droite, et soient I₁, K₁, M₁, les pieds de ces perpendiculaires; I₁M₁ sera la base du triangle à construire, et son troisième sommet devra se trouver sur la perpendiculaire KK₁; d'ailleurs le côté aboutissant à K₁ devra être égal à M'K'; un arc de cercle décrit du point M₁, avec M'K' pour rayon, donnera donc le sommet cherché K₂. Parallèlement au côté I₁K₂, on mènera une droite qui en soit distante d'une quantité égale à a''α de la figure 2, distance des deux plans de lattis inférieur et supérieur, et l'on aura alors les projections des arêtes latérales du tenon. Sur ces droites on projettera les quatre sommets E, F, m, n (fig. 3) du pas de l'empanon, ce qui donnera les points 1, 2, 3, 4. On mènera une parallèle à 1.2 à une distance égale à v' de la figure 2; on projettera sur cette parallèle les points E et F en 5 et 6; on joindra 3.5 et 4.6; et l'on aura la projection de l'embranchement. Sur les arêtes latérales on projettera ensuite les points p, q, r, s de la figure 3, ce qui donnera les quatre points p₁, q₁, r₁, s₁, et par conséquent la face d'about de l'empanon. On divisera l'intervalle des arêtes latérales en trois parties égales; par les points de division on mènera des parallèles à I₁K₂, et sur ces parallèles on projettera les quatre sommets supérieurs du tenon de la figure 3, ce qui donnera la projection du même tenon sur le plan parallèle aux faces déversées.

Les figures 4 et 5 fournissent tous les éléments nécessaires pour l'exécution de l'empanon. On trace la figure 4 sur la face supérieure de la pièce, et la figure 5 sur une des faces latérales, de manière que les points I et I₁ soient dans un même plan perpendiculaire aux arêtes longitudinales de la pièce. Toutes les coupes à effectuer dans le bois se trouvent alors suffisamment indiquées.

(Voyez le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy, n° 932 et suiv.)

EMPANONS, pièces de charpente qui relient l'arêtier d'une croupe (Voy. ce mot) aux sablières; les uns sont parallèles aux chevrons de long-pan; ce sont les *empanons* de long-pan; les autres sont parallèles au chevron de croupe: ce sont les *empanons* de croupe.

Les empanons peuvent être *déclardés* ou *déversés*; voyez pour l'explication de ces termes l'article GROUPE-BIAISE.

EMPATEMENT, partie inférieure d'un édifice à laquelle on donne une certaine saillie pour augmenter sa solidité. C'est une sorte de *plinthe* de grandes dimensions. Quelquefois l'empatement ne s'élève pas au-dessus des fondations.

On donne aussi le nom d'*empatement* au pan de bois horizontal qui sert de base à une *grue* ou à

une SONNETTE A TIRAUDES (Voy. les mots soulignés).

ENCÂBLURE, unité de longueur employée dans la marine pour évaluer approximativement les distances. L'ancienne encâblure était de 100 toises, et valait 194^m,204. L'encâblure nouvelle est de 200 mètres.

ENCASTREMENT, disposition d'une poutre horizontale engagée d'une quantité plus ou moins grande par un de ses bouts dans un mur, sans aucun jeu. Les poutres principales d'un plancher sont ordinairement ainsi encastrees.

Par extension on donne le nom d'encastrement à la cavité pratiquée dans le mur pour recevoir le bout de la poutre.

On nomme encore encastrements les coussinets dans lesquels s'engagent les tourillons d'une pièce d'artillerie.

ENCEINTE, suite continue de BASTIONS et de COURTINES qui forment la clôture la plus rapprochée d'une place forte. (Voy. FORTIFICATION.)

ENCHEVÊTURE, ensemble des pièces de charpente qui, dans un plancher, circonscrivent l'espace réservé pour une cheminée. Si les solives sont parallèles au mur, la plus voisine se nomme *solive d'enchevêtrure*; si les solives sont perpendiculaires au mur, celles qui aboutissent à la cheminée sont assemblées dans un *lingoir* qui prend le nom de *lingoir d'enchevêtrure*. (Voy. PLANCHERS.)

ENCLIQUETAGE, dispositif employé pour transformer un mouvement circulaire alternatif en un mouvement circulaire discontinu, mais constamment de même sens. On distingue deux espèces d'encliquetages : les *encliquetages à dents* et les *encliquetages à frottement*.

I. La figure 1 représente un encliquetage à dents.

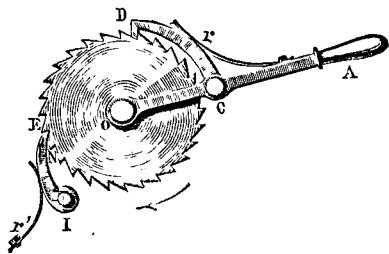


Fig. 1.

Sur l'axe O du treuil qu'il s'agit de faire mouvoir, est montée une roue dentée, dont les dents, formant un angle aigu, ont une face dirigée sensiblement dans le sens du rayon, tandis que l'autre face fait avec ce rayon un angle plus ou moins considérable, et forme une sorte de plan incliné; c'est ce que l'on appelle une *roue à rochet*. Au même axe O est articulé un levier OA, qui peut se mouvoir indépendamment du treuil. En un point C de ce levier s'articule un *rochet* CD, dont l'extrémité D s'engage entre les dents de la roue, et qui est maintenu dans cette position par un ressort *r* fixé au levier. Lorsqu'on fait mouvoir le levier dans le sens de la flèche, il entraîne la roue et la fait tourner d'un certain angle; lorsqu'on fait mouvoir le levier en sens contraire, l'extrémité D du rochet glisse sur le plan incliné formé par la dent suivante, franchit

cette dent, s'engage dans le creux qui suit, franchit de même une ou plusieurs autres dents, sans que le levier entraîne la roue. Le mouvement alternatif du levier fait donc mouvoir le treuil constamment dans le même sens, mais d'une manière discontinue. Comme le trouil est ordinairement sollicité par une force résistante, qui tendrait à la faire tourner dans le sens contraire à celui qu'on veut lui donner, il faut un mécanisme qui s'oppose à ce mouvement contraire. Ce mécanisme se compose d'un *cliquet* IE, mobile autour du point I, et s'engageant par son extrémité E entre les dents de la roue; il est maintenu dans cette position par un ressort *r'* fixé, ainsi que l'axe I, au bâti de la machine. Quand la roue tourne dans le sens de la flèche, les faces inclinées des dents glissent sur le cliquet en faisant céder le ressort *r'*; et un certain nombre de dents échappent. Mais lorsque le levier tourne en sens contraire, sans entraîner la roue, celle-ci est maintenue dans sa position par le cliquet qui ne peut céder à la pression exercée par la dent, attendu que, d'après la disposition adoptée, cette pression normale à la dent a une direction EN qui passe entre les axes de rotation I et O, et tendrait à faire tourner le cliquet vers la droite, ce qui est impossible, puisque les points O, E, I sont les sommets d'un triangle dont les côtés sont invariables.

Ce genre d'encliquetage est fréquemment employé dans les machines qui servent à élever les fardeaux et qui sont mises en mouvement par des hommes, comme celles dont on fait usage dans la construction des édifices pour élever les matériaux. On l'a aussi appliqué, avec de légères modifications, aux haquets, aux camions, aux grues, aux presses, etc.

II. On voit que le treuil ne tourne que pendant une demi-oscillation du levier. En disposant aux deux extrémités de l'axe O deux encliquetages semblables, on peut faire en sorte que l'un des leviers s'abaisse quand l'autre s'élève, et que le mouvement du treuil soit rendu de cette manière à peu près continu. — Mais cette condition est également remplie par le *levier de Lagarousse*, représenté fig. 2.

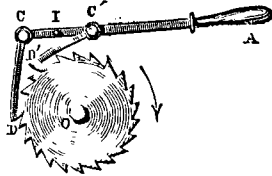


Fig. 2.

Ce levier, mobile autour d'un axe fixe I, porte deux rochets, articulés aux points C et C', et dont les extrémités D et D' s'engagent entre les dents de la roue O, montée sur l'axe du treuil. Ils sont maintenus dans cette position par des ressorts fixés au levier, et la roue est maintenue par un cliquet d'arrêt, comme dans l'encliquetage précédent. Le jeu du levier de Lagarousse est facile à concevoir. Si l'on abaisse l'extrémité A du levier, le rochet CD entraîne la roue, tandis que le rochet C'D' se dégage et laisse échapper successivement un certain nombre de dents; si, au contraire, on relève l'extrémité A, c'est le rochet C'D' qui entraîne la roue, et le

rochet CD qui se dégage en laissant échapper un certain nombre de dents. En sorte que la roue ne reste immobile que pendant le temps très-court employé par le moteur à changer le sens du mouvement du levier.

Dans l'exemple de la figure 2 le levier agit sur la roue dentée *en tirant*; il pourrait agir *en poussant*; il suffirait pour cela de changer le sens de l'inclinaison des dents; le treuil tournerait alors en sens contraire.

III. Les encliquetages que nous venons de décrire ont l'inconvénient de produire, lorsqu'ils sont de grandes dimensions, un bruit insupportable, causé par le choc du rochet chaque fois qu'une dent échappe, et que le rochet est poussé vivement dans le creux qui suit. On a cherché à éviter ce bruit, et l'on a construit des *encliquetages muets*, disposés comme l'indique la figure 3. Les dents de la roue

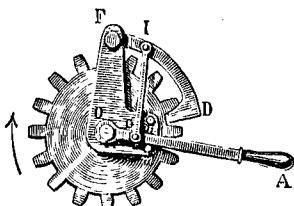


Fig. 3.

sont presque droites, et ne présentent de chaque côté qu'une légère inclinaison par rapport au rayon. Autour de l'axe de cette roue peut tourner, indépendamment de la roue même, un levier coudé FOMN. En F s'articule un rochet FD, dont l'extrémité D peut s'engager entre les dents de la roue. Autour de l'axe O peut tourner également un levier OA, à l'extrémité A duquel est appliquée la force motrice; ce levier et le rochet sont reliés entre eux par une petite bielle CI articulée à ses extrémités. Le levier OA n'a la liberté de se mouvoir qu'entre deux chevilles m et n fixées au levier coudé. Voici maintenant le jeu de l'appareil. Si l'on abaisse l'extrémité A, le rochet, engagé entre les dents de la roue, entraîne celle-ci et fait tourner le treuil. Mais si l'on élève l'extrémité A, le rochet poussé par la bielle CI se dégage de la roue; quand le levier a atteint la cheville n, il l'entraîne, et fait tourner le levier coudé indépendamment de la roue. Lorsqu'on ramène l'extrémité A vers sa position primitive, le rochet sollicité par la bielle IC s'abaisse, son extrémité D s'engage entre deux dents de la roue, et celle-ci se trouve de nouveau entraînée, et ainsi de suite. La cheville m n'a d'autre fonction que d'indiquer la position du levier pour laquelle, le rochet étant engagé dans la roue, celle-ci peut être entraînée.

Cet encliquetage ne produit aucun bruit; attendu que le rochet s'engage et se dégage sans aucun déploiement de force, et pendant que la roue est immobile. Mais les intermittences sont plus longues que dans les encliquetages précédents.

IV. Les principaux encliquetages à frottement sont l'*encliquetage de M. Saladin*, de Mulhouse, et l'*encliquetage de Dobo*. Nous expliquerons d'abord le principe du premier. Pour cela, considérons d'abord une tige cylindrique horizontale AB (fig. 4)

mobile entre des guides, et supposons-la embrassée par un anneau aa' d'un diamètre intérieur un peu plus grand, et portant un manche ou bras de levier ab , à l'extrémité b duquel peut être appliquée une

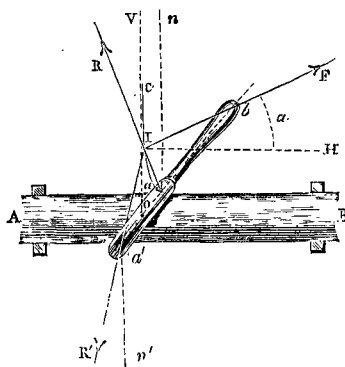


Fig. 4.

force motrice F, dans le plan de symétrie du système, que nous supposons être celui de la figure. A cause du jeu qui existe entre la tige et l'anneau, celui-ci peut glisser librement le long de la tige quand on le maintient à peu près parallèlement à une section droite. Mais s'il est sollicité par une force F qui lui fasse prendre la position indiquée sur la figure, dans laquelle il touche la tige par les deux points opposés a et a' , le glissement peut devenir impossible, indépendamment de l'intensité de la force motrice. En effet, pour que l'anneau puisse glisser le long de la tige en conservant cette position, il faut que les réactions R et R' exercées par la tige aux points de contact a et a' fassent avec les normales an et $a'n'$ des angles égaux à l'angle φ du frottement pour les matières en contact. Soit I le point d'intersection des directions des forces R et R'. Pour que l'anneau soit entraîné d'un mouvement uniforme, ou pour qu'il soit sur le point de l'être, il faut qu'il y ait équilibre entre les trois forces F, R et R', et que par conséquent la force F passe par le point I. Cette condition est d'abord suffisante pour l'équilibre (en négligeant le poids de l'anneau), et pour obtenir les intensités des réactions R et R' on n'aurait qu'à transporter la force F en I, en sens contraire de sa direction, et à la décomposer, d'après la règle du parallélogramme des forces, suivant les directions aR et $a'R'$. Remarquons maintenant que si l'on fait varier l'angle que les réactions font avec les normales correspondantes, le point de concours I de ces réactions décrit une branche d'hyperbole équilatère alc qui passe par le point a et qui a pour asymptote la droite OV, menée par le milieu O de aa' perpendiculairement à la direction de la tige, ou à l'horizontale IH. Cela posé, si la force F, passant par le point b , faisait avec IH un angle plus grand que l'angle $bIH = \alpha$, elle rencontrerait l'hyperbole entre I et a ; il faudrait donc que les réactions, qui doivent passer au point de rencontre, fissent avec les normales des angles plus grands que l'angle φ , ce qui est impossible. Ceci revient à dire que, dans ce cas, il n'y aurait pas équilibre, et que l'anneau serait entraîné le long de la tige.

Mais si la force F faisait avec la direction de la tige un angle moindre que α , sa direction rencontrerait la branche d'hyperbole entre I et C , et par conséquent les réactions R et R' feraient alors avec les normales un angle moindre que l'angle du frottement φ ; et l'on sait que, dans ce cas, le glissement devient impossible. Ce résultat est indépendant, comme on le voit, de l'intensité de la force mouvante F . On conclut de ce qui précède que, dans le cas où la force F fait avec la direction de la tige un angle plus petit que α , l'anneau ne pouvant glisser le long de la tige, celle-ci serait entraînée dans le sens de A vers B , tandis que si l'angle de F avec la tige est plus grand que α , l'anneau peut glisser sans entraîner la tige. C'est sur cette remarque, facile à vérifier par expérience, qu'est fondé l'encliquetage de $M. Saladin$.

Sur l'axe du treuil qu'il s'agit de faire mouvoir d'un mouvement discontinu, mais toujours de même sens, est montée une roue dont la jante est plus large que les bras dans le sens parallèle à l'axe de rotation; la section de cette jante est représentée par des hachures sur la figure 5. Elle est

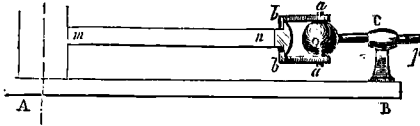


Fig. 5.

embrassée par une sorte d'anneau formé par les branches ab, ab qui laissent entre elles un intervalle pour donner passage au bras mn , et par une sphère O articulée suivant un diamètre aa aux branches ab, ab . Cette sphère porte une queue p qui glisse dans une douille C adaptée à l'extrémité d'un levier AB mobile autour de l'axe de la roue, mais indépendant de cette roue. La figure 6 montre

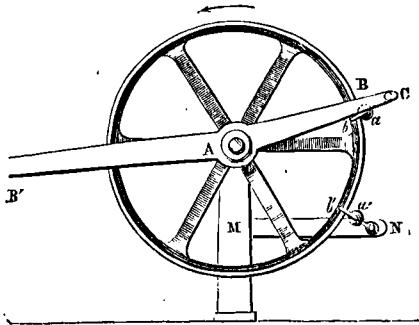


Fig. 6.

la disposition générale de la roue et du levier. Dans la position indiquée, la jante est pincée entre les branches ab et la sphère O ; il en résulte que si l'extrémité B' du levier s'abaisse, la jante est entraînée et forcée de tourner dans le sens de la flèche. Lorsqu'au contraire on relève l'extrémité B' du levier, l'extrémité B s'abaissant, les branches ab prennent une position normale à la jante et peuvent, en vertu du jeu laissé alors entre la jante et la sphère O , suivre le mouvement du levier sans entraîner la roue. Un système semblable $a'b'$, établi à

l'extrémité d'un bras fixe MN joue le rôle du cliquet d'arrêt dans les encliquetages à dents; lorsque la roue tourne dans le sens de la flèche, les branches $a'b'$ ont une position normale à la jante et laissent passer la roue. Mais si le mouvement s'arrête, les branches $a'b'$ retombent par leur propre poids en tournant autour du point a' , et si le mouvement tendait à se produire en sens contraire de la flèche, la jante se trouverait pincée entre ces branches et la sphère, et le mouvement deviendrait impossible.

La roue ne se meut, comme on voit, que pendant une des deux oscillations du levier. Mais on peut donner au système une disposition analogue à celle du levier de Lagarousse; la figure 7 représente

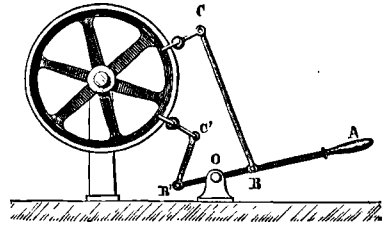


Fig. 7.

cette disposition. A un levier ABB' , mobile autour d'un axe horizontal O , s'articulent deux bielles BC et $B'C'$, aux extrémités C , et C' desquelles sont adaptés des anneaux analogues à ceux du système précédemment décrit, et qui embrassent la jante d'une roue montée sur l'axe qu'il s'agit de faire mouvoir. Lorsqu'on élève l'extrémité A du levier, le point C s'élève; l'anneau correspondant pince la jante et entraîne la roue; le point C' au contraire s'abaisse, l'anneau correspondant prend une direction normale à la jante et laisse passer la roue. L'inverse a lieu quand on abaisse le point A ; en sorte que la roue marche dans le même sens à chaque demi-oscillation du levier.

V. L'encliquetage de Dobo est fondé sur des prin-

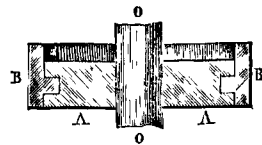
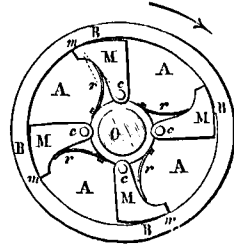


Fig. 8.

cipes analogues. Il est représenté en plan et en coupe sur la figure 8. Sur l'arbre O, O qu'il s'agit de faire mouvoir, est monté un disque AA , qui peut glisser à frottement doux dans un anneau BB ,

auquel on donne le mouvement, soit à la main, en agissant sur les poignées PP, soit par l'intermédiaire d'un organe de transmission. Sur le disque AA, dans le creux compris entre l'arbre OO et la saillie de l'anneau BB, sont établies un certain nombre de pièces M, M, M, mobiles autour des axes c, c, c, fixés au disque, et terminées du côté de l'anneau par des arcs de cercle d'un rayon un peu moindre que celui de l'anneau. De petits ressorts r, r, r, fixés également au disque, pressent légèrement sur ces pièces; et, comme la distance de l'axe c à l'angle de la pièce en contact avec le ressort est un peu plus grande que la distance normale du point c à l'anneau, l'effet du ressort est de forcer cet angle à s'appuyer contre l'anneau. La normale mO au point de contact ne fait qu'un petit angle de 9 degrés environ avec la droite mc. Lorsqu'on fait mouvoir l'anneau en sens contraire de la flèche, les pièces M, M, M font fléchir les ressorts correspondants, et, en vertu du jeu qui tend à se produire, l'anneau tourne sans entraîner le disque. Lorsqu'au contraire on fait mouvoir l'anneau dans le sens de la flèche, les ressorts établissent le contact entre les pièces M, M, M et l'anneau; la pièce M ne pouvant tourner autour du point c dans le sens que l'anneau tend à lui faire prendre, il en résulte que la réaction de l'anneau passe par le point c; mais l'angle Omc étant inférieur à l'angle du frottement pour les matières en contact, la pièce M ne peut glisser d'un mouvement relatif sur l'anneau; celui-ci entraîne par conséquent le disque, ainsi que l'arbre O sur lequel il est monté. — L'avantage particulier qu'offre l'encliquetage de Dobo, c'est que l'amplitude de chaque mouvement imprimé à l'anneau demeure absolument arbitraire et ne se trouve pas limitée, comme dans les autres encliquetages, par l'amplitude des oscillations d'un levier.

VI. On peut rattacher aux deux encliquetages précédents l'encliquetage Chameroy, employé pour manœuvrer les tuyaux de conduite et les assembler à vis. Il se compose d'une corde BCC'B' (fig. 9) qui

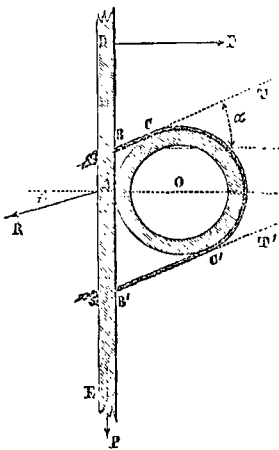


Fig. 9.

entoure le tuyau et vient s'attacher par ses deux bouts à un levier DE en le serrant contre ce tuyau. Si l'on exerce un effort F sur le levier, dans le sens indiqué sur la figure, le glissement de l'appareil

sur la surface du tuyau devient impossible, en sorte que le tuyau est entraîné, et exécute une fraction de tour sur son axe. Si l'on exerce au contraire un effort dans le sens opposé, la corde et le levier glissent sur le tuyau et peuvent venir reprendre leur position primitive. Un nouvel effort dans le sens de F produit une nouvelle rotation du tuyau; et ainsi de suite.

Le calcul rend compte de ces résultats. Soient P le poids du levier, T et T' les tensions des cordons BC et B'C', R la réaction du tuyau sur le levier. Pour plus de simplicité, on peut supposer les cordons BC et B'C' parallèles; soit α l'angle que leur direction fait avec l'horizontale; enfin soit i l'angle de la réaction R avec cette même horizontale. Les conditions de l'équilibre du levier DE donnent les trois équations

$$F + (T' + T) \cos \alpha - R \cos i = 0,$$

$$P - (T' + T) \sin \alpha + R \sin i = 0,$$

et, en faisant $DA = h$ et $AO = r$,

$$Fh - Pr - (T' - T)r - Rr \sin i = 0.$$

La condition du glissement de la corde sur le tuyau exige qu'on ait

$$T' = T e^{f \pi};$$

en désignant par f le coefficient du frottement, nous ferons $e^{f \pi} = k$, d'où $T' = kT$. Les équations de l'équilibre deviennent ainsi :

$$F + (k + 1)T \cos \alpha - R \cos i = 0,$$

$$P - (k + 1)T \sin \alpha + R \sin i = 0,$$

et

$$Fh - Pr - (k - 1)Tr - Rr \sin i = 0,$$

ou
$$\frac{h}{r} F - P - (k - 1)T - R \sin i = 0. \quad [1]$$

On tire des deux premières

$$F \sin i + P \cos i = (k + 1)T \sin(\alpha - i),$$

$$F \sin \alpha + P \cos \alpha = R \sin(\alpha - i).$$

Si l'on tire de ces deux dernières les valeurs de T et de R, et qu'on les substitue dans [1], on obtient

$$\frac{h}{r} F - P - \frac{k - 1}{k + 1} \cdot \frac{F \sin i + P \cos i}{\sin(\alpha - i)} - \frac{(F \sin \alpha + P \cos \alpha) \sin i}{\sin(\alpha - i)} = 0,$$

relation d'où l'on tire, en posant $\frac{k - 1}{k + 1} = m$,

$$F = \frac{P}{\frac{h}{r} \cdot \frac{\sin(\alpha - i)}{(m + \sin \alpha) \cos i} - \text{tang } i}. \quad [2]$$

Cette formule donne pour F une valeur négative, dès que α devient égal à i ou inférieur à i ; or, i est ici l'angle du frottement du levier sur le tuyau. Ainsi, dès que l'inclinaison commune des cordons BC et B'C' devient égale ou inférieure à l'angle du frottement du levier sur le tuyau, on obtient un résultat incompatible avec l'hypothèse, ce qui montre que cette hypothèse est alors inadmissible, et que par conséquent l'appareil ne peut glisser sur la surface de la conduite.

Si l'on exerce un effort en sens contraire de F, il faut dans les formules changer le signe de F; en second lieu, le mouvement de glissement tendant à se produire en sens contraire, il faut poser $T = T' e^{f \pi}$

ou $T' = \frac{1}{k} T$, c'est-à-dire qu'il faut changer k en $\frac{1}{k}$, ce qui revient à changer le signe de m ; enfin il faut aussi changer le signe de i , d'après les prin-

cipes relatifs au frottement; la formule [2] devient donc

$$F = \frac{P}{\frac{h}{r} \cdot \frac{\sin(\alpha + i)}{(m - \sin\alpha) \cos i} - \tan i} \quad [3]$$

On voit que, pourvu que $\sin\alpha$ soit moindre que m , on peut disposer de h de façon à rendre le dénominateur positif; la force F est donc positive dans ce cas; et le résultat étant compatible avec l'hypothèse du glissement, il s'ensuit que ce glissement peut avoir lieu. (Voy. le *Traité des Mécanismes* de M. Haton de la Goupillière.)

VII. Nous avons déjà cité des exemples de l'emploi des encliquetages; on pourrait en citer beaucoup d'autres; nous nous contenterons des deux suivants :

Dans les scieries, on a besoin, chaque fois que le châssis portant les lames de scie vient d'agir sur la bille à refendre, de profiter du temps de sa montée pour faire avancer d'une petite quantité le chariot qui porte la bille; on emploie souvent pour cela un encliquetage.

Dans les machines appelées *tondeuses*, le tissu doit rester immobile sur les cylindres appelés *ensouples*, sur lesquels il est tendu, tout le temps nécessaire pour que les lames hélicoïdales destinées à trancher le duvet puissent agir sur la bande transversale qu'elles doivent atteindre; mais il faut ensuite que le tissu avance d'une quantité correspondante à la bande qui a été tonduë, en s'enroulant sur l'un des ensouples et se déroulant sur l'autre. Ce mouvement intermittent et progressif est ordinairement obtenu par un encliquetage.

Le mot *encliquetage* tire son origine du cliquet d'arrêt dont sont munis les encliquetages à dents. *Encliqueter*, c'est engager le bout du cliquet entre les dents de la roue; *décliqueter*, c'est dégager le cliquet; de là le nom de *décllic* (Voy. ce mot), donné à certains mécanismes dans lesquels s'opère un dégagement analogue.

Les mots *cliquet* et *rochet* sont souvent confondus dans les auteurs. On donne aussi quelquefois le nom d'*encliquetage* au système formé d'une roue à rochet et de son cliquet d'arrêt, qu'on rencontre dans tous les mécanismes d'horlogerie, et qui servent au remontage (Voy. HORLOGE, PENDULE, MONTRE, CHRONOMÈTRE); mais cette dénomination devait être réservée aux mécanismes décrits dans le présent article.

ENCOIGNURE, rencontre de deux murs formant l'angle d'un bâtiment. Si les murs sont verticaux et à angle droit l'un sur l'autre, les pierres des différentes assises doivent être disposées comme l'in-

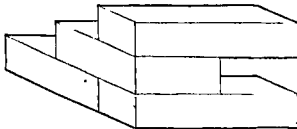


Fig. 1.

diqué en perspective la figure 1, c'est-à-dire de manière que le plus grand côté de la pierre soit dirigé alternativement suivant la face de chacun des deux murs. Si les murs se rencontrent sous un

angle trop aigu, circonstance défavorable au point de vue de la solidité, on coupe l'angle par un plan vertical, comme l'indique la projection horizontale figure 2, qui montre en même temps la disposition

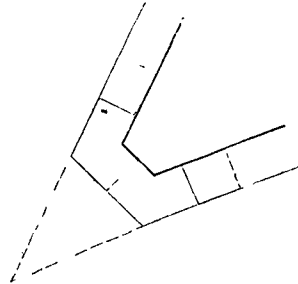


Fig. 2.

des pierres de deux assises consécutives; les joints indiqués par des lignes ponctuées appartiennent à l'assise inférieure, et les joints indiqués par des lignes pleines se rapportent à l'assise supérieure. Si les murs sont en talus, et se rencontrent sous un angle trop aigu, on coupe l'angle par un troisième

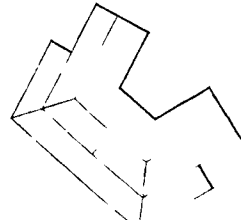


Fig. 3.

talus. La figure 3 montre en projection horizontale cette coupe et la disposition des assises.

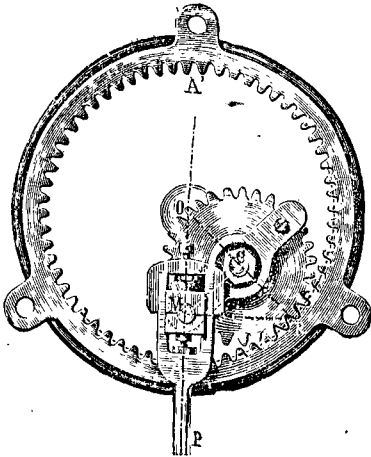
ENCORBELLEMENT, disposition qu'offrent des constructions en saillie sur un mur droit lorsqu'elles sont supportées par des trompes (Voy. TROMPE). On dit, dans ce cas, que les constructions dont il s'agit sont disposées *en encorbellement*.

ENDOSSEMENT, signature apposée par le porteur d'un effet de commerce au dos de cet effet, et par laquelle il cède à un tiers ses droits au montant du billet ou de la traite. La signature doit être précédée de la date et de ces mots : *passé à l'ordre de...*, avec le nom du tiers auquel les droits sont transférés. En cas de non-paiement, l'endosseur demeure responsable.

ENFOURCHEMENT (APPAREIL PAR), appareil particulier pour la construction des voûtes sphériques, et qui consiste à diviser la surface par des plans verticaux. (Voy. VOÛTES SPHÉRIQUES.)

ENGRENAGE DE LAHIRE, nom donné à un dispositif réalisé par White d'après un théorème de Lahire, et fréquemment employé depuis pour transformer un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif. Une roue fixe AA' dentée intérieurement, et que nous supposons verticale pour fixer les idées, engrène avec une roue mobile CO d'un diamètre moitié moindre; l'axe C de cette dernière est lié par un bras mobile CO à un axe autour duquel il peut tourner, et qui coïncide avec

l'axe géométrique de la roue AA'; ce bras est en partie caché sur la figure. De l'autre côté de la roue mobile, et en un point de sa circonférence primitive (Voy ENGRENAGES), est articulée la tige



MP à laquelle il s'agit de donner un mouvement rectiligne alternatif. Lorsque le contact des deux roues, ou plutôt des deux circonférences primitives, a lieu en A, à l'extrémité inférieure du diamètre vertical AA', le point d'articulation M est en A. Considérons le système après que la roue mobile a tourné d'une certaine quantité, et au moment où les circonférences primitives se touchent au point R; menons les droites OCR, MC et MO. En vertu de la liaison établie entre les deux roues, les arcs MR et AR de leurs circonférences primitives sont égaux. Or, dans le cercle CM, l'arc MR mesure l'angle au centre MCR; dans le cercle OA, l'arc AR mesure l'angle au centre AOR, et par conséquent dans le cercle CM, dont le rayon est moitié moindre, il mesurerait un angle double. Il en résulte que l'angle MCR est le double de AOR; mais ce dernier est le double de l'angle inscrit MOR; par conséquent les angles AOR et MOR sont égaux, c'est-à-dire que le point M est situé sur le diamètre AA'. Et comme on pourrait faire les mêmes raisonnements pour une position quelconque du cercle mobile, il s'ensuit que le point M décrit le diamètre AA'. Il s'élève de A vers A' pendant une demi-révolution du bras OC, et s'abaisse de A' vers A pendant la seconde demi-révolution.

On obtient aisément la loi du mouvement du point M sur la droite AA'. Soit α l'angle AOR décrit par le bras OC, soit r la longueur de ce bras, x la distance OM, v la vitesse du point M au bout du temps t , et ω la vitesse angulaire du bras OC, laquelle est ordinairement constante. Le triangle isocèle MOC donne

$$MO = 2 OC \cdot \cos MOC \text{ ou } x = 2r \cos \alpha.$$

Différentiant par rapport au temps, on en tire

$$\frac{dx}{dt} = -2r \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \text{ ou } v = -2\omega r \sin \alpha.$$

On voit que la vitesse v est nulle aux points A et A', et qu'elle est à son maximum pour $\alpha = 90^\circ$, c'est-à-dire quand le point M passe en O.

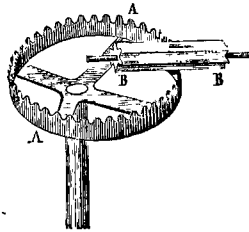
On aurait pu arriver aux mêmes résultats en re-

marquant que l'angle OM'R, inscrit dans la demi-circonférence OC, étant droit, le point M n'est autre chose que la projection sur AA' du point R, lequel se meut uniformément sur la circonférence AA'.

Cet engrenage a été quelquefois désigné sous le nom de *mouche intérieure*.

Ce dispositif a été employé dans la machine à vapeur de Baume-Chevallier pour la fabrication du sucre. M. Deleuil l'a appliqué récemment avec succès dans son nouvel appareil pour la liquéfaction et la solidification de l'acide carbonique.

ENGRENAGE D'HUYGENS, engrenage dans lequel le rapport des vitesses est variable, et qui a été employé par Huygens dans l'horlogerie astronomique. Il se compose d'une roue de champ AA, tour-



nant autour d'un axe qui ne passe pas par son centre, et d'un long pignon BB dont l'axe rencontre à angle droit celui de la roue de champ. Si r est le rayon primitif du pignon, et si ρ est la distance du point de contact actuel à l'axe de la roue AA, le rapport des vitesses angulaires est exprimé par $\frac{\rho}{r}$,

puisque la vitesse au point de contact étant la même sur les deux roues, le rapport des vitesses angulaires est inverse de celui des rayons. Or ce rapport varie avec ρ , puisque la roue de champ est excentrique.

Cet engrenage n'est pas susceptible d'une grande précision, et ne peut être employé que pour des mouvements très-lents.

ENGRENAGE DIFFÉRENTIEL, nom que l'on donne improprement non point à un simple engrenage, mais à un rouage plus ou moins complexe disposé de manière à imprimer à un même axe deux mouvements de rotation en sens contraire, d'où résulte un mouvement unique qui est la différence des deux premiers. Les engrenages différentiels sont une application des TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX (Voy. ce mot); on en fait usage soit pour obtenir un mouvement très-lent, soit pour établir entre deux axes un rapport de vitesses exprimé par une fraction dont les termes sont très-grands et ne se décomposent point en facteurs simples, problème que l'on rencontre dans l'horlogerie astronomique. On adopte pour cela deux systèmes principaux qui correspondent aux deux types de trains épicycloïdaux mentionnés à l'article cité.

1^{er} SYSTÈME (fig. 1). L'axe AA est l'axe conducteur; l'axe BB est celui qu'il s'agit de conduire. Sur l'axe AA est montée une roue M, qui engrène avec une roue N montée sur un canon pouvant tourner librement sur l'axe BB. La roue N porte excentriquement un second canon que traverse un axe auxiliaire mobile CC, sur lequel sont montées deux roues solidaires P et Q; la première P engrène

avec une roue R montée sur l'axe BB ; la seconde Q engrène avec une roue S, traversée en son centre par l'axe BB. Le système des axes BB et CC forme donc un *train épicycloïdal plan*, dans lequel la

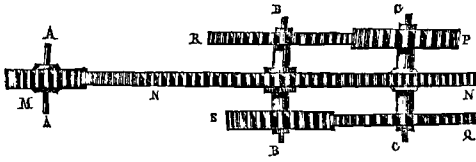


Fig. 1.

roue N joue le rôle du *bras porte-train*. Toute la différence avec le type étudié à l'article TRAINS EPICYCLOÏDAUX consiste en ce que la roue N est montée sur un canon enveloppant l'axe de la roue R, tandis que, dans le type étudié, c'est le contraire ; mais cette circonstance ne change rien à la théorie du rouage. La roue S étant fixe, si l'on nomme ω la vitesse angulaire de la roue R, Ω celle de la roue N, et r', r'', p', p'' les rayons des roues R, S, P, Q, on aura, conformément à cette théorie (équation [6] de l'article cité) :

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{p' r''}{p'' r'} \right).$$

Les rapports $\frac{p'}{r'}$ et $\frac{p''}{r''}$ peuvent être remplacés chacun par le rapport des nombres de dents des roues correspondantes ; en sorte qu'en désignant par p, q, r, s les nombres de dents relatifs aux roues P, Q, R, S, on aura

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{ps}{qr} \right); \quad [1]$$

mais si ω_1 désigne la vitesse angulaire de la roue motrice M, et que m et n soient les nombres de dents relatifs aux roues M et N, on a aussi (Voy. ROUAGE) :

$$\frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{n}{m}; \quad \text{d'où} \quad \Omega = \omega_1 \cdot \frac{m}{n}. \quad [2]$$

Des relations [1] et [2] on conclut, en éliminant Ω :

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{m}{n} \left(1 - \frac{ps}{qr} \right). \quad [3]$$

On conçoit que l'on puisse disposer des nombres qui entrent dans le second membre de manière à faire prendre au rapport des vitesses des axes AA et BB telle valeur numérique que l'on voudra. Toutefois, les quatre nombres p, q, r, s sont liés par une relation à laquelle il faut avoir égard. Soit a le pas de l'engrenage pour les roues P et Q, et a' le pas de l'engrenage pour les roues Q et S, la figure donne immédiatement.

$$r' + p' = r'' + p'', \quad [4]$$

puisque chacun de deux membres exprime la distance des axes BB et CC. On peut mettre cette relation sous la forme

$$\frac{2\pi r'}{a} + \frac{2\pi p'}{a} = \frac{a'}{a} \left(\frac{2\pi r''}{a'} + \frac{2\pi p''}{a'} \right),$$

qui revient à

$$r + p = \frac{a'}{a} (s + q),$$

et si, comme cela a lieu ordinairement, on a $a' = a$, il vient

$$r + p = s + q. \quad [5]$$

Si la roue fixe S enveloppait la roue Q de manière

que l'engrenage fût intérieur, la relation [3] deviendrait

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{m}{n} \left(1 + \frac{ps}{qr} \right). \quad [6]$$

On parviendrait au même résultat en interposant entre les roues P et R un pignon, d'un nombre de dents arbitraire, tournant autour d'un axe fixé à la roue N, attendu que le sens de la rotation de la roue P autour de l'axe mobile CC se trouverait changé.

Au lieu d'employer une roue fixe S, on pourrait aussi la faire tourner à l'aide d'un rouage dont le premier mobile serait fixé à l'axe AA, ce qui augmenterait ou diminuerait la vitesse relative des roues P et Q par rapport à l'axe CC.

L'artifice sur lequel ce dispositif est fondé, et qui consiste dans l'emploi d'une ou plusieurs roues *satellites*, c'est-à-dire tournant autour d'un axe mobile lui-même autour d'un axe fixe, paraît avoir été employé très-anciennement en horlogerie, et principalement dans les machines astronomiques, par des artistes de Nuremberg dont le nom est aujourd'hui perdu. On trouvera un exemple de l'emploi des roues satellites dans l'horloge de Berthoud, décrite à l'article HORLOGE A ÉQUATION.

II° SYSTÈME (fig. 2). AA est l'axe moteur ; BB celui

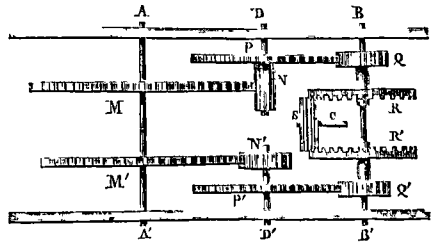


Fig. 2.

qu'il s'agit de faire mouvoir. Sur l'axe AA sont montées deux roues M et M', qui, par l'intermédiaire de pignons et de roues N, P, Q, ou N, P', Q', font mouvoir deux *roues de champ* égales R et R', montées sur des canons qui peuvent tourner librement autour de l'axe BB. Ces deux roues de champ engrenent avec une même roue S, dont l'axe C est fixé à angle droit sur l'axe BB. On voit que le système des roues R, R' et S forme un train épicycloïdal analogue aux *trains épicycloïdaux sphériques*, mais où les roues d'angle sont remplacées par deux roues de champ engrenant avec une roue cylindrique. Comme ici les roues R et R' sont égales, on a, conformément à la théorie des trains épicycloïdaux (équation [8] de l'article cité), en nommant Ω la vitesse angulaire de l'axe BB, ω et ω' celles des roues R et R' :

$$\Omega = \frac{1}{2} (\omega + \omega'), \quad [7]$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de l'axe BB est la demi-somme des vitesses angulaires des roues de champ. Elle serait égale à leur demi-différence si les roues de champ, au lieu de tourner dans le même sens, comme le suppose la figure, tournaient en sens contraire, ce qu'on obtiendrait en interposant un mobile de plus entre les roues M et Q ou entre les roues M' et Q'.

Ce second système d'engrenages différentiels est également très-ancien; et l'on trouve un exemple d'une combinaison analogue dans une sphère à équation de Passemant, habile horloger du dix-huitième siècle. M. Pecqueur a repris, il y a un petit nombre d'années, l'étude de ces engrenages; et, dans une suite de mémoires insérés au *Recueil des savants étrangers*, il a montré tout le parti que l'on pouvait tirer de ce dispositif.

Il reste à montrer par des exemples comment on peut, à l'aide de l'une ou de l'autre des combinaisons qui viennent d'être décrites, établir un rapport donné entre les vitesses angulaires de deux axes.

Supposons d'abord qu'on emploie le premier système, et qu'ils'agisse d'établir entre les deux vitesses le rapport

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{44609}{188190},$$

qui est à peu près celui de la semaine au mois lunaire. En décomposant les deux termes en facteurs, on obtient

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{31 \cdot 1439}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{31}{54} \cdot \frac{1439}{3485} = \frac{31}{54} \left(1 - \frac{2046}{3485}\right),$$

ou bien

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{31}{54} \left(1 - \frac{33 \cdot 62}{41 \cdot 85}\right).$$

En se reportant aux notations adoptées à l'occasion du premier système, on voit qu'on satisfera à la question en prenant

$$m=31, n=54, p=33, q=41, r=85 \text{ et } s=62.$$

Supposons maintenant qu'on adopte le second système, et que le dénominateur du rapport donné soit décomposable en facteurs simples de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{k}{abc}.$$

On posera

$$ax + by = k,$$

en prenant les coefficients a et b de telle sorte qu'ils soient premiers entre eux; on résoudra en nombres entiers cette équation indéterminée (Voir notre *Algèbre élémentaire*, 3^e édition) en choisissant parmi les solutions celles qui donnent des nombres de même signe, si l'on veut que les roues R et R' tournent dans le même sens, ou celles qui donnent des nombres de signe contraire, si l'on veut que les roues de champ tournent en sens opposé. On aura alors, par exemple,

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{ax + by}{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{bc} + \frac{2y}{ac} \right),$$

et $\frac{2x}{bc}$ exprimera le rapport de vitesses à établir entre

la roue N et la roue de champ R , tandis que $\frac{2y}{ac}$ exprimera le rapport entre les vitesses des roues M' et R' .

Supposons, par exemple, que le rapport donné soit celui de la lunaison moyenne à 12 heures, c'est-à-dire

$$\frac{2551443}{43200}, \text{ ou } \frac{850481}{14400}, \text{ ou encore } \frac{850481}{4 \cdot 9 \cdot 400}.$$

On posera

$$4x + 9y = 850481,$$

d'où l'on tire

$$x = 212618 + 9t,$$

et

$$y = 1 - 4t.$$

Parmi les nombreuses solutions entières et positives comprises dans ces formules, on remarquera celle qui correspond à $t = -1402$ et qui donne

$$x = 200000 \text{ et } y = 5609.$$

On aura, en adoptant ces valeurs,

$$\frac{850481}{14400} = \frac{200000}{9 \cdot 400} + \frac{5609}{4 \cdot 400} = \frac{40 \cdot 50}{6 \cdot 6} + \frac{71 \cdot 79}{50 \cdot 32},$$

ou bien

$$\frac{850481}{14400} = \frac{1}{2} \left[\frac{50 \cdot 80}{6 \cdot 6} + \frac{71 \cdot 79}{25 \cdot 32} \right].$$

On satisfera donc aux conditions du problème en prenant

$$m = 80, n = 6, p = 50, q = 6,$$

$$m' = 79, n' = 25, p' = 71, q' = 32,$$

ces lettres désignant les nombres de dents qui correspondent aux roues ou aux pignons représentés par les mêmes lettres majuscules sur la figure 2.

Lorsque les deux termes du rapport donné sont des nombres premiers très-grands, les méthodes qui précèdent ne peuvent plus être employées; on a recours alors à l'artifice suivant. Soient N et D ces deux termes; on les divise tous deux par un même nombre facilement décomposable en facteurs; soit $a.b.c$ ce nombre. On compose un premier engrenage différentiel qui transmette le mouvement de rotation d'un axe A à un axe B , dans le rapport de vitesses exprimé par la fraction $\frac{N}{a.b.c}$

ce qu'on fera par l'une des méthodes qui précèdent. On compose un second engrenage différentiel qui transmette le mouvement de rotation du même axe A à un troisième axe B' , dans le rapport de vitesses exprimé par la fraction $\frac{D}{a.b.c}$, ce qui s'exé-

cuttera de la même manière. Il est clair que le rapport des vitesses des axes B et B' sera celui de la fraction $\frac{N}{a.b.c}$ à la fraction $\frac{D}{a.b.c}$, c'est-à-dire ce-

lui de N à D , ou le rapport donné. Le mouvement imprimé à l'axe B se transmettra donc à l'axe B' , par l'intermédiaire de l'axe A , dans le rapport qui avait été assigné. Mais on ne peut se dissimuler que cette solution rigoureuse de la question n'entraîne une grande complication mécanique, puisqu'il ne faut pas moins de quatre rouages pour la réaliser. On préfère, dans les applications, se contenter d'une solution approchée en substituant à la fraction proposée une autre fraction qui en diffère peu et dont le dénominateur se décompose aisément en facteurs simples. (Voy. ROUAGE.)

Les engrenages différentiels servent encore à obtenir des mouvements de rotation très-lents, comme cela est quelquefois nécessaire dans les compteurs.

Supposons, par exemple, que dans le dispositif qui répond au premier système (fig. 1) on fasse $m = 8, n = 32, p = 49, q = 50, r = 50$ et $s = 51$; le rapport des vitesses des axes AA et BB sera exprimé par

$$\frac{8}{32} \left(1 - \frac{49 \cdot 51}{50 \cdot 50}\right) \text{ ou } \frac{1}{10000},$$

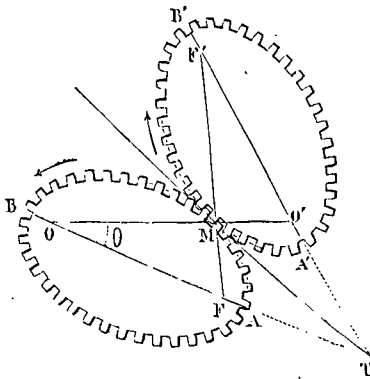
c'est-à-dire qu'il faudra que l'axe AA fasse 10000 tours pour que l'axe BB en fasse 1.

En employant le dispositif qui répond au second système (fig. 2), on obtiendrait également un mouvement aussi lent qu'on le voudrait; il suffirait pour cela de faire prendre aux roues de champ R et R' des vitesses angulaires de sens contraire, très-peu différentes l'une de l'autre, puisque l'on a dans ce cas

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega - \omega').$$

Il faut seulement se rappeler que l'un des deux rouages doit avoir alors une roue de plus.

ENGRENAGE ELLIPTIQUE, engrenage dans lequel les *circonférences primitives* (Voy. ENGRENAGES) sont remplacées par des ellipses, et qui a pour objet de transmettre, dans un rapport variable entre des limites données, la vitesse de rotation d'un axe à un axe parallèle. On sait que si l'on a deux ellipses égales, primitivement en contact par l'un des sommets du grand axe, et que, l'une d'elles restant fixe, on fasse rouler la seconde, sans glissement, sur la première, chacun des foyers de l'ellipse mobile décrit un cercle ayant pour centre un foyer de l'ellipse fixe, et pour rayon la longueur du grand axe. Soient, en effet, O et F les foyers de l'ellipse



mobile dans une de ses positions, et O' et F' les foyers de l'ellipse fixe; soit M le point de contact, MF la tangente commune; joignons MO, MF, MO', MF'. Les ellipses étant symétriquement placées par rapport à la tangente MT, cette tangente est la bissectrice de l'angle OMF'; mais, d'après une propriété connue, elle est aussi la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur MF' et par le prolongement du rayon vecteur O'M; donc MO est ce prolongement. D'ailleurs on a MF = MO' à cause de la symétrie, et MF + MO = 2a, si 2a représente la longueur du grand axe. Donc enfin

$$O'M + MO = 2a;$$

c'est-à-dire que le point O décrit un cercle dont O est le centre et dont 2a est le rayon.

Réciproquement, si l'on fait tourner les deux ellipses autour de leurs foyers respectifs O et O', elles demeureront tangentes, et rouleront l'une sur l'autre sans glissement. On peut du moins concevoir que les choses se passent ainsi. En réalité, la transmission par simple contact ne serait possible que pendant la période de la rotation pour laquelle les rayons vecteurs menés du point de contact au foyer fixe de l'ellipse conductrice vont en augmentant. Mais on la rend possible pendant toute la durée du

mouvement, en transformant les deux ellipses en roues dentées. On regarde ces ellipses comme les lignes primitives de l'engrenage; on divise leur pourtour en un même nombre d'arcs égaux; on se donne arbitrairement le profil d'une dent de la roue conduite, le profil correspondant de la dent conductrice est l'enveloppe des positions que prendrait la courbe de la dent conduite si l'ellipse roulait en sens contraire sur l'ellipse conductrice. Mais ici, les dents n'étant plus nécessairement égales, il faut recommencer le tracé pour chacune, ce qui est un inconvénient grave. Quoi qu'il en soit, si ω et ω' sont les vitesses angulaires des roues qui tournent autour des axes O et O'; et si ρ et ρ' désignent les rayons vecteurs MO et MO', la vitesse au point de contact étant la même, on a

$$\omega' \rho' = \omega \rho, \text{ d'où } \omega' = \omega \frac{\rho}{\rho'},$$

ou, comme $\rho + \rho' = 2a$,

$$\omega' = \omega \frac{\rho}{2a - \rho}. \quad [1]$$

On peut exprimer ω' en fonction de l'angle θ que le rayon vecteur OM fait avec le grand axe mobile AA'; car on sait qu'on a

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}, \quad [2]$$

p désignant le demi-paramètre $\frac{b^2}{a}$, et e l'excentricité $\frac{c}{a}$.

Sans faire la substitution, on reconnaît que le rapport de ω' à ω varie depuis

$$\frac{a - c}{a + c} \text{ jusqu'à } \frac{a + c}{a - c}.$$

On peut donc, à l'aide de cet engrenage elliptique, faire varier le rapport des vitesses entre un nombre quelconque k et son inverse $\frac{1}{k}$; il suffit pour cela de choisir convenablement le rapport des axes des ellipses. Si l'on pose en effet

$$\frac{a + c}{a - c} = k,$$

on en tire

$$\frac{c}{a} = \frac{k - 1}{k + 1}, \text{ d'où } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \left(\frac{k - 1}{k + 1}\right)^2,$$

et par suite

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{k - 1}{k + 1}\right)^2} = \frac{2\sqrt{k}}{k + 1}.$$

Pour $k = 4$, par exemple, on aurait $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$,

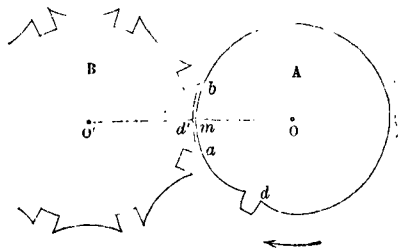
Pour $k = 9$, — $\frac{b}{a} = \frac{6}{7}$,

et ainsi de suite. Quant au grand axe de chaque ellipse, sa valeur est toujours la distance des deux axes de rotation.

Néanmoins, à cause des difficultés d'exécution signalées plus haut, ce mode de transmission est très-rarement employé. La transmission ne peut être d'ailleurs convenablement assurée que lorsque les ellipses ont peu d'excentricité; et il est utile que le rapport de b à a ne descende pas au-dessous de $\frac{3}{4}$, ce qui répond à peu près à $k = 2,2$.

ENGRENAGE INTERMITTENT, sorte d'engrenage employé dans les *compteurs*. Il se compose

d'une roue A qui ne porte qu'une dent d , et d'une roue B dont le profil a la forme indiquée sur la figure; c'est-à-dire qu'elle présente un certain nombre de crans séparés par des espèces de dents concaves.



plus larges que les dents ordinaires, et dont l'arc extérieur a pour centre le centre de la roue A. Lorsqu'une de ces dents est placée de manière à avoir pour axe de symétrie la ligne des centres OO' , comme cela a lieu sur la figure pour la dent d' , son arc concave coïncide avec la circonférence de la roue A. Dans cette position, la roue B ne peut tourner ni dans un sens ni dans l'autre, attendu que les extrémités a et b de l'arc concave qui termine la dent d' sont à une distance du centre O' plus grande que $O'm$, et que par conséquent ces points ne pourraient franchir la ligne des centres. Mais il en est différemment lorsque, par suite de la rotation de la roue A, la dent d est rencontrée par la dent d' . Celle-ci présente, en effet, de chaque côté un creux ménagé pour loger les points a ou b de la dent d' ; il en résulte que la dent d s'introduit dans le cran qui précède la dent d' , tandis que la pointe a s'introduit dans le creux antérieur de la dent d ; et, celle-ci poussant l'autre, la roue A fait marcher la roue B, jusqu'à ce que la dent d se soit dégagée du cran où elle s'était introduite. La roue B demeure immobile jusqu'à ce que, à la révolution suivante, la dent d vienne de nouveau saisir la dent qui a pris la place de d' , et ainsi de suite. En sorte qu'à chaque tour de la roue A, la roue B marche d'une fraction de tour marquée par le rapport de l'unité au nombre de ses dents. Si elle a 10 dents, elle marche de $\frac{1}{10}$ de tour à chaque révolution de la roue A.

Si l'on conçoit qu'une roue A' égale à A soit montée sur l'axe de la roue B, et engrené avec une roue B' égale à B, la roue B' fera $\frac{1}{10}$ de tour quand A' fera un tour entier, c'est-à-dire quand A aura fait 10 tours; il faudra donc 100 tours de la roue A pour faire faire un tour à la roue B' . Cette disposition est usitée dans les compteurs, où une aiguille montée sur l'axe de la roue B marque les dizaines de tours de la roue A, tandis qu'une aiguille montée sur l'axe de la roue B' marque les centaines. On obtient les mille avec une troisième roue A'' , égale à A, montée sur l'axe de la roue B' en engrenant avec une roue B'' égale à B.

ENGRENAGE OSCILLANT, engrenage cylindrique à développantes de cercle (Voy. ENGRENAGES) dans lequel, l'axe de l'une des roues demeurant fixe, l'axe de l'autre tourne autour de la droite décrite par le point de contact des deux développantes. Ce

mode de transmission n'a jamais été appliqué. Il a été imaginé par Olivier (Voy. le Bulletin de la Société d'encouragement de 1829 et de 1830), qui a démontré surabondamment ainsi que l'on pouvait, théoriquement au moins, se servir de l'engrenage à développantes pour transmettre le mouvement entre deux axes non situés dans un même plan.

ENGRENAGES, systèmes de roues dentées destinés à transmettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre. Le problème des engrenages peut s'énoncer comme il suit: *Étant donnés deux axes de rotation, munir ces axes de saillies ou dents tellement disposées: 1° que leurs surfaces demeurent en contact pendant la rotation, l'une des deux poussant et entraînant l'autre; 2° que le rapport des vitesses angulaires soit égal à un rapport donné.* — On distingue trois cas généraux, suivant que les axes donnés sont parallèles, concourants, ou non situés dans un même plan.

I. AXES PARALLÈLES. Dans ce cas les surfaces de contact sont généralement des surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles aux deux axes; l'engrenage prend le nom d'*engrenage cylindrique* ou *droit*; et il suffit de considérer la section droite du système. Soient O et O' (fig. 1) les traces

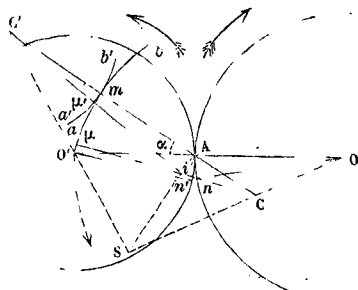


Fig. 1.

des deux axes, amb et $a'mb'$ celles des surfaces cylindriques liées à ces axes, m celle de la génératrice de contact; soient ω et ω' les vitesses angulaires autour des axes O et O' . Le problème se trouve ramené au suivant: *Étant donnée l'une des deux courbes amb ou $a'mb'$, déterminer l'autre de manière qu'elles se touchent constamment pendant la rotation, et que le rapport des vitesses angulaires ω et ω' soit égal à un rapport donné.* Hors des cas tout à fait exceptionnels, on suppose toujours que le rapport des vitesses angulaires est constant pendant toute la durée du mouvement.

Pour résoudre le problème proposé on emploie deux méthodes connues sous les noms de *méthode des enveloppes* et de *méthode des roulettes*. La première est celle dont on fait le plus généralement usage, c'est celle que nous allons employer; nous ferons plus loin connaître la seconde. Supposons, pour fixer les idées, que les rotations soient de sens contraire sur les deux axes, comme l'indiquent les flèches marquées sur la figure, la surface amb ayant pour fonction de pousser la surface $a'mb'$, et de transmettre ainsi le mouvement de rotation de l'axe O à l'axe O' . La forme à donner aux courbes amb et $a'mb'$ ne dépend évidemment que de leur mouvement relatif; on peut donc simplifier la ques-

tion en réduisant au repos l'axe O et la courbe amb qui y est attachée, pourvu qu'on attribue à la courbe $a'mb'$, indépendamment de la vitesse angulaire ω' autour de l'axe O' , une vitesse angulaire ω de même sens autour de l'axe O . Mais, d'après les règles de la COMPOSITION DES ROTATIONS (*Voy.* ce mot), ces deux rotations simultanées attribuées à la courbe $a'mb'$ se composeront en une seule, qui s'exécutera autour d'un axe A , déterminé en divisant la distance OO' dans le rapport inverse des vitesses angulaires ω et ω' . Tous les points de la courbe $a'mb'$ décriront donc, dans un temps infiniment petit, des éléments d'arcs de cercle ayant pour centre le point A . Or, la courbe amb étant supposée fixe, et les deux courbes étant en contact, ces deux conditions exigent que le point m , considéré comme appartenant à la courbe $a'mb'$, décrive, dans un temps infiniment petit, l'élément commun aux deux courbes, c'est-à-dire qu'il se meuve suivant la tangente commune. Il faut donc que le rayon Am de l'élément de cercle décrit soit perpendiculaire à cette tangente commune, ou, ce qui revient au même, que la droite Am soit la normale commune aux deux courbes. De là résulte ce théorème : *Pour que les courbes amb et $a'mb'$ fixées aux axes O et O' remplissent la double condition de demeurer en contact et de se mouvoir respectivement autour de ces axes avec les vitesses angulaires ω et ω' , il faut que la normale commune aux deux courbes passe constamment par le point A qui divise la distance des axes O et O' dans le rapport inverse de ces vitesses angulaires.* Il est clair d'ailleurs que cette condition est suffisante ; car, si on la suppose remplie, on reconnaît, en réduisant au repos comme ci-dessus la courbe amb , que la courbe $a'mb'$ glissera sur la première sans cesser d'être en contact avec elle.

II. Cela posé, on sait que le MOUVEMENT INSTANTANÉ (*Voy.* ce mot) d'une figure plane dans son plan se réduit à une rotation élémentaire autour d'un point de ce plan, et que le mouvement fini de la figure considérée peut être reproduit en faisant rouler une certaine courbe liée à la figure mobile sur une autre courbe fixe dans le plan ; ces deux courbes sont le lieu des centres instantanés de rotation par rapport à la figure mobile et par rapport au plan fixe. Dans le cas actuel, ces deux courbes ne sont autre chose que les circonférences de cercles décrites des points O et O' comme centres avec les distances OA et $O'A$ pour rayon ; car si la première, tournant d'un mouvement uniforme autour du point O , pouvait entraîner la seconde par simple contact, on aurait, en nommant ω et ω' les vitesses angulaires, et remarquant qu'au point de contact la vitesse doit être la même sur les deux circonférences,

$$\omega \cdot OA = \omega' \cdot O'A,$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'A}{OA}$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires seraient en raison inverse des distances OA et $O'A$. Par conséquent les deux circonférences, supposées entraînées dans le mouvement de rotation qu'on a supposé aux deux axes O et O' , se mouvraient comme si l'une d'elles entraînait l'autre par simple contact. Il en résulte que lorsque, sans changer le mouvement relatif des deux axes, on réduit l'axe O au repos, le mouvement de la figure $a'mb'$ est le même que si la

circonférence $O'A$ roulait sans glissement sur la circonférence OA , dans le sens de la flèche f' . Les circonférences OA et $O'A$ portent le nom de *circonférences primitives* ; ce sont les sections droites de deux cylindres qu'on pourrait nommer les *cylindres primitifs* de l'engrenage ; si, en effet, ces cylindres pouvaient se conduire mutuellement par simple contact, le rapport des vitesses angulaires serait précisément le rapport donné ; le problème à résoudre consiste donc à armer les cylindres de saillies ou *dents* qui assurent la transmission du mouvement d'un axe à l'autre sans altérer le rapport des vitesses angulaires.

III. Supposons donc que la circonférence $O'A$ roule sans glissement sur la circonférence OA , dans le sens indiqué par la flèche f' ; la courbe mobile $a'mb'$ ne cessera pas de rester en contact avec la courbe amb devenue fixe comme nous l'avons supposé ; la courbe amb peut donc être considérée comme l'*enveloppe* des positions successives que prend la courbe $a'mb'$; et par conséquent, si la courbe $a'mb'$ est donnée, on en pourra déduire la courbe amb . Pour cela, on tracera la courbe mobile $a'mb'$ dans quelques-unes des positions qu'elle vient successivement occuper lorsque la circonférence $O'A$ roule sur la circonférence OA . Du point de contact de ces deux circonférences, dans l'une quelconque des positions considérées, on abaissera une normale sur la courbe mobile dans sa position correspondante ; cette normale sera en même temps normale à la courbe cherchée amb , et son pied sur la courbe $a'mb'$ appartiendra à la courbe amb . Pour chaque position de la courbe mobile on obtiendra donc ainsi un point de la courbe cherchée, et en même temps la normale et par conséquent la tangente en ce point. Si le nombre des positions de la courbe mobile qu'on a tracées est suffisant, et qu'elles soient suffisamment rapprochées, on pourra donc tracer aisément la courbe cherchée amb . Nous en donnerons plus loin des exemples.

IV. Il y a plus : il est facile de déterminer en chaque point le rayon de courbure de la courbe qu'on veut tracer. On fait usage pour cela d'une formule due à Savary, qui établit une relation entre les rayons de courbure ρ et ρ' des courbes amb et $a'mb'$, les rayons r et r' des circonférences primitives, la longueur p de la normale commune Am , aux deux courbes, comptée à partir du point de contact des circonférences primitives, enfin l'angle α que cette normale fait avec la ligne des centres OO' . Soient C et C' les centres de courbure des courbes amb et $a'mb'$ correspondants au point m . Supposons que par suite d'une rotation élémentaire de la circonférence $O'A$, le point de contact des circonférences primitives se transporte en n sur la circonférence OA , et en n' sur la circonférence $O'A$; les arcs An et An' seront égaux ; nous représenterons par ds leur longueur commune. La normale commune aux deux courbes, amb , et $a'mb'$ aura changé ; mais comme, en vertu du théorème démontré plus haut, elle doit toujours passer par le point de contact des circonférences primitives, si l'on joint Cn , on aura la nouvelle normale à la courbe amb ; et le point de contact sera venu en μ sur cette courbe ; si l'on joint de même $C'n'$, on aura la nouvelle normale à la courbe $a'mb'$, et le point de contact sur cette courbe sera venu en μ' . — Dans ce

mouvement, la normale commune aura tourné d'une quantité angulaire égale à la somme des angles ACn et AC'n'. Mais la ligne des centres OO' aura tourné dans le même temps de la somme des angles AOn et AO'n'; et comme une droite quelconque de la figure mobile a évidemment tourné de la même quantité angulaire, on peut équaler ces deux sommes et écrire

$$ACn + AC'n' = AOn + AO'n'. \quad [1]$$

Elevons au point A la perpendiculaire Ai sur la normale commune CC'. L'angle ACn étant infiniment petit, on aura, en le remplaçant par sa tangente,

$$ACn = \frac{Ai}{AC}.$$

Mais An étant lui-même infiniment petit, on peut regarder cet arc comme une droite perpendiculaire à OO'; l'angle iAn est dès lors égal à mA'O' ou à α , et l'on a $Ai = An \cdot \cos iAn = ds \cos \alpha$.

D'ailleurs

$$AC = mC - mA = \rho - p; \quad \text{on peut donc écrire}$$

$$ACn = \frac{ds \cos \alpha}{\rho - p}.$$

On trouvera par un moyen analogue

$$AC'n' = \frac{ds \cos \alpha}{\rho' + p}.$$

D'ailleurs on a

$$AOn = \frac{ds}{r} \quad \text{et} \quad AO'n' = \frac{ds}{r'}.$$

Substituant dans [1] ces valeurs, et divisant par ds, on obtient

$$\left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p} \right) \cos \alpha = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}; \quad [2]$$

c'est la formule de Savary. On peut s'assurer qu'elle est générale. Connaissant r, r', ρ et α , on en déduira ρ .

On déduit de la formule de Savary un corollaire remarquable: il consiste en ce que, si l'on joint les droites CO et C'O', elles viennent se couper en un point S situé sur la droite menée par le point A perpendiculaire à CC'. Désignons, en effet, par x la distance du point A au point S où OC vient rencontrer cette perpendiculaire, par x' celle du point A au point S' où cette même perpendiculaire est rencontrée par O'C'; et représentons, pour abrégé, AC par d et AC' par d'. En écrivant que le triangle SAC, rectangle en A, est la différence des triangles SAO et CAO, on aura, après avoir multiplié par 2,

$$d'x = rx \cos \alpha - dr \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{dr \sin \alpha}{r \cos \alpha - d} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{d} \cos \alpha - \frac{1}{r}}.$$

En écrivant de même que le triangle S'AC', rectangle en A, est la somme des triangles S'AO' et C'AO', on aura de même

$$d'x' = r'x' \cos \alpha + d'r' \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{d'r' \sin \alpha}{d' - r' \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{d'} - \frac{1}{r'} \cos \alpha}.$$

Or, les dénominateurs des valeurs de x et de x' sont égaux en vertu de la formule de Savary; puisque $d = \rho - p$ et que $d' = \rho' + p$; donc on a $x = x'$; c'est-à-dire que les droites OC et O'C' rencontrent au même point la perpendiculaire à CC' menée par le point A.

Il en résulte une construction géométrique très-

simple pour déterminer ρ , connaissant r, r' et ρ' ; il suffit de joindre C'O', de prolonger cette droite jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire AS à CC', et de joindre le point de rencontre S avec le point O; le point C où la ligne de jonction rencontre la normale Am, est le centre de courbure de la courbe amb au point m, et mC est le rayon de courbure.

On a donc ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer la courbe amb; le problème général de l'engrenage cylindrique peut donc être regardé comme complètement résolu.

Toutefois, quoique la courbe a'mb' paraisse complètement arbitraire, on ne peut pas cependant la prendre au hasard, parce qu'il pourrait arriver que la courbe amb qu'on en déduirait, acceptable au point de vue purement géométrique, ne le fût pas au point de vue mécanique. Dans la pratique on ne donne guère à la ligne a'mb' que trois formes différentes qui fournissent l'engrenage à flancs, l'engrenage à développantes et l'engrenage à lanterne. Nous examinerons successivement ces trois engrenages.

V. La forme la plus simple qu'on puisse donner à la ligne a'mb', est celle d'une droite, dirigée vers le centre O'. Il est facile de voir que la courbe amb est alors une EPICYCLOÏDE. (Voy. ce mot) Soit, en effet, O'b' (fig. 2) le rayon mobile dans une

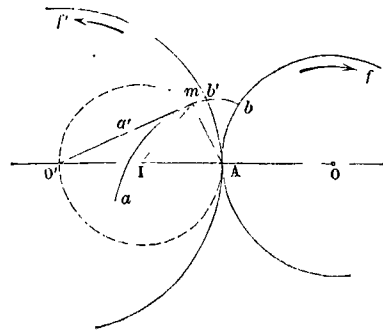


Fig. 2

quelconque de ses positions; du point A abaissons sur ce rayon la perpendiculaire Am; le point m sera un point de la courbe cherchée. Prenons sur la circonférence OA un arc Ab égal à l'arc Ab'; le point b sera encore un point de la courbe; car, avant que la circonférence O'A' en roulant sur la circonférence OA supposée fixe, n'arrive à la position actuelle, il y a eu un moment où ces circonférences se touchaient par les points b et b'; à cet instant la normale Am était nulle, et le point m se confondait avec le point b. Remarquons enfin que la courbe cherchée est tangente en m au rayon mobile O'b'. Décrivons sur O'A comme diamètre une circonférence de cercle; elle passera par le point m; et si l'on joint son centre I au point m, l'angle Alm sera le double de l'angle AO'm. Or on a, si l'on considère le cercle O'A,

$$AO'b' = \frac{\text{arc } Ab'}{O'A},$$

et, si l'on considère le cercle AI,

$$AI m = \frac{\text{arc } Am}{AI}$$

Par conséquent

$$\frac{\text{arc } Am}{AI} = 2 \cdot \frac{\text{arc } AB'}{O'A},$$

d'où

$$\frac{\text{arc } Am}{\text{arc } AB'} = \frac{2AI}{O'A} = 1,$$

c'est-à-dire $\text{arc } Am = \text{arc } AB'$; et par conséquent $\text{arc } Am = \text{arc } Ab$. Il en résulte que le point m est sur la courbe décrite par le roulement de la circonférence AI sur la circonférence OA, le point décrivant étant le point de la circonférence AI primitivement situé en b . Or cette courbe est une épicycloïde; de plus la tangente en m à cette courbe est précisément la droite $O'b'$, d'après les propriétés de l'épicycloïde. Donc cette courbe est la courbe cherchée, puisque, dans chacune des positions de la droite $O'b'$, cette courbe lui est tangente, au pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact des circonférences primitives sur cette droite.

VI. On pourrait tracer cette épicycloïde d'après ses propriétés connues. Mais, dans la pratique, on préfère employer un tracé approximatif indiqué par M. Poncelet, et étendu par lui au cas où la droite $O'b'$ serait remplacée par une courbe quelconque. Ce tracé est fondé sur cette considération qu'au point m l'élément de la courbe amb se confond avec un élément de cercle décrit du point A comme centre avec Am pour rayon. Il s'ensuit qu'on peut regarder la courbe amb comme l'enveloppe des circonférences décrites des centres instantanés de rotation successifs avec des rayons respectivement égaux aux perpendiculaires abaissées de ces centres sur la droite mobile $O'b'$. Voici comment on dirige l'opération. Sur les circonférences primitives on porte à partir du point A, dans le sens de la flèche f' pour la circonférence $O'A$, et en sens contraire pour l'autre, une série de longueurs égales, et l'on numérote les points de division des mêmes numéros dans les deux sens. Soient 1, 2, 3, 4, etc., ces numéros sur la circonférence OA (fig. 3), et 1', 2', 3', 4', etc., les numéros corres-

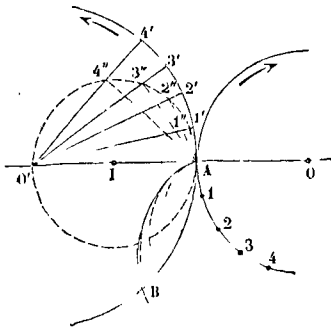


Fig. 3.

pondants sur la circonférence $O'A$. On tire les rayons $O'1'$, $O'2'$, $O'3'$, $O'4'$, etc. Du point A l'on abaisse sur ces rayons les perpendiculaires $A1''$, $A2''$, $A3''$, $A4''$, etc. Des points 1, 2, 3, 4, etc., comme centres, avec des rayons respectivement égaux à ces perpendiculaires, on décrit des arcs de cercle; puis on mène à la main une courbe AB tangente à tous ces arcs de cercle; cette courbe

est, avec une approximation suffisante pour la pratique, l'épicycloïde qu'il s'agissait de tracer. Car, si l'on fait tourner la circonférence OA dans le sens de la flèche, lorsque le point 1 sera venu en A, la courbe AB sera tangente en $1''$ à la droite $O'1'$; quand le point 2 sera venu en A, la courbe AB sera tangente en $2''$ à la droite $O'2'$; quand le point 3 sera venu en A, la courbe AB sera tangente en $3''$ à la droite $O'3'$; et ainsi de suite. La courbe AB poussera donc le rayon $O'A$ comme si la circonférence OA entraînait par simple contact la circonférence $O'A$, c'est-à-dire qu'elle remplira la fonction que devait remplir l'épicycloïde, et se confondra sensiblement avec cette courbe.

VII. Bien qu'au point de vue géométrique une seule dent puisse suffire pour assurer la transmission, on comprend qu'il ne saurait en être de même au point de vue pratique. Il pourrait résulter de l'emploi d'une seule dent des impossibilités d'exécution; et d'ailleurs des considérations tirées du frottement [Voy. ENGRÉNAGES (Frottement des)] obligent à ne donner à chaque dent qu'une faible saillie, et par conséquent à en multiplier le nombre. On trace ordinairement de la manière suivante l'engrenage à épicycloïde. On arme de dents analogues la roue conductrice et la roue conduite. Le profil de chaque dent est symétrique par rapport à un rayon, et chaque côté de ce profil se compose de deux parties : l'une courbe Ae (fig. 4), qui est un arc d'épi-

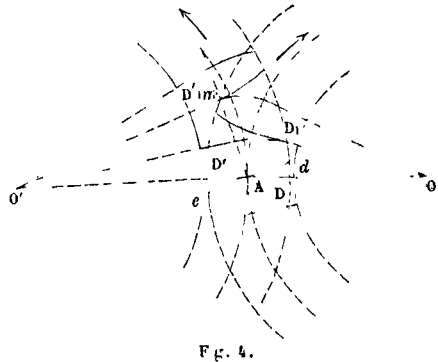


Fig. 4.

cycloïde, l'autre droite Ad, qui est dirigée vers le centre O. Cette partie droite est ce qu'on nomme le flanc de la dent, d'où le nom d'engrenage à flancs donné à l'engrenage qui nous occupe. Il résulte de cette disposition que l'engrenage est à retour, c'est-à-dire que chaque roue peut devenir conductrice à son tour, et que par conséquent l'engrenage peut marcher dans les deux sens. On remarquera que lorsque le contact se fait avant la ligne des centres OO' , c'est le flanc de la dent conductrice qui pousse l'épicycloïde de la dent conduite; mais lorsque le contact se fait après la ligne des centres, c'est l'épicycloïde de la dent conductrice qui pousse le flanc de la dent conduite. On ne termine pas la dent par l'intersection des deux épicycloïdes qui forment les deux parties courbes de son profil; il est nécessaire de tronquer l'extrémité comme il sera expliqué tout à l'heure. Toutes les dents d'une même roue sont égales et sont exécutées sur un patron commun. Leur épaisseur,

dans le sens de la circonférence primitive, se détermine d'après les règles de la *Résistance des matériaux*. (Voy. DENTS DES ENGRENAGES.) Entre deux dents consécutives d'une même roue doit pouvoir pénétrer une dent de l'autre roue; la somme des épaisseurs de deux dents appartenant respectivement aux deux roues, augmentée du jeu indispensable, règle la distance entre le point A, naissance de l'épicycloïde inférieure d'une dent, et le point A', homologue sur la dent suivante. Cette distance est ce que l'on nomme le *pas* de l'engrenage; il doit être un sous-multiple exact de la circonférence primitive; c'est le quotient de cette circonférence par le nombre des dents de la roue. Le pas étant déterminé, on prélève, pour former le jeu, $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{30}$ de ce pas, suivant la perfection qu'on veut donner à l'engrenage; le reste se partage également, si les dents des deux roues sont de même nature, et la moitié donne l'épaisseur d'une dent. Si les dents des deux roues sont de nature différente, on divise le reste en raison inverse des résistances que les deux matériaux peuvent offrir, par exemple dans le rapport de 3 à 4 s'il s'agit de fonte et de bois. Il faut que, d'après la dimension ainsi obtenue, chaque dent soit en état de supporter les efforts auquel elle doit être soumise. On donne aujourd'hui plus de largeur aux roues dans le sens de leur axe, afin de diminuer l'épaisseur de la dent, ce qui a pour effet de diminuer aussi le frottement de l'engrenage, et d'éviter les *ARC-BOUTEMENTS* (Voy. ce mot).

Il est nécessaire qu'il y ait toujours au moins deux couples de dents en prise, afin qu'il n'y ait jamais d'interruption dans la marche de l'engrenage, et par conséquent point de choc capable d'amener la rupture des dents. Pour cela on s'arrange de manière que le contact de deux dents commence un pas avant la ligne des centres et finisse un pas après. De là la nécessité de tronquer les dents par le bout. Supposons qu'on ait tracé deux dents D et D' en prise sur la ligne du centre et les deux dents suivantes D₁ et D'₁; on détermine le point de contact de ces deux dernières; pour cela, il suffit d'abaisser du point A une perpendiculaire Am sur le flanc de la dent D'₁; le pied m de cette perpendiculaire est la position du dernier contact. Il ne faut pas que l'épicycloïde de la dent D₁ s'étende au delà de ce point; et, comme toutes les dents doivent être égales, on les tronquera toutes en décrivant du point O comme centre une circonférence passant par le point m. On opérera de la même manière la troncuture des dents de la roue O'. L'instant où une dent de la roue O' pénètre le plus profondément entre les dents de la roue O, est celui où elle est en prise sur la ligne des centres, dans la position D'. On limitera donc le *creux* des dents de la roue O, en décrivant du point O comme centre une circonférence qui passe le plus près possible du bout tronqué de la dent D', en laissant toutefois assez de jeu pour que cette dent ne touche pas cette circonférence. On limite d'une manière semblable le *creux* des dents de la roue O'.

La figure 5 représente en élévation un engrenage à flancs.

On peut construire un engrenage à épicycloïdes

dans lequel les dents n'aient point de *flanc* droit; mais alors la transmission ne peut s'opérer que d'un seul côté de la ligne des centres, ce qui est un grave inconvénient.

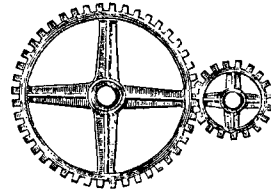


Fig. 5.

Dans la pratique, beaucoup de constructeurs remplacent l'épicycloïde par un arc de cercle décrit de la naissance de la dent suivante; cela a peu d'inconvénients dans les engrenages dont les dents sont petites et nombreuses; mais il serait préférable de prendre pour rayon le rayon de courbure en un point moyen. M. Willis a introduit dans les ateliers anglais un tracé approximatif dans lequel il remplace non-seulement l'épicycloïde, mais même le flanc, par des arcs de cercle. Il a même imaginé pour la commodité de ce tracé un instrument spécial qu'il a nommé *ODONTOGRAPHE* (Voy. ce mot).

VIII. Les engrenages des machines s'exécutent en fer, en fonte, ou en bois. Dans le premier cas les dents sont taillées à la circonférence d'un disque plein. Dans le second, elles viennent à la fonte et sont simplement retouchées ensuite. Les dents en bois sont taillées dans des coins enfoncés de bout dans des ouvertures rectangulaires ménagées à la circonférence d'une jante en fonte. — Les engrenages de l'horlogerie se font en cuivre, en laiton ou en bronze; les dents sont taillées dans des disques pleins. Pour régler la largeur *l* de l'engrenage dans le sens de l'axe, connaissant l'épaisseur *e* de la dent, comptée sur la circonférence primitive, on peut se servir de la formule empirique

$$l = \left(4 + 0,075 \frac{N}{V}\right) e, \quad [3]$$

dans laquelle *N* désigne la force de la machine en chevaux, et *V* la vitesse de la roue à la circonférence.

IX. La seconde forme adoptée pour la courbe *a'mb'* (fig. 1) est celle d'une *DÉVELOPPANTE DE CERCLE*

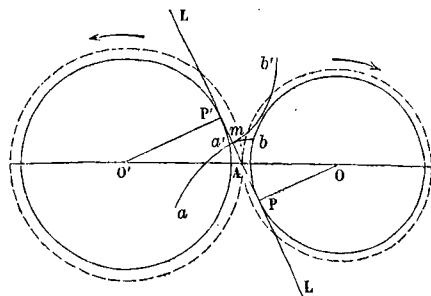


Fig. 6.

(Voy. ce mot). — Soient O et O' (fig. 6) les centres des circonférences primitives, et A leur point de contact. Par le point A on mène une droite LL, qui pourrait être quelconque, mais à laquelle

on donne habituellement une inclinaison de 75° sur la ligne des centres. Des points O et O' on abaisse sur cette droite les perpendiculaires OP et $O'P'$. Des points C et O' comme centres, on décrit, avec ces perpendiculaires pour rayons, des circonférences, qui sont tangentes à la droite LL . On prend pour la courbe $a'mb'$ la développante de la circonférence $O'P'$. Il est facile de voir que la courbe amb correspondante doit être la développante de la circonférence OP . En effet, la droite LL , tangente à la circonférence $O'P'$, est normale à la développante $a'mb'$, et par conséquent à la courbe amb cherchée. Lorsque les deux circonférences primitives tourneront dans le sens des flèches en roulant l'une sur l'autre, d'après la génération de la développante $a'mb'$, la droite LL ne cessera pas d'être normale à cette courbe, et par conséquent aussi à la courbe cherchée amb ; cette dernière n'est donc autre chose que la développante de la circonférence OP tangente à LL .

On arriverait à la même conclusion en considérant le roulement de la circonférence primitive $O'A$ sur la circonférence primitive OA supposée fixe; on verrait que la droite LL entraînée avec la circonférence mobile, demeure à une distance constante du centre O , et que par conséquent la normale à la courbe enveloppe de $a'mb'$ est constamment tangente au cercle OP ; d'où il suit que cette enveloppe n'est autre que la développante de ce cercle.

On peut remarquer que le point de contact m des deux courbes amb et $a'mb'$ est constamment situé sur la droite fixe LL .

Dans l'engrenage à développantes, le profil de la dent, de chaque côté, ne se compose que de l'arc de développante; cet engrenage se trace d'ailleurs en suivant la même marche que pour l'engrenage à flancs, et l'on y limite la saillie et le creux des dents par un procédé semblable.

L'engrenage à développantes jouit, comme l'engrenage à flancs, de la propriété de pouvoir marcher indifféremment dans les deux sens. Mais il jouit en outre de propriétés précieuses qui lui sont particulières. La forme des dents de chaque roue ne dépend aucunement du rayon de l'autre roue; il en résulte que deux roues quelconques dont les dents sont à développantes peuvent toujours engrener l'une avec l'autre. On sait aussi que si l'on diminue d'une même quantité toutes les normales à une développante, on obtient encore une développante du même cercle; il s'ensuit que l'usure d'un engrenage à développantes, si elle se fait uniformément sur tout le contour des dents, n'altère pas les propriétés de cet engrenage.

X. La troisième forme adoptée pour la courbe mobile est celle d'un cercle dont le centre C (fig. 7) est sur la circonférence primitive. Lorsque la circonférence $O'A$ roule sur la circonférence OA supposée fixe, ce centre C décrit une épicycloïde $\alpha\beta$. On en conclut que la courbe amb , enveloppe des positions successives du cercle C , est la courbe obtenue en diminuant toutes les normales à $\alpha\beta$ d'une même quantité, égale au rayon ρ du cercle C . Il en résulte que ces deux courbes ont la même développée; et comme la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable, la courbe amb n'est autre chose qu'une développante d'épicycloïde.

Mais il faut bien remarquer que cette courbe se raccorde avec le cercle décrit du point β comme centre avec ρ pour rayon, et offre, à l'intérieur de la circonférence primitive OA , non pas un point de

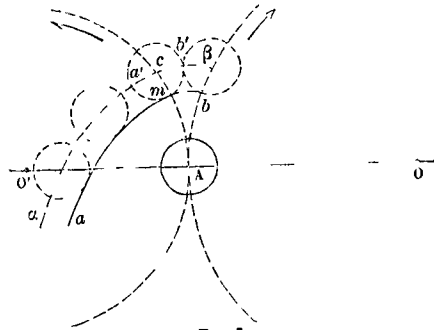


Fig. 7.

rebroussement, comme le dit M. Bélanger dans sa *Cinématique*, mais un point d'inflexion, qui ne permet pas de pousser la courbe amb au delà. Le point d'inflexion est, dans la pratique, très-voisin de la circonférence OA , parce que le rayon ρ du cercle mobile est ordinairement très-petit. Il en résulte, pour l'engrenage dont nous nous occupons, un inconvénient grave: c'est que la courbe amb ne peut conduire le cercle C qu'au delà de la ligne des centres; c'est ce qui a lieu quand le mouvement se fait dans le sens des flèches; et que le cercle C ne peut à son tour conduire la courbe amb qu'avant la ligne des centres: c'est ce qui aurait lieu si le mouvement se faisait en sens contraires des flèches. Cet engrenage est donc incomplet, et on y a renoncé presque partout. Néanmoins, comme on peut le rencontrer dans d'anciennes ma-

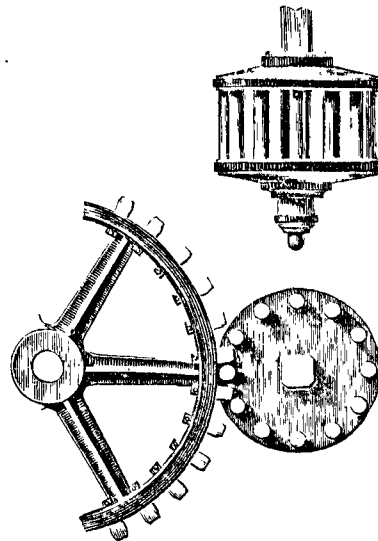


Fig. 8.

chines, ou dans des machines d'une exécution plus ou moins grossière, il est bon d'en achever la description. Cet engrenage porte le nom d'*engrenage à lanterne*. La roue O' se compose de deux disques

ou *tourteaux* perpendiculaires à l'axe, et réunis par des cylindres appelés *fuseaux*, dont le cercle C représente la section droite. Les tourteaux ainsi reliés forment ce que l'on appelle la lanterne. La roue O est une roue ordinaire, dont la circonférence est armée de saillies ou dents auxquelles on donne le nom d'*alluchons*. Comme ce genre d'engrenage n'est plus guère employé que dans les moulins, dans les manèges, et autres machines qui n'exigent pas une grande précision, il s'exécute le plus souvent en bois, et les recherches théoriques auxquelles il a donné lieu dépassent de beaucoup les besoins de la pratique. La figure 8 représente un engrenage à lanterne; la lanterne y est représentée en projection verticale et en coupe; la roue qui porte les alluchons y est représentée en plan.

XI. Nous devons maintenant faire connaître la seconde méthode générale, c'est-à-dire la *méthode des roulettes*.

Voici en quoi elle consiste. Soient toujours OA et O'A (fig. 9) les circonférences primitives. Soit de

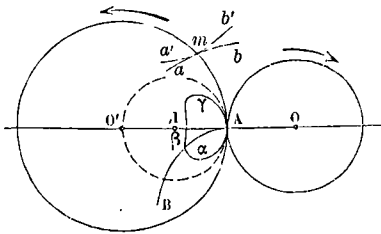


Fig. 9.

plus $\alpha\beta\gamma$ une courbe auxiliaire quelconque, tangente en A aux deux circonférences, et soit m un point quelconque du plan lié à cette courbe auxiliaire. Si on la fait rouler successivement sur les deux circonférences primitives, le point m décrira deux courbes amb , $a'mb'$, qui auront le point m commun, et qui de plus seront tangentes en ce point; car, dans la position initiale de la courbe auxiliaire, le centre instantané de rotation étant le point A, la droite Am est normale aux deux courbes amb , $a'mb'$. Il s'agit de faire voir que ces courbes pourront servir de profils à deux dents de l'engrenage. En effet, faisons rouler la circonférence O' sur la circonférence O supposée fixe, et en même temps la courbe $\alpha\beta\gamma$ sur la circonférence mobile O', de manière que les trois courbes aient toujours leur point de contact commun; le point décrivant, m, restera sur la courbe ab , puisque $\alpha\beta\gamma$ roule sur la circonférence O; le point décrivant restera aussi sur la courbe $a'b'$ devenue mobile avec O', puisque $\alpha\beta\gamma$ roule sur la circonférence O'; les deux courbes ab et $a'b'$ ne cesseront donc pas d'avoir un point commun. De plus, la droite joignant ce point commun au point de contact des trois courbes O, O' et $\alpha\beta\gamma$ sera normale aux deux courbes ab et $a'b'$, puisque ce point de contact sera le centre instantané de rotation dans chacun des deux roulements considérés; donc enfin les courbes ab et $a'b'$ seront tangentes au point commun. Si maintenant, au lieu de faire tourner la circonférence O' sur la circonférence O, on les fait tourner toutes deux autour de leurs centres, comme si elles se conduisaient par simple contact, les

mouvements relatifs ne seront pas changés, et les courbes ab et $a'b'$ demeureront en contact pendant toute la durée du mouvement. Donc ces courbes peuvent être prises pour les profils de deux dents. Cette démonstration fait voir en même temps, par une autre voie, que la normale commune aux deux profils passe constamment par le point de contact des circonférences primitives.

Si, par exemple, on prend pour courbe auxiliaire la circonférence décrite sur le rayon O'A comme diamètre; la courbe $a'mb'$ devient le rayon O'A, la courbe amb devient l'épicycloïde AB engendrée par le roulement de la circonférence auxiliaire sur la circonférence OA, et l'on rentre ainsi dans le cas de l'engrenage à flancs.

XII. Nous avons supposé jusqu'ici que la rotation s'effectuait en sens contraire autour des deux axes parallèles; dans ce cas, l'engrenage est dit *extérieur*; mais la rotation peut s'effectuer dans le même sens; l'une des deux roues est alors un simple anneau qui embrasse l'autre roue: dans ce cas, l'engrenage est dit *intérieur*. La théorie générale est d'ailleurs la même que pour les engrenages extérieurs; mais les engrenages intérieurs sont soumis à des restrictions particulières. Il est impossible, par exemple, de donner des flancs droits aux dents de la grande roue; si l'on construit en effet ce flanc et l'épicycloïde correspondant sur la petite roue, dans deux positions symétriques par rapport à la ligne des centres, on reconnaît que ces deux lignes, qui sont tangentes dans l'une de ces deux positions, deviennent sécantes dans l'autre, et que par conséquent la transmission est impossible par ce moyen au delà de la ligne des centres. On peut donner des flancs à la petite roue seulement, mais la conduite n'est possible que d'un côté de la ligne des centres, ce qui est un inconvénient grave. Pour que l'engrenage puisse conduire avant et après la ligne des centres, et dans les deux sens indifféremment, il faut remplacer, sur les dents de la grande roue, les flancs droits par des arcs d'épicycloïde concaves, que l'on détermine de la manière suivante. Soient O et O' (fig. 10) les centres des cir-

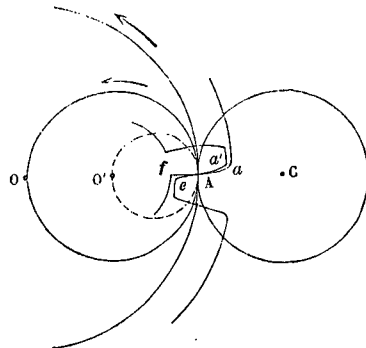


Fig. 10.

conférences primitives, et A leur point de contact. On décrit sur le rayon O'A de la petite comme diamètre une première circonférence auxiliaire I, qui est celle qui a déjà été considérée plus haut. Si on la fait rouler sur la circonférence O', le point A, supposé mobile avec elle, décrit le flanc droit A/;

si on la fait rouler sur la circonférence O, le même point décrit l'épicycloïde Ae. On trace une seconde circonférence auxiliaire passant par le point A, et dont le centre C, d'ailleurs arbitraire, est pris sur le prolongement de OA. Si on la fait rouler sur la circonférence O, le point A décrit l'épicycloïde Aa; et si on la fait rouler sur la circonférence O', le même point décrit l'épicycloïde Aa'. On prend pour limiter la dent de la petite roue le contour fAa', et pour limiter celle de la grande roue le contour eAa. Si le mouvement a lieu dans le sens des flèches, avant la ligne des centres l'épicycloïde concave Aa pousse l'épicycloïde convexe Aa', et après la ligne des centres l'épicycloïde Ae pousse le flanc Af. Si le mouvement s'effectue en sens contraire, avant la ligne des centres c'est le flanc Af qui pousse l'épicycloïde Ae, et après la ligne des centres c'est l'épicycloïde convexe Aa' qui pousse l'épicycloïde concave Aa. On limite la saillie et le creux des dents par des arcs de cercle décrits des points O et O' comme centres, comme dans l'engrenage extérieur; seulement, il faut remarquer que la jante de la grande roue est extérieure à sa circonférence primitive. On pourrait remplacer la circonférence AI par une autre, le flanc droit serait alors remplacé par un arc d'épicycloïde concave.

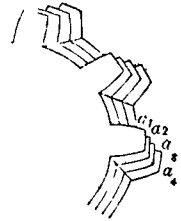
Le système à développantes s'applique à l'engrenage intérieur. Les développantes sont alors *embrassantes*, c'est-à-dire que l'un des arcs en contact est convexe, tandis que l'autre est concave. On place la droite LL de la figure 6 presque perpendiculairement à la ligne des centres. La conduite a lieu à une petite distance avant et après cette ligne.

Les flancs concaves, et en général les profils dont une portion est concave, ont l'inconvénient de diminuer l'épaisseur des dents; mais cet inconvénient disparaît dans le tracé de la figure 9, parce que, malgré la concavité, la dent de la grande roue va en augmentant d'épaisseur à mesure qu'elle approche de la jante. Dans les engrenages à développantes eux-mêmes, surtout si les dents sont nombreuses, et d'une faible épaisseur, la concavité est peu sensible et n'offre pas d'inconvénient sérieux.

XIII. Les engrenages dont il a été question jusqu'ici sont des *engrenages de force*; c'est-à-dire que le contact des dents se faisant suivant une génératrice des cylindres dont les courbes *amb* et *a'mb'* (fig. 1) sont les sections droites, l'engrenage peut résister à des efforts considérables, pourvu que les dents aient les dimensions nécessaires. Il n'en serait plus de même si les dents ne se touchaient que par un point, parce que leur pression mutuelle altérerait les matières en contact. Dans ce cas, l'engrenage ne peut être employé que dans les mécanismes légers, où il y a intérêt à réduire le frottement à son minimum, et l'on a alors ce que l'on appelle un *engrenage de précision*. Tel est l'engrenage imaginé par Hooke en 1666, oublié pendant un long intervalle de temps, puis remis en lumière par White en 1808, et qui est connu sous le nom d'*engrenage hélicoïdal* ou *engrenage de White*. C'est en cherchant à réduire le frottement de glissement que Hooke a été conduit au genre d'engrenage dont il s'agit. La théorie et l'expérience dé-

montrent que le frottement est d'autant moindre que les dents s'écartent moins de la ligne des centres. Il y a donc intérêt à diminuer le pas. Mais afin de ne pas être obligé de diminuer en même temps l'épaisseur des dents, on peut remplacer la roue cylindrique ordinaire par un assemblage de roues analogues, très-minces, juxtaposées, mais disposées sur leur axe commun de manière que les dents soient *en retraite* les unes sur les autres, comme l'indique la figure 11. Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, \text{etc.}$, les dents ainsi juxtaposées sur la roue conduite; la roue conductrice étant disposée de la même manière, soient $b_1, b_2, b_3, b_4, \text{etc.}$, les dents de cette roue qui correspondent respectivement aux premières. La dent b_1 pousse d'abord la dent a_1 , puis c_1 sur a_2 , puis b_2 sur a_2 , puis b_3 sur a_3 , puis b_4 sur a_4 , et ainsi de suite. En sorte qu'avec un pas très-faible on obtient le même résultat, au point de vue de la transmission, que si le pas était n fois plus grand, n désignant le nombre des roues partielles juxtaposées, mais que le frottement se trouve extrêmement réduit par cette disposition, que l'on désigne sous le nom d'*engrenage en rangs échelonnés*. Mais il est clair que rien ne limite le nombre des disques dont on compose chaque roue, et on est naturellement conduit à le rendre infiniment grand, auquel cas chacun d'eux étant infiniment mince, les dents ne se touchent plus que par un point, et le frottement se trouve réduit à un simple frottement de roulement, puisque le glissement est devenu infiniment petit. Mais alors chaque file de dents forme un filet continu, terminé de chaque côté par une surface hélicoïdale, et le filet de la roue conductrice pousse le filet de la roue conduite en ne le touchant que par un point. Ainsi se trouvent conciliées deux conditions qu'Euler regardait comme incompatibles : savoir qu'il y ait roulement sans glissement, et que le rapport des vitesses angulaires reste constant. C'est qu'Euler admettait implicitement que le contact se faisait toujours dans un même plan perpendiculaire

Fig. 11.



aux axes, tandis qu'ici le point de contact passe d'une manière continue d'un disque infiniment mince sur l'autre, et suit par conséquent une courbe coupant successivement les plans de tous ces disques.

L'engrenage de White est fondé sur les mêmes principes : en voici la construction.

Soient AA et BB (fig. 12) les deux axes de rotation; soient ω et ω' les vitesses angulaires autour de ces axes. Menons une droite CC parallèle à ces axes, et qui divise leur intervalle en deux parties inversement pro-

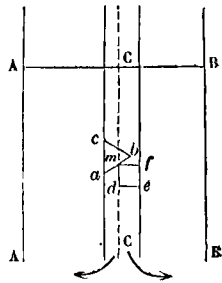


Fig. 12.

portionnelles aux vitesses angulaires, en sorte qu'en posant

$$AC = r \text{ et } BC = r'$$

on ait

$$r : r' = \omega' : \omega.$$

Soit m un point quelconque de la droite CC . Par cette droite concevons un plan tangent aux deux cylindres primitifs qui ont AA et BB pour axes et r et r' pour rayons. Dans ce plan tangent, menons par le point m une droite quelconque, que nous désignerons par D . Si l'on enroule le plan tangent sur le cylindre AA , la droite D s'y enroulera suivant une hélice dont nous nommerons h le pas. Si l'on enroule de même le plan tangent sur le cylindre BB , la droite D s'y enroulera suivant une autre hélice dont nous nommerons le pas h' . Comme les éléments de la droite D conserveront après l'enroulement leur inclinaison par rapport aux génératrices, les deux hélices auront même inclinaison, et l'on aura

$$h : h' = 2\pi r : 2\pi r' = r : r'.$$

Cela posé, imaginons, dans le plan des droites AA et CC , un triangle abc dont un côté ab passe par le point m , et concevons qu'il tourne, en s'appuyant sur un noyau cylindrique ayant AA pour axe, et en restant toujours dans un plan méridien, de manière que le point m suive la première hélice. Concevons ensuite dans le plan des droites BB et CC un triangle ou un rectangle $mdef$, ayant m pour sommet, et imaginons qu'il tourne en sens contraire en s'appuyant sur un noyau cylindrique ayant BB pour axe, et en restant toujours dans un plan méridien, de manière que le point m suive la seconde hélice. On aura engendré ainsi, d'une part un filet de vis triangulaire, de l'autre un filet de vis triangulaire ou carré, dont l'arête passant en m touchera la surface hélicoïde du premier filet, au seul point m . Si maintenant on fait tourner l'axe BB dans le sens de la flèche, le filet carré poussera le filet triangulaire, en ne le touchant qu'en un seul point, situé sur la droite CC ; car, dans ce mouvement, les éléments des deux hélices viennent coïncider successivement dans le plan tangent. Le point commun est situé sur la droite CC commune aux deux cylindres primitifs, mais il se transporte le long de cette droite, d'un mouvement uniforme; et quand le cylindre BB a fait un tour, ce point s'est élevé de h' ; il s'est élevé de h quand le cylindre AA a fait un tour.

On ne donne aux cylindres qu'une faible hauteur dans le sens de leur axe; mais au lieu d'un filet sur chacun d'eux, on en emploie plusieurs, et on les rapproche assez les uns des autres pour que, lorsque

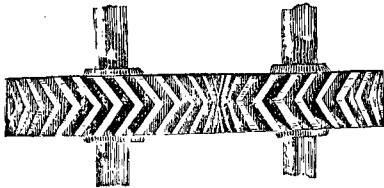


Fig. 13.

le contact va cesser sur l'un d'eux, il commence sur le suivant. Comme l'effort transmis par ce contact a une composante parallèle à l'axe, qui pourrait fatiguer les épaulements ou les pivots, on juxtapose deux engrenages pareils dans lesquels les hélices sont en sens contraire, et l'on obtient le dispositif représenté par la figure 13. L'arête suivant laquelle le contact s'opère, se change par l'usure en une petite bande hélicoïde, et le contact, au lieu de se faire par un seul point, se fait par un petit élément de surface; mais le frottement n'en reste pas moins négligeable, et l'appareil conserve ses propriétés essentielles comme engrenage de précision. C'est à l'aide d'engrenages de ce genre que M. Bréguet est parvenu à faire mouvoir des axes de rotation avec des vitesses de plus de 2000 tours par seconde.

pose deux engrenages pareils dans lesquels les hélices sont en sens contraire, et l'on obtient le dispositif représenté par la figure 13. L'arête suivant laquelle le contact s'opère, se change par l'usure en une petite bande hélicoïde, et le contact, au lieu de se faire par un seul point, se fait par un petit élément de surface; mais le frottement n'en reste pas moins négligeable, et l'appareil conserve ses propriétés essentielles comme engrenage de précision. C'est à l'aide d'engrenages de ce genre que M. Bréguet est parvenu à faire mouvoir des axes de rotation avec des vitesses de plus de 2000 tours par seconde.

Au lieu d'enrouler une droite sur les deux cylindres, on pourrait enrouler une courbe quelconque passant par le point m (fig. 12) : on obtiendrait encore un engrenage de précision du même genre. Le point de contact m parcourrait encore la droite CC , mais non plus d'un mouvement uniforme. Ce dispositif n'est pas usité dans la pratique.

XIV. AXES CONCOURANTS. Si, comme nous l'avons fait dans le cas des axes parallèles, on réduit au repos l'un des corps tournants, sans changer leur mouvement relatif, le mouvement instantané du corps mobile est une rotation autour d'une droite située dans le plan des deux axes et passant par leur point de concours (*Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ*); et le mouvement fini du corps mobile peut être reproduit en faisant rouler un cône qui a pour sommet le point de rencontre des axes, sur un cône fixe ayant le même sommet. La position de l'axe instantané par rapport aux deux axes est facile à obtenir. Soient, en effet, OA et OA' (fig. 14) ces deux axes; ω et ω' les vitesses angulaires autour de ces axes; l'axe OA étant réduit au repos, le corps tournant autour de OA' doit être regardé comme animé de deux rotations simultanées, l'une ω' autour de OA' , l'autre, égale et contraire à ω , autour de OA ; ces deux rotations se composent en une seule (*Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS*), égale à la somme $\omega + \omega'$ (si les rotations primitives autour de OA et de OA' ont lieu en sens contraire), et s'exécutent autour d'une droite OC , telle que si, d'un point quelconque C de cette droite, on abaisse sur les deux axes les perpendiculaires CP et CP' , ces perpendiculaires sont en raison inverse des vitesses angulaires ω et ω' , en sorte qu'on a

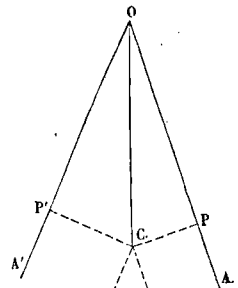


Fig. 14.

$$CP : CP' = \omega' : \omega.$$

Pour construire la droite OC , on élèvera donc sur OA et sur OA' des perpendiculaires qui soient dans ce rapport; par l'extrémité de chacune d'elles on mènera une parallèle à l'axe correspondant; la rencontre de ces deux parallèles donnera un point de la droite OC .

Si maintenant on fait tourner OC successivement autour de OA et de OA' , cette droite engendrera deux cônes tels que, si l'on fait rouler le second sur le premier supposé fixe, on reproduira le mouvement

du corps tournant autour de OA' par rapport à l'axe OA . Car l'axe instantané devant toujours avoir par rapport aux axes la position de OC , les surfaces qu'il engendre dans l'espace absolu, et par rapport au corps mobile, sont précisément les deux cônes que nous venons de définir. Ces deux cônes sont les *cônes primitifs* de l'engrenage; c'est sur ces cônes que doivent être fixées les surfaces formant les dents. On adopte pour ces surfaces des surfaces coniques ayant le point O pour sommet, et l'engrenage prend le nom d'*engrenage conique*.

Pour tracer ce genre d'engrenage, on peut employer des méthodes analogues à celles qui ont été exposées pour les engrenages cylindriques, mais au lieu de faire le tracé sur un plan, on devra l'exécuter sur une sphère ayant le point O pour centre. Cette sphère coupera les cônes primitifs suivant des petits cercles qui joueront le rôle des circonférences primitives de l'engrenage droit; les *flancs* seront remplacés par des arcs de grands cercles, les épicycloïdes planes par des épicycloïdes sphériques, les développantes de cercles planes par des développantes sphériques, etc. La *Géométrie descriptive* donne des procédés (*Voy. ÉPICYCLOÏDE SPHÉRIQUE, DÉVELOPPANTE SPHÉRIQUE*) pour construire les projections de ces diverses lignes, et par suite celles des profils des dents, et enfin le développement des panneaux. On trouvera ces procédés théoriques développés dans le *Traité des Machines*, d'Hachette, et dans les *Applications de la Géométrie descriptive*, de Th. Olivier. Mais à ces procédés, beaucoup trop compliqués pour la pratique, on substitue partout la méthode approximative suivante, due à Tredgold. Elle est fondée sur ce que les dents étant toujours petites, le contact s'éloigne toujours très-peu des cônes primitifs et du plan des axes.

XV. Soient $CDEF$ et $CDEF'$ (fig. 15) les cônes

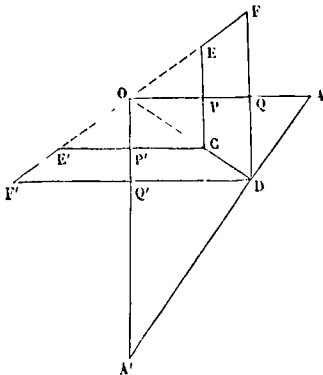


Fig. 15.

primitifs, ou plutôt les cônes tronqués dont on se propose de déduire les *roues d'angle* formant l'engrenage conique. Par le point D , dans le plan des deux axes, menons la droite AA' perpendiculaire à la génératrice commune OC ; et considérons les points A et A' comme les sommets de deux cônes qui auraient pour axes respectifs les droites OA et OA' , et la droite OD pour génératrice commune. Dans le mouvement de rotation autour des axes OA et OA' , toutes les génératrices du cône A viendront tour à tour se placer suivant AD , tandis que les

génératrices du cône A' viendront se placer tour à tour suivant $A'D$. Et le passage de ces différentes génératrices suivant AA' se fera de la même manière que si, les surfaces des deux cônes A et A' étant développées sur le plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan AOA' , les secteurs circulaires qui sont le développement de ces surfaces se conduisaient mutuellement par simple contact, en tournant autour de leurs centres A et A' . Cette remarque permet de ramener le tracé des engrenages coniques à celui des engrenages plans. Soient mAn et $m'A'n'$ (fig. 16) les secteurs obtenus en développant les

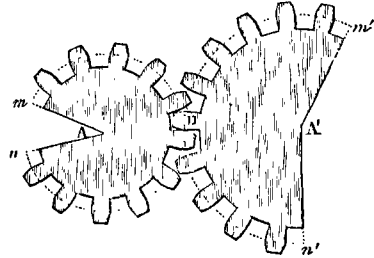


Fig. 16.

surfaces des cônes A et A' , de telle sorte que mDn soit égal à la circonférence qui avait pour rayon DQ (fig. 15), et que $m'Dn'$ (fig. 16) soit égal à la circonférence qui avait pour rayon DQ' (fig. 15). On considère mDn et $m'Dn'$ (fig. 16) comme les circonférences primitives d'un engrenage cylindrique, que l'on tracera d'après les règles exposées plus haut, avec cette modification cependant que le pas devra être une partie aliquote des arcs mDn et $m'Dn'$. Chaque secteur, armé de ses dents, deviendra alors un *patron* que l'on appliquera sur la surface des cônes A et A' (fig. 15). Si l'on conçoit alors qu'une droite, passant constamment par le point O , se meuve en s'appuyant toujours sur les bords de l'un de ces patrons, elle engendrera la surface qui doit limiter la saillie et les creux de la roue conique correspondante. C'est d'après ces principes que les roues d'angle sont toujours exécutées.

Le plus souvent les axes OA et OA' sont rectangu-

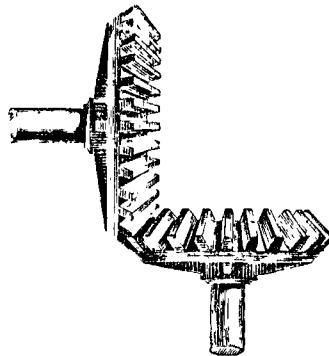


Fig. 17.

laïres entre eux. La figure 17 représente un engrenage conique dans cette condition.

XVI. On réalise aussi la transmission dont nous

nous occupons, à l'aide d'un *engrenage à lanterne*. La lanterne peut être cylindrique ou conique, c'est-à-dire que les fuseaux peuvent être parallèles à son axe ou faire des angles égaux avec cet axe. Les alluchons, au lieu d'être dirigés dans le sens des rayons de la roue, sont implantés près de sa circonférence, parallèlement à son axe. La figure 18 représente un engrenage

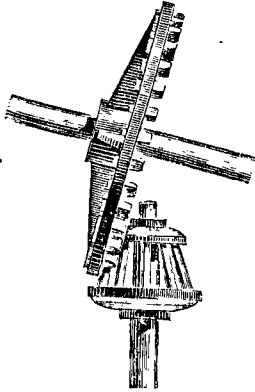


Fig. 18.

de ce genre emprunté au mécanisme d'un moulin à vent; ces engrenages ne sont jamais susceptibles d'une grande précision.

XVII. White a étendu aux roues coniques le système d'engrenage de précision auquel il a donné son nom, et que nous avons fait connaître en parlant des engrenages cylindriques. Mais les hélices y

sont remplacées par des spirales coniques, analogues aux spirales d'Archimède. Soit m (fig. 19) la position initiale du point de contact, mn et mn' les circonférences passant par m , perpendiculaires aux axes

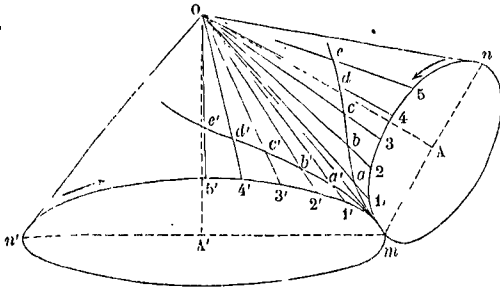


Fig. 19.

et ayant leurs centres sur ces axes respectifs. Concevons que l'on prenne sur ces circonférences à partir du point m une série d'arcs égaux $m.1, 1.2, 2.3, 3.4$, etc., et $m.1', 1'.2', 2'.3', 3'.4'$, etc.; joignons les points de division au point de concours O des deux axes; puis, ayant choisi arbitrairement une longueur, portons-la une fois sur $O.1$, et sur $O.1'$, de 1 en a et de $1'$ en a' ; deux fois sur $O.2$ et sur $O.2'$, de 2 en b , et de $2'$ en b' ; trois fois sur $O.3$ et sur $O.3'$, de 3 en c et de $3'$ en c' ; et ainsi de suite; enfin par les points m, a, b, c , etc. d'une part, et par les points m, a', b', c' , etc. de l'autre, faisons passer des courbes: ce seront les spirales dont il s'agit. Si l'on fait rouler, en effet, par simple contact les cônes qui ont OA et OA' pour axes, et Om pour génératrice commune, les points a et a' , b et b' , c et c' , etc., viendront successivement coïncider sur la droite Om . Les spirales $mabcd$, $ma'b'c'd'$ devront donc servir de guides aux profils, triangulaires ou rectangulaires, destinés à engendrer les filets formant l'engrenage.

Les filets ne se toucheront que par un point; et ce point parcourra uniformément la droite mO . La construction et les propriétés de cet engrenage sont du reste les mêmes que dans le cas des axes parallèles.

XVIII. AXES NON SITUÉS DANS UN MÊME PLAN. Bien que la transmission directe du mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan puisse toujours être évitée par l'emploi d'un axe intermédiaire situé dans un même plan avec chacun des deux autres, cependant la solution directe a exercé à diverses reprises la sagacité des mécaniciens et des géomètres; et il y a lieu de s'y arrêter. — Lorsqu'on réduit au repos l'un des corps tournants, sans altérer le mouvement relatif, le mouvement instantané du corps mobile se compose d'une rotation autour d'un certain axe, avec glissement parallèlement à cet axe (*Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ*); et le mouvement fini du mobile peut être reproduit en faisant rouler une certaine surface réglée sur une autre surface réglée fixe, avec glissement élémentaire le long de la génératrice de contact. Ici les deux surfaces réglées sont faciles à déterminer. La position relative des deux axes demeurant la même pendant toute la durée du mouvement, la position de l'axe instantané par rapport à ces deux axes reste aussi la même; la surface qu'il engendre dans l'espace est donc celle qu'engendre une droite qui tourne autour d'une droite fixe en conservant par rapport à elle son inclinaison et sa distance, c'est-à-dire que c'est un hyperboloïde de

révolution à une nappe; la surface qu'il engendre dans le corps mobile est, par une raison semblable, un second hyperboloïde de révolution à une nappe. Ces deux surfaces portent le nom d'*hyperboloïdes primitifs*; c'est sur ces hyperboloïdes que doivent être fixées les surfaces formant les dents de l'engrenage.

On rencontre des engrenages de ce genre dans quelques machines et particulièrement dans les filatures, où il est aisé de les confondre avec des roues d'angle, attendu que les axes y sont très-voisins l'un de l'autre. M. Willis s'est occupé de ces engrenages et a indiqué, pour les construire, un procédé approximatif. En 1861, M. Bélanger a appelé de nouveau l'attention des mécaniciens sur ces appareils, et donné des règles plus exactes pour déterminer les hyperboloïdes primitifs. On peut exposer ces règles

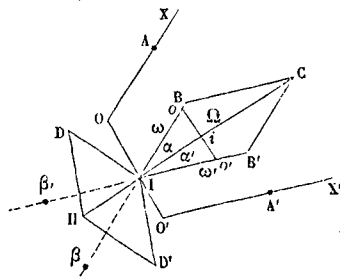


Fig. 20.

de la manière suivante, un peu plus simplement que ne l'a fait l'auteur.

Soient OX et $O'X'$ (fig. 20) les deux axes de rota-

tion, OO' leur plus courte distance, OA et $O'A'$ les droites représentatives des vitesses angulaires ω et ω' qu'il s'agit de composer. En un point déterminé I de la droite OO' , appliquons deux rotations opposées IB et $I\beta$, égales et parallèles à OA , et deux autres rotations opposées IB' et $I\beta'$ égales et parallèles à $O'A'$. Les deux rotations IB et IB' se composeront en une seule IC (*Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS*), par la règle du parallélogramme. Les deux rotations AO et $I\beta$ égales et opposées équivalent à une translation ID perpendiculaire au plan $AI\beta$, et ayant pour valeur ωx , en appelant x la distance OI . De même les deux rotations $A'O'$ et $I\beta'$ égales et opposées donnent une translation ID' perpendiculaire au plan $A'I\beta'$, et ayant pour valeur $\omega'x'$, en appelant x' la distance $O'I$. Enfin les deux translations ID et ID' se composeront en une seule IH , par la règle du parallélogramme. Les quatre droites IB , IB' , ID , ID' sont dans un même plan perpendiculaire à OO' , ou parallèle aux deux axes. Si l'on choisit le point I de manière que les deux directions IC et IH soient dans le prolongement l'une de l'autre, on aura remplacé les deux rotations proposées par une rotation autour de IC et par une translation parallèle à IC ; la droite IC sera donc l'axe instantané du mouvement de l'un des corps tournants par rapport à l'autre rendu fixe sans changer le mouvement relatif.

— Pour que IH soit dans la direction de IC , il faut que l'angle DIH soit le complément de BIC , puisque DI est perpendiculaire à IB ; et il faut de même que l'angle HID' soit le complément de $B'IC$. Posons $BIC = \alpha$, $B'IC = \alpha'$; nous devons avoir $DIH = 90^\circ - \alpha$ et $D'IH = 90^\circ - \alpha'$. Or le parallélogramme $IDHD'$ donne

$$\frac{ID}{ID'} = \frac{\sin HID'}{\sin HID} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega x}{\omega' x'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \quad [1]$$

Le parallélogramme $IBCB'$ donne d'ailleurs

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{\sin BIC}{\sin B'IC} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \quad [2]$$

De ces deux relations on tire, par division,

$$\frac{x}{x'} = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'} \quad [3]$$

relation qui détermine le point I ; car les vitesses angulaires ω et ω' étant données, on peut toujours construire le parallélogramme $IBCB'$, et par conséquent déterminer α et α' , ou, mieux encore, le rapport de $\tan \alpha$ à $\tan \alpha'$, lequel n'est autre chose que le rapport entre les segments oi et $o'i$ d'une droite oo' menée dans le parallélogramme perpendiculairement à la diagonale IC .

La vitesse angulaire résultante Ω est donnée par la relation connue :

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos(\alpha + \alpha')}, \quad [4]$$

dans laquelle l'angle $\alpha + \alpha'$ est connu, puisque c'est l'angle des deux axes.

La translation résultante IH est donnée de même par la relation

$$IH = \sqrt{\omega^2 x^2 + \omega'^2 x'^2 - 2\omega\omega' x x' \cos(\alpha + \alpha')}. \quad [5]$$

Le mouvement instantané se trouve donc complètement défini, et, connaissant l'axe instantané, on en déduit aisément les éléments des deux hyperboloïdes primitifs.

Dans le cas, assez fréquent, où les axes sont rectangulaires, on a $\alpha' = 90^\circ - \alpha$; par conséquent

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2};$$

puis $\frac{x}{x'} = \tan^2 \alpha = \frac{\omega'}{\omega}$.

D'ailleurs, $x + x' = a$

(a étant la plus courte distance oo'); de là on tire

$$x = a \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega'^2} = \frac{a\omega^2}{\Omega^2} \quad \text{et} \quad x' = a \frac{\omega'^2}{\Omega^2},$$

puis $IH = a \frac{\omega\omega'}{\Omega}$.

M. Bélanger ne s'est point occupé de la forme à donner aux dents. Dans la pratique, comme l'engrenage hyperboloïde ne s'applique qu'à des mécanismes très-légers, on se contente de remplacer les dents par des stries dirigées suivant les génératrices, et qui suffisent pour assurer la transmission. La figure 21 montre cette disposition.

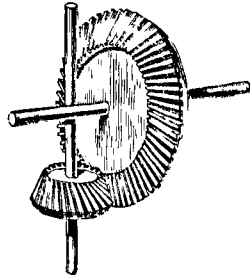


Fig. 21.

XIX. Le problème de la transmission du mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan a été résolu d'une manière générale par Th. Olivier, au moyen de deux méthodes distinctes. La première consiste à prendre arbitrairement la surface qui limite les dents de l'une des roues, et à adopter pour les dents de l'autre roue l'enveloppe des positions que prend la première surface lorsque, le second corps tournant étant réduit au repos, le premier tourne autour du second en conservant le même mouvement relatif. La seconde méthode générale consiste à faire tourner une même surface successivement autour des deux axes, et à prendre pour surfaces des dents les deux enveloppes de la surface auxiliaire dans ces deux mouvements. Ces deux méthodes répondent, comme on voit, à la méthode des enveloppes et à la méthode des roulettes.

Parmi les engrenages déduits de l'emploi de ces méthodes, on peut distinguer d'abord celui dans lequel l'une des deux surfaces qui engrenent est un hélicoïde développable, tandis que l'autre est une surface de roue cylindrique à développantes. Mais le résultat le plus remarquable auquel Olivier soit parvenu, est d'avoir pu construire un système dans lequel une même roue centrale engrène à la fois avec une roue à axe parallèle, avec une roue à axe concourant, et avec autant de roues satellites qu'on voudra, dont les axes, diversement inclinés, ne sont pas dans un même plan avec celui de la roue centrale. Pour exécuter ce système curieux, Olivier a montré qu'il fallait tailler les dents des roues satellites à l'aide d'une vis triangulaire, convertie en outil propre à tarauder, et les dents de la roue centrale à l'aide de l'écrou de la même vis.

Olivier a également indiqué les moyens de con-

struire divers engrenages dans lesquels les dents ne se touchent que par un point. Mais ils diffèrent des engrenages de White en ce que les dents ne peuvent pas se conduire par simple roulement. Ce roulement est nécessairement accompagné d'un glissement, puisque le mouvement relatif instantané se compose d'une rotation autour d'un axe et d'une translation parallèle à cet axe. Nous ne pouvons que renvoyer le lecteur au savant ouvrage dans lequel Th. Olivier a exposé les résultats de ses recherches sur la théorie générale des engrenages.

Voyez les art. CRÉMAILLÈRE, VIS SANS FIN, VIS TANGENTE, PIGNON, ENGRENAGES DIFFÉRENTIELS, ENGRENAGE INTERMITTENT.

XX. On peut consulter sur la théorie des engrenages :

Les mémoires de Lahire sur les épicycloïdes planes et leur application à la construction des engrenages cylindriques, publiés dans les *Actes de l'Académie des sciences de Paris* ;

Le *Traité de Mécanique* de Camus ;

Le *Mémoire* d'Euler sur les engrenages, inséré dans les *Actes de l'Académie des sciences de Berlin* ;

Le *Traité des Machines*, d'Hachette ;

Le *Mémoire* du colonel Lefebvre sur la construction de l'engrenage conique au moyen des développantes sphériques, inséré dans le *Mémorial d'artillerie* ;

La *Théorie géométrique des engrenages* de Th. Olivier ;

La *Cinématique* de M. Morin ;

Le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye ;

Le *Traité théorique et pratique des engrenages*, par M. Haton de la Goupillière ;

Le *Traité de Cinématique* de M. Bélanger.

ENGRENAGES (FROTTEMENT DES). On se propose d'évaluer le travail consommé par le frottement de deux dents d'engrenage pendant le temps de leur contact. Si N désigne la pression normale que les dents exercent l'une sur l'autre, et f le coefficient de frottement, fN désignera le frottement lui-même ; et si e représente l'arc de glissement, c'est-à-dire la longueur développée de l'arc de courbe dont les deux dents en contact ont glissé l'une sur l'autre, fNe représentera le travail \mathcal{E}_f du frottement. La force N peut être regardée comme constante pendant la durée du contact, et égale à la valeur qu'elle avait au moment où les deux dents se sont trouvées en prise sur la ligne des centres. Or, cette dernière est connue ; car si P désigne la force résistante agissant à la distance p de la roue conduite, r le rayon primitif de cette roue, ρ le rayon des tourillons et f_1 le sinus de l'angle du frottement ou $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, on a pour le mouvement uni-

forme de la roue considérée

$$Nr = Pp + f_1 \rho \sqrt{N^2 + P^2} + 2NP \cos \alpha,$$

d'où l'on peut tirer la force N . Le plus souvent N sera parallèle à P et de sens contraire ; dans ce cas on aura

$$Nr = PT + f_1 \rho (N - P), \text{ d'où } N = P \frac{p - f_1 \rho}{r - f_1 \rho}.$$

Tout se réduit donc à calculer l'arc de glissement. Pour cela quelques considérations préliminaires sont indispensables. Considérons un corps prismatique $AMNB$ mobile, en contact en M avec un corps

prismatique CD (fig. 1) ; et supposons que, sans cesser d'être en contact avec le corps fixe, le corps mobile se soit transporté en $A'M'N'B'$, le contact ayant alors lieu en N' . On peut, sans altérer le ré-

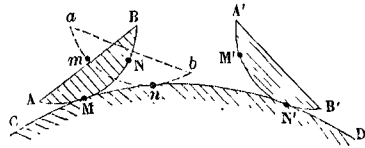


Fig. 1.

sultat définitif, imaginer que le corps mobile a d'abord roulé sans glissement, de manière à venir prendre la position $amnb$, dans laquelle le contact a lieu en n , et qu'il ait ensuite glissé sans roulement jusqu'à la position $A'M'N'B'$, c'est-à-dire que le même point n du corps mobile ait parcouru l'arc nN' . Le roulement ne produisant qu'un frottement insensible, c'est à la seconde partie du mouvement, c'est-à-dire au glissement de n en N' , qu'est dû le travail du frottement. Or, l'arc de glissement nN' est la différence entre MN' et Mn , ou entre MN' et mn , puisque en vertu du roulement l'arc mn est égal à Mn . Mais mn est égal à $M'N'$; on peut donc dire que l'arc de glissement nN' est égal à $MN' - M'N'$. Maintenant si l'on suppose les courbes AB et CD d'une très-faible courbure, et d'une très-faible étendue, comme cela a lieu dans les engrenages, les trois points M, M', N' , approcheront beaucoup d'être en ligne droite, et l'on pourra dire que l'arc de glissement est égal à la distance des points M et M' , c'est-à-dire à la distance dont le point M , considéré comme appartenant au corps mobile, s'est écarté du point M considéré comme appartenant au corps fixe. Les mêmes raisonnements subsisteraient si les deux corps étaient mobiles, pourvu que leur mouvement relatif ne fût pas changé. On peut donc dire d'une manière générale que, lorsque les courbes en contact sont très-peu courbes et très-peu étendues, l'arc de glissement est égal à la distance dont les deux points primitivement en contact se sont séparés ; et ce principe est, comme on voit, indépendant de la nature des courbes et de la grandeur relative des arcs de roulement et de glissement.

Nous pouvons maintenant faire l'application de ce dernier principe aux engrenages. Soient O et O' (fig. 2) les centres des deux roues ; AB et AC les

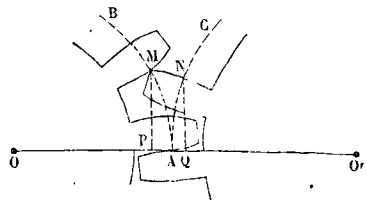


Fig. 2.

circonférences primitives, tangentes en A . Soit M le point de contact des deux dents au moment où elles vont se quitter. Les points primitivement en contact en A se sont transportés l'un en M sur la circonférence AB , l'autre en N sur la circonférence

AC. D'après le principe qui vient d'être établi, l'arc de glissement équivaut donc à la droite MN. Mais le pas de l'engrenage étant supposé très-petit, les points M et N, qui sont à un pas de distance du point A sur les deux circonférences primitives, sont à des distances très-peu différentes de la ligne des centres OO'; et la droite MN qui les joint diffère très-peu de sa projection PQ sur la ligne des centres. L'arc de glissement est donc sensiblement égal à PQ ou à AP + AQ.

Or, soit a le pas de l'engrenage, ou AM = a. Cet arc différant peu de sa corde, on peut le regarder comme une moyenne proportionnelle entre AP et le diamètre 2r; on a donc

$$a^2 = AP \cdot 2r, \text{ d'où } AP = \frac{a^2}{2r}.$$

On trouvera de même, en nommant r' le rayon de la circonférence O',

$$AQ = \frac{a^2}{2r'}.$$

Donc enfin

$$e = AP + AQ = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right),$$

et par conséquent

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} f N a^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right). \quad [1]$$

Si, par exemple, on a N = 500^k, f = 0,1, a = 0,06, r = 0^m,50 et r' = 0^m,40, on trouvera

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 500 \cdot (0,06)^2 \left(\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,4} \right),$$

ou $\mathcal{E}_f = 0^{\text{k}},405$.

D'après la formule [1] on voit que le frottement est d'autant moindre que le pas a est plus petit, et que les rayons r et r' sont plus grands; ce qui revient à dire que le frottement est d'autant moins considérable que le nombre des dents est plus grand. On met ordinairement le nombre des dents en évidence dans la formule. Si n et n' sont les nombres de dents des roues O et O', on a

$$2\pi r = na, \text{ d'où } \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{na},$$

$$\text{et } 2\pi r' = n'a,$$

$$\text{d'où } \frac{1}{r'} = \frac{2\pi}{n'a}.$$

En substituant ces nombres dans la formule [1] et réduisant, on obtient

$$\mathcal{E}_f = f N \pi a \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right). \quad [2]$$

En désignant par \mathcal{E}_m le travail moteur total pour un pas, on a

$$\mathcal{E}_m = Na + T_f,$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathcal{E}_m = Na \left[1 + f \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \right]. \quad [3]$$

Supposons, par exemple, N = 1000^k, a = 0^m,04, f = 0,12, n = 40 et n' = 60, nous trouverons

$$\mathcal{E}_m = 1000 \cdot 0,04 \left[1 + 0,12 \cdot 3,1416 \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60} \right) \right],$$

ou $\mathcal{E}_m = 0^{\text{k}},628$.

Dans la pratique, les dents se mettent en prise un pas avant la ligne des centres et se quittent un pas après, en sorte qu'il y a toujours deux couples de dents en prise. Il faut donc doubler le second membre de la relation [2] pour tenir compte du

frottement des deux couples de dents; mais en même temps il faut réduire N à moitié, puisque cette réaction se répartit sur les deux couples; il en résulte que la formule [2] reste la même, et on en peut dire autant de la formule [3].

Ces formules supposent l'engrenage extérieur. S'il était intérieur, et que, par exemple, la roue extérieure fût la roue conductrice, comme l'indique

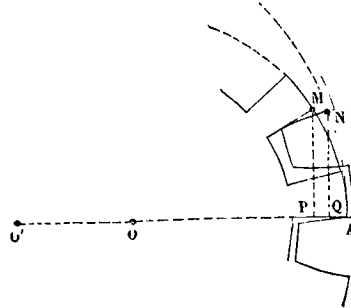


Fig. 3.

la figure 3, les points P et Q tomberaient d'un même côté du point A, et l'on aurait

$$PQ = AP - AQ = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

et par suite

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} f N a^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad [4]$$

ou

$$\mathcal{E}_f = f N \pi a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right), \quad [5]$$

puis enfin

$$\mathcal{E}_m = Na \left[1 + f \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \right]. \quad [6]$$

On voit que, toutes choses égales d'ailleurs, l'influence du frottement est beaucoup moindre pour un engrenage intérieur que pour un engrenage extérieur, puisque la somme $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$ est remplacée par la différence $\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}$.

Les formules [1] et [4] sont applicables aux engrenages coniques; mais les rayons r et r' doivent

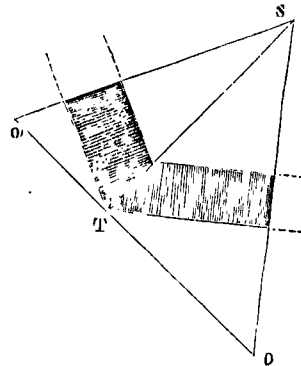


Fig. 4.

alors être remplacés par les rayons primitifs des secteurs circulaires qui servent de patrons pour tailler l'engrenage; c'est-à-dire que si SO et S'O' (fig. 4) sont les axes des deux roues d'angle, ST la

génératrice commune des cônes primitifs, on élèvera par le point T dans le plan OSO' la droite OO' perpendiculaire à ST; les lignes OT et O'T seront les génératrices des cônes supplémentaires, et en même temps les rayons primitifs des secteurs qui doivent servir de patrons aux roues dentées. Ce sont ces rayons OT et O'T qui devront remplacer r et r' (Voy. ENGRENAGES.)

L'engrenage d'une roue dentée avec une crémaillère peut être considéré comme un cas particulier des engrenages extérieurs. Si la roue dentée doit conduire la crémaillère, il faudra donc, dans la formule [1], supposer $r = \infty$ et écrire

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2} f N a^2. \frac{1}{r'}$$

Si au contraire la crémaillère doit conduire la roue dentée, on fera $r' = \infty$, et il restera

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2} f N a^2. \frac{1}{r}, \quad [7]$$

c'est-à-dire qu'on pourra se servir de la formule [7] dans les deux cas, pourvu que r représente le rayon primitif de la roue.

Enfin on peut étendre les mêmes formules aux cames quand leur saillie n'est pas considérable. Pour une came soulevant un marteau par exemple, on appliquera la formule [1], et pour une came soulevant le mentonnet d'un pilon on appliquera la formule [7]. (Voy. MARTEAUX.)

(Voy. le Cours de Mécanique de M. Poncelet à l'École d'application de Metz, et le Cours de Mécanique appliquée de M. Bélanger à l'École des ponts et chaussées, ou à l'École centrale des arts et manufactures.)

ENRAYURE, pan de charpente horizontal sur lequel s'appuie une coupe (Voy. ce mot). On donne le même nom à l'ensemble des pièces horizontales sur lesquelles s'appuie la charpente d'un comble conique ou sphérique. On lui donne aussi le nom de *plate-forme*.

ENREGISTREURS, appareils à indications continues, disposés pour donner la loi d'un mouvement, et par suite la loi de variation de tous les phénomènes qui peuvent être traduits par un déplacement quelconque. Ces appareils ont ouvert une nouvelle ère dans l'histoire des sciences fondées sur l'observation.

Le premier dispositif de ce genre qui ait fixé l'attention des savants, est l'appareil imaginé en 1808 par Eytelwein, célèbre ingénieur prussien, pour étudier la loi du mouvement de la soupape d'arrêt dans le BÉLIER HYDRAULIQUE (Voy. ce mot). Au boulet qui forme la soupape était fixée une tige verticale, à l'extrémité supérieure de laquelle était adapté un crayon. L'extrémité de ce crayon s'appuyait sur une bande de papier s'enroulant autour de deux cylindres à axe vertical. En donnant à l'un des cylindres un mouvement uniforme, on imprimait au papier un mouvement de même espèce. Il en résultait que, dans le mouvement de la soupape, le crayon traçait sur ce papier une courbe ondulée, et cette courbe donnait la loi du mouvement; car ses ordonnées, comptées à partir de l'horizontale passant par la position initiale du crayon, donnaient le déplacement de la soupape, et ses abscisses étaient proportionnelles au temps, puisque le mouvement de la bande de papier était uniforme.

On retrouve un dispositif de ce genre dans l'*In-*

dicateur de Watt, imaginé par ce célèbre mécanicien, antérieurement à l'appareil d'Eytelwein, pour observer la loi des pressions de la vapeur dans le cylindre des machines, mais perfectionné depuis par Mac-Naught.

L'APPAREIL DE M. MORIN (Voy. ce mot), imaginé par M. Poncelet pour étudier la loi du mouvement vertical des graves, est encore un instrument à indications continues, dans lequel un pinceau, adapté au mobile, trace sur un cylindre vertical animé d'une rotation uniforme une courbe qui exprime la loi du mouvement.

Dans les expériences de M. Morin sur le FROTTEMENT (Voy. ce mot), il a employé, d'après les indications de M. Poncelet, pour étudier le mouvement de la poulie sur laquelle s'enroulait la corde supportant le plateau chargé, un appareil qui ne diffère du précédent qu'en ce que le cylindre est remplacé par un plateau tournant. Un pinceau adapté à la poulie trace sur ce plateau, doué d'un mouvement uniforme, une courbe qui exprime la loi du mouvement observé (Voy. l'article cité).

En 1834, M. Poncelet a suggéré l'idée d'employer le plateau tournant à observer la loi du mouvement du boulet dans l'âme de la pièce.

Les mêmes procédés ont été appliqués par M. Morin dans ses APPAREILS DYNAMOMÉTRIQUES (Voy. ce mot).

On se sert aujourd'hui d'enregistreurs dans tous les observatoires. Mais dans plusieurs de ces appareils, les courbes, au lieu d'être tracées par un crayon ou un pinceau, sont obtenues par impression photographique.

Quelles que soient du reste les dispositions très-variables de ces appareils, le principe est toujours le même : inscrire les déplacements, rectilignes ou circulaires, d'un point dont le mouvement est lié au phénomène observé, sur une surface mobile elle-même, qui peut être une bande de papier, un plateau, un cylindre, un cône, etc., doués d'un mouvement uniforme.

La principale difficulté consiste précisément à obtenir ce mouvement uniforme. Les mécanismes d'horlogeris les plus parfaits ne produisent que des mouvements périodiques, dont la période, très-courte du reste, est un mouvement varié. Si donc la durée du phénomène à observer est elle-même très-courte, le mouvement de la bande de papier, du plateau ou du cylindre, peut n'être plus la mesure exacte du temps écoulé. Pour obtenir cette exacte mesure, il est nécessaire de subdiviser le temps en intervalles égaux très-petits; et c'est à quoi l'on parvient à l'aide d'un moyen dont la première indication se trouve dans un mémoire de M. Duhamel sur les vibrations des cordes (1840). Il consiste à enregistrer, en même temps que le mouvement que l'on étudie, le mouvement vibratoire d'un corps sonore. On sait que les petites vibrations des corps élastiques sont isochrones. Si donc on dispose une pointe à tracer de manière à participer aux vibrations de ce corps, elle tracera sur la bande de papier ou sur le cylindre mobiles, une ligne à ondulations serrées, dont les maxima et les minima pourront être séparés par des espaces égaux ou inégaux, suivant que le mouvement de la bande de papier ou du cylindre sera uniforme ou varié, mais qui correspondront toujours à des intervalles de

temps égaux, puisqu'ils répondent aux excursions extrêmes de la pointe à tracer dans une série d'oscillations de même durée. On aura donc ainsi tous les éléments nécessaires pour étudier la loi du mouvement observé. M. Duhamel employait les vibrations d'une corde normale; M. Wertheim, dans ses recherches sur l'élasticité (1843), a employé un diapason; et ce moyen s'est généralisé depuis, non-seulement parce que cet instrument est d'un maniement plus facile qu'une corde, mais parce qu'il répond à un nombre parfaitement déterminé de vibrations par seconde, nombre que l'on peut augmenter presque indéfiniment en prenant un diapason de plus en plus aigu.

ENROULEMENT, opération inverse du DÉVELOPPEMENT (Voy. ce mot). Si l'on conçoit qu'une surface développable ait été développée sur un plan, ses éléments successifs seront venus se placer à la suite les uns des autres sur ce plan. Enrouler le plan sur la surface ou sur une surface identique, c'est faire tourner les éléments développés, autour des génératrices successives qui les séparent, pour les amener à coïncider de nouveau avec ceux de la surface.

De même qu'une ligne tracée sur la surface se transforme par le développement en une autre ligne qui est plane, de même une ligne, nécessairement plane, tracée sur le développement, se transforme par l'enroulement en une autre ligne généralement courbe.

Dans l'enroulement d'un plan sur un cylindre de révolution, toute droite tracée sur ce plan se transforme en une hélice.

En général, une droite tracée sur le développement d'une surface développable, se transforme par l'enroulement en une LIGNE GÉODÉSIQUE (Voy. ce mot) de cette surface.

ENSOUPLES, cylindres sur lesquels s'enroule l'étoffe dans les métiers à tisser, ou qui portent la chaîne à mettre en œuvre.

ENTABLEMENT, partie supérieure des ordres d'architecture, celle qui est supportée par la colonne. Sa hauteur est le quart de la hauteur de la colonne. Il se compose de trois parties : la CORNICHE, la FRISE et l'ARCHITRAVE. (Voy. ces mots. Voyez aussi l'article ORDRES.)

ENTAILLE, mode d'assemblage des pièces de charpente qui consiste à entamer à mi-bois l'une des pièces, pour y former une saillie destinée à pénétrer dans une cavité égale pratiquée de la même manière dans l'autre pièce. Il y a plusieurs espèces d'entailles : l'entaille *rectangulaire*, l'entaille à *queue d'hironde*, etc. (Voy. ASSEMBLAGES.)

ENTRAIT, pièce de charpente horizontale qui, dans une ferme, soutient l'arbalétrier sans reposer sur le mur; l'entrait est soutenu par le poinçon, et il s'appuie sur le tirant par l'intermédiaire d'une jambe de force, à laquelle il est en outre relié par un *aiselier*. (Voy. FERMES.)

Quelquefois on assemble l'entrait avec les arbalétriers qui se prolongent alors jusqu'au tirant; on lui donne dans ce cas le nom de *faux-entrait*; et la ferme est dite à *entrait retroussé*.

ENTRE-COLONNEMENT, distance, d'axe en axe, entre deux colonnes consécutives d'une même colonnade. Cette distance varie d'un ordre à l'autre. (Voy. COLONNADE.)

Nom donné par extension à la colonnade elle-même.

ENTRE-PONT, espace compris, dans un navire, entre le premier pont et le faux pont.

ENTURE, assemblage de deux pièces de charpente bout à bout dans la même direction; le mot s'emploie particulièrement lorsque les pièces sont verticales. (Voy. ASSEMBLAGES.)

ENVELOPPES (MÉTHODE DES), l'une des méthodes employées pour le tracé des engrenages. Dans cette méthode, on choisit arbitrairement le profil de la dent de la roue conductrice, et l'on prend pour profil de la dent de la roue conduite l'enveloppe des positions que prend le premier de ces deux profils, quand on fait rouler la circonférence primitive de la roue conductrice sur celle de la roue conduite. (Voy. ENGRÉNAGES.)

ÉPACTE (du grec *ἑπᾶκτος*, ajouté), âge de la lune au 1^{er} janvier, ou nombre des jours écoulés depuis le jour de la nouvelle lune précédente. La durée d'une lunaison étant à peu près de $29\frac{1}{2}$, une année

de 365 jours ne contient que 12 lunaisons entières, représentant 354 jours, et il reste par conséquent 11 jours. Si le 1^{er} janvier a été un jour de nouvelle lune, il reste donc, après 12 lunaisons complètes, 11 jours pour finir l'année, c'est-à-dire qu'au 1^{er} janvier de l'année suivante il s'est écoulé 11 jours depuis la dernière nouvelle lune, ce qu'on exprime en disant que la lune est âgée de 11 jours. En général, connaissant l'âge de la lune au 1^{er} janvier d'une année, on aura l'âge de la lune au 1^{er} janvier de l'année suivante, en ajoutant 11 jours au premier de ces deux âges. Si l'on considère par conséquent un cycle lunaire entier, ou une période de 19 ans (Voy. CYCLE LUNAIRE), on pourra former le tableau suivant :

Rang de l'année dans le cycle.	Âge de la lune au 1 ^{er} janvier.
1.....	0
2.....	11
3.....	22
4.....	3
5.....	14
6.....	25
7.....	6
8.....	17
9.....	28
10.....	9
11.....	20
12.....	1
13.....	12
14.....	23
15.....	4
16.....	15
17.....	26
18.....	7
19.....	18

Dans ce tableau, on suppose que la lune est nouvelle le 1^{er} janvier de l'année qui commence le cycle, comme cela a eu lieu en effet pour l'année qui a précédé notre ère. Les nombres de la seconde colonne sont formés en ajoutant toujours 11 au nombre précédent, et en retranchant 30 toutes les fois que la somme dépasse ce nombre, ce qui arrive 6 fois. Pour la 20^e année, on aurait 18 + 11 ou 29, que l'on supprime afin d'avoir 0 pour l'âge de la

lune au 1^{er} janvier de l'année qui commence un nouveau cycle. — Ainsi la première colonne donne le NOMBRE D'OR (Voy. ce mot), et la seconde donne l'épacte.

L'épacte une fois connue, on obtient les dates des nouvelles lunes en retranchant d'abord l'épacte de 30, ce qui donne la date de la première nouvelle lune de l'année, et en ajoutant ensuite alternativement 30 jours et 29 jours, afin d'avoir égard à la durée de la lunaison qui n'est que de $29\frac{1}{2}$.

Pour avoir les dates des pleines lunes, on devrait ajouter 15 aux dates des nouvelles lunes, s'il s'agissait des nouvelles lunes astronomiques; mais, dans le calendrier ecclésiastique, pour lequel les épactes sont imaginées, il n'est question que des nouvelles lunes ecclésiastiques, qui suivent de 2 jours les conjonctions, et répondent à l'instant où la lune, dégagée des rayons du soleil, devient visible à l'entrée de la nuit, sous la forme d'un mince croissant. Pour avoir les dates des pleines lunes, il ne faut donc ajouter que 13 aux dates des nouvelles lunes ecclésiastiques.

Le calcul des épactes se trouve entaché de plusieurs erreurs qui tendent à se compenser, mais qui, en réalité, ne se compensent pas entièrement. En premier lieu, en formant le tableau des épactes, on a retranché 6 fois 30 jours et une fois 29 jours, en tout 209 jours; de telle sorte que le nombre des lunaisons en 19 ans n'est plus 235 comme il devrait être (Voy. CYCLE LUNAIRE), mais 235 moins 7 ou 228. [Les 7 lunaisons retranchées portent le nom d'*embolismiques*.] Ces 228 lunaisons ont été comptées à raison de $29\frac{1}{2}$ chacune, tandis qu'en réalité

leur valeur est $29,530588$; on a donc commis une erreur en moins de $0,030588 \times 228$, c'est-à-dire de $6,9740$. Mais on a commis une erreur en sens contraire en retranchant 209 jours pour 7 lunaisons qui ne valent que $29,530588 \times 7$ ou $206,7141$; cette erreur s'élève à $2,2858$. A cette dernière erreur, il faut en ajouter une autre qui résulte de ce qu'on a donné 365 jours à toutes les années indifféremment; on a négligé ainsi $0,242264 \times 19$, c'est-à-dire $4,6030$. Ajoutée à la précédente, $2,2858$, cette erreur donne un total de $6,8888$, presque égal à l'erreur de $6,9740$ faite en sens contraire. Néanmoins il y a une différence de $0,0852$, qui en s'accumulant produirait une erreur d'un jour au bout de 222 ans environ.

Pour la faire disparaître, l'Eglise, depuis la réforme grégorienne, diminue l'épacte d'une unité à chaque année séculaire non bissextile (Voy. CALENDRIER), c'est-à-dire 3 fois en 400 ans. Cette correction porte le nom de *métemptose* (recul). Par contre, tous les 300 ans (en 1500, 1800, 2100...), elle augmente l'épacte d'une unité; cette seconde correction s'appelle *proemptose* (avance). Il résulte de ces conventions qu'en 1200 ans l'épacte a été diminuée de 3 fois 3 ou 9 unités, et augmentée de 4 unités, d'où il suit qu'elle a été, en définitive, diminuée de 5 unités. Ces 5 jours en 1200 ans donnent pour 19 ans une fraction de jour à peu près égale à $0,08$; en sorte que l'erreur signalée plus haut se trouve à très-peu près corrigée. La différence qui subsiste ne donnerait un jour d'erreur qu'au bout de plus de 3600 ans.

Dans le CALENDRIER PERPETUEL (Voy. ce mot), les épactes sont inscrites en chiffres romains, en rétrogradant, depuis le 1^{er} jour de l'année qui porte le chiffre XXIX. On en verra la raison à l'article indiqué.

ÉPARGNE (CAISSE D'). Voy. CAISSE D'ÉPARGNE.

ÉPAULEMENT, partie de support d'un treuil contre laquelle son extrémité vient buter lorsque, sollicité par un effort oblique à l'axe, il prend un mouvement de translation suivant cet axe.

On donne aussi le nom d'ÉPAULEMENT à une sorte de mur en terre, ou en fascines, élevé à la hâte, et qui sert à couvrir des canons ou une troupe armée.

ÉPERON, construction saillante, en bois avec armatures en fer, que l'on place en amont des piles de ponts pour rompre le fil de l'eau et garantir le pont du choc des glaces, ou des débris divers que le fleuve pourrait charrier. (Voy. PONTS.)

On nomme aussi *éperon* la charpente saillante placée à la proue des grands navires. — Les vaisseaux cuirassés sont généralement armés d'un éperon en fer destiné à percer les navires ennemis.

Enfin, on nomme aussi *éperon* un angle saillant élevé comme défense devant une porte ou au milieu d'une courtine. (Voy. FORTIFICATION.)

ÉPICYCLE, cercle mobile qui roule sur la circonférence d'un autre cercle, soit extérieurement, soit intérieurement. (Voy. ÉPICYCLOÏDE.)

Les anciens astronomes appliquaient ce mot à une orbite circulaire dont le centre était supposé se mouvoir sur un autre cercle. (Voy. PLANÈTES.)

ÉPICYCLOÏDE (du grec *ἐπί*, sur, et *κύκλος*, cercle), courbe décrite par un point déterminé d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle fixe.

I. Soit O (fig. 1) le cercle fixe de rayon R, et C

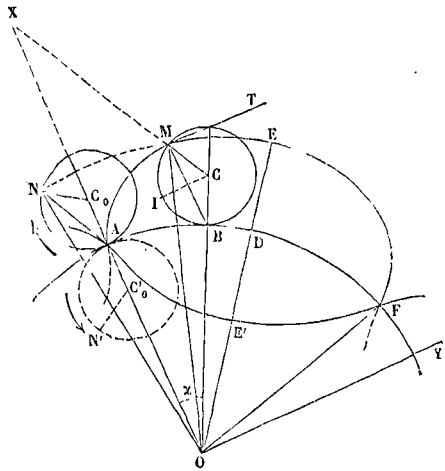


Fig. 1.

le cercle mobile de rayon r dans sa position initiale. Soit C la position de ce second cercle lorsqu'il a roulé d'un arc AB. Le point qui était primitivement en A sera venu prendre une position M telle, que les arcs MB et AB soient égaux; c'est la condition du roulement sans glissement. Le point M sera un point de l'épicycloïde. Comme, d'après son mode de génération, cette courbe appartient à la famille des ROULETTES (Voy. ce mot), elle jouit de la propriété

fondamentale des courbes de cette famille, et par conséquent la normale à l'épicycloïde au point M passera par le point de contact correspondant B du cercle mobile avec le cercle fixe. Il en résulte que la tangente MT au point M sera la perpendiculaire à la corde MB.

Cette propriété se démontre directement par l'analyse. Prenons pour axe des x la droite OC_0 , et pour axe des y une perpendiculaire élevée au point O. Désignons par α l'angle C_0OC ; l'angle MCB aura pour valeur $\alpha \cdot \frac{R}{r}$, puisque ces deux angles sont mesurés par des arcs égaux dans des circonférences dont les rayons sont $OA = R$ et $CM = r$. Si l'on prolonge MC jusqu'à la rencontre de l'axe des x , l'angle en X, dans le triangle OCX , aura donc pour valeur $180^\circ - \alpha - \alpha \cdot \frac{R}{r}$ ou $180^\circ - \alpha \cdot \frac{R+r}{r}$. Cela posé, l'abscisse du point M sera la projection de la ligne brisée OCM sur l'axe des x , et son ordonnée sera la projection de la même ligne brisée sur l'axe des y ; on aura donc

$$x = (R+r) \cos \alpha - r \cos \frac{R+r}{r} \alpha$$

$$\text{et } y = (R+r) \sin \alpha - r \sin \frac{R+r}{r} \alpha. \quad [1]$$

Ces équations représentent l'épicycloïde et permettraient de construire la courbe par points. On en tire

$$dx = -(R+r) \sin \alpha \cdot d\alpha + (R+r) \sin \frac{R+r}{r} \alpha \cdot d\alpha,$$

$$dy = +(R+r) \cos \alpha \cdot d\alpha - (R+r) \cos \frac{R+r}{r} \alpha \cdot d\alpha,$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \alpha - \cos \frac{R+r}{r} \alpha}{\sin \frac{R+r}{r} \alpha - \sin \alpha} = \text{tang} \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r} \alpha \right). \quad [2]$$

Cette relation démontre que la tangente en M à l'épicycloïde est parallèle à la bissectrice CI de l'angle OCM; car, si l'on prolongeait cette bissectrice jusqu'à l'axe des x , on verrait que l'angle qu'elle fait avec la partie positive de cet axe est égal à $COX + \frac{1}{2} OCM$, c'est-à-dire à $\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r} \alpha$.

Il en résulte que la normale en M est perpendiculaire à cette même bissectrice, et que par conséquent elle passe par le point B.

II. Ces considérations permettent de tracer l'épicycloïde par points, sans être obligé de tracer le cercle générateur dans ses positions successives. En effet, du point O comme centre, décrivons l'arc MN terminé à la circonférence du cercle C_0 . Joignons NC_0 , NA et NO; joignons aussi MC et MO. Si nous considérons les deux triangles NC_0O et MCO, nous verrons qu'ils sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; il en résulte que l'angle NC_0O est égal à l'angle MCO; que par suite l'arc NA est égal à l'arc MB, et par conséquent aussi à l'arc AB; et enfin que les cordes NA et MB sont égales. Pour obtenir le point M, on peut donc procéder de la manière suivante. On prendra sur le cercle C_0 un arc AN quelconque, et l'on prendra sur le cercle fixe un arc AB égal à AN en développement; puis on décrira deux arcs de cercle: l'un du point O comme centre avec ON pour rayon, l'autre

du point B comme centre avec un rayon égal à la corde AN; ces deux arcs se couperont en un point M qui sera un point de l'épicycloïde. En joignant NB et menant MT perpendiculaire, on aura la tangente au point M. — L'opération qui consiste à prendre l'arc AB égal à l'arc AN exige un calcul; pour ne pas avoir à le répéter pour chaque point, on opère comme il suit. Puisque r est le rayon du cercle mobile, sa circonférence est exprimée par $2\pi r$; R étant le rayon du cercle fixe, soit ω l'angle au centre AOF qui répond sur ce cercle à un arc AF égal à $2\pi r$; on aura $\omega : 2\pi = 2\pi r : 2\pi R$; d'où $\omega = 2\pi \cdot \frac{r}{R}$. Ayant évalué ω , on fera en O un angle

AOT égal à ω . On divisera l'arc AF en un nombre de parties égales représenté par une puissance de 2, soit 16 par exemple, et l'on numérotera les points de division de A vers F. On divisera ensuite le cercle C_0 dans le même nombre de parties égales, et l'on numérotera les points de division à partir de A dans le sens de la flèche. Si l'on prend alors sur le cercle C_0 et sur AF deux points de division marqués du même chiffre, et que l'on opère pour ces deux points comme on a opéré ci-dessus pour les points N et B, on obtiendra un point de l'épicycloïde et en même temps la tangente en ce point; ce qui permettra de tracer la courbe. On abrégera l'opération en remarquant que cette courbe est symétrique par rapport à la bissectrice OE de l'angle AOF.

III. L'épicycloïde se compose d'une série de courbes égales à AEF. Cette série est limitée si AF est commensurable avec la circonférence du cercle fixe, c'est-à-dire si $2\pi r$ est commensurable avec $2\pi R$, ou r avec R; dans ce cas, l'ensemble forme une courbe fermée. La série est indéfinie si r et R sont incommensurables; la courbe ne revient jamais au point A, et ne se ferme jamais.

IV. Au lieu de faire rouler le cercle mobile extérieurement au cercle fixe, on pourrait le faire rouler intérieurement; les raisonnements et les constructions restent les mêmes. On obtient dans ce cas une courbe telle que AEF', qui se répète un nombre limité ou illimité de fois, suivant que r est ou n'est pas commensurable avec R. On donne à l'épicycloïde le nom d'*extérieure* ou d'*intérieure*, selon que le cercle mobile qui l'engendre roule extérieurement ou intérieurement au cercle fixe. Suivant le rapport qu'on adopte pour les rayons r et R, on peut obtenir ainsi un très-grand nombre de courbes variées. Les équations de l'épicycloïde intérieure ne diffèrent des équations [1] qu'en ce que $R+r$ est remplacé par $R-r$.

V. Il y a un cas remarquable où l'épicycloïde intérieure se réduit à une ligne droite: c'est celui où le rayon r du cercle mobile est la moitié du rayon R du cercle fixe. Soient, en effet (fig. 2), C_0 et C la position initiale et une position quelconque du cercle mobile. Le cercle C coupe en un point M le diamètre AO du cercle C_0 . Joignons MC. Dans le cercle fixe, l'arc AB mesure l'angle AOB. Dans le cercle mobile, l'arc MB mesure l'angle MCB. Mais ce dernier, qui est un angle au centre, est le double de l'angle MOB qui est un angle inscrit s'appuyant aux extrémités du même arc. Ainsi, l'arc MB mesure un angle double dans un cercle de rayon moitié moindre; il en résulte que les arcs MB et AB sont égaux. Par conséquent le point M est la position qu'a prise le

point primitivement en A; il appartient à l'épicycloïde. Et comme d'ailleurs il est sur le rayon AO, il s'ensuit que, dans ce cas, l'épicycloïde se réduit à ce rayon, ou plutôt au diamètre AA' du cercle

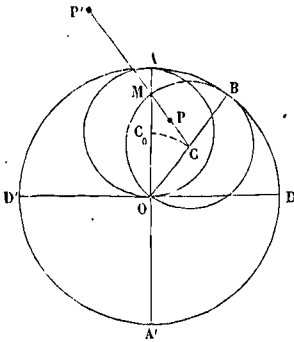


Fig. 2.

générateur. En sorte que si le cercle mobile continue à rouler indéfiniment dans l'intérieur du cercle fixe, le point décrivant prend un mouvement de va-et-vient indéfini, suivant le diamètre AA'; de A en A', puis de A' en A; et ainsi de suite indéfiniment. Cette propriété a été utilisée dans le dix-septième siècle par Lahire, pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. (Voy. ENGRENAGE DE LAHIRE, TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS.)

L'épicycloïde joue un rôle important dans le tracé des ENGRENAGES (Voy. ce mot).

VI. Si, au lieu de prendre pour point décrivant un point de la circonférence mobile, on prend un point plus éloigné du centre, on obtient une courbe bouclée, comme A'E'F' (fig. 3), à laquelle on donne le

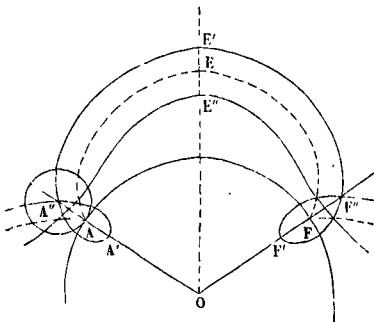


Fig. 3.

nom d'épicycloïde allongée. Si au contraire on prend un point plus rapproché du centre, on obtient une courbe à inflexions, telle que A''E''F'', à laquelle on donne le nom d'épicycloïde raccourcie. Ces courbes sont, comme l'épicycloïde elle-même, composées d'un nombre fini ou infini de courbes distinctes, suivant que r est ou n'est pas commensurable avec R . — Les mêmes variétés existent pour les courbes obtenues en faisant rouler le cercle mobile intérieurement au cercle fixe.

L'épicycloïde allongée ou raccourcie peut être représentée par des équations analogues à celles qui

représentent l'épicycloïde simple. Si l'on appelle d la distance du point décrivant au centre du cercle mobile, on trouvera, en opérant comme plus haut :

$$\begin{aligned} x &= (R+r) \cos \alpha - d \cos \frac{R+r}{r} \alpha, \\ y &= (R+r) \sin \alpha - d \sin \frac{R+r}{r} \alpha. \end{aligned} \quad [3]$$

VII. Les courbes épicycloïdales peuvent être tracées d'un mouvement continu à l'aide de mécanismes fort simples. M. Saladin, en France, et M. Périgal, en Angleterre, se sont beaucoup occupés de ce sujet, qui peut trouver son application dans les arts et particulièrement dans le guillochage. Concevons d'abord une roue fixe F (fig. 4) de rayon R, engre-

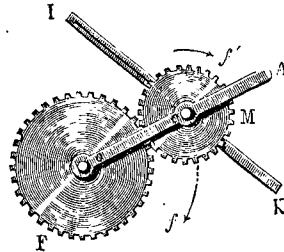


Fig. 4.

nant avec une roue mobile M de rayon r . L'axe de cette dernière est porté par un bras OA mobile autour de l'axe de la roue F; et à la roue mobile est adaptée, de l'autre côté, une barre IK, dans laquelle est pratiquée une rainure où l'on peut faire glisser un crayon ou un pinceau, dont on fixe la position, à l'aide d'une vis de pression. Si l'on fait mouvoir le bras OA autour de l'axe O, dans le sens de la flèche f , la roue M, engrenant avec la roue fixe, tourne autour de son axe dans le sens de la flèche f' ; et le point I décrit une épicycloïde extérieure, qui sera allongée, simple, ou raccourcie, suivant que la distance CI sera supérieure, égale, ou inférieure au rayon r de la roue mobile. Le nombre des dents de chaque roue étant nécessairement entier, les rayons primitifs de l'engrenage sont toujours commensurables, et l'épicycloïde décrite est toujours une courbe fermée. Soit N le nombre des dents de la roue fixe, et n celui des dents de la roue mobile; si l'on prend

le rapport $\frac{N}{n}$ et qu'on le réduise à sa plus simple expression, le numérateur exprimera toujours le nombre des points de rebroussement de l'épicycloïde simple, et le dénominateur indiquera le nombre de tours nécessaire pour tracer la courbe dans son entier. Si, par exemple, ce rapport est $\frac{3}{2}$, l'épi-

cycloïde simple aura trois points de rebroussement, et il faudra 2 tours pour tracer toute la courbe. Si le rapport est $\frac{3}{5}$, l'épicycloïde simple aura encore 3 points de rebroussement, mais il faudra 5 tours pour tracer la courbe entière. Si le rapport est un nombre entier, 7 par exemple, l'épicycloïde aura 7 points de rebroussement, et il ne faudra qu'un tour pour tracer toute la courbe; et ainsi de suite.

VIII. Au lieu de faire rouler la roue M extérieurement à une roue fixe F, on pourrait la faire rouler intérieurement, et l'on obtiendrait des épicycloïdes

intérieures, allongées, simples ou raccourcies, suivant la grandeur de la distance CL .

Mais on peut obtenir le même résultat d'une autre manière, sans recourir à un engrenage intérieur qui est toujours incommode. Il suffit d'interposer une roue auxiliaire entre les roues F et M de la figure 4. Soit B (fig. 5) cette roue intermédiaire. Si

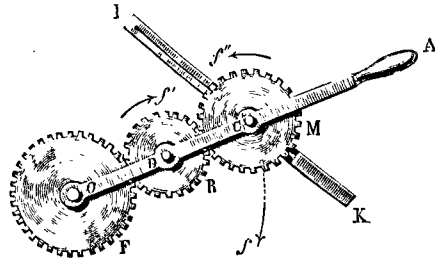


Fig. 5.

l'on fait mouvoir le bras OA dans le sens de la flèche f , la roue B ayant son axe D fixé à ce bras, et engrenant avec la roue fixe, tournera dans le sens de la flèche f' , et la roue M , qui engrène avec B , tournera dans le sens de la flèche f'' . Il est aisé de faire voir que les choses se passeront comme si le point I était lié à une roue mobile ayant le même centre C , mais qui roulerait intérieurement à une roue fixe. Remarquons, en effet, que si N est le nombre des dents de la roue F , n celui des dents de la roue M , ω la vitesse angulaire du bras OA , ω' celle de la roue M autour de son axe, on a, d'après la liaison établie entre les roues F et M (Voy. ROUAGES) :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N}{n}, \quad [1]$$

relation indépendante du nombre des dents de la roue intermédiaire. Cela posé, concevons que la roue M soit remplacée par une roue M' ayant le même axe, et un rayon r , assujettie à rouler dans l'intérieur d'une roue fixe F' , ayant l'axe O et un rayon R . D'après la liaison des roues M' et F' , on aurait, en appelant ω'' la vitesse angulaire de la roue M' autour de l'axe C ,

$$\frac{\omega''}{\omega} = \frac{R}{r}. \quad [2]$$

Si l'on veut que ω'' soit égal à ω' , il suffit de poser

$$\frac{R}{r} = \frac{N}{n}. \quad [3]$$

On doit avoir de plus

$$R - r = OC = d, \quad [4]$$

en désignant par d la distance des axes O et C . Des relations [3] et [4] on tire

$$R = d \cdot \frac{N}{N-n}, \quad \text{et} \quad r = d \cdot \frac{n}{N-n}. \quad [5]$$

Le mouvement du point décrivant I sera donc le même que si ce point était lié à une roue M' , ayant son axe en C sur la barre OA , et qui roulerait dans une roue fixe F' ayant son axe en O , les rayons de ces deux roues ayant les valeurs indiquées par les relations [5]. L'épicycloïde engendrée sera allongée, simple ou raccourcie, suivant que la distance IC sera supérieure, égale ou inférieure au rayon r de la roue M' .

Le dispositif que nous venons de décrire est celui de la plume géométrique de Suardi. (Voy. le *Traité*

de la composition des machines de Lantz et Bétancourt.)

IX. Au lieu d'interposer une simple roue intermédiaire entre la roue fixe F et la roue mobile M (fig. 6), on peut interposer un pignon P et une roue

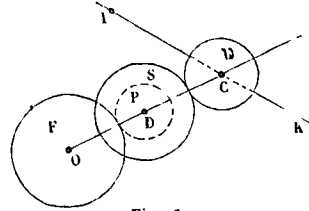


Fig. 6.

solidaire S , le pignon engrenant avec la roue fixe F , et la roue S avec la roue mobile M , comme l'indique la figure 6. — Les résultats sont de même nature, mais le rapport des vitesses angulaires ω et ω' prend une valeur différente, et il en résulte d'autres valeurs pour les rayons R et r des roues fictives F' et M' . Si N' est le nombre des dents de la roue S , et n' celui des dents du pignon P , on a dans ce cas

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N \cdot N'}{n \cdot n'}.$$

Par suite, il faut poser

$$\frac{R}{r} = \frac{N \cdot N'}{n \cdot n'} \quad [6]$$

avec $R - r = d$; d'où l'on tire

$$R = d \cdot \frac{N \cdot N'}{N \cdot N' - nn'} \quad \text{et} \quad r = d \cdot \frac{n \cdot n'}{N \cdot N' - nn'}. \quad [7]$$

En disposant des quatre nombres N, N', n, n' , on peut obtenir une grande variété de courbes épicycloïdales. Si l'on réduit le rapport [6] à son expression la plus simple, le numérateur exprimera toujours, comme plus haut, le nombre des points de rebroussement de l'épicycloïde, et le dénominateur le nombre de tours nécessaire pour obtenir la courbe entière. Si, par exemple, on a $N = 24$, $N' = 20$, $n' = 8$ et $n = 16$, la fraction $\frac{NN'}{nn'}$, réduite

à sa plus simple expression, sera $\frac{15}{4}$; dans ce cas,

l'épicycloïde aurait 15 points de rebroussement, et il faudrait 4 tours du bras OA pour obtenir la courbe entière.

X. Dans ce dispositif, on pourrait faire la roue M plus grande que la roue F ; on pourrait aussi remplacer le roulement à l'extérieur d'une roue fixe par le roulement à l'intérieur, et l'on obtiendrait de nouvelles combinaisons.

On trouve dans le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye un grand nombre d'exemples de courbes épicycloïdales obtenues mécaniquement par les moyens dont il vient d'être parlé. Nous nous bornons aux cinq suivants :

La figure 7 est une épicycloïde extérieure simple, ayant 5 points de rebroussement, et obtenue en 2 tours du bras mobile. La figure 8 est une épicycloïde intérieure simple, obtenue dans les mêmes conditions. La figure 9 est une épicycloïde intérieure raccourcie, obtenue avec le même mécanisme que la précédente, en rapprochant le point décrivant du centre de la roue mobile. La figure 10 est une épicycloïde intérieure allongée, répondant à une

épicycloïde simple ayant 3 points de rebroussement, obtenue en un seul tour du bras mobile. Enfin, la figure 11 est une épicycloïde extérieure allongée, obtenue dans les mêmes conditions que la figure 7,

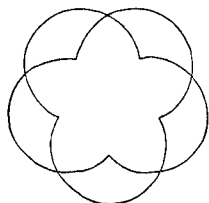


Fig. 7.



Fig. 8.

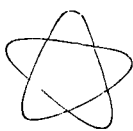


Fig. 9.

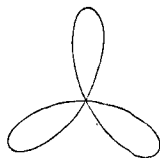


Fig. 10.

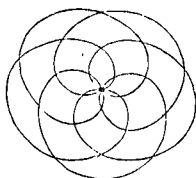


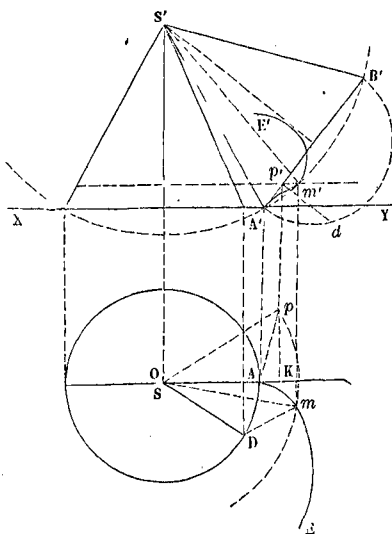
Fig. 11.

mais en éloignant le point décrivant du centre de la roue mobile. Nous renverrons à l'ouvrage cité pour les types variés auxquels on est conduit par les combinaisons mécaniques décrites plus haut.

XI. On a vu plus haut que l'épicycloïde intérieure simple peut devenir une ligne droite; cela a lieu lorsque le cercle mobile a un diamètre égal au rayon du cercle fixe dans lequel il roule. Il reste à faire voir que, dans ce cas, l'épicycloïde allongée ou raccourcie devient une ellipse. En effet, ce qui a été dit du point A (fig. 2) pourrait se dire de tout autre point de la circonférence mobile; ainsi, tout point de cette circonférence décrit un diamètre du cercle fixe. Le point O, considéré comme appartenant au cercle mobile, décrit donc aussi un diamètre de la circonférence fixe. Or, pour que le point O vienne se placer sur cette circonférence, il faut que le cercle mobile ait roulé d'une demi-circonférence, laquelle équivaut à un quadrant du cercle fixe. Le point O viendra donc se placer à une distance du point A égale à un quadrant AD. Ainsi ce point O décrit un diamètre DD' perpendiculaire à AA'; et le diamètre AO du cercle mobile se meut comme une droite assujettie à s'appuyer par ses extrémités sur deux axes rectangulaires AA' et DD'. Mais on sait qu'en pareil cas un point quelconque P ou P', pris sur la droite mobile ou sur son prolongement, décrit une ellipse. Donc un point quelconque lié au cercle mobile décrira une ellipse. S'il est intérieur au cercle mobile, comme le point P,

la somme des demi-axes de l'ellipse décrite est égale au diamètre AO. Si le point est extérieur comme le point P', c'est la différence entre les demi-axes de l'ellipse qui est égale à OA. L'ellipse deviendrait un cercle si le point décrivant était le point C. (Voy. TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX.)

ÉPICYCLOÏDE SPHÉRIQUE, courbe engendrée par un point de la surface d'un cône de révolution qui roule sans glissement sur un autre cône de révolution ayant le même sommet. Dans ce mouvement, le point qui décrit la courbe reste à une distance constante du sommet commun des deux cônes, d'où il suit que la courbe décrite est tracée sur une sphère. Si l'on prend le point décrivant sur la génératrice de contact des deux cônes dans leur position primitive, on voit que la sphère dont nous parlons contient le parallèle de chaque cône qui passe par la position initiale du point décrivant; et que par conséquent la courbe dont il s'agit peut être regardée comme engendrée par un point d'un petit cercle de cette sphère, qui roule sur un autre petit cercle de la même sphère, et qu'elle est par conséquent analogue à l'épicycloïde décrite d'une manière semblable sur un plan. De là le nom d'*épicycloïde sphérique*. Cette courbe joue un rôle important dans la théorie géométrique des engrenages. Voici les moyens de se procurer ses projections. Pour fixer les idées, nous supposons que le cône immobile a un axe vertical. Nous prendrons le point décrivant sur la génératrice de contact des deux cônes dans leur position primitive. Nous ferons passer le plan horizontal par ce point, et nous prendrons le plan vertical parallèle au méridien dans lequel se fait le contact initial. Soit donc XY



la ligne de terre, S, S' le sommet du cône fixe, SA ou OA le rayon de sa base parallèle à XY. Le point A, A' sera la position initiale du point décrivant. Le cône mobile sera défini par la projection A'S'B' de sa section méridienne parallèle au plan vertical; on pourrait en déduire la projection horizontale de la base; mais cela n'est pas nécessaire.

Cela posé, concevons que le cône mobile ayant

roulé d'une certaine quantité, soit venu toucher le cône fixe suivant la génératrice dont la projection horizontale est SD; il s'agit de trouver les projections de la position actuellement occupée par le point A, A', considéré comme appartenant au cône mobile. Pour cela, faisons d'abord tourner tout le système autour de l'axe SO, S'O' du cône fixe, jusqu'à ce que la génératrice de contact soit venue se placer parallèlement au plan vertical. Dans cette situation, la section méridienne du cône mobile qui contient cette génératrice se projettera verticalement suivant A'S'B': et le point décrivant, appartenant à la base du cône mobile, se projettera verticalement sur A'B'. On obtiendra les projections de ce point en remarquant que, par suite du roulement, il se trouve actuellement à une distance du point A, A', qui, mesurée sur la circonférence de la base du cône mobile, est précisément égale à l'arc AD. Si donc on rabat cette circonférence sur le plan vertical SA, en la faisant tourner autour du diamètre situé dans ce plan, ce qui, en projection verticale, donnera la demi-circonférence A'dB'; et que, sur cette demi-circonférence, on prenne, à partir du point A', un arc A'd égal en longueur à l'arc AD, on aura en d la projection verticale du point décrivant rabattu. Pour le relever, on abaissera donc sur A'B' la perpendiculaire dp', et le point p' sera la projection verticale du point décrivant. On obtiendra la projection horizontale correspondante en menant p'K perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de OA prolongé, et en prenant sur cette perpendiculaire une longueur Kp égale à dp'. Cela fait, il restera à ramener le système dans sa position véritable, en le faisant tourner de nouveau autour de l'axe du cône fixe. Dans ce mouvement, le point décrivant restera à la même hauteur au-dessus du plan horizontal; sa projection verticale se trouvera donc sur la droite p'n' parallèle à la ligne de terre. Pour avoir la projection horizontale, on remarquera que les trois points O, A, p conserveront leurs distances mutuelles, pendant que OA viendra reprendre la position OD; on décrira donc, du point O comme centre, un arc de cercle passant par le point p; puis, du point D comme centre, avec la distance Ap pour rayon, on décrira un second arc de cercle, qui coupera le premier en un point m qui sera la projection horizontale définitive du point cherché. En élevant par ce point une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de n'p', on aura en m' la projection verticale correspondante.

Si l'on voulait avoir la tangente en m, m' à l'épicycloïde sphérique, on remarquerait que l'axe instantané (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ) de rotation du cône mobile étant la génératrice de contact, l'élément d'épicycloïde est un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à cette génératrice; la tangente cherchée est donc contenue dans le plan mené par m, m', perpendiculairement à la génératrice de contact SD, S'D'. Mais l'épicycloïde étant tracée sur une sphère dont le centre est S, S', la tangente cherchée est dans le plan tangent à la sphère, c'est-à-dire dans le plan mené par m, m' perpendiculairement à la droite qui joint ce point au sommet S, S'. L'intersection de ces deux plans serait donc la tangente demandée. On n'a pas indiqué sur l'épure ces constructions, d'ailleurs très-simples.

On obtiendrait, comme il vient d'être dit, autant de points que l'on voudrait de l'épicycloïde sphérique. Ses projections sont représentées sur la figure en AmE et A'm'E'. La première est tangente en A à la droite OA; la seconde est tangente en A' à la droite A'D'.

Dans le tracé rigoureux des engrenages coniques, on aurait à considérer la surface conique ayant pour sommet le point S, S', et pour directrice l'épicycloïde sphérique. Les projections de la génératrice de cette surface qui passe au point m, m' seraient donc les droites Sm et S'm'. On construirait aisément son intersection avec les surfaces qui terminent latéralement la roue. Mais cette construction est remplacée dans la pratique par le procédé approximatif de Tredgold.

ÉPONTILLES, colonnes en bois ou en fer qui relient les ponts d'un navire, et qui sont placées dans le LONGITUDINAL et dans des plans parallèles. (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE.)

EPOQUE. On donne particulièrement ce nom, dans l'étude des planètes, à l'époque qui a été choisie pour origine du temps. Pour les planètes principales, l'époque choisie est aujourd'hui le 1^{er} janvier 1850. Mais on adopte une époque particulière pour chacune des planètes télescopiques. (Voy. PLANÈTES, ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT PLANÉTAIRE.)

ÉPROUVETTE. Voy. MORTIER-ÉPROUVETTE.

ÉPURE, dessin au trait qu'on emploie dans les grands travaux de maçonnerie, de serrurerie ou de charpente, ainsi que dans la construction des grandes machines, pour guider le travail des ouvriers. Ce dessin s'exécute d'ordinaire sur une surface de grandes dimensions, sur un plancher, sur un mur vertical recouvert d'un enduit, ou sur une aire spéciale pavée en briques ou dressée au ciment. Les instruments dont on fait usage pour effectuer le tracé sont la règle de 1 mètre ou de 2 mètres, la tabarre en sapin, de 5 à 6 mètres de long, le cordeau, de 25 à 30 mètres, l'équerre, le compas simple, le compas à verge de grandes dimensions. Le cordeau remplace le tire-ligne pour le tracé des lignes droites; en même temps, il sert à tracer les circonférences de grand rayon (Voy. CORDEAU). On évite, autant qu'il est possible, l'emploi des cercles dont le rayon dépasserait 10 mètres.

C'est par analogie que l'on donne aussi le nom d'épure à un dessin au trait, mis au net, et exécuté sur le papier, à une échelle de réduction convenue. On distingue quelquefois ce genre de dessin par le nom d'épure de cabinet. Il s'exécute à l'aide des instruments de dessin ordinaires: double décimètre, règles, té, compas à balustre, compas ordinaire, compas à verge, équerres à main, rapporteur, etc.

On convient d'ordinaire, dans l'exécution des épures, de tracer en lignes pleines les données visibles, en points ronds les parties cachées de ces données, en lignes pleines plus grosses ou en points ronds plus gros les résultats de l'opération, suivant qu'ils sont visibles ou cachés, enfin en points longs les lignes de construction. On emploie souvent aussi pour les lignes auxiliaires des points ronds et des points longs alternant. On marque de même par des points ronds et des points longs diversement combinés toutes les lignes importantes que l'on a à considérer dans le cours de la construction, et sur lesquelles on veut appeler d'une manière particulière l'attention du lecteur.

ÉQUARRISSEMENT, l'une des méthodes employées dans la COUPE DES PIERRES (*Voy.* ce mot) pour donner au bloc la forme qu'il doit avoir. Elle consiste dans une série de transformations à faire subir à la pierre pour l'amener à la forme définitive. Cette méthode est la plus exacte, mais elle occasionne souvent un plus grand déchet de matériaux, et devient, à cause de cela, plus coûteuse.

ÉQUATEUR, grand cercle de la sphère céleste, dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde. Il divise la sphère céleste en deux hémisphères, auxquels on donne les noms d'*hémisphère boréal* et d'*hémisphère austral*.

L'intersection du plan de l'équateur céleste avec la surface du globe forme l'*équateur terrestre*, qui divise la surface de la terre en deux hémisphères, auxquels on donne les mêmes noms qu'aux hémisphères correspondants de la sphère céleste.

ÉQUATION ANNUELLE, inégalité du mouvement lunaire, découverte par Képler, d'après les observations de Tycho-Brahé. Elle a pour expression

$$(0^{\circ}11'16'') \sin m,$$

m désigne l'anomalie moyenne du soleil. Elle dépend de la distance de la terre au soleil, et par conséquent de la position de la terre sur son orbite, d'où le nom d'*équation annuelle*.

ÉQUATION DES HAUTEURS CORRESPONDANTES, correction que l'on a à faire lorsqu'on détermine l'heure par la méthode des *hauteurs correspondantes*, et que l'astre observé est le soleil. [*Voy.* HEURE (*Détermination de l'*).]

ÉQUATION DU CENTRE, différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne (*Voy.* ANOMALIE). On a à considérer l'équation du centre lorsqu'on étudie le mouvement des planètes, le mouvement apparent du soleil, ou le mouvement réel de la terre, celui de la lune dans son orbite, etc.

Connaissant l'équation du centre et la longitude moyenne du soleil, il est facile d'en déduire sa longitude vraie; car si l'on nomme *E*, *M* et *L* ces trois quantités, et *II* la longitude du périhélie, on a évidemment

$$L = II + v \quad \text{et} \quad M = II + m,$$

v représentant l'anomalie vraie et *m* l'anomalie moyenne, on en déduit

$$L - M = v - m = E.$$

On opérerait de la même manière pour la lune. Un calcul analogue serait applicable à la longitude héliocentrique (*Voy.* ce mot) d'une planète.

Pour la lune, l'équation du centre, découverte par Hipparque, est exprimée par la formule

$$(6^{\circ}16'24''8) \sin m',$$

dans laquelle *m'* représente l'anomalie moyenne de la lune.

ÉQUATION DU TEMPS, différence entre l'heure moyenne et l'heure vraie, ou nombre de minutes et secondes qu'il faut ajouter à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne; c'est une quantité additive quand le temps vrai est en retard sur le temps moyen; elle est soustractive au contraire quand le temps vrai avance sur le temps moyen. La *Connaissance des temps* donne, pour tous les jours de l'année, le *temps moyen à midi vrai*, c'est-à-dire le nombre de minutes et secondes comprises entre le midi vrai et le midi moyen; mais pour éviter les quantités négatives, quand le midi moyen précède le midi vrai, on remplace le temps moyen par son

complément à 12 heures. Le temps moyen à midi vrai est l'*équation du temps à midi vrai*. Si on veut l'avoir pour une autre heure, on interpole en supposant que, dans l'espace de 24 heures, l'équation du temps est proportionnelle au temps.

Voici l'équation du temps à midi vrai pour le 1^{er} et le 16 de chaque mois de l'année 1862; les valeurs négatives sont remplacées par le complément à 12 heures

Date.	Équation du temps.	Date.	Équation du temps.	Date.	Équation du t. mps.
	h m s		h m s		h m s
1 ^{er} janv.	0 3 51,74	1 ^{er} mai	11 56 58,39	1 ^{er} sept.	11 59 54,83
16 —	0 10 4 39	16 —	11 56 7,05	16 —	11 54 49,79
1 ^{er} fév.	0 13 53,34	1 ^{er} juin	11 57 29,53	1 ^{er} oct.	11 49 42,99
16 —	0 14 20,8	16 —	0 47,63	16 —	11 45 39,48
1 ^{er} mars	0 12 34,95	1 ^{er} juill.	0 3 28,18	1 ^{er} nov.	11 43 44,21
16 —	0 8 49,50	16 —	0 5 42,70	16 —	11 44 56,48
1 ^{er} avril	0 3 58,15	1 ^{er} août	0 6 3,84	1 ^{er} déc.	11 49 14,49
16 —	11 59 47,37	16 —	0 4 5,16	16 —	11 55 51,09

La table insérée dans la *Connaissance des temps* donne les différences entre les valeurs de l'équation du temps jour par jour, ce qui facilite l'interpolation. Pour en donner un exemple, supposons qu'on demande, pour le 17 juillet 1862, l'heure moyenne correspondante à 5^h 31^m 28^s,60 temps vrai; il faudra calculer l'équation du temps pour cette heure. Or, la table de la *Connaissance des temps* donne pour le 17 juillet à midi vrai: 0^h 5^m 48^s,15; et la colonne des différences montre qu'en 24 heures l'équation du temps augmente de 4^s,94; en appelant *x* le nombre qu'il faut ajouter à 0^h 5^m 48^s,15 pour avoir l'équation du temps correspondante à l'heure donnée, on posera la proportion

$$24^h : 5^h 31^m 28^s,60 = 4^s,94 : x,$$

d'où l'on tire *x* = 1^s,14. Ajoutant ce nombre à 0^h 5^m 48^s,15, on trouve pour l'équation cherchée 0^h 5^m 49^s,29; l'heure demandée est donc 5^h 31^m 28^s,60 plus 0^h 5^m 49^s,29, c'est-à-dire 5^h 37^m 17^s,89. (*Voy.* CONVERSION DES TEMPS.)

Quelques auteurs modernes disent *élément du temps* au lieu d'*équation du temps*; ce changement d'expression n'offre pas d'avantage réel et il y a toujours inconvénient à modifier les dénominations reçues.

ÉQUATORIAL, instrument analogue au théodolite, mais dont l'axe est placé parallèlement à l'axe du monde. L'équatorial sert à observer les astres que l'on aperçoit rarement et qu'il faut par conséquent saisir quand ils se présentent et sans qu'on puisse attendre l'instant de leur passage au méridien. Il se compose de deux cercles, dont l'un est parallèle à l'équateur, et dont l'autre peut prendre toutes les positions autour de l'axe parallèle à l'axe du globe; c'est ce second cercle qui porte la lunette. L'emploi de l'équatorial permet d'obtenir aisément les différences d'ASCENSION DROITE et de DÉCLINAISON de deux astres peu éloignés (*Voy.* ces mots).

L'équatorial peut aussi servir à vérifier l'uniformité du mouvement diurne; il suffit pour cela de suivre, à l'aide de cet instrument, le mouvement d'une étoile, et de mesurer avec une horloge le temps que l'étoile emploie à passer d'une position à une autre; on trouve que les différences de temps sont constamment proportionnelles aux différences d'ascension droite, lesquelles sont mesurées sur le cercle parallèle à l'équateur.

ÉQUERRAGES, mesures d'angles à la fausse

Équerre, qui servent dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot) à déterminer les génératrices d'une surface réglée, connaissant certaines lignes qui leur correspondent sur une face adjacente. Quelquefois ces lignes correspondantes sont les génératrices d'une autre surface réglée; le plus souvent ce sont les intersections d'une face plane avec des plans horizontaux ou verticaux par exemple. La fausse équerre étant ouverte sous l'angle voulu, on fait coïncider son manche avec la ligne donnée; la direction de sa lame est alors celle de la génératrice cherchée. Quand l'angle dont il s'agit est obtus, on dit que l'équerrage a été pris *en gras*; il est pris *en maigre* quand l'angle est aigu. Voyez, indépendamment de l'article cité, les arucles BARRES D'ARCASSE, COUPLES, BORDÉ, ESTAIN, JAMBETTES.

ÉQUERRE, instrument qui sert à élever des perpendiculaires. Il se fait soit en fer, soit en bois de poirier bien sec. On lui donne la forme d'un triangle rectangle, dont les trois côtés sont parfaitement dressés et à arêtes vives; l'équerre est ordinairement percée d'un trou qui sert à la faire glisser plus commodément sur le papier. Pour vérifier une équerre, on fait coïncider l'un des côtés AC (fig. 1)

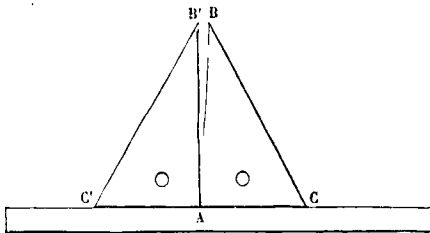


Fig. 1.

de son angle droit avec le bord d'une bonne règle, et l'on trace une droite en se servant du bord AB; on retourne ensuite l'équerre dans la position AB'C', et l'on trace avec le même bord AB' une seconde droite, qui doit coïncider avec la première si l'é-

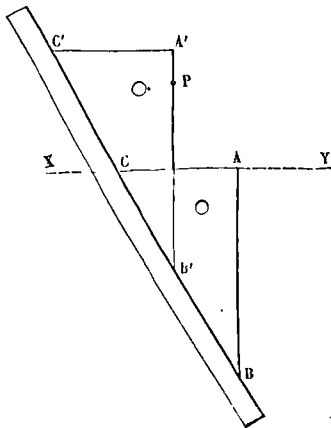


Fig. 2.

querre est juste; dans le cas contraire, il y a écart entre deux droites, et l'on en est averti par l'épaisseur plus grande du trait de crayon vers l'extrémité B. — Pour mener par un point P (fig. 2) une

perpendiculaire à une droite XY, on fait coïncider avec la droite l'un des côtés AC de l'angle droit de l'équerre, et l'on appuie une règle le long de son hypoténuse; maintenant ensuite l'équerre appuyée contre la règle, on la fait glisser jusqu'à ce que le second côté AB de l'angle droit vienne passer par le point donné P; et l'on se sert de ce côté, dans sa nouvelle position A'B', pour tracer la perpendiculaire demandée.

Pour mener par un point donné P (fig. 3) une parallèle à une droite donnée XY, on fait coïncider

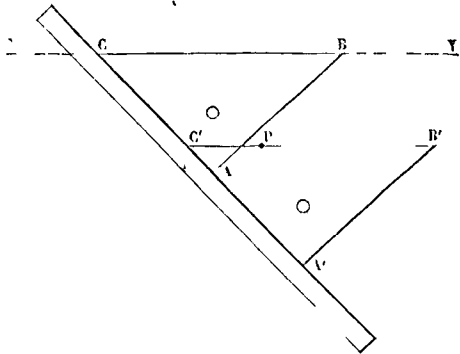


Fig. 3.

avec la droite le plus grand côté BC de l'équerre et l'on appuie une règle contre l'un des côtés AC de l'angle droit; puis, maintenant l'équerre appuyée contre la règle, on la fait glisser jusqu'à ce que le côté BC vienne passer par le point donné P; et l'on se sert de ce côté, dans sa nouvelle position B'C', pour tracer la parallèle demandée.

ÉQUERRE À MIROIR, instrument servant à élever des perpendiculaires sur le terrain dans les LEVERS EXPÉRIÉS (Voy. ce mot). Il est fondé sur cette propriété optique (Voy. MIROIR PLAN, III) que: si l'on aperçoit dans la même direction un objet A et l'image d'un objet B réfléchi deux fois sur des miroirs plans, sans sortir d'un même plan perpendiculaire à ces miroirs, l'angle formé par les rayons visuels A menés aux points A et B est le double de l'angle des deux miroirs. L'instrument se compose d'une petite boîte rectangulaire dans laquelle sont disposés deux couples de miroirs, les premiers placés à angle droit, les seconds faisant entre eux un angle de 45°. La face antérieure de la boîte est percée de deux trous servant d'oculaires, et correspondant respectivement aux deux couples de miroirs. Quand on regarde par le premier oculaire, on aperçoit, au moyen d'ouvertures convenablement pratiquées, les objets placés en face de soi, et l'image après double réflexion des objets placés derrière; il est donc facile de se placer, à l'aide de l'instrument, dans la direction de deux points déterminés. Quand on regarde par le second oculaire, on aperçoit les objets placés en face de soi, et l'image après double réflexion des objets situés sur le rayon visuel perpendiculaire au premier; cette disposition offre donc un moyen d'élever les perpendiculaires. L'équerre à miroir n'a pas la précision de l'équerre d'arpenteur, mais elle rend de grands services dans les reconnaissances militaires, et dans toutes les opérations topographiques qui

demandent de la promptitude. L'équerre à réflexion porte aussi le nom d'équerre de Luxembourg.

ÉQUERRE D'ARPENTEUR, instrument qui sert à mener des perpendiculaires sur le terrain. La partie principale de l'équerre est une boîte cylindrique de 8 à 10 centimètres de hauteur sur 5 à 6 centimètres de diamètre, percée de quatre fentes verticales qui correspondent à deux diamètres perpendiculaires AB et CD de la base (fig. 1). Chaque

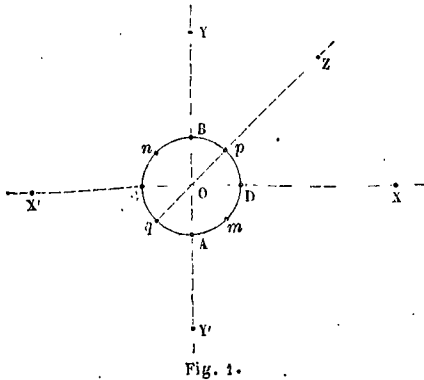


Fig. 1.

fente s'élargit, soit vers le haut soit vers le bas, de manière à former une petite fenêtre, dans l'axe de laquelle est tendu un fil de crin ; mais la disposition des fenêtres est inverse, comme on le voit en AA' et BB' (fig. 2). Si l'on vise par la fente Aa, la

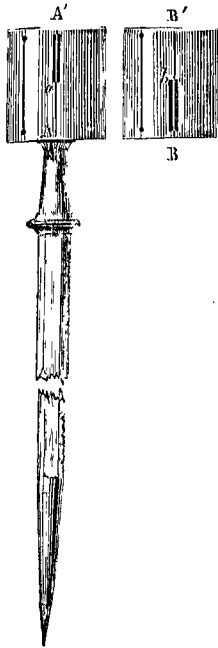


Fig. 2.

ligne de visée est déterminée par cette fente et par le fil qui traverse la fenêtre Bb ; si l'on vise au contraire par la fente Bb', la ligne de visée est déterminée par cette fente et par le fil qui traverse la fenêtre A'a. La disposition est la même pour les fentes pratiquées dans le sens perpendiculaire CD (fig. 1). Indépendamment de ces quatre fentes principales, il en existe quatre autres, qui répondent aux milieux des arcs AD, DB, BC, CA ; elles n'ont point de fenêtres, mais elles sont terminées en haut et en bas par de petits trous circulaires qui servent d'ocilleton. Elles répondent comme les quatre premières à deux directions perpendiculaires mn et pq (fig. 1), mais ces directions font avec celles des fentes principales des angles de 45°. Cette boîte cylindrique est terminée à sa partie inférieure par une douille qui peut recevoir un bâton ferré qu'on enfonce verticalement dans le sol et qui sert de support à l'instrument.

Pour élever, à l'équerre d'arpenteur, une perpen-

diculaire en un point O d'une droite déterminée par deux signaux X et X' (fig. 1), on plante le bâton de l'équerre au point O, bien verticalement, et l'on fait tourner la boîte de manière qu'en regardant par la fente C on aperçoive le signal X coupé par le fil de la fenêtre D, et qu'en regardant par la fenêtre D on aperçoive le signal X' coupé par le fil de la fenêtre C ; cette vérification est nécessaire pour s'assurer qu'on est bien dans la direction CD. Si l'on regarde alors par les fentes opposées A et B, on aura une direction perpendiculaire à la première ; on pourra donc faire planter le jalon Y, de manière qu'en regardant par la fente A, ce jalon soit coupé par le fil de la fenêtre B. On pourrait au besoin en faire planter un second Y' dans le sens opposé.

Pour abaisser d'un point Y une perpendiculaire sur une droite XX', on opère par tâtonnement ; on place l'équerre au pied présumé de la perpendiculaire ; on amène comme ci-dessus les fentes C et D dans la direction XX', et l'on voit si, en regardant par la fente A, le fil de la fenêtre B coupe le signal placé en Y. Si cette condition est remplie, l'instrument est bien au pied de la perpendiculaire demandée, et l'on plante un jalon à sa place. Si la condition n'est pas remplie, on déplace l'équerre vers la droite ou vers la gauche, en maintenant toujours la direction CD dans le sens XX', jusqu'à ce qu'on voie le signal Y dans la direction perpendiculaire AB. Un opérateur exercé trouve en peu de temps le pied de la perpendiculaire.

Les fentes m, n, p, q, ne servent que dans des circonstances spéciales. Supposons, par exemple, qu'on veuille déterminer la distance d'un point accessible O à un point inaccessible P (fig. 3) (Voy.

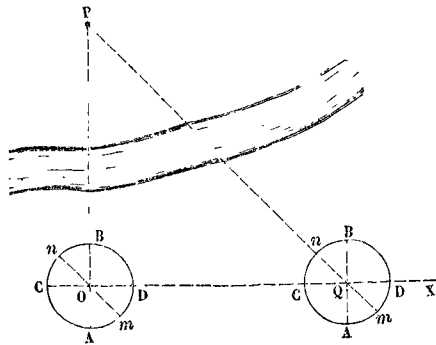


Fig. 3.

PROBLÈMES DE TOPOGRAPHIE, 1), et que le terrain sur lequel on se trouve ne présente pas d'ondulations trop fortes, on pourra opérer de la manière suivante : On placera l'équerre d'arpenteur au point O ; on fera tourner la boîte de manière qu'en visant dans la direction de deux fentes opposées A, B on aperçoive le signal P coupé par le fil de la fenêtre B ; on visera ensuite dans la direction perpendiculaire CD, et l'on fera planter un jalon X dans cette direction. Cela fait, on transportera l'instrument sur la ligne OX, et l'on y cherchera un point Q, tel que CD étant toujours dans la direction OX, si l'on vise par les fentes à 45°, m et n, on aperçoive le point P. Quand cette condition sera remplie, on

plantera un jalon au point Q et l'on mesurera OQ; cette mesure sera celle de OP; car puisque le triangle OPQ a un angle droit en O et un angle de 45° au point Q, il est isocèle et l'on a $OQ = OP$.

Pour vérifier une équerre d'arpenteur, on la plante en un point O (fig. 1) et l'on fait planter deux jalons X et Z, dans les directions CD et qp qui font entre elles un angle de 45°. On fait alors tourner la boîte, de manière que la direction nm vienne passer par le point X; si l'équerre est juste, la direction CD devra alors passer par le point Z. On fera de nouveau tourner la boîte d'un angle de 45°, en sorte que la direction BA vienne passer par le point X; la direction nm devra passer par le point Z; et ainsi de suite. Si toutes ces conditions sont remplies, les huit angles DOM , mOA , AOq , etc., sont égaux et valent par conséquent chacun 45°: ainsi l'équerre est juste.

Au lieu de donner à la boîte la forme d'un cylindre, on lui donne souvent celle d'un prisme régulier à base octogonale; les fentes sont alors pratiquées au milieu de chaque face. Il existe même des équerres où la boîte est remplacée par un simple plateau circulaire muni de quatre PINNULES (Voy. ce mot).

ÉQUERRE GRAPHOMÈTRE, instrument qui sert à la fois d'équerre d'arpenteur, de graphomètre et de boussole, et que l'on emploie beaucoup depuis quelque temps. Il se compose de deux cylindres en cuivre superposés l'un à l'autre, le supérieur

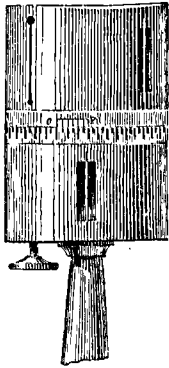


Fig. 2.

pouvant glisser sur l'inférieur comme le couvercle d'une boîte ronde. Ce cylindre supérieur est percé de quatre ouvertures formant deux lignes de visée perpendiculaires entre elles comme dans l'ÉQUERRE D'ARPEUTEUR (Voy. ce mot). Le cylindre inférieur est monté sur un pied analogue à celui de l'équerre d'arpenteur ordinaire; il est percé de deux ouvertures opposées formant une ligne de visée pareille à celles du cylindre supérieur. A la jonction des deux cylindres sont deux bandes horizontales qui portent des divisions; la bande inférieure est divisée de 0° à 360°, et son zéro correspond à la fente étroite du cylindre inférieur; la bande supérieure porte un vernier dont le zéro répond également à l'une des fentes étroites pratiquées dans le cylindre supérieur. Un engrenage qu'on manœuvre à l'aide d'un bouton placé au-dessous du cylindre inférieur, permet de faire mouvoir le cylindre supérieur lentement et sans secousse pour l'amener à la position qu'on veut lui faire prendre. Enfin sur la base supérieure de la boîte est établie une BOUSSOLE (Voy. ce mot).

A l'aide des lignes de visée perpendiculaires pratiquées dans le cylindre supérieur, l'instrument fonctionne comme une équerre d'arpenteur. Il fonctionne comme boussole en se servant de l'une des

lignes de visée du cylindre supérieur qui correspond à la ligne de foi de la boussole placée au-dessus. Enfin il fonctionne comme graphomètre à l'aide des divisions tracées sur les bandes horizontales à la jonction des deux cylindres. Si l'on veut, par exemple, mesurer un angle par ce moyen, on place l'équerre au sommet de l'angle, et on vise par les fentes du cylindre inférieur le signal qui détermine la direction de l'un des côtés de l'angle; on fait ensuite tourner le cylindre supérieur, de manière qu'en visant par la fente étroite correspondante au zéro du vernier on aperçoive derrière le fil de la fenêtre opposée le signal qui détermine la direction du second côté. La position occupée par le zéro du vernier par rapport au zéro de la bande graduée inférieure donnera le nombre des degrés contenus dans l'angle, et la coïncidence d'une division du vernier avec une division de la graduation inférieure fera connaître la fraction de degré à ajouter (Voy. VERNIER).

L'ensemble des deux cylindres forme une boîte un peu plus grande que dans l'équerre d'arpenteur ordinaire.

Quelquefois on ajoute au-dessus de la boîte une lunette plongeante dont l'axe optique se meut dans un plan vertical passant par la ligne de visée qui correspond au zéro du vernier; on peut alors, quand le signal est très-éloigné, viser avec la lunette au lieu de viser par les fentes étroites correspondantes. A l'aide de cette addition on peut réduire à l'horizon, et mesurer un angle, de quelque manière que les signaux soient placés par rapport au plan horizontal.

L'équerre graphomètre est aussi connue sous le nom de *Pantomètre de Fouquier*.

ÉQUILIBRE, état d'un point matériel ou d'un système de points, qui demeurent en repos sous l'action d'un système de forces. On étend cette dénomination à l'état d'un point ou d'un système de points dont le mouvement n'est pas altéré par les forces qui le sollicitent. Dans le premier cas, l'équilibre est dit *statique*; dans le second, on lui donne le nom d'*équilibre dynamique*. Le mot équilibre se dit aussi des forces qui sollicitent un point matériel ou un système de points; ces forces sont dites *en équilibre* sur ce point ou sur ce système, si son état de repos ou de mouvement n'est pas altéré.

1. On reconnaît aisément que les conditions de l'équilibre dynamique doivent être les mêmes que celles de l'équilibre statique. On sait, en effet, et c'est un principe expérimental qui sert de base à la Mécanique, que les forces agissent sur un corps en mouvement comme elles agiraient s'il était en repos, en sorte que le mouvement produit par ces forces et le mouvement antérieurement acquis, coexistent et se composent sans se modifier mutuellement. Par conséquent si, en premier lieu, on a un système de forces en équilibre sur un corps en repos, on peut affirmer qu'elles seront encore en équilibre sur ce corps supposé animé d'un mouvement quelconque; car si ce système de forces ne peut mettre le corps en mouvement quand il est en repos, elles ne pourront pas non plus produire un mouvement qui altère celui dont le corps pourrait être animé. Réciproquement, en second lieu, si un système de forces appliquées à un corps en mou-

vement n'altère pas ce mouvement, c'est qu'il est incapable de produire lui-même un mouvement qui altère celui dont le corps est animé; et par conséquent, appliqué au même corps en repos, il serait incapable de le faire mouvoir; les forces en équilibre sur un corps en mouvement seraient donc encore en équilibre sur ce même corps en repos.

II. Le caractère d'un système de forces en équilibre est que la somme algébrique de leurs travaux est nulle, pour tout mouvement virtuel attribué au système sur lequel elles agissent. Ce principe fondamental, connu sous le nom de *Principe du travail virtuel* (ou des vitesses virtuelles), se démontre aisément comme il suit. Soient F, F', F'', \dots , un système de forces en équilibre sur un corps en repos. Supposons que l'on introduise dans le système de nouvelles forces $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$, capables de mettre le corps en mouvement; soit v la vitesse acquise au bout d'un temps très-court par l'un quelconque des points matériels du système, dont la masse est m . En appliquant le principe de l'effet du travail,

$$\text{on aura } \Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \Sigma \mathcal{C}F + \Sigma \mathcal{C}\varphi, \quad [1]$$

c'est-à-dire que la puissance vive produite sera égale à la somme des travaux des forces F , augmentée de la somme des travaux des forces φ . Mais puisque les forces F sont en équilibre, on peut les enlever sans altérer le mouvement produit par les forces φ ; on doit donc avoir aussi

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \Sigma \mathcal{C}\varphi. \quad [2]$$

De la comparaison des équations [1] et [2], il résulte qu'on doit avoir

$$\Sigma \mathcal{C}F = 0, \quad [3]$$

ce qu'il s'agissait de démontrer. (Voy. dans la *Mécanique analytique* de Lagrange, la démonstration du même principe, fondée sur l'emploi de petites poulies idéales, dans lesquelles on néglige le frottement, la roideur des cordes, l'inertie.)

III. Considérons d'abord l'équilibre d'un point matériel. Concevons que le point se déplace d'une petite quantité Δx dans une direction quelconque que nous prendrons pour axe. Si F_x, F_x', F_x'', \dots , etc., désignent les projections des forces sur cet axe, le travail virtuel de ces forces sera $\Delta x \cdot F_x, \Delta x \cdot F_x', \Delta x \cdot F_x'', \dots$, etc.; et l'on devra avoir en vertu du principe du travail virtuel

$$\Delta x (F_x + F_x' + F_x'' + \dots) = 0,$$

et, comme Δx n'est pas nul,

$$F_x + F_x' + F_x'' + \dots = 0,$$

ou, pour abrégé,

$$\Sigma F_x = 0, \quad [4]$$

c'est-à-dire que la somme algébrique des projections des forces sur une direction quelconque doit être égale à zéro. Or on sait que lorsque plusieurs forces sont appliquées en un même point, la projection de leur résultante sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes; la condition [4] exprime donc que la résultante des forces F , projetée sur un axe quelconque, doit donner une projection égale à zéro.

Mais il est aisé de voir que, pour être assuré qu'il y a équilibre, il suffit d'avoir vérifié cette condition pour trois axes rectangulaires. Car si R_x, R_y, R_z représentent les projections de la résultante des

forces considérées sur ces trois axes, et qu'on ait à la fois

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

comme on a, en appelant R la résultante elle-même,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

il en résulte $R = 0$. Ainsi, les forces considérées se réduisent à une résultante nulle, et par conséquent elles se font équilibre. On voit que lorsqu'on a vérifié la condition [4] pour trois axes rectangulaires, on peut être assuré qu'elle se vérifierait pour un quatrième axe quelconque, car la projection d'une résultante nulle sur cet axe donnerait pour résultat zéro.

On aurait pu arriver à la même condition par une voie géométrique. Pour qu'un système de forces appliquées à un même point matériel soit en équilibre, il faut que ces forces aient une résultante nulle, et que par conséquent le *polygone des forces* (Voy. COMPOSITION DES FORCES) se ferme de lui-même. Mais alors la somme algébrique des projections de ces forces sur un axe quelconque doit être égale à zéro, ce qui fait retomber sur la condition [4].

On peut remarquer que dans l'équilibre d'un point matériel sous l'action d'un système de forces, l'une quelconque d'entre elles est égale et opposée à la résultante de toutes les autres. Car, si l'on compose entre elles toutes ces forces, à l'exception de l'une d'elles, il ne restera plus que la résultante obtenue et la dernière force; il faudra donc pour l'équilibre que celles-ci soient égales et opposées. On peut encore le voir comme il suit. Soit r la résultante de toutes les forces considérées, à l'exception de la force F ; on aura, en appelant r_x la projection de r sur l'axe que l'on considère,

$$r_x = F_x' + F_x'' + F_x''' + \dots$$

Mais la condition [4] donne

$$F_x + F_x' + F_x'' + \dots = -F_x,$$

donc

$$r_x = -F_x,$$

c'est-à-dire que la résultante r et la force F ont, sur un axe quelconque, des projections égales et de sens contraire; donc elles sont elles-mêmes égales et de sens contraire.

IV. Considérons maintenant l'équilibre d'un corps solide. Rapportons le système à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ . Attribuons au corps un mouvement virtuel de translation parallèle à l'axe des x ; la somme des travaux virtuels des forces appliquées au corps sera $\Delta x \Sigma F_x$ (Voy. TRAVAIL); on devra donc avoir, en vertu du principe du travail virtuel [3],

$$\Delta x \cdot \Sigma F_x = 0,$$

ou, comme Δx n'est pas nul,

$$\Sigma F_x = 0.$$

On aura deux équations analogues, en attribuant au corps un mouvement virtuel de translation parallèle à l'axe des y , et un mouvement virtuel de translation parallèle à l'axe des z . La considération de ces trois mouvements de translation parallèles aux axes fournit donc ces trois premières conditions d'équilibre,

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0. \quad [5]$$

Si R représente la *RÉSULTANTE DE TRANSLATION* (Voy. ce mot) des forces considérées, ces trois équations reviennent à

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

d'où l'on déduit $R = 0$. Ces équations expriment

donc que *la résultante de translation est nulle*; c'est-à-dire que si l'on transportait toutes les forces du système parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de l'espace, elles s'y feraient équilibre.

Il est facile d'en conclure que si l'on attribue au corps un quatrième mouvement virtuel de translation parallèle à un axe quelconque, la condition que l'on tirerait de cette considération serait satisfaite d'elle-même, car la résultante de translation étant nulle, en vertu des équations [5], sa projection sur un quatrième axe quelconque serait évidemment nulle.

Les conditions [5] relatives à des mouvements virtuels de translation parallèles aux axes s'appellent quelquefois, par ce motif, les trois conditions de translation.

Attribuons maintenant au corps un mouvement virtuel de rotation autour de l'axe des x ; en appelant $\Delta\alpha$ l'arc décrit dans ce mouvement par un point situé à 1 mètre de distance de l'axe, on aura pour le travail virtuel des forces, $\Delta\alpha\partial\mathcal{L}_x F$, $\Delta\alpha\partial\mathcal{L}_y F$, $\Delta\alpha\partial\mathcal{L}_z F$, ..., en désignant par la caractéristique $\partial\mathcal{L}_x$ le moment (Voy. ce mot) des forces par rapport à l'axe des x . En vertu du principe du travail virtuel, on devra donc avoir

$$\Delta\alpha(\partial\mathcal{L}_x F + \partial\mathcal{L}_y F + \partial\mathcal{L}_z F + \dots) = 0,$$

et, comme $\Delta\alpha$ n'est pas nul,

$$\partial\mathcal{L}_x F + \partial\mathcal{L}_y F + \partial\mathcal{L}_z F + \dots = 0,$$

ou, pour abrégér,

$$\Sigma\partial\mathcal{L}_x F = 0.$$

On aura deux équations analogues en attribuant au corps un mouvement virtuel de rotation autour de l'axe des y , et un mouvement virtuel de rotation autour de l'axe des z . La considération de ces trois mouvements de rotation autour des axes fournit donc ces trois autres conditions d'équilibre

$$\Sigma\partial\mathcal{L}_y F = 0, \quad \Sigma\partial\mathcal{L}_z F = 0, \quad \Sigma\partial\mathcal{L}_x F = 0. \quad [6]$$

Les équations [5] et [6] sont ce que l'on appelle les *six conditions d'équilibre*. On les énonce en disant qu'il faut pour l'équilibre d'un corps solide que la somme algébrique des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle séparément pour chacun de ces axes, et que la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à ces mêmes axes soit nulle séparément pour chacun d'eux.

Les équations relatives aux moments peuvent être présentées sous une forme plus explicite qu'il est utile de connaître, bien qu'on en fasse rarement usage dans les applications. On sait que si plusieurs forces sont appliquées au même point, le moment de leur résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme algébrique des moments des composantes (Voy. MOMENT). Si donc on décompose la force F en trois autres F_x , F_y , F_z , dirigées parallèlement aux axes, le moment de F par rapport à l'un quelconque de ces axes sera égal à la somme algébrique des moments des forces F_x , F_y , F_z . Considérons, par exemple, les moments par rapport à l'axe des x ; et soient x , y , z les coordonnées du point d'application de la force F . Le moment de F_x sera nul, puisque cette force est parallèle à l'axe. Pour avoir le moment de F_y , il faudrait d'abord projeter cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe des x ; or, elle est déjà dans un plan perpendiculaire à OX , elle est donc elle-même sa projection; sa distance à l'axe des x est d'ailleurs

exprimée par l'ordonnée z ; son moment est donc $F_y \cdot z$. Le moment de F_z est de même $F_z \cdot y$, car sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe des x est F_z lui-même, et la distance de F_z à l'axe est exprimée par y . Si l'on prend pour sens positif des moments le sens qui va de OY vers OZ , on aura donc pour le moment de F ,

$$F_x \cdot y - F_y \cdot z,$$

et, par conséquent, la première des conditions [6] pourra s'écrire

$$\Sigma(F_x \cdot y - F_y \cdot z) = 0. \quad [7]$$

Si l'on opère de même pour les deux autres axes, et qu'on prenne comme sens positif des moments, pour l'axe OY le sens qui va de OZ vers OX , et pour l'axe OZ le sens qui va de OX vers OY , on trouvera que les deux dernières des conditions [6] deviennent

$$\Sigma(F_x \cdot z - F_z \cdot x) = 0,$$

et

$$\Sigma(F_y \cdot x - F_x \cdot y) = 0.$$

V. Les six équations [5] et [6] sont suffisantes pour assurer l'équilibre quand le corps auquel les forces sont appliquées est solide. En effet, on sait (Voy. COMPOSITION DES FORCES) qu'un système de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire à deux, que nous nommerons R et S , et dont l'une, R par exemple, soit assujettie à passer par un point donné. Supposons qu'elle passe par l'origine des axes. On sait aussi (Voy. TRAVAIL) qu'en remplaçant ainsi un système de forces par deux forces équivalentes, on n'altère pas le travail élémentaire total. Par conséquent, si les six équations d'équilibre sont satisfaites pour le système des forces F , F' , F'' , ..., c'est-à-dire si la somme des travaux élémentaires de ces forces est nulle pour trois mouvements de translation parallèles aux axes, et pour trois mouvements de rotation autour de ces axes, il en sera de même pour les forces équivalentes R et S . On aura donc

$$R_x + S_x = 0, \quad R_y + S_y = 0, \quad R_z + S_z = 0, \quad [8]$$

et

$$\partial\mathcal{L}_x R + \partial\mathcal{L}_x S = 0,$$

$$\partial\mathcal{L}_y R + \partial\mathcal{L}_y S = 0, \quad \partial\mathcal{L}_z R + \partial\mathcal{L}_z S = 0. \quad [9]$$

Les trois premières équations nous apprennent que les deux forces R et S ont des projections égales et de sens contraire, et que par conséquent ces forces sont elles-mêmes égales et de sens contraire. Ainsi ces forces se font équilibre ou elles forment un couple. Mais la force R passant par l'origine et rencontrant par conséquent les trois axes, son moment est nul par rapport à chacun de ces axes; en sorte que les relations [9] se réduisent à

$$\partial\mathcal{L}_x S = 0, \quad \partial\mathcal{L}_y S = 0, \quad \partial\mathcal{L}_z S = 0.$$

Or, pour que le moment d'une force par rapport à un axe soit nul, il faut que cette force soit dans un même plan avec cet axe. Il faut donc que la force S soit dans un même plan avec chacun des trois axes, ce qui exige qu'elle passe par l'origine. Donc les deux forces R et S , qui sont égales et de sens contraire en vertu des relations [8], sont en outre directement opposées en vertu des relations [9]. Donc ces forces se font équilibre; et comme elles sont équivalentes au système des forces F , F' , F'' , etc., il s'ensuit que ce système de forces est lui-même en équilibre.

Si le système matériel auquel les forces sont appliquées n'était pas un corps solide, les six équations d'équilibre seraient toujours nécessaires, puis-

qu'on ne troublerait pas l'équilibre du système en le solidifiant et en lui appliquant les conditions d'équilibre relatives à un corps solide. Mais ces six équations ne seraient plus suffisantes pour assurer l'équilibre ; c'est-à-dire que, si l'on avait vérifié que ces six équations sont satisfaites, on n'en pourrait plus conclure qu'il y a équilibre. En général il faudra, pour l'équilibre d'un système matériel quelconque, autant de fois six équations d'équilibre qu'il y aura de corps solides isolés ; et l'on devra faire entrer parmi les forces qui sollicitent chaque corps isolé, les réactions qu'il reçoit des autres corps.

VI. Le nombre des conditions d'équilibre d'un corps solide se réduit dans quelques cas particuliers.

A. Supposons que toutes les forces soient dans un même plan, ce qui arrive très-fréquemment dans les applications à l'équilibre des constructions, on pourra prendre ce plan pour celui des xy . Alors la projection de chaque force sur l'axe des x sera nulle, en sorte que la condition $\Sigma F_x = 0$ sera satisfaite d'elle-même. En second lieu, les forces étant dans un même plan avec l'axe des x et avec l'axe des y , leurs moments par rapport à ces axes seront nuls, en sorte que les conditions

$$\Sigma \mathcal{M}_x = 0, \text{ et } \Sigma \mathcal{M}_y = 0$$

seront aussi satisfaites d'elles-mêmes. Il ne restera donc plus que trois conditions d'équilibre, savoir :

$$\Sigma F_z = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma \mathcal{M}_z = 0, \quad [10]$$

dont deux relatives à la translation, et la troisième relative à la rotation. On peut les énoncer en disant que : *lorsque toutes les forces sont dans un même plan, il faut et il suffit pour l'équilibre du corps solide que la somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires tracés dans ce plan soit nulle pour chacun de ces axes, et que la somme de leurs moments par rapport à un troisième axe perpendiculaire au plan (ou par rapport à un point quelconque du plan) soit également nulle.*

B. Supposons en second lieu que toutes les forces soient parallèles, ce qui arrive très-fréquemment aussi. On pourra prendre l'axe des x parallèle à la direction des forces. Les projections des forces sur l'axe des x et sur l'axe des y seront nulles, en sorte que les relations $\Sigma F_x = 0$ et $\Sigma F_y = 0$ seront satisfaites d'elles-mêmes. De plus, les forces étant parallèles à l'axe des x , leurs moments par rapport à cet axe seront nuls, en sorte que la relation $\Sigma \mathcal{M}_x = 0$ sera aussi satisfaite d'elle-même. Il ne restera donc que trois conditions d'équilibre, savoir :

$$\Sigma F_z = 0, \Sigma \mathcal{M}_y = 0, \Sigma \mathcal{M}_z = 0, \quad [11]$$

dont une relative à la translation et deux à la rotation. On peut les énoncer en disant que : *lorsque toutes les forces sont parallèles, il faut et il suffit pour l'équilibre du corps solide que la somme algébrique de ces forces soit nulle (car $F_x = F$) et que la somme de leurs moments par rapport à deux axes rectangulaires perpendiculaires à leur direction soit nulle séparément pour chacun de ces axes.*

C. Supposons encore que les forces soient parallèles et situées dans un même plan. Prenons ce plan pour plan des xz , l'axe des x parallèle aux forces. Les moments des forces par rapport à l'axe des x seront nuls puisque les forces rencontrent cet axe : la relation $\Sigma \mathcal{M}_x = 0$ sera donc satisfaite d'elle-même ; et les conditions [11] se réduiront à deux,

dont l'une relative à la translation et l'autre à la rotation, savoir :

$$\Sigma F = 0 \text{ et } \Sigma \mathcal{M}_y = 0, \quad [12]$$

c'est-à-dire *qu'il faut et il suffit, dans ce cas, que la somme algébrique des forces soit nulle, et que la somme de leurs moments par rapport à un axe perpendiculaire à leur plan (ou par rapport à un point quelconque de ce plan) soit également nulle.*

VII. Il peut arriver qu'il y ait dans le corps un point fixe ou deux points fixes, ou une droite fixe le long de laquelle le corps peut glisser, ou enfin un plan fixe sur lequel le corps est assujéti à s'appuyer. Il y a lieu de rechercher ce que deviennent dans ce cas les conditions d'équilibre.

D. Supposons d'abord qu'il y ait dans le corps un point fixe O, que nous pouvons prendre pour origine. Le corps, en vertu des forces auxquelles il est soumis, exercera une certaine action sur le point fixe, et ce point exercera à son tour sur le corps une réaction (Voy. ce mot) égale et contraire. Désignons par R cette réaction, et par R_x, R_y, R_z ses composantes suivant les trois axes. L'équilibre devra s'établir entre les forces données $F, F', F'', \text{ etc.}$, et la réaction R. On devra donc avoir, en remarquant que la force R passant par l'origine ses moments par rapport aux axes sont nuls,

$$R_x + \Sigma F_x = 0, R_y + \Sigma F_y = 0, R_z + \Sigma F_z = 0 \quad [13]$$

$$\Sigma \mathcal{M}_x = 0, \Sigma \mathcal{M}_y = 0, \Sigma \mathcal{M}_z = 0. \quad [14]$$

Il n'y a dans ce cas que trois conditions d'équilibre : ce sont les équations [14] ; elles expriment que *la somme algébrique des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires passant par le point fixe doit être nulle pour chacun de ces axes.* Quant aux équations [13], elles serviront à déterminer la réaction R ; on en tire en effet :

$$R_x = -\Sigma F_x, R_y = -\Sigma F_y, R_z = -\Sigma F_z.$$

On aura ensuite

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

et si α, β, γ désignent les angles que la force R fait avec les axes, on aura

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

E. Supposons, en second lieu, qu'il y ait dans le corps deux points fixes, O et A (fig. 1). Prenons

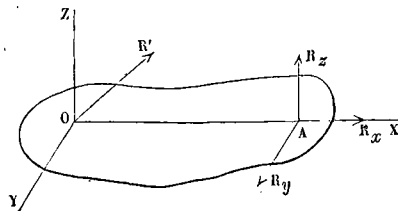


Fig. 1.

pour origine le point O et faisons passer l'axe des x par le point A. Soient R_x, R_y, R_z les composantes, parallèles aux axes, de la réaction exercée sur le corps par le point A ; et soient de même R'_x, R'_y, R'_z les composantes de celles qu'exerce sur le corps le point O. L'équilibre devra s'établir entre les forces données $F, F', F'', \text{ etc.}$, et les réactions inconnues R et R'. Appliquons à ce système les six équations d'équilibre, en remarquant que les moments de la

force R' par rapport aux axes sont nuls, puisque cette force passe par l'origine, et que le moment de R par rapport à l'axe des x est également nul, attendu qu'elle rencontre cet axe; nous aurons, en appelant a la distance OA,

$$\left. \begin{aligned} R_x + R'_x + \Sigma F_x &= 0 \\ R_y + R'_y + \Sigma F_y &= 0 \\ R_x + R'_x + \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_x F &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_y F - R_x \cdot a &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_x F + R_y \cdot a &= 0 \end{aligned} \right\} [15]$$

(Les signes des moments sont pris conformément aux conventions établies plus haut.)

Il n'y a dans ce cas qu'une seule condition d'équilibre; c'est la condition :

$$\Sigma \mathcal{M}_x F = 0;$$

elle exprime que la somme algébrique des moments des forces données par rapport à la droite qui passe par les deux points fixes doit être égale à zéro. Quant aux cinq autres équations, elles serviront à déterminer les composantes des réactions R et R' parallèlement aux axes OY et OZ, et la somme algébrique de leurs composantes suivant OX. En effet, les deux dernières donneront R_y et R_x ; par suite, la seconde et la troisième donneront R'_y et R'_x ; mais la première ne donnera que $R_x + R'_x$. Cette indétermination s'explique en remarquant que l'on pourrait, sans troubler l'équilibre, introduire dans le système deux forces égales et opposées appliquées en O et en A; ces forces feraient varier les réactions R et R', mais seulement en altérant leurs composantes suivant OA, sans changer la somme algébrique de ces composantes.

F. Si le corps pouvait glisser le long de la droite OA, les réactions des points O et A seraient perpendiculaires à cette droite, puisqu'on ne suppose aucun frottement exercé entre cette droite et le corps; on aurait donc $R_x = 0$ et $R'_x = 0$. Il y aurait alors une condition d'équilibre de plus, savoir :

$$\Sigma F_x = 0,$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la somme algébrique des projections des forces données sur la droite le long de laquelle le corps peut glisser fût égale à zéro.

G. Supposons enfin que le corps soit assujéti à s'appuyer sur un plan fixe. Prenons ce plan pour plan des xy . Comme on ne suppose aucun frottement tendant à s'exercer entre le corps et le plan, on doit admettre que les réactions exercées aux différents points de contact seront des forces perpendiculaires

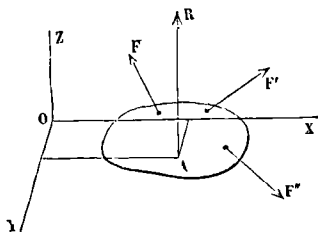


Fig. 2.

au plan et de même sens; elles auront donc une résultante R, appliquée en un certain point A du plan (fig. 2), dont nous désignerons les coordonnées par α et β par rapport à deux axes rectangulaires

OX et OY tracés dans ce plan. Appliquons à ce système les six conditions d'équilibre; nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ R + \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_x F + R\beta &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_y F - R\alpha &= 0 \\ \Sigma \mathcal{M}_z F &= 0 \end{aligned} \right\} [16]$$

La force R n'entre pas dans les deux premières, parce qu'elle est perpendiculaire à OX et OY; elle n'entre pas dans la dernière, parce qu'elle est parallèle à OZ; les signes des moments sont pris conformément aux conventions adoptées précédemment.

Il n'y a dans ce cas que trois conditions d'équilibre :

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma \mathcal{M}_z F = 0; [17]$$

elles s'énoncent en disant que la somme des projections des forces données sur deux axes rectangulaires tracés dans le plan fixe doit être nulle séparément pour chacun de ces axes, et la somme de leurs moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan doit être égale à zéro. Les autres relations [16] serviront à déterminer R, α et β ; la troisième donnera R, la quatrième donnera ensuite β et la cinquième α .

Si le corps peut se détacher du plan il y aura, indépendamment des conditions exprimées par les équations [17], une quatrième condition exprimée par une inégalité. Car, pour que le corps ne se détache pas du plan, et s'appuie contre lui, il faut que la réaction du plan s'exerce, comme l'indique la figure, du plan vers le corps; et que, par conséquent, la valeur de R soit positive, ce qui exige qu'on ait

$$\Sigma F_z < 0,$$

c'est-à-dire que la somme algébrique des composantes des forces perpendiculairement au plan fixe doit être négative, ou avoir le sens d'une force dirigée du corps vers le plan.

Cette condition ne serait pas nécessaire si le corps pouvait glisser sur le plan sans pouvoir s'en détacher.

Ayant déterminé la réaction totale R, résultante des réactions particulières exercées par le plan aux divers points de contact, on déterminera ses composantes, quel que soit leur nombre, à l'aide d'une hypothèse simple sur la loi de compressibilité du plan (Voy. RÉACTION).

VIII. Il arrive fréquemment qu'on a à considérer l'équilibre d'un corps solide sous l'action de trois forces; les conditions de l'équilibre peuvent alors s'énoncer d'une manière simple et commode pour les applications.

Si un corps solide est en équilibre sous l'action de trois forces : 1° ces trois forces sont dans un même plan; 2° elles concourent en un même point, ou bien elles sont parallèles.

1° Soient F, F', F'' (fig. 3) trois forces appliquées respectivement en trois points A, B, C d'un corps solide; et supposons que le corps soit en équilibre sous l'action de ces trois forces. La somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque devra être égale à zéro. Prenons pour axe la droite qui joint les points d'application de deux de ces forces, la droite BC par exemple; les moments des

forces F' et F'' par rapport à cet axe seront nuls puisqu'elles rencontrent l'axe ; il faudra donc que le moment de la troisième force F par rapport au même axe soit nul, ce qui exige que cette force soit dans un même plan avec cet axe ; et comme elle passe par le point A, il faut qu'elle soit dans le plan du triangle ABC. On démontrerait de la même manière que les deux autres forces sont dans le plan de ce triangle ; donc les trois forces sont dans un même plan.

(Si les trois points étaient en ligne droite, on pourrait transporter l'une des forces en un autre point de sa direction, et la démonstration subsisterait. Si, les trois points étant une ligne droite, les forces étaient dirigées suivant cette droite, il ne servirait à rien de transporter ainsi l'une des forces en un autre point de sa direction, mais dans ce cas le théorème serait évident.)

2° Les trois forces étant dans un même plan, si l'on considère deux d'entre elles, F' et F'' par exemple, elles ne pourront être que concourantes ou parallèles. Si elles se coupent en un certain point, elles se réduiront à une résultante passant par ce point ; et, pour qu'il y ait équilibre, il faudra que la troisième force passe aussi par ce point, puisqu'elle doit être égale et opposée à cette résultante. Si les forces F' et F'' sont parallèles, elles auront une résultante parallèle (à moins de former un couple) et la troisième force sera une force parallèle, puisqu'elle devra encore être égale et opposée à cette résultante.

Si les deux forces F' et F'' formaient un couple, il ne pourrait y avoir équilibre, attendu qu'en projetant les trois forces sur la direction de F , la somme des projections se réduirait à F , puisque les deux autres projections seraient égales et de signe contraire ; ainsi la somme ne se réduirait pas à zéro. On en conclut qu'une force ne peut faire équilibre à un couple.

ÉQUINOXE, époque de l'année où le soleil se trouve dans le plan de l'équateur. Il y a deux équinoxes : l'équinoxe du printemps, qui correspond à l'instant où le soleil traverse l'équateur en passant de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal ; et l'équinoxe d'automne, qui correspond à l'instant où le soleil traverse de nouveau l'équateur en passant de l'hémisphère boréal à l'hémisphère austral.

Le nom d'*équinoxe* a été donné à ces deux époques de l'année parce que, lorsque le soleil est dans le plan de l'équateur, le cercle qui, sur le globe, sépare la partie éclairée de la partie obscure, divise en deux parties égales l'équateur et tous les parallèles, en sorte que la durée du jour est égale à celle de la nuit dans tous les lieux du globe.

On donne aussi le nom d'*équinoxes* ou de *points équinoxiaux*, aux points d'intersection de l'équateur céleste avec l'écliptique. Ce sont les positions occupées sur la sphère par le centre du soleil au moment des équinoxes. L'un de ces points est l'équinoxe du printemps, ou *point vernal* ; l'autre est l'équinoxe d'automne.

Enfin, dans le mouvement réel, les équinoxes sont les positions occupées par le centre de la terre sur son orbite lorsque le plan de l'équateur terrestre passe par le centre du soleil.

ÉQUINOXIALE, intersection de la surface d'un

cadran solaire avec un plan mené par l'extrémité du style perpendiculairement à sa direction. Cette ligne est ainsi nommée parce que c'est celle que parcourt l'extrémité de l'ombre du style quand le soleil est à l'équinoxe (*Voy. CADRANS SOLAIRES*).

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR, nombre de kilogrammètres qui représente le travail mécanique développé par l'emploi d'une *calorie* (ou de la quantité de chaleur qui serait nécessaire pour élever d'un degré centigrade la température d'un kilogramme d'eau).

La première idée de la transformation de la chaleur en travail mécanique paraît remonter à Daniel Bernoulli, qui, dans son *Hydrodynamique*, publiée en 1738, a donné de la constitution des gaz une théorie peu éloignée de celle à laquelle on revient aujourd'hui. Elle fut, à cette époque, négligée et oubliée. Mais elle ne l'était pas encore lorsqu'en 1780 Laplace et Lavoisier publièrent leur célèbre *Mémoire sur la chaleur*. Ils y discutent les diverses hypothèses admises sur la nature de cet agent et examinent, en particulier, celle dans laquelle la chaleur ne serait autre chose que la *force vive qui résulte des mouvements insensibles des molécules d'un corps*. Ils reconnaissent que plusieurs phénomènes, en particulier la chaleur produite par le frottement, sont favorables à cette hypothèse ; mais, malgré cette déclaration, ils se décident pour un autre point de vue. Plus tard, de 1798 à 1799, une expérience de Rumford sur la chaleur dégagée dans le forage des canons, et une autre de Davy sur la fusion de la glace par le frottement, auraient pu ramener l'attention des physiciens sur l'insuffisance de la théorie qui avait cours alors. Mais les esprits étaient ailleurs : la théorie de l'émission régissait encore l'optique, malgré les travaux de Fresnel, et personne ne songeait à mettre en doute la nature matérielle de l'agent auquel on avait donné le nom de *calorique*. Ce n'est que beaucoup plus tard, lorsque la théorie des ondulations eut définitivement triomphé, lorsque l'identité de la lumière et de la chaleur eut été pour ainsi dire démontrée, que l'on revint à l'idée de ne voir dans les effets calorifiques que des phénomènes de mouvement, et que l'on songea sérieusement à mesurer le travail mécanique de la chaleur. C'est à M. Joule que revient l'honneur d'avoir, le premier, effectué cette mesure. Après avoir montré en 1845 que, contrairement à la théorie généralement admise, un gaz peut se dilater sans se refroidir, pourvu qu'il n'effectue aucun travail mécanique extérieur, il a, quelque temps après, mesuré, par des procédés précis, la chaleur dégagée par le frottement de divers corps ; et la moyenne de ses expériences lui a donné 425 kilogrammètres pour le travail équivalent à une calorie, ou pour ce qu'on est convenu d'appeler l'*équivalent mécanique de la chaleur*. Depuis cette époque, un grand nombre de savants se sont occupés de la question ; elle est devenue l'objet d'une étude de plus en plus approfondie, qui tend à constituer la physique sur des bases nouvelles. Malgré quelques divergences d'opinion, qui tiennent en grande partie à des expériences imparfaitement exécutées, on peut dire que la science *thermodynamique* est fondée ; et déjà elle est devenue, en France, le sujet d'un enseignement public, donné à la Faculté des sciences de Paris

par M. Verdet. On trouvera, dans l'Exposé de la théorie mécanique de la chaleur, par cet habile physicien, l'historique complet de la question de la transformation de la chaleur en travail et de ses principales applications.

Mais, de tous les écrits mathématiques publiés sur ce sujet, aucun ne nous a paru plus clair, plus accessible à la majorité des lecteurs instruits, que le travail inséré par M. Bourget dans les *Annales de physique et de chimie* pour l'année 1859, tome 56. Nous analyserons ici cet intéressant mémoire, qui, selon nous, n'a pas été suffisamment remarqué.

I. L'auteur considère un gaz renfermé dans un cylindre d'un mètre carré de section, pour fixer les idées, et éprouvant, par l'intermédiaire d'un piston, une pression qui fait équilibre à sa force élastique. Le volume, la pression, et la température du gaz sont liés par une relation très-simple; si v, p, t désignent respectivement les trois quantités à un instant quelconque, et v_0, p_0, t_0 les mêmes quantités à un instant initial, on a, en appelant α le coefficient de dilatation du gaz,

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \frac{p_0 v_0}{1 + \alpha t_0} = H = 10334^4,$$

en prenant pour p_0 la pression normale représentée par $C^{m},76$ de mercure, pour v_0 le mètre cube, et pour t_0 la température zéro.

On en tire $pv = H(1 + \alpha t)$. [1]

On suppose qu'on fasse varier le volume et la pression suivant une loi quelconque, de manière à ramener le gaz à son volume et à sa pression initiaux, ce qui constitue ce que l'on appelle un *cycle*, et l'on se propose d'évaluer d'une part la chaleur perdue ou gagnée, absorbée ou recueillie, d'autre part le travail mécanique effectué, soit moteur, soit résistant, enfin la relation qui existe entre ces deux quantités. On prend pour abscisses les volumes, et pour ordonnées les pressions; la loi suivant laquelle le volume et la pression varient pendant la durée d'un cycle se trouve alors représentée par une courbe fermée. Les axes sont supposés rectangulaires.

II. On considère d'abord le cas simple, où le cycle est représenté par le contour d'un rectangle ADBC (fig. 1), parcouru dans le sens indiqué par la flèche.

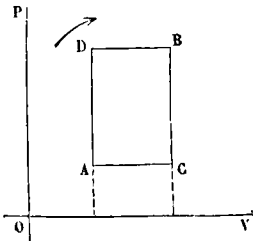


Fig. 1.

Soient v, p, t le volume, la pression et la température qui repondent à l'état du gaz exprimé par le point. A
 v, p, t les mêmes quantités pour le point.. . . . D
 v', p', t' — — — — — B
 v'', p'', t'' — — — — — C

1° Le gaz passant de l'état A à l'état D, il y a échauffement à volume constant; et l'on a

$$p'v = H(1 + \alpha t_1), \quad [2]$$

équation qui, combinée avec [1], donne

$$(p' - p)v = H\alpha(t_1 - t). \quad [3]$$

En même temps, si l'on appelle Π le poids du mètre cube du gaz à zéro, c' la chaleur spécifique à volume constant, et q la chaleur dépensée, on a

$$q = \Pi c' (t_1 - t) \quad [4]$$

et par conséquent

$$q = \frac{\Pi}{H\alpha} c'v(p' - p). \quad [5]$$

2° Le gaz passant de l'état D à l'état B, il y a échauffement, à pression constante. On a

$$p'v' = H(1 + \alpha t'), \quad [6]$$

équation qui, combinée avec [2], donne

$$p'(v' - v) = H\alpha(t' - t_1). \quad [7]$$

En même temps, si c est la chaleur spécifique du gaz à pression constante, et q_1 la quantité de chaleur dépensée, on a

$$q_1 = \Pi c (t' - t_1) \quad [8]$$

et par conséquent

$$q_1 = \frac{\Pi}{H\alpha} cp'(v' - v). \quad [9]$$

3° Le gaz passant de l'état B à l'état C, il y a refroidissement à volume constant. On a

$$pv' = H(1 + \alpha t_2), \quad [10]$$

équation qui, combinée avec [6], donne

$$(p' - p)v' = H\alpha(t_2 - t'). \quad [11]$$

En même temps, q' représentant la chaleur dégagée, on a

$$q' = \Pi c (t' - t_2) \quad [12]$$

et par conséquent

$$q' = \frac{\Pi}{H\alpha} c'v'(p' - p). \quad [13]$$

4° Enfin, le gaz passant de l'état C à l'état A, y a refroidissement à pression constante. On a

$$pv = H(1 + \alpha t),$$

équation qui, combinée avec [10], donne

$$p(v' - v) = H\alpha(t_2 - t). \quad [14]$$

En même temps, si q'_1 est la chaleur dégagée ou recueillie, on a

$$q'_1 = \Pi c (t_2 - t) \quad [15]$$

et par conséquent

$$q'_1 = \frac{\Pi}{H\alpha} cp(v' - v). \quad [16]$$

Maintenant, si Q désigne la chaleur totale dépensée, et Q' la chaleur totale recueillie, on a

$$Q = q + q_1 = \frac{\Pi}{H\alpha} [c'v(p' - p) + cp(v' - v)] \quad [17]$$

et

$$Q' = q' + q'_1 = \frac{\Pi}{H\alpha} [c'v'(p' - p) + cp(v' - v)]. \quad [18]$$

La dépense définitive est donc exprimée par

$$Q - Q' = \frac{\Pi}{H\alpha} (c - c')(p' - p)(v' - v), \quad [19]$$

quantité qui ne peut être nulle. Ainsi, dans le cas d'un cycle rectangulaire, il y a toujours une dépense de chaleur; et cette dépense est proportionnelle à l'aire $(p' - p)(v' - v)$ du rectangle.

III. Considérons maintenant le travail effectué. Quand le gaz passe par les états A, D, B, le travail est moteur et représenté par

$$\mathcal{E} = p'(v' - v),$$

puisque de A à D, le volume ne changeant pas, il n'y a pas de travail produit.

Quand le gaz passe par les états B, C, A, le travail est négatif ou résistant, et représenté par

$$\mathcal{E}' = p(v' - v),$$

puisque'il n'y a pas de travail produit de B en C. Le travail total relatif au circuit est donc

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' = (p' - p)(v' - v), \quad [20]$$

c'est-à-dire qu'il est exprimé par l'aire du rectangle.

Si l'on compare les équations [19] et [20], on en tire

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' = \frac{H\alpha}{\Pi(c - c')} \cdot (Q - Q') = E(Q - Q'), \quad [21]$$

c'est-à-dire que le travail produit est proportionnel à la chaleur dépensée. A chaque unité de chaleur dépensée correspond un travail exprimé par E. Le coefficient E est donc l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur.

Si l'on fait $H = 10334$, $\alpha = 0,003665$, $\Pi = 1,293$,

$$c = 0,2377 \text{ et } \frac{c}{c'} = 1,41 \text{ (d'après M. Masson),}$$

d'où $c' = \frac{0,2377}{1,41}$, on trouve $E = 423,79$ ou 424 ,

nombre qui diffère bien peu de celui que M. Joule a déduit de ses expériences sur la chaleur dégagée par le frottement.

Si le cycle avait été parcouru en sens inverse, le résultat eût été le même en valeur absolue, mais son signe eût été contraire; c'est-à-dire que la chaleur dépensée se fût changée en chaleur dégagée ou recueillie, et le travail moteur en travail résistant.

IV. Les raisonnements et les formules qui précèdent, ne dépendant pas de la grandeur des côtés du rectangle, subsistent encore pour le cas d'un rectangle infiniment petit. Mais dans ce cas les différences $p' - p$, $v' - v$, se changent en différentielles, dp , dv ; et l'équation [17] devient

$$dQ = \frac{\Pi}{H\alpha} (c'vdp + cpdv), \quad [22]$$

attendu que l'on peut alors remplacer p' par $p + dp$, et négliger le terme $cdp dv$ qui est infiniment petit du second ordre.

L'équation [18] donne alors la même valeur pour dQ' . En sorte que lorsque le cycle rectangulaire devient infiniment petit, la chaleur dépensée devient égale à la chaleur restituée, et la dépense définitive est nulle.

Tous ces résultats sont uniquement fondés sur l'hypothèse que le rapport de c à c' est constant.

V. On peut se proposer maintenant de calculer la chaleur dépensée, quand le volume et la pression v et p relatifs à l'état initial se changent en v' et p' , relatifs à un autre état, le passage du premier état au second se faisant suivant la loi exprimée par la relation

$$p = \varphi(v).$$

Si l'on considère d'abord un changement infiniment petit, on a la relation [22]. En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Pi}{H\alpha} \int_v^{v'} (c'vdp + cpdv) \\ &= \frac{\Pi c'}{H\alpha} \int_v^{v'} (vdp + \gamma p dv), \end{aligned} \quad [23]$$

γ désignant le rapport $\frac{c}{c'}$. Si l'on applique au premier terme le procédé de l'intégration par parties, on trouve, après réduction,

$$Q = \frac{\Pi c'}{H} \left[p'v' - pv + (\gamma - 1) \int_v^{v'} p dv \right]. \quad [24]$$

On voit par cette relation, que la valeur de Q dépend de l'intégrale qui figure dans le second membre, et par conséquent de la loi qui lie la pression p avec le volume v ; en d'autres termes la chaleur employée dépend du chemin suivi pour faire passer le gaz du premier état au dernier: résultat que la théorie ordinaire n'aurait pu faire prévoir.

VI. Il est naturel de se demander quelle relation il faudrait établir entre la pression p et le volume v pour qu'il n'y eût point de chaleur dépensée. Il faut pour cela que l'intégrale [23] soit nulle, ce qui exige que ses éléments soient nuls; on doit donc avoir

$$vdp + \gamma p dv = 0, \text{ d'où } pv^\gamma = \text{const.} \quad [25]$$

On en déduit, en appelant p' , v' , t' la pression, le volume et la température relatifs à un autre état du gaz

$$p'v'^\gamma = \text{const.}$$

et par conséquent

$$\frac{p}{p'} = \left(\frac{v'}{v} \right)^\gamma, \quad [26]$$

puis, en vertu de l'équation [1],

$$\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} = \frac{pv}{p'v'} = \frac{p}{p'}; \quad \frac{v'}{v} = \left(\frac{v'}{v} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad [27]$$

Les formules [26] et [27] avaient déjà été établies par Poisson; mais elles se trouvent démontrées ainsi d'une manière plus rigoureuse, et qui suppose uniquement que le rapport γ ou $\frac{c}{c'}$ est constant.

VII. Cherchons maintenant la chaleur dépensée quand la loi de variation des pressions et des volumes est représentée par un circuit quelconque

Soit ABB_1A_1 (fig. 2) ce circuit, formé des deux courbes

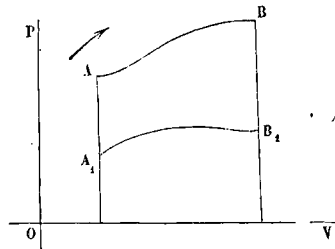


Fig. 2.

AB, représentée par $p = \varphi(v)$
 et A_1B_1 $p_1 = \psi(v)$.

De l'état A à l'état B la chaleur dépensée sera, en vertu de la relation [24],

$$\frac{\Pi c'}{H\alpha} \left[p'v' - pv + (\gamma - 1) \int_v^{v'} p dv \right].$$

De B à B₁ la chaleur recueillie ou dégagée aura pour expression, en vertu de l'équation [13],

$$\Pi c'v'(p' - p'_1).$$

De B₁ à A, la chaleur recueillie sera

$$\frac{\Pi c'}{H\alpha} \left[p_1 v' - p_1 v + (\gamma - 1) \int_v^{v'} p_1 dv \right].$$

Enfin de A₁ à A, la chaleur dépensée sera [éq. 5]

$$\frac{\Pi c'}{H\alpha} v (p - p_1).$$

Faisant la somme algébrique de ces quantités de chaleur, en prenant avec le signe + les chaleurs dépensées et avec le signe — les chaleurs recueillies ou dégagées, on obtient pour la quantité définitive de la chaleur dépensée C

$$C = \frac{\Pi c' (\gamma - 1)}{H\alpha} \int_v^{v'} (p - p_1) dv, \quad [28]$$

ou, en remarquant que c' (γ - 1) n'est autre chose que c - c', et se reportant à la notation de l'équation [21],

$$C = \frac{1}{E} \int_v^{v'} (p - p_1) dv. \quad [29]$$

L'intégrale qui figure dans le second membre exprime précisément l'aire du circuit ABB₁A₁; on peut donc dire que la quantité de chaleur dépensée est proportionnelle à l'aire du circuit.

On étend sans peine ce résultat à un circuit de forme quelconque; en sorte qu'on peut dire d'une manière générale que, si la loi qui lie la pression au volume est représentée par un circuit fermé quelconque, la quantité de chaleur dépensée est proportionnelle à l'aire du circuit.

VIII. Le travail moteur relatif au parcours AB est exprimé par $\int_v^{v'} p dv$.

Le travail résistant relatif au parcours B₁A₁ est exprimé de même en valeur absolue par $\int_v^{v'} p_1 dv$.

D'ailleurs les portions BB₁ et A₁A du circuit ne donnent lieu à aucun travail, puisque le volume ne varie pas. En désignant donc par \mathfrak{C} le travail définitif, on a

$$\mathfrak{C} = \int_v^{v'} (p - p_1) dv. \quad [30]$$

En comparant cette équation avec l'équation, [29] on en tire

$$\mathfrak{C} = EC, \quad [31]$$

c'est-à-dire que le travail effectué est proportionnel à la quantité de chaleur dépensée. Si C est exprimé en calories, et \mathfrak{C} en kilogrammètres, on a

$$\mathfrak{C} = 424 \cdot C. \quad [32]$$

IX. D'après cette équation, le rendement d'une calorie devrait être

$$424 \text{ ou } \frac{\mathfrak{C}}{C}.$$

Mais si une cause quelconque empêche de recueillir toute la chaleur dégagée, et que l'on perde la chaleur qui aurait dû être recueillie depuis un état représenté par p', et v', jusqu'à un état représenté par p et v, la quantité de chaleur totale dépensée se composera 1° de la quantité C donnée par la formule [31] ou $\frac{\mathfrak{C}}{E}$; 2° d'une quantité de chaleur K donnée par la formule [24]. Le rendement

d'une calorie ne sera donc plus $\frac{\mathfrak{C}}{E}$, mais bien $\frac{\mathfrak{C}}{C + K}$, ou en mettant pour \mathfrak{C} sa valeur

$$\frac{EC}{C + K} \text{ ou } E \cdot \frac{C}{C + K}$$

c'est-à-dire une fraction de E. Cette observation est importante, parce qu'elle explique comment des expériences imparfaites, dans lesquelles on perdait une partie de la chaleur qui aurait dû être recueillie, ont pu donner lieu à des divergences d'opinion qui ont retardé l'établissement de la théorie thermodynamique.

X. D'après les principes qu'on vient d'établir, toutes les fois qu'un gaz exerce un travail moteur, il y a de la chaleur dépensée, et par conséquent abaissement de température; toutes les fois au contraire qu'un gaz éprouve un travail résistant, il y a de la chaleur dégagée, et par conséquent élévation de température. Ces principes sont maintenant admis pour tous les corps, sauf des différences qu'une expérimentation plus précise fera certainement disparaître. On s'explique ainsi une foule de phénomènes demeurés obscurs jusqu'alors; et en particulier l'élévation de température qui accompagne le frottement.

On se rend compte de la même manière des deux expériences capitales de M. Joule. Si l'on fait communiquer deux récipients, dont l'un renferme un gaz à une pression élevée, et dont l'autre est vide, le gaz se partage entre les deux récipients sans aucune variation de température, attendu qu'il n'y a aucun travail effectué, soit moteur, soit résistant. Mais si l'on fait communiquer le gaz du récipient avec une cloche contenant de l'air, et placée sur la cuve à eau, le gaz, obligé de refouler devant lui l'eau et l'air, exerce un travail moteur, et l'on constate un abaissement de température.

Plusieurs savants ont entrepris d'asseoir sur ces considérations nouvelles une théorie plus complète et plus exacte des machines thermiques, et en particulier de la machine à vapeur. Mais cette théorie n'a pas encore reçu un caractère assez simple et assez pratique pour être adoptée dans les écoles et prise en sérieuse considération dans l'industrie. On ne peut attendre ce résultat que du temps et des efforts réunis des physiciens, des ingénieurs et des géomètres.

ERE, époque remarquable qui sert d'origine pour la supputation des années. Les principales ères en usage chez les anciens ont été l'ère de Nabonassar, adoptée par Ptolémée, et qui part de l'année 746 avant J. C.; l'ère des Olympiades, en usage chez les Grecs, et qui date de la reprise des jeux olympiques, l'an 776 avant J. C.; l'ère des Romains ou de la fondation de Rome, qui remonte à l'an 753 avant J. C. Les astronomes représentent les années dont il vient d'être question par —745, —775, —752. parce qu'ils regardent comme négatif le temps compté avant J. C., et que l'année qui a précédé la naissance du Christ est désignée par zéro.

ERREUR A CRAINDRE, erreur dont la probabilité est $\frac{1}{2}$; c'est celle que plusieurs auteurs ont appelée erreur probable, et que M. Cournot a désignée avec plus de raison sous le nom de valeur médiane de l'erreur. (Voy. MOYENNES.)

ERREUR MOYENNE, nom donné par les auteurs allemands à la racine carrée de la moyenne arithmétique entre les carrés de toutes les erreurs. [Voy. ERREURS (Théorie des)].

ERREURS (Théorie des). On désigne sous ce nom l'ensemble des considérations théoriques qui se rapportent aux erreurs d'observations. Ces erreurs sont de deux espèces. Les unes, *constantes* ou au moins *régulières*, se reproduisent dans toutes les observations du même genre. Telles sont les erreurs produites par un mauvais étalonnage des règles destinées à la mesure d'une base, par une détermination inexacte de la verticale dans la mesure d'une distance zénithale, par l'adoption d'un coefficient de réfraction inexact dans le calcul d'un nivellement trigonométrique, etc. Les observations entachées d'inexactitudes de ce genre doivent être absolument rejetées; et tous les soins de l'observateur doivent tendre à se débarrasser de ces causes constantes d'erreurs. Les autres espèces d'erreurs, appelées erreurs *accidentelles* ou *fortuites*, se produisent tantôt dans un sens et tantôt dans un autre; elles sont inévitables, et leur influence n'est assujettie à aucune règle. Telles sont les erreurs provenant d'un pointé inexact, d'une lecture imparfaite, d'un dérangement des instruments de mesure par l'action du vent, des phases des signaux, etc., etc. C'est de cette seconde espèce d'erreurs qu'il sera question dans cet article.

I. Si, dans les observations, on se contentait du nombre de mesures strictement nécessaires pour en déduire les inconnues, les erreurs commises échapperaient à tout contrôle. Mais si, comme on le fait d'ordinaire, on fait plus d'observations qu'il n'est nécessaire, si l'on a par conséquent plus d'équations que d'inconnues, les erreurs se manifesteront par un défaut d'accord entre les résultats du calcul et ceux de l'observation directe. Si, par exemple, on a mesuré directement les trois angles d'un triangle rectiligne, il arrivera que chaque angle, déduit par le calcul de l'observation des deux autres, ne coïncidera pas avec la valeur directement mesurée. — Il faut, dans ce cas, *corriger* les mesures obtenues, c'est-à-dire modifier les résultats de manière à les faire concorder. Conformément à une règle donnée primitivement par Legendre, et confirmée depuis par l'étude de plusieurs grands géomètres, on effectue la correction de manière que la somme des carrés des erreurs soit un minimum (Voy. MOINDRES CARRÉS). Les observations ainsi corrigées ont reçu des auteurs allemands, et de Gauss en particulier, le nom d'*observations compensées*.

II. Les erreurs accidentelles sont toutes plus ou moins probables; mais leur probabilité est inconnue *a priori*, parce qu'elles dépendent du concours fortuit d'un grand nombre de causes diverses, qu'on ne saurait apprécier. On est donc obligé, pour les découvrir, de faire usage de la théorie des *probabilités a posteriori*, c'est-à-dire de déduire ces probabilités des faits observés, pour en conclure la probabilité des erreurs de même espèce dans les observations futures (Voy. PROBABILITÉ). Les chances d'erreur en plus étant les mêmes que les chances d'erreur en moins, puisqu'il s'agit d'erreurs accidentelles et non constantes, on peut assimiler une observation quelconque au tirage d'un certain nombre de boules extraites d'une urne qui en contient

une infinité, les unes blanches, les autres noires, mais en même nombre. A mesure qu'on multiplierait les tirages, le nombre des boules blanches tirées tendrait de plus en plus à devenir égal au nombre des boules noires. De même, dans un grand nombre d'observations, les erreurs dans un sens et les erreurs en sens contraire tendent à se balancer, et la *moyenne* s'approche d'autant plus de la vérité, que le nombre des observations est plus grand. Il ne faut pas confondre la moyenne dont nous parlons ici, laquelle dépend de la loi de probabilité des erreurs, avec la moyenne arithmétique de ces erreurs; ces deux moyennes ne coïncident que quand toutes les erreurs sont également probables (Voy. MOYENNE).

III. A cause de cette espèce de symétrie entre les erreurs en plus et les erreurs en moins, et du soin que met l'observateur à rendre les petites erreurs beaucoup plus probables que les grandes, la loi de probabilité des erreurs peut généralement être très-approximativement représentée par une équation de la forme

$$p = Ae^{-g^2 x^2}, \quad [1]$$

dans laquelle x représente l'erreur, p sa probabilité, A et g deux constantes, dont l'une A est la probabilité d'une erreur nulle, et la seconde g est ce que les auteurs français appellent le *module de précision* ou de *convergence*, et qui sert en effet de mesure à la précision des observations effectuées. Car, dans des genres d'observations différents, mais où la probabilité A d'une erreur nulle est la même, la probabilité d'une même erreur x est d'autant moindre que g , ou le module de précision, est plus grand.

IV. Ce module de précision peut être déduit de l'observation même. Nous avons vu qu'en multipliant les observations, on obtient des résultats dont la moyenne s'approche indéfiniment de la valeur véritable. Si donc n représente un très-grand nombre, la moyenne M de n observations pourra être regardée comme une valeur très-approchée de la quantité qu'on mesure. Concevons qu'on fasse la différence entre chaque résultat obtenu et cette moyenne; ces différences seront la mesure très-approchée des erreurs commises. Faisons la somme des carrés des erreurs x ainsi évaluées, et soit Σx^2 cette somme, on démontre dans le calcul des probabilités que l'on a

$$g = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma x^2}}. \quad [2]$$

V. On démontre également que si P représente la probabilité dans un nombre très-grand n' d'observations nouvelles, la moyenne M' des observations ne s'écartera pas de M de plus d'une quantité l en plus ou en moins; on a

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^l e^{-t^2} dt \quad [3]$$

(Voy. à l'art. PROBABILITÉ la table des valeurs de cette fonction), la variable t et la limite l étant liées entre elles par la relation

$$t = g\sqrt{n'} = l\sqrt{\frac{n'n}{2\Sigma x^2}}. \quad [4]$$

La quantité $g\sqrt{n'}$ qui multiplie l'écart l dans la

formule [4], est ce que les auteurs français appellent le *poids* de la moyenne M' . Cette considération permet de comparer la précision de deux séries d'observations de nature différente. Les moyennes qui ont le même poids, donnent pour un même écart l la même valeur de t , et ont par conséquent des probabilités égales; et, pour une même probabilité, l'écart varie en raison inverse du poids. Les auteurs allemands donnent au mot *poids* une autre signification, comme nous le verrons plus loin.

VI. Parmi les valeurs que peut prendre la variable t , il y en a une qui mérite une attention particulière : c'est celle pour laquelle la probabilité P prend la valeur particulière $\frac{1}{2}$. A l'aide de la table, on trouve par interpolation que cette valeur de t , que nous représenterons par θ , est $\theta = 0,476936$. — Si l'on met cette valeur dans la relation [4], et qu'on en tire la valeur de l , on trouve, en désignant par l_1 cette valeur particulière :

$$l_1 = \frac{\theta}{g\sqrt{n'}} = \frac{\theta\sqrt{2\Sigma x^2}}{\sqrt{nn'}}. \quad [5]$$

Si l'on suppose $n' = n$, il vient plus simplement

$$l_1 = \frac{\theta\sqrt{2\Sigma x^2}}{n}. \quad [5 \text{ bis}]$$

Il y a donc autant à parier que la moyenne M' des nouvelles valeurs observées ne s'écartera pas de la moyenne M de plus de l_1 , en plus ou en moins, qu'il y a à parier que l'écart dépassera cette limite.

Si le nombre n des observations primitives est assez considérable pour qu'on puisse regarder la moyenne M comme l'expression de la vérité, un écart égal à l_1 sera l'erreur moyenne dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Cette erreur est généralement désignée dans les auteurs sous le nom d'*erreur à craindre* ou d'*erreur probable*; M. Cournot lui donne le nom plus rationnel d'*erreur médiane*.

VII. Il ne faut pas confondre cette erreur médiane, qui répond à une moyenne d'observations, avec l'erreur fortuite ou accidentelle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Celle-ci, que nous désignerons par x_1 , serait

donnée par l'équation [1], en y faisant $p = \frac{1}{2}$, d'où

$$\frac{1}{2} = Ae^{-g^2x_1^2}. \quad [6]$$

Mais il faudrait pour cela connaître A . On peut, au contraire, tirer A de cette relation en déterminant x_1 par l'observation même. Il suffit pour cela de ranger par ordre de grandeur les n mesures faites, de

prendre celle qui répond au rang $\frac{n}{2}$, de telle sorte qu'il y en ait autant au-dessus qu'au-dessous, et de retrancher cette valeur de la moyenne des mesures; le reste sera d'autant plus voisin de la vraie valeur de x_1 , que le nombre des observations aura été plus grand. La relation [6] donnera alors

$$A = \frac{1}{2} e^{g^2x_1^2}; \quad [7]$$

et, en mettant cette valeur dans [1], on obtient

$$p = \frac{1}{2} e^{g^2(x_1^2 - x^2)} \quad [8]$$

pour la relation qui exprime approximativement la loi de probabilité de l'erreur x .

VIII. Les auteurs allemands donnent le nom d'*erreur moyenne* à la racine carrée de la moyenne arithmétique entre les carrés de toutes les erreurs. En sorte qu'en appelant E l'erreur moyenne ainsi définie, on a

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}. \quad [9]$$

D'après Gauss, ils nomment *poids* de cette erreur moyenne l'inverse du carré de E ; en sorte qu'en désignant par π ce poids, on a

$$\pi = \frac{1}{E^2} = \frac{n}{\Sigma x^2}. \quad [10]$$

La confusion des acceptions différentes données au même mot *poids* est fâcheuse; mais la considération de l'erreur moyenne et du poids π , entendu dans le sens des Allemands, est souvent d'une application utile et commode.

IX. Il arrive ordinairement dans les applications que les grandeurs observées doivent servir à la détermination d'une autre grandeur, qui n'est pas directement mesurable, mais qui est une fonction connue des premières. Après avoir déterminé la valeur la plus probable de chacune des grandeurs observées, il faut donc en déduire la valeur la plus probable de la fonction dont il s'agit. Pour cela, connaissant l'erreur moyenne de chacune des grandeurs observées, on cherche à calculer l'erreur moyenne de cette fonction.

Considérons d'abord le cas très-simple où la fonction considérée, que nous représenterons par U , serait la somme de deux grandeurs mesurées a et a' ; et posons

$$U = a + a'.$$

Soit e l'erreur moyenne de a , e' celle de a' , E celle de U , on aura

$$U \pm E = a \pm e + a' \pm e',$$

relation qui, en vertu de la précédente, se réduit à

$$\pm E = \pm e \pm e'.$$

Le carré du second membre a deux valeurs distinctes, suivant les combinaisons de signe; ces valeurs étant également admissibles, on prendra leur moyenne pour la valeur du carré du premier membre, et l'on aura

$$E^2 = e^2 + e'^2; \text{ d'où } E = \sqrt{e^2 + e'^2}. \quad [11]$$

Si l'on désigne ensuite par Π , π , π' les poids des erreurs moyennes E , e , e' , ce mot étant entendu dans le sens de Gauss, il résulte de l'équation [11]:

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}. \quad [12]$$

On arriverait à un résultat identique dans le cas où la fonction U serait la différence des deux grandeurs observées a et a' .

Considérons sur-le-champ le cas où U serait une fonction linéaire de diverses grandeurs observées, a, a', a'', \dots , de la forme

$$U = \alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \dots,$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, étant des constantes. Soient E, e, e', e'', \dots , les erreurs moyennes de U, a, a', a'', \dots , et $\Pi, \pi, \pi', \pi'', \dots$, le poids de ces erreurs moyennes. On aura

$$U \pm E = \alpha(a \pm e) + \alpha'(a' \pm e') + \alpha''(a'' \pm e'') + \dots,$$

relation qui, en vertu de la précédente, se réduit à

$$\pm E = \pm \alpha e \pm \alpha' e' \pm \alpha'' e'' \pm \dots$$

Le carré du second membre a un certain nombre de valeurs distinctes, suivant la combinaison des signes, mais toutes également admissibles; en éga-

lant leur moyenne au carré du premier membre, tous les doubles produits disparaissent, et il reste

$$E^2 = \alpha^2 e^2 + \alpha'^2 e'^2 + \alpha''^2 e''^2 + \dots,$$

d'où $E = \sqrt{\Sigma \alpha^2 e^2}$. [13]

On a ensuite

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{\alpha^2}{\pi} + \frac{\alpha'^2}{\pi'} + \frac{\alpha''^2}{\pi''} + \dots = \Sigma \frac{\alpha^2}{\pi}. \quad [14]$$

Si la fonction U n'est pas linéaire, et qu'on ait en général

$$U = F(\alpha, \alpha', \alpha'', \dots),$$

on en tire par la différentiation

$$dU = \frac{dF}{d\alpha} d\alpha + \frac{dF}{d\alpha'} d\alpha' + \frac{dF}{d\alpha''} d\alpha'' + \dots = 0.$$

Dans cette relation on peut remplacer les accroissements infiniment petits dU, da, da', da'', ..., par des accroissements finis, pourvu qu'ils soient très-petits les uns et les autres; on peut donc écrire

$$E = \frac{dF}{d\alpha} \cdot e + \frac{dF}{d\alpha'} \cdot e' + \frac{dF}{d\alpha''} \cdot e'' + \dots = 0,$$

relation linéaire entre les erreurs moyennes E, e, e', e'', ...

En opérant comme plus haut, et désignant par K, K', K'', ..., les dérivées $\frac{dF}{d\alpha}, \frac{dF}{d\alpha'}, \frac{dF}{d\alpha''}, \dots$, on trouvera

$$E^2 = \Sigma K^2 e^2, \quad \text{d'où } E = \sqrt{\Sigma K^2 e^2}, \quad [15]$$

et ensuite $\frac{1}{\Pi} = \Sigma \frac{K^2}{\pi}$. [16]

X. Dans beaucoup de circonstances, les grandeurs qu'on mesure sont liées entre elles par des relations mathématiques auxquelles elles doivent satisfaire d'une manière absolue. Ainsi, dans un triangle, la somme des trois angles doit faire 180°; dans un tour d'horizon, la somme des angles mesurés doit faire 360°; dans un nivellement, la différence de niveau des points extrêmes doit être la même, quelle que soit la route que l'on suive pour cheminer de l'un à l'autre; et ainsi de suite. Il est donc nécessaire de corriger les observations de manière à remplir rigoureusement les conditions dont il s'agit.

Soient $F_1(A, A', A'', \dots) = 0,$
 $F_2(A, A', A'', \dots) = 0,$ [17]
 $F_3(A, A', A'', \dots) = 0,$
 \dots

les conditions en nombre m auxquelles les i grandeurs à mesurer A, A', A'', ..., doivent satisfaire; soient a, a', a'', ..., les valeurs moyennes obtenues pour ces grandeurs, et soient x, x', x'', ..., les erreurs dont les mesures sont affectées. Si l'on remplace A, A', A'', ..., par a, a', a'', ..., les seconds membres des équations [17], au lieu d'être nuls, prendront certaines valeurs e₁, e₂, e₃, ..., et l'on aura

$$\begin{aligned} F_1(a, a', a'', \dots) &= e_1, \\ F_2(a, a', a'', \dots) &= e_2, \\ F_3(a, a', a'', \dots) &= e_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad [18] \quad m$$

Maintenant, si l'on remplace dans les équations [17] les quantités A, A', A'', ..., par leurs valeurs a + x, a' + x', a'' + x'', ..., et qu'on développe les premiers membres par la formule de Taylor, en négligeant les produits et les puissances supérieures des erreurs e, e', e'', ..., supposées très-petites, en posant, pour abréger,

$$\frac{dF_1}{d\alpha} = K_1, \quad \frac{dF_1}{d\alpha'} = K'_1, \quad \frac{dF_1}{d\alpha''} = K''_1, \dots,$$

$$\frac{dF_2}{d\alpha} = K_2, \quad \frac{dF_2}{d\alpha'} = K'_2, \quad \frac{dF_2}{d\alpha''} = K''_2, \dots,$$

$$\frac{dF_3}{d\alpha} = K_3, \quad \frac{dF_3}{d\alpha'} = K'_3, \quad \frac{dF_3}{d\alpha''} = K''_3, \dots,$$

et ainsi de suite, on obtiendra

$$\begin{aligned} e_1 + K_1 x + K'_1 x' + K''_1 x'' + \dots &= 0, \\ e_2 + K_2 x + K'_2 x' + K''_2 x'' + \dots &= 0, \quad [19] \\ e_3 + K_3 x + K'_3 x' + K''_3 x'' + \dots &= 0, \quad m \end{aligned}$$

La somme des carrés des erreurs x, x', x'', ..., devant être un minimum, la différentielle de cette somme doit être nulle, et l'on peut écrire:

$$x dx + x' dx' + x'' dx'' + \dots = 0. \quad [20]$$

D'un autre côté, en différenciant les équations [19] par rapport à ces mêmes erreurs, on obtient

$$\begin{aligned} K_1 dx + K'_1 dx' + K''_1 dx'' + \dots &= 0, \quad [21] \\ K_2 dx + K'_2 dx' + K''_2 dx'' + \dots &= 0, \quad m \\ K_3 dx + K'_3 dx' + K''_3 dx'' + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions ces relations respectivement par les coefficients indéterminés α₁, α₂, α₃, ...; ajoutons, et identifions les coefficients des différentielles dx, dx', dx'', ..., dans l'équation résultante et dans l'équation [20]; il viendra

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \dots \\ x' &= \alpha_1 K'_1 + \alpha_2 K'_2 + \alpha_3 K'_3 + \dots \\ x'' &= \alpha_1 K''_1 + \alpha_2 K''_2 + \alpha_3 K''_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad [22] \quad i$$

Ces équations sont en nombre i.

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations [19], on aura m équations entre les m coefficients indéterminés α₁, α₂, α₃, ...; et l'on déterminera ainsi ces coefficients. Par suite, les équations [22] donneront les valeurs des m inconnues x, x', x'', ...; et l'on aura ensuite

$$A = a + x, \quad A' = a' + x', \quad A'' = a'' + x''; \quad \text{et ainsi de suite.}$$

Ces calculs très-symétriques n'ont d'autre inconvénient que leur longueur, comme tout ce qui se rattache aux applications de la méthode des moindres carrés.

XI. Nous avons supposé implicitement que toutes les valeurs moyennes a, a', a'', ..., avaient une égale précision. Si cela n'a pas lieu, on tient compte de cette circonstance en remplaçant chaque erreur x par son rapport à l'erreur moyenne correspondante E. C'est-à-dire qu'au lieu de rendre un minimum la quantité Σ x², on rend un minimum la quantité Σ (x/E)² ou Σ x²/E². Mais, en nom-

mant π le poids de la moyenne a, on a $\frac{1}{E^2} = \pi$; la quantité à rendre minimum est donc Σ π x²; et l'équation [20] se trouve remplacée par l'équation $\pi x dx + \pi' x' dx' + \pi'' x'' dx'' + \dots = 0$. [23]

Les calculs restent d'ailleurs les mêmes.

XII. Il nous reste à faire quelques applications de cette théorie à des questions de Géodésie; c'est, en effet, dans cette science que les considérations qui viennent d'être exposées trouvent le plus fréquemment leur emploi. (Nous ne parlons point de leurs applications à l'astronomie, qui n'entre pas dans le cadre de ce dictionnaire, et l'on trouvera à l'article PROBABILITÉ DU TIR les applications de la théorie des erreurs à la mesure de la précision des armes à feu.)

1. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse de l'étalonnage d'une règle destinée à la mesure d'une base. On comparera cette règle à la règle étalon, et l'on ramènera la mesure obtenue à une température déterminée, à zéro par exemple; on répètera cette comparaison un certain nombre n de fois. D'après les principes de la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot), la moyenne arithmétique de tous les résultats sera l'expression la plus probable de la longueur de la règle à zéro; nous la désignerons par m . En multipliant par le module de dilatation (Voy. les Traités de Physique), on en déduirait la longueur de la règle à une température donnée quelconque. On fera la différence entre la moyenne m et chacune des n mesures effectuées; soient x, x', x'', \dots , les différences, ou erreurs, ainsi obtenues; la quantité $e = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$ sera l'erreur moyenne, et le poids de la moyenne m sera exprimé par $\frac{1}{e^2}$ ou $\pi = \frac{\sum x^2}{n}$.

Si la même règle entre N fois dans la mesure d'une même base, la longueur mesurée par cette règle étant la somme des longueurs de N règles égales, est une fonction linéaire de cette longueur. Si donc dans l'équation [13] on fait $\alpha = 1$, on aura $E = \sqrt{\sum e^2}$ ou $E = \sqrt{N}e = e\sqrt{N}$. Et l'équation [14] donnera

$$\frac{1}{\Pi} = \sum \frac{1}{\pi} = \frac{N}{\pi}.$$

Ainsi l'erreur moyenne est multipliée par la racine carrée du nombre N de fois que la règle considérée entre dans la mesure de la base; et le poids Π de la moyenne obtenue se trouve N fois moindre que le poids relatif à la longueur de la règle, puisqu'on a $\Pi = \frac{\pi}{N}$.

2. Considérons maintenant les différentes erreurs auxquelles la mesure d'une base peut donner lieu dans les cas ordinaires.

Premièrement, on fait usage de plusieurs règles L', L'', L''', \dots . Soient N', N'', N''', \dots , les nombres de fois que chacune d'elles entre dans la mesure de la base; soient E', E'', E''', \dots , les erreurs moyennes relatives à chaque règle, $\Pi', \Pi'', \Pi''', \dots$, les poids respectifs relatifs à la mesure de chacune. La longueur totale étant encore ici une fonction linéaire des longueurs partielles, on pourra appliquer les équations [13] et [14] en y faisant $\alpha = 1$. Si donc on désigne par E l'erreur moyenne totale, et Π le poids relatif à la mesure totale obtenue, on aura

$$E = \sqrt{E'^2 + E''^2 + E'''^2 + \dots},$$

et
$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{\Pi'} + \frac{1}{\Pi''} + \frac{1}{\Pi'''} + \dots$$

En second lieu, indépendamment des erreurs dues à l'étalonnage des règles, il y a des erreurs accidentelles, provenant de la pose de ces règles. Pour les apprécier, on mesure ordinairement la base deux fois, en cheminant une première fois dans un sens, et une seconde fois en sens contraire; et, de plus, on divise la base en deux parties dont on apprécie la longueur séparément dans chacune des deux opérations. Soit B la longueur obtenue pour cette même partie dans la seconde

opération. La valeur la plus probable de la longueur de cette partie sera $\frac{1}{2}(B + B')$; l'erreur de la première mesure sera $\frac{1}{2}(B + B') - B$ ou $\frac{B' - B}{2}$, dont le carré est $\frac{(B' - B)^2}{4}$, ou $\frac{\delta^2}{4}$ en désignant par δ la différence des deux mesures; on trouve le même résultat pour le carré de l'erreur commise sur la seconde mesure; il en résulte que l'erreur moyenne sur la mesure de cette première partie est

$$\sqrt{2 \cdot \frac{\delta^2}{4}} \text{ ou } \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

en vertu de l'équation [13]. Si N désigne le nombre des règles employées dans cette première partie, l'erreur moyenne résultant de la pose d'une règle sera, en vertu de cette même équation [13] $\frac{\delta}{\sqrt{2N}}$, puisque la mesure a été effectuée deux fois, et a conséquemment employé $2N$ règles.

Cette expression revient à $\frac{\delta}{2\sqrt{N}}$. Si δ' est la différence des mesures obtenues pour la seconde partie de la base, et N' le nombre des règles employées dans une des deux mesures, on trouvera de même pour l'erreur moyenne due à la pose d'une règle $\frac{\delta'}{2\sqrt{N'}}$. L'erreur moyenne résultant de la pose d'une règle, d'après les résultats relatifs aux deux parties, est donc

$$\sqrt{\left(\frac{\delta}{2\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{\delta'}{2\sqrt{N'}}\right)^2} \text{ ou } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta^2}{N} + \frac{\delta'^2}{N'}}.$$

Et, puisqu'il y a eu en tout $N + N'$ règles employées, l'erreur totale résultant de la pose des règles est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta^2}{N} + \frac{\delta'^2}{N'}} \sqrt{N + N'}. \quad [\text{éq. 13}]$$

On obtiendrait le poids correspondant en élevant au carré et prenant l'inverse.

Si E_1 désigne cette seconde erreur, l'erreur moyenne totale sera exprimée par $\sqrt{E^2 + E_1^2}$; et le poids définitif de la mesure moyenne de la base sera

$$\Pi = \frac{1}{E^2 + E_1^2}.$$

La base *Trenk-Mednicken*, mesurée par Bessel en 1832, n'a donné qu'une erreur moyenne totale de 1^{me}, 816, sur une longueur de 935 toises; et le colonel Baeyer, qui a mesuré en 1846, près de Berlin, une base de 1198 toises, n'a trouvé qu'une erreur moyenne totale de 1^{me}, 341.

XIII. 3. Nous supposons maintenant qu'il s'agisse de la mesure d'un angle simple. Cette mesure donne lieu à deux genres d'erreurs : erreur de pointé ou de collimation, et erreur de lecture, cette dernière comprenant l'erreur due à l'inexacte division du limbe. — Pour apprécier l'erreur de pointé, on se place en avant d'une lunette méridienne d'un fort grossissement, et l'on vise le fil vertical de cette lunette; regardant ensuite par la lunette même, on voit l'erreur de pointé amplifiée par le grossissement, et on l'apprécie à l'aide du micromètre. En répétant cette opération, un grand nom-

bre de fois, on peut déterminer avec une grande probabilité l'erreur moyenne du pointé. — Pour apprécier l'erreur de lecture, on mesure un grand nombre de fois l'angle formé par les rayons visuels menés vers deux signaux parfaitement nets. La moyenne des observations donne l'angle mesuré; on prend les différences entre la moyenne et chacune des observations particulières, et l'on calcule la racine carrée de la somme des carrés de ces différences; on a ainsi l'erreur moyenne totale E. Or, si ϵ désigne l'erreur moyenne de pointé et e' l'erreur moyenne de lecture, comme, dans la mesure d'un angle simple, il y a deux pointés et deux lectures, on doit avoir

$$E = \sqrt{2e'^2 + 2\epsilon^2}, \quad [24]$$

d'où l'on tire $e' = \sqrt{\frac{E^2}{2} - \epsilon^2}$.

Pour déterminer l'erreur moyenne commise dans la mesure d'un angle simple, on pourra dès lors se servir de la formule [24], dans laquelle E sera l'inconnue.

Bessel évalue à 0",837 l'erreur moyenne d'un pointé, et à 1",872 l'erreur moyenne d'une lecture; mais dans les circonstances ordinaires il convient d'augmenter beaucoup ces nombres. Il y a tel instrument de mesure avec lequel on ne peut pas répondre d'un angle à 2' près.

Voyons maintenant comment on évalue l'erreur moyenne commise dans la mesure d'un angle par la méthode des répétitions. (Voy. CERCLE RÉPÉTITEUR). Soit α la valeur de l'angle cherché, n le nombre des répétitions; $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ les arcs compris entre le zéro de la division du limbe et les points où l'alidade est successivement amenée; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ les angles successifs que l'alidade, dirigée vers le premier signal, fait avec la ligne de foi; $\alpha_0 + \alpha, \alpha_1 + \alpha, \alpha_2 + \alpha, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha$ seront les angles que l'alidade dirigée vers le second signal fait avec cette même ligne. Si l'on désigne par ϵ la somme des carrés des erreurs, on aura donc

$$\epsilon = (u_0 - \alpha_0)^2 + (u_1 - \alpha_0 - \alpha)^2 + (u_1 - \alpha_1)^2 + (u_2 - \alpha_1 - \alpha)^2 + (u_2 - \alpha_2)^2 + (u_3 - \alpha_2 - \alpha)^2 + \dots + (u_n - \alpha_{n-1} - \alpha)^2.$$

Ce qu'on peut écrire

$$\epsilon = \sum_0^{n-1} (u_i - \alpha_i)^2 + \sum_1^n (u_i - \alpha_{i-1} - \alpha)^2.$$

Égalant à zéro les dérivées par rapport aux quantités u et par rapport à α , on obtient les deux équations

$$\sum_0^{n-1} u + \sum_1^n u - 2\sum \alpha - n\alpha = 0 \quad [25]$$

et $\sum_1^n u - \sum \alpha - n\alpha = 0. \quad [26]$

Si l'on soustrait membre à membre, on trouve

$$\sum_0^{n-1} u - \sum \alpha = 0, \text{ d'où } \sum \alpha = \sum_0^{n-1} u,$$

et, en substituant dans l'équation [26], on obtient

$$\sum_1^n u - \sum_0^{n-1} u - n\alpha = 0, \text{ d'où } \alpha = \frac{\sum_1^n u - \sum_0^{n-1} u}{n};$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{u_n - u_0}{n}. \quad [27]$$

Ainsi la valeur la plus probable de l'angle cherché est mesurée sur le limbe par la $n^{\text{ième}}$ partie de la course totale de l'alidade, ce qui est conforme à la règle suivie par tous les observateurs.

Cette mesure est affectée de $2n$ erreurs de pointé,

et de 2 erreurs de lecture. L'erreur moyenne résultant du pointé est $\epsilon\sqrt{2n}$, en continuant à appeler ϵ l'erreur de pointé sur un angle simple; et l'erreur moyenne résultant de la lecture est $e'\sqrt{2}$, e' désignant l'erreur due à une seule lecture. L'erreur moyenne de l'opération est la racine carrée de la somme des carrés des deux erreurs qu'on vient d'évaluer, c'est-à-dire

$$\sqrt{2ne^2 + 2e'^2}.$$

L'erreur moyenne E commise sur l'angle α est donc égale au quotient de cette expression par \sqrt{n} [éq. 13], c'est-à-dire que l'on a

$$E = \frac{\sqrt{2ne^2 + 2e'^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2 \cdot \left(e^2 + \frac{e'^2}{n} \right)}. \quad [28]$$

On voit qu'à mesure que le nombre des répétitions augmente, l'erreur due aux deux lectures tend à disparaître devant l'erreur due aux pointés, ce qui n'a pas lieu dans la méthode de répétition usitée en Allemagne, attendu que la mesure de chaque angle simple donne alors lieu à deux pointés et à deux lectures.

On voit aussi que la méthode de répétition, contrairement à l'opinion la plus générale, ne tend à faire disparaître que l'erreur de lecture; mais que l'erreur probable sur le pointé est indépendante du nombre des répétitions.

Dans la méthode par répétition l'erreur probable ne dépend pas non plus du nombre de fois que l'angle a été mesuré, et la valeur de cette méthode est tout à fait problématique.

XIV. 4. Lorsque, dans une opération trigonométrique, on a mesuré directement les trois angles d'un triangle, leur somme diffère presque toujours de 180 degrés, et l'on est dans l'habitude de répartir également l'erreur sur les trois angles. Cette règle n'est pas uniquement fondée sur une raison de symétrie; on démontre comme il suit que c'est celle qui donne les résultats les plus probables. En effet, soient x, y, z les valeurs obtenues pour les trois angles, A et B les valeurs exactes des deux premiers; $180^\circ - A - B$ sera la valeur exacte du troisième. La somme des carrés des erreurs aura donc pour expression

$$(A - x)^2 + (B - y)^2 + [(180^\circ - A - B) - z]^2.$$

Si l'on égale à zéro les dérivées de cette quantité par rapport à A et B, on obtient

$$A - x - [(180^\circ - A - B) - z] = 0,$$

et $B - y - [(180^\circ - A - B) - z] = 0,$

d'où l'on tire

$$A = \frac{180^\circ - y - z + 2x}{3} = x + \frac{180^\circ - (x + y + z)}{3},$$

ou, en appelant δ la différence entre la somme des trois angles obtenus et 180° ,

$$A = x + \frac{1}{3}\delta.$$

On trouve de même

$$B = y + \frac{1}{3}\delta$$

et par conséquent

$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - x - y - \frac{2}{3}\delta$$

$$= 180^\circ - x - y - z + z - \frac{2}{3}\delta$$

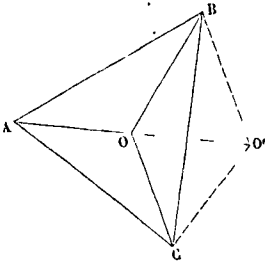
$$= \delta + z - \frac{2}{3}\delta = z + \frac{1}{3}\delta,$$

ce qui justifie la règle adoptée.

On démontrerait de la même manière que lorsqu'on fait un *tour d'horizon* et que la somme des angles obtenus diffère de 360°, on doit répartir également la différence sur tous les angles.

XV. 5. Mais la règle suivie pour un triangle isolé n'est plus applicable lorsque ce triangle fait partie d'un réseau trigonométrique, parce qu'il faut satisfaire à d'autres conditions. Il est d'usage de viser de chaque station tous les signaux qu'on peut apercevoir d'une manière nette; chaque point se trouve donc déterminé par le *recoupement* de trois directions au moins, et cette circonstance introduit dans le calcul des angles une condition à laquelle il faut avoir égard.

Supposons, par exemple, que le point O soit dé-



terminé par le recoupement de trois rayons visuels menés des sommets d'un triangle ABC; voici, d'après Gerling, habile observateur prussien, la méthode que l'on peut employer. On a identiquement

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{\sin OBA}{\sin OAB} \cdot \frac{\sin OCB}{\sin OBC} \cdot \frac{\sin OAC}{\sin OCA} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\log \sin OBA + \log \sin OCB + \log \sin OAC \\ - \log \sin OAB - \log \sin OBC - \log \sin OCA = 0.$$

On a de plus

$$\begin{aligned} OAB + OBA + AOB &= 180^\circ, \\ OBC + OCB + BOC &= 180^\circ, \\ OCA + OAC + AOC &= 180^\circ, \\ AOB + BOC + AOC &= 360^\circ. \end{aligned}$$

(La relation qui exprime que la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180° est une conséquence des quatre dernières.) Ces cinq conditions doivent être rigoureusement satisfaites. On appliquera donc la méthode exposée au § X, et l'on déterminera ainsi les valeurs les plus probables des 9 angles qui entrent dans ces relations.

On voit sans peine que le point O n'est point assujéti à se trouver dans l'intérieur du triangle, et que la même méthode serait applicable s'il était au dehors, en O' par exemple. Seulement la dernière condition

$$AOB + BOC + AOC = 360^\circ$$

serait remplacée par la condition

$$AO'B + AO'C - BO'C = 0.$$

On opérerait d'une manière semblable pour un point qui serait déterminé par le recoupement de 4 directions. Le premier membre de l'identité qui sert de point de départ contiendrait alors 4 rapports au lieu de 3; et l'on aurait 6 conditions entre

12 angles inconnus. Si le point était donné par le recoupement de 5 directions, on obtiendrait 7 conditions entre 15 angles inconnus. Et ainsi de suite. En général, si le point était donné par le recoupement de n directions, on aurait $n + 2$ conditions entre $3n$ angles inconnus.

XVI. 6. Pour donner un exemple du cas où l'on aurait à satisfaire à une condition renfermant des côtés, concevons qu'on ait mesuré un côté a d'un triangle et les deux angles B et A, et que l'on demande l'erreur à craindre sur le côté b résultant du calcul. On aura la relation

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

c'est la condition à remplir. On en tirera

$$\frac{db}{da} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{db}{dB} = \frac{a \cos B}{\sin A},$$

$$\frac{db}{dA} = -\frac{a \sin B \cos A}{\sin^2 A} = -b \cot A.$$

Ces expressions seront les valeurs des coefficients K_1, K_1', K_1'' à employer dans l'application de la méthode du § X. Le nombre m des conditions se trouve réduit à un . Mais il faut remplacer la relation [20] par la relation [23], puisque les observations peuvent être de précisions différentes.

Si, par exemple, on a trouvé $a = 106^m$, avec une erreur moyenne de $0^m,06$; si l'angle B a été trouvé de $120^\circ 7'$, et que l'angle A, donné par 4 répétitions, ait été trouvé de $29^\circ 39'$, l'instrument donnant lieu à une erreur moyenne de $2'$, on verra, en appliquant les méthodes ci-dessus développées, que le côté b est de $185^m,34$, avec une erreur moyenne de $0^m,15$.

XVII. 7. Lorsqu'il s'agit d'opérer la compensation générale d'un réseau trigonométrique, il faut écrire successivement toutes les équations de conditions relatives aux angles des triangles principaux, et toutes celles qui se rapportent aux points obtenus par le recoupement de plusieurs directions, et appliquer la méthode du § X à l'ensemble de toutes ces conditions. On conçoit que lorsqu'il s'agit d'une triangulation un peu importante, cette méthode donne lieu à des calculs formidables. Cependant elle est aujourd'hui usitée en Allemagne.

Une méthode analogue est employée pour la compensation des nivellements. Elle est fondée sur ce que la somme algébrique des différences de niveau des trois sommets d'un triangle est nécessairement égale à zéro, ce qui fournit une équation de condition entre les trois différences supposées observées directement. (Si cette condition est remplie pour tous les triangles du réseau, elle se trouve par cela même satisfaite pour un polygone quelconque formé de ces triangles.) On écrira donc la condition pour chaque triangle, et l'on appliquera la méthode du § X pour déterminer les valeurs les plus probables des différences de hauteur des divers sommets du réseau.

Pour le développement complet de ces méthodes de compensation, nous ne pouvons que renvoyer le lecteur aux ouvrages spéciaux, particulièrement aux ouvrages de Gauss, intitulés : *Theoria motus corporum caelestium* (1809), et *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxia* (1823), et au mémoire de Bessel ayant pour titre : *Gradmessung in Ost-Preussen*. On peut encore consulter avec fruit le *Calcul des Probabilités*, de M. Liagre.

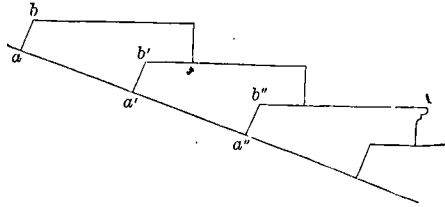
ESCALIERS (Coupe des pierres), constructions formées de pierres en retraite les unes au-dessus des autres, et servant de communication entre les parties d'un édifice situées à des niveaux différents. Chacune des pierres qui composent un escalier est ce qu'on appelle une *marche*. Elle présente à l'extérieur deux faces, dont l'une, horizontale, est la marche proprement dite, et l'autre, verticale, est la *contre-marche*. Ces deux faces se coupent suivant une arête saillante horizontale, dont la longueur s'appelle l'*emmachement*. La partie d'une marche qui n'est pas recouverte par la marche suivante, porte le nom de *giron*. Dans les escaliers droits, où les arêtes saillantes des marches sont toutes parallèles, le giron a une largeur constante. Dans les escaliers tournants, où les arêtes ne sont plus parallèles, on mesure la largeur du giron sur une courbe tracée parallèlement à la projection horizontale de la rampe, à une distance de 48 centimètres de cette projection, et que l'on appelle la *ligne de foulée*, parce que c'est la projection de celle que l'on parcourt en montant ou en descendant lorsqu'on s'appuie sur la rampe. — La hauteur des marches doit rester la même dans toute l'étendue d'un même escalier; cette hauteur varie entre 11 et 19 centimètres; sa valeur la plus habituelle est de 16 centimètres. La largeur du giron, mesurée sur la ligne de foulée, doit aussi rester, autant que possible, la même pour un même escalier, afin que la *pente* demeure constante; cette longueur varie entre 25 et 40 centimètres; sa valeur la plus habituelle est de 32 centimètres. Les anciens constructeurs adoptaient pour règle la relation

$$g + 2h = 64^{\text{cm}}$$

en désignant par g la largeur du giron mesurée, comme nous l'avons dit, sur la ligne de foulée, et par h la hauteur de la marche. On sent que cette règle ne saurait être absolue. — Lorsqu'un escalier est interrompu par des *paliers*, la suite de marches comprises entre deux paliers consécutifs est ce qu'on appelle une *volée* ou une *rampe*. On ne donne pas à un palier moins de 0^m, 80; et le nombre des marches composant une volée ne doit être ni inférieur à 3, ni supérieur à 21; une rampe de plus de 21 marches serait fatigante, et une rampe de 2 marches serait dangereuse parce qu'elle pourrait ne pas être aperçue dans l'obscurité; elle offrirait d'ailleurs un aspect disgracieux. L'habitude est d'adopter pour ce nombre de marches un nombre impair.

Les marches peuvent être scellées par les deux bouts dans deux murs parallèles: on dit alors que l'escalier est *à repos*; dans ce cas l'escalier est souvent soutenu par un *berceau rampant* (Voy. DESCENTE). Les marches d'un escalier à repos peuvent n'être scellées dans le mur que par un seul bout, mais soutenues par une voûte en *ENCORBELLEMENT* (Voy. ce mot). Enfin, il peut arriver que les marches n'étant engagées dans le mur que par un bout, ne soient supportées par aucune construction étrangère, et que le dessous des marches forme une surface continue; on dit alors que l'escalier est *suspendu*. Dans ce cas, le bout des marches opposé au mur formant la cage de l'escalier est souvent engagé dans un petit mur suspendu lui-même, qui donne plus de rigidité à l'assemblage, et que l'on appelle un *limon* (Voy. ce mot). Dans un escalier

jours réunies par un joint normal à la surface inférieure de l'escalier, à laquelle on donne le nom d'intrados, par analogie avec les voûtes (Voy. ce mot). Si l'escalier est droit, l'intrados est un plan incliné, et les joints sont perpendiculaires à ce plan, comme le montre la figure en $ab, a'b', a''b''$. — Si



l'escalier suspendu est un escalier tournant, l'intrados est une surface gauche dont la génération est indiquée à l'article *VIS-À-JOUR*. Le joint devrait alors être une surface normale à cette surface gauche en tous les points d'une même génératrice; mais à cause des difficultés que présenterait l'exécution, on se contente de prendre pour joint un plan mené par la génératrice qui sert d'arête de douelle à l'intrados, et par la normale à cet intrados au milieu de cette arête (Voy. *VIS-À-JOUR*).

Dans les escaliers tournants, les arêtes saillantes des marches sont, sauf des cas exceptionnels, normales à la courbe que forme la rampe. Il en résulte que, lorsque l'escalier présente une partie droite suivie d'une partie courbe, la largeur des marches du côté de la rampe se trouve diminuée tout à coup quand on passe de la partie droite à la partie courbe, ce qui peut être dangereux ou au moins incommode. On remédie à cet inconvénient en répartissant la diminution d'une manière progressive sur un plus grand nombre de marches. Il y a pour cela plusieurs méthodes, que l'on trouvera décrites à l'article *BALANCEMENT*.

Les escaliers que l'on étudie particulièrement dans la coupe des pierres sont l'escalier suspendu ou *VIS-À-JOUR*, déjà mentionné, l'escalier dit *VIS-À-NOYAU PLEIN*, et enfin la *VIS-SAINT-GILLES*, ronde ou carrée (Voy. ces mots).

Les arêtes saillantes des marches sont souvent remplacées par des moulures arrondies, comme on le voit en A.

ESCALIERS (Charpente). Les escaliers en bois sont soumis aux mêmes règles générales que les escaliers en pierre, en ce qui touche la hauteur moyenne des marches, la largeur moyenne du giron, l'emmachement, le nombre moyen des marches formant une volée, le balancement, la courbe de jour, la ligne de foulée, la développée de cette ligne, la surface gauche sur laquelle doivent se trouver les arêtes saillantes des marches, celle qui forme le dessous de l'escalier, le limon, la détermination des plans normaux qui doivent former les joints, etc., etc. Nous n'aurons donc à signaler ici que les différences de détails.

Les marches peuvent être pleines, comme l'indique la figure 1; et, dans ce cas, tout ce qui concerne les marches en pierre est applicable aux marches en bois. Mais les marches pleines ne sont en usage que pour les escaliers destinés à supporter de lourds fardeaux. Ordinairement les marches sont

creuses, et formées chacune d'une planche horizontale formant la marche proprement dite, et d'une planche verticale formant la contre-marche, comme l'indique la figure 2.

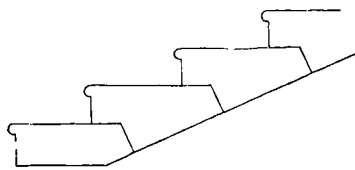


Fig. 1.

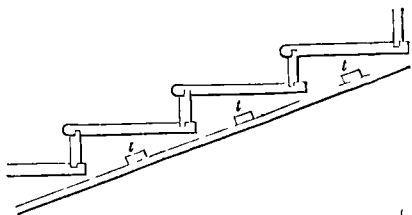


Fig. 2.

Chaque contre-marche est assemblée à rainure et languette (Voy. ASSEMBLAGES) avec la marche inférieure et avec la marche supérieure. Au-dessous des marches, sont disposées des traverses horizontales t, t, t , dont la figure ne montre que le bout, et qui sont destinées à recevoir le lattis sur lequel on établit la couche de plâtre qui forme le plafond de l'escalier. Ces traverses sont indépendantes des marches, afin que les oscillations de celles-ci ne détruisent pas l'enduit du plafond. — Les marches, contre-marches et traverses sont encastrées par une de leurs extrémités dans le mur formant la cage de l'escalier. Si cette cage est en PANS DE BOIS (Voy. ce mot), on dispose sur ces pans de bois, à la hauteur et dans la direction de l'escalier, une pièce de bois inclinée, destinée à recevoir le bout des marches, des contre-marches et des traverses, et à laquelle on donne le nom de *faux limon*. Dans les anciennes constructions, les marches, contre-marches et traverses étaient encastrées par l'autre extrémité dans un pilastre ou dans un poteau en bois formant le *noyau* de l'escalier. Mais, à moins de donner au noyau des dimensions transversales considérables, on est obligé de réduire de ce côté la largeur des marches à tel point que l'escalier devient incommode et même dangereux. Les escaliers modernes sont à jour; le noyau est supprimé; et le bout des marches, contremarches et traverses s'engage dans un limon, droit ou courbe, analogue au limon des escaliers en pierre. Il n'y a de différence que dans la disposition des joints. Au lieu d'un simple joint normal, qui peut suffire dans les limons en pierre à cause de l'adhérence des mortiers, on adopte généralement, dans les limons en bois, un joint brisé, comme celui que représente la figure 3, et qui se compose de trois faces : la face $abcd$ est la surface hélicoïde moyenne du limon; les faces $aefd$ et $bchg$ sont des plans parallèles au plan normal à l'hélice moyenne HH mené par le centre I de la face $abcd$. Généralement on remplace la face hélicoïde $abcd$

par un plan, que l'on mène par le point I , soit tangentielllement à la surface hélicoïde moyenne, soit parallèlement à l'horizon. On ajoute souvent des tenons et des mortaises correspondantes aux faces

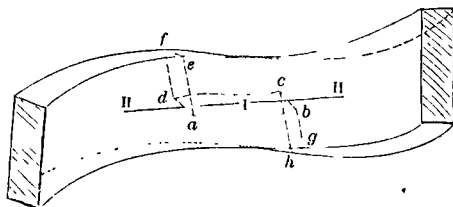


Fig. 3.

$aefd$ et $bchg$. Dans tous les cas on relie les deux parties du limon par des boulons ou par des bandes de fer appliquées sur les faces hélicoïdes supérieure et inférieure.

Dans beaucoup d'escaliers modernes, on taille la partie supérieure du limon en forme de crémaillère dont les faces sont alternativement horizontales et verticales. Les faces horizontales reçoivent à plat le bout des marches, et les faces verticales reçoivent de même le bout des contre-marches. Cette disposition, qui tendrait à diminuer la résistance du limon, exige qu'on lui donne plus d'épaisseur. La rampe, au lieu d'être posée sur la face supérieure du limon, est alors fixée en dehors.

Il y a des escaliers dans lesquels on supprime tout à fait le limon; et les bouts libres des marches ne sont maintenus que par leur mutuel assemblage. Ceci exige que l'escalier n'ait point de lourdes charges à supporter.

Quelquefois, au contraire, et c'est le cas des escaliers à vis si fréquemment employés aujourd'hui dans les magasins, l'escalier n'a point de cage; et il est nécessaire de lui donner deux limons : l'un extérieur qui remplace la cage, l'autre intérieur qui remplace, comme nous l'avons vu, le noyau.

Dans les escaliers en bois qui ont des parties droites et des parties courbes, la partie courbe du limon porte le nom d'*échiffre*. Mais on donne le nom général de *courbe rampante* à toutes les pièces courbes qui entrent dans la construction d'un escalier tournant, telles que le LIMON, la MAIN COURANTE (Voy. ces mots); par extension, l'escalier tournant lui-même est souvent désigné par l'expression de *courbe rampante*. (Voy. ESCALIERS, VIS-À-JOUR.)

Les *paliers* des escaliers en bois sont des planchers ordinaires formés de solives encastrées par un bout dans la cage de l'escalier et par l'autre bout dans une poutre qui a la largeur du palier, et qui forme la dernière marche de la rampe qu'on vient de parcourir en montant, ou la première marche de la rampe suivante. On lui donne pour cette raison le nom de *marche palière*. (Voy. PALIERS.)

ESCARPE, paroi extérieure d'un ouvrage de fortification, depuis le fond du fossé jusqu'au pied du talus extérieur du parapet, ou à la magistrale. Dans les ouvrages de fortification passagère on donne à l'escarpe une pente de $\frac{2}{3}$

à $\frac{1}{2}$, suivant la consistance des terres. Dans les ouvrages de fortification permanente, où l'escarpe

est revêtu en maçonnerie, on lui donne une pente beaucoup moindre, que les ingénieurs modernes ont fixée à $\frac{1}{20}$. L'escarpe du corps de place doit avoir au moins 10^m pour être à l'abri de l'escalade; on ne donne que 8^m à l'escarpe des demi-lunes, 6^m à celle des cavaliers, 5^m aux réduits de demi-lune et des retranchements en terre.

ESCOMPTE, retenue que l'on opère sur la somme énoncée dans un effet de commerce lorsqu'on l'acquitte avant son échéance.

En France, l'escompte se calcule comme l'INTÉRÊT SIMPLE (Voy. ce mot); en sorte qu'en nommant a la somme énoncée dans le billet, n le nombre de jours qui restent à courir jusqu'au jour de l'échéance, t le taux de l'intérêt, et e l'escompte, on a

$$e = \frac{atn}{36000} \text{ fr.} \quad [1]$$

Mais si c'est un banquier qui escompte le billet, il prend ordinairement en outre une *commission*, qui est presque toujours de $\frac{1}{2}$ pour 100 de la somme

énoncée; dans cette hypothèse on aurait

$$e = \frac{atn}{36000} + \frac{a}{200}. \quad [2]$$

Si, par exemple, on a à faire escompter un billet de 1280^{fr}, payable dans 90 jours, le taux étant de 6 pour 100, la retenue sera, par la première formule,

$$e = \frac{1280 \cdot 6 \cdot 90}{36000} = 19^f, 20;$$

et par la seconde,

$$e = 19^f, 20 + \frac{1280}{200} = 25^f, 60.$$

L'escompte, tel qu'on le pratique en France, porte le nom d'*escompte en dehors*. Mais, dans quelques autres pays, on prend l'*escompte en dedans*; c'est-à-dire que l'on considère la somme énoncée dans le billet comme un capital augmenté de son intérêt pour le temps indiqué par l'échéance; et c'est cet intérêt que l'on retranche de la somme énoncée lorsqu'on escompte le billet. Cette méthode, beaucoup moins commode que celle que l'on suit en France, est cependant plus rationnelle. Jean achète à Pierre une certaine marchandise au prix de 100^{fr}, s'il paye comptant, ou au prix de 100^{fr} augmentés de leurs intérêts à 6 pour 100 s'il ne paye que dans un an. Si Jean choisit ce dernier mode, il souscrit à Pierre un billet de 106^{fr} payable dans un an. Supposons maintenant que Pierre veuille, le jour même, échanger ce billet contre de l'argent; il s'adresse à un banquier qui l'achète et lui en paye la valeur. Mais la valeur actuelle du billet n'est pas 106^{fr}; il ne vaudra 106^{fr} que dans un an; aujourd'hui il ne vaut que les 100^{fr}, prix, au comptant, de la marchandise livrée; le banquier ne payera donc ce billet que 100^{fr}; c'est-à-dire qu'il retiendra 6^{fr} sur 106^{fr}. — Si Jean, au lieu de payer dans un an, payait dans 6 mois, il n'aurait à tenir compte que des intérêts de 100^{fr} à 6 pour 100 pendant 6 mois; il souscrirait un billet de 103^{fr}; et si Pierre le faisait escompter immédiatement, le banquier ne donnerait toujours que 100^{fr}, c'est-à-dire qu'il retiendrait 3^{fr} sur 103^{fr}. C'est en cela que consiste l'escompte en dedans; et il est facile d'établir la formule générale de cet escompte. Soit t le

taux de l'intérêt, n le nombre de jours à courir jusqu'au jour de l'échéance, a la somme énoncée dans le billet et e l'escompte en dedans. L'intérêt de 100^{fr} pour 360 jours étant t , l'intérêt pour 1 jour serait $\frac{t}{360}$, et l'intérêt pour n jours sera $\frac{nt}{360}$. Si Jean,

qui doit 100^{fr} aujourd'hui, ne paye que dans n jours, il devra donc payer $100^r + \frac{nt}{100}$; il souscrira

donc un billet de $100^r + \frac{nt}{100}$ payable dans n jours.

Si Pierre veut le faire escompter le jour même, le banquier ne payera que 100^{fr}; il retiendra donc $\frac{nt}{360}$ sur $100^r + \frac{nt}{360}$. Sur la somme a il retiendra donc un escompte e donné par la proportion

$$100 + \frac{nt}{360} : \frac{nt}{360} = a : e,$$

ou $36000 + nt : nt = a : e;$

$$\text{d'où} \quad e = \frac{ant}{36000 + nt}, \quad [3]$$

formule qui diffère de la formule [1] de l'escompte en dehors en ce qu'au dénominateur le nombre 36 000 est augmenté du produit nt . On peut énoncer cette formule en disant que, pour obtenir l'escompte en dedans, il faut multiplier la somme énoncée dans le billet par le produit du taux et du nombre de jours, et diviser le résultat par 36 000 augmenté de ce même produit. Si, par exemple, on a, comme ci-dessus, $a = 1280^r$, $n = 90$ et $t = 6$, on trouvera

$$e = \frac{1280^r \cdot 90 \cdot 6}{36000 + 90 \cdot 6} = 18^r, 92.$$

Si l'on a égard à une commission de c pour 100, il faudra, au second membre de la formule [3], ajouter $\frac{ac}{100}$, ce qui donnera

$$e = \frac{ant}{36000 + nt} + \frac{ac}{100}. \quad [4]$$

Pour $c = \frac{1}{2}$ on trouverait, les autres données restant les mêmes que ci-dessus,

$$e = 18^r, 92 + 6^r, 40 = 25^r, 32.$$

L'escompte en dedans n'est, d'après ce qui a été dit plus haut, que l'intérêt de la valeur actuelle du billet. En y ajoutant l'intérêt de cet intérêt, on retombe sur l'escompte en dehors. En effet, reprenons la formule [3]; l'intérêt de e est, d'après la formule de l'INTÉRÊT SIMPLE (Voy. ce mot),

$$\frac{ent}{36000}.$$

En l'ajoutant à e , on obtient

$$e + \frac{ent}{36000} \text{ ou } e \cdot \frac{36000 + nt}{36000},$$

ou, en remettant pour e sa valeur [3] et simplifiant,

$$\frac{ant}{36000},$$

ce qui est bien l'escompte en dehors.

Nous avons supposé jusqu'ici que le billet était escompté le jour même où il était souscrit; il n'en est pas ordinairement ainsi. Mais s'il s'agit de l'escompte en dehors, on se contente de prendre l'intérêt de la somme énoncée pour le nombre de jours qui restent à courir depuis le jour de l'escompte jusqu'au jour de l'échéance, sans tenir compte du

temps déjà écoulé depuis l'époque où le billet a été souscrit. Supposons, par exemple, qu'un billet de 1800^{fr}, souscrit le 1^{er} avril et payable le 1^{er} juillet, soit escompté le 10 mai, au taux de 5 pour 100. Du 10 mai au 1^{er} juillet il y a 52 jours; on aura donc, en employant la formule [1], s'il n'y a pas de commission à retenir,

$$e = \frac{1800 \cdot 52 \cdot 5}{36000} = 13^{\text{fr}}.$$

Mais, s'il s'agit de l'escompte en dedans, on suit une règle plus rigoureuse qui peut s'énoncer ainsi : *Multiplier la somme énoncée dans le billet par le taux et par le nombre de jours qui restent à courir depuis le jour de l'escompte jusqu'à l'échéance; et diviser le résultat par 36 000, augmenté du produit du taux par le nombre total de jours compris entre l'échéance et le jour où le billet a été souscrit.* Cette règle peut être justifiée de la manière suivante : Soit n' le nombre de jours qui restent à courir depuis le moment où l'on escompte le billet jusqu'à son échéance. L'escompte en dedans pour les n jours devant être,

$$\frac{ant}{36000 + nt'}$$

la valeur du billet au jour de sa signature est a moins cet escompte, c'est-à-dire

$$a - \frac{ant}{36000 + nt'} \text{ ou } \frac{36000 a}{36000 + nt'}$$

Au moment où l'on escompte effectivement le billet, il s'est écoulé depuis sa signature $n - n'$ jours; sa valeur réelle a donc augmenté de ses intérêts pour ces $n - n'$ jours, c'est-à-dire qu'elle a été multipliée par

$$1 + \frac{(n - n') t}{36000};$$

elle est donc devenue

$$\frac{36000 a}{36000 + nt'} \left[1 + \frac{(n - n') t}{36000} \right] \text{ ou } \frac{a(36000 + nt - n't)}{36000 + nt'}$$

ou encore $a \left(1 - \frac{n't}{36000 + nt'} \right),$

ou enfin $a - \frac{an't}{36000 + nt'}$.

L'escompte à prendre, ou ce qu'il faut retrancher de a , est donc

$$e' = \frac{an't}{36000 + nt'} \quad [5]$$

formule qui, traduite en langage ordinaire, revient à l'énoncé ci-dessus.

Appliquée à l'exemple qui précède, elle donnerait

$$e' = \frac{1800 \cdot 52 \cdot 5}{36000 + 90 \cdot 52} = 12^{\text{fr}}, 84.$$

Les formules [1], [2], [3], [4], [5], contenant plusieurs quantités variables, peuvent servir à résoudre divers problèmes inverses. Mais ces problèmes, qui sont d'excellents exercices d'arithmétique ou d'algèbre, sont inusités dans la pratique. Nous nous contenterons, comme exemple, de résoudre le suivant :

Un billet de 8100^{fr} escompte en dedans à 5 pour 100, 72 jours avant son échéance, a donné lieu à une retenue de 80^{fr}. On demande combien il s'était écoulé de jours depuis la signature du billet?

Dans la formule [5], il faut faire :

$$a = 8100^{\text{fr}}, \quad n' = 72, \quad t = 5 \quad \text{et} \quad e' = 80;$$

elle devient ainsi

$$80^{\text{fr}} = \frac{8100^{\text{fr}} \cdot 72 \cdot 5}{36000 + n \cdot 5} = \frac{8100 \cdot 72}{7200 + n}$$

On en tire $7200 + n = \frac{8100 \cdot 72}{80} = 7290,$

d'où $n = 90.$

Le nombre de jours demandé est donc $90 - 72$, ou 18. (*Voy. nos Problèmes et Exercices d'arithmétique et d'algèbre.*)

On donne aussi le nom d'*escompte* à une opération de Bourse ordinairement dirigée contre les vendeurs à découvert (*Voy. REPORT*).

ESPACE, nom que l'on donne, dans l'étude du mouvement d'un point matériel, à la longueur développée de l'arc de TRAJECTOIRE (*Voy. ce mot*) compris entre la position du mobile au bout d'un temps donné, et une origine fixe prise sur cette courbe. — L'espace est rapporté à l'unité de longueur; en France, c'est un nombre entier ou fractionnaire de mètres.

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE, produit d'un gain aléatoire par la probabilité de ce gain. Cette considération imaginée dans le principe pour régler les conditions des jeux ou des paris, a été introduite dans toutes les circonstances où les probabilités se combinent avec les intérêts, comme dans les questions relatives AUX RENTES VIAGÈRES, AUX ASSURANCES SUR LA VIE, etc. (*Voy. ces mots.*)

ESSIEU, pièce de bois ou de fer qui, dans les voitures, reçoit à ses extrémités les deux roues d'une même paire. L'essieu peut être fixe ou mobile. S'il est fixe, c'est-à-dire invariablement lié à la voiture, ses extrémités, légèrement coniques, et qui portent le nom de *fustes*, servent d'axe de rotation aux deux roues, qui tournent alors indépendamment l'une de l'autre. Si l'essieu est mobile, comme cela a lieu dans les voitures destinées à circuler sur les voies ferrées, les deux roues font corps avec l'essieu, qui tourne dans des boîtes fixées au bâti de la voiture.

Les dimensions transversales d'un essieu se calculent comme celles d'un ARBRE (*Voy. ce mot*). S'il s'agit d'essieux en fer, on prend pour la valeur du coefficient de résistance $R = 2700000$.

Les essieux des chemins de fer sont en acier fondu doux ou en fer fort de première qualité. Les essieux de l'artillerie, qui sont exposés à des chocs violents, se font en fer doux et ductile. Les essieux de bois se font en orme ou en charme; ils ne sont employés que pour les véhicules grossiers ou qui ne portent qu'une faible charge.

Un essieu fixe peut être coudé, c'est-à-dire qu'il peut affecter la forme indiquée par la figure 1. Le

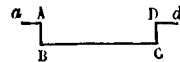


Fig. 1.

corps BC de l'essieu se trouve alors plus bas que les fusées Aa et Dd, ce qui offre des avantages au point de vue du chargement. (*Voy. TIRAGE DES VOITURES.*)

Un essieu mobile peut aussi être coudé; le coude sert alors de manivelle pour faire mouvoir une bielle. Presque toujours, et c'est ce qui a lieu dans les locomotives, l'essieu présente ainsi deux coudes

formant ce qu'on appelle une MANIVELLE DOUBLE (Voy. ce mot). La figure 2 représente en perspective cette disposition. Les parties AB, CD, EF de l'essieu sont en ligne droite; les coudes BmmC et DnnE

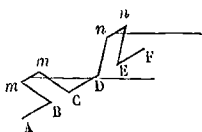


Fig. 2.

sont dans des plans rectangulaires entre eux; les parties mm et nn jouent le rôle de maneton ou de bouton et reçoivent l'extrémité d'une bielle. La

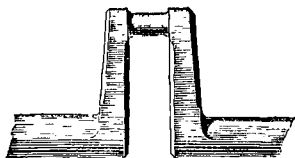


Fig. 3.

figure 3 représente, à une plus grande échelle, la forme d'un essieu mobile coudé.

ESSOREUSE, machine à sécher les tissus humides, par l'emploi de la force centrifuge. Avant cette machine, inventée par M. Penzold en 1836, et qui depuis a reçu plusieurs perfectionnements, tous les moyens mécaniques appliqués au séchage des étoffes, tels que la pression, la torsion, avaient le double inconvénient de fatiguer les tissus et d'exiger beaucoup de main-d'œuvre. L'emploi de la force centrifuge a fait disparaître ces inconvénients. Pour sécher par ce procédé les tissus imbibés d'eau, il suffit d'enfermer l'étoffe mouillée dans un tambour mobile dont le pourtour est garni de toiles métalliques; par l'effet de la rotation, l'adhérence qui existait entre l'eau et le tissu est vaincue, l'eau est lancée au dehors, à travers la toile métallique, dans un second tambour fixe qui enveloppe le premier; de là elle s'échappe par un orifice inférieur. Dans la machine de M. Penzold, le tambour mobile à 1^m,08 de diamètre sur 0^m,15 de hauteur. L'axe vertical de ce tambour porte un galet de 0^m,16 de diamètre garni de cuir à sa circonférence; ce galet est en contact avec deux plateaux à axe horizontal, de 1 mètre de diamètre, tournant en sens contraire, d'abord lentement, puis avec une vitesse qui peut aller jusqu'à plus de 40 tours par seconde. Pour faire varier ainsi la vitesse, on transmet le mouvement du moteur à la machine à l'aide d'une courroie sans fin qui, au lieu de passer sur deux poulies, passe sur deux troncs de cônes égaux, à axes parallèles, mais disposés en sens inverse, de telle sorte que la petite base de l'un soit dans le plan de la plus grande base de l'autre. En faisant glisser la courroie de la petite base du cône conducteur vers la plus grande, à l'aide d'un guide-courroie (Voy. MODIFICATEURS), on accélère de plus en plus la vitesse du cône conduit, et par suite celle des plateaux et celle du tambour mobile.

M. Penzold a donné à sa machine le nom hybride d'*hydro-extracteur*.

D'autres mécaniciens ont construit des machines

du même genre; nous citerons entre autres l'*extracteur* de M. Tulpin. Le mécanisme diffère, mais le principe de l'appareil est le même.

L'action de la force centrifuge a été également appliquée avec succès au clairçage du sucre.

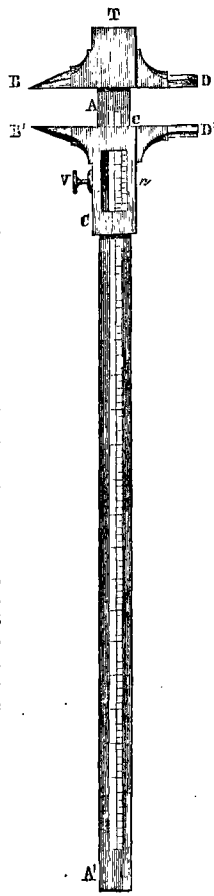
EST, l'un des quatre points cardinaux. Lorsque, dans notre hémisphère, on regarde le soleil à midi, on a l'est à la gauche. L'est porte aussi le nom d'ORIENT. (Voy. POINTS CARDINAUX.)

ESTAIN, pièce de la membrure d'un navire sur laquelle s'appuient les extrémités des barres d'arcasse, et qui se termine vers le haut par une allonge appelée *allonge de cornière* ou *allonge d'estain*. Cette pièce offre cette particularité que jusqu'à la hauteur de la barre d'hourdi elle est analogue à un couple dévoyé, c'est-à-dire que son plan est vertical mais oblique au longitudinal, tandis qu'au-dessus de l'arcasse elle devient analogue à un couple droit, c'est-à-dire que son plan devient perpendiculaire à la quille. Le travail de l'estain se fait comme celui des couples, au moyen d'équerres dont les lisses de carène ou les lisses d'accastillage fournissent un des éléments. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE et DEVIS DE CONSTRUCTION.)

ESTIME, méthode employée dans la navigation pour déterminer la route qu'on a à suivre; elle consiste à mesurer la vitesse du navire en jetant le LOCH (Voy. ce mot), et sa direction par l'observation de la BOUSOLE MARINE ou COMPAS DE ROUTE (Voy. ces mots) en tenant compte de la *variation* et de la *dérive*. (Voy. VARIATION, ROUTES, RHUMBS.)

ÉTABLISSEMENT DU PORT, retard de la pleine mer sur l'heure du passage de la lune au méridien le jour d'une syzygie équinoxiale. (Voy. MAREES.)

ÉTALON À COULISSE, instrument qui sert à mesurer les longueurs et à vérifier la plupart des instruments destinés au même usage. Il se compose d'une règle en cuivre AA', divisée sur la plus grande partie de sa longueur; d'une tête fixée à son extrémité; et d'un curseur CC pouvant glisser le long de la règle. La tête et le curseur présentent chacun une pointe B ou B', qu'on appelle le *bec*, et du côté opposé un talon D ou D'. Les plans intérieurs des deux becs B et B' sont parfaitement dressés et exactement perpendiculaires à la longueur de la règle.



gle; les arêtes extérieures des deux talons D et D' sont aussi exactement parallèles aux faces intérieures. Enfin le curseur porte un vernier *n*, et une vis de pression V qui sert à le fixer en un point quelconque de la règle. Pour mesurer les dimensions extérieures d'un corps, on l'introduit entre les faces internes de la tête et du curseur; quand le contact est bien établi, on serre la vis de pression; et on lit sur la règle, à l'aide du vernier, le nombre de divisions et fractions de division dont le curseur, supposé primitivement en contact avec la tête, a été déplacé. Pour mesurer les dimensions intérieures des corps, on y introduit les deux talons D et D'; quand le contact est établi par les arêtes extérieures de ces talons, on lit, comme ci-dessus, le nombre de divisions dont le curseur s'est déplacé; et on y ajoute la somme des épaisseurs des deux talons, laquelle est connue à l'avance. Les pointes B et B' servent pour la vérification des règles divisées, et, en général, pour mesurer la distance de deux points, avec lesquels on fait coïncider ces pointes.

Dans les ateliers, l'instrument que nous venons de décrire porte souvent le nom de *pied-à-becs*, parce qu'il est analogue au *pied* dont se servent les cordonniers. La règle est ordinairement divisée en millimètres.

L'artillerie, qui conserve dans les arsenaux une partie du matériel ancien dont les dimensions ont été réglées en pieds, pouces et lignes, fait usage d'un étalon à coulisse qui porte deux systèmes de divisions: d'un côté la règle est divisée en millimètres, et le vernier donne des dixièmes; de l'autre côté la règle est divisée en lignes, et le vernier donne des douzièmes. L'épaisseur des deux talons réunis est de 6 lignes ou 13^{mm},54.

ÉTAMBOT, pièce rectiligne, assemblée avec l'extrémité arrière de la quille d'un navire; elle est presque verticale, et n'a qu'une légère inclinaison vers l'arrière. Elle dessine du côté de la poupe le profil longitudinal de la coque. Dans les navires à hélice il y a deux étambots séparés par un intervalle dans lequel se loge l'arbre de l'hélice, ou même, quand il y a lieu, le *puits* qui sert à la remonter. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

ÉTELON, dessin d'un pan de charpente tracé sur le sol, en figurant chaque pièce par sa ligne milieu.

ÉTOILE MOBILE, instrument employé dans l'artillerie pour vérifier le diamètre de l'âme des pièces. Il se compose d'une hampe en cuivre *h h'*, terminée par une tête que traversent quatre pointes, dont deux fixes *p, p'*, et deux autres mobiles. Dans l'intérieur de cette hampe glisse une tringle en fer *tt*, terminée à son extrémité par deux plans inclinés en acier *i, i'*, ou plutôt deux cylindres creux également inclinés sur l'axe. Lorsque l'on pousse la tige, les cylindres inclinés font avancer les pointes mobiles; et lorsque l'instrument a été préalablement introduit dans l'âme d'une pièce de canon, la distance des pointes mobiles, qui sont opposées, au moment où elles sont arrêtées par les parois intérieures, est sensiblement égale au diamètre de l'âme. Elle le serait exactement si les pointes mobiles étaient placées suivant un diamètre; mais on ne mesure en réalité qu'une corde qui diffère peu d'un diamètre; la différence n'est que de 0^{mm},2 dans les pièces en service, et de 0^{mm},02 seulement

dans les pièces neuves. La tringle est munie d'un manche qui porte des divisions que l'on peut apercevoir par une fenêtre pratiquée dans la hampe; la division qui s'arrête devant un trait tracé sur la hampe fait connaître la quantité dont les pointes mobiles se sont écartées.

L'inclinaison des plans inclinés par rapport à l'axe de la tringle est

ordinairement de $\frac{1}{20}$; en sorte que si celle-ci a été enfoncée de 1 centimètre, chacune des pointes mobiles s'est avancée d'un demi-millimètre, et que l'écart primitif des pointes a augmenté de 1 millimètre. En appréciant le mouvement de la tringle à 1 millimètre près, on peut donc mesurer

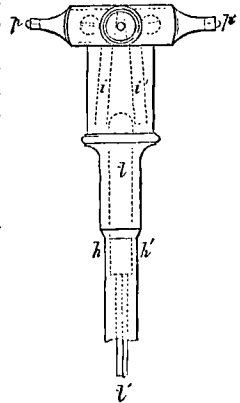
le diamètre de l'âme à un dixième de millimètre. On règle l'écart initial des pointes en introduisant l'instrument dans une LUNETTE (Voy. ce mot) exactement calibrée, mais d'un diamètre inférieur d'un millimètre environ à celui que l'on veut mesurer.

La course des pointes étant nécessairement limitée, il faudrait donner aux cylindres inclinés une longueur démesurée, si l'on voulait se servir des mêmes pointes pour vérifier les âmes de tous les calibres; on change de pointes suivant les calibres à vérifier.

Des divisions tracées sur la hampe même font connaître la distance du diamètre qu'on mesure à la bouche de la pièce, il suffit pour cela d'observer quelle est la division qui correspond à la *tranche* de la bouche, c'est-à-dire à son extrémité.

ÉTOILES, corps célestes qui n'ont ni diamètre apparent appréciable, ni mouvement propre sensible, et auxquels, pour cette dernière raison, on donne l'épithète de *fixes*. Les astronomes les réunissent en groupes appelés CONSTELLATIONS (Voy. ce mot). Ils les classent en outre, d'après leur éclat, en divers ordres désignés par le nom impropre de *grandeurs*. Les étoiles de *première grandeur*, ou celles qui ont le plus d'éclat, sont au nombre de vingt, savoir :

Sirius,	ou α du Grand Chien,
*Canopus,	ou α du Navire Argo,
	* α du Centaure,
Arcturus,	ou α du Bouvier,
Rigel,	ou β d'Orion,
La Chèvre,	ou α du Cocher,
Véga,	ou α de la Lyre,
Procyon,	ou α du Petit Chien,
Béteigneuse,	ou α d'Orion,
*Achernar,	ou α de l'Éridan,
Aldébaran,	ou α du Taureau,
	* β du Centaure,
	* α de la Croix du Sud.
Antarès,	ou α du Scorpion.
Altaïr,	ou α de l'Aigle,
L'Épi,	ou α de la Vierge,
Fomalhaut,	ou α du Poisson Austral,
	* β de la Croix du Sud,



Pollux, ou β des Gémeaux,
Régulus, ou α du Lion.

Elles sont rangées dans ce tableau (emprunté aux *Leçons de Cosmographie* de M. Faye), en commençant par les plus brillantes; celles dont le nom est précédé d'un astérisque sont invisibles en Europe.

Les étoiles des six premières grandeurs peuvent être distinguées à l'œil nu; pour distinguer les autres, il faut recourir à l'emploi des instruments d'optique.

Il existe dans tous les observatoires des *catalogues d'étoiles*, qui donnent l'ascension droite et la déclinaison de chacune de celles qui y sont inscrites, et fournissent par conséquent le moyen de les retrouver dans le ciel. Le premier catalogue de ce genre a été dressé par Hipparque, dans le deuxième siècle avant Jésus-Christ. Flamsteed, la Caille, M. Struve, sont les astronomes dont les travaux ont le plus contribué à enrichir les catalogues d'étoiles.

Quelques étoiles ont varié d'éclat depuis qu'on les observe; telle est δ de la Grande Ourse, dont l'éclat surpassait primitivement celui des étoiles ϵ, ζ, η de la même constellation, tandis qu'il leur est aujourd'hui inférieur. Chez quelques étoiles, le changement d'éclat est périodique; telle est *Algol*, ou β de Persée, qui tous les 2^h 14^m passe de la deuxième à la quatrième grandeur ou *vice versa*. Il y a des étoiles temporaires, comme celle qui apparut tout à coup en novembre 1572, et fut observée par Tycho-Brabé; son éclat augmenta rapidement jusqu'à la rendre visible en plein jour; mais en décembre de la même année cet éclat commença à décroître, et en mars 1574 l'étoile avait complètement disparu. Plusieurs étoiles qui, observées avec des lunettes d'un faible grossissement, paraissent simples, se dédoublent quand on se sert d'instruments plus puissants. Telles sont ξ de la Grande Ourse, p d'Ophiuchus, ζ d'Hercule, η de la Couronne, γ de la Vierge, α du Centaure. Sur environ 120 000 étoiles observées par M. Struve, 3057 sont doubles. Il y a même des étoiles triples et quadruples, mais elles sont en très-petit nombre. Enfin les observations modernes faites avec la plus grande précision ont constaté un mouvement propre très-lent chez plusieurs étoiles; ainsi la 61^e du Cygne, qui est une étoile double, se déplace d'environ 5",3 par an; une étoile de septième grandeur faisant partie de la Grande Ourse se déplace de 7" par an, etc.

La lumière des étoiles est généralement blanche; cependant Antarès, Aldébaran, Pollux, α d'Orion sont rougeâtres; la Chèvre et Altaïr sont jaunâtres; quelques autres ont une teinte légèrement verte ou bleue. Sirius était rougeâtre dans l'antiquité; il a perdu aujourd'hui cette coloration.

Une étoile dont le diamètre apparent est insensible, peut paraître à l'œil nu plus grosse qu'une planète dont le diamètre est appréciable; cela tient au phénomène de l'*irradiation*, illusion d'optique qui fait attribuer des dimensions plus grandes à un corps plus lumineux. Enfin les étoiles présentent des variations subites et continuelles d'éclat et de coloration qui constituent ce qu'on nomme la *scintillation*; Arago a rattaché la scintillation au phénomène des interférences. (Voy. l'Annuaire du bureau des longitudes de 1852.)

On a cherché à déduire de la PARALLAXE ANNUELLE des étoiles la distance qui les sépare de la terre; mais cette parallaxe ayant toujours été trouvée inférieure à 1", il n'est point permis de compter sur une mesure qui conduit à des résultats de cet ordre de grandeur; on en a conclu seulement que l'étoile la plus rapprochée de la terre en est éloignée de plus de 206 265 fois le rayon de l'orbite terrestre. (Voy. PARALLAXE.)

ÉTOILES FILANTES, points brillants, analogues à des étoiles, mais qui apparaissent tout à coup, traversent en quelques secondes une portion plus ou moins grande du ciel et disparaissent instantanément. Ce sont des corps de petites dimensions, qui, en traversant l'atmosphère, s'échauffent assez par le frottement de l'air pour devenir incandescents. Il arrive parfois que ces corps tombent sur la surface de la terre; on leur donne dans ce cas le nom d'*aérolithes*. Pour expliquer les étoiles filantes, on admet qu'il existe dans l'espace une multitude de corpuscules de matière cosmique qui obéissent aux lois de la gravitation universelle, et que la terre peut rencontrer dans son mouvement de translation. Ces corpuscules paraissent plus abondamment répandus dans la région de l'espace que la terre traverse vers le 10 août, car c'est à cette époque que le nombre des étoiles filantes observées en une heure atteint son maximum. Ce nombre, qu'on appelle le *nombre horaire maximum*, et qui était de 59 en 1837, s'est élevé peu à peu jusqu'à 113, en 1848; mais depuis cette époque il a toujours été en diminuant. (Voy. le mémoire sur les étoiles filantes publié en 1851 par MM. Couvier-Gravier et Saigey.)

ÉTRAVE, pièce courbe placée à l'avant de la quille d'un navire, et qui en est la continuation. Elle va en se redressant, et dessine de ce côté le profil longitudinal du navire. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

ÉTRÉSILLONS, pièces de bois qui servent à étayer des parties de maçonnerie les unes contre les autres. C'est ainsi que, dans les travaux de réparation des édifices, on est souvent obligé d'étayer les baies des portes ou des croisées, au moyen de pièces de bois qui vont, soit d'un jambage à l'autre, soit du côté inférieur au côté supérieur. Ces pièces de bois, plus longues que le vide qu'elles doivent occuper, s'arc-boutent les unes sur les autres, et empêchent les maçonneries opposées de se rapprocher. Ces pièces de bois sont des étrésillons.

EVECTION, inégalité du mouvement lunaire, mise en évidence par Ptolémée d'après ses propres observations et celles d'Hipparque; elle a pour expression

$$1^{\circ} 20' \sin 2 [(\odot - \text{C}) - m'],$$

\odot désignant la longitude du soleil, C celle de la lune et m' l'anomalie moyenne de ce satellite. (Voy. LUNE, ANOMALIE.)

ÉVOLUER. Se dit d'un navire qui tourne autour de la verticale de son centre de gravité (Voy. ÉVOLUTION). Se dit aussi des mouvements d'ensemble exécutés par une armée navale; mais, dans ce sens, ce mot ne se rapporte pas à l'objet de ce dictionnaire.

ÉVOLUTION, mouvement de rotation d'un navire autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité. Si μ désigne la somme des moments qui

rendent à produire cet effet, ω la vitesse angulaire, et I le moment d'inertie du navire autour de l'axe vertical considéré, on a (Voy. ACCÉLÉRATION ANGULAIRE)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{I}. \quad [1]$$

Cette relation montre que, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse angulaire sera d'autant plus grande, et par conséquent le navire évoluera avec d'autant plus de facilité, que le moment d'inertie I sera plus petit. Comme la facilité d'évolution est une qualité essentielle à donner au navire, on voit pourquoi l'on rapproche d'ordinaire les matières pesantes de la verticale du centre de gravité, quoique cette disposition soit défavorable dans les mouvements de TANGAGE (Voy. ce mot).

On trouvera à l'article STABILITÉ SOUS VOILES l'analyse des forces qui concourent ou qui s'opposent à l'évolution.

L'évolution la plus importante est celle qui a pour objet de *virer de bord*, c'est-à-dire de présenter au vent le bord opposé à celui du côté duquel il souffle. La manœuvre qui produit cette évolution est fondée sur la propriété qu'a le navire de tendre à *loffer* sous l'action des voiles de l'arrière et à *arriver* sous l'action des voiles de l'avant; ce qui veut dire que, dans le premier cas, la proue tend à se tourner du côté d'où vient le vent, et que, dans le second, elle tend à se tourner du côté où va le vent.

Il y a deux méthodes pour virer de bord. La plus expéditive et la plus usitée consiste à *virer vent devant*. Supposons que les voiles soient orientées *au plus près*, c'est-à-dire qu'elles fassent avec la quille un angle de 30° environ, le vent faisant avec la quille, et du même côté, un angle d'environ 60°, comme on le voit fig. 1, A, où les droites V, V, V repré-

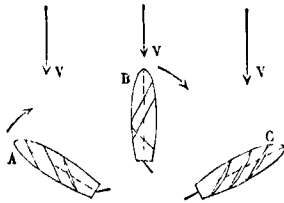


Fig. 1.

sentent la direction du vent. On commence par *mettre la barre dessous le vent*, c'est-à-dire qu'on fait tourner le gouvernail vers le côté d'où vient le vent; ce changement de position du gouvernail a aussitôt pour effet de faire loffer, ou tourner le navire dans le sens indiqué par la flèche (Voy. GOUVERNAIL). Aussitôt que le mouvement est commencé, on cargue à moitié la voile de misaine et la grande voile, afin de donner la prépondérance à la voile d'artimon dont l'action favorise l'auloffée. Lorsque le navire a tourné d'une trentaine de degrés, la voile d'artimon cesse de porter, et ne peut plus contribuer au mouvement. Mais les voiles de l'avant étant bientôt prises par derrière et appuyées contre le mât, la force normale que le vent exerce sur ces voiles suffit pour entretenir le mouvement de rotation. Quand le navire est *dans le lit du vent*, c'est-à-dire lorsque la quille est devenue parallèle à la

direction du vent, ainsi que l'indique la figure B, on change les amures de la voile d'artimon, et on l'oriente au plus près sur l'autre bord, comme le montre cette figure. Le mouvement de rotation continuant, la voile d'artimon commence bientôt à porter; alors on change les amarres des voiles de l'avant, et on les oriente au plus près comme l'indique la figure C. Dès que toutes les voiles ont pris le vent, on remet le gouvernail dans la direction normale, et l'on a viré de bord. La manœuvre exécutée répond aux commandements suivants : *Pare à virer*, qui n'est qu'un commandement d'avertissement; *à Dieu va*, qui est le signal donné au timonier de mettre la barre sous le vent; *Lève les lofs*, pour peser sur les cargues points de la voile de misaine et de la grande voile; *Change derrière*, pour changer les amures de la voile d'artimon; *Change devant*, pour changer les amures de la voile de misaine et de la grande voile.

La seconde méthode de virer de bord, plus longue, mais nécessaire à employer dans certains cas, consiste à *virer vent arrière*. Supposons toujours que le vaisseau navigue au plus près, comme l'indique la figure 2.A. On commence par carguer le

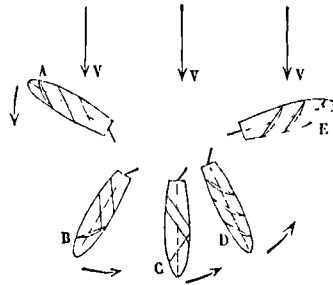


Fig. 2.

grande voile et la voile d'artimon, afin de laisser la prépondérance à la voile de misaine qui tend à faire arriver. On met ensuite *la barre au vent*, c'est-à-dire qu'on fait tourner le gouvernail du côté vers lequel va le vent. Le navire prend aussitôt un mouvement de rotation dans le sens de la flèche. Pendant que cette rotation s'effectue, on brasse graduellement la grande voile et la voile d'artimon au vent, c'est-à-dire qu'on maintient leur direction à peu près parallèle à celle du vent; et lorsque le navire a tourné de 90° environ, ces voiles, toujours carguées, se trouvent dans la position qu'elles devront conserver plus tard. Le mouvement de rotation continuant sous l'influence du gouvernail et de la voile de misaine, le navire arrive en C dans le lit du vent. On cargue alors à moitié la voile de misaine; pendant cette opération le navire ayant encore tourné d'une petite quantité, on change les amures de la misaine, et l'on borde l'artimon de la grande voile, comme on le voit en D. Lorsque le navire, continuant son mouvement de rotation, est arrivé à avoir le vent en travers, ou perpendiculaire à la quille, on *dresse la barre*, c'est-à-dire qu'on replace le gouvernail dans le plan de symétrie du navire, et celui-ci achève de lui-même le mouvement qui doit l'amener au plus près du vent, comme on le voit en E. Les commandements qui règlent cette ma-

nœuvre sont : *Pare à virer lof pour lof*, commandement d'avertissement; *Cargue la grand'voile et l'artimon*; *la barre au vent*; *lève les lofs de misaine*; *change devant*; *amure grand'voile*; *dresse la barre*, qui répondent aux diverses phases indiquées ci-dessus. On voit que dans cette seconde méthode le navire doit tourner d'environ 240°, tandis qu'il ne tourne que de 120° environ quand on vire vent devant. La manœuvre exige donc beaucoup plus de temps, et le navire se trouve porté très-loin dans le sens du vent quand il a fini de virer. Nous avons supposé, il est vrai, que le navire était au plus près; s'il courait grand largue, le vent en travers ou par la hanche, l'évolution serait abrégée en proportion. Nous n'avons indiqué que les points principaux de la manœuvre, et nous avons omis quelques détails relatifs aux voiles triangulaires; on peut consulter sur ce point les traités de manœuvre, et en particulier les *Séances nautiques*, de M. de Bonnefoux.

EXCENTRICITÉ DES ORBITES PLANÉTAIRES, rapport entre la distance du foyer de l'orbite au centre et le demi grand axe. Ce rapport est très-faible dans la plupart des orbites décrites par les planètes; mais il s'élève à plus de 0,2 pour Mercure et pour quelques-unes des petites planètes situées entre Mars et Jupiter.

Voici les valeurs de l'excentricité pour les planètes principales :

Mercure.....	0,20561
Vénus.....	0,00686
La Terre.....	0,01679
Mars.....	0,09322
Jupiter.....	0,04816
Saturne.....	0,05615
Uranus.....	0,04668
Neptune.....	0,00872

De toutes les planètes, celle pour laquelle ce rapport est le plus grand est la planète Junon, dont l'excentricité est 0,25608.

L'excentricité de l'orbite terrestre se détermine en observant la vitesse apparente du soleil au PÉRIGÉE et à l'APOGÉE (Voy. ces mots). Soient α et α' les arcs décrits dans un même temps par le soleil à ces deux époques; et soient ρ et ρ' les distances correspondantes de la Terre au Soleil. En vertu de la loi des aires (Voy. LOIS DE KÉPLER), les secteurs décrits par les rayons vecteurs ρ et ρ' aux deux époques considérées seront égaux, et l'on aura, en les regardant comme sensiblement circulaires,

$$\frac{1}{2} \rho^2 \alpha = \frac{1}{2} \rho'^2 \alpha', \text{ d'où } \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{\alpha}}. \quad [1]$$

Mais si a représente le demi grand axe de l'orbite, et e l'excentricité, on a

$$\rho + \rho' = 2a, \quad [2]$$

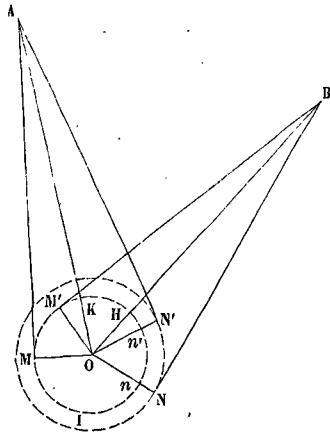
$$\text{et } \frac{\rho' - \rho}{2a} = e. \quad [3]$$

De ces trois équations on tire, en éliminant ρ et ρ' ,

$$e = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha'}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'}}.$$

L'excentricité de l'orbite terrestre éprouve une variation séculaire, qui la fait osciller autour d'une valeur moyenne. Elle est aujourd'hui dans la période de décroissance, et diminue de 0,0000434 par siècle.

EXCENTRICITÉ DES LUNETTES, distance de l'axe optique de la lunette supérieure ou inférieure d'un CERCLE RÉPÉTITEUR, d'un THÉODOLITE, etc. (Voy. ces mots) à l'axe général de l'instrument. Lorsque les lunettes sont ainsi placées de manière que leur axe optique ne coupe pas l'axe général de l'appareil, leur excentricité donne lieu à une petite correction, dans la mesure des angles formés par des rayons visuels menés à des signaux terrestres peu éloignés. Soient A et B ces deux signaux; O la pro-



jection de l'axe général de l'instrument, OM et ON les rayons des cercles auxquels les lunettes demeurent tangentes en projection. Pour mesurer l'angle AOB, on vise d'abord avec la lunette inférieure le signal de gauche A, et avec la lunette supérieure le signal de droite B; soient MA et NB les directions des deux lunettes dans cette position. On a sur le petit cercle

$$360^\circ = Mn + MK + nH + KH.$$

Appelons α l'angle MAO, β l'angle NBO, et α' l'angle à mesurer AOB; la relation précédente pourra s'écrire

$$360^\circ = Mn + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \alpha'. \quad [1]$$

On amène ensuite, par le mouvement général de l'appareil, la lunette inférieure sur le signal de droite en M'B; et l'on fait tourner la lunette supérieure pour l'amener en N'A sur le signal de gauche. Dans cette nouvelle position, l'inspection du petit cercle donne la relation

$$360^\circ = M'In' + M'H + n'K - HK,$$

ou, en désignant l'angle N'AO par α' , et l'angle M'BO par β' ,

$$360^\circ = M'In' + 90^\circ - \alpha' + 90^\circ - \beta' - \alpha.$$

Mais M'In' est égal à Mn augmenté de l'arc parcouru sur le limbe par la lunette supérieure; soit m cet arc, il viendra

$$360^\circ = Mn + m + 90^\circ - \alpha' + 90^\circ - \beta' - \alpha. \quad [2]$$

En retranchant membre à membre les relations [1] et [2], on en tire aisément

$$\alpha = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} (\alpha - \alpha') + \frac{1}{2} (\beta - \beta').$$

L'ensemble des deux derniers termes forme la correction cherchée. On peut lui donner une autre forme: si l'on désigne OM par e , ON par e' , OA par G, OB par D, on a

$$\alpha = \frac{e}{G \sin i^n}, \quad \beta = \frac{e'}{D \sin i^n}, \quad \alpha' = \frac{e}{G \sin i^n}, \quad \beta' = \frac{e'}{D \sin i^n}$$

par suite

$$\alpha - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} \cdot \frac{e - e'}{G \sin 1''} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e - e'}{D \sin 1''}.$$

On remarque que si l'on avait

$$e = e', \text{ ou } OM = ON,$$

la correction serait nulle.

On peut remarquer en outre que, sur la somme des trois angles d'un triangle, la correction est encore nulle; car en appelant a, b, c , ses trois côtés, on aura

pour la correction de l'angle A, $\frac{e - e'}{2c} - \frac{e - e'}{2b}$,

d° B, $\frac{e - e'}{2b} - \frac{e - e'}{2a}$,

d° C, $\frac{e - e'}{2a} - \frac{e - e'}{2c}$,

quantités dont la somme est égale à zéro.

Quand on se sert d'un théodolite, on peut éviter la correction due à l'excentricité des lunettes, en mesurant chaque angle deux fois : une première fois avec la lunette du cercle vertical à droite, et une seconde fois avec la lunette à gauche. Dans un nombre pair de répétitions, l'erreur due à l'excentricité disparaît, parce qu'elle est la même, mais de signe contraire, dans deux opérations consécutives.

EXCENTRIQUES, organes employés dans les machines pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif suivant une loi donnée. On en distingue plusieurs espèces : en premier lieu, l'*excentrique circulaire*, ou excentrique proprement dit ; en second lieu, divers organes portant le nom d'excentriques, mais qui ne sont autre chose que des cames, tels que l'*excentrique en cœur*, l'*excentrique triangulaire*, les *excentriques à mouvement uniformément varié*, etc.

I. EXCENTRIQUE CIRCULAIRE. Il se compose d'un disque circulaire D (fig. 1), ordinairement évidé,

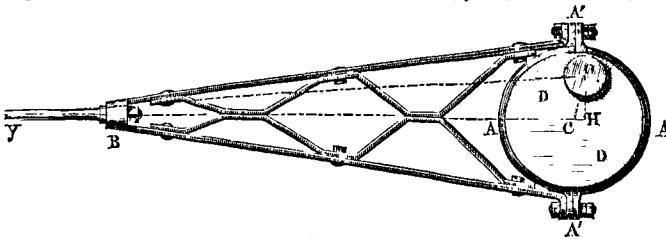


Fig. 1.

pour diminuer son poids; ce disque est mobile autour d'un axe O, perpendiculaire à son plan, mais qui ne passe pas par son centre de figure C (d'où le nom d'*excentrique*). Le disque est embrassé par un anneau AA, auquel on donne le nom de *bague d'excentrique*, lequel peut glisser librement sur la circonférence du disque, et est relié par des tiges A'B, A'B, appelées *barres d'excentrique*, avec l'extrémité B de la pièce à laquelle il s'agit de donner un mouvement alternatif, suivant la droite XY passant par le point O, dans le plan du disque. Dans le mouvement, les distances OC et BC demeurent invariables; le point B se meut donc sur la droite XY, comme s'il était lié, au moyen d'une bielle de lon-

gueur BC, à une manivelle ayant la longueur OC et son centre au point O. En d'autres termes, l'excentrique circulaire n'est qu'une variété du dispositif désigné par les mots *BIELLE ET MANIVELLE* (Voy. ces mots) dans laquelle le bouton de la manivelle se serait agrandi de manière à embrasser l'axe de rotation lui-même. La loi du mouvement est donc la même que dans le dispositif dont il s'agit; c'est à-dire que si l'on mène OH perpendiculaire à OY et terminé au prolongement de BC, on aura, en nommant u la vitesse du point C et v celle du point B,

$$\frac{v}{u} = \frac{OH}{OC}, \quad [1]$$

en sorte que si u est constant, v est proportionnel à OH.

L'excentrique circulaire est employé dans les machines à vapeur pour faire mouvoir la clef des boîtes de distribution. Il faudrait se garder d'employer ce dispositif pour transmettre de grands efforts, parce qu'une partie notable du travail moteur serait consommée par le frottement de l'excentrique contre la bague dans laquelle il glisse. Une observation analogue peut être faite pour tous les organes qui portent le nom d'excentrique; ils ne doivent être employés que dans les mécanismes légers qui n'ont que de faibles efforts à transmettre.

II. On peut employer le disque circulaire d'une autre façon pour produire un mouvement rectiligne alternatif. On le fait tourner autour d'un point O (fig. 2) pris sur sa circonférence; et, au lieu de l'entourer d'un anneau, on le fait mouvoir dans un cadre rectangulaire AB, A'B' dont il touche constamment deux côtés parallèles. Une tige fixée aux milieux I et I' de ces côtés, et passant entre des guides G et G', reçoit ainsi un mouvement alternatif dont l'amplitude est le diamètre du disque. La loi du mouvement est facile à obtenir : soit ω la vitesse angulaire du disque et r son rayon. Considérons le disque dans une position quelconque; par le centre

de rotation O menons OH perpendiculaire à GG', ou parallèle aux côtés AB, A'B'; et par le centre C du disque menons TT' parallèle à GG' ou perpendiculaire à ces mêmes côtés; les points T et T' seront les points de contact actuels du disque avec le cadre. Si P est le point d'intersection des droites OH et TT', il est clair que pour

avoir la loi du mouvement il suffit d'exprimer la distance TP en fonction du temps t , compté, par exemple, à partir de l'instant où le point C était sur la droite OH. Mais on a alors

$$COP = \omega t;$$

par suite

$$TP = TC + CP = r(1 + \sin \omega t); \quad [2]$$

telle est la loi qu'il s'agissait d'obtenir. On reconnaît sans peine que la distance TP varie entre zéro et $2r$. L'avantage de cet excentrique est que les changements de vitesse s'opèrent avec beaucoup de douceur, et que le disque agit toujours normalement aux côtés du cadre. Mais il donnerait lieu à un frot-

fement considérable si l'effort à transmettre avait une valeur sensible.

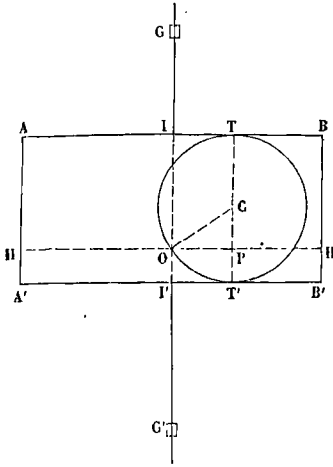


Fig. 2.

III. EXCENTRIQUE TRIANGULAIRE. Cet excentrique est employé pour faire mouvoir les tircirs des machines à vapeur d'Edwards du système Woolff, et dans quelques autres circonstances analogues. Pour le construire, on trace un triangle équilatéral ayant pour côté la course que doit avoir le mouvement alternatif; puis, de chaque sommet comme centre avec le côté pour rayon, on décrit un arc de cercle terminé aux deux autres sommets; on forme ainsi un triangle équilatéral curviligne OAB (fig. 3). Si

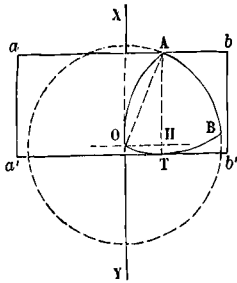


Fig. 3.

l'on imagine un prisme droit ayant pour base ce triangle, on aura l'excentrique triangulaire. Cet excentrique est fixé en saillie sur un plateau monté sur l'arbre animé du mouvement de rotation; et l'arête correspondante à l'un des sommets O du triangle coïncide avec cet axe. L'excentrique est entouré d'un cadre ab, ab' , dont il touche constamment deux côtés parallèles, et qui a pour hauteur (aa' ou bb') la corde OA de l'un des côtés du triangle, ou la course du mouvement alternatif.

Considérons l'excentrique dans la position O.1.2 (fig. 4) où la corde O.2 coïncide avec la droite XY suivant laquelle s'opère le mouvement rectiligne; et supposons que la rotation se fasse dans le sens de la flèche. De cette position à la position symétrique O.2.3, il n'y aura aucun mouvement du cadre;

car l'arc 1.2 touchera constamment le côté supérieur ab au même point 2; et le côté $a'b'$ passera constamment par le sommet O. De la position O.2.3 à la position O.3.4, l'arc O.2 poussera le côté inférieur

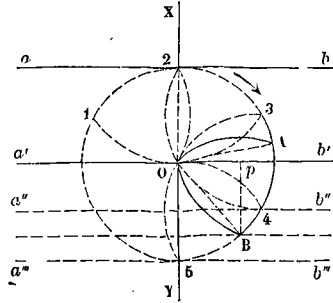


Fig. 4.

du cadre, et l'amènera dans la position $a''b''$. De la position O.3.4 à la position O.4.5, c'est le sommet 4 qui poussera le côté inférieur du cadre pour l'amener dans la position $a'''b'''$. On voit que la première demi-révolution peut se partager en trois périodes égales : l'une pendant laquelle le cadre demeure immobile, la seconde pendant laquelle le côté inférieur du cadre est poussé par un des arcs de l'excentrique, la troisième pendant laquelle ce même côté inférieur est poussé par l'un des sommets de l'excentrique. Les mêmes circonstances se reproduisent pendant la deuxième demi-révolution; mais c'est alors le côté supérieur du cadre qui est poussé par l'excentrique pendant la seconde et la troisième période. La loi du mouvement n'est pas la même dans ces deux périodes. Considérons d'abord la seconde; et pour cela revenons à la figure 3. Abaissons AT perpendiculaire sur $a'b'$, et menons OH parallèle à $a'b'$. Au moment où la corde OA coïncidait avec XY, le côté $a'b'$ passait par le point O; pendant que cette corde a décrit l'angle XOA, égal à ωt , le cadre a descendu de la quantité

$$HT = AT - AH = r - r \cos \omega t,$$

$$\text{ou } HT = r(1 - \cos \omega t), \quad [3]$$

et cette formule est applicable au mouvement depuis $t = 0$ jusqu'à $\omega t = 60^\circ$, auquel cas on a

$$HT = r \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}r; \text{ ce qui correspond à la position O.3.4 de la figure 4. Considérons maintenant la troisième période; et pour cela prenons l'excentrique dans une position quelconque OAB (fig. 4) entre les positions O.3.4 et O.4.5. Menons Bp perpendiculaire sur } a'b'. \text{ Nous aurons}$$

$$Bp = -OB \cos XOB = -OB \cos (XOA + AOB)$$

$$\text{ou } Bp = -r \cos (\omega t + 60^\circ), \quad [4]$$

et cette formule sera applicable depuis $\omega t = 60^\circ$, ce qui donne $-r \cos 120^\circ$ ou $+\frac{1}{2}r$, jusqu'à $\omega t = 120^\circ$, ce qui donne $-r \cos 180^\circ$ ou $+r$. On aurait des formules semblables pour la seconde demi-révolution.

Si l'on déduit des formules [3] et [4], en les différentiant par rapport au temps, les vitesses v_2 et v_3 du cadre pendant les deuxième et troisième périodes, on trouve

$$v_2 = \omega r \sin \omega t \text{ et } v_3 = \omega r \sin (\omega t + 60^\circ).$$

La première de ces valeurs étant applicable depuis $\omega t = 0$ jusqu'à $\omega t = 60^\circ$, on voit que v_2 va en augmentant pendant toute cette période, depuis zéro jusqu'à $\omega r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. La seconde valeur étant applicable depuis $\omega t = 60^\circ$ jusqu'à $\omega t = 120^\circ$, on voit que v_2 va en diminuant depuis $\omega r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jusqu'à zéro. Le mouvement du cadre, nul pendant la première période, est donc accéléré pendant la seconde, et retardé pendant la troisième; d'où il résulte qu'il n'y a dans ce dispositif aucun changement brusque de vitesse, et par conséquent aucun choc.

Cet excentrique présente cependant un inconvénient: c'est d'obliger à interrompre l'arbre tournant pour placer à son extrémité le plateau sur lequel l'excentrique fait saillie. Mais on peut, en modifiant le tracé de la manière suivante, établir l'excentrique en un point quelconque de l'arbre. — Soit Oa (fig. 5) le rayon de l'arbre tournant; on l'augmente

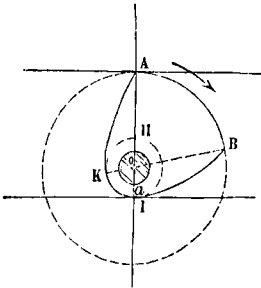


Fig. 5.

de la quantité aI nécessaire pour la solidité de l'excentrique; et du point O comme centre avec OI pour rayon on décrit une circonférence. On en décrit une seconde, du même point O comme centre avec un rayon OA égal au rayon OI (ou OH) augmenté de la course AH que l'on veut donner au cadre. Ayant mené le diamètre AI , on décrit du point A comme centre, avec AI pour rayon, un arc de cercle qui vient rencontrer la grande circonférence en un point B; et du point B comme centre, avec le même rayon, on décrit un second arc AK , qui vient se raccorder en K avec la petite circonférence; les arcs AB , BI , IK , KA déterminent la forme de l'excentrique. La loi du mouvement est très-peu altérée; et la première demi-révolution se compose encore de trois périodes: une période d'arrêt, pendant laquelle l'excentrique touche les côtés supérieur et inférieur du cadre par les arcs AB et IK ; une seconde période pendant laquelle le côté inférieur est poussé par l'arc IB , et s'avance d'un mouvement accéléré; enfin, une troisième période pendant laquelle le même côté est poussé par le sommet B, et continue à s'avancer, mais d'un mouvement retardé. La seconde demi-révolution présente les mêmes périodes; mais c'est le côté supérieur du cadre qui est poussé à son tour en sens contraire.

On peut, en augmentant l'angle AOB , prolonger la période d'arrêt et diminuer par conséquent la durée du mouvement, à chaque demi-révolution; mais la vitesse varie alors d'une manière plus

brusque et l'excentrique perd son principal avantage.

IV. EXCENTRIQUE EN CŒUR (quelques personnes disent *courbe en cœur* ou *excentrique à cœur*). Cet excentrique est destiné à transformer un mouvement circulaire uniforme en un mouvement rectiligne alternatif également uniforme; et à cause de cela on le désigne aussi sous le nom d'*excentrique à mouvement uniforme*. Soit O (fig. 6) la projection

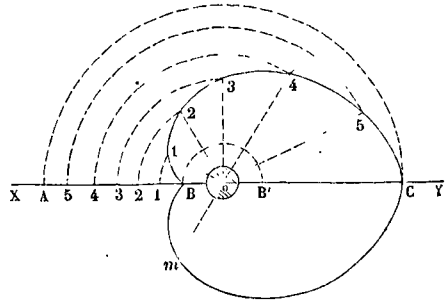


Fig. 6.

de l'axe de rotation sur le plan de la figure, et XY une droite passant par ce point, perpendiculaire à l'axe, et suivant laquelle le mouvement rectiligne doit avoir lieu. Imaginons, par exemple, que le point B soit l'extrémité d'une pièce qu'il s'agit de faire mouvoir uniformément de B vers A, puis de A vers B, et ainsi de suite, sans interruption, au moyen d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O. On y parvient de la manière suivante. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une demi-circonférence; on la divise en un certain nombre de parties égales, 6 par exemple, et, par les points de division, on mène des rayons que l'on prolonge indéfiniment. On divise ensuite la droite BA en un même nombre de parties égales, et l'on numérote les points de division comme l'indique la figure. Du point O comme centre on décrit alors une série d'arcs de cercle, savoir :

l'arc (1,1) jusqu'à la rencontre du rayon O,1;	
— (2,2) — — — — —	O,2;
— (3,3) — — — — —	O,3;

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait décrit la demi-circonférence qui a pour rayon OA . Pour les points ainsi déterminés sur les rayons successifs, on fait passer une courbe continue, qui n'est autre qu'une spirale d'Archimède, et on la répète symétriquement au-dessous de XY . Si l'on conçoit que l'excentrique tourne uniformément autour de l'axe O dans le sens de la flèche, l'extrémité B de la pièce à mouvoir sera poussée de B vers A, d'un mouvement uniforme. Car, après $\frac{1}{6}$ de la demi-révolution, le rayon O.1 sera venu se placer suivant XY ; le point B aura été poussé jusqu'en 1, et aura marché par conséquent de $\frac{1}{6}$ de BA ; après $\frac{2}{6}$ de la demi-révolution, c'est le rayon O.2 qui sera venu se placer suivant XY ; le point B aura été poussé jusqu'en 2, et aura marché par conséquent de $\frac{2}{6}$ de BA ; et ainsi

de suite. Le point B s'avancera donc de quantités proportionnelles aux temps, c'est-à-dire que son mouvement sera uniforme, ou du moins qu'il approchera d'autant plus de l'uniformité que la courbe en cœur aura été déterminée par un plus grand nombre de points.

Remarquons maintenant que si, par le point O, on mène une droite quelconque terminée de part et d'autre aux deux courbes, elle aura une longueur précisément égale à BC. En effet, si l'on considère, par exemple, le rayon O.4, prolongé jusqu'en m à sa rencontre avec la courbe inférieure, on voit que sa partie inférieure Om est, à cause de la symétrie par rapport à XY, précisément égale au rayon O.2; la corde totale O.4 + O.m est donc égale à O.4 + O.2. Mais O.4 diffère de O.A des $\frac{2}{6}$ de AB en moins, et O.2 diffère de OB des $\frac{2}{6}$ de AB en plus; la somme O.4 + O.2 équivaut donc à OA + OB, ou à OC + OB, c'est-à-dire à BC. Le raisonnement serait le même pour une autre corde quelconque passant par le point O.

Cela posé, supposons que le point C soit l'extrémité d'une seconde pièce liée à la première de manière que la distance BC demeure invariable. Pendant la première demi-révolution, le point C aura marché uniformément de C en B' à cause de sa liaison avec le point B; et, dans ce mouvement, le point C sera resté constamment en contact avec la courbe inférieure, en vertu de la propriété des cordes qui vient d'être démontrée. Mais, dans la seconde demi-révolution, c'est le point C qui sera poussé, à son tour, de B' vers C; et le point B reviendra uniformément de A vers B. Le mouvement circulaire continu de l'excentrique produira donc le mouvement rectiligne uniforme et alternatif des points B et C, et par conséquent des pièces dont ces points figurent les extrémités.

Dans la réalité, les choses ne sont pas disposées tout à fait de la même manière; car il pourrait arriver que l'excentrique ne glissât pas sur la pièce qu'il pousse. Cette circonstance serait surtout à craindre à la naissance du mouvement, à cause de l'angle rentrant que présente la courbe en cœur au point B. — On prend les points B et C pour centre de deux galets (ou roulettes) dont les axes, parallèles à celui qui est projeté en O, sont reliés laté-

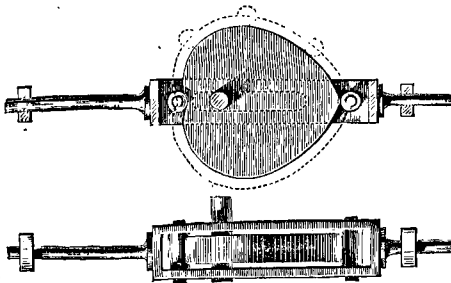


Fig. 7.

ralement par un châssis de forme invariable, représenté par la figure 7, et qui ne peut se mouvoir que suivant XY; et c'est à ce châssis que l'on adapte la pièce qu'il s'agit de faire mouvoir. Cette

disposition apporte une modification importante au tracé de la courbe en cœur; car il faut tenir compte de la dimension des galets, et faire en sorte que les courbes leur soient toujours tangentes. Pour y parvenir, on prend sur les courbes primitives, une série de points de distance en distance; de chacun de ces points comme centre, avec le rayon des galets, on décrit une circonférence; on trace ensuite à la main une nouvelle courbe intérieure à la courbe primitive, et tangente à toutes les petites circonférences; on répète cette nouvelle courbe symétriquement au-dessous de XY, et l'on a la forme réelle que doit avoir l'excentrique. La figure 7 indique ce tracé.

V. Un excentrique à mouvement uniforme peut être en même temps à intermittences, c'est-à-dire que l'allée et le retour peuvent être séparés par des temps d'arrêt. Si l'on veut, par exemple, que les temps d'arrêt correspondent chacun à un quart de révolution, on tracera l'excentrique comme l'indique la figure 8. L'arc BD est un arc de spirale d'Archi-

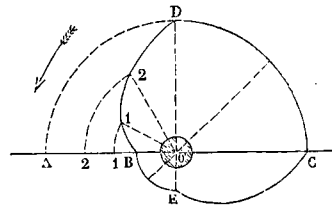


Fig. 8.

mède obtenu par le même procédé que pour l'excentrique en cœur. L'arc EC en est la reproduction symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle DOC. Les arcs DC et EB sont des arcs de cercle décrits du point O comme centre. On reconnaît aisément que, dans cet excentrique comme dans le précédent, toute corde menée par le point O et terminée de part et d'autre au contour de l'excentrique, a une longueur constante et égale à BC. Si le mouvement de rotation a lieu dans le sens de la flèche, pendant le premier quart de tour le point B est poussé uniformément vers A; pendant le second quart de tour il y a intermittence, puisque le point poussé B est alors en contact avec l'arc DC dont tous les points sont également éloignés du point O; pendant le troisième quart de tour, c'est le point C qui est poussé vers la droite, et le point B est ramené uniformément de A vers B; enfin, pendant le quatrième quart il y a une nouvelle intermittence. Il resterait, pour achever le tracé, à tenir compte de la dimension des galets placés en B et en C, comme nous l'avons indiqué pour l'excentrique en cœur.

VI. EXCENTRIQUES A MOUVEMENT UNIFORMEMENT VARIÉ. Les excentriques à mouvement uniforme ont l'inconvénient d'offrir à chaque alternative le passage brusque d'une vitesse finie à une vitesse nulle ou *vice versa*, ce qui produit des chocs de nature à altérer les parties en contact. Quand le mouvement uniforme n'est pas une des conditions du problème, il est préférable de s'imposer la condition que la vitesse croisse uniformément pendant la première moitié de chaque course et décroisse uniformément pendant la seconde moitié. Pour obte-

nir ce résultat on peut recourir au procédé graphique suivant, indiqué par M. Morin.

Soit AB (fig. 9) une droite représentant la demi-circonférence, et soit BC perpendiculaire à AB, et

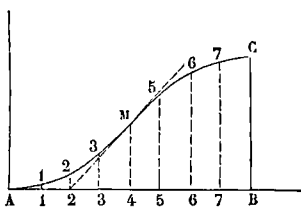


Fig. 9.

égal à la course qu'il s'agit de produire. Divisons AB en 8 parties égales, et prenons 4M égal à la moitié de BC. Traçons un arc de parabole AM tangent en A à la droite AB, passant par le point M, et ayant le point A pour sommet, ce que l'on sait faire. Puis renversons l'arc AM en MC, les deux arcs se raccorderont en M. La courbe AMC, considérée comme COURBE DES ESPACES (*Voy. ce mot*), représente un mouvement qui est uniformément accéléré de A en M, et uniformément retardé de M en C. Par les points de division de AB menons les ordonnées de cette courbe. Cela fait, soit O (fig. 10) la projection de l'axe de rotation, et OA la

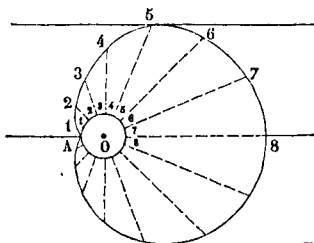


Fig. 10.

distance initiale de la pièce à guider à cet axe de rotation; décrivons, de O comme centre, une circonférence avec OA pour rayon; divisons la demi-circonférence supérieure en 8 parties égales; par tous les points de division menons des rayons; puis, sur ces rayons, à partir de la circonférence OA, portons les longueurs 1,1 — 2,2 — 3,3, ..., respectivement égales à celles qui sont désignées de la même manière sur la figure 9; et par les extrémités des longueurs ainsi portées faisons passer une courbe continue, que nous reproduirons symétriquement au-dessous de XY; l'ensemble de ces deux courbes déterminera la forme de l'excentrique.

Si les deux courses devaient être séparées par des intermittences, on obtiendrait un excentrique analogue à celui de la figure 8, dans lequel les spirales d'Archimède seraient remplacées par des courbes obtenues comme il vient d'être expliqué. En général, les intermittences s'obtiennent par des arcs de cercle décrits du centre de rotation.

VII. On peut avoir besoin de produire à chaque révolution entière 4 courses et autant d'intermittences, en s'imposant toujours la condition que le mouvement soit accéléré pendant la première moitié de la course et retardé pendant la seconde moi-

tié. On donne alors à l'excentrique la forme indiquée par la figure 11. Les arcs AB et EF, CD et GH, sont des arcs de cercles décrits du point O comme centre, et répondent aux temps d'arrêt de l'excentrique. Les courbes BC, DE, FG, HA, sont tracées d'après le procédé graphique expliqué plus haut (VI), et se raccordent avec les arcs AB, CD, etc. La course de la pièce guidée est la différence des rayons OA et OC. Lorsque, comme dans le cas actuel, l'excentrique ne satisfait pas à la condition que toutes les cordes menées par le centre de rotation soient égales, il faut que la pièce guidée soit constamment appuyée contre l'excentrique par le moyen d'un ressort qui tend à la ramener sans cesse vers l'axe.

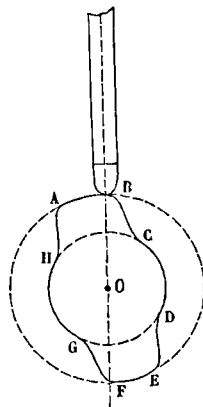


Fig. 11.

On peut remarquer ici combien le mot excentrique est impropre, puisque la rotation se fait précisément autour du centre de figure.

Un excentrique de ce genre est employé dans les machines à vapeur de Maudslay pour ouvrir ou fermer la soupape d'admission de la vapeur. Mais il présente une particularité de plus; c'est que les sections de la came par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation ne sont pas égales: les cercles OA et OC ont bien les mêmes rayons; mais les arcs AB et CD sont de longueurs différentes d'une section à l'autre; en sorte qu'en faisant glisser la came le long de son axe on peut faire varier la durée de l'admission de la vapeur.

On appelle *excentrique à virgules* un excentrique composé de deux demi-circonférences AMB, A'M'B' (fig. 12), qui auraient glissé d'une certaine

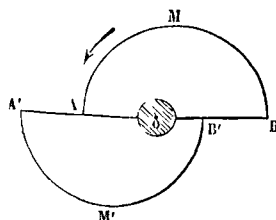


Fig. 12.

quantité suivant leur diamètre commun, et dont l'axe de rotation O est au milieu de la partie AB' de ce diamètre restée commune. Cet organe est employé dans les clouteries pour exercer momentanément, par l'intermédiaire d'un levier, une forte pression sur le fer. On le retrouve dans plusieurs métiers à tisser. Il sert, dans les moulins, à imprimer des secousses au distributeur de blé, aux cribles et aux blutoirs.

VIII. En général, quel que soit la loi du mouvement rectiligne alternatif que l'on veuille obtenir, on peut toujours, théoriquement au moins, tracer un excentrique qui le produise. Si, en effet, e dési-

gne la distance de l'extrémité de la pièce guidée à l'axe de rotation au bout du temps t , α l'angle décrit au bout du même temps par le corps tournant, à partir d'une position initiale; une équation telle que

$$e = f(\alpha)$$

exprimera la loi du mouvement demandé, f représentant une fonction continue ou discontinue. Or cette équation sera en même temps, en coordonnées polaires, celle de la courbe qui doit limiter l'excentrique. Si la forme résultant de cette équation est telle qu'une corde quelconque menée par le pôle ou centre de rotation ait une longueur constante, on assurera la transmission en faisant tourner l'excentrique dans un cadre ayant cette longueur. Si la condition dont il s'agit n'est pas remplie, il faudra, à l'aide d'un ressort, ramener constamment la pièce guidée contre l'excentrique. On

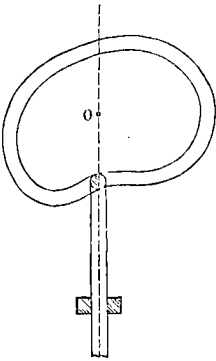


Fig 13.

peut encore assurer la transmission en remplaçant le contour de l'excentrique par une rainure dans laquelle s'engage une cheville fixée à l'extrémité de la pièce à faire mouvoir, comme l'indique la figure 13. Dans la pratique, la courbe de l'excentrique ne peut pas prendre indifféremment toutes les formes; si elle présentait des angles rentrants trop brusques, il pourrait en résulter un obstacle au glissement et par suite un arrêt. Les excentriques donnent toujours lieu à un frottement qui pourrait devenir considérable si l'effort à transmettre était grand. Aussi ne se sert-on de ce mode de transmission que dans les mécanismes légers, où il supplée à la main de l'homme pour produire une foule de mouvements délicats qui ne pourraient être obtenus d'une autre manière. Les machines employées dans le tissage des étoffes en offrent de nombreux exemples. (Voy. CAMES, ONDES, COULISSE DE STEPHENSON.)

EXCÈS SPHÉRIQUE, excès de la somme des angles d'un triangle sphérique sur deux angles droits. Cet excès s'exprime facilement en fonction de l'aire du triangle sphérique et du rayon de la sphère. On sait, en effet, par la Géométrie élémentaire, qu'en prenant pour unité d'aire celle du fuseau droit, et pour unité d'angle l'angle droit, la surface d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la demi-somme de ses angles sur un angle droit (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 5^e édit.), ce qui revient à dire que l'aire du triangle sphérique est à celle du fuseau droit, comme l'excès de la demi-somme de ses angles sur un angle droit, est à un angle droit, ou comme l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits est à

deux angles droits. En désignant donc par T l'aire du triangle, par r le rayon de la sphère, et par ε l'excès sphérique exprimé en parties du rayon, on aura

$$T : \pi r^2 = \varepsilon : \pi. \text{ d'où } \varepsilon = \frac{T}{r^2},$$

c'est-à-dire que l'excès sphérique (exprimé en parties du rayon) est le quotient de l'aire du triangle sphérique par le carré du rayon de la sphère. Si E désigne le même excès sphérique exprimé en degrés, on aura

$$E : 180^\circ = \varepsilon : \pi,$$

d'où

$$E = 180^\circ \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} = 180^\circ \cdot \frac{T}{\pi r^2}.$$

Dans les calculs géodésiques l'excès sphérique se réduit toujours à un petit nombre de secondes.

Lorsque les trois angles d'un triangle sphérique ont été observés directement, l'excès sphérique est immédiatement connu. Mais dans les triangles très-peu courbés que l'on considère en Géodésie, on peut encore obtenir l'excès sphérique quand on ne connaît qu'un côté et les deux angles adjacents. Il résulte, en effet, du THÉORÈME DE LEGENDRE (Voy. ce mot), que si l'on considère un triangle rectiligne ayant des côtés de même longueur que ceux du triangle sphérique, les deux triangles auront la même surface.

Or, la surface du triangle rectiligne dans lequel on connaît un côté c et les angles adjacents A' et B' est exprimée par

$$\frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A' \sin B'}{\sin(A' + B')};$$

mais il résulte du même théorème que les angles A' et B' ne diffèrent des angles correspondants A et B du triangle sphérique que du tiers de l'excès sphérique, quantité toujours très-petite; on peut donc, dans l'expression de la surface, remplacer sans erreur sensible A' et B' par A et B . La valeur de l'excès sphérique est donc exprimée, avec une approximation suffisante, par

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin(A + B)},$$

si ε est exprimé en parties du rayon. Si l'on veut exprimer l'excès sphérique en degrés, ou plutôt en secondes, il faudra écrire

$$E = \frac{180^\circ}{\pi} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sin 1''} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin(A + B) \sin 1''}.$$

EXPOSANT DE CHARGE, différence entre les poids des volumes d'eau de mer déplacés par un navire à l'état léger et en charge. Connaissant le tirant d'eau dans les deux cas, on peut, à l'aide de l'ÉCHELLE DE SOLIDITÉ (Voy. ce mot), trouver le déplacement à l'état léger et en charge; la différence multipliée par 1,026, densité de l'eau de mer, donne le poids de la charge. Ce poids, exprimé en tonnes métriques, est l'exposant de charge. Dans un vaisseau de premier rang cet exposant est de 2516 tonnes métriques environ.

EXTIRPATEUR. Voy. MACHINES AGRICOLES.

EXTRADOS, surface externe d'une VOÛTE (Voy. ce mot), celle que l'on voit par-dessus.

F

FAÏTAGE, pièce de charpente qui forme l'arête supérieure d'un comble à deux égouts (*Voy. COMBLE*); elle s'assemble avec les poinçons des différentes fermes qui soutiennent la toiture.

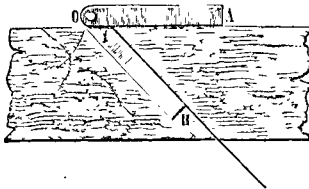
FAÏTE, ligne horizontale, suivant laquelle se coupent les deux plans inclinés qui forment un comble (*Voy. ce mot*). On la nomme aussi *ligne de couronnement*.

FANEUSE. *Voy. MACHINES AGRICOLES.*

FAUCHEUSE. *Voy. MACHINES AGRICOLES.*

FAUSSE BRAIE, seconde enceinte extérieure d'un corps de place qui n'en est point séparée par un fossé, et dont le terre-plein est au niveau du chemin couvert. Cette disposition avait été imaginée vers 1613 par Marolais, ingénieur hollandais. Mais l'expérience montra bientôt que lorsque l'ennemi battait l'escarpe placée derrière la fausse braie, les défenseurs ne pouvaient s'y maintenir, à cause des éclais de pierre enlevés par les boulets ennemis. La fausse braie facilitait d'ailleurs l'escalade du corps de place, et les parties placées en avant des bastions échappaient difficilement à l'ennemi. La fausse braie a été abandonnée par les ingénieurs postérieurs à Marolais, elle a été remplacée par les TENAILLES et les CONTRE-GARDES (*Voy. ces mots*).

FAUSSE-ÉQUERRE, instrument qui sert à mesurer les angles dièdres, et dont on fait un fréquent usage dans la charpente, et surtout dans la CONSTRUCTION NAVALE (*Voy. ce mot*). Il se compose essentiellement de deux règles assemblées à charnière comme les deux branches d'un compas, et pouvant s'ouvrir ou se fermer sous un angle quelconque. Mais ordinairement l'une des règles est double, c'est-à-dire formée de deux règles égales réunies par leur extrémité, et pouvant recevoir entre elles une troisième règle qui s'y loge comme la lame d'un couteau dans son manche. La double règle OA se nomme à cause de cela le *manche*, et



la règle simple OB s'appelle la *lame*. Pour mesurer à la fausse-équerre un angle dièdre saillant, on applique les règles contre ses faces par leurs arêtes internes IA, IB, de manière que le plan de l'instrument soit perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre; puis on reporte l'angle mesuré sur le bord d'une planchette, comme l'indique la figure, afin de conserver la mesure qu'on a prise. Pour mesurer un angle dièdre rentrant, on applique les règles contre ses faces par leurs arêtes externes, mais on se sert des arêtes internes pour reporter sur une planchette l'angle mesuré. On peut aussi relever à

la fausse-équerre un angle tracé sur un plan : on se sert pour cela des arêtes internes de la lame et du manche; on peut ensuite reporter cet angle sur le relief pour déterminer un angle égal. (*Voy. l'article déjà cité. Voyez aussi le mot ÉQUERRAGES.*)

FAUSSE-QUILLE, pièce longitudinale qui fortifie la quille d'un navire à sa partie inférieure. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

FAUX-COMBLE, partie supérieure d'un comble à la Mansart, qui se compose d'un entrait, d'un poinçon et d'un arbalétrier. (*Voy. FERMES.*)

FAUX-ENTRAIT. *Voy. ENTRAIT.*

FAUX-ÉTAMBOT, pièce qui fortifie l'étambot à sa face extérieure. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

FAUX-LIMON, pièce de charpente placée obliquement dans les cages d'escalier en pans de bois, pour recevoir les bouts des marches. (*Voy. ESCALIERS.*)

FAUX-PONT, plancher placé au-dessous du premier pont, et qui sépare l'entre-pont de la cale. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

FENÊTRE, ouverture pratiquée dans le mur d'un édifice pour donner accès à la lumière. La forme la plus ordinaire de cette ouverture ou *baie* est celle d'un rectangle dont la hauteur est le double de la largeur; on donne rarement à une fenêtre une hauteur plus grande, mais, dans certains cas, on peut lui donner une hauteur beaucoup moindre; ainsi, les fenêtres des entre-sols, et celles des étages en *ATTIQUE* (*Voy. ce mot*) ont quelquefois une hauteur égale ou inférieure à leur largeur, les

$\frac{2}{3}$ par exemple. Une fenêtre qui a cette proportion prend le nom de *mezzanine*. Ce genre de fenêtres est d'un emploi fréquent en Italie; on peut en voir, à Paris, au château des Tuileries.

Quelques auteurs indiquent pour la hauteur d'une fenêtre, les proportions suivantes, selon l'ordre auquel elle appartient :

Ordre toscan.....	1 fois et $\frac{11}{12}$ la largeur
— dorique.....	2 fois —
— ionique.....	2 fois $\frac{1}{12}$ —
— corinthien et composite.	2 fois $\frac{1}{6}$ —

La baie d'une fenêtre rectangulaire est limitée latéralement par des *jambages* ou *piédroits* verticaux, en haut par une pièce horizontale appelée *linteau*, et en bas par un *appui* horizontal, formant ordinairement *bandeau*. On distingue dans un jambage de fenêtre le *parement*, le *tableau*, la *feuillure* et l'*ébrasement*. Le *parement* est la face du mur dans lequel la baie est pratiquée; le *tableau* est la paroi interne du jambage, perpendiculaire au *parement*; la *feuillure* est une entaille à angle droit faite dans le jambage pour loger les *battants* de la croisée; l'*ébrasement* est une paroi oblique, allant de la feuillure au *parement*, et destinée à favoriser l'entrée de la lumière et le libre jeu des

moyen d'une *jambette* verticale *j* assemblée à tenon avec le tirant. La sablière étant toujours placée en arrière de la paroi extérieure du mur, on couvre l'intervalle par un petit chevron supplémentaire *k* appelé *coyau*, qui s'appuie sur la sablière. Ce coyau ne devant pas porter sur le bord de la corniche qu'il pourrait endommager, on y supplée par une planchette triangulaire *l* appelée *chanlatte*, que l'on cloue sur le bas du coyau. Le coyau et la chanlatte forment ainsi le prolongement du chevron sans charger la corniche. — On ne met pas plus de 4 mètres d'intervalle entre deux fermes consécutives; ou, si l'on est obligé de le faire pour éviter de placer un tirant au-dessus d'une fenêtre ou d'une porte ou à la rencontre d'une cheminée, il faut avoir soin d'augmenter l'équarrissage de la sablière, pour qu'elle ne se courbe pas sous l'effort des chevrons, qui, sollicités par les poids qu'ils portent, tendent à la repousser vers l'extérieur.

Il est bon de remarquer que le poinçon n'exerce pas nécessairement une pression de haut en bas sur le tirant, et qu'il peut tendre au contraire à le soutenir; le rôle principal du tirant est d'empêcher les arbalétriers de s'écarter en cédant aux poids de la toiture, et il y a des fermes dans lesquelles le poinçon ne se prolonge pas jusqu'au tirant.

Afin de donner au comble une capacité qui puisse être utilisée pour l'habitation, on adopte une autre disposition de ferme, qui est représentée fig. 2. La

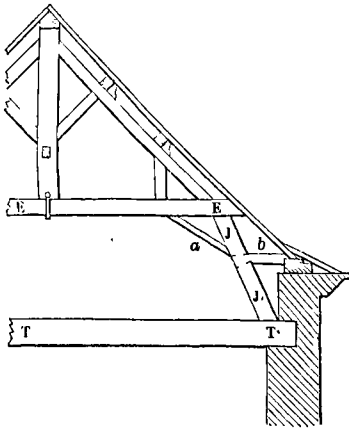


Fig. 2.

partie supérieure offre la reproduction de la ferme de la fig. 1, avec cette seule différence que le tirant est remplacé par une pièce EE ayant la même disposition, mais ne reposant pas sur le mur, et que l'on nomme un *entrait*. Cet entrait est soutenu par des *jambes de force* JJ, reposant elles-mêmes sur le tirant TT, engagé dans le mur à une certaine distance au-dessous de sa crête. Comme le système de l'entrait, du tirant et des deux jambas de force ne formerait pas un système invariable de forme, on est obligé de relier chaque jambe de force à l'entrait au moyen d'une pièce oblique *a*, appelée *aissellier*. La jambe de force est reliée à la sablière au moyen d'une pièce horizontale *b*, assemblée à queue d'aronde avec la jambe de force et par entaille à mi-bois avec la sablière; on nomme

cette pièce un *blochet*. On la remplace aujourd'hui par une bride en fer. Les autres parties de la ferme sont d'ailleurs les mêmes que dans la figure 1. Le tirant TT est de dimension assez forte pour porter un plancher, et l'on voit que l'intervalle compris entre ce tirant et l'entrait est assez vaste pour être rendu habitable; on l'éclaire par des lucarnes pratiquées dans la toiture.

Au lieu de faire porter l'entrait par des jambas de force, on peut l'assembler avec les arbalétriers, qui, dans ce cas, se prolongent jusqu'au tirant comme dans la figure 1. On donne alors à l'entrait le nom de *faux entrait*; et la ferme est dite à *entrait retroussé*.

C'est à ce même besoin de rendre les combles habitables que sont dus les *combles brisés* ou à *la Mansart*. La figure 3 représente un de ces combles.

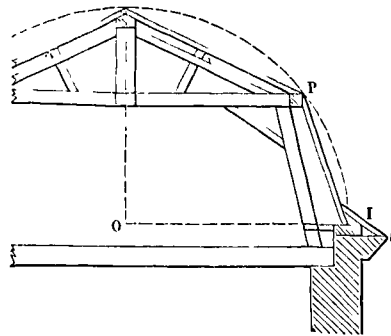


Fig. 3

La partie supérieure, nommée *faux-comble*, se compose, comme dans l'exemple de la figure 2, d'un entrait, d'un poinçon et de deux arbalétriers; mais le poinçon est plus court, et les arbalétriers sont plus inclinés. L'entrait est soutenu, comme dans l'exemple précédent, par des jambas de force reposant sur le tirant engagé dans le mur, un peu au-dessous de sa crête; l'entrait et les jambas de force sont réunis de même par des aisselliers; mais les jambas de force approchent beaucoup d'être verticales. Ce qui fait la différence essentielle entre les deux dispositions, c'est que les chevrons, au lieu de continuer en ligne droite à partir de l'entrait, se brisent en ce point pour suivre une direction à peu près parallèle à la jambe de force. Les entrails de deux fermes consécutives sont reliés à leur extrémité par une pièce horizontale P, appelée *panne de brisis*, sur laquelle s'appliquent les deux parties du chevron. Les autres détails sont d'ailleurs les mêmes que dans l'exemple de la figure 2. Les combles brisés offrent l'avantage de procurer des logements habitables sans obliger à élever les murs aussi haut; ils sont donc commodes et économiques. Quoiqu'on donne le nom de *mansardes* à ces logements, du nom du célèbre architecte qui en a répandu l'usage, il ne paraît pas être l'inventeur. Il existe des combles de ce genre dans la partie du Louvre bâtie par Pierre Lescot, sous le règne de Henri II; or, Pierre Lescot est mort en 1570, et Mansard est né en 1598.

Le profil d'un comble brisé peut être tracé de plusieurs manières. On peut, comme dans la figure 3.

décrire un demi-cercle qui ait son centre O sur l'axe du poinçon et au niveau de l'extrémité inférieure I du chevron, c'est-à-dire au niveau de la face supérieure de la sablière, et placer l'angle de la panne de brisis en un point P, tel que l'arc IP soit le cinquième de la demi-circonférence. On peut aussi faire l'arc IP égal à la moitié du quadrant. Enfin on peut, sans inscrire la figure dans un cercle, fixer la distance qu'on veut mettre entre le tirant et l'entrait, puis donner à la partie inférieure du chevron une pente de 1 de base sur 3 de hauteur, et à la partie supérieure, une pente de 2 de base sur 1 de hauteur. Le tracé de la figure 3 est généralement préféré.

On a employé, ou proposé, pour construire les fermes, un grand nombre de combinaisons très-diverses, qui ne pourraient être énumérées dans cet article, et pour lesquelles nous renverrons aux ouvrages spéciaux. (Voy. le *Traité de l'art de la charpenterie* de M. Emy, le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, etc.) Ainsi, pour supporter une couverture légère, on peut adopter la disposition représentée figure 4. La ferme se compose des deux

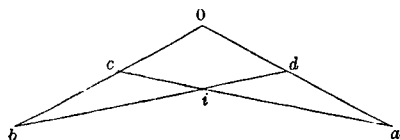


Fig. 4.

arbalétriers *Oa* et *Ob*, et de deux tirants ou entrails inclinés *aic*, *bid*, assemblés aux points *a*, *b*, *c*, *d*, *i*, *O*, et formant un système de forme invariable. L'arbalétrier et l'entrait s'assemblent avec la sablière, et sont en outre reliés par une bride en fer. — Le même système peut être employé pour supporter une toiture pesante et couvrir un grand espace; mais il faut alors relier les pièces deux à deux par des MOISES (Voy. ce mot), particulièrement vers les points où reposent les pannes. — Lorsqu'il s'agit de couvrir un espace très-considérable, on forme le tirant par une POUTRE D'ASSEMBLAGE (Voy. ce mot), et on le soutient par un certain nombre de moises jouant le rôle de poinçons. La figure 5 représente

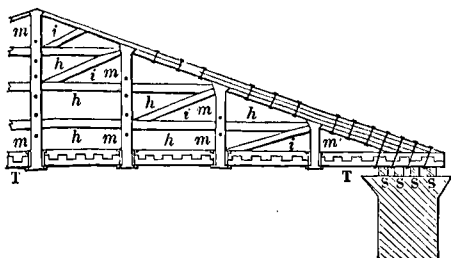


Fig. 5.

une des 32 fermes d'une des salles d'exercice de Moscou, construite par M. de Bétancourt. Ces fermes ont 49 mètres de portée. Les poutres qui composent le tirant TT sont assemblées à crans, et liées par des bandes de fer serrées par des boulons. Le tirant est soutenu par 7 couples de moises formant poin-

çons *mm*, *mm*, etc., auxquelles il est lié par des pièces de fer. Les arbalétriers, dont la force va en augmentant vers le bas, sont liés par des pièces horizontales *h h h*, également saisies entre les moises; enfin, ces pièces horizontales sont encore reliées entre elles par les pièces obliques *i i i*. La ferme repose sur la crête du mur par l'intermédiaire d'un certain nombre de sablières *SSS*. Les poinçons correspondants de deux fermes consécutives sont reliés entre eux par des moises horizontales qui n'ont point été représentées sur la figure. Tous les assemblages sont consolidés par des liens en fer. — On a construit des fermes de ce genre où les moises pendantes sont remplacées par des aiguilles en fer; ces fermes sont dites à la Palladio.

Lorsqu'on veut obtenir une ferme d'une grande portée, et se réserver en même temps un grand espace en hauteur, on fait usage d'une des deux dispositions suivantes.

Dans la première, représentée figure 6, et due à

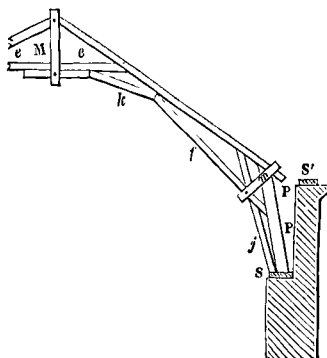


Fig. 6.

M. Ardant, l'extrémité de l'arbalétrier repose sur un poteau presque vertical PP, qui s'appuie lui-

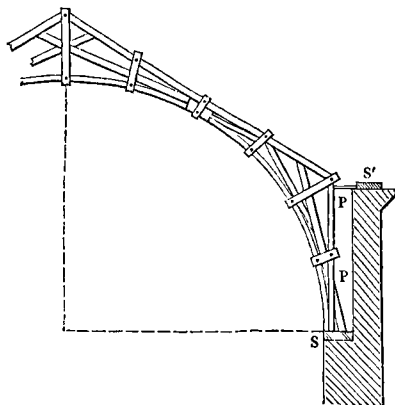


Fig. 7.

même sur une sablière inférieure S; l'entrait est doublé sur une partie de sa longueur par une pièce horizontale reliée à l'arbalétrier par un aissellier *k* et suspendue au faitage par une moise verticale, ou

moise pendante M; l'arbalétrier est rattaché au poteau P par une contre-fiche f et une jambe de force j, reliées à ces deux pièces par une autre moise m. Le chevron, qui n'est pas représenté sur la figure, aboutit à la sablière supérieure S', posée sur la crête du mur comme dans les fermes des figures 1 et 2.

La seconde disposition est due à M. Emy. Elle comprend (fig. 7) une ferme à pièces droites analogue à celle de M. Ardant, à laquelle est suspendue par des moises une ferme circulaire formée de madriers posés à plat l'un sur l'autre, comme l'indique la figure 8. Les madriers, égaux en longueur, sont

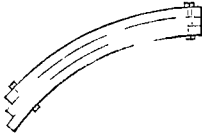


Fig. 8.

amenés de force à la courbure qu'ils doivent prendre, et boulonnés dans cette position pour les empêcher de reprendre la direction rectiligne. Le poteau PP, sur lequel s'appuie l'arbalétrier, est ici complètement vertical; il est relié à la sablière supérieure S' par une bride en fer. Le chevron, qui n'est pas figuré, aboutit à la sablière S'.

Lorsque, pour des raisons architecturales, la toiture, au lieu d'être plane, doit affecter une forme cylindrique, à directrice circulaire, ogivale ou autre, on remplace les chevrons droits par des chevrons courbes figurant cette directrice. Mais la distance comprise entre le chevron et l'arbalétrier, ou entre le chevron et les jambes de force, étant alors plus considérable, on est obligé de placer au-dessous des pannes des cales C, C (fig. 9) qui rem-

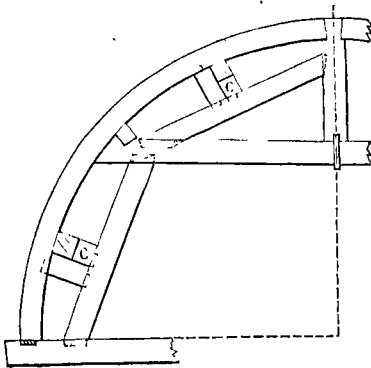


Fig. 9.

plissent l'intervalle. Ces cales sont maintenues par les tasseaux en même temps que les pannes elles-mêmes.

La règle générale qui préside à la construction des fermes courbes consiste en ce que toute la résistance nécessaire doit être fournie par les pièces droites, les pièces courbes ne devant être comptées qu'au point de vue de la forme.

On donne aussi le nom de *fermes* aux pans de charpente verticaux et parallèles qui soutiennent le

tablier d'un pont de bois ou d'un pont métallique. (Voy. PONTS ET PONTS BIAIS.)

II. Après avoir décrit les fermes les plus usitées, il est nécessaire d'indiquer comment on calcule les dimensions de leurs principales pièces.

Considérons d'abord une ferme composée de deux arbalétriers AB et A'B (fig. 10) et d'un tirant AA'.

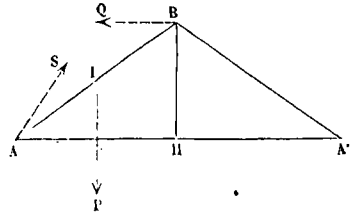


Fig. 10.

Soit l la longueur d'un arbalétrier, $2a$ la longueur du tirant, h la hauteur BH du faîtage au-dessus de ce tirant. Soit P le poids de la toiture portée par l'arbalétrier, poids que l'on peut supposer uniformément réparti sur AB, et dont la résultante est appliquée au milieu I de l'arbalétrier. Cette pièce est en outre soumise à une réaction S au point A, et à une réaction Q au point B; à cause de la symétrie, cette dernière doit être horizontale, puisque les réactions des deux arbalétriers l'un sur l'autre sont égales et opposées. En regardant d'abord l'arbalétrier AB comme un corps rigide, on aura pour son équilibre, S_x et S_y désignant les composantes horizontale et verticale de S,

$$S_x + Q = 0, \quad S_y + P = 0, \quad P \cdot \frac{1}{2}a - Qh = 0,$$

d'où l'on tire

$$Q = P \frac{a}{2h}, \quad S_x = -P \frac{a}{2h}, \quad S_y = -P. \quad [1]$$

Soit p le poids de la toiture par mètre carré, et e la distance de deux arbalétriers consécutifs, on aura $P = pel$; et le poids par mètre courant que porte AB sera exprimé par pe .

Si l'on a maintenant égard à la flexibilité de l'arbalétrier, on pourra le considérer comme une pièce posée sur deux appuis A et B, chargé d'un poids uniformément réparti, qui par mètre courant sera la composante perpendiculaire à AB de la force verticale pe , c'est-à-dire $pe \frac{a}{l}$; et en outre à une force dirigée suivant sa longueur, qui comprendra la composante de P suivant BA et celle de Q suivant la même direction, c'est-à-dire à une force longitudinale T donnée en valeur absolue par la relation

$$T = P \cdot \frac{h}{l} + Q \cdot \frac{a}{l} \quad \text{ou} \quad T = pch + pe \frac{a^2}{2h}. \quad [2]$$

Le moment fléchissant maximum aura lieu au point I; et l'on aura (Voy. FLEXION PLANE)

$$\mu = \frac{1}{8} \cdot pe \cdot l^2. \quad [3]$$

On peut s'assurer, en effet, afin de justifier complètement la méthode employée, que la composante de Q perpendiculairement à AB est égale à la moitié de la composante de P dans la même direction, comme cela a lieu pour une pièce posée sur deux appuis et chargée uniformément d'un poids total P.

Il faudra appliquer ici la formule générale

$$R = \frac{v\mu}{I} + \frac{T}{\Omega} \quad [4]$$

(en mettant + devant le dernier terme, parce que la force T est une pression).

Si l'on suppose la section de l'arbalétrier carrée et que x désigne son côté, on aura

$$v = \frac{1}{2}x, \quad I = \frac{1}{12}x^3, \quad \Omega = x^2,$$

et en substituant dans [4] ces valeurs et celles de μ et de T, on aura pour la fibre la plus fatiguée

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{pe^2}{x^3} + \frac{pe}{x^2} \left(h + \frac{a^2}{2h} \right). \quad [5]$$

Mettant pour R la valeur qui convient à la matière employée, soit 6 000 000 pour le fer et 70 000 environ pour le bois de chêne, on tirera de cette équation la valeur de l'inconnue x . Le second terme du second membre étant ordinairement très-petit par rapport au premier, on peut le négliger dans une première approximation, calculer x par la formule

$$x = \sqrt[3]{\frac{3pe^2}{4R}}, \quad [6]$$

mettre cette valeur pour x dans le second terme, le retrancher de R, ce qui donnera une nouvelle constante R', et calculer par la formule [6], dans laquelle on mettra R' au lieu de R, une valeur de x plus approchée, et qui suffira généralement.

Si l'arbalétrier est en fer et que sa section soit à double T, on pourra se servir de la table de M. Bourdais, donnée à l'art. PLANCHERS. Pour cela on laissera la formule sous la forme [5]. On choisira dans la table une poutre qui paraisse devoir convenir à la question; la table donnera $\frac{1}{v}$ et Ω ; il sera donc facile de calculer le second membre de l'équation [4] et de voir si sa valeur se rapproche suffisamment, par défaut, de la valeur limite que l'on a fixée pour R. Un court tâtonnement conduit au résultat cherché, attendu que le second terme $\frac{T}{\Omega}$ étant généralement négligeable par rapport

au premier, le rapport $\frac{1}{v}$ diffère peu de $\frac{\mu}{R}$, et que l'inspection de la table montre dès l'abord parmi quelles poutres on aura à choisir.

Le tirant est sollicité par son poids, et s'il porte un plancher, par un autre poids uniformément réparti. Il est soumis en outre à la composante horizontale de la réaction de l'arbalétrier, c'est-à-dire à une force égale et contraire à S_x , c'est-à-dire à une tension longitudinale égale à $\frac{Pa}{2h}$, et à une force égale s'exerçant en A'. Si le tirant est en fer, on peut négliger son poids; on aura donc pour calculer sa section la formule (Voy. ALLONGEMENT)

$$S_x = E\Omega i, \quad [7]$$

ou, comme la section est presque toujours un cercle dans ce cas,

$$\frac{Pa}{2h} = E\pi\rho^2 i, \quad \text{d'où } \rho = \sqrt{\frac{Pa}{2\pi h E i}}. \quad [8]$$

On se donne la limite de l'allongement proportionnel i , par exemple 0,0006; et l'on tire de cette formule la valeur du rayon ρ .

Si le tirant est en bois et qu'il porte un plancher,

à raison d'un poids q par mètre de tirant, il faudra employer la formule [4] dans laquelle on fera

$$\mu = \frac{1}{8}q(2a)^2 \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{1}{2}qa^2; \quad T = \frac{Pa}{2h}, \quad \Omega = x^2,$$

en appelant x le côté de la section du tirant supposée carrée; puis

$$v = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{12}x^3,$$

par conséquent

$$R = \frac{3qa^2}{x^3} + \frac{Pa}{2hx^2}, \quad [9]$$

d'où l'on tirera la valeur de x par la méthode des approximations successives. Cette équation s'abaîsserait au second degré si le tirant ne portait pas de plancher, parce qu'en appelant H le poids du mètre cube de bois employé on aurait $q = Hx^2$, et que par conséquent le premier terme du second membre n'aurait plus que la première puissance de x en dénominateur. Si la section était un rectangle ayant x pour base et hx pour hauteur, on aurait

$$v = \frac{1}{2}hx, \quad I = \frac{1}{12}xh^3x^3, \quad \text{d'où } \frac{v}{I} = \frac{6}{h^2x^3};$$

et l'équation serait de même forme.

Si la ferme n'avait pas de tirant, la force S_x représenterait, en signe contraire, la *poussée* exercée par l'arbalétrier sur le mur.

Supposons au contraire qu'indépendamment du tirant AA' la ferme comprenne un poinçon BH. Nous avons vu que ce poinçon ne presse pas de haut en bas sur le tirant, mais que c'est au contraire le tirant qui sollicite le poinçon. On peut donc considérer le tirant comme une pièce posée sur 3 appuis, savoir sur les murs en A et A', et en H sur l'étrier qui le lie au poinçon. Dans ce cas les réactions des appuis extrêmes sont égales à $\frac{3}{8}qa$ (Voy. FLEXION PLANE), et celle de l'appui moyen est exprimée par $\frac{5}{4}qa$. Le poinçon est donc sollicité de

haut en bas par une force égale à $\frac{5}{4}qa$; et chaque arbalétrier peut être considéré comme soumis à son extrémité supérieure à la moitié de cette force ou à $\frac{5}{8}qa$ dans le sens vertical. Dans ce cas les équations d'équilibre de l'arbalétrier deviennent

$$S_x + Q = 0, \quad S_y + P + \frac{5}{8}qa = 0,$$

$$P \cdot \frac{1}{2}a + \frac{5}{8}qa^2 - Qh = 0,$$

d'où

$$Q = \frac{Pa}{2h} + \frac{5qa^2}{8h}, \quad S_y = -\left(P + \frac{5}{8}qa\right), \quad S_x = -Q, \quad [10]$$

et en suivant la même marche que ci-dessus, on trouvera

$$T = pe \left(h + \frac{a^2}{2h} \right) + \frac{5qa}{8l} \left(h + \frac{a^2}{h} \right), \quad [11]$$

valeur que l'on substituera, avec $\mu = \frac{1}{8}pel^2$, dans l'équation [4] pour en déduire comme plus haut les dimensions de l'arbalétrier. Celles du tirant s'obtiendront en considérant cette pièce comme posée sur 3 appuis de niveau; on trouvera $\mu = \frac{1}{8}qa^2$ pour le maximum du moment fléchissant; et l'on appli-

quera de nouveau l'équation [4] en y remplaçant μ par cette valeur et T par la force S_x prise en signe contraire, ou par $\frac{Pa}{2h} + \frac{5qa^2}{8h}$. La section transversale du poinçon sera donnée approximativement par la condition que cette pièce supporte l'effort longitudinal $\frac{5}{4}qa$; on aura donc, en appelant x le côté de sa section,

$$\frac{5qa}{4} = Ex^2i, \text{ d'où } x = \sqrt{\frac{5qa}{4Ei}}$$

i ayant la valeur limite que l'on ne veut pas dépasser, par exemple 0,000125 pour le bois.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une ferme à entrait retroussé. On suppose ordinairement alors que le montage de la ferme ait été exécuté de manière que la tension F (fig. 11) de l'entrait soit égale

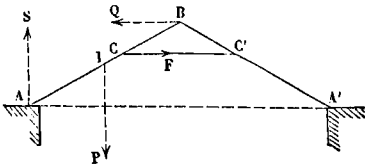


Fig. 11.

en valeur absolue à la réaction Q de l'arbalétrier BA' sur l'arbalétrier BA, auquel cas les murs n'exercent que des réactions verticales S. (Cette condition pourrait être réalisée rigoureusement si l'entrait CC', supposé en fer, était formé de deux parties terminées par des vis filetées en sens contraire et qu'on pourrait rapprocher ou écarter à l'aide d'un écrou commun.) L'équilibre de l'arbalétrier donne dans ce cas, en nommant h' la hauteur du point B au-dessus de l'entrait,

$$F = Q, \quad S = P, \quad P \cdot \frac{1}{2}a + F(h - h') - Qh = 0.$$

Cette dernière relation revient à

$$P \cdot \frac{1}{2}a - Qh' = 0, \text{ d'où } Q = \frac{Pa}{2h'}.$$

On considère l'arbalétrier comme posé sur deux appuis A et B, chargé d'un poids uniformément réparti, qui est comme plus haut $pe \cdot \frac{a}{l}$, perpendicu-

lairement à sa longueur, et d'une force $F \cdot \frac{h}{l}$ aussi perpendiculaire, appliquée au point C; en outre aux forces longitudinales peh , $F \cdot \frac{a}{l}$ et $Q \cdot \frac{a}{l}$. On sui-

vra, pour trouver le maximum du moment fléchissant, la marche indiquée à l'article FLEXION PLANE; puis on appliquera la formule [4] dans laquelle T sera la somme des forces longitudinales énumérées ci-dessus. Les dimensions du tirant s'obtiendront comme dans les cas précédents.

Les fermes à la Mansart se composent d'une ferme analogue aux précédentes, avec arbalétriers, tirant et poinçon, reposant sur des jambes de force. Ces pièces étant peu inclinées, on négligera la flexion très-faible qu'elles peuvent prendre; on évaluera la charge verticale que supporte chacune d'elles: c'est la moitié du poids de la ferme située au-dessus; on en prendra la composante dans le sens de la jambe de force, et l'on appliquera la formule

$$R = E\Omega i,$$

en mettant pour R cette composante, pour i le raccourcissement proportionnel maximum qu'on ne veut pas dépasser; et l'on en tirera la section Ω .

Quant aux pièces accessoires, telles que contrefiches, aisseliers, blochets, on estime approximativement les dimensions qu'il convient de leur donner; mais on ne peut les déterminer exactement, parce que l'équilibre pouvant avoir lieu sans le secours de ces pièces, on ne peut savoir à quels efforts elles sont réellement soumises. La pratique et l'exemple de ce qui se fait dans les constructions ordinaires sont les seuls guides à cet égard. Nous donnons ci-dessous, d'après le cours de construction de l'École de Metz, les dimensions transversales des pièces de diverses fermes. Ces dimensions sont évaluées en centimètres; le premier nombre exprime la hauteur, le second l'épaisseur horizontale.

LONGUEUR DANS OEUVRE...	FERME SIMPLE.			FERME à entrait retroussé, et arbalétrier descendant jusqu'au tirant.			FERME à entrait retroussé, et jambes de force (fig. 2).			FERME à la Mansart.		
	6m	9m	12m	6m	9m	12m	6m	9m	12m	6m	9m	12m
Tirant, sans plancher...	27-24	33-30	40-36	"	"	"	"	"	"	"	"	"
do avec plancher...	32-27	40-32	47-37	42-30	52-30	63-45	42-30	52-37	63-45	43-30	52-37	63-45
Entrait retroussé.....	"	"	"	21-19	27-24	33-30	21-19	27-24	33-30	23-20	30-27	36-33
Jambes de force.....	"	"	"	"	"	"	24-19	29-24	35-30	22-20	29-27	34-33
Arbalétriers.....	22-19	26-24	32-30	22-19	26-24	32-30	18-15	22-18	27-22	20-18	25-23	30-28
Poinçon.....	19-19	24-24	30-30	19-19	24-24	30-30	15-15	18-18	22-22	18-18	23-23	28-28
Contrefiches et jambettes.	16-16	19-19	21-21	15-15	18-18	22-22	14-14	16-16	18-18	14-14	16-16	18-18
Aisseliers.....	"	"	"	19-15	24-18	30-22	19-15	24-18	30-22	20-13	27-18	33-22
Faltes.....	19-16	20-17	22-16	19-16	20-17	22-19	19-16	20-17	22-19	19-16	20-17	22-19
Liens de falte.....	15-15	16-16	17-17	15-15	16-16	17-17	15-15	16-16	17-17	15-15	16-16	17-17
Pannes, tasseaux et chantignolles.....	19-19	20-20	22-22	19-19	20-20	22-22	19-19	20-20	22-22	19-19	20-20	22-22
Liernes.....	"	"	"	19-19	20-20	22-22	19-19	20-20	22-22	20-20	21-21	23-23
Sablères.....	12-23	14-25	16-28	12-23	14-25	16-28	12-23	14-25	16-28	12-23	14-25	16-28
Blochets.....	"	"	"	"	"	"	18-14	20-15	22-16	18-14	20-15	22-16
Chevrones.....	9-9	10-10	11-11	9-9	10-10	11-11	9-9	10-10	11-11	9-9	10-10	11-11
Coyaux.....	8-7	9-8	10-9	8-7	9-8	10-9	8-7	9-8	10-9	8-7	9-8	10-9
Chanlatte.....	16-3	18-4	20-5	18-3	19-4	20-5	16-3	18-4	20-5	16-3	18-4	20-5

Pour calculer les dimensions des pièces d'une ferme à la Palladio ou analogue à celle de la figure 5, on peut procéder comme il suit. On commence par faire abstraction des entrails, des poinçons et des pièces obliques, et l'on détermine comme il a été dit pour le cas de la figure 10, les réactions qui s'exercent au faite et de la part des murs. Ce calcul donne l'effort longitudinal auquel le tirant est soumis, et permet de déterminer approximativement sa section et son poids. Considérant alors ce tirant comme une pièce posée sur un certain nombre d'appuis, on calcule les réactions de ces appuis (Voy. FLEXION PLANE); ces réactions connues permettront de déterminer approximativement la section et le poids des poinçons. Considérant à son tour l'arbalétrier comme posé sur des appuis, on calculera les réactions de ces appuis; et comme celles qui s'exercent au sommet des poinçons sont connues par le calcul précédent, puisque ces pièces doivent être en équilibre sous l'action de leur poids et des forces qui s'exercent à leurs extrémités, on en conclura aisément les réactions qui s'exercent sur les entrails, et par suite la section et le poids de ces pièces. On pourra recommencer les opérations en faisant entrer le poids des pièces dans le calcul, et l'on déterminera avec une approximation suffisante les dimensions des pièces considérées. Quant aux pièces obliques i, i, i, \dots , les réactions auxquelles elles sont réellement soumises ne peuvent être déterminées directement; mais comme ces pièces ne sont introduites que pour ajouter aux liaisons du système, on pourra faire telle hypothèse qu'on voudra pour déterminer les efforts auxquels elles sont soumises; on pourra, par exemple, s'imposer la condition qu'elles résistent indépendamment des entrails.

Les fermes du système Ardant peuvent être traitées comme les fermes à la Mansart. Voici, d'après M. Morin, les dimensions transversales des principales pièces, calculées sans avoir égard à la tension ou à la compression produite par les composantes longitudinales des forces qui sollicitent ces pièces.

PORTÉE de la ferme.	ARBALÉTRIERS		SOUS-ARBALÉTRIERS et saisseliers.		MOISES des poteaux.		JAMBE de force.	
	c	sur c	c	sur c	a	c	c	sur c
24 ^m	25	20	20	20	25 sur 12,5	25	25	20
22	22	20	20	20	22 — 12,5	25	25	20
20	20	20	20	20	20 — 12,5	25	25	20
18	20	15	20	15	18 — 12,5	15	15	15
16	18	15	15	15	16 — 12	15	15	15
14	15	15	15	15	15 — 12	15	15	15

Dans les fermes du système Émy, l'expérience a démontré que la ferme droite porte les $\frac{2}{3}$ du poids de la toiture, et que l'arc porte l'autre tiers. Les dimensions de la ferme droite se calculent comme dans le système Ardant. Quant aux dimensions de l'arc, elles sont données suivant M. Ardant par les formules suivantes, dans lesquelles P désigne le poids total porté par l'arc, R le coefficient de la résistance, que M. Ardant prend égal à 300000 pour les arcs en bois, b la dimension de la section de l'arc perpendiculaire au plan de la ferme, h la di-

mension perpendiculaire à la première, et ρ le rayon moyen de l'arc.

MODE DE RÉPARTITION DE LA CHARGE.

- Uniformément sur la circonférence..... $bh^2 = \frac{P}{R}(0,599h + 0,27\rho)$;
- Uniformément par rapport à l'horizontale..... $bh^2 = \frac{P}{R}(0,680h + 0,25\rho)$;
- Suspendue au sommet.....
- Suspendue au-dessus du milieu du rayon..... $bh^2 = \frac{P}{R}(0,597h + 0,55\rho)$.

Ces formules ne sont qu'une transformation de la formule [4]. Elles supposent la section de l'arc rectangulaire; si elle était circulaire, il faudrait les remplacer respectivement par les suivantes, dans lesquelles r désigne le rayon de la section :

$$r^3 = \frac{P}{R}(0,124r + 0,062\rho),$$

$$r^3 = \frac{P}{R}(0,200r + 0,044\rho),$$

$$r^3 = \frac{P}{R}(0,200r + 0,212\rho).$$

III. Il nous reste à parler des fermes en fer à la Polonceau, imaginées par cet habile ingénieur, pour recouvrir les larges espaces qu'offrent les gares des chemins de fer. — Ce système consiste : 1° à armer l'arbalétrier AB (fig. 12) de trois bielles

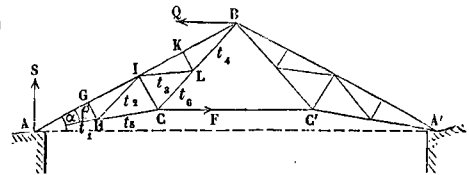


Fig. 12.

IC, KL, GH également espacées, et reliées entre elles et avec l'arbalétrier par les 6 cordons AH, HI, IL, LB, HC, CL; 2° à relier les sommets C et C' des bielles opposées par un tirant CC'. Les arbalétriers s'exécutent en fer double T; les bielles sont à nervures comme les bielles des machines; elles sont en fer ou en fonte; les cordons et le tirant sont en fer.

Pour calculer les dimensions transversales de ces différentes pièces, on commence par négliger leur poids vis-à-vis des efforts qu'elles ont à supporter. On regarde l'arbalétrier comme posé sur 5 appuis équidistants A, G, I, K, B, et chargé d'un poids uniformément réparti. Si p désigne le poids de toiture porté par un mètre d'arbalétrier, et α l'angle de AB avec l'horizon, la charge par mètre uniformément répartie sur l'arbalétrier perpendiculairement à cette pièce sera $p \cdot \cos \alpha$; et en appliquant les méthodes exposées à l'art. FLEXION PLANE, on trouvera les réactions des points d'appui, savoir :

En A et en B... $Q_0 = \frac{11}{112} pl \cos \alpha,$

En G et en K... $Q_1 = \frac{32}{112} pl \cos \alpha, [12]$

En I..... $Q_2 = \frac{26}{112} pl \cos \alpha,$

l désignant la longueur AB. — On suppose la tension F de l'entrail ou tirant CC' réglée de manière que la réaction du mur en A soit une force verticale

S; la réaction des deux arbalétriers en B est d'ailleurs, comme on l'a déjà vu, une force horizontale Q. L'équilibre de la moitié du système, regardé comme rigide, donne donc, en appelant h la hauteur du point B au-dessus de AA', et h' sa hauteur au-dessus de CC,

$$F=Q, S=pl, pl \cdot \frac{1}{2} l \cos \alpha + F(h-h') - Qh=0.$$

La dernière se réduit à $\frac{1}{2} pl^2 \cos \alpha - Fh'=0,$

d'où $F = \frac{pl^2 \cos \alpha}{2h'} \quad [13]$

Désignons par $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ les tensions respectives des cordons AH, HI, IL, LB, HC, CL, et soit φ la tension ou pression longitudinale de la bielle IC. Il faut trouver 7 équations pour déterminer ces 7 inconnues.

Or, 1°, si l'on projette perpendiculairement à AB les forces $-Q_0, S$ et t_1 , dont la dernière est évidemment la résultante des deux premières, on aura

$$-Q_0 + S \cos \alpha - t_1 \sin \beta = 0,$$

en désignant par β l'angle BAC.

Cette relation peut s'écrire

$$- \frac{11}{112} pl \cos \alpha + pl \cos \alpha - t_1 \sin \beta = 0,$$

d'où $t_1 = \frac{101}{112} pl \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \quad [14]$

De même, la force t_4 qui s'exerce en B est la résultante de Q et de $-Q_0$; on a donc en projetant ces forces perpendiculairement à AB,

$$-Q_0 + Q \sin \alpha - t_4 \sin \beta = 0,$$

ou

$$- \frac{1}{112} pl \cos \alpha + \frac{pl^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2h'} - t_4 \sin \beta = 0, \quad [15]$$

d'où l'on tirerait t_4 .

Maintenant, si l'on considère l'équilibre du point H, sous l'action des forces t_1, t_2, t_3 et $-Q_1$, on obtient, en projetant ces forces sur AB et sur une perpendiculaire à AB,

$$(t_2 + t_3 - t_1) \cos \beta = 0 \text{ ou } t_2 + t_3 - t_1 = 0, \quad [16]$$

$$-Q_1 + (t_1 + t_2) \sin \beta - t_3 \sin \beta = 0$$

ou $\frac{32}{112} pl \cos \alpha = (t_1 + t_2 - t_3) \sin \beta. \quad [17]$

Si l'on considère de même l'équilibre du point L, sous l'action des forces t_3, t_4, t_5 et $-Q_1$, on trouvera par un procédé semblable

$$t_3 + t_5 - t_4 = 0, \quad [18]$$

$$\frac{32}{112} pl \cos \alpha = (t_3 + t_4 - t_5) \sin \beta. \quad [19]$$

Enfin, si l'on considère les forces qui s'exercent au point I, sur la bielle IC, savoir les forces $-Q_2, t_2$ et t_3 , on voit qu'elles ont pour résultante φ ; en les projetant sur IC, on doit donc avoir

$$\varphi = Q_2 + (t_2 + t_3) \sin \beta. \quad [20]$$

Les équations [14] à [20] donneront les 7 inconnues. L'équation [14] donnera t_1 , l'équation [15] donnera t_4 ; les équations [16] et [17] donneront l'une la somme et l'autre la différence des inconnues t_2 et t_3 ; les équations [18] et [19] donneront l'une la somme et l'autre la différence des inconnus t_3 et t_5 ; l'équation [20] fera connaître l'inconnue φ . On déduira des valeurs obtenues les dimensions transversales des bielles, des cordons et du tirant. — Quant à celles de l'arbalétrier, on les déduira de l'équation [4] dans laquelle on mettra pour μ le maximum du moment fléchissant déduit du calcul

qui a donné les réactions des 5 appuis, et pour T la somme des projections des forces S et t_1 sur la direction de AB, savoir :

$$T = S \sin \alpha + t_1 \cos \beta$$

ou $T = pl \sin \alpha + \frac{101}{112} pl \cos \alpha \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta}. \quad [21]$

Lorsque l'espace à recouvrir est moins considérable, on peut ne soutenir l'arbalétrier que par une seule bielle reliée à l'arbalétrier par deux cordons (fig.13). La marche à suivre pour calculer les di-

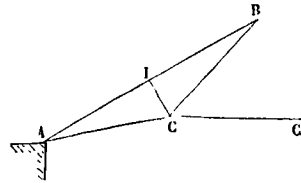


Fig. 13.

mensions transversales de ces pièces serait la même que ci-dessus, mais les opérations seraient moins compliquées.

Tous les calculs précédents supposent que l'on connaisse le poids de la toiture par mètre carré. Voici, d'après M. Ardant, les principales données de l'expérience à cet égard.

NATURE DE LA COUVERTURE.	POIDS du mètre carré de toiture (bois non compris).	CRUE de bois par mètre carré.
Tuiles plates à crochet.....	60 ^k	0,063
d° creuses, posées à sec.	75 ^k à 90 ^k	0,058
d° maçonnées..	136 ^k	0,068
Ardoises.....	38	0,056
Cuivre en feuilles.....	14	0,042
Zinc n° 14, et tôle galvanisée.	8,50	0,042
Mastic bitumineux.....	25	0,056

La surcharge de neige ne s'élève guère dans nos climats qu'à 25^k par mètre carré; dans le nord elle peut aller jusqu'au double. (Voy. le Cours de Constructions, professé à l'École centrale par M. Mary; la Théorie de la résistance des solides, de M. Bélanger; le Mémoire de M. Ardant sur les combles; l'Aide-mémoire des ingénieurs de M. Claudel, etc.)

FERME SOUS FAÏTE, pan de charpente vertical, formé par le FAÏTAGE d'un comble, par les poinçons dans lesquels celui-ci est assemblé, et par des CONTRE-FICHES qui relient chaque poinçon au faitage (Voy. ces divers mots.)

FEUILLURE, entaille à angle droit faite dans le jambage d'une porte ou d'une fenêtre pour y loger le vantail de la porte ou le battant de la croisée.

FIBRE MOYENNE, fibre longitudinale d'un prisme solide qui passe par les centres de gravité de toutes les sections normales. (Voy. FLEXION PLANE.)

FIBRES NEUTRES, fibres longitudinales d'un prisme solide qui dans la FLEXION PLANE (Voy. ce mot) n'éprouvent ni allongement ni raccourcissement. Elles sont toutes situées dans un même plan perpendiculaire au plan de flexion.

FIGURATIVES (CARTES). Voy. CARTES FIGURATIVES.

FIGURE DE LA TERRE, figure qu'affecte la

surface des mers supposée prolongée au-dessous des continents.

I. Les anciens croyaient la terre plane; cependant Pythagore et plusieurs astronomes de la Grèce avaient reconnu que la terre est ronde. Plusieurs preuves démontrent en effet cette vérité. En premier lieu, on sait que lorsqu'un navire apparaît en mer à l'horizon, on n'aperçoit d'abord que le haut des mâts; à mesure qu'il approche, on commence à apercevoir ses basses voiles, et enfin le corps du bâtiment; l'inverse a lieu quand le navire s'éloigne. De même, les personnes placées sur un navire qui s'approche d'un port aperçoivent d'abord le sommet des édifices, puis la partie moyenne, puis enfin le bas, etc. En second lieu, lorsqu'on s'avance vers le nord, on voit l'étoile polaire s'élever de plus en plus au-dessus de l'horizon, ce qui n'aurait pas lieu si la terre était plane. En troisième lieu, les voyages autour du monde, exécutés dans divers sens, ont mis hors de doute la rondeur de la terre. Enfin cette forme devient manifeste dans les éclipses de lune (Voy. ÉCLIPSES), où la terre projette sur le disque lunaire une ombre qui paraît circulaire. De toutes ces preuves on a conclu que la terre est un globe sensiblement sphérique, libre de toutes parts dans l'espace. L'objection tirée de ce que nos ANTIPODES (Voy. ce mot) ayant la tête en bas devraient tomber dans l'espace, repose sur une fausse interprétation des mots *haut, bas, tomber*. Tomber, c'est suivre la direction de la pesanteur qui attire les corps vers le centre de la terre; nos antipodes tendent donc à tomber vers la terre comme nous; pour eux comme pour nous le bas est le côté qui regarde la terre, le haut est le côté qui regarde le ciel.

II. Si la terre était exactement sphérique, il suffirait pour obtenir son rayon de déterminer la latitude et la longitude de deux points A et B (fig. 1) du globe, et de mesurer exactement l'arc

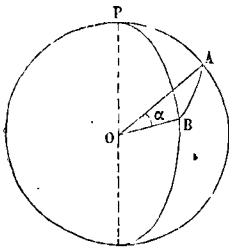


Fig. 1.

de grand cercle AB qui joint ces deux points. Si, en effet, P représente le pôle, dans le triangle PAB on connaîtra les côtés PA et PB respectivement égaux au complément des latitudes des points A et B, et l'angle en P, égal à la différence de leurs longitudes; on pourra donc déterminer en degrés, minutes et secondes, l'arc de grand cercle AB; soit α ce nombre de degrés et fraction de degré. Soit d'un autre côté d la longueur AB mesurée en mètres, et R le rayon de la terre; tirons les rayons OA et OB qui feront entre eux l'angle α . On aura

$$\frac{d}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}, \text{ d'où } R = d \cdot \frac{360}{2\pi \cdot \alpha}.$$

III. Mais la terre n'est point rigoureusement sphérique. Huyghens et Newton, partant de l'hypothèse où notre globe aurait été primitivement à l'état fluide, hypothèse qui a été confirmée par les études géologiques, ont démontré que la surface de la terre devait être un ellipsoïde de révolution

autour de la ligne des pôles, cette forme étant celle qu'une masse fluide doit prendre sous l'action de l'ATTRACTION MOLÉCULAIRE et de la FORCE CENTRIFUGE (Voy. ces mots); le rayon qui va au pôle étant un peu moindre que le rayon équatorial, le globe présente un léger aplatissement aux pôles et un léger renflement à l'équateur. Pour vérifier ces considérations théoriques, il suffisait d'étudier la forme d'un méridien terrestre, et pour cela d'en mesurer quelques arcs à différentes latitudes. Si le méridien est une ellipse, telle que EPe (fig. 2),

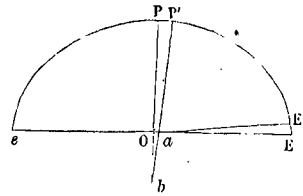


Fig. 2.

dont le grand axe Ee est dans le plan de l'équateur, et le petit axe suivant la ligne des pôles, le rayon de courbure de cette courbe ira en augmentant, du point E où sa valeur est $\frac{b^2}{a}$, (b et a désignant le demi-petit axe et le demi-grand axe), jus-

qu'au point P où sa valeur est $\frac{a^2}{b}$; menons les normales E'a et P'b assez voisines des droites Ea et Pb pour que les arcs EE' et PP' puissent être regardés comme se confondant sensiblement avec des arcs de cercle, et supposons que les angles Eae' et Pbp' soient égaux; les arcs PP' et EE' seront des arcs d'un même nombre de degrés ou de minutes, et comme Pb et Ea se confondent sensiblement avec les rayons de courbure aux points P et E, on aura $Pb > Ea$, et par suite $PP' > EE'$ puisque des arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons. Ainsi de deux arcs d'un même nombre de degrés ou minutes mesurés, l'un près du pôle et l'autre près de l'équateur, le premier sera le plus long; d'où il résulte que l'arc de 1° ira en augmentant de longueur en allant de l'équateur au pôle. Picard, en 1669, avait mesuré l'arc de méridien compris entre Malvoisine et Amiens, et avait trouvé pour la longueur du degré 57060 toises. Quelques années après, en 1683, J. Dominique Cassini, et plus tard, en 1700, Jacques Cassini, aidé de Philippe Maraldi, son neveu, prolongèrent le méridien jusqu'au midi de la France; enfin, en 1718, Jacques Cassini, Dominique Maraldi, et Lahire le fils, le prolongèrent depuis Amiens jusqu'à la frontière du nord. Leurs mesures, entachées de quelques erreurs qui ne furent reconnues que plus tard, semblaient établir que la longueur du degré va en diminuant de l'équateur au pôle, au lieu d'aller en augmentant comme on s'y attendait. Cependant, indépendamment des considérations tirées de la figure d'équilibre d'une masse fluide, on avait d'autres raisons de croire à l'aplatissement du globe. Richer avait observé qu'une horloge astronomique réglée à Paris retardait à Cayenne de 2 minutes par jour, et que le pendule simple qui bat la seconde est plus court à Cayenne qu'à Paris, ce qui semblait s'accorder avec l'hypothèse d'un

renflement à l'équateur, puisque l'intensité de la pesanteur y était moindre. Les géomètres et les astronomes se partagèrent en deux camps : les uns, les Anglais à leur tête, soutenaient les idées de Newton sur l'aplatissement; les autres, surtout ceux qui en France subissaient l'influence des Cassini, concluaient à un allongement. Des philosophes, étrangers aux sciences, prirent parti dans la querelle. Mais, pour décider la question, il importait d'opérer sur une étendue plus considérable que la France, parce que, sur un arc de quelques degrés, de légères erreurs peuvent avoir assez d'influence pour masquer la véritable marche des résultats. L'Académie des sciences prit donc, en 1734, le parti de faire mesurer un arc de méridien près de l'équateur et un autre près du pôle. Godin, la Condamine et Bouguer furent chargés de la première mesure, qui fut exécutée au Pérou; Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier et Outhier exécutèrent la seconde en Laponie. Vers la même époque, en 1739, Cassini de Thury et Lacaille reprirent les mesures exécutées en France, et leur travail confirma les résultats trouvés par Picard. Par l'ensemble de ces travaux, l'aplatissement fut mis hors de doute, car ils donnent pour la longueur du degré :

Au Pérou.....	56750 toises
En France.....	57060 —
En Laponie.....	57422 —

Ainsi la longueur du degré augmente de l'équateur au pôle.

Cependant les conclusions de la science ne furent pas unanimement adoptées dès l'abord; l'hypothèse de l'allongement conserva quelques partisans parmi les hommes adonnés aux études philosophiques; c'est ainsi que l'illustre Bernardin de Saint-Pierre, confondant les normales à l'ellipse avec des rayons, déduisait de l'accroissement de longueur du degré vers les pôles une conclusion diamétralement contraire à celle des géomètres : curieux exemple de l'assurance avec laquelle les philosophes parlent de ce qu'ils entendent le moins. A la fin du siècle dernier, à l'occasion de la réforme des poids et mesures (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE), Delambre et Méchain effectuèrent, de 1792 à 1798, la mesure de l'arc de méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, mesure qui a été prolongée jusqu'à l'île de Formentera par MM. Biot et Arago. D'autres arcs de méridien, mesurés à différentes époques par divers observateurs, ont confirmé l'hypothèse de l'aplatissement; tels sont : un arc de près de 10° mesuré dans l'Inde par Lambton et Everest, un arc d'un degré et demi mesuré en Pensylvanie par Mason et Dixon, un arc d'un peu plus de 2° mesuré en Italie par Boscovich et Lemaire, un arc de près de 4° mesuré en Angleterre par Roy, Mudge et Kater, un arc d'un degré et demi environ mesuré en Suède par Melanderhielm et Svanberg; il convient d'ajouter à cette liste l'arc d'un peu plus d'un degré mesuré dès 1750 par Lacaille au cap de Bonne-Espérance.

IV. Connaissant ainsi la longueur d'un degré du méridien à différentes latitudes, on peut, par diverses méthodes, en déduire les éléments de l'ellipse méridienne. Il se présente d'abord une méthode fort simple. Soit d la longueur de l'arc d'un degré à l'équateur et d' la longueur du même arc

au pôle; soient ρ et ρ' les rayons de courbure en ces deux points, c'est-à-dire aux sommets de l'ellipse, on aura

$$\frac{d}{2\pi\rho} = \frac{1}{360} \quad \text{et} \quad \frac{d'}{2\pi\rho'} = \frac{1}{360},$$

d'où $\rho = \frac{180}{\pi} \cdot d$ et $\rho' = \frac{180}{\pi} \cdot d'$

ou $\frac{b^2}{a} = \frac{180}{\pi} \cdot d$ et $\frac{a^2}{b} = \frac{180}{\pi} \cdot d'$,

d'où l'on tire aisément

$$a = \frac{180}{\pi} \sqrt[3]{d'^2 \cdot d} \quad \text{et} \quad b = \frac{180}{\pi} \sqrt[3]{d \cdot d'^2}.$$

Cette méthode n'est qu'approchée, parce que la longueur de l'arc d'un degré au pôle même ne saurait être mesurée directement.

V. Une autre méthode consiste à partir de l'expression du rayon de courbure en fonction de la latitude (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE); cette expression est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

en appelant a le rayon équatorial, e l'excentricité et l la latitude. Si d est la longueur du degré à la latitude l , on a donc

$$d = \frac{\pi}{180} \cdot \rho = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en développant $(1-e^2\sin^2 l)^{-\frac{3}{2}}$ par la formule du binôme, et négligeant les puissances de e supérieures à la seconde, attendu que cette quantité est très-petite,

$$d = \frac{\pi}{180} a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l\right). \quad [1]$$

Si d' est la longueur du degré à la latitude l' , on aura de même

$$d' = \frac{\pi}{180} a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l'\right) \quad [2]$$

et, en divisant membre à membre,

$$\frac{d}{d'} = \frac{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l}{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l'},$$

relation qui donnera e^2 ; et en substituant dans l'une ou l'autre des équations [1] ou [2], on obtiendra la valeur de a . Celle de b sera déterminée par la relation $b = a\sqrt{1-e^2}$.

On peut remarquer en passant que la formule [1] pouvant s'écrire

$$d = \frac{\pi}{180} \frac{b^2}{a} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l\right),$$

il en résulte que la longueur de l'arc d'un degré croît, en allant de l'équateur au pôle, d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de la latitude.

VI. Cette méthode, appliquée aux nombres trouvés pour la longueur de l'arc d'un degré au Pérou et en France, conduit à des résultats peu différents de ceux que fournit la méthode plus exacte dont il va être question. Cette méthode consiste à faire servir à la détermination des éléments de l'ellipse méridienne toutes les mesures d'arcs de méridien qui inspirent une égale confiance. L'élément de l'arc d'ellipse a pour expression le produit du rayon de courbure par la différentielle de la latitude; on a donc (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$ds = \rho dl = \frac{a(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$$

Développant, remplaçant les puissances de $\sin l$ par leurs valeurs en fonction des cosinus des multiples de l , et intégrant, on obtient une expression de la forme

$$S = a(1 - e^2) \left[ml - \frac{1}{2} n \sin 2l + \frac{1}{4} p \sin 4l - \frac{1}{6} q \sin 6l + \dots \right] + C, \quad [3]$$

dans laquelle les coefficients m, n, p, q ont pour valeurs

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \dots, \\ n &= \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \dots, \\ p &= \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \dots, \\ q &= \frac{35}{512} e^6 + \dots \end{aligned}$$

Il est inutile d'aller au delà de la 6^e puissance de e , les autres termes ne donnant que des différences inappréciables. Si maintenant l et l' sont les latitudes extrêmes, on aura en prenant les intégrales entre ces limites :

$$S = a(1 - e^2) \left[m(l' - l) - \frac{1}{2} n (\sin 2l' - \sin 2l) + \frac{1}{4} p (\sin 4l' - \sin 4l) + \dots \right],$$

ou

$$S = a(1 - e^2) \left[m(l' - l) - n \sin(l' - l) \cos(l' + l) + \frac{1}{2} p \sin 2(l' - l) \cos 2(l' + l) + \dots \right]. \quad [4]$$

Cette relation, appliquée aux diverses mesures d'arcs de méridien qui peuvent être employées avec confiance, fournit autant d'équations de conditions auxquelles a et e^2 doivent satisfaire, et l'on peut dès lors employer la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot), c'est-à-dire déterminer a et e^2 par la condition que la somme des carrés des erreurs soit un minimum. C'est ainsi qu'ont opéré Walbeck en 1819, Schmidt en 1829, Bessel en 1837 et en 1840. Ce dernier a trouvé de cette manière $a = 3272077,14$ et $e^2 = 0,0066744$.

Des travaux plus récents, et en particulier un mémoire de M. Encke publié en 1850, ont conduit à adopter des nombres très-peu différents. *L'Annuaire du bureau des longitudes* de 1865 donne

pour l'aplatissement $\frac{1}{300}$, ce qui revient à $e^2 = 0,0066555\dots$;

et pour le rayon équatorial $a = 6376821^m$. (Voy. MÈTRE). Par suite, le rayon du pôle est 6355565^m.

VII. L'étude comparative des différents méridiens a montré que la terre n'est pas rigoureusement un ellipsoïde de révolution, que chaque méridien n'est même pas rigoureusement une ellipse, et que l'aplatissement du globe est un peu plus grand au pôle austral qu'au pôle boréal. Mais les différences sont très-faibles et peuvent être négligées dans la plupart des opérations géodésiques.

VIII. Nous avons supposé jusqu'ici que l'étude de la figure de la terre se réduisait à la mesure des arcs de méridiens; mais on y fait aussi concourir la mesure des arcs de parallèles. En appelant r le

rayon du parallèle qui correspond à une latitude l on trouve (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$r = \frac{a \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$$

Par conséquent, si δ désigne la longueur de l'arc d'un degré sur ce parallèle, on a

$$\delta = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}. \quad [5]$$

Or on a trouvé

$$d = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}. \quad [6]$$

En divisant membre à membre ces deux relations, il vient

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\cos l (1 - e^2 \sin^2 l)}{1 - e^2},$$

formule qui donnera e^2 ; et en substituant sa valeur dans [5], on aura celle de a . Ces éléments se rapporteront à un ellipsoïde osculateur au point considéré. La comparaison de cet ellipsoïde avec celui qui a été déterminé plus haut permettra d'apprécier les irrégularités locales. (Voy. le *Traité de Géodésie* de Puissant, le *Cours de Géodésie* de l'École polytechnique, l'*Astronomie physique* de M. Biot, et le *Mémoire* de M. Encke inséré en 1850 dans les *Éphémérides de Berlin*.)

(Voy. aussi, dans ce dictionnaire, l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES [Calcul des]).

IX. Au lieu d'avoir recours aux opérations géodésiques pour étudier la figure de la terre, on peut employer l'observation du PENDULE (Voy. ce mot).

On sait que la longueur r du pendule simple qui oscille comme un pendule composé donné, est exprimée par la formule

$$r = \frac{I}{Ma},$$

dans laquelle I représente le MOMENT D'INERTIE du pendule (Voy. ce mot) par rapport à son axe de suspension, M sa masse, et a la distance de son centre de gravité à ce même axe; et que la durée t de l'oscillation de ce pendule simple est donnée par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

en supposant l'amplitude de l'écart initial très-petite. Si N est le nombre d'oscillations exécutées par le pendule composé dans un temps quelconque T , on a donc

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \text{ d'où } g = \frac{\pi^2 N^2 r}{T^2}. \quad [1]$$

Nous supposons que la longueur r a été corrigée de la température, et que le nombre N a subi la correction d'amplitude, celle qui se rapporte à la résistance de l'air, et la réduction au niveau de la mer. Il s'agit de faire comprendre comment l'accélération g se trouve liée à l'aplatissement du globe et à la latitude du lieu de l'observation. La force que nous nommons *pesanteur*, est la résultante de deux autres forces : l'*attraction* du globe et la *force centrifuge*. Supposons d'abord la terre sphérique; soit PP' (fig. 3) l'axe; EE' la trace de l'équateur, PME un méridien; M un point quelconque de ce méridien. Un point matériel de masse égale à l'unité placé au point M sera soumis : 1° à l'attraction G du globe, force dirigée vers le centre; 2° à la

force centrifuge F , dirigée suivant le prolongement du rayon QM du parallèle décrit par le point M . Cette dernière se décomposera en deux : l'une suivant la verticale MV , qui est ici le prolongement

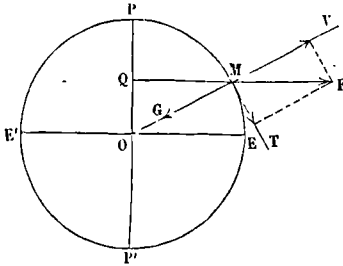


Fig. 3.

du rayon; elle aura pour expression $F \cos l$, en appelant l la latitude du point M ; l'autre suivant la tangente MT ; elle aura pour valeur $F \sin l$. L'attraction G sera donc diminuée de $F \cos l$; et c'est la différence qui sera la pesanteur. Mais dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, il resterait la composante $F \sin l$; et il ne pourrait y avoir équilibre.

Supposons en second lieu la terre elliptique (fig. 4);

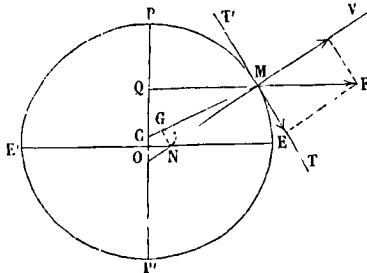


Fig. 4.

les composantes de F seront encore $F \cos l$ et $F \sin l$, l désignant toujours la latitude, qui est ici l'angle MNE , formé par la normale MN avec la trace EE' de l'équateur. L'attraction ne sera plus dirigée suivant la normale; elle ne passera pas non plus par le centre (Voy. les *Traité de Mécanique rationnelle*), mais très-près de ce centre, attendu que la forme du méridien s'éloigne très-peu du cercle. Elle se décomposera en deux : l'une G suivant la normale; l'autre suivant la tangente MP' ; cette seconde composante fera équilibre à $F \sin l$; c'est cette condition qui, à l'époque où le globe terrestre était à l'état fluide, a déterminé la forme du méridien. La pesanteur sera la différence entre la com-

posante normale G et $F \cos l$; on aura donc

$$g = G - F \cos l \text{ ou } g = G - \omega^2 x \cos l, \quad [2]$$

en appelant ω la vitesse angulaire du globe et x le rayon MQ du parallèle du point M . Mais on a (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$x = \frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}},$$

e désignant l'excentricité, et a le rayon équatorial. On peut donc écrire

$$g = G - \frac{\omega^2 a \cos^2 l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}. \quad [3]$$

On peut remarquer que, dans cette formule, $\omega^2 a$ exprime la force centrifuge à l'équateur.

Quant à la force G , on démontre, dans la théorie de l'attraction, qu'elle augmente de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du cosinus de la latitude. En sorte que son expression est de la forme $G_0 + k \cos^2 l$. Si dans la relation [3] on met pour G cette valeur, qu'on remplace partout \cos^2 par $1 - \sin^2 l$, qu'on développe $(1 - e^2 \sin^2 l)^{-\frac{1}{2}}$ en s'arrêtant au second terme, ce qui donne

$$1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l,$$

qu'enfin on effectue les calculs, en supprimant le terme en $\sin^4 l$, il reste une expression de la forme

$$g = A + B \sin^2 l, \quad [4]$$

c'est-à-dire que la pesanteur augmente de l'équateur au pôle proportionnellement au carré du sinus de la latitude. En appelant r la longueur du pendule simple qui, à la latitude l , bat la seconde sexagésimale de temps moyen, on a, en vertu de la formule [1],

$$r = \frac{g}{\pi^2},$$

par conséquent

$$r = \frac{1}{\pi^2} (A + B \sin^2 l). \quad [5]$$

Dans cette formule, $\frac{A}{\pi^2}$ est la longueur du pendule à seconde à l'équateur, et $\frac{B}{\pi^2}$ est l'accroissement qu'il faut donner à cette longueur pour qu'au pôle il batte encore la seconde. Si donc on désigne par x la longueur à l'équateur, et par y l'accroissement de l'équateur au pôle, on peut écrire

$$r = x + y \sin^2 l. \quad [6]$$

Pour déterminer les constantes x et y , on pourrait se contenter de deux observations; mais il est plus rationnel de faire concourir à cette détermination toutes les observations dignes de confiance. On en trouvera un certain nombre réunies dans le tableau suivant :

STATIONS.	LATITUDES.	OBSERVATEURS.	VALEURS DE r .
Ile Rawak.....	0° — 1' — 34". S	Freycinet	mm 990,96
Saint-Thomas.....	0 — 24 — 41 . N	Sabire	991,11
Maranhm.....	2 — 31 — 43 . S	Id.	990,89
Ascension.....	7 — 55 — 9 . S	Duperrey	991,18
Id.....	7 — 55 — 48 . S	Sabire	991,19

STATIONS.	LATITUDES.	OBSERVATEURS.	VALEURS DE r.
Sierra Leone.....	8 — 29 — 28 . N	Sabine.	991,10
Trinidad.....	10 — 38 — 56 . N	Id.	991,06
Bahia.....	12 — 59 — 21 . S	Id.	991,21
Ile Guam.....	13 — 27 — 51 . N	Freycinet	991,45
Jamaïca.....	17 — 56 — 7 . N	Sabine	991,47
Ile de France.....	20 — 9 — 19 . S	Duperrey	991,77
Id.....	20 — 9 — 56 . S	Freycinet	991,80
Ile Movi.....	20 — 52 — 7 . N	Id.	991,79
Rio-de-Janeiro.....	22 — 55 — 13 . S	Id.	991,69
Port Jackson.....	33 — 51 — 34 . S	Id.	992,63
Id.....	33 — 51 — 39 . S	Duperrey	992,59
Cap de Bonne-Espérance.....	33 — 55 — 15 . S	Freycinet	992,57
Formentera.....	38 — 39 — 56 . N	Biot, Arago, Chaix	992,98
New-York.....	40 — 42 — 43 . N	Sabine	993,16
Toulon.....	43 — 7 — 9 . N	Duperrey	993,39
Figeac.....	44 — 36 — 45 . N	Biot, Mathieu	993,46
Bordeaux.....	44 — 50 — 26 . N	Id.	993,45
Clermont.....	45 — 46 — 48 . N	Id.	993,58
Paris.....	48 — 50 — 14 . N	Borda	993,85
Id.....	Id.	Biot, Bouvard, Mathieu	993,87
Id.....	Id.	Freycinet	993,87
Id.....	Id.	Duperrey	993,87
Shanklin-Farming.....	50 — 37 — 24 . N	Kater	994,05
Dunkerque.....	51 — 2 — 10 . N	Biot, Mathieu	994,08
Londres.....	51 — 31 — 8 . N	Kater	994,12
Id.....	Id.	Sabine	994,12
Iles Malouines.....	51 — 31 — 44 . S	Duperrey	994,13
Id.....	51 — 35 — 18 . S	Freycinet	994,07
Arbury-Hill.....	52 — 12 — 55 . N	Kater	994,22
Clifton.....	53 — 27 — 43 . N	Id.	994,30
Leith.....	55 — 58 — 37 . N	Biot	994,53
Id.....	55 — 58 — 41 . N	Kater	994,54
Portsoy.....	57 — 40 — 59 . N	Id.	994,69
Unst.....	60 — 45 — 25 . N	Biot	994,95

STATIONS.	LATITUDES.	OBSERVATEURS.	VALEURS DE r .
Unst.....	60 — 45 — 28 . N	Kuter	994,94
Drontheim.....	63 — 25 — 54 . N	Sabine	995,02
Hammerfest.....	70 — 40 — 5 . N	Id.	995,54
Groenland.....	74 — 32 — 19 . N	Id.	995,75
Spitzberg.....	79° — 49' — 58". N	Id.	996,04 mm

Si dans la formule [6] on met pour l ou pour r les valeurs tirées de ce tableau, on obtient autant d'équations de conditions auxquelles x et y doivent satisfaire. Pour en déduire les valeurs les plus probables de ces constantes, on emploie la méthode des MOINDRES CARRÉS (*Voy.* ce mot). Soient, pour abrégier l'écriture, $r_1, l_1, r_2, l_2, r_3, l_3$, etc., les systèmes de valeurs de r et de l ; les erreurs correspondantes ont pour expressions

$$\begin{aligned} r_1 - x - y \cos^2 l_1, \\ r_2 - x - y \cos^2 l_2, \\ r_3 - x - y \cos^2 l_3, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Conformément aux règles auxquelles conduit la méthode, on obtient sur-le-champ une première équation pour déterminer x et y , en égalant à zéro la somme des expressions ci-dessus, ce qui donne

$$\Sigma r - nx - y \Sigma \cos^2 l = 0, \quad [7]$$

en désignant par n le nombre des systèmes de valeurs de r et de l employés. On en obtient une seconde, en multipliant respectivement les erreurs par $\cos^2 l_1, \cos^2 l_2, \cos^2 l_3$, etc.; et égalant à zéro la somme des produits, ce qui donne

$$\Sigma r \cos^2 l - x \Sigma \cos^2 l - y \Sigma \cos^4 l = 0. \quad [8]$$

Les équations [7] et [8] donneront les valeurs cherchées de x et de y . On a trouvé de cette manière

$$x = 0^m,99102557 \quad \text{et} \quad y = 0^m,00507188.$$

Par conséquent

$$r = 0^m,99102557 + 0^m,00507188 \cdot \sin^2 l. \quad [9]$$

Les différences qui existent entre les valeurs de r données par cette formule et celles qui résultent des données de chaque observation sont de l'ordre de celles qui peuvent être attribuées à l'expérience.

A Paris, on a $l = 48^\circ 50' 14''$; et l'on obtient en conséquence $r = 0^m,99390017$ ou, à très-peu près, $0^m,994$, valeur trouvée par Picard à la fin du dix-septième siècle. (*Voir le Mémoire de M. Saigey, inséré dans le Bulletin de Ferrussac, t. VII.*)

On obtient pour x et y des valeurs un peu différentes, quand on ne fait concourir à leur détermination que certaines observations déterminées.

M. Mathieu, en faisant usage de quinze observations faites en différents lieux, dans le dix-huitième siècle, par Bouguer, Lacaille, Mallet, Darquier, Campbell, Legentil, Zach, Liesganig, Grischow, etc., a trouvé

$$x = 0^m,9907522 \quad \text{et} \quad y = 0^m,0055148,$$

et, en prenant en considération toutes les expériences tant anciennes que modernes, exécutées dans les circonstances les plus propres à faire

connaître les variations de la pesanteur à la surface de la terre, il a obtenu

$$x = 0^m,9907437 \quad \text{et} \quad y = 0^m,00551708.$$

(*Voir le Mémoire de M. Mathieu, dans la Connaissance des temps pour 1816.*)

X. Pour déduire de ces valeurs celle de l'aplatissement, on fait usage d'un théorème de Clairaut d'après lequel l'aplatissement est égal aux $\frac{5}{2}$ du rapport entre la force centrifuge et la pesanteur à l'équateur, diminué du rapport entre l'accroissement que subit le pendule à secondes en passant de l'équateur au pôle, et la longueur de ce pendule à l'équateur. C'est-à-dire qu'en désignant par p le dénominateur de la fraction qui exprime l'aplatissement et qui a pour numérateur l'unité, on a (*Voy. la Mécanique céleste, t. II*)

$$p = \frac{2,5 \cdot \omega^2 a}{g} - \frac{y}{x}, \quad [10]$$

g désignant ici l'accélération due à la pesanteur à l'équateur, c'est-à-dire $\pi^2 x$. Or le rayon a de l'équateur est connu, au moins approximativement; la vitesse angulaire ω est donnée par la relation

$$\omega = \frac{2\pi}{86164},$$

attendu que la durée du jour sidéral est de 86164 secondes de temps moyen. On trouve ainsi pour le rapport $\frac{\omega^2 a}{g}$ de la force centrifuge à la pesanteur,

à l'équateur, la fraction $\frac{1}{289,4}$; et pour p des valeurs qui varient, suivant les éléments de calcul employés, de 289,5 à 298,3, et même à 311,6 et 323,3. En prenant à part les expériences du pendule qui se rapportent aux deux hémisphères, on a cru reconnaître que l'aplatissement est un peu plus grand au pôle austral qu'au pôle boréal; mais la différence est si faible ($\frac{1}{311,6}$ au lieu de $\frac{1}{323,3}$) que ce résultat a encore besoin de confirmation.

C'est en combinant les résultats fournis par les mesures géodésiques avec ceux que fournissent les observations du pendule, qu'on a été amené à adopter pour la valeur de l'aplatissement le nombre $\frac{1}{300}$, qui diffère très-peu de $\frac{1}{305}$ auquel conduit la théorie de la Lune. En conséquence, les valeurs du rayon équatorial et du rayon polaire sont, avec un haut degré de probabilité,

$$a = 6376821^m \quad \text{et} \quad b = 6355565^m.$$

Les observations du pendule s'accordent du reste avec les mesures géodésiques, pour montrer que la

terre n'est pas un ellipsoïde de révolution; mais elle en diffère très-peu, et la différence peut être négligée dans les applications à la Géodésie, et à plus forte raison à la Géographie.

(Voy. le *Traité de Géodésie* de Puissant, p. 457 et suiv., et la *Géodésie* de Francoeur, 3^e édition, chap. vi.)

FIGURÉ DU RELIEF, représentation du relief d'un terrain sur un **PLAN TOPOGRAPHIQUE** (Voy. ce mot.) Cette représentation s'obtient au moyen de deux systèmes de lignes : les *courbes de niveau*, ou courbes horizontales, et les *lignes de plus grande pente*. — Les courbes de niveau sont les intersections de la surface du sol par une série de plans horizontaux équidistants. Les lignes de plus grande pente sont des courbes qui rencontrent les premières sous l'incidence normale.

Pour déterminer les courbes horizontales, on procède de la manière suivante. On prend un des côtés du **POLYGONE TOPOGRAPHIQUE** (Voy. ce mot) qui a servi de base au lever de plan; désignons par A et B ses extrémités. On a déterminé d'avance les cotes des divers sommets de ce polygone (Voy. **NIVELLEMENT**); supposons qu'on veuille obtenir les courbes de niveau dont les plans soient distants, de 10 mètres en 10 mètres, et dont les cotes répondent à des multiples exacts de 10 mètres, ce qui est plus commode : il s'agira d'abord de trouver sur la ligne AB les points où elle est coupée par ces courbes horizontales. Soit 243^m,50 la cote du point A, et 281^m,66 la cote du point B. On cherchera sur AB un point M dont la cote soit 250 mètres; on sera certain de l'avoir trouvé, si en donnant deux coups de niveau, l'un sur A et l'autre sur M, on obtient pour différence 6^m,50, qui est la différence entre 250 mètres et 243^m,50. On cherchera de même sur AB un point N dont la cote soit 260 mètres, c'est-à-dire surpasse de 10 mètres celle du point M; puis un point P dont la cote surpasse de 10 mètres celle du point N; enfin un point Q dont la cote surpasse de 10 mètres celle du point P; les points M, N, P, Q ainsi obtenus appartiendront aux courbes de niveau qui ont pour cotes 250, 260, 270, 280 mètres; on s'assurera, comme vérification, que la différence de niveau des points Q et B est bien 1^m,66, différence entre 281^m,66 et 280 mètres. — On opérera de même pour tous les côtés consécutifs du polygone topographique; en revenant au point A on devra, comme vérification, retrouver pour cote 243^m,50. — On trace ensuite sur le terrain diverses grandes lignes, et l'on opère pour chacune d'elles comme on a fait pour les côtés du polygone topographique; on a soin que ces lignes, tracées dans des directions à peu près parallèles, soient assez rapprochées pour que leurs intersections avec les courbes de niveau ne soient pas éloignées de plus de 400 à 500 mètres, si l'on opère avec un niveau à bulle d'air, ou de 100 mètres environ si l'on opère avec un niveau d'eau (Voy. **NIVEAU**). On a ainsi un certain nombre de points appartenant aux courbes horizontales; on se sert de ces points bien déterminés pour en trouver un plus grand nombre par une méthode plus expéditive.

Soit A (fig. 1) un point appartenant à la courbe de niveau dont la cote est 240 mètres, par exemple. On établit le niveau en un point O peu éloigné, et dont la cote soit peu différente, par exemple

241^m,30, pour fixer les idées. On fait placer la mire en A, on donne un coup de niveau, et l'on fixe le voyant. On fait alors porter la mire dans une direction quelconque OX, et l'on fait varier sa posi-

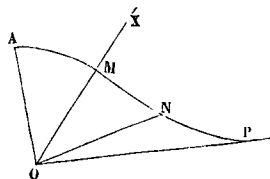


Fig. 1.

tion sur cette ligne jusqu'à ce qu'on aperçoive la ligne de foi du voyant, en visant dans cette direction; le point M où se trouve alors le pied de la mire est évidemment au même niveau que le point A. On détermine de la même manière autant de points N, P, ..., que l'on veut sur la courbe de niveau dont la cote est 240 mètres. En partant d'un point dont la cote est 250 mètres, on obtient de la même manière autant de points que l'on veut de la courbe de niveau qui a pour cote 250 mètres, et ainsi des autres. On lève le plan (Voy. **LEVER DES PLANS**) des points ainsi marqués sur le terrain, et on les reporte sur le dessin (Voy. **PLAN TOPOGRAPHIQUE**); puis on fait passer à la main des courbes continues par les points qui ont même cote, en s'aidant de ses souvenirs et du croquis qu'on a eu soin de faire sur le terrain même. — Si le terrain est très-accidenté, il faut multiplier les courbes de niveau, afin d'exprimer toutes les inflexions du sol; au lieu de tracer les courbes horizontales de 10 en 10 mètres, on les tracera de 5 en 5 mètres, ou même de mètre en mètre.

Les courbes de niveau pourraient suffire pour faire connaître les pentes du terrain. Soient, en effet, A et B (fig. 2) les extrémités d'une droite menée d'un

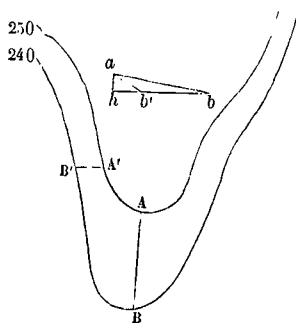


Fig. 2.

point A de la courbe de niveau, dont la cote est 250 à un point B de la courbe de niveau, dont la cote est 240. Concevons par le point A une verticale, et par le point B une horizontale qui rencontre cette verticale en un point que nous désignerons par H; dans le triangle ABH, l'angle en B sera l'inclinaison de AB sur le plan horizontal. Or, on peut construire ce triangle à l'échelle du plan : si hb représente l'horizontale HB, et ah la verticale AH, qui a 10 mètres de longueur, l'angle abh sera l'inclinaison dont il s'agit. On voit que a pente est

d'autant plus grande que les deux points que l'on considère sont plus rapprochés; si l'on prend, par exemple, les points A' et B', et que l'on construise, comme il vient d'être dit, le triangle ahb' , on voit que la pente de la droite ab' est plus considérable que celle de ab ; la pente de A'B' est donc aussi plus considérable que celle de AB.

Si AB est une normale commune aux deux courbes de niveau, il est aisé de voir qu'elle est plus courte que toute autre droite que l'on obtiendrait en faisant varier, soit le point A, soit le point B; or, en considérant le triangle ahb , on reconnaît que la pente est d'autant plus grande, que ab ou hb sont plus petits; c'est pour cette raison qu'une droite dont la projection sur le plan est normale à deux courbes de niveau consécutives, est appelée *ligne de plus grande pente* entre ces deux courbes. Si l'on a une série de courbes de niveau suffisamment rapprochées (fig. 3), une ligne de plus grande pente

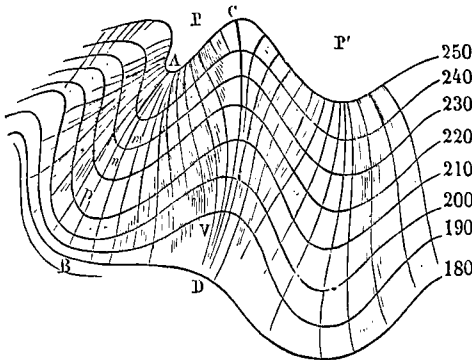


Fig. 3.

est une courbe telle que AB, dont les éléments successifs Am , mn , np , etc., sont des normales communes aux courbes de niveau consécutives, auxquelles elles aboutissent.

On trace sur le plan une série de lignes de plus grande pente, que l'on multiplie surtout dans les parties du plan où la pente est considérable, en même temps que l'on donne plus d'épaisseur au trait, de manière pourtant à ne point masquer les détails du plan. A l'inspection de la figure 3, on reconnaît aisément deux plateaux P et P', séparés par une vallée V.

Parmi les lignes de plus grande pente, il y en a deux catégories qui méritent une attention particulière : ce sont les *lignes de faite* et les *thalwegs*. Les lignes de faite, ou lignes de partage des eaux, forment la ligne la plus élevée entre les deux versants d'un coteau; elles sont caractérisées par cette propriété, qu'on ne peut s'en écarter perpendiculairement sans descendre. Les *thalwegs*, ou lignes d'écoulement naturel des eaux, forment le fond des vallées entre deux coteaux; elles sont caractérisées par la propriété qu'on ne peut s'en écarter perpendiculairement sans monter. Ainsi la ligne AB (fig. 3) est une ligne de faite; la ligne CD est un thalweg. Si l'on éprouvait quelque difficulté à les distinguer sur un plan, il suffirait de remarquer que, lorsqu'on suit l'une ou l'autre de ces lignes en descendant, on voit les lignes de faite rencontrer les courbes de niveau par leur concavité, tandis que les thalwegs

les rencontrent par leur convexité. On peut remarquer encore qu'entre deux lignes de faite il y a toujours un thalweg, et que pareillement entre deux thalwegs il y a toujours une ligne de faite.

Pour compléter la représentation du terrain, on y fait ordinairement des coupes suivant certaines lignes droites ou courbes; et l'on joint au plan le tracé des PROFILS ainsi obtenus (Voy. PROFILS).

FIL À PLOMB, instrument qui donne la direction de la verticale, et qui sert en conséquence à vérifier les lignes verticales et les plans verticaux. Il se compose d'un fil flexible que l'on fixe à l'une de ses extrémités, et auquel est suspendue une petite masse de plomb. Dans l'état d'équilibre, cette masse de plomb est sollicitée d'une part par la pesanteur, de l'autre par la tension du fil; il faut donc que ces deux forces soient égales et opposées, et que par conséquent la direction du fil soit celle de la pesanteur, c'est-à-dire verticale.

Pour vérifier une ligne verticale au moyen du fil à plomb, on fait usage d'une règle ABCD, dont les arêtes latérales AB et CD sont parallèles entre elles et à une ligne intermédiaire OI tracée sur la règle, et qu'on appelle la *ligne de foi*. En un point O de cette ligne de foi est fixée l'extrémité supérieure d'un fil à plomb. On met l'une des arêtes latérales, AB par exemple, en contact avec la droite XY que l'on veut vérifier; et si celle-ci est verticale, il en est de même de AB et de sa parallèle OI; par conséquent le fil à plomb doit coïncider avec la ligne de foi. Mais, pour que l'épreuve soit complète, il faut retourner la règle et la mettre en contact avec XY, du même côté, par l'arête opposée CD. Si la coïncidence a lieu dans les deux cas, on peut affirmer que la ligne vérifiée est verticale. Car si, dans la première épreuve, le fil se trouvait retenu sur la ligne de foi par une inclinaison de la règle en arrière, en opérant le retournement dont nous avons parlé, l'inclinaison aurait lieu du côté du fil, et celui-ci se détacherait de la règle.

Pour vérifier avec cet instrument un plan vertical, on l'applique sur le plan par l'une de ses arêtes latérales, AB par exemple, et l'on fait varier graduellement sa position jusqu'à ce que le fil à plomb s'applique sur la règle; on trace sur le plan la ligne AB, et l'on retourne l'instrument de manière à l'appliquer sur la même ligne par son arête CD. Si dans les deux positions le fil à plomb coïncide avec la ligne de foi, on peut affirmer que la ligne tracée sur le plan est verticale, et que par conséquent le plan lui-même est vertical.

Le petit instrument qu'on vient de décrire porte souvent le nom impropre de *niveau de côté*.

Le NIVEAU DE MAÇON, le NIVEAU DE PENTE et plusieurs autres appareils employés dans la TOPOGRAPHIE et la GÉODÉSIE sont munis d'un fil à plomb (Voy. ces mots).

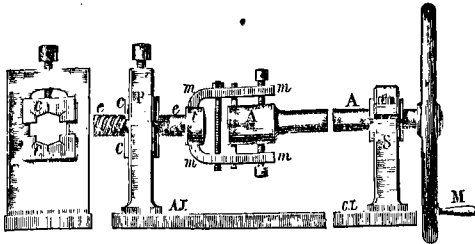
FILET, sorte de moulure droite. Voy. MOULURES.

FILIÈRE, machine-outil à l'aide de laquelle on donne aux métaux ductiles la forme d'un prisme allongé, dont la section droite est déterminée d'avance. La filière proprement dite est une plaque



d'acier, soudée entre deux plaques de fer, et dans laquelle sont percées des séries de trous coniques ou pyramidaux, dont le diamètre varie de l'un à l'autre d'une quantité insensible. Cette plaque étant solidement fixée, on introduit dans l'un des trous, en commençant par le plus large, le bout du fil qu'on se propose d'étirer; on saisit ce bout à l'aide d'une pince plate, et on le tire en s'éloignant de la filière. On fait passer ensuite le fil dans un trou plus petit; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on l'ait amené au diamètre voulu. Il faut avoir soin de le recuire de temps en temps pendant l'opération pour lui rendre sa ductilité.

La filière sert aussi de *machine à fileter*. Dans ce cas, elle est simple ou double. La filière *simple*, qui s'emploie pour les vis de petites dimensions, se compose d'une plaque d'acier percée de trous comme la filière ordinaire; mais ces trous sont taraudés et à arêtes vives; on y fait entrer le fil, et on le tire en tournant, ce qui lui fait prendre la forme d'une vis à filet triangulaire. La filière *double*, qui s'emploie pour les vis de dimensions plus fortes, se compose de deux coussinets d'acier, que l'on peut rapprocher graduellement l'un de l'autre à l'aide de vis de pression, ou par tout autre moyen mécanique, et qui laissent entre eux un orifice taraudé; on y fait passer la pièce à fileter en lui imprimant un mouvement de rotation autour de son axe. La figure ci-



contre représente une machine à fileter les boulons à écrous. Le boulon *ee* est introduit entre les deux coussinets *c, c* représentés à part, *vus de face*. Le tête *t* du boulon est saisie entre deux mâchoires *mm*, fixées par une clef et des écrous au bout de l'arbre *AA*, que l'on peut faire tourner à l'aide d'une manivelle *M*. La pièce *S* est un support assez large pour maintenir l'arbre dans une position sensiblement horizontale. On fait tourner la manivelle en poussant l'arbre *AA* dans le sens de sa longueur, vers la poupée fixe *P* qui porte les coussinets, et l'on recommence l'opération en serrant peu à peu les coussinets. L'opération pourrait également se faire en tirant l'arbre *AA*, au lieu de le pousser. (*Voy. TOUR à FILETER.*)

FLAN, disque métallique prêt à recevoir l'empreinte qui en fera une médaille ou une pièce de monnaie. (*Voy. PRESSE MONÉTAIRE, BALANCIER MONÉTAIRE.*)

FLANC (D'UN BASTION), partie du bastion comprise entre la courtine et l'angle d'épaule. C'est le flanc du bastion qui défend la courtine et le bastion adjacent. Sa longueur varie depuis 15 mètres jusqu'à 50 mètres, selon le nombre de pièces dont il doit être armé. Sa hauteur au-dessus du fond du ossé est souvent moindre que pour la face du bas-

tion; c'est ce qui arrive particulièrement dans les bastions à orillons (*Voy. BASTION*).

On donne aussi le nom de *flancs* aux portions d'un réduit de demi-lune (*Voy. RÉDUIT*) qui sont parallèles à la capitale de cet ouvrage.

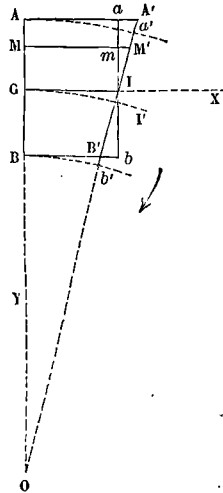
FLECHE, hauteur du point le plus élevé d'une arche au-dessus des naissances.

FLEXION PLANE (RÉSISTANCE À LA), résistance qu'un solide de forme prismatique oppose à un effort qui tend à le fléchir sans le tordre. Si l'on considère le solide comme formé d'un faisceau de fibres parallèles, la flexion plane est un mode de déformation dans lequel toutes les fibres se courbent en restant parallèles à un même plan.

I. La plupart du temps cette flexion générale des fibres s'opère parallèlement à un plan de symétrie du prisme, lequel prend alors le nom de *plan de flexion*. Si, par exemple, on considère une poutre à section rectangulaire, placée horizontalement, le plan de flexion sera le plus souvent le plan vertical de symétrie de la poutre, mené dans le sens de sa longueur. La courbure que prennent les fibres est toujours extrêmement faible.

On admet que les molécules qui, avant la flexion, étaient dans une même section transversale, sont encore, après la flexion, dans une même section transversale; mais cette section a changé de position. Soient *AB* et *ab* (fig. 1) les traces, sur le plan

de flexion, de deux sections transversales très-voisines. Les fibres qui se projetaient suivant *Aa* et *Bb*, se sont courbées, et se projettent suivant les arcs *Aa'* et *Bb'*; la section transversale dont *ab* est la trace, est venue prendre la position *a'b'*, normale par hypothèse aux arcs *Aa'* et *Bb'*. Il en résulte que, si l'on prolonge *a'b'* jusqu'à sa rencontre en *O* avec le prolongement de *AB*, le point *O* sera le centre de courbure des arcs considérés, que l'on pourra regarder comme des arcs de cercle, décrits de ce point *O* comme centre. Comme ces arcs sont supposés très-petits et que, ainsi qu'on l'a dit, ils sont très-peu courbes, on peut leur substituer respectivement les tangentes *AA'* et *BB'*; en sorte qu'on peut regarder *A'B'* comme la nouvelle position de la section *ab*. Par le point *I*, où *ab* et *A'B'* se rencontrent, menons *IG* parallèle à *Aa*. On voit que toutes les fibres supérieures au plan horizontal mené suivant *IG* se sont allongées, et que toutes celles qui sont inférieures à ce plan se sont raccourcies; les fibres situées dans le plan *GI* ne se sont ni allongées, ni raccourcies, et à cause de cela, on leur donne le nom de *fibres neutres*; et le plan *GI* lui-même est dit le *plan des fibres neutres*. Toute fibre supérieure au plan *GI*, telle que celles qui se projettent suivant *Mm*, a subi un allongement *mM'* proportionnel à la



de ce point *O* comme centre. Comme ces arcs sont supposés très-petits et que, ainsi qu'on l'a dit, ils sont très-peu courbes, on peut leur substituer respectivement les tangentes *AA'* et *BB'*; en sorte qu'on peut regarder *A'B'* comme la nouvelle position de la section *ab*. Par le point *I*, où *ab* et *A'B'* se rencontrent, menons *IG* parallèle à *Aa*. On voit que toutes les fibres supérieures au plan horizontal mené suivant *IG* se sont allongées, et que toutes celles qui sont inférieures à ce plan se sont raccourcies; les fibres situées dans le plan *GI* ne se sont ni allongées, ni raccourcies, et à cause de cela, on leur donne le nom de *fibres neutres*; et le plan *GI* lui-même est dit le *plan des fibres neutres*. Toute fibre supérieure au plan *GI*, telle que celles qui se projettent suivant *Mm*, a subi un allongement *mM'* proportionnel à la

distance de la fibre considérée au plan GI des fibres neutres; et l'on verrait de même que toute fibre située au-dessous du plan GI a subi un raccourcissement proportionnel à sa distance à ce plan. Telle est, en elle-même, la déformation à laquelle on donne le nom de flexion plane; ce que nous venons de dire des deux sections transversales AB et *ab* s'appliquerait à deux sections transversales quelconques, pourvu qu'elles fussent très-voisines. On voit que, bien que les fibres se soient courbées, comme la courbure est très-faible, on peut, entre deux sections très-rapprochées, les considérer comme étant encore rectilignes; seulement, les molécules qui étaient dans une section *ab* parallèle à AB, sont maintenant dans une section A'B' oblique par rapport à AB.

II. Si l'on considère la portion du prisme comprise entre une section quelconque AB et l'extrémité droite de la pièce, on voit qu'elle ne peut se maintenir fléchie sous l'action des forces extérieures qui la sollicitent, que parce que la flexion même fait naître dans la section AB des forces *f*, dites *forces élastiques*, exercées par la partie du prisme à gauche de AB sur la partie située à droite; et que l'équilibre finit par s'établir entre ces forces élastiques, et les forces extérieures qui agissent sur la partie droite du prisme. Pour exprimer les conditions de l'équilibre et en tirer des conséquences applicables aux cas de la pratique, nous supposons d'abord, ce qui du reste arrive le plus ordinairement, que le prisme est horizontal et que toutes les forces extérieures qui agissent sur le solide sont des forces verticales. Nous supposons de plus, ce qui a également lieu d'ordinaire, que ces forces sont symétriquement placées par rapport au plan de flexion, et qu'ainsi elles se réduisent à des résultantes partielles situées dans ce plan. Nous prendrons pour axe des *x* la droite GI située dans le plan de flexion, pour axe des *y*, la perpendiculaire GO; et pour axe des *z*, une troisième droite perpendiculaire au plan de flexion. Nous désignerons par P l'une quelconque des forces verticales appliquées à la portion du prisme comprise entre la section AB et l'extrémité placée à droite. L'ÉQUILIBRE (Voy. ce mot) de cette portion de prisme fournit les équations

$$\begin{aligned} \Sigma f_x = 0, \quad \Sigma f_y + \Sigma P = 0, \quad \Sigma f_z = 0, \quad [1] \\ \text{et} \quad \Sigma \mathcal{N}_x f + \Sigma \mathcal{N}_z P = 0. \quad [2] \end{aligned}$$

III. Les forces telles que *f_x* sont celles qui résistent à l'allongement ou au raccourcissement des fibres. Si l'on considère en particulier une des fibres qui se projettent suivant MM', et dont la variation de longueur est mM', on aura, d'après les lois de la résistance à l'ALLONGEMENT ou à la COMPRESSION (Voy. ces mots),

$$f_x = E d \omega \cdot \frac{mM'}{Mm}; \quad [3]$$

E désignant le coefficient d'élasticité de la matière, qui est le même pour toutes les fibres, si la matière est supposée homogène, et dω la section de la fibre considérée. Or, la similitude des triangles mM' et GOI donne

$$\frac{mM'}{Mm} \quad \text{ou} \quad \frac{mM'}{GI} = \frac{mI}{GO}$$

mI est l'ordonnée de la fibre considérée, ou sa distance au plan des fibres neutres, qui est celui des *zx*; nous désignerons, suivant l'usage, cette ordon-

née par la lettre *v*; elle sera positive ou négative, suivant que la fibre sera située au-dessous ou au-dessus du plan des *zx*. GO est le rayon de courbure des fibres neutres, que nous supposons projetées suivant GI, mais qui, en réalité, se projettent suivant l'arc GI', décrit du point O comme centre. D'après cela, l'équation [3] peut s'écrire, en désignant par ρ ce rayon de courbure,

$$f_x = E d \omega \cdot \frac{v}{\rho}, \quad [4]$$

et la première des équations [1] devient

$$\Sigma E d \omega \cdot \frac{v}{\rho} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\rho} \Sigma v d \omega = 0.$$

Mais si Ω désigne l'aire de la section AB, et V l'ordonnée de son CENTRE DE GRAVITÉ (Voy. ce mot), on a Σ v d ω = VΩ; la relation ci-dessus se réduit donc à

$$\frac{E}{\rho} V \Omega = 0, \quad \text{ce qui exige} \quad V = 0,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité de la section AB est dans le plan des fibres neutres; et, à cause de la symétrie du prisme par rapport au plan de flexion, ce centre de gravité devant se trouver dans le plan de flexion lui-même, il n'est autre que le point G.

La fibre qui passe au point G a reçu le nom de *fibre moyenne*.

IV. La seconde des équations [1] donne

$$\Sigma f_y = - \Sigma P.$$

La somme ΣP qui tendrait à faire glisser la portion de prisme considérée le long de la section AB, et à trancher en quelque sorte le prisme suivant cette section, a reçu à cause de cela le nom d'*effort tranchant*.

La troisième des équations [1] est satisfaite d'elle-même, à cause de la symétrie, la flexion parallèle au plan des *xy* ne faisant naître aucune résistance perpendiculaire à ce plan.

L'équation [2] donne

$$\Sigma \mathcal{N}_x f = - \Sigma \mathcal{N}_z P.$$

La somme ΣN_zP des moments des forces P par rapport à l'axe des *z*, c'est-à-dire par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion, et mené par le centre de gravité de la section AB, est ce que l'on appelle le *moment des forces fléchissantes*, ou, par abréviation, le *moment fléchissant*; nous le désignerons, suivant l'usage, par la lettre μ, et nous prendrons pour sens positif des moments le sens indiqué par la flèche, et qui va de GX vers GY.

Le moment de la force *f_x* se réduit au moment de sa composante *f_x*, car le moment des deux autres composantes est nul, puisqu'elles sont dans un même plan avec l'axe. Le moment de *f_x* est - *f_x*.*v*; il est négatif pour toutes les fibres. En mettant pour *f_x* sa valeur [4], l'équation des moments devient donc

$$- \Sigma E d \omega \cdot \frac{v}{\rho} \cdot v = - \mu \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\rho} \Sigma v^2 d \omega = \mu.$$

Or, Σ v² d ω est la somme des produits obtenus en multipliant chacun des éléments de la section AB par le carré de sa distance à l'axe des *z*, c'est donc le MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot) de cette section par rapport à l'axe des *z*; en le désignant par I, on pourra donc écrire

$$\frac{EI}{\rho} = \mu. \quad [5]$$

V. On tire de l'équation [4]

$$\frac{f_x}{d\omega} = E \frac{v}{\rho}$$

Le premier membre représente la résistance à l'allongement ou au raccourcissement par unité de surface; si on la désigne par R, on peut écrire

$$R = E \frac{v}{\rho}$$

et si l'on élimine ρ entre cette équation et l'équation [5], on obtient

$$R = \frac{v\mu}{I} \quad [6]$$

On voit que la résistance d'une fibre quelconque est proportionnelle à sa distance v au plan des fibres neutres; et par conséquent la fibre la plus fatiguée, celle qui a à supporter la plus grande tension ou la plus grande compression, est la fibre la plus éloignée du plan des fibres neutres. Les efforts auxquels le prisme est soumis, doivent être réglés de telle sorte que, même pour cette fibre la plus fatiguée, la résistance R ne dépasse pas la limite d'élasticité. Pour le fer, par exemple, il faut que R ne dépasse pas 12 kilogrammes environ par millimètre carré; pour le bois, la limite de R serait 60 à 80 kilogrammes par centimètre carré, et ainsi de suite. (Voy. ALLONGEMENT, COMPRESSION, RUPTURE, ÉCRASEMENT.)

VI. On sait qu'en désignant par y l'ordonnée d'une courbe, et par y' et y'' ses deux premières dérivées, le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

lorsque, comme cela arrive pour la fibre moyenne GI, la convexité de la courbe est tournée vers l'axe des x . La courbure étant toujours très-faible, l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des x est toujours très-petit, et l'on peut en conséquence négliger le carré de y' vis-à-vis de l'unité, et écrire

$$\rho = \frac{1}{y''}$$

L'équation [5] devient ainsi

$$EIy'' = \mu \quad \text{ou} \quad \epsilon y'' = \mu, \quad [7]$$

en désignant par ϵ le produit EI du coefficient d'élasticité par le moment d'inertie de la section du prisme.

Les équations [6] et [7] renferment la solution de la plupart des questions pratiques relatives à la flexion plane des prismes. Nous passerons en revue celles qu'on a le plus fréquemment à résoudre.

VII. — 1. *Pièce primitivement horizontale posée sur deux appuis de niveau, et chargée d'un poids uniformément réparti.* — Soit AB (fig. 2) la position

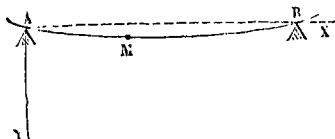


Fig. 2.

primitive de la fibre moyenne, et AMB celle qu'elle prend sous l'action des forces qui la sollicitent. Désignons par a la distance AB des deux points d'appuis, et par p le poids par mètre courant dont la pièce est supposée chargée. Prenons pour axe des x

la droite AB, et pour axe des y la verticale du point A. Soit M un point quelconque de la fibre moyenne dont les coordonnées sont x et y . Imaginons au point M une section transversale du prisme, et considérons l'équilibre de la portion de ce prisme comprise entre cette section et l'extrémité B. Le poids réparti sur MB est $p(a-x)$; on peut le considérer comme appliqué au milieu de la distance MB, par conséquent à une distance du point M égale à $\frac{1}{2}(a-x)$; le moment de ce poids a donc pour expression

$$\frac{1}{2} p(a-x)^2.$$

La portion de prisme considérée est en outre soumise à la réaction verticale N du point d'appui B; cette réaction est facile à déterminer. Car si l'on suppose la pièce parvenue à l'état d'équilibre, on peut, sans troubler cet équilibre, la regarder comme rigide, et il faut alors que la somme des réactions verticales exercées en A et en B soit égale à la charge pa de la pièce; et, à cause de la symétrie, les réactions en A et en B sont égales entre elles: ainsi on a $N = \frac{1}{2} pa$. Son moment sera donc $-\frac{1}{2} pa(a-x)$; et, par suite, le moment fléchissant μ aura pour valeur

$$\mu = \frac{1}{2} p(a-x)^2 - \frac{1}{2} pa(a-x).$$

Il faut chercher pour quelle section du prisme ce moment est maximum en valeur absolue. Or, en réduisant, on obtient

$$\mu = -\frac{1}{2} px(a-x).$$

Le maximum absolu a donc lieu pour

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} a,$$

c'est-à-dire au milieu de la pièce, et cette valeur est

$$\frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{4} a^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{8} pa^2.$$

C'est cette valeur qu'il faudra mettre pour μ dans la formule [6] de la résistance. En même temps on y mettra pour v l'ordonnée de la fibre la plus éloignée par rapport au plan des fibres neutres.

Si, pour fixer les idées, la section est un rectangle dont la base soit b et la hauteur h , il faudra faire $v = \frac{1}{2} h$. D'ailleurs on aura $I = \frac{1}{12} bh^3$. Il viendra donc

$$R = \frac{\frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{8} pa^2}{\frac{1}{12} bh^3} \quad \text{ou} \quad R = \frac{3 pa^2}{4 bh^2}, \quad [8]$$

et il faudra que cette valeur de R ne dépasse pas la limite d'élasticité, ou, plus généralement, la limite de tension ou de pression que l'on veut faire subir à la matière du prisme. Supposons, par exemple, qu'une poutre en chêne de 5 mètres de portée, et de 0^m,2 de largeur sur 0^m,3 d'épaisseur ait à porter un poids de 600 kilogrammes par mètre courant; on aura

$$p = 600, \quad a = 5, \quad b = 0,2, \quad h = 0,3,$$

et, en substituant, il viendra

$$R = \frac{3 \cdot 600 \cdot 25}{4 \cdot 0,2 \cdot 0,09} = 622222^k, 2 \dots$$

ce nombre est inférieur à 0,8 par millimètre carré; la poutre considérée pourrait donc sans inconvénient supporter le poids dont on se propose de la charger.

Il est utile de connaître quelle sera la flèche du prisme considéré, c'est-à-dire quelle sera l'ordonnée maximum de sa fibre moyenne. Pour cela, il faut se servir de l'équation [7]. On aura ici

$$\epsilon y'' = -\frac{1}{2} p x (a - x) = \frac{1}{2} p (x^2 - ax).$$

On multiplie par dx , et l'on intègre les deux membres, en déterminant la constante de manière que pour $x = \frac{a}{2}$ on ait $y' = 0$, ce qui doit évidemment avoir lieu à cause de la symétrie. On trouve ainsi

$$\epsilon y' = \frac{1}{2} p \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a^3}{12} \right).$$

On multiplie de nouveau par dx , et l'on intègre, en déterminant la constante de telle sorte que pour $x = 0$ on ait $y = 0$; on trouve

$$\epsilon y = \frac{1}{2} p \left(\frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^3x}{12} \right);$$

on peut vérifier qu'on a aussi $y = 0$ pour $x = a$.

Le maximum a lieu pour $x = \frac{a}{2}$, et en appelant Y l'ordonnée maximum on trouve

$$\epsilon Y = \frac{5pa^4}{384}, \text{ d'où } Y = \frac{5pa^4}{384EI}. \quad [9]$$

Dans l'exemple traité ci-dessus, on aurait

$$p = 600, \quad a = 5, \quad E = 0,6 \cdot 10^9, \\ I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot (0,3)^3 = \frac{9}{2 \cdot 10^7}.$$

Par suite $Y = 0^m, 018$, ou un peu moins de 2 centimètres. Si la qualité du chêne employé permettait de prendre $E = 1,2 \cdot 10^9$, on trouverait $Y = 0^m, 009$.

VIII. — 2. Pièce primitivement horizontale posée sur deux appuis de niveau, chargée d'un poids p par mètre courant, uniformément réparti, et d'un poids P appliqué en son milieu.

Les réactions des points d'appuis sont ici supérieures de $\frac{1}{2} P$ à celles de la question précédente;

leur valeur est donc $\frac{1}{2} (pa + P)$, et l'on a

$$\mu = \frac{1}{2} p (a - x)^2 + P \left(\frac{a}{2} - x \right) - \frac{1}{2} (pa + P) (a - x),$$

$$\text{ou } \mu = -\frac{1}{2} x (pa + P - px).$$

Cette quantité va en augmentant en valeur absolue quand on fait varier x de zéro à $\frac{1}{2} a$; il est inutile d'ailleurs de faire $x > \frac{1}{2} a$, car cela reviendrait à prendre pour origine le point B, en comptant les x en sens contraire, et à faire $x < \frac{1}{2} a$. Le maximum de μ , dans l'étendue AB, répond donc au milieu de la pièce; et si l'on fait $x = \frac{1}{2} a$, on trouve pour la valeur absolue de ce maximum

$$\mu = \frac{1}{8} pa^2 + \frac{1}{4} Pa, \quad [10]$$

c'est la valeur à mettre dans l'équation [6] de la

résistance. En opérant ensuite, comme ci-dessus, sur l'équation [7], on trouvera pour la valeur de la flèche

$$Y = \frac{5pa^4}{384EI} + \frac{Pa^3}{48EI} = \frac{a^3}{48EI} \left(\frac{5}{8} pa + P \right). \quad [11]$$

En la comparant à celle de la question précédente, on voit qu'elle la surpasse de

$$\frac{1}{48} \frac{Pa^3}{EI}.$$

Si aux données de l'exemple précédent on ajoute $P = 600^k$, on trouvera

$$R = 744444^k, 44,$$

et

$$Y = 0^m, 0247.$$

IX. Si le poids P , au lieu d'être appliqué au milieu de la pièce, est appliqué en un point quelconque C (fig. 5), le calcul est un peu plus com-

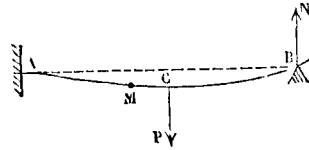


Fig. 5.

pliqué. Soit l la distance du poids P à l'appui A. On trouvera la réaction N de l'appui B, en prenant les moments des forces par rapport au point A, la pièce étant supposée rigide; on obtient

$$Na = \frac{1}{2} pa^2 + Pl, \text{ d'où } N = \frac{1}{2} pa + P \frac{l}{a}.$$

On prendra ensuite les moments par rapport à un point quelconque de la fibre moyenne. Si le point se trouve comme M_1 , entre A et C, on aura

$$\mu_1 = \frac{1}{2} p (a - x)^2 + P(l - x) - \left(\frac{1}{2} pa + P \frac{l}{a} \right) (a - x).$$

Si la section est faite entre C et B, et que M_2 soit le point correspondant de la fibre moyenne, on aura

$$\mu_2 = \frac{1}{2} p (a - x)^2 - \left(\frac{1}{2} pa + P \frac{l}{a} \right) (a - x),$$

la force P n'entre dans cette équation que par l'expression de N , attendu que cette force P n'agit pas sur la portion de prisme comprise entre C et B.

On cherchera, entre 0 et l , la valeur de x qui donne pour μ_1 la plus grande valeur absolue, et entre l et a celle qui donne la plus grande valeur pour μ_2 ; celle de ces deux valeurs maximum qui sera la plus grande sera celle qu'il faudra substituer pour μ dans la formule [6] de la résistance.

Si l'on veut avoir la forme de la courbe qu'affecte la fibre moyenne, on remplacera μ_1 par $\epsilon y_1'$, et μ_2 par $\epsilon y_2''$. On intégrera deux fois chacune des deux équations différentielles ainsi obtenues, ce qui introduira 4 constantes arbitraires. Pour les déterminer on aura 4 conditions, savoir: 1° pour $x = l$ on doit avoir $y_1' = y_2'$, attendu que les deux portions de courbes se raccordent au point C, où elles ont par conséquent la même tangente; 2° pour $x = 0$, on doit avoir $y = 0$; 3° pour $x = l$, on doit avoir $y_1 = y_2$; 4° pour $x = a$, on doit avoir $y_2 = 0$. On cherchera entre 0 et l la valeur de x qui donne pour y_1 la plus grande valeur, et entre l et a celle qui donne la plus grande valeur pour y_2 ; celle de ces deux valeurs maximum qui sera la plus grande sera la flèche Y .

X. On a vu plus haut que les forces élastiques

verticales qui s'exercent dans la section transversale AB (fig. 1) se réduisent à une seule force égale et opposée à l'effort tranchant; et que les forces élastiques perpendiculaires à cette section donnent des moments, par rapport à l'axe de x , c'est-à-dire par rapport à une perpendiculaire au plan de flexion, et passant par le centre de gravité de la section transversale, dont la somme algébrique est égale et opposée au moment fléchissant. Or, ces forces élastiques normales se réduisent à un couple, puisqu'on a $\Sigma f_x = 0$; et le moment de ce couple est égal et de sens contraire au moment fléchissant. Il en résulte que les forces élastiques développées dans la section transversale, forces que la partie du prisme située à gauche de cette section exerce sur la partie du même prisme situés à droite, se réduisent à une force verticale et à un couple dont le plan est parallèle au plan de flexion. Il est clair qu'en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction, la partie du prisme située à droite de la section AB exerce sur la partie située à gauche des forces élastiques qui se réduisent de même à une force verticale et à un couple, respectivement opposés aux précédents. Et il en est de même pour une section transversale quelconque.

Par conséquent, si l'on considère une portion du prisme comprise entre deux sections transversales quelconques, on voit qu'elle est en équilibre sous l'action: 1° des forces extérieures qui la sollicitent; 2° d'une force verticale et d'un couple provenant de la partie du prisme située à gauche; 3° d'une force verticale et d'un couple provenant de la partie du prisme située à droite.

Cette considération est utile pour traiter le cas d'une pièce encastree par les deux bouts. Une pièce est dite encastree, lorsque son extrémité est solidement maintenue dans un mur ou dans un appui quelconque, de manière qu'au point considéré les fibres soient constamment perpendiculaires à la surface de ce mur ou de cet appui, quelle que soit d'ailleurs la flexion. Cette condition n'est presque jamais remplie, et il est, en général, prudent de considérer les pièces comme reposant simplement sur des appuis. Néanmoins il est bon de se rendre compte de ce qui arriverait si l'encastrement pouvait être rigoureusement réalisé.

XI. — 3. *Pièce primitivement horizontale, encastree par les deux bouts et chargée d'un poids uniformément réparti.*

Soient A et B (fig. 4) les points d'encastrement,

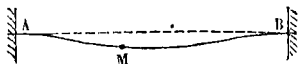


Fig. 4.

à leur distance, p le poids par mètre courant dont le prisme est chargé. Soient F' et μ' la force verticale et le moment du couple provenant de la partie du prisme située au delà de la section B. Prenons les moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure et mené par un point quelconque M de la fibre moyenne dont l'abscisse, par rapport au point A est x ; nous aurons, en désignant toujours par μ la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur la partie MB,

$$\mu = \frac{1}{2}(a-x)^2 + F'(a-x) + \mu'.$$

On remarquera que le maximum du moment fléchissant μ a lieu pour $x=0$, c'est-à-dire au point d'encastrement; c'est là le point le plus menacé.

Cette équation peut s'écrire

$$\epsilon y'' = \frac{1}{2} p (a^2 - 2ax + x^2) + F'(a-x) + \mu'.$$

Intégrons deux fois de suite cette équation différentielle, en remarquant qu'à cause de l'encastrement on doit avoir $y'=0$ pour $x=0$; et qu'on a d'ailleurs $y=0$ pour $x=0$, puisque le point A est pris pour origine; nous aurons

$$\epsilon y' = \frac{1}{2} p \left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) + F' \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) + \mu' x,$$

$$\epsilon y = \frac{1}{2} p \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + F' \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{\mu' x^2}{2}.$$

Mais pour $x=a$, on doit avoir $y'=0$, à cause de l'encastrement au point B, et en même temps $y=0$; il vient donc en réduisant

$$0 = \frac{1}{6} pa^3 + F' \cdot \frac{a^2}{2} + \mu' \cdot a,$$

et
$$0 = \frac{1}{8} pa^4 + F' \cdot \frac{a^3}{3} + \mu' \cdot \frac{a^2}{2},$$

d'où l'on tire

$$F' = -\frac{1}{2} pa \quad \text{et} \quad \mu' = -\frac{1}{12} pa^2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression générale de μ , et qu'on fasse ensuite $x=0$, on trouve pour le maximum du moment fléchissant, correspondant au point d'encastrement,

$$\mu = \frac{1}{12} pa^2.$$

Dans le cas d'une pièce simplement posée sur ses appuis, on a trouvé $\mu = \frac{1}{8} pa^2$. L'encastrement diminue donc le maximum du moment fléchissant à introduire dans la formule [6] de la résistance.

Si l'on substitue pour F' et μ' leurs valeurs dans les expressions générales de $\epsilon y'$ et de ϵy , et qu'on fasse ensuite $x = \frac{a}{2}$, on trouve

$$y' = 0, \quad \text{et} \quad Y = \frac{pa^4}{384\epsilon} = \frac{pa^4}{384EI}.$$

Dans le cas d'une pièce simplement posée sur deux appuis on avait trouvé $Y = \frac{5pa^4}{384EI}$; la flèche est donc, toutes choses égales d'ailleurs, 5 fois moindre dans le cas de l'encastrement.

XII. — 4. *Pièce primitivement horizontale, encastree par les deux bouts, chargée d'un poids uniformément réparti, et d'un poids P appliqué à une distance l de l'extrémité A.*

En conservant les mêmes notations, on aura pour une section faite entre A et la direction de P

$$\mu_1 = \epsilon y_1'' = \frac{1}{2} p (a-x)^2 + P(l-x) + F'(a-x) + \mu',$$

et pour une section faite entre la direction de P et l'extrémité B,

$$\mu_2 = \epsilon y_2'' = \frac{1}{2} p (a-x)^2 + F'(a-x) + \mu,$$

la force P ne devant plus entrer dans l'expression du moment fléchissant. On intégrera deux fois de suite chacune de ces deux équations différentielles, ce qui introduira 4 constantes arbitraires. Pour les déterminer, on aura les 4 conditions

$$y_1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$y_2 = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$y_1 = y_2 \text{ pour } x = l,$$

$$y_1' = y_2' \text{ pour } x = l,$$

puisque les courbes se raccordent au point d'application de la force P. On devra avoir ensuite

$y_2 = 0$ pour $x = a$ et $y_2' = 0$ pour $x = a$, conditions qui détermineront F' et μ' . On cherchera entre $x = 0$ et $x = l$ la plus grande valeur absolue de μ_1 , et entre $x = l$ et $x = a$ la plus grande valeur absolue de μ_2 ; le plus grand de ces deux maximum sera la valeur de μ qu'il faudra introduire dans la formule [6] de la résistance. On cherchera ensuite entre $x = 0$ et $x = l$ la plus grande valeur absolue de y_1 , et entre $x = l$ et $x = a$ la plus grande valeur absolue de y_2 ; le plus grand de ces deux maximum sera la flèche Y. — Pour déterminer ces valeurs maximum absolues, il est commode de s'aider d'un tracé. Les expressions de μ . et de μ_2 représentent des paraboles, et il suffit d'en déterminer quelques points pour obtenir à très-peu près le maximum. De même pour les expressions de y_1 et de y_2 .

XIII. — 5. *Pièce primitivement horizontale, encastrée par un bout et posée par l'autre sur un appui au même niveau, chargée d'un poids uniformément réparti, et d'un poids P appliqué à la distance l du point d'encastrement.* Soit N la réaction verticale de l'appui. Si l'on prend les moments par rapport à un point de la fibre moyenne com-

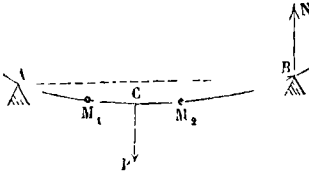


Fig. 3.

pris entre le point d'encastrement A (fig. 3) et le point d'application C de la force P, on aura

$$\mu_1 = \varepsilon y_1'' = \frac{1}{2} p (a - x)^2 + P(l - a) - N(a - x),$$

et si l'axe des moments est pris entre C et B, on aura

$$\mu_2 = \varepsilon y_2'' = \frac{1}{2} p (a - x)^2 - N(a - x).$$

On intégrera deux fois de suite chacune de ces deux équations différentielles, ce qui introduira 4 constantes arbitraires. Pour déterminer ces 4 constantes et la réaction inconnue N, on aura 5 conditions, savoir :

Pour $x = 0$ on doit avoir $y_1 = 0$ et $y_1' = 0$, à cause de l'encastrement; pour $x = l$ on doit avoir $y_1 = y_2$ et $y_1' = y_2'$, attendu que les deux parties de la fibre moyenne se raccordent au point C. Enfin, pour $x = a$ on doit avoir $y_2 = 0$. Pour trouver le maximum du moment fléchissant et le maximum de l'ordonnée, on opérera comme dans le problème précédent.

Le problème actuel, plus curieux qu'utile, donne lieu à une intéressante discussion qui ne saurait trouver place ici, et qu'on trouvera développée dans le *Cours de Mécanique appliquée* professé à l'École des ponts et chaussées par M. Bresse (t. I).

XIV. — 6. *Pièce posée sur un nombre quelconque d'appuis de niveau, et soumise à des forces verticales agissant dans le plan de flexion.*

La fibre neutre se trouve divisée par les points d'appuis A, B, C, D, etc. (fig. 6), en un certain nombre de travées. On suppose que a_1, a_2, a_3, \dots , soient les longueurs successives de ces travées,

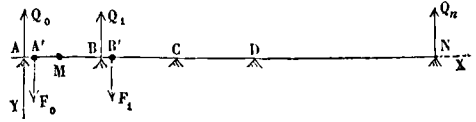


Fig. 6.

que p_1, p_2, p_3, \dots , soient les poids, par mètre courant, uniformément répartis sur chacune d'elles, ε la valeur du produit EI relative à toutes les travées. On les suppose en outre soumises à des forces verticales quelconques, et l'on se propose de déterminer le maximum du moment fléchissant qu'il faut mettre dans la formule de la résistance, et la courbe qu'affecte la fibre moyenne. Ce problème, que M. Clapeyron a, le premier, abordé dans toute sa généralité, peut être traité de plusieurs manières, sans s'écarter de principes posés par cet habile ingénieur. Nous adopterons ici l'élégante méthode de M. Bresse.

Désignons par $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les moments des couples auxquels se réduisent les forces élastiques, perpendiculaires aux sections transversales du prisme, qui correspondent aux points d'appuis A, B, C, ... Mettons d'abord l'origine au premier appui A; et considérons l'équilibre de la première travée. D'après ce qu'on a vu dans les questions précédentes, si l'on prend les moments par rapport à un point quelconque M situé à la distance x de l'origine, la somme de ces moments, ou le moment fléchissant pour la section faite en M, sera toujours une fonction de x du second degré, dans laquelle le terme en x^2 , provenant du développement de $\frac{1}{2} p \cdot (a - x)^2$, sera $\frac{1}{2} p_1 x^2$. On pourra donc écrire

$$\mu = \varepsilon y'' = A + Bx + \frac{1}{2} p_1 x^2. \quad [12]$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les inclinaisons de la tangente à la fibre moyenne aux points A, B, C, ..., N; on aura, en intégrant une première fois l'équation différentielle [12],

$$\varepsilon (y' - \alpha_0) = Ax + \frac{1}{2} Bx^2 + \frac{1}{6} p_1 x^3, \quad [13]$$

et, en faisant $x = a_1$,

$$\varepsilon \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) = Aa_1 + \frac{1}{2} Ba_1^2 + \frac{1}{6} p_1 a_1^3. \quad [14]$$

Intégrant de nouveau l'équation différentielle [13] et déterminant la constante de manière qu'on ait $y = 0$ pour $x = 0$, on obtient

$$\varepsilon \cdot (y - \alpha_0 x) = \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{6} Bx^3 + \frac{1}{24} p_1 x^4; \quad [15]$$

faisant ensuite $x = a_1$, ce qui donne $y = 0$, il vient

$$-\varepsilon \alpha_0 a_1 = \frac{1}{2} Aa_1^2 + \frac{1}{6} Ba_1^3 + \frac{1}{24} p_1 a_1^4$$

ou

$$-\varepsilon \alpha_0 = \frac{1}{2} Aa_1 + \frac{1}{6} Ba_1^2 + \frac{1}{24} p_1 a_1^3. \quad [16]$$

Si l'on élimine α_0 par simple soustraction entre les équations [14] et [16], on trouve

$$\epsilon \alpha_1 = \frac{1}{2} A \alpha_1 + \frac{1}{3} B \alpha_1^2 + \frac{1}{8} p_1 a_1^2. \quad [17]$$

Mais si, au lieu de mettre l'origine au point A, on la mettait au point B, on trouverait, en considérant la seconde travée, une équation analogue l'équation [16], qui serait

$$-\epsilon \alpha_1 = \frac{1}{2} A' \alpha_2 + \frac{1}{6} B' \alpha_2^2 + \frac{1}{24} p_2 a_2^2. \quad [18]$$

Ajoutant membre à membre les relations [17] et [18], on obtient

$$0 = \frac{1}{2} A \alpha_1 + \frac{1}{2} A' \alpha_2 + \frac{1}{6} B \alpha_1^2 + \frac{1}{6} B \alpha_2^2 + \frac{1}{8} p_1 a_1^2 + \frac{1}{24} p_2 a_2^2. \quad [19]$$

Or les coefficients A, A', B, B' peuvent s'exprimer facilement au moyen des quantités μ_0, μ_1 et μ_2 . En effet l'expression [12] doit se réduire à μ_0 pour $x=0$ et à μ_1 pour $x=a_1$; on doit donc avoir

$$\mu_0 = A \quad \text{et} \quad \mu_1 = A + B a_1 + \frac{1}{2} p_1 a_1^2,$$

d'où

$$A = \mu_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\mu_1 - \mu_0}{a_1} - \frac{1}{2} p_1 a_1.$$

On trouverait de même, en considérant la seconde travée,

$$A' = \mu_1 \quad \text{et} \quad B' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{a_2} - \frac{1}{2} p_2 a_2.$$

Substituant ces quatre valeurs dans la relation [19], on obtient la formule suivante connue sous le nom de *formule de Clapeyron*, et qui établit une relation remarquable entre les moments fléchissants μ_0, μ_1, μ_2 relatifs à trois appuis consécutifs :

$$\mu_0 a_1 + 2 \mu_1 (a_1 + a_2) + \mu_2 a_2 = \frac{1}{4} (p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2). \quad [20]$$

Si les deux travées consécutives sont égales en longueur et chargées du même poids uniformément réparti, on peut écrire, en ôtant les indices des lettres a et p et divisant par a ,

$$\mu_0 + 4 \mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{2} p a^2. \quad [21]$$

S'il y a n travées, on aura, en appliquant successivement la formule de Clapeyron aux travées successives, $n-1$ équations analogues à l'équation [20] entre les $n+1$ quantités $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Mais si la pièce est simplement posée sur les appuis, les extrémités étant libres ne supportent que les réactions verticales des appuis; on a $\mu_0=0, \mu_n=0$; il reste donc $n-1$ équations du premier degré pour déterminer les $n-1$ inconnues μ_1, μ_2, \dots jusqu'à μ_{n-1} . Toutes ces quantités se trouveront donc aisément déterminées.

Une fois ces quantités connues, on connaîtra les coefficients A, B, A', B', ...; l'équation [16] fera connaître l'inclinaison α_x , et l'on aura pour chaque travée une équation analogue à l'équation [17] pour déterminer les inclinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Pour chaque travée on aura, en outre, une équation analogue à l'équation [15], dans laquelle x représentera la distance d'un point quelconque de la fibre moyenne par rapport au point d'appui situé immédiatement à gauche; cette équation donnera l'ordonnée y ; et une équation analogue à l'équation [13] donnera l'inclinaison en chaque point de la courbe, qui se trouvera ainsi complètement connue.

On ne se donne pas ordinairement la peine de

déterminer les efforts tranchants. Mais si on veut les obtenir, on peut employer le moyen très-simple indiqué par M. Bresse. Si P, P', P'', ..., désignent les forces verticales extérieures appliquées à la première travée, et l, l', l'', \dots , leurs distances au point A, on a, pour l'expression du moment fléchissant, au point dont l'abscisse est x ,

$$\mu = \frac{1}{2} p (a-x)^2 + P(l-x) + P'(l'-x)$$

$$+ P''(l''-x) + \dots + F_1(a-x) + \mu_1,$$

en désignant par F_1 l'effort tranchant au point B. Différentions cette équation par rapport à x ; il viendra

$$\frac{d\mu}{dx} = -[p(a-x) + P + P' + P'' + \dots + F_1].$$

Or, le second membre exprime précisément l'effort tranchant F au point considéré, pris avec un signe contraire; ainsi on a

$$\frac{d\mu}{dx} = -F,$$

c'est-à-dire que, pour obtenir l'effort tranchant relatif à une section quelconque, il suffit de prendre en signe contraire la dérivée, par rapport à x , du moment fléchissant relatif à cette section. On tire ainsi de l'équation [12]

$$F = -(B + p_1 x), \quad [22]$$

et l'on aura une équation analogue pour chaque travée.

XV. La connaissance des efforts tranchants conduit à la détermination des réactions exercées sur la pièce par ses appuis.

Soient A' et B' (fig. 6) deux points, distants de a_1 et placés à droite des points A et B, mais très-près de ces points; et considérons l'équilibre de la portion de prisme comprise entre les sections transversales faites en A' et en B'. Les forces extérieures qui agissent sur cette portion de prisme sont: 1° son poids $p_1 a_1$; 2° la réaction $-Q_1$ exercée par le point d'appui. Les forces moléculaires exercées en A', de la part de la tranche située à gauche de A', se réduisent: 1° à une force verticale, égale et de signe contraire à l'effort tranchant en A'; si F_0 désigne cet effort tranchant, $-F_0$ sera la force verticale dont il s'agit; 2° à un couple dont le moment est égal et de signe contraire au moment fléchissant μ_0 . Les forces moléculaires exercées en B', de la part de la portion de prisme située à droite, se réduisent de même: 1° à une force verticale, qui n'est autre que l'effort tranchant F_1 relatif au point B'; 2° à un couple dont le moment est précisément le moment fléchissant μ_1 relatif à ce même point. La somme des projections verticales de ces diverses forces doit être égale à zéro pour l'équilibre de la portion A'B' de prisme considérée; d'ailleurs les projections des forces formant un couple se détruisent d'elles-mêmes; il reste donc

$$-F_0 + p_1 a_1 - Q_1 + F_1 = 0,$$

d'où

$$F_0 - F_1 = p_1 a_1 - Q_1. \quad [23]$$

Si l'on appelle $F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n$ les efforts tranchants relatifs à des points placés à droite des points d'appui et très-près de ces points, et Q_2, Q_3, \dots, Q_n les réactions inconnues, on aura, en écrivant pour chaque travée une équation analogue à la précédente, et observant que F_n est nul, puisque le prisme ne s'étend pas au delà du dernier point

d'appui, du moins d'une quantité dont il faille tenir compte,

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= p_2 a_2 - Q_2, \\ F_2 - F_3 &= p_3 a_3 - Q_3, \end{aligned} \quad [24]$$

$$F_{n-1} - F_n = p_n a_n - Q_n,$$

ou On a évidemment $Q_0 = F_0$; les équations [23] et [24] feront connaître toutes les autres réactions.

XVI. Comme application de cette théorie, nous prendrons d'abord le cas très-simple de deux travées égales, chargées du même poids p par mètre courant. La formule de Clapeyron [21], dans laquelle μ_0 et μ_2 deviennent nuls, puisque les deux bouts de la pièce sont libres, devient

$$4\mu_1 = \frac{1}{2} p a^2, \text{ d'où } \mu_1 = \frac{1}{8} p a^2.$$

On trouve ensuite

$$\Lambda = 0, \quad B = -\frac{3}{8} p a, \quad A' = \frac{1}{8} p a^2, \quad B' = -\frac{5}{8} p a.$$

Par suite, l'équation [16] donne

$$\alpha_0 = +\frac{p a^3}{48 \epsilon},$$

l'équation [17] donne

$$\alpha_1 = 0,$$

et l'équation analogue, relative à la seconde travée, donne

$$\alpha_2 = -\frac{p a^3}{48 \epsilon}.$$

On voit que les inclinaisons α_0 et α_2 sont égales et de signe contraire, et que α_1 est nul, ce qui devait être, à cause de la symétrie.

L'équation [22] donne ensuite pour $x=0$,

$$F_0 = \frac{3}{8} p a;$$

l'équation analogue relative à la seconde travée donne $F_2 = \frac{5}{8} p a$. On a donc $Q_0 = \frac{3}{8} p a$. L'équation [23] donne $Q_1 = \frac{5}{4} p a$; et la première des équations [24], dans laquelle F_2 doit être remplacé par zéro, donne $Q_2 = \frac{3}{8} p a$. Cette dernière réaction est donc égale à Q_0 , ce que la symétrie pouvait faire prévoir. L'équation [13] devient

$$\epsilon y' = \frac{1}{48} p a^3 - \frac{3}{16} p a x^2 + \frac{1}{6} p x^3,$$

et l'équation [15] devient

$$\epsilon y = \frac{1}{48} p a^3 x - \frac{1}{16} p a x^3 + \frac{1}{24} p x^4;$$

ces équations feront connaître la forme de la courbe qu'affecte la fibre moyenne. En égalant à zéro la valeur de y' , on obtient une équation qui admet la racine $x=a$, déjà connue; en la débarrassant de cette racine, il reste une équation du second degré, dont une racine est comprise entre 0 et a , c'est $x=0,421 a$. L'ordonnée de ce point est donc maximum; c'est la *flèche* de la première travée; on obtiendrait sa valeur en remplaçant x par $0,421 a$ dans la dernière équation qui donne y . A l'aide de l'équation [12], qui devient

$$\mu = -\frac{3}{8} p a x + \frac{1}{2} p x^2,$$

on s'assure que la plus grande valeur absolue du moment fléchissant a lieu pour $x=a$, et a pour

valeur $\mu = \mu_1 = \frac{1}{8} p a^2$. C'est cette valeur qu'il faudrait mettre dans la formule [6] de la résistance.

(M. Bélanger a fait voir qu'il y a avantage à placer l'appui intermédiaire un peu plus bas que les appuis extrêmes. Nous renvoyons pour ce cas particulier à sa *Théorie de la résistance des solides*.)

Si l'on traite de la même manière le cas de cinq travées égales, chargées du même poids p par mètre courant, on aura les quatre équations de Clapeyron :

$$\mu_0 + 4\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{2} p a^2,$$

$$\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 = \frac{1}{2} p a^2,$$

$$\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4 = \frac{1}{2} p a^2,$$

$$\mu_3 + 4\mu_4 + \mu_5 = \frac{1}{2} p a^2,$$

dans lesquelles $\mu_0 = 0$ et $\mu_5 = 0$; en les résolvant, on trouve

$$\mu_1 = \frac{4}{38} p a^2, \quad \mu_2 = \frac{3}{38} p a^2,$$

$$\mu_3 = \frac{3}{38} p a^2, \quad \mu_4 = \frac{4}{38} p a^2.$$

On trouve ensuite

$$F_0 = \frac{15}{38} p a, \quad F_1 = \frac{20}{38} p a, \quad F_2 = \frac{19}{38} p a,$$

$$F_3 = \frac{18}{38} p a, \quad F_4 = \frac{23}{38} p a, \quad F_5 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$Q_0 = \frac{15}{38} p a, \quad Q_1 = \frac{43}{38} p a, \quad Q_2 = \frac{37}{38} p a,$$

$$Q_3 = Q_2, \quad Q_4 = Q_1, \quad Q_5 = Q_0,$$

quantités dont la somme est égale à $5 p a$, comme cela devait être, puisque, en considérant le système comme rigide, on voit que la somme des réactions des appuis doit être égale au poids total de la pièce prismatique.

Si l'on cherche le maximum absolu de μ , on trouve qu'il a pour valeur μ , ou μ_1 , c'est-à-dire

$$\frac{4}{38} p a^2.$$

C'est cette valeur qu'il faudra mettre dans la formule

$$R = \frac{\nu \mu}{I},$$

pour en déduire les dimensions transversales de la pièce quand sa forme sera donnée.

On obtient ensuite, à l'aide des équations [16] et [17],

$$\alpha_0 = +\frac{11 p a^3}{456 EI}, \quad \alpha_1 = -\frac{3 p a^3}{456 EI}, \quad \alpha_2 = +\frac{p a^3}{456 EI},$$

$$\alpha_3 = -\alpha_2, \quad \alpha_4 = -\alpha_1, \quad \alpha_5 = -\alpha_0.$$

Les signes de ces valeurs montrent que la fibre moyenne est une courbe ondulée. Les équations analogues à l'équation [15] feront ensuite connaître l'ordonnée correspondante à une abscisse quelconque. Dans les cas ordinaires, les inclinaisons et les ordonnées de la fibre moyenne sont toujours extrêmement faibles.

On trouvera dans les traités spéciaux sur la résistance des matériaux, et particulièrement dans la *Théorie de la résistance des solides* par M. Bélanger, et dans le *Cours de Mécanique appliquée* de

M. Bresse, de nombreux exercices sur la question qui vient de nous occuper. On pourrait généraliser cette question en supposant que le coefficient d'élasticité et la section transversale changent d'une travée à l'autre, ou en admettant que tous les appuis ne soient pas au même niveau; les formules seraient naturellement un peu plus compliquées, mais la marche du calcul serait la même.

XVII. Nous avons supposé jusqu'ici que le prisme n'était soumis qu'à des forces perpendiculaires à sa direction longitudinale. S'il était en outre sollicité par une ou plusieurs forces dirigées suivant sa longueur et tendant à l'allonger ou à le raccourcir, cet effet s'ajouterait à la flexion; et il en résulterait un changement dans la valeur de la résistance R, et un changement dans la position du plan des fibres neutres; ces changements sont faciles à apprécier. Soient AB et ab (fig. 7) deux sections transversales très-voisines, dans la position primitive qu'elles occupaient avant l'action des forces extérieures; soit A'B' la position que prend ab par suite de la flexion, et soit GI la fibre moyenne. Si le prisme est soumis en outre à une force T tendant à l'allonger, toutes les fibres s'allongent de quantités égales; en effet, IK étant l'allongement de la fibre moyenne, et l'allongement proportionnel étant le même pour toutes les fibres, l'allongement de AA' sera AA' $\cdot \frac{IK}{GI}$, ou ce

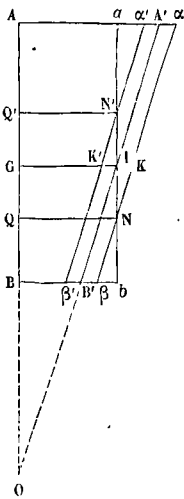


Fig. 7.

qui revient au même,

$$(Aa + aA') \cdot \frac{IK}{GI}, \text{ ou encore } (GI + aA') \frac{IK}{GI},$$

$$\text{ou } IK + aA' \cdot \frac{IK}{GI}, \text{ ou enfin } IK \left(1 + \frac{aA'}{GI} \right);$$

or la fraction entre parenthèses peut être négligée vis-à-vis de l'unité (Voy. ALLONGEMENT); et il reste IK pour l'allongement de la fibre AA'. On en dirait autant de toutes les autres. Par conséquent toutes les molécules qui étaient situées dans le plan A'B' viendront se placer dans un plan parallèle $\alpha\beta$. La force T produisant l'allongement IK sur le prisme entier dont la section est Ω , la force qui produirait cet allongement sur l'unité de surface serait $\frac{T}{\Omega}$.

Cette quantité devra être ajoutée à la résistance des fibres déjà allongées par la flexion, et retranchée au contraire de celle des fibres raccourcies; on aura donc dans les deux cas, en ayant égard aux signes de R et de v,

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{T}{\Omega}. \quad [25]$$

Si la force T était négative et produisait un raccourcissement IK' de la fibre moyenne, on verrait de même que les molécules situées dans le plan A'B' viendraient se placer dans le plan parallèle $\alpha'\beta'$.

La résistance des fibres par unité de surface serait diminuée de $-\frac{T}{\Omega}$, pour les fibres allongées par la flexion, et augmentée au contraire de cette même quantité pour les fibres déjà raccourcies; en sorte qu'on aurait encore, d'une manière générale, l'équation [25].

De plus, le plan des fibres neutres serait déplacé. En effet, dans le cas de l'allongement, ce plan passerait par le point N, intersection des droites ab et $\alpha\beta$; et, dans le cas du raccourcissement, il passerait par le point N', intersection des droites ab et $\alpha'\beta'$. La position de ces plans est facile à trouver. On a, en effet, par des similitudes évidentes, O étant le centre de courbure de la fibre moyenne,

$$IN : IK = GO : GI; \text{ d'où } IN = GO \cdot \frac{IK}{GI},$$

ou, en appelant V la distance IN, ρ le rayon de courbure GO, et ϵ l'allongement proportionnel $\frac{IK}{GI}$ de la fibre moyenne,

$$V = \rho \epsilon. \quad [26]$$

La même relation subsisterait dans le cas du raccourcissement en appelant V la distance IN', et ϵ le raccourcissement proportionnel.

Mais on a $T = E\Omega\epsilon$, par conséquent

$$V = \rho \cdot \frac{T}{E\Omega}. \quad [27]$$

On peut encore donner à cette valeur une autre forme, en remarquant qu'on a trouvé

$$\mu = \frac{EI}{\rho}, \text{ d'où } \frac{\rho}{E} = \frac{I}{\mu},$$

$$\text{ce qui donne } V = \frac{IT}{\mu\Omega}. \quad [28]$$

Toutes ces formules pourraient d'ailleurs être établies directement par la même méthode que les équations [5], [6] et [7] (en remarquant qu'on aurait alors $\Sigma f_x = T$).

XVIII. M. Bresse, qui a traité avec le plus grand détail un grand nombre de problèmes relatifs à la question qui fait l'objet de cet article, a recherché l'influence de la charge d'une travée sur les travées éloignées. Pour cela, il a supposé la dernière travée chargée d'un poids uniformément réparti, et toutes les autres sans charge; et il a déterminé, au moyen des formules ci-dessus, les moments fléchissants et les efforts tranchants près des différents points d'appui. Le calcul montre qu'en représentant par l'unité le moment fléchissant au 2^e point d'appui, ce moment et tous les suivants sont proportionnels aux nombres

1, 4, 15, 56, 209, ...,

formant une série récurrente dont chaque terme, à partir du troisième, est égal au quadruple du précédent, diminué de celui qui le précède de deux rangs. Quant aux efforts tranchants correspondants aux mêmes appuis, ils sont proportionnels aux nombres

1, 5, 19, 71, 265, ...,

qui suivent la même loi. Ces moments fléchissants et ces efforts tranchants sont d'ailleurs alternativement positifs et négatifs.

Le même auteur a généralisé la théorie de la résistance à la flexion plane en examinant le cas où l'élasticité ne serait pas la même pour toutes les

fibres composant le prisme : question qui est d'un intérêt purement théorique, attendu que la loi suivant laquelle l'élasticité varie d'une fibre à l'autre est toujours inconnue.

M. le colonel Jourawski, et après lui M. Bresse et M. Bélanger, ont introduit dans la détermination des dimensions transversales des pièces la considération de la résistance au *glissement longitudinal des fibres*. (Voy. l'art. PIÈCES COURBES.)

Enfin M. Bresse, dans un mémoire qui forme à lui seul le III^e volume de son *Cours de Mécanique appliquée*, a repris sous une forme nouvelle l'étude des poutres à plusieurs travées. Après avoir généralisé la formule de Clapeyron, en supposant la charge répartie d'une manière quelconque, il a examiné tous les cas de surcharge partielle ou totale qui peuvent se présenter, et a donné pour le calcul du moment fléchissant dans ces divers cas, des formules générales qu'il a réduites en tables numériques. — Nous ne pouvons que renvoyer à cet important travail, d'ailleurs plus théorique que réellement pratique.

(Voy. les *Leçons* de M. Navier à l'École des ponts et chaussées; la *Résistance des matériaux*, par M. Morin; la *Théorie de la résistance des solides*, par M. Bélanger; le *Mémoire* de M. le colonel Jourawski, inséré dans les *Annales des ponts et chaussées* en 1856; le *Traité pratique de la résistance des matériaux*, par M. Bourdais; enfin le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

FLOREAL, le huitième mois du calendrier républicain; il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 21 avril et le 21 mai (Voy. CALENDRIER).

FLOT, mouvement ascendant de la mer (Voy. MARÉES.) Ce mot est synonyme de FLUX.

FLUIDE PARFAIT, fluide dont les molécules peuvent glisser les unes sur les autres sans exercer aucun frottement, et peuvent être disjointes ou écartées les unes des autres sans donner lieu à aucun travail moléculaire. Un fluide ainsi constitué est une abstraction qui ne se réalise pas dans la nature. Les liquides qui approchent le plus de la fluidité parfaite, l'eau par exemple, manifestent toujours une certaine résistance au mouvement relatif de leurs molécules, résistance que l'on désigne sous le nom de *viscosité*. C'est à la viscosité de l'eau que sont dues, par exemple, les bulles demi-sphériques qui, lorsqu'elle est traversée par un gaz, viennent se former à sa surface. Les gouttes qui s'échappent d'un corps humide sont encore une preuve de la viscosité de l'eau; elles restent suspendues au corps jusqu'à ce que, leur volume augmentant par l'addition de nouvelles molécules liquides, leur poids devienne supérieur à la résistance du fluide avec lequel elles étaient en contact. Néanmoins, dans les applications, on fait souvent abstraction de la viscosité de l'eau, et on traite ce liquide comme un fluide parfait.

Quelques auteurs font entrer dans la définition de la fluidité parfaite la condition, pour le fluide, de n'exercer aucun frottement contre les parois des vases qui le contiennent ou contre les corps solides qui y sont plongés. Cette manière de voir suppose que la masse fluide glisse non pas sur la paroi même ou sur le corps plongé, mais sur une couche fluide adhérente à cette paroi ou à ce corps.

FLUIDES, corps caractérisés par l'extrême mobilité de leurs molécules, et qui, n'affectant aucune forme propre, prennent celle des vases qui les renferment. On partage les fluides en deux classes : les *liquides* et les *gaz*. Dans les liquides, on n'aperçoit aucune action sensible des molécules les unes sur les autres (Voy. FLUIDE PARFAIT); et ces corps n'ont qu'une compressibilité très-faible; dans les applications, il est généralement permis de les regarder comme incompressibles. Dans les gaz, les molécules exercent les unes sur les autres une action répulsive; et ils tendent à occuper un espace de plus en plus grand; ils sont éminemment compressibles, mais ils tendent à reprendre leur volume primitif, et à s'étendre de plus en plus, lorsque la force qui produisait la compression a cessé d'agir. On leur donne à cause de cela le nom de *fluides élastiques*.

FLUX, mouvement ascendant de la mer (Voy. MARÉES).

FOC, voile triangulaire, dont la base est fixée au mât de BEAUPRÉ, et dont le sommet est fixé au mât de MISAINÉ (Voy. VOILES). Dans les grands bâtiments, il y a trois focs, qui prennent les noms de *grand-foc*, *second-foc*, et *petit-foc* ou *clin-foc*. Le grand-foc est fixé au beaupré lui-même, le second-foc au bout-dehors de beaupré, et le petit-foc au bout-dehors de clin-foc.

FOISONNEMENT, augmentation de volume qu'éprouvent les terres dans les déblais. Cette augmentation varie avec la nature des terres, conformément au tableau suivant, qui donne le volume fourni par un mètre cube d'excavation;

	Non comprimée.	Comprimée.
Terre végétale, alluvions, sables..	1 ^m 10	— 1 ^m 05
Terre franche, très-grasse.....	1, 20	— 1, 07
Terre marneuse et argileuse moyennement compacte.....	1, 50	— 1, 30
Terre marneuse très-compacte....	1, 70	— 1, 40
Terre crayeuse.....	1, 20	— 1, 10
Tuf moyennement dur.....	1, 55	— 1, 30
Roc à la mine réduit en moellons.	1, 65	— 1, 40

La seconde colonne montre comment le foisonnement se trouve réduit par la compression.

FONDS ÉTRANGERS, valeurs qui forment la dette publique de divers États, et qui se négocient à la Bourse de Paris. Nous citerons les principales.

Les *obligations métalliques d'Autriche* sont des obligations de 1000 florins au porteur, rapportant 5 pour 100 d'intérêt. (Il y a d'autres coupures, mais elles sont peu connues en France.) La cote de la Bourse indique en florins le prix de 5 florins de rente, ou le prix d'une obligation nominale de 100 florins.

Les *fonds romains* consistent en obligations d'une valeur nominale de 1000^f, rapportant 5 pour 100 d'intérêt; pour ces fonds, la cote de la Bourse indique le prix de 5^f de rente, c'est-à-dire le dixième du prix d'une obligation.

Dans les *fonds espagnols*, on distingue principalement le 3 pour 100 *intérieur* et le 3 pour 100 *extérieur*, c'est-à-dire se rapportant à la dette intérieure ou à la dette extérieure. Les premiers titres sont de 50, 150, 300, 1200 ou 24 000 piastres fortes (de 5^f, 40 chacune). La cote de la Bourse indique en piastres le prix de 5 piastres de rente.

Les *fonds napolitains* qui se négociaient à la Bourse consistaient en certificats, au porteur, de 25 ducats de rente. Le ducat est évalué 4^f,40. La cote de la Bourse donnait en ducats le prix de 5 ducats de rente.

Les *fonds grecs* le plus souvent cotés à la Bourse sont des obligations de 40 livres sterling (au change fixe de 25^f,60 la livre), rapportant 5 pour 100 d'intérêt. La cote de la Bourse indique en livres sterling le prix de 5 livres sterling de rente.

Les *fonds turcs* consistent en obligations de 1250^f, 2500^f, 5000^f, et 10000^f, rapportant 6 pour 100 d'intérêt. La cote de la Bourse indique en francs le prix de 6^f de rente dans ce mode de placement.

Les *fonds russes* qui se négocient à la Bourse de Paris consistent en obligations de 100, 500 et 1000 livres sterling (au change fixe de 25^f,50), rapportant 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 d'intérêt. La cote de la Bourse

indique en livres sterling le prix de 4 $\frac{1}{2}$ livres sterling de rente.

Les *fonds hollandais* négociés à la Bourse de Paris consistent en certificats, dont la valeur nominale est de 4000^f, et qui rapportent 2 $\frac{1}{2}$ pour 100 d'intérêt. La cote de la Bourse exprime en francs le prix de 2^f,50 de rente.

Les *fonds italiens* consistent en rentes 5 pour 100. La cote de la Bourse indique en francs le prix de 5^f de rente.

Les *fonds anglais* consistent en inscriptions de rentes analogues aux rentes françaises. Ils ne figurent pas sur la cote officielle de la Bourse de Paris; mais la cote de la Bourse de Londres est constamment consultée par les spéculateurs français, à cause de l'influence qu'elle ne peut manquer d'avoir sur les valeurs qui se négocient en France. Les fonds anglais dont le cours est le plus important à connaître sont les 3 pour 100 consolidés. Ils se cotent comme les fonds français, mais les fractions sont exprimées en huitièmes.

Les *fonds belges* sont des rentes 5 pour 100, 4 $\frac{1}{2}$ pour 100, 3 pour 100, et 2 $\frac{1}{2}$ pour 100, qui se cotent comme les rentes françaises.

FORAGE DES PUITES. Voy. PUITES, PUITES ARTÉSIENS.

FORCE, toute cause qui modifie ou tend à modifier l'état de mouvement ou de repos d'un point matériel. Lorsqu'un point matériel qui était en repos vient à se mouvoir, ou lorsque son mouvement vient à se modifier, soit quant à la direction, soit quant à la vitesse, ce ne peut être qu'en vertu d'une ou plusieurs causes qui lui sont étrangères (Voy. INERTIE); ces causes, quelle que soit leur nature, ont reçu le nom de *forces*. Mais il peut arriver que deux causes contraires restent sans effet, parce qu'elles se neutralisent mutuellement; il peut donc se faire aussi que des forces demeurent sans effet; ces considérations justifient la définition donnée ci-dessus. La pesanteur est une force, puisqu'elle tend sans cesse à faire tomber les corps à la sur-

face de la terre; l'effort que l'homme ou qu'un animal exerce sur un corps pour le pousser ou le tirer dans un sens quelconque est une force; l'effort qu'un ressort tendu exerce pour se détendre est une force; la pression qu'un liquide ou un gaz exerce contre les parois du vase qui le contient est une force; les attractions ou répulsions électriques et magnétiques sont des forces, etc., etc.

Lorsqu'un point matériel n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne et uniforme, à moins que ce point ne soit en repos. Cela résulte de ce qu'il ne peut de lui-même modifier sa vitesse, ni en grandeur ni en direction.

Il n'y a point de forces instantanées; une force emploie toujours un certain temps pour imprimer à un point matériel en repos une vitesse finie. A la vérité, ce temps est quelquefois si court qu'il peut nous paraître inappréciable: c'est ce qui arrive notamment dans le choc de deux corps; mais le temps, si petit qu'il soit, employé par une force à donner à un mobile une vitesse finie a toujours lui-même une grandeur finie. On ne concevrait pas, en effet, qu'une force pût produire ou modifier le mouvement d'un corps si la durée de son action était rigoureusement nulle.

Il y a à considérer dans une force: 1° *son point d'application*, c'est-à-dire la position géométrique du point matériel auquel elle est appliquée; 2° *sa direction*, c'est-à-dire la direction et le sens de la droite que suivrait le point matériel si, partant du repos, il cédait à l'action de cette force; 3° *son intensité*; on conçoit, en effet, qu'une force puisse être plus ou moins considérable; elle constitue donc une grandeur mathématique susceptible d'être mesurée, tout aussi bien que l'espace, le temps, etc. Nous n'avons aucune donnée sur la nature intime des forces, et nous ne les jugeons que par les effets qu'elles produisent; nous regardons par conséquent comme *égales* deux forces qui, appliquées à un même corps dans les mêmes circonstances, produisent le même effet. C'est ainsi que l'effort musculaire d'un animal peut être égal à un certain poids, si ces deux forces, appliquées à un même corps dans des circonstances identiques, produisent des effets identiques aussi. C'est cette considération qui permet de comparer les poids entre eux à l'aide de la BALANCE (Voy. ce mot), puis de comparer les forces aux poids à l'aide d'instruments spéciaux appelés DYNAMOMÈTRES (Voy. ce mot). Lorsque les forces ne peuvent être comparées directement aux poids, on les compare entre elles par les mouvements qu'elles produisent (Voy. MESURE DES FORCES).

Le résultat de la comparaison des forces aux poids est de rapporter les forces à l'unité de poids; ainsi *l'unité de force est le kilogramme*. A la vérité, ce choix suppose qu'une masse de métal pesant un kilogramme à Paris produirait partout la même flexion sur un même ressort dynamométrique, ce qui n'est pas tout à fait exact; car la pesanteur étant moindre à l'équateur qu'au pôle, il en résulte que la masse de métal pèserait plus au pôle qu'à l'équateur, et fléchirait par conséquent davantage le ressort d'un même dynamomètre en Laponie, par exemple, qu'en Egypte. Mais, premièrement, la différence est peu considérable. Si l'on suspendait un même corps pesant à un même dynamo-

mètre, au Spitzberg, par exemple, et à l'île de l'Ascension, les poids accusés par l'instrument dans ces deux localités ne différeraient pas entre eux de $\frac{1}{206}$ de leur valeur moyenne. Dans l'étendue d'un même État, la différence serait moindre encore, elle ne serait pas de $\frac{1}{1426}$ de la valeur moyenne des poids accusés, dans l'étendue de la France entière, depuis Dunkerque jusqu'à Toulon. On peut donc regarder cette différence comme tout à fait négligeable, dans la plupart des applications ordinaires. En second lieu, si l'on tenait à une précision plus grande, rien n'empêcherait de rapporter les indications du dynamomètre à un lieu déterminé du globe, par exemple à l'Observatoire de Paris. Pour cela il suffirait, dans chaque localité, de multiplier les indications de l'instrument par un certain coefficient, constant pour cette localité, mais variable d'une localité à l'autre, et que l'expérience fait connaître. Ainsi, les indications à l'Observatoire de Paris étant prises pour terme de comparaison, la valeur de ce coefficient serait :

Au Spitzberg.	0,997952
A Dunkerque.	0,999801
A Toulon.	1,000513
A l'île de l'Ascension.	1,002803

Mais une pareille précision n'est jamais nécessaire dans les applications de la Mécanique.

Il est essentiel de remarquer que ces différences dans le poids d'un même corps, qui sont accusées par le dynamomètre, ne le seraient point par une balance; car les variations de la pesanteur affectant également le corps considéré et le poids qu'on lui substitue dans le plateau de la balance pour pratiquer la méthode de la double pesée, ne sauraient être accusées par cet instrument.

On représente fréquemment les forces par des lignes droites, c'est-à-dire que, par le point d'application de chaque force, et dans la direction où elle s'exerce, on mène une droite dont la longueur contienne autant d'unités de longueur qu'il y a d'unités de force dans l'intensité de la force considérée, par exemple autant de millimètres que de kilogrammes. On dit alors que la force est représentée en grandeur et en direction par la droite; ce mode de représentation est d'un grand secours en Mécanique, parce qu'il fournit une interprétation géométrique des principales relations que les forces peuvent avoir entre elles, et conduit souvent à des constructions qui peuvent remplacer avantageusement le calcul.

Une force peut être constante ou variable, mais dans tous les cas elle agit toujours d'une manière continue sur le point matériel auquel elle est appliquée; et son effet, pendant un temps infiniment petit, est le même, soit que le point matériel parte du repos, soit qu'il soit déjà animé d'une certaine vitesse. C'est à l'aide de cette considération qu'on peut déterminer les lois du mouvement produit par une force donnée. (Voy. FORCE CONSTANTE, MOUVEMENT CURVILIGNE, MOUVEMENT PARABOLIQUE.)

Lorsque le point matériel auquel la force est appliquée fait partie d'un corps solide, le mouvement imprimé à ce point se transmet à tous les autres. La communication serait instantanée si le corps était rigoureusement invariable de forme; mais en

réalité elle demande toujours un certain temps. Il est nécessaire d'entrer à cet égard dans quelques détails. L'étude des phénomènes physiques a conduit à admettre que les corps sont composés de points matériels ou de molécules séparées les unes des autres par des intervalles, qui, bien qu'insaisissables à nos yeux aidés des meilleurs instruments d'optique, sont cependant considérables par rapport aux dimensions des molécules elles-mêmes. Ces molécules sont constamment soumises à deux systèmes de forces auxquelles on donne le nom de forces moléculaires. Les unes attractives, c'est-à-dire tendant à rapprocher les molécules les unes des autres, constituent ce qu'on nomme la cohésion; les autres répulsives, c'est-à-dire tendant à écarter les molécules les unes des autres, sont dues à ce que nous nommons la chaleur. Ces forces sont d'autant plus grandes que les molécules sont plus rapprochées. Dans l'état normal des corps solides, aucun de ces deux systèmes de forces ne l'emporte sur l'autre; mais si l'on rapproche les molécules, les forces répulsives l'emportent aussitôt et s'opposent à ce rapprochement; si l'on écarte au contraire les molécules, ce sont les forces attractives qui l'emportent aussitôt et s'opposent ainsi à l'écartement. Cela posé, lorsqu'une force extérieure à un corps solide agit sur une de ses molécules pour la déplacer, il nait de ce déplacement même un excès des forces attractives ou des forces répulsives, qui a pour effet de déplacer les molécules voisines; le déplacement de celles-ci fait naître à son tour des forces qui déplacent les molécules suivantes; et ainsi de suite, de sorte qu'en définitive le mouvement se trouve communiqué à tout le corps. On aurait une image grossière, mais sensible, de ce phénomène en plaçant en ligne droite sur un plan horizontal une série de boules réunies par des ressorts en hélices (ressorts à boudin) (fig. 1)

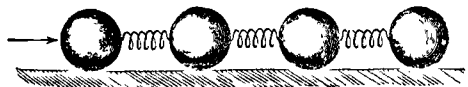


Fig. 1.

Si l'on pousse la première boule d'une manière continue vers la droite, le premier ressort se comprimera; quand la compression sera arrivée à une certaine limite, la seconde boule sera poussée à son tour; le second ressort se comprimera, poussera la troisième boule; et ainsi de suite, jusqu'à ce que tout le système soit en mouvement. Le même effet aurait lieu par l'extension des ressorts si, au lieu de pousser la première boule, on la tirait à gauche. Dans les deux cas on conçoit qu'il faudra un certain temps pour communiquer le mouvement à tout le système. Il en est de même pour le déplacement d'un corps solide par une force agissant sur l'une des molécules de ce corps. Seulement, le temps employé dans ce cas à la communication du mouvement à tout le corps est ordinairement insensible et peut presque toujours être négligé.

On admet comme un axiome que deux forces égales et opposées appliquées à un même point matériel se font équilibre, c'est-à-dire qu'elles peuvent être enlevées ou rétablies sans que l'état de repos ou de mouvement du point matériel soit altéré. On

admet généralement aussi comme un axiome que deux forces égales et opposées appliquées aux extrémités d'une droite rigide et inextensible se font équilibrer. Mais ce principe n'est pas, dans l'application, d'une vérité aussi absolue que le premier. Si, par exemple, on applique aux deux boules extrêmes de la série considérée plus haut, deux forces égales et opposées tendant à les écarter, on comprend bien que l'équilibre finirait par s'établir, mais les ressorts se seraient allongés. Il en est de même pour deux forces égales et opposées appliquées en deux points d'un corps solide, suivant la droite qui joint ces deux points; si le corps était primitivement en repos, il continuera à rester en repos; mais il résultera de l'application des deux forces une certaine déformation qui ne sera pas toujours négligeable; et si l'on venait à enlever ces deux forces, il en résulterait une nouvelle déformation, puisque les molécules reprendraient en général leurs positions primitives en vertu de l'élasticité. Ce n'est donc qu'en négligeant ces déformations qu'il est permis d'appliquer ainsi deux forces égales et contraires, ou de les enlever à volonté.

Sous cette réserve, les deux principes que l'on vient d'énoncer permettent d'en démontrer un autre dont on fait un usage continuel; il consiste en ce que : une force appliquée à un corps solide peut être transportée en un point quelconque de sa direction, pourvu que le second point d'application soit lié invariablement avec le premier. Soit F (fig. 2) une force appliquée en un point A d'un corps solide; et soit B un second point du même corps pris sur la direction de la force F. Au point B appliquons, dans la direction de la droite AB, deux forces de sens contraire F' et F'', de même intensité que F. En vertu du premier axiome, l'introduction de

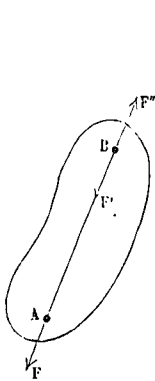


Fig. 2.

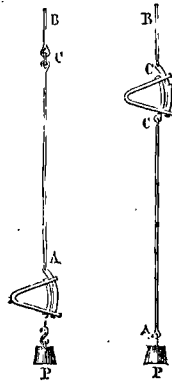


Fig. 3.

ces deux forces ne changera rien à l'état du système. Mais si les points A et B sont liés invariablement, on pourra, en vertu du second axiome, enlever les deux forces égales et opposées F et F''; et il ne restera que la force F', qui n'est autre chose que la force F transportée au point B. La proposition se trouve donc ainsi démontrée. Néanmoins quelques auteurs en font un *postulatum*; sans doute parce qu'ils n'admettent pas comme suffisamment évident ce que nous avons appelé le second axiome.

Au reste, cette proposition peut être facilement vérifiée par l'expérience. Soit AB (fig. 3) une corde

ou une tige rigide, interrompue en un point C par deux crochets. Si l'on fixe le point B, et qu'on suspende un poids P au point A, par l'intermédiaire d'un DYNAMOMÈTRE (Voy. ce mot), l'écart de cet instrument, s'il est bien gradué, indiquera le nombre de kilogrammes contenus dans P. Si maintenant on répète l'expérience en appliquant le poids P directement en A, et en interposant le dynamomètre entre les deux parties AC' et CB de la corde ou de la tige, on verra que l'instrument indique très-sensiblement le même nombre de kilogrammes. Cette expérience montre que l'effet du poids P est le même, soit qu'on l'applique en A, soit qu'on l'applique en C, par l'intermédiaire de la portion AC de la corde ou de la tige. Nous disons que le poids accusé est *sensiblement* le même dans les deux cas, attendu la petite différence que pourrait occasionner le poids de la portion AC de corde ou de tige qui s'ajoute au poids P dans la seconde expérience.

Dans le langage industriel, on donne souvent au mot *force* le sens de TRAVAIL. (Voy. ce mot. Voyez aussi CHEVAL-VAPEUR.)

FORCE ABSOLUE DE LA POUDRE, tension des gaz produits par la déflagration de la poudre dans un espace fermé qu'elle remplit entièrement. (Voy. POUDRE [Propriétés balistiques de la].)

FORCE ASCENSIONNELLE, excès de la poussée que reçoit un ballon de l'air ambiant sur le poids du ballon et du gaz qu'il renferme. (Voy. AÉROSTAT.)

FORCE CENTRIFUGE, réaction qu'un mobile, assujéti à décrire une courbe fixe, exerce contre cette courbe. C'est une force égale et opposée à la force centripète, mais qui n'est jamais appliquée au même point matériel. Concevons, par exemple, que le mobile soit un petit anneau enfilé dans une tringle curviligne; la force qui oblige le mobile à suivre la tringle est la force centripète, dirigée à chaque instant vers le centre de courbure de la trajectoire obligée; elle est appliquée à l'anneau; la force centrifuge est une force égale et contraire; mais elle est appliquée à la tringle.

Considérons encore comme exemple la fronde; la force qui oblige la pierre à décrire un cercle, ou une courbe fermée quelconque, est la force centripète, dirigée vers le centre de courbure de cette courbe; elle est appliquée à la pierre; la force centrifuge est une force égale et contraire, mais elle est appliquée au morceau de cuir qui retient la pierre. (Voy. FORCE CENTRIPÈTE.)

Les personnes qui admettent la FORCE D'INERTIE (Voy. ce mot) regardent la force centrifuge comme la composante normale de la force d'inertie.

I. La force centrifuge est dirigée suivant la normale principale à la trajectoire du mobile (celle qui est dans le plan osculateur), mais en sens opposé au centre de courbure, et sa valeur est

$$\frac{mv^2}{\rho},$$

c'est-à-dire le produit de la masse du mobile par le carré de sa vitesse, divisé par le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

II. La force centrifuge due à la rotation du globe terrestre a pour effet de diminuer la pesanteur à sa surface. Considérons, en effet, un point matériel, dont la masse est *m*, situé à la latitude λ à la surface

du globe, supposé sphérique. Soit p le poids du point matériel, P le poids qu'il aurait si le globe était immobile, R le rayon du globe, r celui du parallèle sur lequel le point considéré se trouve, g l'accélération due à la force p , et G l'accélération due à la force P , enfin ω la vitesse angulaire de la terre, et T la durée de sa révolution sur son axe. Soit M (fig. 1) la position du mobile sur le méridien PE ;

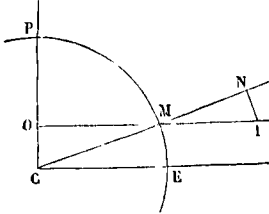


Fig. 1.

soit CE la trace de l'équateur, CP l'axe du globe, OM la trace du parallèle du point M ; joignons CM . La force centrifuge au point M a pour valeur $m\omega^2 r$; sa projection sur la normale CN est $m\omega^2 r \cos \lambda$; on a donc

$$p = P - m\omega^2 r \cos \lambda,$$

ou, comme $r = R \cos \lambda$,

$$p = P - m\omega^2 R \cos^2 \lambda.$$

Divisant par m , on obtient

$$g = G - R\omega^2 \cos^2 \lambda,$$

ou

$$g = G - g \cdot \frac{R\omega^2}{g} \cos^2 \lambda.$$

Or on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ et par conséquent } \frac{R\omega^2}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2};$$

d'ailleurs

$$2\pi R = 40\,000\,000^m, \quad g = 9^m,8088 \text{ et } T = 86164^{\text{sec}},$$

d'où

$$\frac{R\omega^2}{g} = \frac{1}{289};$$

par conséquent

$$g = G - \frac{1}{289} g \cdot \cos^2 \lambda,$$

d'où

$$g = \frac{G}{1 + \frac{1}{289} \cos^2 \lambda}$$

ou, à très-peu près,

$$g = G \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \lambda \right). \quad [1]$$

A l'équateur, il reste

$$g = G \left(1 - \frac{1}{289} \right).$$

Ainsi, l'accélération due à la pesanteur se trouve diminuée de $\frac{1}{289}$ de sa valeur par l'effet de la force centrifuge.

On peut remarquer que 289 étant le carré de 17, si la terre tournait 17 fois plus vite, ω^2 serait 289 fois plus grand; et il viendrait $g = 0$, c'est-à-dire que la pesanteur serait détruite à la surface du globe.

La forme elliptique du méridien modifie un peu ce résultat, en diminuant g d'une nouvelle quantité proportionnelle au carré de la latitude. (Voy. FIGURE DE LA TERRE.)

III. La force centrifuge peut occasionner la rup-

ture des pièces tournantes, dans les machines, et particulièrement celle des VOLANTS (Voy. ce mot), lorsque ces pièces sont d'un grand diamètre et animées d'une grande vitesse, parce que cette force qui tend à éloigner de l'axe les différentes parties dont la pièce tournante est composée, peut devenir plus grande que la résistance des assemblages. Mais il faut bien remarquer que lorsque la rupture a lieu, ce n'est pas la force centrifuge qui projette les débris. Dès qu'une partie de la pièce cesse d'être liée avec l'axe, elle cesse en même temps d'être soumise à la force centrifuge; mais elle est animée d'une vitesse tangentielle au cercle qu'elle décrivait, et en vertu de laquelle elle est lancée dans l'espace; ce qui fait dire qu'elle s'échappe par la tangente.

IV. On doit à M. Poncelet un fort beau théorème sur la composition des forces centrifuges. Il consiste en ce que, si une figure plane, supposée matérielle, tourne dans son plan autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, la résultante des forces centrifuges est la force centrifuge du centre de gravité, c'est-à-dire la force centrifuge qu'on obtiendrait si toute la masse était concentrée au centre de gravité. On le démontre aisément de la manière suivante. Soit O (fig. 2) la projection de l'axe de rotation, OX et OY deux axes rectangulaires menés par ce point dans le plan de la figure considérée, A un élément superficiel de cette figure, $OP = x$ et $OQ = y$ ses coordonnées par rapport aux deux axes, ρ la distance OM ,

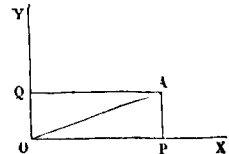


Fig. 2.

ω la vitesse angulaire. La force centrifuge qui anime l'élément A est, en appelant m sa masse, et v sa vitesse,

$$\frac{mv^2}{\rho},$$

ou, comme $v = \omega\rho$, $m\omega^2\rho$.

La projection de cette force sur l'axe des x est

$$m\omega^2\rho \cdot \cos \text{MOX} \text{ ou } m\omega^2\rho \cdot \frac{x}{\rho},$$

c'est-à-dire $m\omega^2 x$; et sa projection sur l'axe des y

est $m\omega^2\rho \cdot \sin \text{MOX}$ ou $m\omega^2\rho \cdot \frac{y}{\rho}$, c'est-à-dire $m\omega^2 y$. Si

donc on désigne par F_x la somme algébrique des projections sur l'axe OX de toutes les forces centrifuges appliquées aux différents éléments de la figure, et F_y la somme de leurs projections sur l'axe OY , on aura

$$F_x = \Sigma m\omega^2 x = \omega^2 \Sigma mx,$$

et

$$F_y = \Sigma m\omega^2 y = \omega^2 \Sigma my.$$

Appelons M la masse totale de la figure, et X et Y les coordonnées de son centre de gravité; nous aurons, par la propriété fondamentale de ce point,

$$\Sigma mx = MX, \text{ et } \Sigma my = MY;$$

par conséquent

$$F_x = M\omega^2 X, \text{ et } F_y = M\omega^2 Y.$$

Mais F_x est égal à la résultante de toutes les composantes des forces centrifuges, parallèles à OX ; et F_y est égal à la résultante de toutes leurs composantes parallèles à OY . La résultante F de ces deux forces est donc la résultante totale des forces centrifuges considérées. Or on a

$F = \sqrt{M^2\omega^4 X^2 + M^2\omega^4 Y^2} = M\omega^2 \sqrt{X^2 + Y^2} = M\omega^2 r$, en appelant r la distance du centre de gravité à l'axe. Cette expression est précisément celle que prendrait la force centrifuge du centre de gravité si toute la masse était concentrée en ce point; la proposition se trouve donc démontrée.

On peut étendre ce théorème à un corps à trois dimensions, lorsqu'il a un plan de symétrie passant par l'axe de rotation. En effet, on peut le décomposer par des plans perpendiculaires à l'axe, en tranches infiniment minces, à chacune desquelles on pourra appliquer le théorème ci-dessus; c'est-à-dire que les forces centrifuges de chaque tranche se réduiront à une force unique, égale à la force centrifuge de son centre de gravité, et exprimée par $M\omega^2 r$. Mais, à cause de la symétrie, les centres de gravité de toutes les tranches se trouveront dans le plan de symétrie passant par l'axe. Les résultantes partielles seront donc des forces perpendiculaires à l'axe et situées dans le plan de symétrie; elles auront une résultante perpendiculaire à l'axe et égale à leur somme, savoir à $\Sigma M\omega^2 r$, ou à $\omega^2 \Sigma Mr$. Mais si l'on appelle M , la masse totale du corps, et r_1 la distance de son centre de gravité à l'axe, on aura, en prenant les moments de toutes les tranches par rapport à un plan mené par l'axe de rotation perpendiculairement au plan de symétrie,

$$\Sigma Mr = M_1 r_1.$$

La résultante totale des forces centrifuges sera donc une force perpendiculaire à l'axe de rotation, située dans le plan de symétrie, et exprimée par

$$M_1 \omega^2 r_1,$$

c'est-à-dire égale à la force centrifuge du centre de gravité du corps, si l'on supposait que toute la masse y fût concentrée. Mais elle ne passera pas en général par le centre de gravité du corps, attendu que les forces $M\omega^2 r, M'\omega^2 r', \dots$, ne sont pas proportionnelles à M, M', \dots . Elle passerait au centre de gravité si toutes les distances r, r', \dots , étaient égales. Elle y passerait encore si le corps avait un second plan de symétrie perpendiculaire à l'axe, parce qu'elle serait évidemment dans ce plan, et dans le premier plan de symétrie, et serait ainsi dirigée suivant l'intersection de ces deux plans, laquelle contient le centre de gravité du corps.

Le théorème s'applique approximativement à un corps de forme quelconque, lorsqu'il est à une grande distance de l'axe, parce qu'alors les distances des centres de gravité des différentes tranches à l'axe diffèrent peu de la distance du centre de gravité du corps à ce même axe.

IV. On étend quelquefois la dénomination de force centrifuge et de force centripète à des forces ayant la direction de celles que nous venons de considérer, et la même expression $m\omega^2 r$, mais appliquées à un point matériel libre. Ce n'est alors qu'un moyen de simplifier les énoncés et les formules. C'est ainsi que dans la théorie du MOUVEMENT RELATIF il peut arriver que l'une des deux FORCES APPARENTES (Voy. ces mots) soit précisément la force centrifuge.

Lorsque l'on considère ainsi la force centrifuge appliquée à un point libre, mais animé d'un mouvement relatif par rapport à un système animé lui-même d'un mouvement de rotation uniforme, on peut avoir à calculer le travail de cette force; l'expression de ce travail est très-simple. — Soit M

(fig. 3) un point matériel faisant partie d'un système qui tourne autour d'un axe projeté en O avec une vitesse angulaire constante ω ; et concevons que ce mobile, indépendamment du mouvement d'en-

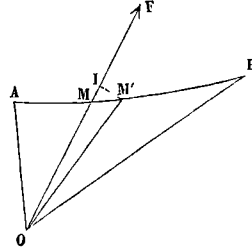


Fig. 3.

traînement qui lui est commun avec tout le système, ait un mouvement relatif par rapport à ce système, en vertu duquel il parcoure une courbe quelconque AB . Soit m la masse du point matériel considéré, $\rho = OM$ sa distance à l'axe de rotation à un instant quelconque, r_0 et r ses distances initiale et finale OA et OB à ce même axe. Si l'on imagine que le point M soit soumis à l'action de la force centrifuge $m\omega^2 \rho$, dirigée suivant le prolongement de OM , le travail élémentaire de cette force pour un déplacement MM' du mobile aura pour expression le produit de la force par la projection de l'élément MM' sur la direction de cette force. Décrivons du point O comme centre avec OM' pour rayon l'arc de cercle $M'I$; cet arc pourra être regardé comme une perpendiculaire abaissée du point M' sur le prolongement de OM ; en sorte que MI sera la projection de MM' sur OM . Le travail élémentaire cherché sera donc exprimé par

$$m\omega^2 \rho \cdot MI \text{ ou } m\omega^2 \rho d\rho,$$

attendu que MI , différence entre OM' et OM , est l'accroissement infiniment petit de OM ou de ρ . Le travail total de la force centrifuge entre les deux positions considérées sera donc

$$\int_{r_0}^r m\omega^2 \rho d\rho \text{ ou } \frac{1}{2} m\omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Or ωr est la vitesse d'entraînement du mobile arrivé en B , et ωr_0 est la vitesse d'entraînement qu'il possédait au point A ; si l'on appelle v et v_0 ces deux vitesses, on peut donc écrire pour le travail cherché

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2,$$

c'est-à-dire que le travail de la force centrifuge, dans le mouvement relatif considéré, est égal à l'accroissement de puissance vive dû à la seule vitesse d'entraînement.

Ce calcul trouve son application dans la théorie des TURBINES (Voy. ce mot).

L'une des forces fictives, ou apparentes, qu'il faut introduire pour traiter un mouvement relatif, comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, se réduit à la force centrifuge lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe. (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS.)

FORCE CENTRIFUGE COMPOSÉE, nom donné par quelques professeurs à la seconde force fictive ou apparente qu'il faut introduire pour pouvoir trai-

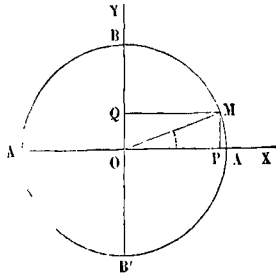
er le mouvement relatif comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu. Quand le mouvement d'entraînement est un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe, elle a pour expression

$$2m\omega V_r,$$

m désignant la masse du mobile, ω la vitesse angulaire dans le mouvement d'entraînement, et V_r la vitesse relative; elle est perpendiculaire à l'axe de rotation et à la vitesse relative; de plus, elle tend à s'opposer au mouvement de rotation. (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS.)

FORCE CENTRIPÈTE, force dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire d'un point matériel, et qui maintient le mobile sur cette trajectoire.

I. Si l'on considère d'abord un point matériel assujéti à parcourir, d'un mouvement uniforme, une circonférence de cercle, on reconnaît qu'il est soumis à une force, car sans cela son mouvement serait rectiligne et uniforme (Voy. INERTIE); on voit également que cette force est dans le plan du cercle; car il n'y aurait aucune raison pour qu'elle fût dirigée d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre. Soit $ABA'B'$ la circonférence parcourue par le mo-



bile, A sa position initiale, et M sa position au bout du temps t . Prenons pour axe des x le diamètre qui passe par le point A, et pour axe des y le diamètre perpendiculaire. Joignons OM. L'angle MOA sera proportionnel au temps t , puisque le mobile parcourant le cercle d'un mouvement uniforme, l'arc AM est lui-même proportionnel au temps. En désignant donc par ω l'arc décrit dans l'unité de temps par un point situé à 1^m du centre sur le rayon OM mené au mobile, ωt représentera l'arc parcouru par le même point dans le temps t , et servira de mesure à l'angle MOA.

Cela posé, projetons le mouvement sur les deux axes; en appelant x et y les coordonnées du point M, et r le rayon du cercle, on aura

$$x = OP = OM \cdot \cos MOA = r \cos \omega t \quad \left\{ \begin{array}{l} [1] \\ \text{et} \\ y = OQ = OM \cdot \sin MOA = r \sin \omega t. \end{array} \right.$$

Si l'on différentie ces coordonnées par rapport au temps, on aura les vitesses v_x et v_y des deux mouvements sur l'axe des x et sur l'axe des y . On trouve ainsi

$$\left. \begin{array}{l} v_x = -r\omega \sin \omega t, \\ v_y = +r\omega \cos \omega t. \end{array} \right\} [2]$$

Si l'on différentie de nouveau par rapport au temps, on obtient les accélérations des deux mouvements sur les axes; en appelant j_x et j_y ces accélérations, on trouve

$$\left. \begin{array}{l} j_x = -r\omega^2 \cos \omega t, \\ j_y = -r\omega^2 \sin \omega t. \end{array} \right\} [3]$$

En multipliant par la masse m du mobile, on ob-

tient l'expression des forces qui produiraient le mouvement de la projection du mobile sur chacun des axes, en supposant que ces projections aient la même masse que le mobile. Si F_x et F_y désignent ces forces, on a donc :

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -m\omega^2 r \cdot \cos \omega t, \\ F_y = -m\omega^2 r \cdot \sin \omega t. \end{array} \right\} [4]$$

Mais la force qui produirait le mouvement de la projection sur un axe, en lui supposant la même masse qu'au mobile, est la projection de la force qui produit le mouvement réel (Voy. PROJECTION DU MOUVEMENT). En appelant donc F la force qui produit le mouvement circulaire uniforme considéré, on voit que F_x et F_y sont les projections de F , ou, ce qui revient au même, les composantes rectangulaires de cette force. D'après les règles de la composition des forces, on aura donc d'abord

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{m^2 \omega^4 r^2 \cos^2 \omega t + m^2 \omega^4 r^2 \sin^2 \omega t},$$

ou $F = m\omega^2 r$, [5]

ce qui montre déjà que cette force est constante. De plus, si α désigne l'angle que sa direction fait avec l'axe des x , on aura

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-m\omega^2 r \sin \omega t}{-m\omega^2 r \cos \omega t} = \tan \omega t,$$

d'où $\alpha = \omega t$,

c'est-à-dire que cette force a la direction du rayon OM. Enfin, les valeurs [4] montrent que les composantes de F sont dirigées, l'une de A vers O, l'autre de B vers O; et que, par conséquent, la force F elle-même est dirigée de M vers O. Ainsi la force qui produit le mouvement circulaire et uniforme d'un point matériel est une force constante dirigée vers le centre du cercle, d'où le nom de force centripète.

Quant à sa valeur, elle est donnée par l'expression [5]. Mais si l'on appelle v la vitesse constante du mobile, on aura $v = r\omega$, d'où $\omega = \frac{v}{r}$ (Voy. ROTATION). En remplaçant ω par cette valeur, on trouve

$$F = \frac{mv^2}{r}, \quad [6]$$

c'est-à-dire que la valeur de la force centripète est égale au produit de la masse du mobile par le carré de sa vitesse, divisé par le rayon du cercle décrit.

II. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un mobile parcourant une trajectoire quelconque d'un mouvement varié, on peut toujours considérer ce mouvement, à partir de l'instant qui répond au temps t , pendant une durée dt infiniment petite, pendant laquelle la vitesse pourra être regardée comme constante; en même temps l'arc de trajectoire parcouru pendant le temps dt sera assez petit pour pouvoir être remplacé par l'arc correspondant du cercle osculateur; et si ρ est le rayon de courbure, le mobile pourra, pendant le temps dt , être regardé comme parcourant d'un mouvement uniforme un cercle de rayon ρ ; en sorte qu'en appelant v la vitesse du mobile, on aura pour l'expression de la force qui produit ce mouvement

$$F = \frac{mv^2}{\rho}, \quad [7]$$

c'est-à-dire que dans un mouvement curviligne varié quelconque, la force centripète qui maintient le mobile sur sa trajectoire a pour expression, à un instant donné quelconque, le produit de la masse

du mobile par le carré de sa vitesse à cet instant, divisé par le rayon de courbure au point de la trajectoire où se trouve alors le mobile. Et cette expression subsiste, que la trajectoire soit plane ou à double courbure.

III. On peut établir l'expression [7] d'une autre manière. Un point matériel qui parcourt d'un mouvement varié une trajectoire quelconque, est animé de deux accélérations simultanées : l'une dans le sens de la normale, et qui a pour expression $\frac{dv}{dt}$; l'autre dans le sens de la normale principale (située dans le plan osculateur), et qui a pour expression $\frac{v^2}{\rho}$ (Voy. ACCÉLÉRATION). Le mobile peut donc être regardé comme soumis à deux forces simultanées : l'une dirigée suivant la tangente, et ayant pour valeur $m \frac{dv}{dt}$; l'autre suivant la normale principale, c'est-à-dire vers le centre de courbure, et ayant pour expression $m \cdot \frac{v^2}{\rho}$; c'est la force centripète; la première est la force tangentielle.

Cette dernière est la seule qui puisse faire varier la vitesse; car si l'on applique au mobile le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot), on verra que l'accroissement de puissance vive est égal au travail de la force tangentielle seule, attendu que le travail de la force normale ou centripète est constamment nul, puisque cette force reste perpendiculaire au chemin décrit par son point d'application. Ainsi les deux forces dont nous parlons ont chacune leur rôle distinct : la force tangentielle fait varier la vitesse; la force centripète fait varier la direction du mouvement. La force qui produit le mouvement du point matériel est, à chaque instant, la résultante de la force tangentielle et de la force centripète. Il en résulte qu'elle est, à chaque instant, contenue dans le plan osculateur à la trajectoire au point occupé par le mobile à cet instant. Il en résulte réciproquement que, si un point matériel se meut sous l'action d'autant de forces qu'on voudra, qu'on les compose en une seule, puis, qu'on décompose la résultante en deux autres forces dont l'une soit tangente à la trajectoire et l'autre normale; la première sera la force qui fait varier la vitesse, c'est-à-dire $m \frac{dv}{dt}$; et l'autre sera la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, dirigée vers le centre de courbure.

La considération des forces tangentielle et normale est souvent utile dans les questions de Mécanique; elle a longtemps servi de base à la résolution des problèmes sur le mouvement des corps mus par des forces données; et la Mécanique d'Euler, publiée en 1736, est encore fondée sur leur emploi.

IV. On peut appliquer aux forces centripètes le théorème de M. Poncelet sur la composition des forces centrifuges (Voy. FORCE CENTRIFUGE).

FORCE CONSTANTE (EFFET D'UNE), mouvement imprimé à un point matériel par une force qui conserve constamment la même direction et la même intensité. On admet comme un principe expérimental, qu'une force agit sur un corps en mouvement comme elle agirait s'il était en repos, c'est-à-dire que le mouvement produit par la force, et celui qu'avait précédemment le mobile, coexistent sans se modifier mu-

tuellement. Ce principe est un de ceux qui servent de base à la Mécanique; il est clair qu'il n'a pu être vérifié directement pour un point matériel; mais, si on l'admet pour un point matériel, on en tire des conséquences susceptibles d'être vérifiées par l'expérience; et c'est en ce sens que ce principe peut être regardé comme un principe expérimental. La première conséquence tirée de ce principe, c'est que : si une force constante agit sur un point matériel partant du repos, son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré. En effet, pendant une première durée infiniment petite θ , le mobile décrira un élément de chemin qui sera dans la direction de la force, d'après la définition même de cette direction (Voy. FORCE); et au bout de ce temps θ il aura acquis une certaine vitesse infiniment petite u de même direction que l'élément décrit, c'est-à-dire de même direction que la force. — Pendant une seconde durée infiniment petite θ , le mobile, en vertu de l'inertie, conservera la vitesse acquise u , et, si elle existait seule, le mouvement serait uniforme; mais la force constante agissant sur le mobile comme s'il partait du repos, lui imprimera, dans sa direction, une nouvelle vitesse u ; les deux mouvements ayant lieu simultanément d'après le principe expérimental ci-dessus, les deux vitesses s'ajouteront; et, à la fin du temps total 2θ , la vitesse acquise sera $2u$. Pendant une troisième durée infiniment petite, le mobile conservera la vitesse acquise $2u$; mais la force constante lui imprimant dans sa direction une nouvelle vitesse u , les deux mouvements se composeront encore; les vitesses $2u$ et u s'ajouteront, en sorte qu'à la fin du temps total 3θ , la vitesse acquise sera $3u$. En continuant ce raisonnement, on verrait de même que les éléments de chemin successivement décrits seront tous de même direction, et qu'au bout du temps total $n\theta$, la vitesse acquise sera nu ; en sorte que si l'on désigne par t ce temps total et par v la vitesse totale acquise, on aura

$$t = n\theta \text{ et } v = nu,$$

d'où l'on tire
$$\frac{v}{t} = \frac{u}{\theta}.$$

Or, la force étant constante, la vitesse u qu'elle imprime au mobile pendant la durée infiniment petite θ est, comme on l'a dit, une quantité constante; le rapport $\frac{u}{\theta}$ est donc aussi une quantité constante; et en la désignant par j , on peut écrire

$$\frac{v}{t} = j, \text{ d'où } v = jt;$$

c'est-à-dire que la vitesse est proportionnelle au temps, ce qui est la définition du mouvement uniformément accéléré lorsqu'il n'y a pas de vitesse initiale (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ).

Le mouvement serait encore uniformément accéléré si le mobile, au lieu de partir du repos, avait une vitesse initiale v_0 de même direction que la force. En effet, la force agissant sur le mobile animé de cette vitesse initiale, comme elle agirait s'il était en repos, lui imprimera au bout du temps t une vitesse exprimée par jt ; et, puisque les deux vitesses simultanées sont de même sens, elles s'ajouteront, et, en appelant toujours v la vitesse du mobile au bout du temps t , on aura

$$v = v_0 + jt,$$

équation du mouvement uniformément accéléré.

Le mouvement serait uniformément retardé si la vitesse initiale v_0 était de sens contraire à la force constante; car celle-ci imprimerait toujours au mobile dans le temps t une vitesse exprimée par jt ; mais les vitesses simultanées v_0 et jt étant de sens contraire se retrancheraient, et l'on aurait, en appelant v la vitesse du mobile,

$$v = v_0 - jt,$$

ce qui est l'équation du mouvement uniformément retardé.

On peut donc dire d'une manière générale que : si une force constante agit sur un mobile animé d'une vitesse initiale de même direction que la force, quel que soit d'ailleurs son sens, le mouvement sera rectiligne et uniformément varié.

Réciproquement : si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne et uniformément varié, il est soumis à une force constante, dont la direction est celle de la vitesse du mobile si le mouvement est uniformément accéléré, ou contraire à celle de la vitesse si le mouvement est uniformément retardé. En effet, de ce que le mouvement n'est pas uniforme, on peut d'abord conclure que le mobile est soumis à l'action d'une force (Voy. FORCE). En second lieu, cette force est constamment dirigée suivant la droite que décrit le mobile; car si, pendant un temps aussi court qu'on voudra, la force prenait une direction différente, elle imprimerait au mobile pendant ce temps une vitesse de même direction qu'elle, et qui, se composant avec la vitesse déjà acquise par le mobile, produirait une vitesse résultante dont la direction différerait de la droite jusque-là suivie par le mobile. Enfin, de ce que le mouvement est uniformément varié, il suit que la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux; dans un même temps infiniment petit θ la vitesse varie donc toujours d'une même quantité infiniment petite u . Or, cette variation est uniquement due à l'action de la force; cette action est donc toujours la même pendant un même temps infiniment petit; ce qui revient à dire que la force est constante. Si la vitesse va en croissant, c'est que la force est de même direction qu'elle; si la vitesse va en diminuant, c'est que la force est de sens contraire. La PESANTEUR (Voy. ce mot) offre un exemple d'une force constante en intensité et en direction, du moins à une faible distance de la surface du globe.

Lorsqu'une force constante agit sur un mobile animé d'une vitesse initiale de direction différente, le mouvement n'est plus rectiligne, c'est un MOUVEMENT PARABOLIQUE (Voy. ce mot).

FORCE D'INERTIE. Quelques auteurs désignent par ce nom une force égale et opposée à celle qui produit l'accélération d'un mobile. Dans leur manière de voir, une force ne peut modifier l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel sans faire naître aussitôt une résistance égale et opposée, qui est la force d'inertie, et qui pour eux est distincte de l'inertie elle-même. Toutes les questions de mouvement sont ainsi des questions d'équilibre entre les forces accélératrices ou motrices et les forces d'inertie. Ce point de vue n'est pas adopté aujourd'hui par les mécaniciens. Et, en effet, la considération de la force d'inertie est au moins inutile, puisque tous les phénomènes de mouvement peuvent s'expliquer sans son secours; et de plus elle complique le langage et prête à l'équivoque en

laissant croire que l'inertie est une force. Du reste, l'idée de la force d'inertie n'est pas nouvelle; cette force est désignée dans Newton sous le nom de *vis insita*.

FORCE NOMINALE DES MACHINES À VAPEUR, mesure du travail des machines à vapeur à l'aide de diverses unités. Au lieu d'évaluer le travail de ces machines en chevaux-vapeur de 75 kilogrammètres sur l'arbre de couche, ce qui serait rationnel et rendrait les machines facilement comparables, l'usage s'est introduit, surtout dans la marine, de rapporter la force de ces appareils à diverses unités souvent arbitraires, ce qui a jeté dans l'évaluation dont il s'agit une confusion déplorable. Les premières machines à vapeur introduites en France étaient des machines de Watt à basse pression. Si, conformément aux notations adoptées dans la marine militaire française, on désigne par a le nombre des cylindres, par D le diamètre de chacun d'eux, par C la course du piston, par N le nombre de tours de la manivelle par minute, par p la pression moyenne effective sur le piston, exprimée en kilogrammes par centimètre carré, et par A un coefficient de réduction, le travail de la machine exprimé en chevaux de 75 kilogrammètres sur l'arbre de couche aura pour expression

$$\frac{p \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 \cdot 10000 \cdot C \cdot \frac{2N}{60} \cdot a \cdot A}{75}$$

$$\text{ou } \frac{523,6 \cdot \frac{a}{2} \cdot D^2 \text{ CN } p \cdot A}{75} \quad [1]$$

(Il est commode de laisser $\frac{a}{2}$ dans la formule, parce que le nombre des cylindres étant très-souvent égal à 2, le facteur $\frac{a}{2}$ se réduit à l'unité.)

Si, au lieu d'évaluer la pression moyenne sur le piston d'après la pression dans la chaudière, on fait usage de l'INDICATEUR DE WATT (Voy. ce mot), cette pression est ordinairement donnée en hauteur de mercure, et exprimée par un certain nombre de centimètres; la formule devient alors, en remplaçant p par $\frac{p \cdot 1^{\text{m}},033}{76}$,

$$\frac{7,117 \cdot \frac{a}{2} \cdot D^2 \text{ CN } p \cdot A}{75} \quad [2]$$

Mais il faut remarquer que le coefficient A ne doit pas avoir la même valeur dans les deux formules; cette valeur est en général 0,50 si l'on se sert de la formule [1], et 0,75 si l'on emploie la formule [2].

Enfin, au lieu d'un seul coefficient de réduction ou de rendement, on en emploie souvent deux, c'est-à-dire que l'on commence par diminuer p dans la formule [2] d'un certain nombre de centimètres, 6 ordinairement, pour représenter les résistances indépendantes de la pression sur les pistons, et l'on affecte la formule entière d'un autre coefficient A , auquel on attribue d'ordinaire la valeur 0,80. La formule devient alors

$$\frac{7,117 \cdot \frac{a}{2} \cdot D^2 \text{ CN } (p - G) \cdot A}{75} \quad [3]$$

Telles sont les formules qui servent à évaluer le

travail des machines que nous considérons, en chevaux de 75 kilogrammètres sur l'arbre de couche.

Cela posé, nous pouvons essayer de faire comprendre les divers modes d'évaluation qui se sont introduits dans la marine. Les premières machines de Watt qui ont servi de terme de comparaison étaient des machines à allure lente, marchant à 1^{me}, 3 avec une introduction fixe égale aux 0,87 de la course du piston; la pression moyenne sur les pistons (Voy. EFFORT MOYEN) pouvait être évaluée à 8 livres $\frac{1}{2}$ anglaises, ce qui représente 44 centimètres de mercure. Watt en déduisait, pour tenir compte des résistances secondaires, 1 livre $\frac{1}{2}$, soit 7^{me}, 8, ce qui réduisait la pression moyenne à 36^{me}, 2. Si, dans la formule [2] ci-dessus, on remplace pA par 36^{me}, 2 on obtient la formule suivante :

$$\frac{aD^2 CN}{0,59}, \quad [4]$$

adoptée dès cette époque en France, et qui est connue sous le nom de *formule du gouvernement*, de *formule de Watt*, ou de *formule nominale*. Elle donne ce qu'on nomme la *force nominale* des machines considérées.

Dans cette formule N désigne le nombre de tours que la machine doit faire en marchant à toute vapeur, d'après le projet de l'ingénieur qui l'a construite. Si on remplace cette valeur par le nombre de tours que fait réellement la machine, on a ce qu'on appelle la *formule nominale réalisée*; elle donne ce qu'on est convenu d'appeler la *force nominale réalisée*.

Il est aisé de voir que la formule du gouvernement donne une évaluation trop forte, car le produit pA , c'est-à-dire 44.0,75 ou 33^{me}, y est remplacé par 36,2; cependant, si l'inconvénient se bornait à cette différence, il serait peu considérable. Mais cette formule a été appliquée indistinctement à toute espèce de machines à vapeur; c'est-à-dire qu'on a continué à appliquer la formule [4] à des machines qui, au lieu de marcher à 1^{me}, 3, marchaient à 2 atmosphères ou 2^{me}, 75, sans remarquer que la pression moyenne devait augmenter en conséquence. Il en résulte que la *force nominale*, réduite de la formule du gouvernement, n'a plus aucun rapport avec le travail en chevaux de 75 kilogrammètres effectué sur l'arbre de couche. En d'autres termes, les *chevaux* énoncés dans l'expression de la force nominale ne sont plus des chevaux de 75 kilogrammètres, mais des chevaux d'une valeur beaucoup plus considérable. Pour obtenir la valeur en kilogrammètres du cheval nominal, il faudrait diviser la formule [2] par la formule [4] et multiplier par 75, ce qui donnerait

$$2,1.pA.$$

Si, par exemple, on suppose que la machine marche à 2^{me}, 75 avec une introduction fixe égale aux 0,65 de la course du piston, on trouvera pour p environ 120^{me}; et en prenant pour A le nombre 0,75, on obtiendra pour la valeur du cheval nominal 189 kilogrammètres. On voit que la valeur du cheval nominal change ainsi d'une espèce de machine à une autre.

C'est ici le lieu d'expliquer ce qu'on entend par *cheval de basse pression*. Lors de l'introduction des machines à vapeur dans la marine militaire en

France, les épreuves de ces appareils se faisaient à outrance, et la pression moyenne sur les pistons, au lieu de conserver la valeur 44^{me} répondant à la marche normale à toute vapeur, était portée jusqu'à 63^{me}. D'après ce qui a été dit plus haut, pour déduire de la formule du gouvernement la force nominale d'une machine dans laquelle la pression moyenne sur le piston était p (en centimètres de mercure), il eût fallu diviser par 44 — 7,8, ou 36,2 et multiplier par $p - 7,8$. Au lieu d'opérer ainsi, on confondit la marche à toute vapeur avec la marche à outrance, et en conséquence on remplaça 44 par 63, et, négligeant en outre le terme soustractif, on multiplia la formule du gouvernement par $\frac{p}{63}$; par l'effet de cette double erreur on obtint la formule

$$\frac{aD^2 CN}{0,59} \cdot \frac{p}{63} \text{ ou } \frac{aD^2 CN p}{37,17}, \quad [5]$$

dans laquelle N est le nombre de tours réalisés. Cette formule exprime la force nominale de la machine en *chevaux de basse pression*, dont le nom rappelle l'origine de ce mode d'évaluation. La valeur du cheval de basse pression en kilogrammètres sur l'arbre de couche s'obtient en divisant la formule [2] par la formule [5]; on trouve que, pour les machines à allure lente où le coefficient de rendement A peut être porté à 0,82, la valeur du cheval de basse pression est d'environ 107 kilogrammètres; pour les machines à allure rapide, dans lesquelles on ne peut pas prendre plus de 0,75 pour la valeur de A , le cheval de basse pression descend à 97 kilogrammètres. Quoique la force nominale en chevaux de basse pression soit fort différente de la force réelle, quelques personnes continuent à se servir de ce mode d'évaluation, surtout lorsqu'il ne s'agit que de comparaisons entre les machines, parce qu'en somme cette force nominale est sensiblement proportionnelle à la force effective.

Dans les usines où se construisent les machines à vapeur destinées à la marine marchande, on adopte arbitrairement un nombre de kilogrammètres pour la valeur du travail d'un cheval sur l'arbre de couche, c'est-à-dire qu'on se sert de la formule [1], dans laquelle on remplace 75 par 100, 200 ou tout autre nombre adopté une fois pour toutes dans l'usine. Ce nombre est inscrit à côté de la force nominale de la machine sur le permis de navigation.

Dans beaucoup de marchés passés avec les constructeurs, la force nominale est rapportée à l'action de la vapeur sur les pistons et non plus au travail sur l'arbre de couche. La valeur du cheval employé est alors de 200, 225, 250 kilogrammètres; et la formule qui sert à évaluer la force nominale n'est autre chose que la formule [2] dans laquelle on a supprimé le coefficient de rendement A , et remplacé 75 par l'un des nombres 200, 225 ou 250. La lettre N représente toujours le nombre de tours réalisés.

La force nominale des machines de Woolf à deux cylindres se calcule d'après cette remarque que le travail est le même en définitive que si le volume de vapeur introduit dans le petit cylindre eût été introduit dans le grand et que la détente se fût effectuée dans ce grand cylindre. En conséquence on évalue la force nominale en ne tenant compte

que des grands cylindres, et en appliquant la formule du gouvernement.

Pour les machines à haute pression on s'est contenté jusqu'en 1858 d'évaluer leur force nominale à raison d'un cheval pour 1^m,20 de surface de chauffe. On trouve que le cheval nominal dans ces machines répond à peu près au cheval de basse pression, et vaut par conséquent 107^{km} environ sur l'arbre de couche et 130^{km} sur les pistons. Depuis 1858 on emploie la formule du gouvernement en l'affectant d'un coefficient égal au rapport entre la pression effective sous laquelle l'appareil fonctionne, et la pression des machines à moyenne pression de la même époque. Ainsi pour les chaloupes canonnières on prend pour coefficient

$$\frac{3^{1m}}{2^{1m},3} \text{ ou } 1,3;$$

pour les batteries flottantes on prend

$$\frac{4^{1m}}{2^{1m},75} \text{ ou } 1,45.$$

Le dénominateur du second rapport diffère de celui du premier, parce qu'entre l'époque de la commande des premiers appareils et celle des derniers, la charge réglementaire des soupapes de sûreté des chaudières à moyenne pression a été portée de 2^{1m},3 à 2^{1m},75.

En résumé, la force nominale des machines de la marine militaire déduite de la formule du gouvernement répond en général à 135 ou 180 kilogrammètres par cheval sur l'arbre de couche, soit 180 à 240 sur les pistons.

La force nominale réalisée représente 135 à 165 kilogrammètres par cheval sur l'arbre de couche, soit 180 à 220 sur les pistons.

Le cheval de basse pression répond à 107 kilogrammètres sur l'arbre, soit 130 kilogrammètres sur les pistons.

La force nominale des machines de la marine marchande varie de 100 à 200 kilogrammètres par cheval sur l'arbre de couche, soit de 200, 225 ou 250 kilogrammètres sur les pistons, suivant le constructeur.

La force nominale des machines Woolf à deux cylindres représente de 150 à 190 kilogrammètres sur l'arbre de couche, soit 200 à 250 sur les pistons.

La force nominale des machines à haute pression représente de 190 à 225 kilogrammètres sur l'arbre de couche, soit 250 à 300 sur les pistons.

Il serait vivement à désirer que le gouvernement fit cesser la confusion qui résulte de ces divers modes d'évaluation, et obligeât les constructeurs à calculer la force des machines en chevaux de 75 kilogrammètres sur l'arbre de couche, indépendamment des conditions de pression et de détente qui leur seraient imposées.

Du reste, la même confusion règne en Angleterre. Dans la marine militaire, on adopte la formule

$$\frac{a D^2 V}{6000}, \quad [6]$$

connue sous le nom de *formule de l'amirauté*, dans laquelle a représente le nombre des cylindres, D le diamètre des pistons en pouces anglais (de 0^m,0254), et V la vitesse des pistons en pieds (de 0^m,3048) par minute. Cette formule donne la force nominale en chevaux de 76 kilogrammètres. En la traduisant

en mesures françaises et multipliant par $\frac{76}{75}$, on retombe sur la *formule du gouvernement*. Beaucoup de constructeurs de machines destinées à la marine du commerce font usage de la formule [6]; mais beaucoup d'autres adoptent, comme en France, des évaluations arbitraires. (Les constructeurs des bords de la Clyde augmentent de $\frac{1}{15}$ de sa valeur l'effort moyen, et par suite la force nominale donnée par la formule [6].)

En Amérique on emploie la formule

$$\frac{a (D - 1)^2 V}{5640}, \quad [7]$$

dans laquelle les lettres ont la même signification que dans l'expression [6]. Les formules [6] et [7] ne coïncident que pour des diamètres compris entre 0^m,8 et 0^m,9. Si le diamètre est moindre, la formule américaine donne une force nominale moindre que la formule anglaise; l'inverse a lieu pour des diamètres supérieurs. Mais dans les conditions ordinaires la différence est généralement peu considérable.

(Voy., pour plus de détails, le *Traité élémentaire des appareils à vapeur de navigation*, par M. A. Ledieu, pages 496 et suiv.)

FORCE TANGENTIELLE, force dirigée suivant la tangente à la trajectoire que décrit son point d'application. C'est cette force qui fait varier la vitesse, et elle a pour mesure

$$mj \text{ ou } m \frac{dv}{dt};$$

m désignant la masse du mobile, et j ou $\frac{dv}{dt}$ son ACCELÉRATION (Voy. ce mot).

Quel que soit le mouvement d'un point matériel, on peut toujours regarder ce mobile comme soumis à deux forces: la *force tangentielle*, qui fait varier sa vitesse, et la *force centripète*, qui le maintient sur sa trajectoire (Voy. FORCE CENTRIPÈTE).

FORCES APPARENTES, forces fictives qu'il faut introduire lorsqu'on veut traiter un mouvement relatif comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu. (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS.)

FORCES ÉQUIVALENTES, forces qui, appliquées à un même corps solide, produisent les mêmes effets. Le caractère des systèmes de forces équivalentes est que la somme de leurs projections sur trois axes rectangulaires est la même sur chacun de ces axes, et que la somme de leurs moments par rapport à ces mêmes axes est aussi la même pour chacun d'eux. Considérons, en effet, deux systèmes de forces équivalentes, que nous désignerons par F et par φ . Puisque le système des forces φ produit le même effet que le système des forces F , un système de forces égales et opposées aux forces φ , et que nous désignerons par $-\varphi$, détruirait l'effet des forces F comme il détruirait l'effet des forces $+\varphi$; il faut donc qu'il puisse y avoir équilibre entre le système des forces F et le système des forces $-\varphi$. On doit donc avoir, en vertu des 6 conditions de l'équilibre (Voy. ÉQUILIBRE), et en remarquant que deux forces égales et opposées ont des projections égales et de signe contraire, et des moments égaux et de signe contraire aussi,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x - \Sigma \varphi_x &= 0, \\ \Sigma F_y - \Sigma \varphi_y &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x - \Sigma \varphi_x &= 0, \\ \Sigma \mathcal{N}_x F - \Sigma \mathcal{N}_x \varphi &= 0, \\ \Sigma \mathcal{N}_y F - \Sigma \mathcal{N}_y \varphi &= 0, \\ \Sigma \mathcal{N}_z F - \Sigma \mathcal{N}_z \varphi &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \Sigma \varphi_x, \quad \Sigma F_y = \Sigma \varphi_y, \quad \Sigma F_z = \Sigma \varphi_z, \\ \Sigma \mathcal{N}_x F &= \Sigma \mathcal{N}_x \varphi, \quad \Sigma \mathcal{N}_y F = \Sigma \mathcal{N}_y \varphi, \quad \Sigma \mathcal{N}_z F = \Sigma \mathcal{N}_z \varphi, \end{aligned}$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

Réciproquement, si ces 6 relations sont satisfaites, il y aurait équilibre entre les forces F et les forces $-\varphi$; il en résulte que les forces $+\varphi$, qui feraient aussi équilibre aux forces $-\varphi$, produiraient le même effet que les forces F ; et par conséquent le système des forces φ est équivalent au système des forces F .

Ces conditions d'équivalence sont indépendantes de l'état de repos ou de mouvement du corps auquel les deux systèmes de forces sont appliqués.

FORCES EXTÉRIEURES, forces autres que les actions mutuelles exercées par les molécules d'un même corps. Les forces extérieures qui peuvent agir sur un corps sont la pesanteur, les attractions ou répulsions exercées par d'autres corps, les pressions du milieu ambiant, les pressions exercées par les corps en contact avec celui que l'on considère, etc.

FORCES MUTUELLES, forces égales et contraires que deux points matériels exercent mutuellement l'un sur l'autre. Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une certaine action, en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction (*Voy. RÉACTION*), le point B exerce à son tour sur le point A une réaction égale et contraire. Ces deux forces, toutes deux attractives ou toutes deux répulsives, sont ce qu'on appelle deux forces mutuelles. Dans un système matériel, on a à considérer, indépendamment des **FORCES EXTÉRIEURES** (*Voy. ce mot*), les forces moléculaires ou mutuelles que les points matériels du système exercent deux à deux les uns sur les autres.

Quand on projette sur un même axe toutes les forces d'un système pour faire la somme de ces projections, les forces moléculaires disparaissent d'elles-mêmes comme étant mutuelles et donnant, deux à deux, des projections égales et de signe contraire dont la somme algébrique est nulle.

Quand on fait la somme des moments, par rapport à un axe quelconque, de toutes les forces appliquées à un même système, les forces moléculaires disparaissent encore comme étant mutuelles, et donnant deux à deux des moments égaux et de signe contraire (*Voy. MOMENT*) dont la somme algébrique est nulle.

Le travail élémentaire de deux forces mutuelles est égal au produit de l'une de ces forces par la quantité dont la distance de leurs points d'applica-

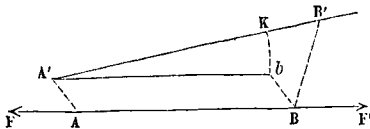


Fig. 1.

tion a varié. Soient, en effet, F et F' (fig. 1) deux forces mutuelles, appliquées en A et en B , et que nous supposons répulsives pour fixer les idées. Supposons que les points d'application se soient dé-

placés d'une quantité très-petite, et soient venus l'un en A' , l'autre en B' ; il s'agit d'évaluer la somme des travaux élémentaires des forces F et F' dans ce déplacement. On peut imaginer que ce déplacement se soit opéré par trois mouvements simultanés: l'un, par lequel la droite AB serait venue se placer parallèlement à elle-même en $A'b$, sans changer de grandeur; le second, par lequel la droite $A'b$ aurait tourné autour du point A' pour venir en $A'K$, en conservant toujours sa grandeur; et enfin le troisième, par lequel le point A' demeurant immobile, le point K aurait marché dans la direction $A'K$ pour venir en B' . Le point B' aurait ainsi parcouru trois chemins simultanés Bb , bK et KB' . Or on sait que le travail élémentaire d'une force dans le mouvement réel ou résultant est égal à la somme algébrique de ses travaux élémentaires dans les mouvements composants (*Voy. TRAVAIL*). On pourra donc, pour obtenir la somme des travaux des deux forces F et F' dans le mouvement réel, l'évaluer dans chacun des trois mouvements qui viennent d'être considérés, et faire la somme. Quand AB se transporte en $A'b$, le travail de F est $F.AA' \cos A'AF$, et le travail de F' est $F'.Bb \cos bBF'$, ou $-F'.Bb \cos A'AF$, attendu que les angles $A'AF$ et bBF' sont supplémentaires; mais AA' et Bb sont égaux; donc la somme des travaux élémentaires des deux forces dans ce premier mouvement composant est égale à zéro. Quand $A'b$ vient en $A'K$, le travail de F est nul, puisque son point d'application A' ne se déplace pas; le travail de F' est nul aussi, parce que cette force, dirigée de A' vers le point d'application de F' , reste perpendiculaire à l'élément de chemin décrit par son point d'application. Dans le troisième mouvement composant, le travail de F est encore nul, puisque A' ne se déplace pas; et le travail de F' , dirigé alors suivant $A'K$, est égal à $F'.KB'$. La somme des travaux élémentaires des deux forces mutuelles se réduit donc à $F'.KB'$, c'est-à-dire à l'une des deux forces mutuelles, multipliée par la quantité dont la distance de leurs points d'application a varié.

Si, les forces étant répulsives, comme nous l'avons supposé, la distance des deux points a augmenté, le travail élémentaire est positif. Si, les forces étant répulsives, la distance des deux points avait diminué, le point B' tomberait entre A' et K , et le travail élémentaire serait négatif. Ce serait l'inverse si les forces étaient attractives; le travail est alors positif quand les points se rapprochent, et négatif quand ils s'éloignent.

Le travail élémentaire de deux forces mutuelles est nul quand leurs points d'application, en se transportant dans l'espace, restent à la même distance l'un de l'autre. C'est ce qui arrive dans un corps rigoureusement solide.

Le travail total de deux forces mutuelles peut être positif ou négatif, suivant la nature des éléments dont il se compose. Il est nul lorsque les deux points, après s'être d'abord écartés ou rapprochés, ont repris leur distance initiale, parce que la somme des éléments de travail positifs est alors précisément égale à la somme des éléments dé travail négatifs. C'est ce qui arrive dans les corps élastiques lorsque, après avoir subi une déformation quelconque, ils ont repris leur forme primitive.

La démonstration donnée ci-dessus est due à Coriolis. Mais le théorème sur le travail de deux

forces mutuelles peut encore s'établir par la méthode suivante, qui est au fond celle adoptée par M. Bélanger. — Soient F et F' (fig. 2) les deux forces mutuelles, A et B leurs points d'application primi-

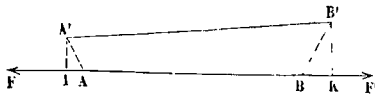


Fig. 2.

tifs, A' et B' la position de ces mêmes points après le déplacement. Abaissons A'I et B'K perpendiculaires sur la direction commune des deux forces; on aura

$$d\mathcal{C}F = F \cdot AI \text{ et } d\mathcal{C}F' = F' \cdot BK;$$

d'où

$$d\mathcal{C}F + d\mathcal{C} \cdot F = F \cdot AI + F' \cdot BK = F (AI + BK) = F (IK - AB).$$

Or $IK = A'B \cos \alpha$, en appelant α l'angle de A'B' avec AB. Cet angle étant très-petit, on peut remplacer $\cos \alpha$ par 1, en négligeant les quantités très-petites du second ordre et des ordres supérieurs; on peut donc écrire

$$d\mathcal{C} \cdot F + d\mathcal{C} \cdot F' = F (A'B' - AB),$$

ce qui démontre le théorème pour le cas que l'on considère. Il est facile de modifier la démonstration de manière à l'appliquer successivement à tous les cas.

FORCE VIVE, produit de la masse d'un point matériel par le carré de sa vitesse; et, par extension, somme des produits analogues pour tous les points matériels d'un même système. Avant Leibnitz on prenait pour mesure d'une force, agissant sur un mobile partant du repos, non pas le produit de la masse par l'accélération comme on le fait aujourd'hui, mais le produit mv de la masse par la vitesse; ces deux expressions sont en effet proportionnelles quand le mobile part du repos (Voy. FORCE CONSTANTE). Leibnitz, considérant l'effet d'une force sur un mobile en mouvement, soutint le premier qu'il fallait prendre pour mesure, dans ce cas, le produit de la masse par le carré de la vitesse. Huyghens, Jean et Daniel Bernoulli se rangèrent à son opinion; tous les géomètres cartésiens se rangèrent à l'opinion contraire; la querelle dura plus d'un demi-siècle. C'est d'Alembert qui y mit fin dans l'Encyclopédie. Comme Leibnitz, en établissant une distinction entre les forces agissant sur un mobile en repos, ainsi que de simples pressions, et les forces agissant sur un corps en mouvement, avait appelé les premières *forces mortes* et les dernières *forces vives*; le nom de force vive resta au produit mv^2 de la masse du mobile par le carré de sa vitesse, bien que l'on eût reconnu que ce produit était la mesure non pas d'une force, mais de la quantité à laquelle on a donné depuis le nom de TRAVAIL (Voy. ce mot).

Cependant quelques auteurs modernes, et en particulier Coriolis, ont donné le nom de force vive à la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse, c'est-à-dire à la quantité $\frac{1}{2}mv^2$. Leur motif était que c'est toujours cette moitié qui entre dans les calculs, et qu'elle a d'ailleurs une signification qui lui est propre; car, si l'on y remplace la masse

m par sa valeur $\frac{p}{g}$, p désignant le poids du mobile le produit en question peut s'écrire

$$p \cdot \frac{v^2}{2g},$$

et, sous cette forme, on voit qu'il représente le produit du poids du mobile par la hauteur due à sa vitesse. Malgré cette remarque, beaucoup d'auteurs et de professeurs ayant continué à appeler force vive le produit mv^2 , M. Bélanger, pour lever l'équivoque, a proposé pour le produit $\frac{1}{2}mv^2$ la dénomination de *puissance vive*, déjà employée accidentellement par Leibnitz. Elle est adoptée depuis 1838 à l'École centrale des arts et manufactures.

FORET, outil qui sert à percer, et qu'on fait mouvoir à l'aide d'un archet. (Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS.)

FORMULE DE CLAPEYRON, relation entre les moments fléchissants qui correspondent à trois points d'appui consécutifs d'une même pièce prismatique, simplement posée et soumise à des poids uniformément répartis. Si μ_{n-1} , μ_n , μ_{n+1} désignent les trois moments fléchissants correspondants aux points d'appui A, B, C; p_n le poids par mètre réparti sur la première travée, de longueur l_n , p_{n+1} le poids par mètre réparti sur la seconde travée, de longueur l_{n+1} , la formule due à M. Clapeyron est

$$4l_n \mu_{n-1} + 8(l_n + l_{n+1}) \mu_n + 4l_{n+1} \mu_{n+1} = p_n l_n^3 + p_{n+1} l_{n+1}^3.$$

Si les travées ont la même longueur l , et que le poids par mètre réparti sur chacune d'elles ait une même valeur p , la formule se réduit à

$$\mu_{n-1} + 4\mu_n + \mu_{n+1} = \frac{1}{2}pl^2.$$

(Voy. l'article FLEXION PLANE.)

M. Bresse a généralisé la formule de Clapeyron, en l'étendant au cas où la charge de chaque travée n'est pas uniformément répartie, et en écartant l'hypothèse ordinaire d'après laquelle les points d'appui sont tous situés sur la fibre moyenne dans son état primitif. (Voy. le troisième volume du Cours de Mécanique appliquée, par M. Bresse, professeur à l'École des ponts et chaussées.)

FORMULE DE L'AMIRAUTÉ, formule qui sert, en Angleterre, à calculer la force nominale des machines à vapeur employées à la navigation. (Voy. FORCE NOMINALE).

FORMULE DE LAPLACE. On désigne particulièrement sous ce nom, dans le calcul des probabilités, la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

On trouvera une table de ses valeurs à l'article PROBABILITÉ.

FORMULE DE RUMFORD, formule qui donne la tension des gaz développés dans l'inflammation de la poudre, en fonction de leur densité. Cette formule est la suivante :

$$y = 1,841 \cdot x^{1+0,0004 \cdot x},$$

y représente la tension exprimée en atmosphères, et x le volume de la charge exprimé en millièmes de la capacité dans laquelle la poudre est contenue. (Voy. Poudre [Propriétés balistiques de la].)

FORMULE DE SAVARY, formule qui établit une

relation entre les rayons r et r' des circonférences primitives d'un engrenage cylindrique, les rayons de courbure ρ et ρ' des courbes formant le profil des dents, aux points où ces courbes se touchent, la longueur p de la normale commune à ces courbes au même point, comprise entre le point de contact et la ligne des centres, et α l'angle que cette normale fait avec la ligne des centres. Cette relation est la suivante :

$$\left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p}\right) \cos \alpha = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

(Voy. ENGRENAGES.)

FORMULE DE TH. SIMPSON. Voy. QUADRATURE.

FORMULE DU GOUVERNEMENT, formule à l'aide de laquelle on calcule, dans la marine militaire française, la force nominale des machines à vapeur employées à la navigation. (Voy. FORCE NOMINALE.)

FORMULES DE BORDA. On donne particulièrement ce nom à deux formules applicables au calcul des longitudes par la méthode des distances lunaires. (Voy. LONGITUDE, formules [1] et [2].)

FORT, petite place fortifiée à fronts bastionnés destinée à fermer un passage, dominer une route, ou un fleuve, défendre l'entrée d'une rade, d'un port, ou les abords d'une ville. Les principes de la FORTIFICATION (Voy. ce mot) s'appliquent aux forts comme aux places d'une plus grande étendue. On donne généralement aux forts une forme régulière; le carré, le pentagone, l'hexagone, sont les figures les plus fréquemment employées pour le polygone extérieur. Un fort muni de casemates et de souterrains assez étendus pour abriter les hommes et les munitions peut être d'une bonne défense et exiger un siège en règle (Voy. ATTAQUE DES PLACES). Un fort doit avoir son RÉDUIT (Voy. ce mot).

Des forts peuvent être élevés sur des îlots ou sur des enrochements artificiels pour défendre l'entrée des rades ou des ports; on leur donne alors le nom de forts en mer. Ces forts ont souvent plusieurs étages de batteries casematées.

FORTIFICATION, art d'élever des retranchements qui permettent à une troupe ou à une armée peu nombreuse de résister à un ennemi supérieur. Cet art est aussi ancien que celui de la guerre; mais ce n'est que lorsque l'emploi de l'artillerie se fut généralisé, qu'il commença à former un corps de science. C'est en Italie et en Espagne qu'il fit les premiers progrès; il fut importé en France en 1594 par Errard de Bar-le-Duc, et perfectionné par le chevalier Deville (1629), et par le comte de Pagan (1645). Mais c'est au célèbre Vauban (1655 à 1700) et à son disciple Cormontaigne (1713 à 1745) qu'il doit ses plus grands perfectionnements et l'importance qu'il a acquise. Depuis Cormontaigne, les principes de la fortification ont peu varié, malgré les tentatives qui ont été faites pour substituer aux enceintes continues le système des forts détachés.

On divise ordinairement la fortification en fortification passagère ou de campagne, et en fortification permanente. Quelques auteurs font une troisième division pour les ouvrages d'attaque ou de défense qui se construisent pendant la durée d'un siège. Quel que soit le genre de fortification dont on s'occupe, on a toujours deux éléments principaux à considérer : le relief et le tracé.

I. Le relief d'un ouvrage de fortification est dé-

terminé par un certain nombre de sections verticales perpendiculaires à la direction de ses faces, et auxquelles on donne le nom de profils. La figure 1 représente le profil d'un ouvrage de campagne,

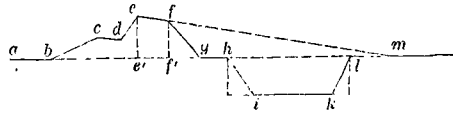


Fig. 1.

construit en terre. La ligne ab représente le terre-plein de l'ouvrage; bc est le talus de la banquette; cd est la banquette; de est le talus intérieur du parapet; ef est la plongée; fg est le talus extérieur du parapet; le parapet lui-même est compris entre les plans verticaux ee' et ff' ; gh est la berme; hi l'escarpe; ik le fond du fossé; kl la contrescarpe. L'arête dont le point e est la projection, se nomme la ligne de feu, ou la crête de l'ouvrage; la distance de cette ligne au-dessus du terre-plein est le commandement de l'ouvrage; et la distance de cette même ligne au fond du fossé est le relief proprement dit.

— Le talus de la banquette est incliné à 2 sur 1, c'est-à-dire 2 de base sur 1 de hauteur, afin que les défenseurs puissent le gravir aisément pour se rendre sur la banquette. La banquette a 0^m,70 de large, pour un seul rang d'hommes, ou 1^m,20 pour deux rangs. La hauteur de la ligne de feu au-dessus de la banquette, hauteur que l'on appelle la hauteur d'appui, est de 1^m,30 pour que les hommes de moyenne taille puissent faire feu par-dessus le parapet. Le talus intérieur est incliné à 1 sur 3, afin que les hommes puissent s'approcher pour reconnaître les abords de la contrescarpe. La plongée est inclinée à 5 ou 6 sur 1; il ne faut pas que son prolongement passe à plus d'un mètre au-dessus de l'extrémité i de la contrescarpe, afin que l'ennemi ne puisse se tenir à couvert en ce point. Le talus extérieur du parapet a une inclinaison de 1 sur 1 pour les terres fortes, ou 1 $\frac{1}{2}$ sur 1 pour les terres

légères. La berme n'a que 0^m,50; elle sert à éloigner la masse des terres du bord du fossé, afin d'éviter les éboulements, et permet au besoin aux défenseurs de relever les terres ébouleées. L'escarpe est inclinée à 1 $\frac{1}{2}$ sur 1 ou 3 sur 2; et la contrescarpe à 1 sur 2. La hauteur de la ligne de feu, ou du point e au-dessus du terre-plein, est ordinairement de 2^m,50; et l'on donne au fossé de 2 à 3 mètres de profondeur. Ses autres dimensions se trouvent alors déterminées par la condition que le déblai soit égal au remblai, ou que l'aire du trapèze $hikl$ soit équivalente à celle de la figure $bcdefgb$, ou plutôt qu'elle en soit les $\frac{10}{11}$, attendu que le volume des

terres tirées du fossé surpasse d'environ $\frac{1}{10}$ le volume du fossé même, ce qu'on désigne sous le nom de foisonnement. En appelant S l'aire de la figure $bcdefgb$ qui peut être aisément calculée, h la profondeur du fossé et x la demi-somme des bases hi et ik , on doit donc avoir

$$S = \frac{11}{10} h \cdot x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{10}{11} \cdot \frac{S}{h}$$

Une fois α connu, on aura hl en ajoutant la demi-somme des projections horizontales pi et kq de l'escarpe et de la contrescarpe, projections faciles à déterminer, puisque la pente de ces lignes est connue. On aura ik en retranchant au contraire cette demi-somme de la largeur moyenne α .

L'épaisseur du parapet dépend de la résistance que l'on veut donner à l'ouvrage; s'il ne doit résister qu'au feu de la mousqueterie, une épaisseur de parapet de 0^m,70 est suffisante; on donne à cette épaisseur jusqu'à 2 et 3 mètres quand l'ouvrage doit être exposé au feu de l'artillerie. Si, par suite des dimensions adoptées, le prolongement de la plongée passait à plus d'un mètre au-dessus de l'arête supérieure l de la contrescarpe, il faudrait relever le terrain entre l et m au moyen d'un glacis, comme le montre la figure 2. Cette figure représente le pro-

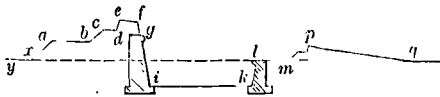


Fig. 2.

fil d'un ouvrage de fortification permanente, faisant partie du corps de la place. On y retrouve, à l'exception de la berme qui est supprimée, toutes les parties du profil représenté fig. 1; il présente en outre quelques parties supplémentaires; ax est le talus du terre-plein; lm est le chemin couvert; pq représente le glacis, tracé parallèlement à la plongée ef , à une distance au-dessous du prolongement de ef , qui ne doit pas excéder 1^m. Le chemin couvert est relié au glacis par une banquette qui permet aux défenseurs de tirer sur le glacis. L'escarpe est revêtue en maçonnerie jusqu'à la hauteur du terre-plein. La saillie g forme un cordon qui règne tout le long du corps de la place, et dont la projection horizontale porte le nom de *magistrale*. La contrescarpe est également revêtue en maçonnerie. La banquette du chemin couvert est souvent séparée du glacis par une palissade. La hauteur de l'escarpe du corps de place doit être d'au moins 10^m au-dessus du fond du fossé, pour qu'elle soit à l'abri de l'escalade; dans les demi-lunes, dont il sera question plus loin, l'escarpe peut n'avoir que 8^m. La largeur du fossé varie suivant le tracé de la fortification; parmi les places fortifiées par Vauban, on en trouve dans lesquelles la largeur du fossé du corps de place n'est que de 27^m, comme à Phalsbourg, et d'autres où cette largeur atteint 39^m, comme à la citadelle de Lille. Les fossés des demi-lunes varient entre 19^m,50 et 29^m de largeur. En général, et à moins de raisons particulières, il est préférable de donner au fossé, à égalité de déblai, plus de profondeur et une largeur moindre, pourvu qu'on n'ait pas à craindre que l'éboulement d'une brèche faite à la masse couvrante ne remplisse une trop grande partie du fossé, et n'en facilite le passage à l'ennemi.

Le plus souvent le profil d'un ouvrage reste le même sur toute son étendue; mais il peut arriver aussi que le relief, et par suite le profil, changent pour satisfaire aux conditions du DÉFILEMENT (Voy. ce mot).

II. On peut reconnaître, à l'inspection des figures 1 et 2, que tous les points qui sont situés au-des-

sous de la plongée ef sont à l'abri des coups des défenseurs.

Quand deux faces consécutives d'un ouvrage forment un angle rentrant, tel que ABC (fig. 3),

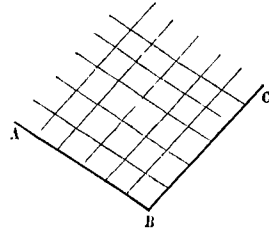


Fig. 3.

chacune de ces faces *flanque* l'autre, c'est-à-dire qu'elle donne des feux parallèles à l'autre face et en défend ainsi l'approche. Mais tous les points situés au-dessus des prolongements des plongées de ces deux faces sont à l'abri des coups partis de l'ouvrage, et forment en B ce qu'on appelle un *angle mort*. Si les deux faces forment un angle saillant, comme ABC (fig. 4), les coups partant à peu près perpendiculai-

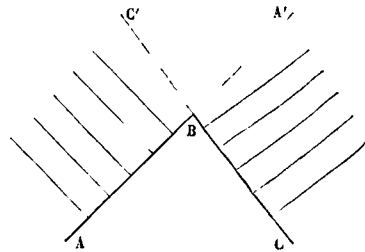


Fig. 4.

rement aux faces, il en résulte que tous les points situés dans l'angle $A'BC'$, formé par les prolongements des faces, sont à l'abri des coups des défenseurs; ils constituent ce qu'on appelle un *secteur sans feux*. Dans un système de fortification bien entendu, toutes les faces des divers ouvrages doivent se flanquer mutuellement, de manière qu'il n'y ait ni secteurs sans feux ni angles morts, ni généralement aucun point soustrait aux atteintes des défenseurs. On obtient ce résultat au moyen d'une *enceinte bastionnée*.

Les *bastions* P et Q (fig. 5) sont des ouvrages

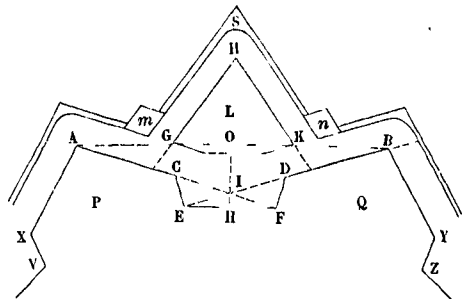


Fig. 5.

formant saillie sur l'enceinte, et qui remplacent, dans le système moderne, les tours du moyen

Age. Les saillants A et B des bastions sont les sommets d'un polygone qui enveloppe à une certaine distance la place que l'on veut fortifier, et que l'on nomme la *polygone extérieur*. Ce polygone doit avoir au moins 4 côtés. Soit AB l'un des côtés de ce polygone, que l'on désigne souvent sous le nom de *côtés extérieurs*. Sur le milieu de AB on élève une

perpendiculaire OI que l'on prend égale à $\frac{1}{8}$ de AB

s'il s'agit d'un carré, à $\frac{1}{7}$ s'il s'agit d'un pentagone,

à $\frac{1}{6}$ s'il s'agit d'un hexagone ou d'un polygone d'un

nombre de côtés supérieur. On joint AI et BI, que l'on prolonge. Ces lignes sont ce que l'on appelle

les *lignes de défense*. On prend $AC = BD = \frac{1}{3} AB$.

Des points C et D on abaisse CE perpendiculaire à BD prolongé, et DF perpendiculaire au prolongement de AC; puis on joint EF. On opère de la même manière sur les autres côtés extérieurs, et l'on a en XACEFDBY le tracé de la *magistrale*. AC et AX sont les *faces* du bastion P; CE et VX sont ses *flancs*; BD et BY sont de même les faces du bastion Q; DF et YZ sont ses flancs; EF parallèle à AB, est ce qu'on nomme la *courtine*. Il est aisé de voir que ce tracé satisfait aux conditions établies ci dessus; les faces des bastions sont défendues par les flancs des bastions opposés; et il n'y a point de secteurs sans feux; les flancs opposés CE et DF se défendent mutuellement, ainsi que la courtine; et il n'y a point d'angles morts; car celui qui pourrait exister en E, par exemple, est pris à revers par les feux partis de DF; de même pour l'angle F. Pour compléter la défense et tenir l'ennemi plus éloigné du corps de la place, on élève devant la courtine un ouvrage de forme triangulaire L appelé *demi-lune*, parce que sa forme était autrefois circulaire; deux faces seulement, GH et HK, sont fortifiées; le troisième côté, GK, qu'on appelle la *gorge*, reste ouvert; de manière que l'intérieur de la demi-lune est battu par les feux de la place. Les faces de la demi-lune partent d'un point H situé sur le prolongement de la perpendiculaire OI, à une distance du point O

égale aux $\frac{4}{15}$ du côté extérieur AB; et elles sont dirigées vers des points situés sur les faces AC et BD à 30° environ des sommets respectifs C et D, qu'on appelle les *angles d'épaule*. Les faces HG et HK sont flanquées par les faces des bastions voisins. Les fossés embrassent les bastions et la demi-lune, plus larges devant les bastions. Le chemin couvert court au-dessus de la contrescarpe de ces fossés, et forme une communication continue tout autour de la place. Au delà du chemin couvert s'étendent les glacis, dont la pente est donnée par la plongée des ouvrages auxquels ils correspondent. Aux rentrants m et n du chemin couvert, la crête du glacis se brise pour former les *places d'armes rentrantes*, qui servent de point de rassemblement pour les défenseurs pendant les sièges. Au saillant s de la demi-lune, la contrescarpe s'arrondit, et laisse entre elle et le glacis un espace que l'on appelle *place d'armes saillante*, et qui a une destination semblable. Des espaces analogues existent aux saillants des bastions.

Le côté extérieur AB peut varier entre 300^m et

400^m. La défense des places est fondée sur la portée du fusil de rempart, qui est de 300^m; il ne doit donc pas y avoir plus de 300^m du flanc CE au point R situé près de la crête du glacis du bastion Q dans le prolongement de EB; il faut retrancher de ces 300^m la largeur du chemin couvert, qui est de 10^m, celle du fossé qui est de 29^m, celle du parapet du flanc CE qui est de 6^m, et la projection du talus extérieur qui est de 3^m; il reste donc pour la distance EB environ 252^m; et comme EB est à peu près les deux tiers de AB, le côté extérieur ne devra pas excéder $252^m \times \frac{3}{2}$ ou 378^m; on pourrait le porter à

400^m, en admettant qu'une différence de 22^m sur AB, ou de 14 à 15^m sur EB, ne détruise pas l'efficacité de l'arme employée. D'un autre côté, il faut que la courtine soit assez longue non-seulement pour qu'il n'y ait point d'angle mort en E ou en F, mais encore pour que, de chaque flanc, on puisse atteindre la poterne placée au milieu de la courtine et à 2^m au-dessus du fond du fossé. Or, la crête du flanc est à 13^m environ au-dessus du fond du fossé, soit 11^m au-dessus de la poterne; si l'on en déduit 1^m, 30 pour avoir la hauteur du fond d'une embrasure, il reste 9^m, 70. L'inclinaison de l'embrasure étant à 6 de base sur 1 de hauteur, on aura pour le minimum de distance de la bouche à feu à la poterne $9^m,70 \times 6$, ou 58^m, 20, ce qui donne 116^m, 40 pour le minimum de longueur de la courtine; et comme celle-ci est à peu près le tiers du côté extérieur AB, celui-ci doit avoir au minimum $116^m,40 \times 3$ ou 349^m, 20. On peut le réduire à 300^m en considérant qu'il suffit de battre, non pas le seuil de la poterne, mais un point situé à 1^m, 20 au-dessus. En résumé, c'est donc entre 300^m et 400^m que le côté extérieur AB doit être compris.

Quant aux dimensions relatives indiquées plus haut d'après Cormontaigne, on ne doit pas non plus les regarder comme entièrement fixes; elles varient nécessairement avec les circonstances locales. On donne aujourd'hui plus de longueur aux courtines, et moins de développement aux bastions; la raison en est qu'en diminuant les faces des bastions, on diminue par cela même l'espace sur lequel l'assiégeant peut établir ses batteries de brèche. (Voy. ATTAQUE DES PLACES.)

Si l'on appelle a la moitié du côté extérieur AB (fig. 5), b la moitié de la courtine, c la face AC du bastion, f le flanc CE, p la perpendiculaire OI, et α l'angle BAF ou son égal DEF, en remarquant que CIE, extérieur au triangle AIB, est égal à 2α , on obtient aisément, par la considération des triangles AOI, EHI et CEI, les relations

$$p = a \tan \alpha, \quad [1]$$

$$\frac{b}{\cos \alpha} = f \tan 2\alpha, \quad [2]$$

$$\frac{a}{\cos \alpha} = c + \frac{f}{\sin 2\alpha}; \quad [3]$$

la seconde peut s'écrire

$$f = \frac{2b \sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}. \quad [4]$$

Ordinairement les données sont a , p et c ; l'équation [1] donne alors α ; l'équation [3] donne f ; et l'équation [4] donne b . On pourrait donner au contraire a , b et f ; dans ce cas, l'équation [4] donnerait α ; l'équation [1] donnerait p ; et l'équation [3] donnerait c .

Les crêtes des diverses faces des ouvrages dont nous venons de parler sont le plus souvent horizontales; cependant on est souvent obligé de leur donner une certaine inclinaison pour mettre les terre-pleins à l'abri des coups qui pourraient partir des points élevés du terrain environnant la place (*Voy. DÉFILEMENT*).

Indépendamment des bastions, des courtines et des demi-lunes, on emploie, pour fortifier le corps de la place, quelques ouvrages accessoires, tels que les RÉDUITS, les TENAILLES, les CONTRE-GARDES, les CAVALIERS, les RETRANCHEMENTS, les TRAVERSES, les CAPONNIÈRES (*Voy. ces divers articles*).

On a quelquefois intérêt à relier le corps de la place à des points éloignés qu'on veut défendre; on fait usage pour cela d'ouvrages extérieurs appelés LUNETTES, OUVRAGES À CORNES, OUVRAGES À COURONNE (*Voy. ces mots*). Pour tenir l'ennemi à une plus grande distance de la place, on l'entoure quelquefois, soit entièrement, soit partiellement, d'une ceinture de forts détachés (*Voy. FORTS*). Enfin, une ville fortifiée comprend ordinairement dans son enceinte, une place forte de dimensions moindres, mais assez considérable pour contenir les deux tiers de la garnison, et à laquelle on donne le nom de CITADELLE (*Voy. ce mot*); cette place forte doit être défendue non-seulement contre le dehors, mais encore contre la ville elle-même.

L'art des fortifications a subi, depuis l'invention de la poudre, un grand nombre de modifications, et a donné lieu à un grand nombre de systèmes qui se sont succédé après avoir été en vigueur chacun pendant un certain temps; tels sont le système italien et le système espagnol (première moitié du xvi^e siècle), le système d'Errard de Bar-le-Duc (seconde moitié du même siècle), le système du chevalier DeLille (première moitié du xvii^e siècle), le système de Marolais (même période), le système du comte de Pagan (xvii^e siècle), les systèmes de Vauban (fin du xvii^e siècle), enfin le système de Cormontaigne (première partie du xviii^e siècle), lequel a servi de base au système moderne, qui n'en diffère que par des détails (*Voy. le Résumé de fortification, de Zaccane*).

III. On construit pendant le cours d'un siège divers ouvrages ayant une destination spéciale, tels que les PARALLÈLES, les BOYAUX DE TRANCHÉE, les DEMI-PLACES D'ARMES, les BATTERIES À RICOCHET, les CAVALIERS DE TRANCHÉE, les BATTERIES DE BRÈCHE, les DESCENTES DE FOSSÉ, les MINES. Nous renvoyons à ces mots, et aux articles ATTAQUE DES PLACES, DÉFENSE DES PLACES. (*Voy. aussi l'art. REVÊTEMENTS*.)

IV. La fortification de campagne, ou fortification passagère, comprend tous les ouvrages qu'on élève dans le cours d'une campagne, soit pour défendre des points déterminés, soit pour couvrir une armée. Parmi les ouvrages destinés à défendre un point, comme un pont, un passage, une partie du cours d'une rivière, etc., on trouve les REDANS, les LUNETTES, les CRÉMAILLÈRES, les TENAILLES, les QUEUEUX D'ARONDE, les REDOUTES, les FORTINS (*Voy. ces mots*). Les ouvrages plus considérables qui servent à couvrir une armée, se divisent en LIGNES BASTIONNÉES, et en LIGNES À INTERVALLES (*Voy. ces mots*). Enfin il peut arriver qu'une armée en campagne ait intérêt à s'enfermer dans un CAMP RETRANCHÉ (*Voy. ce mot*), qui doit remplir des conditions spéciales

V. Pour n'omettre aucun ouvrage de défense, il nous reste à citer les FORTS EN MER et les BATTERIES DE CÔTE, qu'on élève pour protéger l'entrée des ports, et en général les frontières maritimes (*Voy. ces articles*).

VI. Nous n'avons cité que les ingénieurs français qui ont fait école en fortification; nous aurions pu en nommer plusieurs à l'étranger, particulièrement Cohorn, surnommé le Vauban hollandais, qui vivait à la même époque que Vauban et lui fut souvent opposé. Chaque chef d'école avait son système. Vauban a adopté successivement trois systèmes différents; les deux derniers offrent entre eux une très-grande analogie. Aujourd'hui on a renoncé aux systèmes; on emprunte à chacun ce qu'il peut avoir de bon, et l'on s'inspire surtout des conditions locales, en faisant bon marché de la symétrie à laquelle les ingénieurs anciens, et Vauban lui-même, ont trop sacrifié.

On peut consulter avec fruit : les *Traité de l'attaque et de la défense des places*, par Vauban; les *Mémoires inédits* de cet ingénieur, publiés en 1841 par M. Poncelet; la *Nouvelle fortification*, par Cohorn, traduit en 1706; le *Mémorial pour les fortifications permanentes et passagères*, publié par le capitaine Bayard d'après les mémoires de Cormontaigne; le *Mémorial pour l'attaque des places*, par le même; le *Traité de la défense des places fortes*, par Carnot; le *Cours de Fortification à l'usage de l'École militaire*, par Savart; le *Résumé de Fortification à l'usage des officiers d'infanterie*, par Zaccane; et enfin les *Principes de Fortification*, par le général Noizet (1859).

FORTIN, ouvrage fermé, de forme polygonale, présentant alternativement un angle saillant et un angle rentrant. Son enceinte se compose par conséquent d'une série continue de REDANS (*Voy. ce mot*). On donne ordinairement au fortin une forme régulière, c'est-à-dire que les capitales ou bissectrices de ses angles saillants concourent en un même point, qui est le centre du fortin, et font des angles consécutifs égaux, en même temps que les angles saillants eux-mêmes sont tous égaux entre eux, et ont leurs sommets sur une même circonférence ayant

pour centre le centre du fortin. Il est facile de voir que l'angle rentrant ABC (fig. 1) est alors égal à l'angle saillant BCD, augmenté de $\frac{360^\circ}{n}$, n représentant le nombre des saillants. Car si O est le centre du fortin, et qu'on joigne OA, OB, OC, l'angle CBX formé par le côté CB avec le prolongement de OB, sera égal à BCO + BOC. En doublant, on

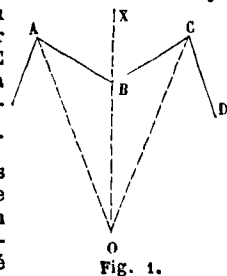


Fig. 1.

$$2 \text{ CBX} = 2 \text{ BCO} + 2 \text{ BOC}$$

$$\text{ou} \quad \text{ABC} = \text{BCD} + \text{AOC}.$$

$$\text{Mais on a} \quad \text{AOC} = \frac{360^\circ}{n};$$

par conséquent

$$\text{ABC} = \text{BCD} + \frac{360^\circ}{n};$$

[1]

ce qu'il fallait démontrer.

L'angle saillant BCD ne peut être moindre que 60° , afin que le saillant ait une solidité suffisante. D'autre part, on ne peut faire ABC plus grand que 120° si l'on veut que le côté AB soit flanqué d'une manière efficace par la mousqueterie partant du côté BC. Il en résulte que le quotient $\frac{360^\circ}{n}$ ne doit pas dépasser 60° , ce qui exige que n ne soit pas inférieur à 6. Un fortin doit donc avoir au moins 5 saillants, c'est-à-dire que les sommets de ses angles saillants doivent être les sommets d'un polygone régulier de 6 côtés au moins. Le plus souvent on donne au fortin 8 saillants, comme le montre la figure 2. La relation [1] montre que l'angle rentrant

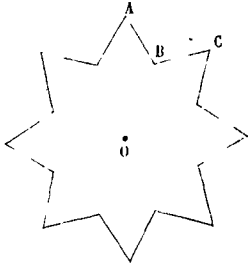


Fig. 2.

ABC est alors de 105° . Les portes sont placées dans le voisinage des angles rentrants. Les fortins s'emploient pour défendre des points isolés qui peuvent être attaqués de tous les côtés. Ils n'ont pas de *secteurs sans feux*; mais il y a un *angle mort* (Voy. FORTIFICATION) à chaque angle rentrant. Les fossés sont d'autant mieux défendus que les dimensions du fortin sont plus grandes, mais l'angle mort subsiste toujours. Un fortin peut renfermer depuis 1500 jusqu'à 4000 hommes, avec 8 pièces d'artillerie. Au delà, on emploie les FORTS BASTIONNÉS. (Voy. FORTS.)

Un fortin octogone peut être tracé d'une autre manière. On trace un carré *abcd* (fig. 3) dont le côté

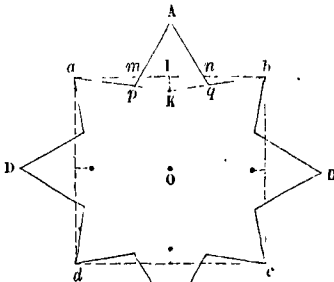


Fig. 3.

ab doit avoir au moins 90 mètres. On divise ce côté, aux points *m* et *n*, en trois parties égales. Sur *mn* on trace un triangle équilatéral *mAn*, dont on prolonge les côtés. Sur le milieu de *mn* on élève une perpendiculaire *IK* égale au quart de *AI*, et l'on tire *aK* et *bK*, qui, par leur intersection avec *Am* et *An* prolongés, déterminent les sommets *p* et *q* de

deux angles rentrants. On opère de même sur les autres côtés du carré. Le fortin a alors 4 grands saillants *A, B, C, D*, dont l'angle est de 60° , et 4 petits *a, b, c, d*, dont l'angle est d'environ 62° (90° moins 2 fois l'angle dont la tangente est $\frac{1}{4}$).

(Voy. le *Résumé de Fortification*, par Zaccane.)

FOURCAT, varangue en forme de fourche. On donne le nom de *fourcat d'ouverture* à la plus basse des BARRES-D'ARCADE. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

FOURRURE DE GOUTIÈRE, VIRURE placée immédiatement au-dessus de chaque PONT d'un navire. (Voy. CES MOTS, et CONSTRUCTION NAVALE.)

FRAISE, outil en acier de forme conique, arrondi par le bout, et dont la surface est garnie de cannelures. Cet instrument, manœuvré comme un vilebrequin, sert à évaser les trous percés dans du métal ou dans du bois.

FRANC, unité monétaire adoptée en France depuis la réforme des poids et mesures. C'est une pièce d'argent, au titre de 900 millièmes, et pesant 5 grammes. Son diamètre est de 23 millimètres. (Voy. MONNAIES FRANÇAISES.)

FREIN, modérateur qui met en jeu le frottement. Un frein se compose d'un ou plusieurs arcs en bois ou en métal, qui peuvent être appuyés sur la circonférence d'une roue, afin de produire un frottement qui, agissant comme résistance, diminue la vitesse de cette roue. La figure 1 représente un frein

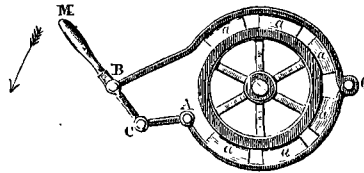


Fig. 1.

de ce genre; les arcs en bois *a, a, a, a*, sont réunis par deux arcs en fer, mobiles autour d'un point fixe *O*; et s'articulant par leurs extrémités *A* et *B*, avec un levier coudé *ACB* mobile autour du point *C*. En agissant sur la poignée *M*, dans le sens indiqué par la flèche, on force les arcs à s'appuyer sur la jante de la roue, et l'on produit ainsi un frottement qui ralentit la vitesse. Il est nécessaire que le frein embrasse un assez grand arc de cercle, afin de répartir la pression sur une assez grande surface pour que les matières en contact ne soient pas altérées. Les grues, et en général toutes les machines dans lesquelles on élève et où l'on fait ensuite descendre des fardeaux à l'aide de manivelles, sont munies d'un frein qui agit sur une roue spéciale participant au mouvement du treuil.

On applique aussi le frein aux voitures, soit pour enrayer dans les descentes, soit pour arrêter, sur les voies ferrées, les trains animés d'une grande vitesse. Les freins des voitures ordinaires sont des arcs en bois qu'on rapproche des roues de derrière et qu'on fait presser sur les jantes de ces roues, en agissant sur un système de leviers par l'intermédiaire d'une manivelle et d'une vis. Ces freins ont remplacé avec avantage l'ancien sabot, dont les rouliers se servent encore; ce sabot a pour effet d'empêcher la roue de tourner et il transforme

le frottement de roulement en un frottement de glissement, qui est beaucoup plus considérable; il produit ainsi une résistance qui tend à diminuer la vitesse de la voiture et à l'empêcher de s'accélérer dans les descentes sous l'action de la composante de la pesanteur parallèle à la roue. Mais ce dispositif est d'un usage incommode, et lorsque la chaîne qui retient le sabot vient à casser, il peut en résulter de graves accidents. Le frein agit d'une manière plus graduelle; il est d'un usage plus commode et n'offre pas les mêmes dangers de rupture.

Dans les chemins de fer, toutes les roues d'une même voiture reçoivent simultanément l'action des freins. On a employé pour cela divers mécanismes. Voici d'abord l'un des plus anciens, appliqué au chemin de fer de Versailles, rive gauche. Des arcs égaux *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* (fig. 2), sont placés à une

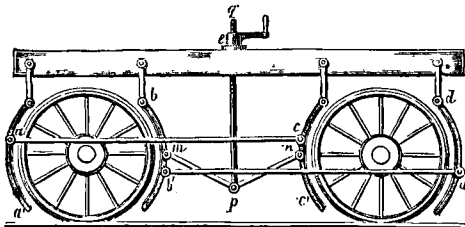


Fig. 2.

petite distance en avant et en arrière de chaque roue; ils sont suspendus au châssis de la voiture par des tiges articulées. Les leviers *mp* et *np*, articulés au milieu des arcs *bb'* et *cc'*, viennent s'articuler en *p* avec une tige verticale *pq*, terminée par une vis, et que l'on peut faire monter en faisant tourner l'écrou *e*. Lorsque le point *p* s'élève, les points *m* et *n* sont obligés de se rapprocher des roues, et les arcs *bb'* et *cc'* peuvent y être serrés avec énergie. En même temps que ces arcs se rapprochent des roues, les arcs *aa'* et *dd'*, liés aux premiers par les tiges horizontales de traction *ac* et *bd'*, s'en rapprochent aussi, en sorte que les quatre arcs frottent à la fois. Les arcs frottants peuvent être en bois et reliés par des arcs en fer; mais on fait aussi frotter métal contre métal.

Voici maintenant l'un des mécanismes les plus généralement employés aujourd'hui.

Les deux freins ou sabots *S* et *S'* (fig. 3) sont ar-

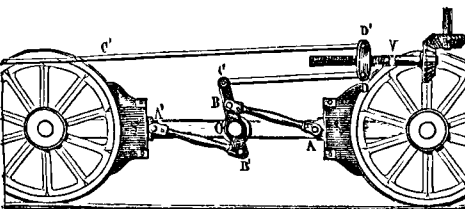


Fig. 3.

ticulés avec deux leviers égaux *AB* et *A'B'*, articulés eux-mêmes à un troisième levier *B'BC*, mobile autour d'un axe *O* fixé au châssis de la voiture. L'extrémité *C* du levier *B'BC* s'articule avec une tige *CD*, articulée elle-même avec la pièce mobile *DD'*. Cette pièce sert d'écrou à une vis *V*, mobile autour

de son axe, mais non dans le sens longitudinal, et que le garde-frein peut faire tourner de sa place par l'intermédiaire d'un engrenage. Lorsque la vis tourne dans le sens convenable, la pièce *DD'* avance vers la droite; il en est de même des points *C* et *B*, tandis que le point *B'* avance vers la gauche; les deux sabots sont donc serrés contre les roues. La tige *C'D'*, articulée en *D'*, produit un effet analogue sur les roues suivantes. Quand la vis tourne en sens contraire, l'effet inverse a lieu, c'est-à-dire que les sabots s'éloignent des roues.

La manœuvre des freins emploie toujours un certain temps, et l'on a cherché à l'abrèger. Parmi les divers mécanismes essayés pour atteindre ce but, nous citerons le *frein à contrepoids*, de M. Bricogne, qui est adopté pour certaines voitures sur le chemin de fer du Nord. La partie principale de ce mécanisme est un corps pesant, de forme allongée, mobile verticalement entre des guides, et portant une crémaillère verticale qui engrène avec un pignon à axe horizontal. Ce poids n'est retenu que par un dé clic. Lorsque le garde-frein fait jouer ce dé clic, le contrepoids tombe, et fait tourner rapidement le pignon, qui transmet son mouvement aux freins, disposés comme ci-dessus. En faisant tourner le pignon en sens contraire, à l'aide d'une manivelle, le garde-frein fait remonter le contrepoids et remet en place le dé clic. Dans ce système, on le voit, le jeu des freins est plus rapide, et l'on peut en moins de temps arrêter un convoi.

Mais il ne faudrait pas s'exagérer les avantages de cette plus grande rapidité, et chercher, comme l'ont fait bien des inventeurs, à arrêter le train instantanément. Un arrêt trop rapide équivaldrait à un choc brusque contre un obstacle, et pourrait occasionner des accidents de la plus grande gravité. M. Gentil, ingénieur des mines, a eu l'idée de comparer ce choc à celui que le convoi éprouverait s'il venait à tomber verticalement d'une certaine hauteur, et il a dressé le tableau suivant :

NATURE DES TRAINS.	VITESSE à l'heure en kilomètres.	VITESSE par seconde en mètres.		COMPARAISON
		m	m	
Trains de marchandises.	25 kilom.	6,94	2,456	entresol.
— mixtes.....	30 —	8,33	3,533	1 ^{er} étage
— omnibus.....	40 —	11,11	6,293	2 ^e —
— directs.....	50 —	13,88	9,825	3 ^e —
— express.....	60 —	16,66	14,159	4 ^e —

Ainsi le choc qu'un train express éprouverait s'il était brusquement arrêté, aurait les mêmes conséquences que si ce train tombait d'un 4^e étage.

Nous citerons encore le *frein automateur* de M. Guérin, qui a été expérimenté avec succès sur le chemin de fer d'Orléans. M. Guérin a eu l'idée de relier les sabots, par un système convenable de leviers, aux ressorts de choc (*Voy. CHEMINS DE FER*), liés eux-mêmes aux tampons qui séparent les voitures. Dès que le mécanicien ferme le régulateur et serre les freins du tender, qui sont des freins ordinaires, les ressorts de choc des voitures se compriment successivement, et cette compression fait agir les leviers qui serrent les freins. Quand le train est arrêté, les ressorts de choc se détendent, et les

freins cessent d'agir. Un mode particulier d'embrayage empêche les freins d'agir dans le recul. (Voy. la description complète du frein automateur de M. Guérin, dans le Rapport de M. Forquenot à la Société des ingénieurs civils, et dans le tome II du Traité élémentaire des chemins de fer de M. Perdonnet.)

En France, d'après les règlements administratifs, il doit y avoir une voiture à frein sur 7 voitures et au-dessous; 2 voitures à frein si le nombre des voitures est compris entre 7 et 15; 3 voitures à frein dans un train de plus de 15 voitures, le tout indépendamment des freins établis sur le tender.

Ce nombre doit être augmenté dans les fortes pentes. Sur le chemin de Turin à Gênes, on compte une voiture à frein sur deux pour les trains de voyageurs, et une voiture à frein sur trois pour les trains de marchandises.

En Prusse, on admet que jusqu'à une inclinaison de 0^m,0033 par mètre, les freins doivent agir sur $\frac{1}{6}$ du nombre total des roues pour les trains de voyageurs, et sur $\frac{1}{8}$ pour les trains de marchandises. De 0^m,0033 jusqu'à 0^m,005, il faut remplacer respectivement ces fractions par $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{7}$; et de 0^m,005 à 0^m,010, par $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$.

FREIN DYNAMOMÉTRIQUE, ou *frein de Prony*, appareil destiné à mesurer le travail des machines. M. de Prony l'a employé pour la première fois à Paris à l'occasion d'une expertise sur la machine à vapeur du Gros-Caillou. Cependant il paraît que le principe de l'appareil avait déjà été appliqué en 1821 par MM. Piobert et Tardy dans leurs expériences sur les roues verticales du moulin du Basacle à Toulouse.

I. L'idée fondamentale sur laquelle repose la construction et l'usage de cet instrument de mesure, consiste dans la substitution du frottement au travail résistant que reçoit habituellement la machine. Pour en faire comprendre la théorie, nous supposerons d'abord l'appareil réduit à sa plus simple expression. Soit O (fig. 1) l'axe horizontal

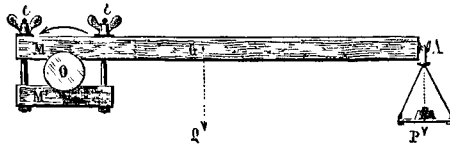


Fig. 1.

de l'arbre d'une machine dont on veut évaluer le travail. On dispose au-dessus et au-dessous deux mâchoires en bois M et M', creusées pour recevoir cet arbre, et réunies entre elles par des boulons que l'on peut serrer au moyen des écrous e, e. La mâchoire supérieure M se prolonge en forme de levier; et à son extrémité A est suspendu un plateau ou une caisse que l'on peut charger de poids. On enlève les communications de l'arbre O avec les résistances qui y sont ordinairement appliquées. Sous l'action du moteur, la vitesse de rotation s'accroît. Le levier MA est placé entre deux cales

qui l'empêchent d'être entraîné. En serrant peu à peu les écrous, on ralentit la vitesse de rotation, et on la ramène à la vitesse de régime. L'arbre se trouve alors dans sa situation ordinaire, avec cette seule différence que le travail des résistances que la machine est ordinairement employée à vaincre, se trouve remplacé par le travail du frottement qui s'exerce entre l'arbre et les mâchoires M, M'. Tout se réduit donc à mesurer ce dernier travail. Pour cela, on enlève les cales qui retenaient le levier, et l'on charge le plateau d'un poids convenable pour que l'appareil se maintienne en équilibre sous l'action de ce poids, de son poids propre, et des réactions que l'arbre exerce sur les mâchoires. On a alors les éléments nécessaires pour évaluer le travail du frottement. En effet, soit P le poids placé dans le plateau, et agissant à la distance p de l'axe de rotation; soit Q le poids de l'appareil, appliqué à son centre de gravité G, et distant du même axe d'une quantité q. Les réactions exercées par l'arbre sur les mâchoires se décomposent en forces normales n, n', n'', ..., et en forces tangentielles f, f', f'', ..., dont le sens est celui du mouvement de rotation. L'appareil étant supposé en équilibre, la somme des moments de ces diverses forces par rapport à l'axe doit être égale à zéro. Les forces n, n', n'', ..., passant par l'axe, ont des moments nuls; si r désigne le rayon de l'arbre, on a donc

$$fr + f'r + f''r + \dots - Pp - Qq = 0$$

ou

$$\Sigma fr = Pp + Qq. \quad [1]$$

On aura le frottement pour un tour, en multipliant le moment de ce frottement par 2π; si N représente le nombre de tours par minute, on aura donc pour le travail \mathcal{C}_r du frottement par seconde

$$\mathcal{C}_r = \frac{2\pi \cdot N}{60} \Sigma fr,$$

ou, en vertu de l'équation [1],

$$\mathcal{C}_r = \frac{\pi N}{30} (Pp + Qq). \quad [2]$$

Le poids P est donné par l'expérience; la distance p est connue à l'avance; le moment Qq peut aussi être déterminé par une expérience préalable: il suffit pour cela de poser l'appareil, comme l'indique la figure 2, sur l'arête horizontale d'un cou-



Fig. 2.

teau I, et de soutenir le levier au moyen d'une corde fixée en A, s'enroulant sur une poulie et chargée d'un poids P' à son autre extrémité. Si le poids P' est réglé de telle sorte que le levier demeure horizontal, la tension T du brin ascendant, égale à P' en négligeant le frottement de la poulie, satisfait à la relation

$$Tp = Qq \quad \text{ou} \quad P'p = Qq. \quad [3]$$

Le poids P' donné par cette relation est ce qu'on

appelle la charge permanente; en l'introduisant dans la formule [2], on obtient

$$\mathcal{E}_r = \frac{\pi N}{30} (P + P') p, \quad [4]$$

où N et P sont les seules quantités variables d'une expérience à l'autre.

Si, par exemple, on a

$$p = 2^m, 50, \quad P' = 30^k;$$

et qu'on ait trouvé

$$N = 40 \quad \text{et} \quad P = 120^k,$$

on aura

$$\mathcal{E}_r = \frac{3,1416 \cdot 40}{30} (120 + 30) \cdot 2,5 = 1570^k, 8,$$

ce qui revient à 20,94 chevaux ou 21 chevaux environ.

II. Dans la pratique, on ne fait pas frotter directement le frein contre l'arbre. Si celui-ci est en fonte, on l'entoure d'un anneau coulé exprès, et alésé, que l'on y fixe à l'aide d'une clef de calage. S'il est en bois et de grosse dimension, on l'entoure d'un anneau formé de deux pièces, garnies de vis pour le centrer, et on l'y fixe à l'aide de cales ou de coins. Dans les deux cas, c'est l'anneau qui frotte contre les mâchoires du frein. La figure [3] représente cette disposition.

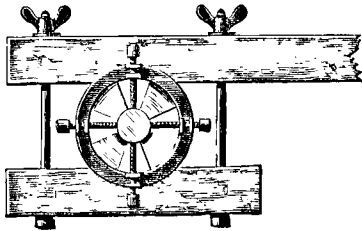


Fig. 3.

Les vis ne traversent pas l'anneau, elles passent dans des oreilles adaptées latéralement à l'anneau.

Pour une même force en chevaux, le produit Σfr ou $r \Sigma f$ restant le même, Σf est d'autant plus grand que r est plus petit. Or il y aurait inconvénient à ce que le frottement devint trop considérable, parce qu'il pourrait altérer les surfaces en contact, et rendre le frottement irrégulier. L'expérience a démontré que pour

un diamètre de:	et une vitesse de:	on peut mesurer:
16 à 20 centimètres	20 à 30 tours par minute	6 à 8 chevaux.
30 40 —	15 30 —	15 25 —
60 80 —	15 30 —	40 70 —

Une grande vitesse est d'ailleurs favorable à la régularité de l'expérience, comme M. Morin l'a constaté à la poudrerie du Bouchet. Un frottement régulier est nécessaire pour que l'équilibre du levier se maintienne pendant le mouvement. Ce levier prend toujours un petit mouvement oscillatoire, qui n'a pas d'inconvénients lorsque son amplitude reste comprise entre d'étroites limites; mais si les écarts devenaient considérables, ou si le levier venait frapper violemment contre les barres entre lesquelles on le maintient pour éviter de trop grandes excursions, ce serait le signe d'une irrégularité dans le frottement qui ne permettrait plus de compter sur une mesure exacte. La nécessité d'un frottement régulier oblige d'entretenir les

surfaces frottantes à une même température, ce à quoi on parvient en disposant un filet d'eau savonnée qui se rend par un trou pratiqué dans la mâchoire supérieure jusqu'à la surface frottante.

III. A cause de la longueur du levier, l'expérimentateur placé en A (fig. 1) ne peut serrer lui-même les écrous. C'est un inconvénient, qui peut dans certains cas devenir une occasion de fraude. Pour y remédier, M. Poncelet a proposé de faire les deux mâchoires d'égale longueur, et de placer les écrous près du point A (fig. 4). La flexibilité du



Fig. 4.

bois permet de serrer graduellement, et ce dispositif est, sous ce rapport même, préférable au dispositif ordinaire. De plus, pour rendre l'équilibre stable, M. Poncelet suspend la charge, non pas au point A lui-même, mais à l'extrémité d'une tige verticale AB fixée à l'une des mâchoires. Il en résulte que si le levier tend à s'élever en cédant au mouvement de l'arbre qui l'entraîne, le bras de levier du poids P augmente aussitôt, et, le frottement cessant d'être prépondérant, l'appareil revient à sa position d'équilibre.

IV. Lorsqu'il s'agit d'un arbre vertical, on ne peut plus suspendre directement le plateau à l'extrémité du levier. Une corde fixée à cette extrémité s'éloigne horizontalement dans le sens perpendiculaire au levier, et contraire à celui dans lequel l'arbre tend à l'entraîner; elle passe sur une poulie de renvoi, et c'est à l'extrémité de cette corde que le plateau est suspendu. On tend un fil à plomb en face de l'extrémité du levier dans sa position d'équilibre, et l'on juge ainsi de la stabilité de l'équilibre établi.

V. Enfin M. Morin a indiqué un emploi plus complet du frein dynamométrique. Il ne se contente pas de mesurer, le travail correspondant à la vitesse du régime. Quand l'arbre tourne sans résistance, après avoir décalé le levier, on suspend dans le plateau un poids de 5 à 10 kilogrammes, et l'on serre les écrous jusqu'à ce que, la vitesse se ralentissant un peu, l'équilibre soit rétabli. On mesure cette vitesse, et par suite le travail produit. On ajoute un nouveau poids dans le plateau; on serre de nouveau les écrous jusqu'à ce que, la vitesse se ralentissant encore, on ait rétabli l'équilibre; on mesure cette vitesse et le travail produit. On augmente ainsi le poids graduellement jusqu'à ce qu'en serrant les écrous pour rétablir l'équilibre, on voie l'arbre s'arrêter ou tourner d'une manière tout à fait irrégulière. On a ainsi pour une série de vitesses, depuis la plus grande possible, jusqu'à la plus petite possible, le travail par seconde correspondant. On trace une courbe ayant pour abscisses les vitesses et pour ordonnées les valeurs correspondantes du rapport entre le travail du frottement et le travail du moteur. Cette courbe fait connaître la constitution de la machine; elle donne le travail correspondant à la vitesse de ré-

gime; de plus, elle fait connaître la vitesse qui correspond au *maximum d'effet utile*.

La figure 5 représente ainsi les résultats d'une série d'expériences faites sur une TURBINE (Voy. ce

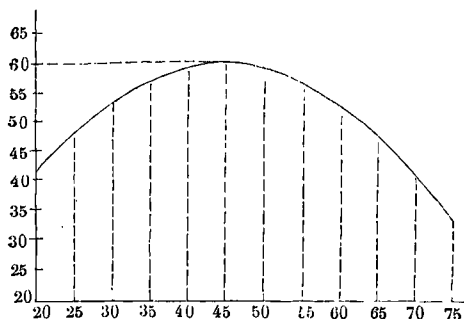


Fig. 5.

mot) du système Fontaine-Baron. Les abscisses sont proportionnelles aux nombres de tours de la roue dans une minute, et les ordonnées représentent les valeurs correspondantes du coefficient d'effet utile multipliées par le facteur 100. On voit que c'est vers 50 tours qu'a lieu le maximum d'effet utile, et que ce maximum est environ 0,60, c'est-à-dire que le maximum d'effet utile est les 0,60 du travail moteur.

(Voy. les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin).

FRETTE, cercle en fer dont on entoure le bout d'une pièce en bois pour l'empêcher d'éclater sous l'action d'un choc ou d'une forte pression longitudinale. La tête des pilots que l'on enfonce à l'aide du mouton est garnie d'une frette. On *frette* les moyeux des roues, le manche de divers outils, etc.

FRIMAIRE, le troisième mois du calendrier républicain; il répondait à peu près à l'intervalle compris entre le 22 novembre et le 22 décembre. (Voy. CALENDRIER.)

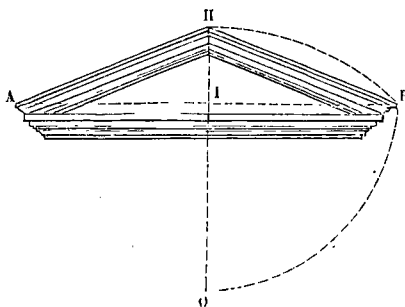
FRISE, partie moyenne de l'entablement. Sa hauteur est de 1 mod. $\frac{1}{3}$ dans l'ordre toscan,

de 1 mod. $\frac{1}{2}$ dans les autres ordres. La frise peut être lisse ou chargée d'ornements. Dans l'ordre toscan elle est généralement lisse. Dans l'ordre dorique elle est ornée de *triglyphes* séparés par des *métopes* (Voy. ORDRES).

On donne aussi le nom de *frise* à une partie de la corniche du piédestal de l'ordre corinthien et de l'ordre composite, qui rappelle par sa disposition la frise de l'entablement.

FRONTON, construction, le plus ordinairement triangulaire, qui forme le couronnement d'un édifice, et s'élève au-dessus de la frise. Un fronton se compose de deux corniches également inclinées AH et BH, et d'une troisième corniche horizontale AB sans cimaise, que l'on appelle la *base*. Les proportions d'un fronton sont assez variables; mais leur hauteur ou *montée* HI est généralement comprise entre le cinquième et le sixième de leur largeur AB. Sébastien Serlio, architecte du commencement du seizième siècle, a donné pour déterminer la

montée la construction suivante, qui a été reproduite par presque tous les auteurs: Sur le milieu de la droite AB qui joint les points les plus éloignés des deux corniches inclinées, c'est-à-dire les



points supérieur et externe des cimaises, on élève une perpendiculaire IO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre on décrit un arc de cercle passant par les points AB; cet arc coupe en un point H le prolongement de OI; on joint AH et BH, et l'on a l'inclinaison des deux corniches. On voit aisément que cette règle revient à faire l'angle AHB égal à l'angle d'un octogone régulier, c'est-à-dire à $\frac{3}{2}$ d'angle droit; la moitié OHB de cet angle

vaut donc $\frac{3}{4}$ d'angle droit, et par conséquent son complément HBI vaut $\frac{1}{4}$ d'angle droit, ou $22^{\circ} \frac{1}{2}$.

On trouvera à l'article MOULURES la construction à l'aide de laquelle on peut déterminer la section plane suivant laquelle les deux corniches inclinées se rencontrent.

L'espace compris entre les trois corniches porte le nom de *tympa*n; il est souvent orné de figures allégoriques.

On construit quelquefois des frontons circulaires, dans ce cas les deux corniches rectilignes AH et BH sont remplacées par une corniche circulaire qui suit l'arc de cercle AHB décrit dans la construction précédente.

On place aussi des frontons, soit triangulaires, soit circulaires, sur les portes, sur les fenêtres, sur les niches, etc.

Dans les grands monuments grecs ou romains, les frontons portent quelquefois, aux angles et au sommet, des piédestaux destinés à recevoir des statues; ces piédestaux portent le nom d'*acroteres*.

FROTTEMENT, résistance qu'un corps éprouve à glisser sur un autre corps.

I. L'expérience prouve que si un corps MM (fig. 1) est posé sur un plan horizontal AB, et primitivement animé d'une vitesse parallèle à ce plan, il ne tarde pas à perdre cette vitesse; et que, si l'on veut entretenir son mouvement uniforme, il faut lui appliquer, dans le sens du mouvement, une certaine force constante F. On en conclut que le glissement de l'un des corps sur l'autre fait naître une résistance de sens contraire au mouvement; c'est à cette résistance F que l'on donne le nom de *frottement*. On peut se rendre compte *a priori* de la cause qui

produit cette résistance. Dans la Mécanique abstraite, on suppose les corps solides parfaitement polis et parfaitement durs; on admet en conséquence que, lorsque deux corps solides se touchent, les réactions mutuelles qu'ils exercent l'un sur l'autre sont normales aux surfaces en contact; on ne concevrait pas en effet qu'il en fût autrement dans l'hypothèse dont nous parlons. Mais il n'en est pas ainsi dans la nature. Les corps qui paraissent les mieux polis sont hérissés d'aspérités; et ceux qu'on regarde comme les plus durs sont en réalité compressibles. Il en résulte que, lorsque deux corps sont maintenus en contact par une pression quelconque, les aspérités de la surface de l'un s'engagent entre les aspérités de la surface de l'autre, et que l'on ne peut les faire glisser l'un sur l'autre sans courber ou même arracher complètement ces aspérités. Une autre circonstance s'oppose en outre au glissement: c'est que celui des deux corps dont la surface de contact a la moindre étendue pénètre toujours, en vertu de la pression, d'une petite quantité dans la surface de l'autre, surtout si cette dernière est la plus compressible; en sorte que cette plus petite surface se trouve entourée d'un bourrelet saillant qu'elle est obligée de refouler devant elle pour pouvoir glisser sur la plus grande.

Nous avons tous les jours sous les yeux des effets du frottement très-remarquables, quoique très-vulgaires. C'est au frottement que nous devons de pouvoir marcher sur un sol uni et horizontal; il suffit, pour s'en convaincre, de se rappeler la difficulté qu'on éprouve à s'avancer sur une surface très-polie, comme on y est exposé, par exemple, en temps de verglas. C'est le frottement qui retient un clou dans la pièce de bois ou dans le mur où il a été enfoncé. C'est le frottement que l'on a à vaincre quand on débouche une bouteille; et ce frottement est souvent considérable, quoique l'une des deux surfaces en contact, celle du verre, soit généralement très-polie. On pourrait citer beaucoup d'autres exemples analogues.

II. Après avoir donné, pour ainsi dire, la définition physique du frottement, il faut en donner la définition mécanique. Soit F (fig. 1) la force qu'il

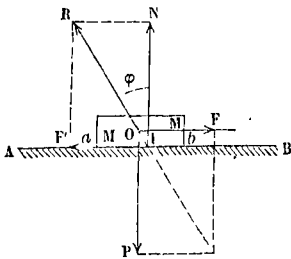


Fig. 1.

faut appliquer au corps MM, parallèlement au plan horizontal AB, et dans le sens du mouvement de ce corps, pour entretenir l'uniformité de ce mouvement. Le mouvement étant supposé uniforme, les forces qui sollicitent le corps sont en équilibre. Or il est soumis à son poids P, force verticale, et à la force F, force horizontale; pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'il reçoive du plan AB des réactions qui se réduisent à une résultante R, égale et

opposée à la résultante des forces F et P. Cette réaction R est donc inclinée sur la verticale en sens inverse du mouvement. Sa composante verticale N est égale et opposée au poids P; et sa composante horizontale F' est égale et opposée à la force F, c'est-à-dire parallèle au plan, et dirigée en sens contraire du mouvement. C'est cette composante que l'on appelle le frottement. On peut donc dire que le frottement est la composante tangentielle de la réaction des deux corps en contact, ou du corps fixe sur le corps en mouvement. Si les deux corps étaient en mouvement, il faudrait, par la pensée, réduire l'un des deux au repos et ne considérer que leur mouvement relatif (Voy. ce mot). Il ne faudrait pas conclure de cette définition que la réaction des deux corps soit oblique par rapport à la surface de contact réel de ces corps; il ne faut pas, en effet, confondre ici la surface réelle avec la surface apparente. La réaction R est oblique par rapport à la surface apparente, que nous avons supposée plane; mais elle est la résultante d'une multitude de forces partielles dont chacune est normale à la surface de l'aspérité qui la produit.

On appelle *angle du frottement* l'angle NIR que la réaction R fait avec la normale à la surface apparente; nous désignerons cet angle par φ. Les forces N et F' étant les composantes rectangulaires de R, on a

$$N = R \cos \varphi, \quad F' = R \sin \varphi, \quad \text{et} \quad F' = N \tan \varphi,$$

ou, comme N est égal à P,

$$F' = P \tan \varphi.$$

On appelle *coefficient du frottement* la tangente de l'angle φ par laquelle il faut multiplier la pression P pour avoir le frottement F'. On désigne cette tangente par f, et l'on écrit en conséquence

$$N = \frac{R}{\sqrt{1+f^2}}, \quad F' = \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}}, \quad F' = fN = fP.$$

On désigne habituellement par f, le sinus de l'angle φ, ou la quantité

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

par laquelle il faut multiplier la réaction R des deux corps pour avoir le frottement on écrit alors

$$F' = f_1 R.$$

Si les deux corps, au lieu de se toucher par une face plane, étaient en contact par des surfaces courbes quelconques, on pourrait, du moins aux environs du point de contact, substituer à ces surfaces leur plan tangent commun. On verrait comme ci-dessus que, lorsque l'un des deux corps glisse sur l'autre, la réaction de celui-ci est une force oblique au plan tangent aux surfaces apparentes et faisant un certain angle avec la perpendiculaire à ce plan, ou avec la normale commune aux surfaces apparentes, du côté opposé au mouvement. La composante tangentielle de cette réaction est ce qu'on nomme le *frottement*, et l'on appelle *angle du frottement* celui que la réaction elle-même fait avec la normale. En nommant toujours φ cet angle, f sa tangente, R la réaction, N sa composante normale, et F' le frottement, les formules ci-dessus établies subsisteront encore. En résumé, on appelle **FROTTEMENT** la composante tangentielle de la réaction de deux corps qui glissent l'un sur l'autre, et l'ANGLE DU FROTTEMENT est celui que fait cette

réaction avec la normale commune aux surfaces apparentes.

III. Amontons en France, Muschenbroek en Hollande, Désaguilliers en Angleterre, sont les premiers qui se soient occupés du frottement. Camus et Bossut s'en sont occupés à leur tour. Mais les recherches les plus importantes sur ce sujet sont dues à Coulomb, et à M. Morin qui a repris la question après cet habile ingénieur.

Les expériences faites par Amontons en 1699 consistaient à chercher l'inclinaison sous laquelle les divers corps commencent à descendre sur un plan incliné. Au moment où le mouvement est sur le point de se produire, on peut admettre que le corps est en équilibre sous l'action de son poids P (fig. 2) et de la réaction R du plan incliné. Ces deux forces sont donc égales, c'est-à-dire que la réaction R est

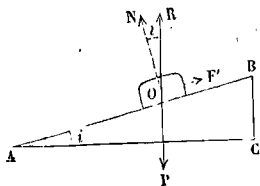


Fig. 2.

verticale. Elle fait donc avec la normale au plan un angle égal à l'inclinaison i du plan avec l'horizon, et l'on a $f = \tan i$.

Amontons a trouvé ainsi que le coefficient de frottement f était égal à $\frac{1}{3}$ pour les bois, le fer, le cuivre et le plomb, enduits de saindoux. Cette valeur est exagérée; cela tient à ce que le frottement au départ, c'est-à-dire au moment où le mouvement commence, est toujours plus grand que pendant le mouvement uniforme, ce qu'on ne savait pas du temps d'Amontons.

IV. Coulomb, officier du génie, et plus tard membre de l'Institut, a fait à Rochefort, en 1781, des expériences où il a plutôt deviné qu'observé les lois du frottement, et qui cependant méritent d'être rapportées, parce que la méthode qu'il a suivie a servi de base aux expériences plus modernes, et que les lois fondamentales découvertes par cet habile physicien n'ont pas été infirmées. Sur deux pièces de chêne AA' (fig. 3) de 12 pieds de long, placées horizontalement à 3 pouces l'une de l'autre et solidement établies sur le sol, était fixé un madrier de chêne BB', de 8 pieds de long, sur 16 pouces de large et 3 pouces d'épaisseur, terminé à ses deux bouts par deux taquets. A l'une des extrémités A' des deux pièces de chêne, et dans leur intervalle, était établie une poulie D en bois de galeac, parfaitement mobile. Sur le madrier BB' on plaçait un traîneau TT (qui est aussi représenté à part sur la figure) en bois de chêne, de 18 pouces de large, armé de deux crochets C et C', et garni en dessous de deux liteaux W' destinés à embotter le madrier, à cela près d'un jeu de deux ou trois lignes, et à servir ainsi de guide au traîneau. Au crochet C était attachée l'extrémité d'une corde très-mince et très-flexible, qui venait passer sur la poulie D, et

portait à son autre extrémité un plateau P destiné à recevoir des poids, et qui pouvait descendre dans un puits creusé au-dessous jusqu'à une profondeur de 4 pieds. Quand on voulait faire varier les sur-

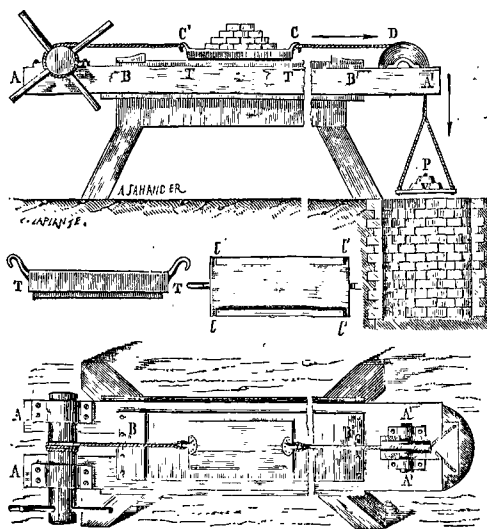


Fig. 3.

faces en contact, on clouait sur le madrier deux règles longitudinales de l'une des matières qu'on voulait expérimenter; deux règles de l'autre matière à éprouver étaient clouées de même sous le traîneau, afin de les faire glisser sur les premières. L'expérience se faisait de la manière suivante. Le traîneau étant placé vers l'extrémité B du madrier, on le chargeait d'un poids connu; on chargeait ensuite peu à peu le plateau P, jusqu'à ce que le traîneau se détachât de lui-même ou à l'aide d'une légère secousse. On observait sa marche au moyen de divisions tracées sur le côté du madrier; et l'on comptait, à l'aide d'un pendule battant les demisecondes, le temps qu'il employait à parcourir les 2 premiers pieds, et ensuite les 2 pieds suivants. Un petit treuil placé à l'extrémité A des pièces de chêne servait à ramener le traîneau à sa place pour recommencer l'expérience.

Voici maintenant le parti que Coulomb tirait des nombres observés. Soupçonnant que le frottement devait être constant pendant toute la marche du traîneau, il se proposait de vérifier cette hypothèse. Or, le traîneau était sollicité d'une part par la tension de la corde CD, que nous nommerons T, et de l'autre par le frottement que nous nommons F. Coulomb considérait la tension T comme sensiblement égale au poids P du plateau et de la charge: cette supposition n'est point exacte; mais, ne pouvant apprécier le temps qu'à une demi-seconde près, il eût été illusoire de prétendre à l'exactitude, et une approximation même grossière pouvait suffire. La résultante des forces T et F étant dès lors constante, le mouvement du traîneau devait être uniformément accéléré, puisque la projection horizontale de son poids était nulle (Voy. PROJECTION DU MOUVEMENT). Soit $e = \frac{1}{2}jt^2$ l'équation du mou-

vement du traîneau dans cette hypothèse, et soit $t + t'$ le temps employé à parcourir l'espace double $2e$, on devra avoir

$$2e = \frac{1}{2} j (t + t')^2,$$

par suite

$$(t + t')^2 = 2e,$$

d'où

$$t' = t (\sqrt{2} - 1) = 0,414.t.$$

Le temps employé par le traîneau à parcourir les deux derniers pieds devait donc être un peu moindre que la moitié du temps employé à parcourir les deux premiers, ce qui avait sensiblement lieu en effet. Connaissant l'espace total $2e$ et le temps $t + t'$ employé à le parcourir, on pouvait de l'équation ci-dessus tirer la valeur de l'accélération j .

La force produisant cette accélération avait alors pour expression (Voy. MESURE DES FORCES)

$$j \cdot \frac{Q}{g},$$

en désignant par Q le poids du traîneau et de sa charge. Mais cette force accélératrice ayant pour valeur $T - F$, ou $P - F$ puisqu'on suppose, T égal à P , on devait avoir

$$P - F = j \cdot \frac{Q}{g},$$

d'où

$$\frac{F}{Q} = \frac{P}{Q} - \frac{j}{g}, \text{ ou } f = \frac{P}{Q} - \frac{j}{g}.$$

(Coulomb calculait le rapport $\frac{Q}{P}$; mais il est plus commode de calculer directement son inverse.)

On voit que ces calculs étaient fondés sur une hypothèse inexacte; néanmoins les résultats qu'ils ont donnés avaient une exactitude suffisante pour la pratique.

V. Voici, au reste, la théorie exacte de cette expérience. En considérant d'abord le mouvement du traîneau, on a comme ci-dessus

$$T - F = j \cdot \frac{Q}{g}; \text{ d'où } j = g \cdot \frac{T - F}{Q}.$$

Considérons le mouvement de la poulie, soit r le rayon de sa gorge, I son MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot), et γ son ACCÉLÉRATION ANGULAIRE (Voy. ce mot); en nommant T' la tension du cordon vertical qui sollicite la poulie, on aura

$$\gamma = \frac{T'r - Tr}{I}.$$

Si l'on désigne par p un poids fictif qui, placé à la distance r de l'axe de la poulie, aurait le même moment d'inertie, ce qui suppose

$$I = \frac{p}{g} \cdot r^2,$$

on pourra écrire

$$\gamma r = g \cdot \frac{T' - T}{p}.$$

Considérons maintenant le mouvement du plateau; son accélération étant la même que celle du traîneau, attendu que la corde peut être regardée comme inextensible, on aura

$$j = g \cdot \frac{P - T'}{P}.$$

Or γr n'est autre chose que j , attendu que la corde est supposée ne point glisser sur la gorge de la poulie. Si donc on ajoute terme à terme les trois

valeurs de j ainsi obtenues, on aura une nouvelle valeur de cette quantité, dans laquelle les tensions T et T' auront disparu, savoir

$$j = g \cdot \frac{P - F}{Q + p + P}.$$

L'expérience montre que j est constant, il faut donc que F le soit. On tire en outre de cette relation

$$\frac{F}{Q} = \frac{P}{Q} - \frac{j}{g} \left(1 + \frac{P + p}{Q} \right).$$

On voit que Coulomb négligeait vis-à-vis de l'unité le rapport $\frac{P + p}{Q}$; mais, comme ce rapport,

plus petit que l'unité, devait être multiplié par $\frac{j}{g}$ qui dans les expériences de Coulomb n'a jamais atteint $\frac{1}{60}$, l'erreur commise était négligeable, au degré d'approximation que comportaient ces expériences.

VI. Dans les expériences très-nombreuses que Coulomb a faites d'après la méthode qui vient d'être exposée, il a mis à l'épreuve les principales espèces de bois et de métaux employés dans les machines, soit à sec, soit avec divers enduits, les cuirs, les pierres, etc. L'étendue des surfaces a varié depuis 3 pieds carrés (0^m,3166) jusqu'à une simple arête arrondie; les charges du traîneau ont varié depuis 25 livres jusqu'à 6588 livres, ou depuis 12^k,24 jusqu'à 3224 kilogrammes. Les vitesses seules sont restées comprises dans des limites assez étroites;

elles n'ont guère dépassé 1 pied $\frac{1}{2}$, ou un peu moins

d'un demi-mètre par seconde. La comparaison des résultats obtenus a conduit Coulomb aux trois lois fondamentales suivantes:

1° *Le frottement est proportionnel à la pression normale;*

2° *Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact;*

3° *Le frottement est indépendant de la vitesse.*

Il a constaté que le frottement au départ est plus grand que pendant le mouvement même, surtout après un certain temps de repos, lorsque l'un des corps est très-compressible; il a vérifié que le frottement au départ est proportionnel à la pression. Il a cru reconnaître en outre que le frottement se composait de deux parties, l'une proportionnelle à l'étendue des surfaces en contact et qu'il a nommée l'adhérence, l'autre indépendante de cette étendue.

Il y a plusieurs remarques à faire sur ces lois. En vertu de la première, si F désigne le frottement, N la pression normale, φ l'angle du frottement et f la tangente de cet angle, on a

$$\frac{F}{N} = \text{tang } \varphi = f = \text{une constante}$$

pendant toute la durée du mouvement, et pour les mêmes matières, quelles que soient l'étendue des surfaces et la vitesse du mouvement (du moins dans les limites des expériences); c'est ce rapport f , constant pour les mêmes matières, qu'on a nommé le coefficient de frottement; c'est le coefficient numérique par lequel il faut multiplier la pression normale pour obtenir le frottement. La seconde loi est naturellement soumise à une restriction. Si l'une des surfaces en contact avait une étendue tellement

petite qu'il y eût une pénétration notable de l'un des corps dans l'autre, le glissement deviendrait impossible; il y aurait arrachement, et le phénomène ne serait plus soumis aux lois ordinaires du frottement. Coulomb pensait que la troisième loi n'était pas absolue, et que le frottement pouvait croître lentement avec les vitesses. Cette opinion n'a pas été confirmée par les expériences plus récentes. L'erreur de Coulomb doit être attribuée au peu d'étendue des variations de la vitesse dans ses expériences, qui ne lui ont pas permis d'en étudier l'influence d'une manière très-certaine.

VII. Pour éclaircir les doutes qui pouvaient subsister après les expériences de Coulomb, et pour étendre les recherches sur le frottement à un plus grand nombre de corps, M. Morin a repris la question en 1831-32-33-34, et il a fait, à Metz, une série d'expériences nouvelles, fondées sur l'emploi de la méthode de Coulomb, mais en y introduisant plusieurs perfectionnements importants.

Nous venons de voir que la trop faible étendue de la course du traîneau dans les expériences de Coulomb, et par suite les trop faibles variations de la vitesse, avaient la même quelque incertitude sur la troisième loi. M. Morin s'est ménagé des courses de 3 à 4 mètres, et a pu faire varier ainsi la vitesse jusqu'à 3^m,50 par seconde.

Coulomb supposait la tension de la corde égale au poids du plateau et de sa charge. M. Morin a observé directement cette tension en interposant entre le traîneau et la corde un dynamomètre à style (Voy. APPAREILS DYNAMOMÉTRIQUES).

On a vu plus haut comment Coulomb s'assurait que le mouvement du traîneau était uniformément accéléré. M. Morin a remplacé ce moyen imparfait par l'observation directe du mouvement de la poulie. Sur l'axe AA' de la poulie (fig. 4), et en

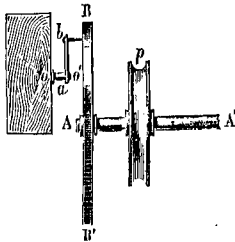


Fig. 4.

dehors des poutres entre lesquelles elle était comprise, était monté un disque circulaire BB' recouvert d'une feuille de zinc qu'on pouvait enlever et qui était recouverte elle-même d'une feuille de papier. Parallèlement à ce disque, était établi un petit bras ab armé d'un pinceau, et auquel un mécanisme d'horlogerie donnait un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe ao parallèle à AA'. Lorsque la poulie était immobile, le pinceau ne pouvait tracer sur le disque qu'une circonférence de cercle ayant pour rayon ab. Mais pendant le mouvement de la poulie le pinceau traçait sur le disque une courbe telle que 1. 2'. 3'. 4'... (fig. 5) qui donnait, comme on va le voir, la loi du mouvement de la poulie. Comme on obtenait ainsi chaque jour un grand nombre de courbes de ce genre, M. Morin employait, pour les relever et les transformer ensuite en d'autres d'un usage plus commode, un petit instrument imaginé par M. Didion, et qui est représenté sur la figure 5. Après avoir détaché la feuille de zinc du plateau, on l'appliquait sur l'instrument, dont le limbe était divisé en 1000 parties égales; elle s'y trouvait immédiatement centrée.

Au centre O s'adaptait une alidade OA, portant en un point C de sa longueur une étoile à 10 pointes uniformément réparties sur la circonférence que le pinceau eût décrite sur le plateau en repos. On

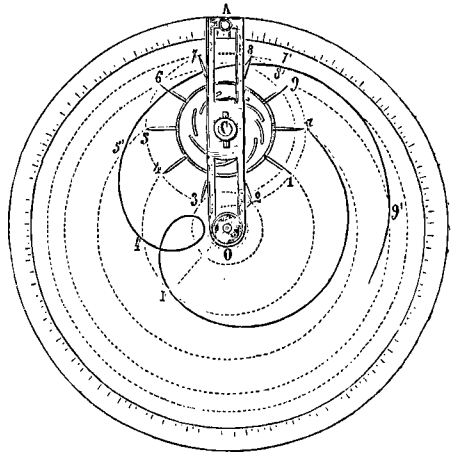


Fig. 5.

desserrait la vis de pression qui fixait l'étoile à l'alidade, et on la faisait tourner de manière qu'une de ses pointes, la pointe 1 par exemple, vint coïncider avec l'origine de la courbe; on serrait alors la vis, et l'étoile se trouvait rendue solidaire avec l'alidade. On faisait alors tourner l'alidade autour du centre O jusqu'à ce que la pointe 2 de l'étoile vint se placer sur la courbe, en 2'; et l'on comptait sur le limbe le nombre de divisions parcourues par l'extrémité A de l'alidade. Ce nombre de divisions mesurait le chemin parcouru par un point de la circonférence du plateau pendant le temps employé par le pinceau

à faire $\frac{1}{10}$ de tour; car il est aisé de voir que, pour que le pinceau se place en 2', il faut qu'il tourne autour de son axe d'un arc égal à l'arc 1.2, tandis que le plateau tourne en sens contraire (dans le sens de la flèche) d'un angle égal à 202', lequel angle est mesuré précisément par la course de l'extrémité A de l'alidade. De même, si l'on fait mouvoir l'alidade autour du point O jusqu'à ce que la pointe 3 de l'étoile vienne se placer sur la courbe, en 3', le nombre de divisions parcourues sur le limbe par l'extrémité A de l'alidade, à partir de sa position initiale, mesurera le chemin parcouru par un point quelconque de la circonférence du plateau pendant que le pinceau fait $\frac{2}{10}$ de tour, et ainsi de suite. Or,

le mouvement du pinceau étant uniforme, les arcs qu'il décrit sont proportionnels aux temps; les chemins décrits par un point quelconque de la circonférence du plateau sont au contraire proportionnels aux chemins décrits par un point quelconque de la gorge de la poulie, ou, ce qui revient au même, par le traîneau; la courbe 1. 2'. 3'. 4'... représente donc la loi du mouvement du traîneau. Pour transformer cette courbe en une autre plus commode, M. Morin traçait deux axes rectangulaires; il portait en abscisses des longueurs proportionnelles aux arcs décrits par le plateau (et mesurés par la course de

l'validade), et en ordonnées des longueurs proportionnelles aux arcs décrits par le pinceau (et mesurés par les arcs qui séparent les pointes de l'étoile). Par les points ainsi obtenus, il faisait passer une courbe à laquelle il menait à vue des tangentes; par le point où chacune de ces tangentes venait couper l'axe des *y*, il lui élevait une perpendiculaire, et il constatait que toutes ces perpendiculaires venaient se couper en un même point *F*, propriété qui caractérise la parabole. Il en concluait que les abscisses étaient proportionnelles aux carrés des ordonnées, c'est-à-dire que les espaces parcourus par le traîneau étaient proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir, ce qui caractérise le mouvement uniformément accéléré. Comme la vitesse du pinceau était connue, on en pouvait conclure le temps employé par lui à faire $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$, etc....

de tour; et comme, d'un autre côté, le chemin décrit par le traîneau, pour une fraction quelconque de tour du plateau, pouvait se déduire du rayon de celui-ci, on avait tous les éléments nécessaires pour calculer l'accélération du traîneau, donnée par la relation
$$j = \frac{2e}{t^2},$$

et la valeur du frottement *F* s'en déduisait comme nous l'avons indiqué plus haut, avec cette différence toutefois que M. Morin négligeait l'inertie de la poulie, dont l'influence est, en effet, peu sensible.

VIII. M. Morin a mis en expérience un très-grand nombre de substances diverses, en variant les enduits. Nous avons dit que les vitesses ont varié de zéro à 3^m,50; l'étendue des surfaces en contact a varié depuis une simple arête arrondie jusqu'à 9 dé-

cimètres carrés; les charges ont varié depuis 45^{kg} jusqu'à 2800^{kg}. Dans ces limites, les deux premières lois données par Coulomb ont été confirmées; les conjectures de Coulomb relativement à l'accroissement du frottement avec la vitesse, n'ont point paru fondées, et l'on doit regarder le frottement comme indépendant de la vitesse.

Le frottement est d'autant moindre que les surfaces en contact sont mieux polies; cependant, pour celles dont le poli est le plus parfait, le frottement n'est pas nul. Ainsi, dans les machines neuves, le frottement est toujours plus considérable; mais quand les surfaces se sont naturellement rodées et polies, il atteint un minimum au-dessous duquel il ne peut plus s'abaisser.

Les enduits gras diminuent le frottement, parce qu'ils isolent pour ainsi dire les corps et que le contact n'a lieu que par l'intermédiaire de l'enduit. Cela peut tenir en même temps à la forme globuleuse qu'on attribue à leurs molécules. Toutefois, pour qu'ils soient efficaces, il faut qu'ils ne deviennent pas trop visqueux; lorsqu'ils se sont chargés de molécules solides arrachées par le frottement, ils se forment parfois en grumeaux durs qui sillonnent les surfaces frottantes, les altèrent et augmentent le frottement. Les enduits ont besoin, à cause de cela, d'être fréquemment renouvelés. Une autre raison qui rend ce renouvellement nécessaire, c'est que sous de grandes charges les enduits sont promptement expulsés. Les meilleurs enduits sont, pour de grandes charges, le suif et le saindoux; pour les petites, l'huile.

Voici le tableau des résultats obtenus par M. Morin pour les principales substances.

DÉSIGNATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT DES SURFACES.	COEFFICIENT de frottement <i>f</i> .
Chêne sur chêne.....	parallèles.....	sans enduit.....	0,48
Id.....	id.....	savonnées à sec.....	0,16
Id.....	perpendiculaires.	sans enduit.....	0,34
Id.....	id.....	mouillées d'eau.....	0,23
Id.....	bois debout sur		
Orme sur chêne... ..	bois à plat... ..	sans enduit.....	0,19
Id.....	parallèles.....	id.....	0,43
Id.....	perpendiculaires.	id.....	0,45
Frêne, sapin, hêtre, poirier sauvage et sorbier sur			
chêne.....	parallèles.....	id.....	0,36 à 0,40
Fer sur chêne.....	id.....	mouillées d'eau.....	0,26
Id.....	id.....	savonnées à sec.....	0,21
Fente sur chêne.....	id.....	sans enduit.....	0,49
Id.....	id.....	mouillées d'eau.....	0,22
Id.....	id.....	savonnées à sec.....	0,19
Cuivre jaune sur chêne.....	id.....	sans enduit.....	0,62
Fer sur orme.....	id.....	id.....	0,25
Fente sur orme.....	id.....	id.....	0,20
Cuir noir corroyé sur chêne.....	id.....	id.....	0,27
Cuir tanné sur chêne.....	à plat ou de champ	sans enduit.....	0,30 à 0,35
Id.....	id.....	mouillées d'eau.....	0,29
Cuir tanné sur fonte et sur bronze.....	à plat ou de champ	sans enduit.....	0,56
Id.....	id.....	mouillées d'eau.....	0,36
Id.....	id.....	onctueuses et mouillées d'eau.....	0,23
Id.....	id.....	huilées.....	0,15
Chanvre sur chêne.....	parallèles.....	sans enduit.....	0,52
Id.....	perpendiculaires.	mouillées d'eau.....	0,33
Chêne et orme sur fonte.....	parallèles.....	sans enduit.....	0,38
Poirier sauvage sur fonte.....	id.....	id.....	0,44
Fer sur fonte et sur bronze.....	id.....	id.....	0,18 (*)
Fente sur fonte et sur bronze.....	id.....	id.....	0,15
Bronze sur bronze.....	id.....	id.....	0,20
Bronze sur fonte.....	id.....	id.....	0,22

DÉSIGNATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT DES SURFACES.	COEFFICIENT de frottement <i>f</i> .
Bronze sur fer.....	parallèles.....	id.....	0,16 (*)
Bois et métaux, glissant l'un sur l'autre ou sur eux-mêmes.....	id.....	enduites de suif, saindoux, cambouis	0,07 à 0,08
Id.....	id.....	légèrement onctueuse.....	0,15
Calcaire oolithique sur lui-même.....	id.....	sans enduit.....	0,64
Muschelkalk sur calcaire oolithique.....	id.....	id.....	0,67
Brique sur calcaire oolithique.....	id.....	sans enduit.....	0,65
Chêne sur calcaire oolithique.....	bois debout.....	id.....	0,38
Fer forgé sur calcaire oolithique.....	parallèles.....	id.....	0,69
Muschelkalk sur lui-même.....	id.....	id.....	0,38
Calcaire oolithique sur muschelkalk.....	id.....	id.....	0,65
Brique sur muschelkalk.....	id.....	id.....	0,60
Chêne sur muschelkalk.....	bois debout.....	id.....	0,38
Fer sur muschelkalk.....	parallèles.....	id.....	0,24
Id.....	id.....	inouillées d'eau.....	0,30

Les nombres marqués du signe (*) se rapportent à des surfaces sans enduit, mais conservant encore un peu d'onctuosité.

Le tableau suivant donne le rapport du frottement à la pression pour les surfaces planes, au départ et après un certain temps de repos. Il est applicable, par exemple, aux manœuvres de vannes, et aux machines au moment de la mise en train.

DÉSIGNATION des surfaces en contact.	ÉTAT DES SURFACES ou nature de l'enduit.	COEFFICIENT de frottement <i>f</i>
Bois sur bois.....	à sec.....	de 0,30 à 0,70
Id.....	mouillées d'eau.....	de 0,65 à 0,81
Id.....	enduites de suif.....	de 0,12 à 0,25
Id.....	simplem ^t onctueuses.....	de 0,30 à 0,40
Bois et métaux.....	à sec.....	0,60
Id.....	mouillées d'eau.....	0,65
Id.....	enduites de suif.....	0,12
Id.....	onctueuses et polies.....	0,10
Chanvre sur bois.....	à sec.....	de 0,50 à 0,80
Id.....	mouillées d'eau.....	0,87
Cuir sur bois ou fonte.....	à sec.....	de 0,43 à 0,62
Id.....	mouillées d'eau.....	de 0,62 à 0,80
Id.....	huilées.....	de 0,12 à 0,13
Métaux sur métaux.....	à sec.....	de 0,15 à 0,24
Id.....	huilées.....	de 0,11 à 0,19
Id.....	enduites de saindoux.....	0,10
Id.....	onctueuses et polies.....	de 0,12 à 0,17
Calcaire tendre sur lui-même.....	bien dressé.....	0,74
Calcaire dur sur calcaire tendre.....	id.....	0,75
Calcaire dur sur lui-même.....	id.....	0,70
Brique sur calcaire.....	id.....	0,67
Chêne debout sur calcaire tendre.....	id.....	0,63
Chêne debout sur calcaire dur.....	id.....	0,64
Fer forgé sur calcaire tendre.....	id.....	0,49
Fer forgé sur calcaire dur.....	id.....	0,42

Pour les corps compressibles, le rapport du frottement à la pression varie nécessairement suivant la durée du contact, et l'on ne peut indiquer que les limites extrêmes. Il convient d'ajouter qu'une légère secousse suffit quelquefois pour déterminer le mouvement, et que par conséquent les nombres

portés dans le tableau qui précède ne sauraient être regardés comme absolus.

Cette remarque semble justifier l'opinion de Coulomb à l'égard du rôle que l'adhérence joue dans le frottement au départ.

Les lois du frottement sont encore applicables aux pierres scellées en bain de mortier ou en plâtre, tant que le bain conserve une demi-fluidité. Le coefficient du frottement paraît être dans ce cas de 0,76 à 0,78. Mais lorsque le mortier ou le plâtre ont pris, l'adhérence remplace le frottement; et la résistance au glissement, au lieu d'être proportionnelle à la pression et indépendante de l'étendue des surfaces, devient au contraire sensiblement proportionnelle à l'étendue des surfaces en contact, et à peu près indépendante de la pression (*Voy. ADHÉRENCE*).

IX. Tout ce qui précède se rapporte au frottement des surfaces planes dans le mouvement de translation. Mais il était nécessaire de faire des expériences spéciales pour les surfaces courbes, dans le cas surtout où les divers points de l'une d'elles viennent successivement frotter au même point de l'autre, comme cela a lieu pour les tourillons d'une roue par rapport à leurs paliers ou leurs coussinets.

Coulomb a fait ces expériences au moyen de poulies dont il faisait varier les coussinets et les axes. Une corde très-flexible, s'enroulant sur la gorge de la poulie, portait des poids égaux à ses deux extrémités; on ajoutait d'un côté des poids additionnels jusqu'à ce que le mouvement commençât dans le sens de ces poids; on observait le temps employé par le poids ainsi augmenté à parcourir les trois premiers pieds, puis les trois pieds suivants. On concluait, comme plus haut, de cette observation, que le mouvement était uniformément accéléré, et que, par suite, le frottement restait constant pendant toute la durée du mouvement. Pour trouver son intensité, on suivait une marche analogue à celle qui a été indiquée pour le mouvement de translation, mais fondée sur l'expression de l'accélération angulaire.

M. Morin a repris les expériences de Coulomb, en y introduisant des perfectionnements analogues à ceux qu'il avait apportés aux expériences sur le

frottement dans le mouvement de translation. Ces diverses expériences ont fait voir que les lois du frottement sont les mêmes pour les tourillons et coussinets que pour les surfaces planes, sauf de légères différences dans la grandeur du coefficient de frottement. Voici les principaux résultats des

DÉSIGNATION des surfaces en contact.	ÉTAT DES SURFACES.	COEFFICIENT de frottement f , lorsque l'enduit est renouvelé	
		à la manière ordinaire.	d'une manière continue.
Fonte sur fonte.....	enduites d'huile d'olive, de saindoux, de suif ou de cambouis mou.	0,07 à 0,08	0,054
Id.....	simplement onctueuses.....	0,14	»
Fonte sur bronze.....	avec enduit.....	0,07 à 0,08	0,054
Id.....	simplement onctueuses.....	0,16	»
Fonte sur bois de gaïac.....	sans enduit.....	0,18	»
Id.....	avec huile ou saindoux.....	0,10	»
Id.....	avec saindoux et plombagine.....	0,14	»
Fer sur fonte.....	avec enduit.....	0,07 à 0,08	0,054
Fer sur bronze.....	Id.....	0,07 à 0,08	0,054
Id.....	simplement onctueuses.....	0,19	»
Id.....	très-peu onctueuses.....	0,25	»
Fer sur bois de gaïac.....	avec huile ou saindoux.....	0,11	»
Id.....	onctueuses.....	0,19	»
Bronze sur bronze.....	enduites d'huile.....	0,10	»
Id.....	enduites de saindoux.....	0,09	»
Bronze sur fonte.....	avec huile ou suif.....	»	0,045 à 0,052
Bois de gaïac sur fonte.....	enduites de saindoux.....	0,12	»
Id.....	onctueuses.....	0,15	»
Gaïac sur gaïac.....	enduites de saindoux.....	»	0,07

expériences de M. Morin sur le frottement des tourillons.

Dans les questions usuelles, on peut faire usage du tableau suivant, qui donne les valeurs moyennes du coefficient de frottement et celles de l'angle du frottement, utiles à connaître pour l'application de certaines formules.

NATURE DES SURFACES FROTTANTES.	f	φ
Bois sur bois, à sec.....	0,36	19° 18' environ.
Id. avec enduit gras....	0,07	4 " —
Bois et métaux, à sec.....	0,42	22 47 —
Id. avec enduit gras....	0,08	4 35 —
Métaux sur métaux, à sec.....	0,19	10 46 —
Id. avec enduit gras....	0,09	5 9 —
Corde mouillée sur bois.....	0,33	18 16 —
Corde sur fonte, avec enduit gras....	0,15	8 32 —
Cuir sur bois ou métal, à sec.....	0,30	16 42 —
Id. avec enduit.....	0,20	11 19 —
Fer forgé sur pierre.....	0,45	24 14 —
Pierre sur bois.....	0,40	21 48 —
Pierre sur pierre.....	0,76	37 14 —

Voyez l'Introduction à la Mécanique industrielle, de M. Poncelet; les Leçons de Mécanique pratique, de M. Morin, et le mémoire de Coulomb sur les Machines simples. Pour les applications du frottement, voyez les art. PLAN INCLINÉ, COIN, VIS, TREUIL, POULIE, ENGRENAGES, et les articles relatifs aux principaux organes de machines.

X. Les récentes recherches entreprises sur la transformation de la chaleur en travail, et vice versa (Voy. ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR), ont montré qu'une partie du travail consommé par le frottement est employée à élever la température des surfaces frottantes. Cet échauffement produit par le frottement est un effet depuis longtemps observé. Mais on a voulu en conclure que toute la perte de

travail était due à cette cause, et on a été jusqu'à nier le frottement lui-même. Or tout le monde sait que les tourillons des arbres tournants s'usent, ainsi que leurs coussinets, et que les matières lubrifiantes dont on les enduit ne tardent pas à s'épaissir, en se chargeant de particules métalliques. Il y a donc bien là un travail moléculaire effectué, et ce travail représente en grande partie la perte de travail moteur causée par le frottement. Néanmoins il y a lieu désormais de tenir compte, pour l'explication des pertes de travail produites, de l'élévation de température observée, sans que cette intervention de la chaleur puisse du reste modifier en rien les formules reçues ni les tables relatives au frottement, lesquelles sont un résultat d'expériences indépendant de toute explication théorique.

FROTTEMENT DE ROULEMENT. Voy. ROULEMENT (Résistance au).

FRUCTIDOR, le douzième mois du calendrier républicain; il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 19 août et le 19 septembre (Voy. CALENDRIER).

FRUIT, inclinaison, par rapport à la verticale, d'un mur dont l'épaisseur va en augmentant vers le bas.

FUNICULAIRE (POLYGONE). Voy. POLYGONE FUNICULAIRE.

FÛT, partie moyenne ou corps d'une colonne. Dans les colonnes ordinaires, la surface du fût est une surface de révolution, et galber une colonne, c'est tracer la génératrice de cette surface. Voici la construction indiquée par Vignole pour galber les colonnes des ordres toscan et dorique. Soit AO (fig. 1) le demi-diamètre de la colonne, au tiers de sa hauteur à partir du bas, et soit CH son axe, de telle sorte que la longueur OH représente les deux tiers supérieurs de la hauteur de la colonne. On divise cette droite en 6 parties égales, et, par les

points de division on lui élève des perpendiculaires. Sur la dernière on prend une longueur GH égale au plus petit rayon que la colonne doit avoir, c'est-à-dire à AO diminué au sixième, ou du huitième, suivant la proportion adoptée (Voy. COLONNE). Du point O comme centre avec OA pour rayon, on décrit un quart de cercle, et par le point G on mène à OH une parallèle qui rencontre ce quart de cercle

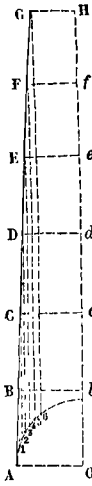


Fig. 1.

en un point 6. On divise l'arc A6 en 6 parties égales, et par les points de division 1, 2, 3, 4, 5, on mène à l'axe les parallèles 1.B, 2.C, 3.D, 4.E, 5 F, qui, par leur rencontre avec les perpendiculaires bB, cC, dD, eE, fF, déterminent les points B, C, D, E, F, appartenant à la génératrice cherchée. Par ces points et par les points A et G, on fait passer à la main une courbe continue, qui exprime le galbe de la colonne.

Il est facile d'avoir l'équation de cette courbe. Si l'on prend OA pour axe des y et OH pour axe des x, en appelant α l'une des divisions de l'arc A6, h l'une des divisions de OH, et r le rayon OA, on aura pour un point quelconque, correspondant à n divisions,

$$y = r \cos n\alpha \text{ et } x = nh,$$

par conséquent

$$y = r \cos \frac{\alpha}{h} x,$$

c'est-à-dire que la courbe est une sinusoïde particulière.

Pour les ordres ionique, corinthien et composite, Vignole adopte la méthode du renflement au tiers de la colonne à partir du bas, et il donne pour galber le fût la construction suivante : Soit OA (fig. 2)

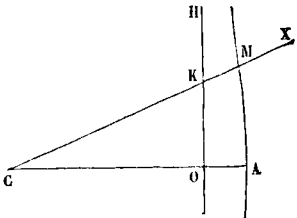


Fig. 2.

le demi-diamètre de la colonne à la hauteur du renflement (OA est égal à 1 module, 1 partie $\frac{1}{3}$);

et soit OH l'axe de la colonne. On porte sur le prolongement de OA, une longueur AC égale à 7 modules. Cela posé, pour obtenir un point quelconque de la génératrice cherchée, on mène par 1: point C, une droite quelconque OX, qui rencontre l'axe en un point K; sur cette droite, à partir du point K, on prend une longueur KM égale à OA; le point M ainsi obtenu est un point de la génératrice. On voit que cette courbe n'est autre chose qu'une conchoïde.

Les colonnes torsées ont les mêmes sections horizontales que les colonnes ordinaires, en sorte que pour les tracer il faut commencer par les galber comme les colonnes droites. Mais les centres des sections, au lieu de se trouver sur une verticale, sont situés sur une hélice. Si donc la courbe abcdef (fig. 3) est la projection de cette hélice, dont le rayon a ordinairement 8 parties de module ou $\frac{2}{9}$ de module, et le pas

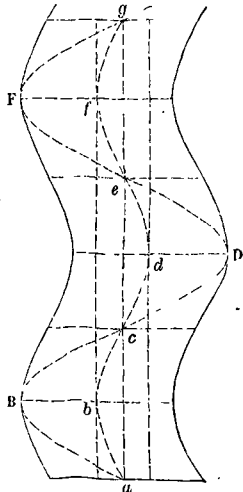


Fig. 3.

une hauteur égale au 6^e de celle de la colonne, il n'y a plus qu'à mener par les points a, b, c, d, e, f de l'hélice, des horizontales sur lesquelles on prend, de part et d'autre de ces points, des longueurs égales aux demi-diamètres de la colonne droite correspondant à la même hauteur. Les points ainsi obtenus déterminent le contour apparent de la colonne torsée. Les points saillants des diverses sections horizontales forment une hélice de même pas que l'hélice abcdefg, mais d'un rayon plus grand, qui se projette verticalement suivant la courbe aBcDeF.

FUYANTES, terme de Perspective, droites qui représentent en perspective un faisceau de parallèles, et qui vont concourir au point de vue principal ou à un point de vue accidentel.

Dans la Perspective cavalière, les fuyantes sont des droites parallèles sur lesquelles se mesure la dimension perpendiculaire à la face principale du corps, ou au plan de la figure.

G

GABARIAGE, face plane tracée d'après un GABARIT (Voy. ce mot). Ce mot est surtout usité dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot). Un couple droit, par exemple, présente un gabariage d'avant et un gabariage d'arrière. Le plan suivant lequel deux demi-couples sont juxtaposés, porte le nom de plan de gabariage. Mais on applique ce mot par extension aux faces planes de chaque demi-couple ;

et l'on dit, par exemple, qu'un point est situé à telle distance du gabariage d'avant ou du gabariage d'arrière, pour dire qu'il est placé à cette distance de la face plane antérieure ou de la face plane postérieure.

GABARIT, patron, en vraie grandeur, d'une face plane d'une pièce de construction, ou du contour de cette face. Un gabarit s'exécute ordinairement

en planches minces. Dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot), les gabarits se prennent de deux manières : ou d'après un tracé en vraie grandeur exécuté, conformément au devis, sur le plancher de la salle dite *salle des gabarits*, ou d'après des mesures prises dans le chantier sur la construction même. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse d'un gabarit à prendre à la salle. Il s'agit de relever le contour d'une courbe concave ABCDE (fig. 1); on pose une planche mince de manière

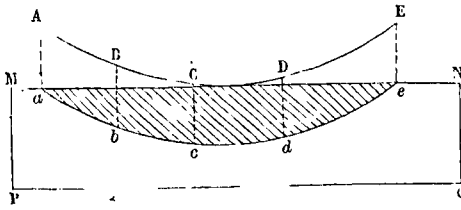


Fig. 1.

qu'une de ses arêtes MN soit tangente à la courbe vers sa partie moyenne; on prend, perpendiculairement à cette arête, une série d'ouvertures de compas égales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; et l'on obtient ainsi sur la planche une série de points a, b, c, d, e, qui déterminent une courbe abcde égale et superposable à ABCDE; on fait sauter à la scie ou à la hache le bois excédant, indiqué sur la figure par des hachures; et l'on a le gabarit de la courbe concave. S'il s'agit de relever le gabarit d'une courbe convexe ABCDE (fig. 2), on place la planche de manière

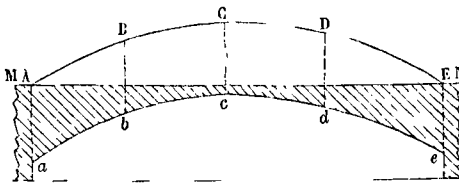


Fig. 2.

nière que son arête MN forme la corde de l'arc de courbe; on prend comme ci-dessus, perpendiculairement à MN, une série d'ouvertures de compas égales, Aa, Bb, etc.; et l'on détermine la courbe abcde égale et superposable à ABCDE; on fait sauter le bois excédant figuré par des hachures, et l'on a le gabarit de la courbe convexe. S'il s'agit d'une

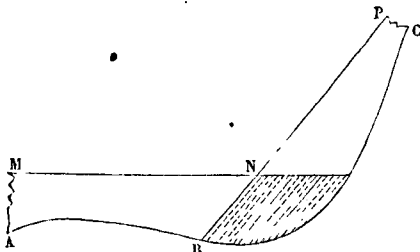


Fig. 3.

courbe de quelque étendue, et pouvant offrir des inflexions, on dispose plusieurs planches bout à bout; on les amincit à l'extrémité en contact, de manière qu'en superposant les bouts amincis on

obtienne une épaisseur égale à celle de la planche même, et l'on fixe ces extrémités l'une sur l'autre par un nombre suffisant de pointes. La figure 3 montre deux planches ABNM, BCPN ainsi assemblées pour former le gabarit d'une courbe sinueuse ABC. Lorsque la courbe est très-étendue et doit être traitée avec soin, après en avoir déterminé un certain nombre de points, a, b, c, d, e, f (fig. 4), on plante près de chacun d'eux deux clous, l'un contre la courbe même, l'autre à une petite distance; puis

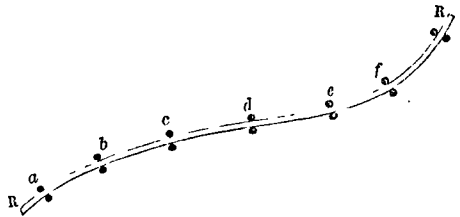


Fig. 4.

entre les couples de clous ainsi placés, on introduit une règle pliante RR, à l'aide de laquelle on peut tracer la courbe d'une manière continue et avec beaucoup d'exactitude.

Nous supposons en second lieu qu'il s'agisse d'un gabarit à obtenir sur place dans le chantier même; et nous prendrons pour exemple le gabarit d'un couple de remplissage (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Ce gabarit est déterminé par les lisses d'exécution. On joint, par des cordes tendus, le point de la contrequille qui correspond au couple considéré, avec les points de la lisse de plat-bord qui correspondent au même couple; on a ainsi deux droites situées dans le plan du couple, et qui déterminent ce plan. On vise dans ce plan de manière que l'un des cordes cache l'autre, et l'on fait marquer sur les lisses les points cachés par les cordes réunis; ces points sont dans le plan du couple et vont servir à lever son gabarit. Pour cela on présente une planche mince dans le plan du couple, de manière qu'une de ses arêtes corresponde à plusieurs des points obtenus sur les lisses consécutives, et on l'entaille en regard de ces points, de manière que le fond des entailles s'applique exactement sur ces lisses. Si les lisses ne sont pas assez nombreuses, on y supplée par des lattes clouées sur les couples de levée, parallèlement aux lisses. On a ainsi sur la planche mince un certain nombre de points appartenant au contour du couple; on les réunit par une courbe; et en faisant sauter le bois excédant le fond des entailles, on a le gabarit d'une portion de ce couple. On obtient de la même manière les gabarits des autres portions; et l'on peut les réunir en assemblant les planches bout à bout, comme il a été dit ci-dessus.

Tous les gabarits s'obtiennent par des procédés analogues à ceux qui viennent d'être exposés. Pour s'en servir dans l'exécution des pièces, il suffit de poser le gabarit sur une face plane préalablement dressée, et d'en suivre le contour avec une pointe à tracer; on a ainsi sur la pièce même le contour indiqué par le gabarit.

GAILLARDS, extrémités du pont supérieur d'un navire de haut bord. Le *gaillard d'avant* comprend la partie du pont située en avant du mât de mi-

saine; le *gaillard d'arrière* est la partie placée en arrière du grand mât (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE*).

GALBE, se dit en architecture de toute ligne courbe servant de génératrice à une surface de révolution. *Galber* une colonne, un balustre, etc., c'est tracer la génératrice de la surface de révolution qui termine cette colonne ou ce balustre (*Voy. FÔT, BALUSTRE*). Les artistes étendent l'emploi du mot galbe à tout profil curviligne qui est une création du goût plutôt que le résultat d'un tracé géométrique.

GALET, roue de petite dimension qui sert d'intermédiaire pour substituer le roulement au glissement. C'est ordinairement pour guider les pièces mobiles d'une machine que l'on fait usage de galets. Les galets peuvent être cylindriques ou coniques.

Ainsi les extrémités de l'axe de la poulie d'une machine d'Atwood reposent sur 4 galets qui lui donnent une grande mobilité. L'extrémité de la tige du piston d'une machine à vapeur de Maudslay porte un galet qui, en roulant dans une rainure longitudinale, sert de guide à cette tige. Les plaques tournantes des chemins de fer posent sur une série de galets coniques, dont les axes sont disposés dans le sens des rayons. — La toiture des moulins à vent à l'anglaise tourne tout entière pour orienter les ailes, en roulant sur une série de galets disposés circulairement; etc., etc.

Quelques auteurs étendent le nom de *galets* à toutes les pièces courbes roulant.

GALETS D'ALIMENTATION, galets disposés pour l'alimentation des chaudières de locomotives dans les gares de chemin de fer. L'alimentation ordinaire se faisant à l'aide d'une pompe mise en mouvement par la machine elle-même, suppose que la locomotive est en marche; elle exigerait donc un emplacement dont on ne peut pas généralement disposer dans les gares. Pour y suppléer, on amène la locomotive sur des rails spéciaux interrompus à l'aplomb des roues, et remplacés en cet endroit par des galets. On cale la locomotive pour l'empêcher d'avancer ou de reculer; et l'on met les pistons en mouvement comme on le ferait sur la voie ordinaire; les roues tournent, mais sans avancer, en roulant sur les galets. De cette manière, l'alimentation de la chaudière se fait sans que la locomotive se déplace.

GALETS DE FRICTION, dispositif employé depuis quelques années pour changer à volonté le sens de la rotation d'une pièce tournante. Afin de fixer les idées, nous supposons que la pièce tourne autour d'un axe vertical, ce qui est d'ailleurs le cas le plus ordinaire. Sur ce même axe vertical est monté un volant en fonte, dont la jante est cylindrique, c'est-à-dire que la surface externe de cette jante est une surface cylindrique à génératrices verticales. Sur un axe horizontal coupant l'axe vertical dont on vient de parler, sont montés deux disques, ou plateaux circulaires, en fer, de même diamètre, et distants l'un de l'autre d'une quantité un peu supérieure au diamètre du volant. Ces disques, auxquels on donne le nom de *galets*, comprennent entre eux le volant, et la jante de celui-ci se trouve à la hauteur du bord inférieur des deux galets. L'axe horizontal de ces galets est susceptible de se déplacer d'une petite quantité dans le sens de sa longueur, à l'aide d'un levier d'EMBRAYAGE (*Voy. ce*

mot); en sorte qu'on peut, à volonté, amener l'un ou l'autre galet en contact avec le volant. Dès que le contact a lieu, le galet en tournant fait tourner dans un certain sens la jante du volant, et par suite la pièce tournante montée sur le même axe vertical; et l'on dit que le volant est entraîné par *friction*. Mais, comme les galets sont en regard des extrémités d'un même diamètre du volant, celui-ci tourne dans deux sens contraires, suivant que c'est l'un ou l'autre des deux galets dont le bord est amarré en contact avec la jante.

Ce mécanisme s'applique avec succès au travail des métaux par *repoussage*; la feuille métallique à laquelle on veut donner la forme d'une surface courbe plus ou moins compliquée, est introduite entre deux matrices en acier, l'une fixe, l'autre mobile; et c'est pour élever ou abaisser à volonté celle-ci, que l'on fait usage du dispositif que nous venons de décrire. Le volant a quelquefois jusqu'à 2^m ou 2^m, 50 de diamètre; et le diamètre des galets peut aller jusqu'à 60 ou 80 centimètres.

On emploie aussi ce dispositif pour guider l'emporte-pièce dans les machines à percer, etc.

Quant à la loi de transmission du mouvement du galet au volant, elle est des plus simples, et tout à fait analogue à celle des CYLINDRES DE FRICTION ou des CÔNES DE FRICTION (*Voy. ces mots*). Soit ω la vitesse angulaire du galet, Ω celle du volant; soit r le rayon du galet (ou plutôt la distance de l'axe horizontal du galet au milieu de la jante du volant), et soit R le rayon du volant. Comme, en vertu du contact, la vitesse doit être la même au bord du galet et à la jante du volant, on doit avoir

$$\Omega R = \omega r, \text{ d'où } \frac{\Omega}{\omega} = \frac{r}{R},$$

c'est-à-dire que *la vitesse angulaire du volant est à celle du galet comme le rayon du galet (ou la distance de l'axe horizontal au milieu de la jante) est au rayon du volant*.

GALOP (MOUVEMENT DE), mouvement oscillatoire que prennent souvent les locomotives, et qui s'exécute autour d'un axe perpendiculaire à la voie. Dans les machines à cylindres inclinés, cette oscillation s'explique d'elle-même; elle peut tenir aussi à l'insuffisance de la charge portée par les essieux extrêmes (*Voy. LOCOMOTIVE*).

GARANT, nom que l'on donne au brin de la corde d'un PALAN (*Voy. ce mot*) auquel est appliquée la force motrice.

GÉMEAUX, le troisième signe du ZODIAQUE (*Voy. ce mot*).

GÉNÉRATEURS, appareils employés à la production de la vapeur. Ils diffèrent suivant les circonstances dans lesquelles les machines doivent fonctionner, et peuvent se diviser en trois classes: les générateurs des machines fixes, les générateurs des machines destinées à la navigation, et les générateurs des locomotives. — Dans les anciennes machines de Watt, le générateur était la chaudière dite *en tombeau*, représentée par la figure 1. Le combustible est jeté sur la grille BB; la flamme passe sous la chaudière, qu'elle suit dans toute sa longueur, et revient par les *carneaux* C, C, conduits ménagés latéralement entre la chaudière et la maçonnerie. Plus tard, on a ajouté à ce générateur un tuyau central D, qui traverse la chaudière dans toute sa longueur, et sert d'armature pour main-

tenir les deux fonds; la flamme, après avoir passé sous la chaudière, revient par le canal central, puis s'en retourne par les carnaux; la cheminée est alors placée à l'opposé du foyer. Cette disposition utilise mieux la chaleur des gaz provenant de la combustion. La forme donnée aux chaudières en tombeau avait été adoptée d'après cette idée que la quantité d'eau vaporisée est d'autant plus grande que le générateur présente une plus grande surface en contact direct avec le foyer; mais ces chaudières ont l'inconvénient grave de se déformer par la pression, malgré les armatures extérieures dont elles sont munies. Elles ne pouvaient convenir qu'aux basses pressions, ne dépassant la pression atmosphérique que d'une demi-atmosphère au plus. On les a remplacées partout

par des chaudières à section circulaire, la seule forme qui ne s'altère pas par la pression. — Dans les machines à moyenne et à haute pression, la chaudière est toujours à section circulaire; elle est souvent traversée par un tuyau central, comme le montre la figure 2, et quelquefois même c'est dans ce tuyau central que l'on place le foyer; c'est ce qui a lieu pour la chaudière adoptée dans les machines d'épuisement du Cornouailles. — On a varié d'un grand nombre de manières la disposition des générateurs pour machines fixes. Celle qui est aujourd'hui le plus généralement adoptée, est celle des chaudières à bouilleurs, représentée par la figure 3. Le

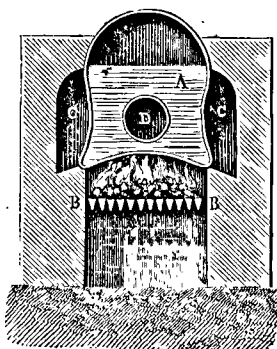


Fig. 1.

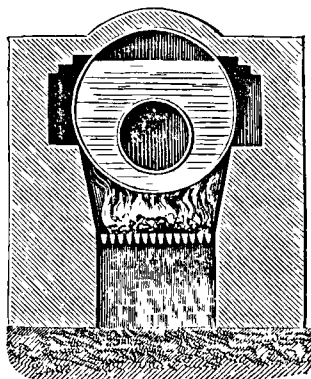


Fig. 2.

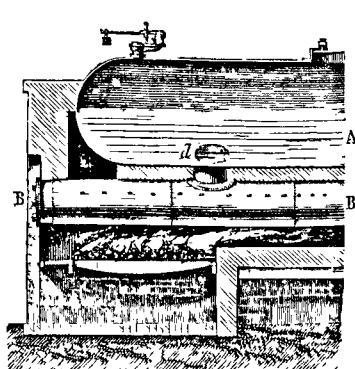
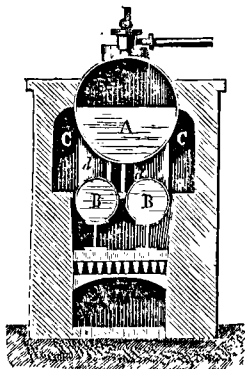


Fig. 3.

corps principal de la chaudière est un cylindre terminé par deux demi-sphères. Au-dessous sont deux

autres cylindres d'un plus petit diamètre : ce sont les bouilleurs; ils communiquent avec le corps de la chaudière par les tuyaux verticaux d, d, aux-

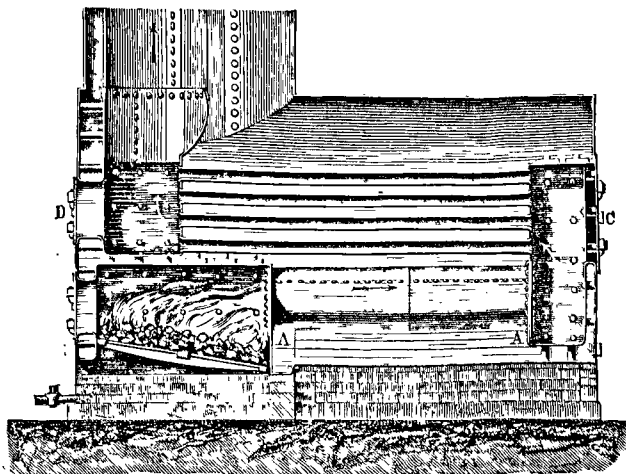
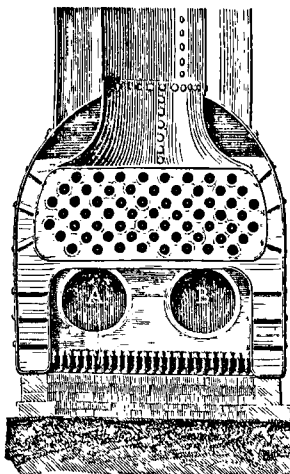


Fig. 4.

quels on donne le nom de cuissards. Les bouilleurs sont placés immédiatement au-dessus du foyer, et c'est particulièrement dans ces cylindres que la va-

les machines à moyenne et à haute pression, la chaudière est toujours à section circulaire; elle est souvent traversée par un tuyau central, comme le montre la figure 2, et quelquefois même c'est dans ce tuyau central que l'on place le foyer; c'est ce qui a lieu pour la chaudière adoptée dans les machines d'épuisement du Cornouailles. — On a varié d'un grand nombre de manières la disposition des générateurs pour machines fixes. Celle qui est aujourd'hui le plus généralement adoptée, est celle des chaudières à bouilleurs, représentée par la figure 3. Le corps principal de la chaudière est un cylindre terminé par deux demi-sphères. Au-dessous sont deux autres cylindres d'un plus petit diamètre : ce sont les bouilleurs; ils communiquent avec le corps de la chaudière par les tuyaux verticaux d, d, aux-

peur se forme. Les cuissards sont séparés par une cloison verticale qui s'étend tout le long de la chaudière en sorte que la flamme, ou du moins les gaz résultant de la combustion, sont obligés de suivre un chemin assez long : ils passent d'abord sous les bouilleurs, puis font le tour de la chaudière par les carneaux C, C, avant de se rendre dans la cheminée, placée à l'opposé du foyer. On donne aux bouilleurs une légère inclinaison en arrière, pour que les dépôts résultant de la vaporisation se fassent loin du foyer ; les cuissards sont placés en avant, dans la partie la plus élevée, et vers le fond de la grille.

Dans les machines destinées à la navigation, on fait usage de *chaudières tubulaires*, la figure 4 en montre un exemple. La flamme, partie du foyer, pénètre dans deux larges conduits A et B, par lesquels elle se rend au fond de la chaudière ; là, après s'être réfléchi sur une paroi verticale derrière laquelle il y a de l'eau, elle revient du côté du foyer, en traversant un grand nombre de tubes entourés par l'eau, et s'échappe par la cheminée. Ce trajet est indiqué par des flèches sur la figure. Les conduits A, B, ainsi que les tubes, sont entourés d'eau de toutes parts, en sorte que les gaz provenant de la combustion circulent réellement dans l'intérieur du liquide à vaporiser, ce qui a fait donner à ces chaudières le nom de chaudières à foyer intérieur. Leur avantage réside dans l'étendue considérable de la *surface de chauffe*, c'est-à-dire de la paroi sur laquelle s'exerce l'action des gaz chauds. (En C et en D on a ménagé des portes pour visiter les tubes.) — Dans les grands navires à vapeur, il y a toujours un certain nombre de générateurs placés les uns à côté des autres ; les chaudières communiquent entre elles par des tuyaux munis de robinets, qui permettent de suspendre à volonté le service d'une ou plusieurs chaudières. Sur le vaisseau la *Bretagne*, il y a 8 corps de chaudières, sur lesquelles agissent 40 foyers.

Dans les machines locomotives, le générateur est aussi une chaudière tubulaire à foyer intérieur (*Voy. Locomotives*).

Les chaudières se font généralement en tôle. La fonte ne présente pas assez de sécurité, et les ordonnances administratives en proscrirent l'emploi pour la navigation. Le cuivre manque de tenacité, et ne s'emploie que dans des cas spéciaux. Les tubes des chaudières tubulaires s'exécutent souvent en cuivre ; mais on les fait aussi en fer. — La nature du métal est sans influence sur la production de la vapeur.

On appelle *surface de chauffe directe* la portion de la paroi du générateur qui est en contact direct avec le foyer, et *surface de chauffe indirecte* la portion de cette paroi qui, n'étant pas exposée au rayonnement du foyer, ne s'échauffe que par le contact des gaz chauds provenant de la combustion ; l'ensemble de ces deux surfaces forme la *surface de chauffe totale*. Les dimensions des chaudières sont déterminées par le poids de vapeur à produire dans un temps donné. Ce poids résulte lui-même des dimensions du cylindre et de la vitesse du piston, ainsi que de la pression sous laquelle la vapeur doit être formée. Le tableau suivant donne, pour les tensions les plus usuelles, la densité correspondante de la vapeur, sa température et son volume, celui de l'eau étant pris pour unité.

TEMPÉRATURE.	TENSION en atmosphères	DENSITÉ.	VOLUME.
100°	1	0,0005895	1696,00
112,2	1 $\frac{1}{2}$	0,0008563	1167,80
121,4	2	0,0011147	897,09
128,8	2 $\frac{1}{2}$	0,0013673	731,39
135,1	3	0,0016150	619,19
140,6	3 $\frac{1}{2}$	0,0018:89	537,96
145,4	4	0,0020997	476,26
149,1	4 $\frac{1}{2}$	0,0023410	427,18
153,1	5	0,0025763	388,16
156,8	5 $\frac{1}{2}$	0,0028091	355,99
160,2	6	0,0030402	328,93
163,5	6 $\frac{1}{2}$	0,0032663	305,98
166,5	7	0,0034911	286,12
169,4	7 $\frac{1}{2}$	0,0037217	268,82
172,1	8	0,0039434	253,59

Connaissant donc le volume décrit par le piston dans une heure, par exemple, il sera facile, à l'aide de ce tableau, d'en déduire le poids de vapeur à produire dans le même temps. Si, par exemple, le volume décrit par le piston est de 4000 mètres cubes, on multiplie le poids de 4000 mètres cubes d'eau, soit 4 000 000 de kilogrammes, par la densité de la vapeur ; si la pression est de 5 atmosphères, ce sera par 0,0025763 qu'il faudra multiplier, ce qui donnera 10305 kilogrammes.

Le poids de vapeur à produire par heure étant connu, on s'appuie sur les données suivantes. Il résulte des observations de divers physiciens ou ingénieurs, et particulièrement des expériences faites en 1843 par M. Cavé en France, et par M. Wicksteed en Angleterre, qu'un mètre carré de surface de chauffe directe peut fournir par heure 100 à 120 kilogrammes de vapeur ; mais que, dans les chaudières fixes les mieux établies, la production n'est que de 20 kilogrammes environ par mètre carré de surface de chauffe *moyenne*. Ces chaudières consomment environ 3 kilogrammes de houille pour produire cette même quantité de vapeur. — Si la chaudière est à bouilleurs, il faut comprendre dans la surface de chauffe toute la surface des bouilleurs et la portion de la paroi de la chaudière proprement dite qui reçoit l'action des gaz provenant de la combustion. Si la chaudière est tubulaire, la surface de chauffe comprend la surface totale des tubes et la portion de paroi de la chaudière exposée à l'action directe du foyer. Mais, dans les locomotives, soit à cause d'un tirage plus énergique, soit à cause de la nature différente du combustible, qui est ordinairement du coke, la surface de chauffe est beaucoup plus efficace. On estime qu'un mètre carré de surface de chauffe directe donne de 120 jusqu'à 180 kilogrammes de vapeur par heure, et qu'un mètre carré de surface de chauffe indirecte par les tubes ne donne que le tiers, ou même que les 0,3 de cette quantité, c'est-à-dire de 40 à 50 kilogrammes.

Les données précédentes servent à déterminer les dimensions de la chaudière, et celle des grilles qui doivent recevoir le combustible. Du reste, des variations même assez grandes dans l'éto-cue de la surface de chauffe n'ont pas une influence très-sensible sur l'effet utile produit, parce que ces variations portent toujours sur les parties de la paroi, qui reçoivent en dernier l'action des gaz échauffés.

et qui par conséquent prennent la moindre part à la production totale de la vapeur.

On comprend que les nombres donnés ci-dessus ne doivent pas être pris d'une manière absolue; le poids de vapeur fourni par mètre carré et par heure peut varier, dans les générateurs fixes, depuis 15 jusqu'à 30 kilogrammes; le poids de combustible consommé peut varier également en plus ou en moins, suivant sa qualité. Les nombres dont il s'agit répondent à de bonnes conditions moyennes.

On compte que la surface des grilles doit être environ $\frac{1}{17}$ de la surface de chauffe totale, et que la consommation de combustible est de 1 kilogramme à 1^m,2 par décimètre carré de grille.

L'épaisseur des chaudières est fixée par les règlements administratifs. L'ordonnance royale du 22 mai 1843 prescrit l'emploi de la formule

$$e = 0,0818 \cdot n \cdot 2\rho + 0^m,003, \quad [1]$$

dans laquelle e désigne l'épaisseur, rapportée au mètre, n le nombre d'atmosphères qui exprime la pression supportée habituellement par la chaudière, et ρ son rayon intérieur [Voy. VASES CYLINDRIQUES (Résistance des)]. L'ordonnance ne fait aucune distinction entre le fer et le cuivre; mais M. Pécllet (*Traité de la chaudière*) pense qu'il est prudent d'augmenter un peu l'épaisseur lorsque l'on fait usage du cuivre.

D'après le règlement cité, l'épaisseur des chaudières ne doit pas dépasser 15 millimètres, parce qu'au delà on n'est jamais sûr de la bonne qualité de la tôle. Si la quantité de vapeur à produire exige l'emploi d'un générateur de dimensions telles qu'il faille lui donner une épaisseur supérieure à 15 millimètres, au lieu d'un générateur on en emploie deux. Et même, dans ce cas, il est d'usage d'en employer trois pour se mettre à l'abri des châtiments.

Voici le tableau des dimensions adoptées pour les chaudières à bouilleurs par l'un des plus grands établissements de Paris qui construisent des générateurs :

NOMBRE de chevaux.	CHAUDIÈRES.			BOUILLEURS.		
	longueur	diamètre	épaisseur à la tête.	longueur	diamètre	épaisseur à la tête.
6	m 2,45	m 0,75	m 0,009	m 2,60	m 0,35	m 0,010
8	2,80	0,80	0,010	2,95	0,35	0,010
10	3,25	0,80	0,010	3,40	0,38	0,010
15	5,00	0,80	0,010	5,15	0,44	0,010
20	6,80	0,85	0,010	7,00	0,50	0,010
25	8,50	0,85	0,010	8,65	0,50	0,010
30	9,20	1,00	0,0105	9,50	0,60	0,010
40	10,00	1,00	0,011	10,30	0,60	0,010

Les surfaces de chauffe comprises dans ce tableau répondent à 1^m,70 environ par cheval-vapeur, et la consommation de combustible à 5 kilogrammes par cheval et par heure. — Dans les chaudières tubulaires, qui fonctionnent généralement sous une pression de 5 atmosphères, on donne aux tubes une épaisseur de 3 millimètres; dans les machines destinées à la navigation, le diamètre des tubes est de 0^m,075 à 0^m,085; dans les locomotives, ce diamètre est beaucoup moindre, et descend jusqu'à 0^m,037.

On essaye la résistance des chaudières en y refoulant de l'eau à l'aide d'une pompe, après avoir chargé les soupapes d'un poids convenable. Les règlements administratifs exigeaient qu'une chaudière en tôle ou en cuivre résistât à une pression triple de la pression normale qu'elle doit supporter; pour les chaudières en fonte, ils portaient la pression d'épreuve au quintuple de la pression normale. Les chaudières ayant supporté l'épreuve, devaient être marquées d'un timbre indiquant en atmosphères la pression de la vapeur. D'après le décret du 25 janvier 1865, toutes les chaudières indistinctement doivent résister à une pression double de la pression normale, quand cette pression est comprise entre $\frac{1}{2}$ atmosphère et 6 atmosphères.

Elles reçoivent une surcharge constante de $\frac{1}{2}$ kilogramme par centimètre carré, si la pression est inférieure à $\frac{1}{2}$ atmosphère, et de 6 kilogrammes par centimètre carré, si la pression normale est supérieure à 6 atmosphères. Le timbre doit indiquer en kilogrammes par centimètre carré la pression normale de la vapeur.

Ces essais à froid ne peuvent donner une sécurité complète, attendu que, sous l'action d'une température élevée, le métal se dilate, et conserve presque toujours en refroidissant un allongement permanent qui diminue sa résistance.

Les chaudières des machines sont alimentées par une pompe que la machine elle-même fait mouvoir. Dans les machines à condensation, l'eau qui sert à alimenter la chaudière est puisée dans le condenseur (Voy. MACHINES A VAPEUR), ou du moins dans une bêche spéciale où l'eau du condenseur est versée par la pompe à air.

Dans les locomotives, qui sont sans condensation, l'eau d'alimentation est amenée du tender par une pompe mue par la machine. Cependant on commence à employer pour remplir cette fonction l'INJECTEUR GIFFARD (Voy. ce mot), qui est d'une installation facile, et fonctionne tout seul, sans le secours d'aucun mécanisme.

Pour les chaudières qui ne sont point appliquées à une machine, on emploie au travail de l'alimentation une petite machine à vapeur auxiliaire, fonctionnant avec la vapeur du générateur lui-même, et à laquelle on donne le nom de *petit-cheval*.

Une machine auxiliaire du même genre et portant le même nom est installée à bord des grands navires à vapeur. Elle sert à l'alimentation pendant la marche, et rend d'autres services pendant les repos, soit pour la manœuvre des hélices, soit pour d'autres besoins accidentels. — Dans beaucoup de générateurs fixes, qui ne sont point appliqués à une machine à condensation, l'eau d'alimentation est préalablement échauffée par la chaleur que conservent encore les gaz provenant de la combustion, après qu'ils ont agi sur la chaudière. Le tuyau dans lequel l'eau est ainsi échauffée porte le nom de *tube réchauffeur*. On le place avantageusement entre les chaudières, qui vont ordinairement par couple, vers la partie supérieure du générateur, et dans le sens horizontal. Les tubes réchauffeurs, outre qu'ils utilisent une plus grande portion de la chaleur fournie par le foyer, offrent encore cet avan-

tage de préserver la chaudière des incrustations, au moins en partie, parce que les dépôts résultant de la vaporisation de l'eau se font d'abord dans le tube réchauffeur, dont le nettoyage est beaucoup plus facile que celui de la chaudière.

Le niveau de l'eau dans la chaudière doit toujours, d'après les règlements, s'élever de 10 centimètres au-dessus de la portion de la paroi exposée au contact des gaz chauds. La capacité qui est au-dessus, et qu'on nomme la *chambre à vapeur*, doit être assez grande pour que la vapeur qui s'échappe à chaque coup de piston ne fasse pas varier d'une manière sensible la pression dans la chaudière. Il faut donc que la chambre à vapeur soit au moins 15 à 20 fois plus grande que la capacité du cylindre. Dans les machines marines, on donne à la chambre à vapeur une capacité égale en moyenne à $\frac{1}{260}$ du volume de vapeur que la chaudière doit produire par heure.

L'eau d'alimentation ne doit pas être versée dans la chambre à vapeur, où elle occasionnerait une condensation; elle doit être amenée par un tube qui plonge jusque vers le fond de la chaudière, et, autant que possible, loin du foyer.

Les générateurs sont toujours munis de divers appareils de sûreté, indispensables pour en assurer la marche régulière. Ce sont les INDICATEURS DE NIVEAU, dont le nom explique suffisamment le rôle; les MANOMÈTRES, qui font connaître la pression de la vapeur; les SOUPAPES DE SÛRETÉ et les PLAQUES FUSIBLES, qui empêchent cette pression de dépasser la limite fixée à l'avance (Voy. les mots en petites capitales). Dans les générateurs fixes, la chaudière est toujours percée à sa partie supérieure d'un orifice elliptique, habituellement fermé, mais par lequel un ouvrier peut s'introduire pour la nettoyer et la débarrasser des incrustations; cet orifice s'appelle le *trou d'homme*.

Malgré toutes les précautions auxquelles correspondent les divers appareils de sûreté mentionnés ci-dessus, il arrive encore quelquefois que les générateurs font explosion, et occasionnent des accidents graves. Ces accidents peuvent être dus à des défauts de construction, à l'altération des chaudières par suite d'un trop long usage, à l'adhérence des soupapes de sûreté ou à une surcharge de ces soupapes, à la détonation d'un mélange explosif dans les carneaux, etc. Mais la cause la plus fréquente est l'abaissement du niveau de l'eau dans la chaudière. Si cet abaissement dépasse une certaine limite, les parois en contact avec les gaz chauds s'échauffent à une haute température; si alors le niveau vient à remonter subitement, soit par l'effet d'une alimentation trop brusque, soit dans les navires par suite d'une oscillation latérale, il se forme subitement une grande quantité de vapeur qui, ne trouvant pas instantanément une issue assez large, augmente rapidement de pression et fait éclater le métal, dont la résistance a d'ailleurs été diminuée par l'élevation de la température. Telle est la plus vraisemblable de toutes les explications qui ont été données des explosions précédées d'un abaissement de niveau. Cependant il reste encore beaucoup d'obscurité sur ce point.

Les chaudières tubulaires offrent l'avantage précieux d'être à peu près inexplosibles. Si la pression

vient à dépasser la limite voulue, les tubes, moins résistants que le corps cylindrique, peuvent se crever; mais alors l'eau se répand sur le foyer, en même temps que la vapeur s'échappe; et il n'en résulte d'autre inconvénient qu'un retard.

La vapeur qui sort d'un générateur entraîne toujours une certaine quantité d'eau, qui peut aller jusqu'à 30 ou 40 pour 100 du poids total, et même au delà. Pour débarrasser la vapeur de cette eau, fort nuisible aux machines à vapeur, on a proposé et essayé divers moyens. Le plus simple consiste à faire d'abord arriver la vapeur à la partie supérieure d'un vase renfermant de l'eau, par un tuyau descendant jusqu'à 20 ou 30 centimètres au-dessus du niveau de cette eau. Les globules d'eau renfermés dans la vapeur sont projetés dans l'eau et y restent, tandis que la vapeur séchée s'échappe par un autre tuyau adapté aussi à la partie supérieure du vase.

Depuis un certain nombre d'années, on se sert de la chaleur perdue des fours à coke, des hauts fourneaux, et des divers foyers métallurgiques, pour faire marcher des machines à vapeur. Il suffit pour cela de faire passer par le générateur les gaz provenant de ces fourneaux, et qui sont ordinairement à une haute température. Chaque kilogramme de houille brûlée produit ainsi, indépendamment de son effet au point de vue métallurgique, 4 à 5 kilogrammes de vapeur à 5 atmosphères dans le générateur, et l'on peut compter sur une production de 16 à 18 kilogrammes de vapeur par mètre carré de surface de chauffe de la chaudière. Les usines métallurgiques se trouvent ainsi affranchies de l'obligation d'être voisines d'un cours d'eau pour faire mouvoir leurs machines. (Voy. le *Traité de la chaleur* de M. Pécelet; les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin; le *Traité élémentaire des appareils de navigation* de M. Ledieu; le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet).

GÉNÉRATRICE, ligne droite ou courbe dont le mouvement engendre une surface. Les positions successives que prend cette ligne sont ce que l'on appelle les *génératrices* de la surface (Voy. SURFACES COURBES).

GENOU, articulation sphérique, obtenue à l'aide d'une sphère pleine qui roule dans une sphère creuse de même rayon (Voy. ARTICULATION). Ce mode d'articulation est employé pour le GRAPHOMÈTRE, pour la BOUSSOLE, pour la PLANCHETTE (Voy. ces mots).

GÉOCENTRIQUE (de γῆ, terre, et de κέντρον, centre), qui a pour centre la terre. Se dit de la longitude et de la latitude des corps célestes observés de la terre. (Voy. COORDONNÉES URANOGRAPHIQUES. Voy. aussi HÉLIOCENTRIQUE.)

GÉODÉSIE (du grec γῆ, terre, et δαίω, je divise), science qui répondait chez les Grecs à ce que nous nommons l'ARPENTAGE et le PARTAGE DES TERRES, mais qui comprend en outre aujourd'hui la TOPOGRAPHIE, la GÉOMORPHIE ou étude de la FIGURE DE LA TERRE, le tracé des CARTES, la NAVIGATION, l'HYDROGRAPHIE (Voy. ces mots). Considérée au point de vue le plus général, cette science a pour objet la mesure de la terre ou celle d'une partie de sa surface. Les opérations géodésiques ont pour but de déterminer les positions relatives des principaux lieux d'un pays dont on veut lever la carte; leur ensemble porte ordinairement le nom de TRIANGU-

LATION, parce qu'elles consistent le plus souvent à rattacher, par une série de triangles, formant ce qu'on appelle un CANEVAS TRIGONOMETRIQUE, les divers lieux dont il s'agit, à une ligne principale ou BASE qui a été mesurée avec beaucoup de soin. Si la portion de surface terrestre que l'on considère est assez petite pour que les triangles qui y sont supposés tracés puissent être considérés comme rectilignes, l'opération est du domaine de la Topographie; s'il est nécessaire d'avoir égard à la rondeur de la terre, et de la considérer comme une sphère ou comme un ellipsoïde de révolution, le problème appartient à la Géodésie proprement dite; enfin, si la question qu'on a en vue est assez délicate pour qu'il faille avoir égard à la forme réelle du globe, cette question est du ressort de la Géomorphie, ou haute Géodésie. Dans les deux derniers cas, la Géodésie emprunte le secours de l'astronomie. Quant à la Navigation, elle est liée à la Géodésie par le tracé des cartes marines et par les procédés à l'aide desquels on détermine en mer la position d'un navire et la direction qu'il doit suivre pour atteindre le port. L'Hydrographie est la partie de la Géodésie qui traite de la représentation des portions aqueuses du globe. Un grand nombre d'auteurs se sont occupés de Géodésie : les principaux ouvrages à consulter sur cette matière sont : le *Traité de Géodésie* de L. Puissant; la *Géodésie* de L.-B. Francœur; le *Cours de Topographie et de Géodésie* de A. Salneuve; le *Cours complet de Topographie et de Géodésie* de M. Benoit; la *Géodésie* de M. Bégat; le *Cours d'Astronomie et de Géodésie* professé à l'École Polytechnique, etc.; le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E.-P. Du Bois, etc., etc.

GÉOGRAPHIE (du grec γῆ, terre et γράφω, je décris), science qui a pour objet la *description de la terre*. Elle se rattache aux mathématiques par le tracé des cartes, par les opérations géodésiques que ce tracé suppose, et par les principes de Cosmographie sur lesquels elle s'appuie. (Voy. CARTES GEOGRAPHIQUES, GÉODÉSIE, COSMOGRAPHIE.)

GÉOMÉTRAL (PLAN), projection orthogonale, représentant un objet avec ses dimensions relatives exactes et sans égard à la perspective. (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS.)

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, branche des mathématiques appliquées qui a pour objet la représentation des corps et la résolution graphique des problèmes de Géométrie dans l'espace. Elle a pour applications principales la COUPE DES PIERRES, la CHARPENTE, les OMBRES, la PERSPECTIVE, la GNOMONIQUE, le tracé des CARTES GEOGRAPHIQUES, etc. (Voy. ces mots.)

I. Considérée dans ses applications, cette partie de la science est fort ancienne, car elle comprend l'art du *traité*, pratiqué depuis des siècles par les appareilleurs et les charpentiers; et il n'est pas douteux que, dès les temps anciens, les architectes n'aient employé le langage graphique pour communiquer leurs idées aux ouvriers chargés de les exécuter. Considérée dans ses méthodes, cette science n'est pas non plus aussi nouvelle qu'on se le persuade d'ordinaire. L'idée de projeter les corps sur un plan horizontal et sur un plan vertical est si naturelle, qu'elle a dû être appliquée de temps

immémorial dans les ateliers. La méthode des projections est employée d'une manière courante par Frézier, ingénieur du roi, dans l'ouvrage intitulé *Théorie et pratique de la coupe des pierres et des bois*, publié à Strasbourg en 1737. La méthode des CHANGEMENTS DE PLANS (Voy. ce mot) avait déjà été employée par Desargues, et appliquée à l'appareil des voûtes, dans l'ouvrage ayant pour titre *Pratique du trait à preuves* de M. Desargues, publié en 1643 par Abraham Brosse. Mais, en général, l'art du *trait* n'avait été pratiqué que « d'une manière obscure, par des personnes dont l'éducation n'avait pas été assez soignée, et qui ne savaient pas communiquer les résultats de leurs méditations » (Monge, Programme de Géométrie descriptive). Il était réservé à l'illustre Monge de réunir en un corps de doctrine les procédés graphiques employés jusqu'alors dans les arts, en apportant à ce travail l'esprit d'ordre, de clarté et de généralité qui caractérise son talent. Présenté ainsi sous un jour tout nouveau, l'art du *trait* parut une science toute nouvelle; on peut dire, en effet, que Monge est le créateur de la Géométrie descriptive, bien qu'il n'en ait pas créé de toutes pièces tous les éléments, parce que c'est lui qui les a coordonnés et rattachés à une méthode générale, dont il a montré toute la fécondité.

La Géométrie descriptive, telle qu'elle a été constituée par Monge, n'a été d'abord enseignée par lui qu'à l'École de Mézières, et elle était, parmi les jeunes officiers du corps du génie, l'objet d'une sorte de mystère. Elle ne fut enseignée publiquement qu'en 1795 par Monge lui-même à l'École Normale, créée par une loi du 9 brumaire an III (30 octobre 1794), mais qui n'a subsisté que quatre mois. Cet enseignement fut introduit peu après à l'École Polytechnique, où il s'est maintenu jusqu'à nos jours, et il fait aujourd'hui partie du programme de toutes les grandes Écoles du gouvernement.

II. Dans les idées de Monge, la Géométrie descriptive ne devait pas être seulement la science générale du *trait*, il y voyait une méthode générale de recherches, fondée sur la transformation des figures par la projection. La plupart des auteurs qui l'ont suivi ont reconnu à la Géométrie descriptive ce double caractère. Dans ce dictionnaire, nous ne considérerons cette science que sous le premier point de vue. L'étude abstraite des propriétés des surfaces appartient aux mathématiques pures, et ne peut se passer du secours de l'analyse, comme cela ressort des travaux de Monge lui-même. Nous emprunterons donc à cette théorie abstraite les principes dont nous aurons besoin pour exposer les applications, en renvoyant, pour la démonstration, aux traités d'analyse géométrique, et aux mémoires publiés sur ce sujet.

III. REPRÉSENTATION DU POINT. Pour fixer la position d'un point quelconque M de l'espace (fig. 1), on le rapporte à deux plans fixes, l'un XH horizontal, l'autre XV vertical, dont l'intersection XV se nomme la *ligne de terre*. On abaisse du point M une perpendiculaire Mm sur le plan horizontal; le pied m de cette perpendiculaire est la *projection horizontale* du point M. On abaisse de ce même point M une perpendiculaire Mm' sur le plan vertical; le pied m' de cette perpendiculaire est la *pro-*

jection verticale du point M. Les droites Mm et Mm' sont appelées les *projetantes* du point M. Les plans XH et XV se nomment les *plans de projection*. On suppose toujours le plan vertical XV rabattu sur le

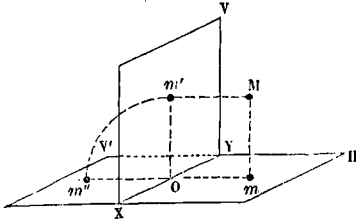


Fig. 1.

plan horizontal XH en XV' , en tournant autour de la ligne de terre XY comme charnière. On le redresse par la pensée quand on veut se rendre compte de la position du point M.

Quand le plan vertical est rabattu, les projections m , m' d'un même point M de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. En effet, suivant les droites Mm et Mm' , conduisons un plan; il coupera les plans de projection suivant les droites Om et Om' . Le plan $MmOm'$, étant mené suivant Mm , sera perpendiculaire à XH ; étant aussi mené suivant Mm' , il sera perpendiculaire à XV . Il sera donc perpendiculaire à la ligne de terre XY , intersection des plans XH et XV . Il en résulte que les angles XOm et XOm' sont droits. Imaginons maintenant que le plan vertical XV tourne autour de la ligne de terre comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne se rabattre sur le plan horizontal en XV' ; dans ce mouvement, la droite Om' , ne cessant pas d'être perpendiculaire à XY , viendra se rabattre en Om'' , sur le prolongement de Om , qui est aussi perpendiculaire à XY .

Réciproquement, deux points m et m' , situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, sont toujours les projections d'un même point de l'espace. Rendons, en effet, au plan XV' sa position verticale XV ; par les droites Om' et Om conduisons un plan; il sera perpendiculaire à la ligne de terre XY , puisque celle-ci est perpendiculaire à deux droites Om' et Om menées par son pied dans ce plan. Ce même plan sera aussi perpendiculaire aux plans de projection, puisqu'il est perpendiculaire à une ligne XY contenue dans ces plans. Élevons par le point m une perpendiculaire mM au plan XH ; elle sera toute entière dans le plan mOm , perpendiculaire à XH . Élevons par le point m' une perpendiculaire $m'M$ au plan XV ; elle sera tout entière dans le plan $m'Om'$ perpendiculaire à XV . Les droites mM et $m'M$ étant dans un même plan, et perpendiculaires aux droites Om et Om' qui se coupent, se couperont elles-mêmes en un point M, qui sera celui dont les projections sont m et m' .

On peut remarquer que l'angle mOm' est droit, puisqu'il mesure l'angle de deux plans XH et XV perpendiculaires entre eux; d'ailleurs les angles MmO et $Mm'O$ sont droits aussi. La figure $MmOm'$ est donc un rectangle, et l'on a $mO = Mm'$ et $m'O = Mm$; c'est-à-dire que la distance mO de la projection horizontale à la ligne de terre mesure la distance du point M considéré au plan vertical, et

que la distance $m'O$ de la projection verticale à la ligne de terre mesure la distance du même point M au plan horizontal.

IV. La surface sur laquelle on opère est considérée comme le plan horizontal de projection; et le plan vertical y est supposé rabattu. On tire dans le plan de la figure, de gauche à droite, une droite XY (fig. 2), pour représenter la ligne de terre : la partie

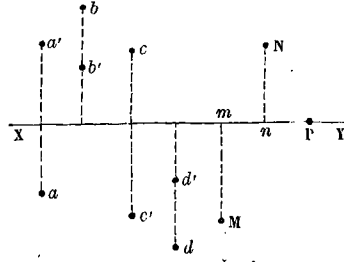


Fig. 2.

du plan située au-dessous de cette droite est plus particulièrement destinée à représenter le plan horizontal, et celle qui est au-dessus à représenter le plan vertical. Néanmoins, la portion du plan située au-dessous de XY représente aussi la partie du plan vertical qui est située au-dessous du plan horizontal, et la portion du plan située au-dessus de XY représente aussi la partie du plan horizontal qui est située en arrière du plan vertical. On va voir qu'il ne peut jamais y avoir d'ambiguïté.

On désigne par des lettres majuscules les points de l'espace; par des minuscules analogues leurs projections horizontales, et par les mêmes minuscules accentuées leurs projections verticales. Ainsi, a et a' (fig. 2) sont les projections d'un point A situé au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical. Les projections b et b' sont celles d'un point B situé au-dessus du plan horizontal et en arrière du plan vertical. Les projections c et c' sont celles d'un point C situé au-dessous du plan horizontal et en arrière du plan vertical. Les projections d et d' sont celles d'un point D situé en avant du plan vertical et au-dessous du plan horizontal. M et m sont les projections d'un point M situé dans le plan horizontal, et qui se confond par conséquent avec sa projection horizontale; sa projection verticale est située sur la ligne de terre. N et n sont les projections d'un point N situé dans le plan vertical, et qui se confond avec sa projection verticale; sa projection horizontale est située sur la ligne de terre. Enfin, P représente un point situé sur la ligne de terre, et qui se confond par conséquent avec ses deux projections.

V. REPRÉSENTATION DE LA DROITE. Si des différents points d'une droite on abaisse des perpendiculaires sur un même plan, le lieu des pieds de ces perpendiculaires est une seconde droite qui est la projection de la première. On représente une droite par ses projections sur le plan horizontal et sur le plan vertical. — Quand ces projections sont données, la droite est complètement déterminée; car si, par la projection horizontale, on fait passer un plan vertical, il contient la droite cherchée; si, par la projection verticale, on fait passer un plan perpendiculaire au plan vertical, il contient la

droite cherchée; cette droite est donc l'intersection des plans menés par les projections données, perpendiculairement aux plans de projection correspondants.

On donne le nom de *plans projetants* aux plans qui contiennent toutes les perpendiculaires abaissées des différents points d'une droite sur un même plan de projection.

Il y a cependant un cas où les projections d'une droite ne suffisent pas pour la déterminer; c'est celui où la droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et où, par conséquent, ses deux projections se confondent en une seule et même perpendiculaire à la ligne de terre. Dans ce cas, il faut donner de plus les points où la droite rencontre les deux plans de projection; ces points sont ce que l'on appelle les *traces* de la droite.

Dans toute autre position de la droite, ses traces peuvent se déduire de ses projections. — Soient ab et $a'b'$ (fig. 3) les projections d'une droite. Sa trace

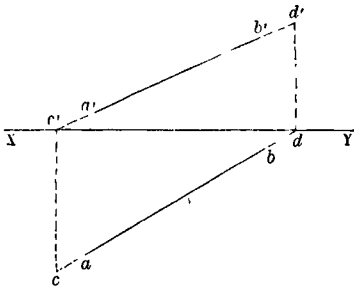


Fig. 3.

horizontale étant un point du plan horizontal, doit avoir pour projection un point de la ligne de terre; mais cette projection doit se trouver aussi sur la projection verticale de la droite; elle sera donc au point c' où la projection verticale rencontre la ligne de terre; élevant au point c' une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la projection horizontale demandée, on obtiendra en c la trace horizontale demandée, qui se confond avec sa projection horizontale. De même, pour obtenir la trace verticale de la droite, on prolongera sa projection horizontale jusqu'à la rencontre de la ligne de terre en d ; au point d on élèvera une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la projection verticale en d' ; ce point d' sera la trace verticale demandée.

Réciproquement, si les traces d'une droite sont données, on en déduit immédiatement ses projections. Soient, par exemple, c et d' (fig. 3) les deux traces données; on abaissera sur la ligne de terre les perpendiculaires cc' et $d'd$; en joignant cd et $c'd'$, on aura les projections demandées.

VI. Une droite peut avoir, par rapport aux plans de projection, diverses positions qu'il est utile de considérer.

Si une droite perce le plan horizontal en avant du plan vertical, et le plan vertical au-dessus du plan horizontal, sa trace horizontale est au-dessous de la ligne de terre et sa trace verticale est au-dessus; c'est le cas de la figure 3.

Si une droite perce le plan horizontal en arrière

du plan vertical, et le plan vertical au-dessus du plan horizontal, sa trace horizontale et sa trace verticale sont toutes deux au-dessus de la ligne de terre. C'est le cas de la figure 4.

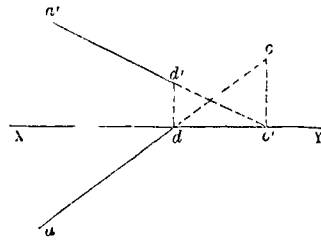


Fig. 4.

Si une droite perce le plan horizontal en arrière du plan vertical, et le plan vertical au-dessous du plan horizontal, sa trace horizontale est au-dessus de la ligne de terre, et sa trace verticale est au-dessous. C'est le cas de la figure 5.

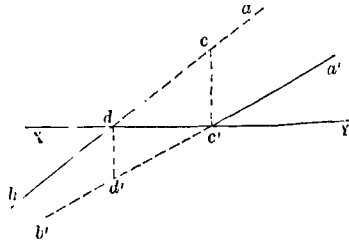


Fig. 5.

Si une droite perce le plan horizontal en avant du plan vertical, et le plan vertical au-dessous du plan horizontal, les deux traces sont au-dessous de la ligne de terre. C'est le cas de la figure 6.

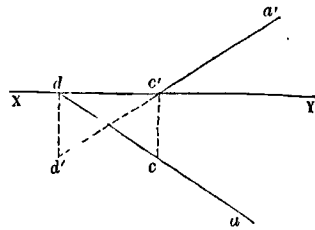


Fig. 6.

Lorsqu'une droite est horizontale, sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre; car tous les points de la droite étant à égale distance du plan horizontal, tous les points de la projection verticale de cette droite sont à la même distance de la ligne de terre. Dans ce cas, la droite n'a pas de trace horizontale.

Lorsqu'une droite est parallèle au plan vertical, sa projection horizontale est, pour des raisons analogues, parallèle à la ligne de terre; et la droite n'a pas de trace verticale.

Lorsqu'une droite est parallèle à la ligne de terre, ses deux projections sont elles-mêmes parallèles à cette ligne; car la droite dont il est question est à la fois parallèle aux deux plans de projection.

- Lorsqu'une droite est verticale, sa projection horizontale se réduit à un point, pied commun de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de la droite sur le plan horizontal. Ce point est en même temps la trace horizontale de la droite. Sa projection verticale est perpendiculaire à la ligne de terre, et elle n'a pas de trace verticale.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale se réduit à un point, qui est en même temps sa trace verticale. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre, et elle n'a pas de trace horizontale.

Lorsqu'une droite est située dans le plan horizontal de projection, sa projection verticale est la ligne de terre, et la projection horizontale est la droite elle-même.

Lorsqu'une droite est située dans le plan vertical de projection, sa projection horizontale est la ligne de terre, et la projection verticale est la droite elle-même.

La ligne de terre est à elle-même sa projection horizontale et sa projection verticale.

Nous avons déjà remarqué que lorsqu'une droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux projections se confondent en une même perpendiculaire à cette ligne de terre, et que, pour déterminer la droite, il est nécessaire alors de donner ses traces.

VII. Deux droites parallèles ont des projections parallèles; car si, par deux droites parallèles, on fait passer des plans perpendiculaires à un plan donné, ces plans sont parallèles, et leurs intersections avec le plan donné sont aussi parallèles entre elles. (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, n° 456.)

Pour mener par un point donné m, m' (fig. 7)

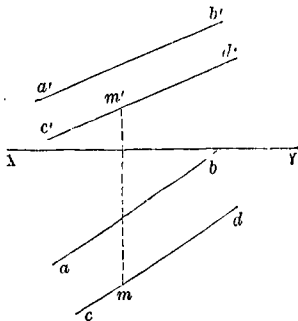


Fig. 7.

une parallèle à une droite donnée $ab, a'b'$ il suffit donc de mener par le point m une droite cd parallèle à ab , et par le point m' une droite $c'd'$ parallèle à $a'b'$.

VIII. REPRÉSENTATION DU PLAN. On représente un plan par ses traces, c'est-à-dire par ses intersections avec les plans de projection. Le point où le plan rencontre la ligne de terre appartient évidemment à chacune de ses traces; ainsi, les traces d'un même plan se rencontrent en un même point de la ligne de terre, à moins qu'elles ne soient parallèles à cette ligne, cas que nous examinerons plus loin. Ainsi, les droites αP et $\alpha P'$ (fig. 8) représentent un

plan qui coupe le plan horizontal suivant αP , et le plan vertical suivant $\alpha P'$. La première est la trace horizontale du plan dont il s'agit, la seconde est sa trace verticale.

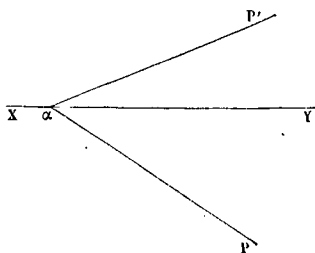


Fig. 8.

Lorsqu'un plan est vertical, sa trace verticale est perpendiculaire à la ligne de terre; car elle est l'intersection de deux plans verticaux et est par conséquent verticale.

Par une raison analogue, lorsqu'un plan est perpendiculaire au plan vertical, sa trace horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre.

Lorsqu'un plan est horizontal, il n'a pas de trace horizontale; et sa trace verticale est parallèle à la ligne de terre.

Par une raison analogue, lorsqu'un plan est parallèle au plan vertical, il n'a pas de trace verticale; et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre.

Lorsqu'un plan est parallèle à la ligne de terre, ses traces sont toutes deux parallèles à cette ligne.

Lorsqu'un plan est perpendiculaire à la ligne de terre, ses traces sont aussi perpendiculaires à cette ligne, puisqu'elles sont menées par son pied dans ce plan; et, comme elles rencontrent la ligne de terre au même point, elles se confondent en une seule et même droite.

Enfin, lorsqu'un plan passe par la ligne de terre, ses deux traces se confondent avec cette ligne; et, pour déterminer le plan, il devient nécessaire de donner sa trace sur un troisième plan: par exemple, sur un plan perpendiculaire à la ligne de terre, que l'on rabat sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. Ainsi, la figure 9

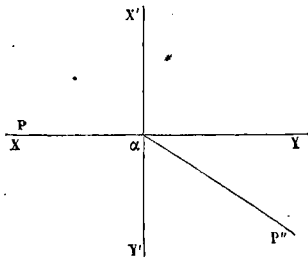


Fig. 9.

représente un plan passant par la ligne de terre; sa trace horizontale αP est la ligne de terre elle-même; et sa trace verticale sur un troisième plan vertical rabattu autour de $X'Y'$ est la droite $\alpha P'$.

IX. Lorsqu'une droite est contenue dans un plan, les traces sont placées respectivement sur les traces

e ce plan. Si donc on se donne l'une des projections d'une droite contenue dans un plan donné, il est facile d'en déduire l'autre. Soient αP et $\alpha P'$ (fig. 10) les traces d'un plan donné, et soit ab la

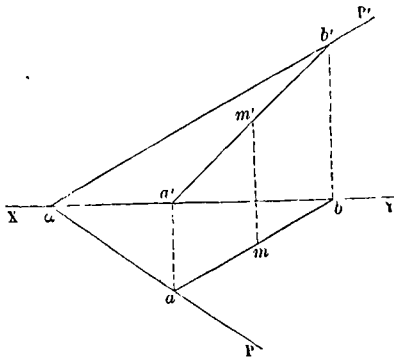


Fig. 10.

projection horizontale d'une droite contenue dans ce plan. Le point a où cette projection rencontre la trace horizontale αP du plan donné, sera la trace horizontale de la droite; si donc on projette le point a en a' sur la ligne de terre, on aura un point de la projection verticale cherchée. Pour en obtenir un second, il suffit de prolonger la projection horizontale donnée jusqu'à sa rencontre en b avec la ligne de terre; ce point est la projection horizontale de la trace verticale de la droite; si donc on élève bb' perpendiculaire à la ligne de terre, et terminé à la trace verticale $\alpha P'$ du plan donné, le point b' sera la trace verticale de la droite; et en joignant $a'b'$, on aura la projection verticale demandée.

Lorsqu'un point est contenu dans un plan donné, il suffit de connaître l'une de ses projections pour pouvoir en déduire l'autre. Soit, par exemple, m (fig. 10) la projection horizontale d'un point contenu dans un plan donné $\alpha P\alpha P'$. Imaginons que par le point M du plan, dont la projection est m , on mène une droite dans ce plan; sa projection horizontale sera une droite passant par le point m . Menons donc par le point m une droite quelconque

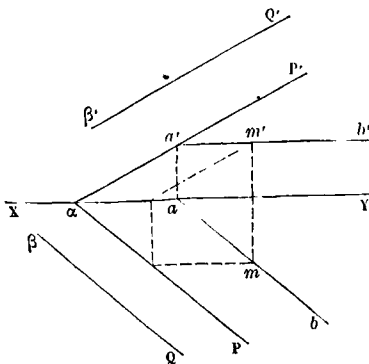


Fig. 11.

ab , nous pourrions la considérer comme la projection horizontale d'une droite du plan contenant le

point M . Déterminons, comme il a été expliqué ci-dessus, la projection verticale $a'b'$ de cette droite; si par le point m on mène une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre avec $a'b'$, le point de rencontre m' sera la projection verticale du point M .

Au lieu d'une droite quelconque, on fait ordinairement passer par le point dont on a la projection horizontale, une horizontale du plan, c'est-à-dire une parallèle à sa trace horizontale. Cette parallèle a pour projection ab (fig. 11), une parallèle à αP . Par le point a on élève aa' perpendiculaire à XY et terminée à sa rencontre avec $\alpha P'$; le point a' ainsi obtenu est la trace verticale de la droite. La projection verticale de cette droite est une parallèle $a'b'$ à la ligne de terre menée par le point a' . La projection verticale demandée m' est à la rencontre de $a'b'$ avec une perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point donné m .

Au lieu d'une horizontale du plan, on pourrait employer une parallèle à sa trace horizontale.

X. *Lorsque deux plans sont parallèles, leurs traces sont respectivement parallèles*; car les intersections de ces deux plans par l'un quelconque des plans de projection sont des droites parallèles. Il est facile dès lors de résoudre ce problème: *Mener par un point donné m, m' (fig. 11) un plan parallèle à un plan donné $\beta Q, \beta Q'$* . Menons comme ci-dessus, par le point m , une droite ab parallèle à βQ ; ce sera la projection d'une horizontale du plan cherché. Par le point m' menons $a'b'$ parallèle à la ligne de terre: ce sera la projection verticale de cette même horizontale du plan. Déterminons sa trace verticale a' ; ce sera un point de la trace verticale du plan demandé; et en menant par ce point une droite $\alpha P'$ parallèle à $\beta Q'$, on aura cette trace elle-même. Il ne restera plus qu'à mener par le point α une parallèle αP à la trace βQ donnée.

Si le point α n'était pas dans le cadre de l'épure, il faudrait se procurer un point de la trace horizontale, comme on s'est procuré un point a' de la trace verticale. Pour cela, on ferait passer par le point donné m, m' une parallèle à la trace verticale $\beta Q'$, et l'on déterminerait sa trace horizontale. Cette opération est indiquée sur la figure. Elle peut, dans tous les cas, servir de vérification.

Si l'on demandait de mener par un point donné un plan parallèle à une droite donnée, on mènerait d'abord par le point donné une droite parallèle à la droite donnée, ainsi qu'on l'a indiqué plus haut; et tout se réduirait à faire passer un plan quelconque par cette seconde droite; ce qu'on ferait en joignant ses traces à un même point de la ligne de terre, choisi arbitrairement.

Si l'on demandait de mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné, on mènerait d'abord par le point donné un plan parallèle au plan donné; puis, dans ce second plan, une droite quelconque passant par le point donné, problèmes dont la solution a été indiquée plus haut.

XI. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, ses projections sont respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan.* — Soit, en effet, $\alpha P\alpha P'$ (fig. 12), un plan donné, et $mp, m'p'$ les projections d'une perpendiculaire à ce plan. Si par la droite on imagine un plan vertical, il sera perpendiculaire au plan $\alpha P\alpha P'$ puisqu'il contient la

droite mp , $m'p'$; et il sera en même temps perpendiculaire au plan horizontal, puisqu'il est vertical. Il sera donc perpendiculaire à l'intersection αP de ces deux plans; et réciproquement, cette inter-

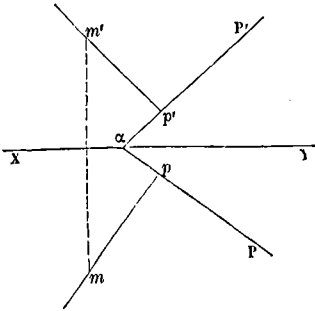


Fig. 12.

section lui sera perpendiculaire; elle est donc perpendiculaire à la droite mp qui y est contenue. En considérant le plan qui projette la droite sur le plan vertical, on démontrerait de même que αP est perpendiculaire à $m'p'$.

Pour mener par un point donné une perpendiculaire à un plan donné, il suffit donc de mener par les projections de ce point des droites respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan.

Si l'on demandait de mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite donnée, on mènerait, par un point quelconque de la ligne de terre, des perpendiculaires aux projections de la droite; ces perpendiculaires seraient les traces d'un plan perpendiculaire à la droite donnée; tout se réduirait donc à mener par le point donné un plan parallèle à un plan donné, problème qui a été résolu plus haut.

Si l'on demandait de mener par une droite donnée un plan perpendiculaire à un plan donné, on abaisserait, d'un point pris sur la droite, une perpendiculaire sur le plan donné; tout se réduirait à trouver les traces du plan contenant cette perpendiculaire et la droite donnée; pour cela, il suffirait de joindre les traces verticales de ces droites, ainsi que leurs traces horizontales.

XII. On trouvera aux articles : INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS, DISTANCES (Problèmes sur les), ANGLES (Problèmes sur les), ANGLES TRIÈDRES, PENÉTRATIONS DES POLYÈDRES, SPHÈRE CIRCONSCRITE, SPHÈRE INSCRITE, la solution des principaux problèmes que l'on peut avoir à résoudre sur la droite et le plan.

Pour la commodité de la solution, on emploie quelquefois les méthodes auxiliaires connues sous le nom de CHANGEMENTS DE PLANS, méthode des ROTATIONS et RABATTEMENT (Voy. ces mots).

XIII. REPRÉSENTATION DES LIGNES COURBES. Si de tous les points d'une courbe, soit plane, soit à double courbure, on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal, le lieu de ces perpendiculaires sera une surface cylindrique, dont la trace horizontale, c'est-à-dire l'intersection avec le plan horizontal, sera la projection horizontale de la courbe. Si, de même, on abaisse des différents points de cette courbe des perpendiculaires sur

le plan vertical, ces perpendiculaires formeront une surface cylindrique dont la trace verticale, c'est-à-dire l'intersection avec le plan vertical, sera la projection verticale de la courbe. Les deux surfaces cylindriques considérées sont ce que l'on appelle les cylindres projetants. — On voit que la projection d'une courbe sur un plan est, comme pour la droite, le lieu des projections des différents points de cette courbe.

Une courbe, soit plane, soit à double courbure, est parfaitement déterminée quand on connaît ses deux projections. Car si, par tous les points de l'une de ces projections, on élève des perpendiculaires au plan de projection correspondant, on formera l'un des cylindres projetants de la courbe; or l'intersection des deux cylindres projetants est précisément la courbe elle-même.

Nous nous contenterons de citer pour exemple l'HELICE (Voy. ce mot) à axe vertical, dont la projection horizontale est un cercle, et la projection verticale une courbe de la famille des sinusoides.

La tangente à une courbe a pour projection la tangente à la projection de cette courbe, c'est-à-dire que si M est un point de la courbe, et m la projection de ce point, la tangente en M à la courbe aura pour projection la tangente en m à la projection de la courbe. En effet, soit N un point de la courbe infiniment voisin de M ; la projection n du point N sera infiniment voisine de m . La droite qui joint les points m et n , sera la projection de celle qui joint les points M et N . Or cette dernière est la direction de la tangente en M à la courbe donnée; et mn est la direction de la tangente en m à la projection de la courbe. La proposition se trouve ainsi démontrée.

Ainsi la tangente en un point d'une hélice à axe vertical a pour projection horizontale la tangente au cercle projection de l'hélice.

XIV. REPRÉSENTATION DES SURFACES COURBES. Ce mode de représentation, variable avec la nature de la surface, est exposé à l'article SURFACES COURBES.

On trouvera aux articles PLANS TANGENTS, SECTIONS PLANES, DÉVELOPPEMENT, INTERSECTIONS DE SURFACES, SURFACE D'EGALE PENTE, etc., la solution des principaux problèmes relatifs aux surfaces qui se présentent dans les applications.

Voy. aussi l'article REPRÉSENTATION DES CORPS, l'article ÉPURES, et l'article PLANS COTÉS.

XV. On a vu par ce qui précède quel est le mode de notation généralement adopté en Géométrie descriptive. Les lettres majuscules sont réservées pour les points de l'espace; les projections horizontales sont indiquées par les mêmes lettres minuscules, les projections verticales par les mêmes minuscules accentuées. Si l'on effectue un changement de plan, une rotation ou un rabattement, les nouvelles projections sont encore indiquées par les mêmes lettres chargées de plusieurs accents ou affectées d'un indice. Les projections d'une droite sont représentées par les lettres qui représentent les projections de deux des points de cette droite. Les traces d'un plan sont représentées chacune par deux lettres, dont l'une appartient au point où le plan coupe la ligne de terre, et dont l'autre est accentuée pour la trace verticale et sans accent pour la trace horizontale. Dans les changements de plans, dans les rotations, dans les rabattements, les mêmes lettres sont conservées; mais on les charge de plusieurs accents ou

on les affecte d'un indice. Si le plan ne rencontre pas la ligne de terre dans le cadre de l'épure, chaque trace est indiquée par deux lettres. La ligne de terre est toujours indiquée par les lettres XY; si l'on effectue un ou plusieurs changements de plans, les nouvelles lignes de terres sont représentées par $X'Y'$, $X''Y''$, etc. Le plan vertical est toujours supposé rabattu sur la partie du plan supérieure à la ligne de terre, pour l'observateur qui a la lettre X à sa gauche et la lettre Y à sa droite.

Olivier a introduit dans ses ouvrages et dans son enseignement un autre système de notations, qui n'a pas été adopté par les auteurs, mais qu'il est utile de connaître, parce qu'il est encore en usage à l'École centrale des Arts et Manufactures et parmi les ingénieurs sortis de cette école. — La ligne de terre est désignée par les lettres LT; le plan vertical est supposé rabattu sur la partie supérieure du plan pour l'observateur qui a la lettre L à sa gauche et la lettre T à sa droite; cette convention subsiste dans tous les changements de plans. La projection horizontale d'un point m est désignée par m^h et sa projection verticale par m^v . Si le point se déplace, on accentue la lettre qui le représente, et l'on écrit, par exemple, m'^v pour sa nouvelle projection verticale. Si c'est le plan de projection qui a changé, on accentue l'exposant; on écrirait, par exemple, m''^v . Une droite se représente de la même manière qu'un point, avec cette différence que les majuscules sont affectées aux droites et les minuscules aux points. Ainsi une droite D a pour projection horizontale D^h et pour projection verticale D^v . Les lettres ou les exposants s'accroissent dans les mêmes circonstances que pour un point. Mais on voit que chaque droite porte un nom, est représentée par une lettre, indépendamment de la notation qu'on peut tirer des points qui la déterminent.

Un plan est aussi représenté par un nom ou une lettre majuscule; ses traces sont désignées par le nom du plan, mis en exposant de la lettre H pour la trace horizontale, ou de la lettre V pour la trace verticale; ainsi un plan P a pour traces H^P et V^P . (M. Tresca écrit simplement HP et VP.) Quand le plan change de position, on accentue la lettre qui forme son nom; on écrirait, par exemple, $H^{P'}$ et $V^{P'}$. Si ce sont les plans de projection qui ont changé, on accentue les lettres H et V; ainsi l'on écrirait $H^{P''}$ et $V^{P''}$.

Cette notation est ingénieuse et systématique; mais on ne peut nier qu'elle ne jette beaucoup d'obscurité dans les épreuves par la multiplicité des lettres qu'elle exige; et c'est sans doute la raison pour laquelle elle n'a pas été généralement adoptée.

XVI. Les ouvrages les plus estimés sur la Géométrie descriptive sont la *Géométrie descriptive*, de Monge, celle de *Hachette*, celle de *Leroy*, celle d'*Olivier*, et le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie. On trouvera d'utiles indications dans les ouvrages publiés sur ce sujet par MM. Vallée, Lefébure, de Fourcy, Babinet, Tresca. Enfin, à la liste de ces ouvrages il faut joindre les *Notes et Croquis de Géométrie descriptive*, de M. Bardin, qui, sous une forme trop modeste, renferment une foule de détails intéressants sur la science dont il s'agit, et sur ses applications.

XVII. Lorsque l'ensemble des points que l'on a à considérer s'élève peu au-dessus d'un même plan

horizontal, les méthodes ordinaires de la Géométrie descriptive ne conduisent qu'à des résultats confus, parce que les diverses droites tracées sur la projection verticale diffèrent à peine les unes des autres. C'est ce qui arrive notamment dans les questions relatives à la FORTIFICATION (*Voy.* ce mot) et dans toutes celles où l'on a à considérer les surfaces topographiques formées par le relief du terrain. Dans ces circonstances, l'expérience a montré qu'il était plus commode de supprimer le plan vertical de projection, et de remplacer la projection verticale de chaque point par une cote de hauteur inscrite à côté de la projection horizontale. Ce mode particulier de représentation exige naturellement l'emploi de méthodes particulières, dont l'ensemble forme la théorie des PLANS COTÉS. Cette théorie est regardée comme une branche de la Géométrie descriptive, quoique les procédés dont on y fait usage diffèrent notablement de ceux qui sont usités dans la Géométrie descriptive ordinaire. Nous renverrons, pour plus de détails sur ce sujet, à l'article PLANS COTÉS.

GÉOMORPHIE (du grec γῆ, terre, et μορφή, forme), partie de la Géodésie qui se rapporte plus particulièrement à la recherche de la forme de la terre (*Voy.* les articles GÉODÉSIE et FIGURE DE LA TERRE).

GERMINAL, le septième mois du calendrier républicain; il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 21 mars et le 21 avril (*Voy.* CALENDRIER).

GIRON, partie d'une marche d'escalier qui n'est pas recouverte par la marche suivante. La largeur du giron se mesure sur la ligne de foulée; elle est généralement comprise entre 25 et 40 centimètres (*Voy.* ESCALIERS).

GISEMENT (ANGLE DE), angle que fait la route d'un navire avec le vertical d'un astre. On a à considérer cet angle lorsqu'on veut réduire la hauteur de l'astre, observée d'un certain point, à ce qu'elle eût été si elle eût été observée d'un autre point. En nommant m le chemin parcouru par le navire, d'une station à l'autre, sous un même rhumb de vent, et V l'angle de gisement relatif à la 1^{re} station, on trouve que la correction à faire à la hauteur, observée de la 2^e station, pour obtenir sa valeur réduite à l'horizon de la première, est exprimée par $m \cdot \cos V$. (*Voy.* LATITUDE, IV, fig. 2.)

GLACIS, terrain en pente partant de la crête du chemin couvert (*Voy.* FORTIFICATION) et allant se raccorder avec le terrain naturel; c'est, à proprement parler, la PLONGÉE (*Voy.* ce mot) du chemin couvert. La surface d'un glacis est généralement plane; il faut que ce plan prolongé aille passer à 0^m,30 au moins au-dessous de la crête de l'ouvrage placé en arrière; à moins que cet ouvrage ne doive être défendu que par la mousqueterie, auquel cas le plan devrait aboutir immédiatement au-dessous de la crête. Si l'ouvrage doit être défendu par l'artillerie, on peut porter à 1 mètre la distance à laquelle le glacis prolongé peut passer au-dessous de la crête de l'ouvrage auquel il correspond. Les glacis se trouvent déterminés par cette condition et par la crête du chemin couvert par laquelle ils doivent passer. L'ensemble des glacis qui entourent une place forte forme ainsi une suite de plans qui se coupent en présentant une arête saillante à chaque saillant, et une gouttière à chaque rentrant. Si

à arête saillante est trop vive, ou si la gouttière est trop profonde, on raccorde les faces de l'angle par une surface conique ayant pour sommet le saillant ou le rentrant considéré. — On ne doit pas donner aux glacis une grande pente; les hommes placés sur la banquette du chemin couvert, et tirant ordinairement derrière une palissade, ne peuvent appuyer que l'extrémité ou tout au plus la partie moyenne de leur arme sur la crête, en sorte qu'on ne peut obtenir d'eux un tir plongeant. D'un autre côté, les glacis trop peu inclinés exigent des remblais considérables; l'expérience a montré que leur inclinaison ne doit pas être supérieure à $\frac{1}{16}$, ni inférieure à $\frac{1}{60}$.

Vauban l'avait fixée à $\frac{1}{20}$, et Cormontaigne à $\frac{1}{24}$, en moyenne. (Voy. pour plus de détails les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

GLISSEMENT, l'une des espèces de mouvements relatifs de deux corps en contact.

I. Ne considérons d'abord qu'un seul point de contact M (fig. 1); désignons par A et B les deux

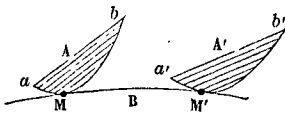


Fig. 1.

corps pour faciliter le discours, et supposons, ce qui est toujours permis, que l'on ait réduit le corps B au repos en donnant à tout le système un mouvement commun égal et contraire à celui de B. (Voy. MOUVEMENT RELATIF.) Il peut arriver qu'un même point M du corps mobile A se transporte sur la surface du corps B en y décrivant une courbe quelconque MM'. On dit alors qu'il y a *glissement simple*. L'arc MM' est l'arc de glissement; nous le désignerons par s. La vitesse de glissement est le rapport $\frac{ds}{dt}$ entre l'élément de l'arc de glissement et l'élément de temps employé par le point M pour le parcourir. — Un corps posé sur un plan horizontal et que l'on déplace à la surface de ce plan offre un exemple du genre de mouvement relatif que nous venons de définir: chacun des points de contact donne lieu à un glissement simple. Une vis qui tourne dans son écrou offre un autre exemple du même genre de glissement.

II. Il peut arriver au contraire que le point de contact M varie d'une manière continue sur la surface du corps mobile A, comme sur la surface du corps fixe B. Soit Mb (fig. 2) la courbe lieu des points de contact sur la surface du corps A, et MN' la courbe lieu des points de contact sur la

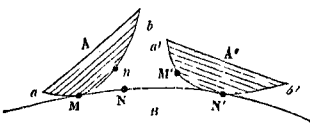


Fig. 2.

face du corps mobile A, comme sur la surface du corps fixe B. Soit Mb (fig. 2) la courbe lieu des points de contact sur la surface du corps A, et MN' la courbe lieu des points de contact sur la

surface du corps B. Soit *amb* la position initiale du corps A, et *a'N'b'* sa position au bout d'un certain temps; soit M' la position qu'a prise le point M sur le corps A après ce déplacement; et soit n celle qu'avait à l'origine du mouvement le point de contact actuel N'. Si, dans ce mouvement les deux courbes restent constamment en contact, et si, comme la figure le suppose, les arcs Mn et MN' sont inégaux, on dit qu'il y a *glissement mixte tangentiel*. On veut dire par là que le mouvement peut être considéré comme composé d'un glissement simple et d'un ROULEMENT (Voy. ce mot); on peut imaginer, en effet, que le corps A ait d'abord roulé sans glissement sur le corps B, de telle sorte que le point n soit venu s'appliquer en N, et qu'ensuite il y ait eu glissement simple le long de la courbe NN'. Il résulte de cette manière de voir, que l'arc de glissement est

NN', ou MN' — MN, ou encore MN' — Mn, c'est-à-dire que l'arc de glissement est la différence entre les arcs qui séparent, sur les deux surfaces, le point de contact final du point de contact initial.

Si le déplacement est très-petit, on peut évaluer l'arc de glissement d'une autre manière; cet arc, en effet, a aussi pour valeur

$$MN' - M'N;$$

mais si ces arcs, tangents en N', sont extrêmement petits, il en est de même de l'angle formé par leurs cordes; on peut donc regarder la différence de ces arcs comme sensiblement égale à la distance rectiligne MM'; en sorte que l'arc de glissement, lorsqu'il est extrêmement petit, n'est autre chose que la distance qui sépare, à la fin du glissement, les points primitivement en contact. Ce principe est mis à profit dans la théorie du Frottement des ENGRENAGES (Voy. ENGRENAGES [Frottement des]). Les roues motrices des locomotives offrent un exemple de ce genre de glissement lorsqu'il n'y a pas avec les rails une adhérence suffisante; elles *patinent*, c'est-à-dire qu'elles glissent en roulant, de telle sorte que le chemin parcouru par le train est moindre que s'il y avait un simple roulement.

III. Si les courbes Mb et MN', au lieu d'être tangentes, se coupent sous un certain angle θ , on dit qu'il y a *glissement angulaire*. On appelle encore *arc de glissement* la distance nN' qui sépare, à l'origine, les points qui doivent venir coïncider. Si ds désigne l'arc MN' et d σ l'arc Mn, la valeur de l'arc de glissement est

$$\sqrt{ds^2 + d\sigma^2 - 2ds \cdot d\sigma \cdot \cos \theta}.$$

On obtient la vitesse du glissement en divisant cette expression par dt. Or, si v et u représentent les vitesses avec lesquelles le point de contact se transporte sur les courbes MN' et Mn, on a

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ et } u = \frac{d\sigma}{dt};$$

par conséquent, la vitesse de glissement est exprimée par

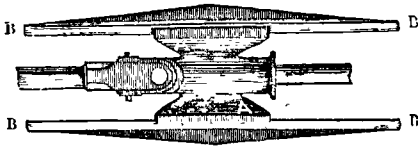
$$\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv \cos \theta},$$

c'est-à-dire qu'elle est égale (Voy. COMPOSITION DES VITESSES) à la résultante de la vitesse v et d'une vitesse égale et contraire à u; ou, en d'autres termes, qu'elle est égale à la vitesse relative, c'est-à-dire à la vitesse avec laquelle le point de contact paraîtrait se mouvoir sur la courbe MN', pour un observateur entraîné à son insu avec le point de contact sur la

courbe Mn. (*Voy. le Traité de Cinématique de M. Bélanger.*) On rencontre ce genre de glissement dans les engrenages d'Olivier. Les effets du jeu de billard en offrent aussi un exemple. Coriolis a fait voir que, lorsque la bille décrit une courbe sur le tapis, cette courbe est une parabole, et que le frottement s'exerce dans la direction de ses diamètres; par conséquent, le lieu des points de contact sur le tapis et sur la bille se coupent à chaque instant sous un angle qui est celui de la tangente à la courbe avec le diamètre.

IV. On peut distinguer une autre espèce de glissement mixte : c'est celui qui, ayant lieu à chaque instant suivant une droite, est accompagné d'une rotation instantanée autour de cette droite. On sait (*Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ*) que le mouvement instantané le plus général d'un corps solide se compose d'une rotation autour d'un axe et d'une translation suivant cet axe; et que le mouvement fini d'un corps peut toujours être reproduit en faisant rouler une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe, avec glissement longitudinal le long de la génératrice de contact. Ce mouvement donnerait lieu au glissement dont nous parlons. On le rencontre dans les engrenages hyperboloïdes (*Voy. ENGRENAGES*).

GLISSIÈRE, nom générique donné à divers organes de machines qui servent à guider par simple glissement les pièces mobiles (*Voy. GUIDES DU MOUVEMENT*). Nous donnerons comme exemple la glissière des locomotives placée au point d'articulation du piston avec la bielle. C'est une pièce rectangulaire AA dans laquelle est fixé l'axe qui sert d'arti-



culcation entre la bielle et le piston. Cette pièce, à laquelle on donne le nom de *coquille*, embrasse par ses rebords deux guides longitudinaux BB, BB; en glissant le long de ses guides, elle assure la direction rectiligne du piston.

Quelques personnes appliquent le nom de *glissière* à tous les organes où il y a contact immédiat et glissement simple, comme les *paliers*, les *crapaudines*, les *genoux*, les *écrous*, etc.

GLOBE CÉLESTE, sphère sur laquelle sont représentées les positions relatives des principales étoiles, avec l'indication des constellations auxquelles elles appartiennent. Pour concevoir comment on peut construire un globe céleste, il faut imaginer qu'on trace d'abord sur cette sphère un grand cercle pour représenter l'équateur céleste; les pôles de ce grand cercle représenteront les pôles du monde. Ayant choisi arbitrairement un point sur l'équateur pour représenter l'origine des ascensions droites, et divisé ce cercle à partir de cette origine, en degrés et fractions de degré si cela est possible, on porte sur l'équateur, à partir de l'origine, un arc embrassant un nombre de degrés égal à l'ascension droite d'une étoile déterminée; par l'extrémité de cet arc, et par les pôles, on fait passer un arc de grand cercle, qui représentera le mé-

ridien de l'étoile; sur ce méridien, à partir de l'équateur, on porte, dans le sens convenable, un arc embrassant un nombre de degrés égal à la déclinaison de l'étoile; l'extrémité de cet arc sera la position de l'étoile sur le globe céleste. En opérant de la même manière pour d'autres étoiles, on représente sur le globe toutes les étoiles remarquables; on réunit par une courbe pointillée ou par une figure celles qui font partie d'une même constellation; on inscrit le nom de cette constellation, ainsi que la lettre ou le chiffre qui sert à distinguer chaque étoile, et le globe céleste est construit. Pour pouvoir en construire aisément de semblables, on divise ordinairement sa surface en fuseaux assez étroits pour pouvoir être considérés comme sensiblement développables sur un plan; on reproduit le dessin de chacun d'eux par la gravure; et pour obtenir un nouveau globe céleste pareil au premier il suffit de coller ces fuseaux dans leur ordre sur la surface d'une sphère de même diamètre.

Un globe céleste est ordinairement mobile autour de la ligne des pôles; et les extrémités de l'axe de rotation reposent en deux points diamétralement opposés sur la circonférence d'un cercle vertical qui représente le méridien du lieu, et ce cercle vertical peut se mouvoir dans son plan autour de son centre, de manière à prendre toutes les positions possibles par rapport à un cercle horizontal fixe qui représente l'horizon du lieu (*Voy. GLOBES TERRESTRES*.) Cette disposition permet de résoudre, par la seule inspection de l'appareil, une foule de problèmes cosmographiques, tels que ceux qui se rapportent au lever ou au coucher des étoiles (*Voy. GLOBES TERRESTRES*).

Le défaut des globes célestes est de nous montrer la voûte étoilée non pas comme nous la voyons de son centre, mais comme nous la verrions si elle avait un rayon déterminé et qu'il nous fût possible de nous transporter au dehors; les constellations y sont vues pour ainsi dire à l'envers, et il faut les retourner par la pensée pour leur rendre leurs formes véritables et leurs positions relatives. On s'habitue au reste assez facilement à cette opération mentale.

Les globes célestes en usage dans l'enseignement ont en général de 20 à 30 centimètres de diamètre. Parmi les globes célestes les plus remarquables, on cite celui de la Bibliothèque impériale, qui a près de 4 mètres, mais qui date de deux siècles environ, et celui de Gottorp, en Russie, qui offre cette particularité que la sphère étoilée y est vue du centre; l'intérieur de ce globe est en effet un globe céleste, tandis qu'à l'extérieur c'est un globe terrestre.

GLOBES TERRESTRES, appareils qui représentent la terre, et peuvent donner une idée de son mouvement de rotation diurne. Un globe terrestre est toujours une sphère, attendu qu'il serait impossible d'y rendre sensible l'aplatissement. Sa surface est une véritable carte géographique sur laquelle sont tracés les continents, les îles, les montagnes, les fleuves, etc., les grandes divisions politiques, et où sont marquées les villes principales. Le globe est traversé suivant la ligne des pôles par un axe en fer, dont les extrémités P et P' (fig. 1) tournent dans des ouvertures pratiquées dans l'épaisseur d'un cercle vertical AAA, susceptible

lui-même de prendre toutes les positions dans son plan, en glissant dans des encoches pratiquées à la circonférence intérieure d'un anneau horizontal HH, auquel est fixé le pied qui porte tout l'appareil. A

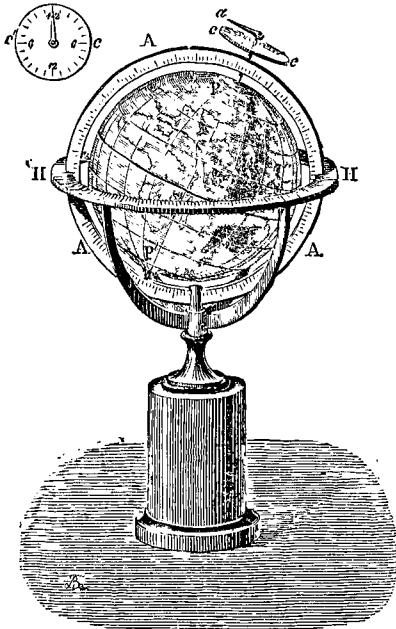


Fig. 1.

l'extrémité P de l'axe du globe, en dehors du cercle AAA, est adaptée à frottement doux une aiguille a, perpendiculaire à cet axe, et tournant avec le globe, en parcourant un cercle cc, qui est vu à part en c'c'; et dont la circonférence est divisée en 24 parties égales exprimant les heures du jour. Le cercle AAA figure un méridien, quelconque; il est divisé en degrés de latitude. Le cercle HH figure l'horizon; le centre du globe est dans le plan de ce cercle; sa circonférence est divisée en 360 degrés. En faisant mouvoir le cercle vertical dans les encoches du cercle HH, on peut amener l'axe du globe dans une position quelconque par rapport au plan de ce cercle. Lorsque l'axe PP' est placé verticalement, le cercle HH représente l'équateur.

Pour connaître la latitude d'un lieu, il suffit de faire tourner le globe autour de son axe de manière à amener ce lieu sous le cercle AAA; on lit alors sur la circonférence de ce cercle la latitude demandée. Pour connaître la longitude d'un lieu, on place l'axe PP' verticalement; on amène le lieu dont il s'agit sous le cercle AAA; et l'on cherche à quelle division du cercle HH correspond alors le méridien de Paris tracé sur le globe; l'arc d'équateur compris entre ce méridien et le cercle AAA exprime la longitude cherchée. Pour trouver l'antipode d'un lieu donné, on l'amène sous le cercle AAA; il est alors aisé de trouver le lieu placé dans une position diamétralement opposée, puisque ces deux lieux ont des latitudes égales et opposées, et qu'ils sont situés sous le même méridien. Le cercle cc et l'aiguille a servent à résoudre approximativement ce problème, connaissant l'heure qu'il est

dans un lieu M du globe, trouver l'heure qu'il est dans un autre lieu M'. Pour cela, on amène le lieu M sous le méridien AAA; et, en maintenant le globe dans cette position, on fait marquer à l'aiguille l'heure de ce lieu. On fait ensuite tourner le globe de manière à amener le lieu M' sous le méridien; l'aiguille, qui a été entraînée par l'axe, marque alors une heure qui est l'heure demandée. On peut à l'aide d'un globe terrestre résoudre approximativement plusieurs autres problèmes. (Voy. les Institutions géographiques de Robert de Vaugondi et le Précis de la Géographie universelle de Malte-Brun.)

Les globes sont ordinairement exécutés en carton, avec charpente intérieure s'ils sont de grandes dimensions. La surface est recouverte d'un papier bien uni et bien tendu; quelquefois d'une couche de blanc de céruse infusé dans de la colle de Flandre, et passé à la pierre ponce. On peut dessiner directement sur le globe. Dans ce cas, après l'avoir traversé par un axe, qui figure la ligne des pôles, on le place dans un calibre circulaire en fer, parfaitement dressé, et placé au bord d'une table échancrée; les extrémités de l'axe reposent dans des rainures où elles peuvent tourner librement sans changer de place. On se sert alors du calibre pour tracer les méridiens, en suivant son contour avec un tire-ligne, et pour tracer les parallèles en tenant le tire-ligne immobile et faisant tourner le globe. Mais le plus souvent, on exécute à part, et par fuseaux, le dessin qui doit recouvrir le globe.

Si son diamètre n'est que de 20 à 25 centimètres, il suffit de 12 ou de 18 fuseaux que l'on colle avec soin sur la surface. Le nombre des fuseaux doit augmenter nécessairement avec les dimensions à donner au globe. Pour tracer un de ces fuseaux, on opère de la manière suivante. Supposons que le nombre des fuseaux doive être de 12, ce qui donne 30 degrés pour l'arc intercepté par chacun d'eux sur l'équateur. On tracera deux droites rectangulaires PP' et EE' (fig. 2), qui se couperont en un point C. Sur l'une d'elles on portera deux longueurs CP et CP' égales à la longueur développée d'un quart de grand cercle de la sphère, et sur l'autre,

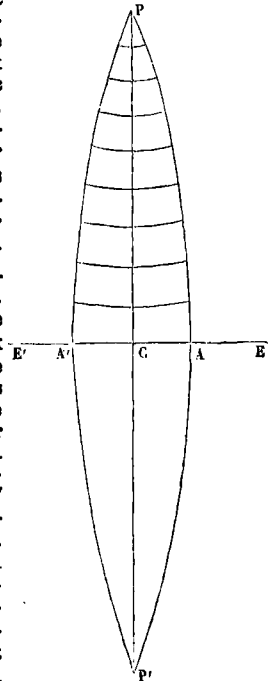


Fig. 2.

de part et d'autre du point C, les longueurs AC et A'C égales au 6° de CP, c'est-à-dire à l'arc de 15 degrés développé. Par les points P, A, P' on fera passer un arc de cercle; on en fera passer un second par les points P, A', P',

Cela fait, si les parallèles doivent être tracés de 10 degrés en 10 degrés par exemple, on divisera CP en 9 parties égales; on divisera de même en 9 parties égales les arcs AP et A'P; puis, par les points de division correspondants on fera passer des arcs de cercle. On aura ainsi un demi-fuseau APA' qui, appliqué sur le globe, couvrira le 12° d'un hémisphère; et les arcs qui représentent les parallèles se raccorderont, d'un demi-fuseau à l'autre, de manière à figurer sans erreur appréciable les cercles parallèles à l'équateur. L'opération serait analogue pour un plus grand nombre de fuseaux. Ordinairement on échancre ces demi-fuseaux du côté du pôle, et l'on couvre toute la partie polaire, à partir du 70° parallèle, par un cercle préparé d'avance, et fendu suivant quelques-uns de ses rayons de manière à pouvoir s'appliquer exactement sur la surface de la sphère. La figure 3 indique ce cercle complémentaire.

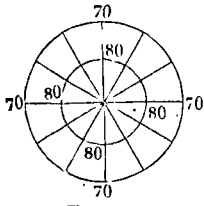


Fig. 3.

Les globes terrestres en usage dans l'enseignement ont depuis 15 centimètres jusqu'à 66 centimètres de diamètre. On cite parmi les plus grands appareils de ce genre le globe terrestre de la Bibliothèque Mazarine, qui a 1^m,30 de diamètre; celui de Gottorp, en Russie, qui a plus de 3^m,50; et les deux globes de la Bibliothèque impériale à Paris, qui ont près de 4^m. Ces derniers, qui ont près de deux siècles, ne représentent plus l'état actuel de la science.

On peut consulter sur l'usage des globes terrestres *l'Introduction à la connaissance de la sphère* de de Lacroix, et *le Traité de la sphère* de Rivard.

GLOBULAIRE (PROJECTION), système de canevases des cartes géographiques, et particulièrement des mappemondes, dans lequel les méridiens équidistants sont représentés par des arcs de cercle coupant en parties égales la droite qui représente l'équateur, et les parallèles équidistants par des arcs de cercle coupant en parties égales le méridien sur lequel se fait le tracé, et la droite qui représente le méridien perpendiculaire. Ce n'est point, à proprement parler, une projection, et ce système de canevases, qui n'a d'autre avantage que de ne pas trop déformer les continents, ne jouit d'aucune propriété géométrique. Il est néanmoins fréquemment employé en Angleterre, et même en France. (*Voy. CARTES GÉOGRAPHIQUES.*)

GNOMON (mot grec signifiant *indicateur*), instrument d'Astronomie dont se servaient surtout les anciens. Il se compose d'un style vertical ou d'une pyramide, dont on mesurait l'ombre à différentes époques de l'année, au moment du passage du soleil au méridien. Quelquefois le gnomon, au lieu de se terminer par une pointe, était surmonté d'une plaque circulaire percée d'un trou central; la distance de l'image de ce trou sur le sol au pied de l'appareil jouait le même rôle que la longueur de l'ombre.

Les anciens astronomes déterminaient à la fois la latitude du lieu et l'obliquité de l'écliptique, en mesurant, pendant une période d'une année, le maximum et le minimum de longueur de l'ombre.

Soient, en effet, GH (fig. 1) la hauteur du gnomon, H son pied, AH la plus petite longueur de l'ombre et A'H la plus grande, au moment du passage du soleil au méridien; les angles AGH et A'GH, respec-

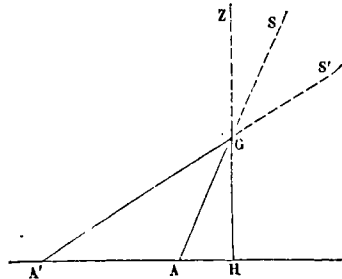


Fig. 1.

tivement égaux à SGZ et S'GZ, représenteront le minimum et le maximum de distance zénithale méridienne du soleil; et si l'on appelle ζ et ζ' ces distances zénithales, l et l' les longueurs correspondantes de l'ombre, et h la hauteur du gnomon, on aura $\text{tang } \zeta = \frac{l}{h}$, $\text{tang } \zeta' = \frac{l'}{h}$.

Mais si OZ (fig. 2) est la verticale du lieu, S et S'

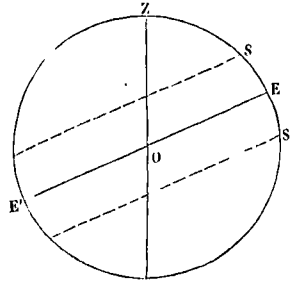


Fig. 2.

les positions du soleil répondant aux solstices, d'où il suit que $SZ = \zeta$ et $S'Z = \zeta'$; si enfin EE' est la trace de l'équateur sur le plan du méridien, il est évident que l'on a

$$ZE = \frac{1}{2}(SZ + S'Z) \text{ et } SE = \frac{1}{2}(S'Z - SZ),$$

c'est-à-dire, en appelant λ la latitude du lieu et ω l'obliquité de l'écliptique,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta') \text{ et } \omega = \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta),$$

relations qui font connaître la latitude λ du lieu, et l'obliquité ω de l'écliptique. Dans ce calcul, les distances zénithales ζ et ζ' doivent être corrigées de la RÉFRACTION (*Voy. ce mot*).

La méthode dont on vient de parler a été employée en Chine sous une forme peu différente, onze cents ans avant J.-C.; Pythéas l'employait à Marseille trois cent cinquante ans avant notre ère; enfin elle était encore usitée à l'Observatoire de Paris à la fin du dix-septième siècle. Les observations faites à l'aide du gnomon ont suffi par faire reconnaître la diminution progressive de l'obliquité de l'écliptique.

On donne aussi le nom de *gnomons* à de véritables cadrans solaires horizontaux (*Voy. CADRANS SOLAIRES*), établis le plus souvent dans des églises, et où l'heure est indiquée par la position de l'image que produit la lumière solaire introduite par un petit orifice pratiqué dans la paroi. On peut voir un gnomon de ce genre à l'hôpital de Tonnerre.

Enfin, on donne quelquefois le nom de *gnomons* aux cadrans solaires, verticaux ou autres, surtout lorsque le style est remplacé par une plaque circulaire percée d'un trou central.

GNOMONIQUE, art de tracer les gnomons et les cadrans solaires; c'est une application intéressante de l'Astronomie et de la Géométrie descriptive. (*Voy. GNOMONS, CADRANS SOLAIRES, CADRAN AZIMUTHAL, etc.*). Les principes fondamentaux de la Gnomonique sont exposés dans tous les traités de Cosmographie et d'Astronomie élémentaire. On peut consulter sur ce sujet le *Cours d'Astronomie* de l'École polytechnique; les *Traité de Clavius* (1708); les *Écrits d'Ozanam*, de Lahire, de Deparcieux, de Rivard, etc. *Voy. aussi l'Histoire de l'Astronomie ancienne* de Delambre; un *Mémoire* de M. Mahistre, et la *Gnomonique* de M. Boutereau, qui contient quelques indications utiles.

GORGE, sorte de moulure circulaire (*Voy. MOULURES*).

GORGE, nom donné dans la FORTIFICATION (*Voy. ce mot*) à l'intervalle compris entre les extrémités des faces d'une DEMI-LUNE, d'une LUNETTE, d'un REDAN, d'un RÉDUIT, etc. (*Voy. ces mots*), ou entre les points où les flancs d'un BASTION rencontrent les courtines adjacentes. Un ouvrage extérieur est dit *ouvert à la gorge* lorsqu'il n'est point fortifié du côté de la place; la même expression s'applique à un ouvrage détaché lorsqu'il n'est fortifié que sur les faces tournées vers l'ennemi.

GOUSSET, l'une des pièces de l'enrayure d'une CROUPE (*Voy. ce mot*); elle relie le tirant de la ferme de long pan avec le tirant de la demi-ferme de croupe et sert à porter un des bouts du *coyer*.

GOUTTES, ornements, de forme pyramidale ou conique, placés au-dessous des triglyphes dans l'ordre dorique, et figurant des gouttes d'eau. Elles sont au nombre de 6 sous chaque triglyphe.

Dans l'ordre dorique mutulaire, le dessous de chaque MUTULE (*Voy. ce mot*) est orné de 36 saillies circulaires, auxquelles on donne aussi le nom de gouttes, et qui sont disposées sur 6 rangs, de manière à former un carré. (*Voy. ORDRES*.)

GOVERNAIL, appareil mobile placé à l'arrière d'un navire qui sert à le gouverner, c'est-à-dire à donner à sa marche la direction convenable. Le gouvernail se compose de deux parties. L'une AA (fig. 1), que l'on nomme la *mèche*, est une forte pièce de chêne, articulée avec l'étambot, au moyen d'aiguillots, qui traversent des orifices pratiqués dans les *femelots* fixés à l'étambot. La mèche dépasse l'étambot par sa partie supérieure. Sa section droite n'est pas un rectangle; elle offre, du côté de l'étambot, des faces inclinées qui lui permettent de tourner, dans un sens ou dans l'autre, d'un angle de 35° environ (*Voy. JAUMIÈRE*). La seconde partie, BBB, appelée le *safran*, est faite de planches de sapin assemblées par des ferrures; elle forme la partie saillante du gouvernail. Sa forme se rapproche plus ou moins d'un trapèze dont la largeur

moyenne est peu considérable relativement à la hauteur. La partie supérieure de la mèche est percée d'une forte mortaise dans laquelle s'engage la *barre d'usage* à l'aide de laquelle on fait mouvoir le gouvernail. Pour cela, une corde très-solide et d'une fabrication particulière, appelée *drosse*, est fixée à l'extrémité de la barre; elle passe de chaque côté du navire dans des poulies très-mobiles, et va s'enrouler sur un tambour placé sur le pont, et que les timoniers font mouvoir au moyen d'une roue à chevilles.

Dans les navires en fer, le gouvernail est lui-même en fer; la mèche peut être en fer massif, ou bien en tôle creuse; du reste, sauf le mode d'assemblage des pièces, la construction est la même que pour un gouvernail en bois. Lorsque la mèche est creuse, elle est entamée de distance en distance pour donner passage aux femelots; une barre en fer rond, introduite dans l'intérieur de la mèche, la traverse dans sa longueur, passe par les trous des femelots et remplace les aiguillots.

L'effet du gouvernail est facile à concevoir. Soit OX (fig. 2) la direction d'une parallèle à la quille;

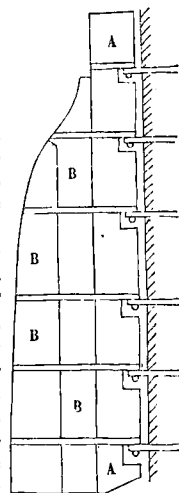


Fig. 1.

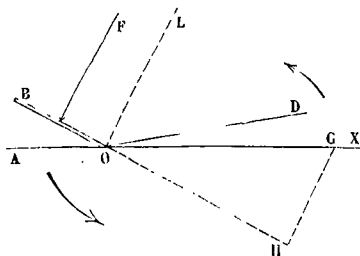


Fig. 2.

soit O un point de l'étambot, OA une coupe horizontale du gouvernail dans sa position moyenne, c'est-à-dire lorsque son plan se confond avec le longitudinal. Si on lui fait prendre la position OB, il s'exercera de la part du fluide une résistance normale F, dont le moment par rapport au centre de gravité G du navire aura pour effet de faire tourner celui-ci dans le sens des flèches; c'est-à-dire que lorsqu'on met le gouvernail en saillie sur l'un des côtés du bâtiment, ce déplacement a pour effet de porter la proue du même côté.

On peut obtenir aisément l'expression du moment de la force F. Nous supposons d'abord que l'étambot n'ait point de quète, c'est-à-dire qu'il soit vertical, comme cela a lieu dans beaucoup de navires modernes, et particulièrement dans les bâtiments à hélice. Nous admettons que le navire ait une dérive $DOX = \theta$, et que sa vitesse soit V. Désignons par II le poids du mètre cube de fluide, par A l'aire du gouvernail, par k un coefficient numérique déterminé conformément à la RÉSISTANCE DES

FLUIDES (Voy. ce mot); soit i l'angle BOA ou l'inclinaison donnée au gouvernail; soit δ la distance OI du centre de gravité de la surface du gouvernail à l'étambot, et D la distance OG. Si l'on mène OL et GH perpendiculaires à OB, on voit facilement que la force F a pour expression

$$\frac{k\Pi AV^2 \sin^2(\text{DOH})}{2g} \text{ ou } \frac{k\Pi AV^2 \sin^2(i + \theta)}{2g}. \quad [1]$$

Son moment par rapport au point G est donc

$$\mu = \frac{k\Pi AV^2 \sin^2(i + \theta)}{2g} (\delta + D \cos i). \quad [2]$$

On voit que cette expression varie, toutes choses égales d'ailleurs, comme le carré de la vitesse V, et que par conséquent l'effet du gouvernail est d'autant plus grand que la vitesse du vaisseau est plus grande; ce qui est conforme à l'observation. On sait, en effet, que lorsque le navire court grand large ou vent arrière, c'est-à-dire quand sa vitesse est la plus grande possible (Voy. VOILES), l'action du gouvernail est très-grande, et qu'une très-faible inclinaison de cet organe suffit alors pour faire évoluer.

On peut chercher s'il y a une inclinaison qui rende le moment μ maximum. Ce maximum répondrait à celui de l'expression

$$\varphi = \sin^2(i + \theta) (\delta + D \cos i). \quad [3]$$

Si l'on néglige d'abord δ devant $D \cos i$ qui est beaucoup plus considérable, et qu'on différencie par rapport à i l'expression

$$\sin^2(i + \theta) \cos i,$$

on trouve, en égalant à zéro la dérivée, la relation

$$\sin(i + \theta) [2 \cos(i + \theta) \cos i - \sin(i + \theta) \sin i] = 0.$$

On ne peut supposer $\sin(i + \theta) = 0$, puisque i et θ sont positifs et aigus; il faut donc évaluer à zéro la parenthèse, ce qui donne

$$\tan i \tan(i + \theta) = 2$$

$$\text{ou } \tan^2 i + 3 \tan \theta \cdot \tan i = 2. \quad [4]$$

En attribuant à θ des valeurs croissantes de zéro jusqu'à l'angle dont la tangente est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, c'est-à-dire

jusqu'à 35°16' environ, on trouve pour i des valeurs décroissantes, mais supérieures à 35°; pour

$$\tan \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ on trouve } \tan i = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \text{ Comme on}$$

ne peut, dans les circonstances normales, attribuer à la dérive une valeur aussi grande, il faut en conclure que le moment de la force F croît toujours avec l'inclinaison du gouvernail. Ces conclusions subsistent quand on a égard au terme $\delta \cdot \sin^2(i + \theta)$, puisque ce terme croît évidemment avec i .

Lorsque l'étambot a de la quête, la valeur de F et l'expression de son moment sont un peu moins simples. Soit XY (fig. 3) une parallèle à la quille que nous prendrons comme ligne de terre. Soit OI l'étambot, OG la trace horizontale du plan du gouvernail. Soit OD la direction que suit le navire, en ayant égard à la dérive, et soit OP une perpendiculaire au plan IOG. Désignons par i l'angle YIOG que fait le gouvernail avec le longitudinal, par q la quête de l'étambot, ou l'angle de OI avec la verticale OV, et enfin par θ l'angle DOX de la dérive. Il faut d'abord trouver l'angle que fait la vitesse du navire avec la perpendiculaire OP. Or dans le trièdre OPDH on connaît

$$\text{POH} = i,$$

puisque OP est perpendiculaire au plan du gouver-

naill, et que OH est perpendiculaire au longitudinal;

$$\text{DOH} = 90^\circ - \theta;$$

dièdre OH = q ; car OI, perpendiculaire à OP et

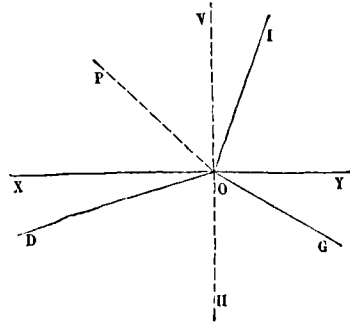


Fig. 3.

à OH, est perpendiculaire à la face POH, et d'ailleurs OV est perpendiculaire au plan horizontal.

On aura donc

$$\cos \text{POH} = \cos i \sin \theta + \sin i \cos \theta \cdot \cos q.$$

Par conséquent

$$F = \frac{k\Pi AV^2}{2g} (\cos i \sin \theta + \sin i \cos \theta \cdot \cos q)^2. \quad [5]$$

Il faut projeter cette force sur le plan horizontal, et pour cela la multiplier par le sinus de l'angle que fait le plan du gouvernail avec l'horizon, c'est-à-dire par $\sin OG$. Pour avoir le moment de cette projection, il faudra ensuite la multiplier par $D \cos GOY$, en négligeant la demi-largeur du gouvernail; ce moment a donc pour valeur

$$FD \cdot \sin OG \cdot \cos GOY.$$

Or, dans le trièdre OIGY, on a

$$\cos i = \sin OG \cdot \cos GOY;$$

le moment cherché se réduit donc à $F \cdot D \cos i$; et en remettant pour F sa valeur, il devient

$$\mu = \frac{k\Pi AV^2}{2g} \cdot D (\cos i \sin \theta + \sin i \cos \theta \cos q)^2 \cdot \cos i. \quad [6]$$

Si l'on égale à zéro la dérivée de cette expression par rapport à i , on obtient une relation qu'on peut mettre sous la forme

$$(1 + 3 \cos 2i) \cos q = 3 \sin 2i \cdot \tan \theta,$$

et de laquelle on peut tirer la valeur de $\cos 2i$, et par suite l'angle i qui convient au maximum du moment considéré. Si la dérive est nulle, cette relation donne $\cos 2i = -\frac{1}{3}$, ou $i = 54^\circ 20'$ environ. Si

l'on suppose une dérive de 20°, et l'angle $q = 20^\circ$ également, on trouve pour i une valeur de $47^\circ 21'$ environ. En sorte que la valeur de i qui répondrait au maximum du moment est toujours supérieure à 35°; et que dès lors on doit regarder ce moment comme croissant avec l'inclinaison i du gouvernail par rapport au longitudinal.

Lorsque l'étambot a de la quête, l'action du gouvernail n'est pas la même dans les deux sens. Pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à supposer que la dérive θ change de signe; le moment de la force F prend alors la valeur

$$\mu' = \frac{k\Pi AV^2}{2g} \cdot D$$

$$\times (-\cos i \sin \theta + \sin i \cos \theta \cos q)^2 \cdot \cos i, \quad [7]$$

laquelle est évidemment moindre que μ . Les marins expriment cette différence d'action en disant que le gouvernail a plus de force pour faire arriver le navire que pour le faire venir au vent.

La composante horizontale de la force F se décompose en deux autres : l'une perpendiculaire à XY, et qui a pour valeur

$$F'' = F \sin \text{OG} \cdot \cos \text{GOY},$$

l'autre parallèle à XY et dont la valeur est

$$F''' = F \sin \text{OG} \cdot \sin \text{GOY}.$$

A l'aide de la remarque faite plus haut, F'' se réduit à $F \cos i$. Quant à F''' , on remarque que le trièdre OIGY donne

$$\text{tang GOY} = \cos q \text{ tang } i,$$

d'où

$$\sin \text{GOY} = \cos \text{GOY} \cdot \cos q \text{ tang } i;$$

il en résulte

$$F'' = F \cos i \cdot \cos q \text{ tang } i \text{ ou } F'' = F \sin i \cdot \cos q.$$

La force F'' résiste à la dérive; mais F''' s'oppose à la marche directe : d'où il suit que l'action du gouvernail a toujours pour effet de ralentir le mouvement direct du navire dans le sens de la quille.

Indépendamment de ces deux composantes, la force F a une composante verticale, exprimée par $F \cdot \cos \text{OG}$ ou $F''' = F \sin i \sin q$,

car dans le trièdre OIGY on a $\cos \text{OG} = \sin i \sin q$. Cette composante verticale a pour effet de charger le navire de haut en bas.

Les composantes F'' et F''' croissent avec l'inclinaison du gouvernail; il est donc convenable de réduire cette inclinaison à la valeur strictement nécessaire pour produire le mouvement d'évolution (Voy. ce mot) que l'on a en vue. L'action du gouvernail est modifiée par l'inclinaison que prend le navire sous l'influence du vent. Pour en donner une idée, supposons que l'étambot n'ait pas de quète. Soit OV (fig. 4) l'étambot, XY une parallèle à la

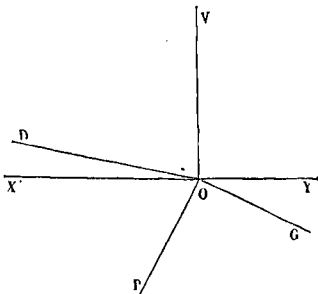


Fig. 4.

quille, OG la trace du plan du gouvernail sur un plan mené suivant XY perpendiculairement au longitudinal. Soit OP une perpendiculaire au plan VOG; enfin DO la direction de la vitesse de l'eau; ce qui revient à supposer que le plan DOX étant horizontal, le navire s'est incliné sous le vent d'un angle égal à l'angle des plans DOX et POX. Désignons par i l'angle GOY, par θ l'angle DOX, qui exprime la dérive, et par α l'inclinaison du navire, ou l'angle DXOP. La résistance du fluide agit suivant DO; il faut projeter la vitesse de l'eau sur OP, et pour cela déterminer le cosinus de l'angle DOP. Or dans le trièdre ODPX on connaît l'angle OX ou

α , la face DOX ou θ , et la face POX ou $90^\circ - i$; on a donc

$$\cos \text{DOP} = \cos \theta \sin i + \sin \theta \cos i \cdot \cos \alpha,$$

et par conséquent la force F a pour valeur

$$\frac{k \Pi A V^2}{2g} (\cos \theta \sin i + \sin \theta \cos i \cos \alpha)^2,$$

et son moment par rapport au centre de gravité est, en négligeant toujours la demi-largeur du gouvernail,

$$\mu = \frac{k \Pi A V^2}{2g} \cdot D (\cos \theta \sin i + \sin \theta \cos i \cos \alpha)^2 \cos i, \quad [8]$$

expression qui ne diffère de la valeur [7] trouvée plus haut, qu'en ce que q est remplacé par α . On conclura donc comme plus haut que, pour une valeur donnée de α , μ augmente avec i , jusqu'à une limite qui est supérieure à 35° ; en sorte que ce moment croît avec l'angle que fait le gouvernail avec le plan de symétrie longitudinal du navire. Pour une valeur donnée de i , μ décroît au contraire lorsque α augmente; ainsi l'inclinaison du navire sous l'action du vent tend à diminuer l'effet du gouvernail : c'est-à-dire qu'il faut alors lui faire faire un angle plus grand avec le plan de symétrie pour obtenir le même résultat que si le navire était droit. Si le gouvernail, au lieu d'être porté du côté où le navire incline, était porté du côté opposé, on aurait la valeur correspondante de μ en changeant le signe de i , ce qui donne

$$\mu' = \frac{k \Pi A V^2}{2g} D (-\cos \theta \sin i + \sin \theta \cos i \cos \alpha)^2 \cos i, \quad [9]$$

valeur qui variera dans le même sens que α ou en sens contraire, suivant que la quantité entre parenthèses aura le signe — ou le signe +, c'est-à-dire suivant qu'on aura

$$\text{tang } i > \text{ tang } \theta \cos \alpha.$$

Pour une même valeur de α , μ' est d'ailleurs moindre que μ , ainsi qu'on l'avait déjà remarqué pour le cas où le navire est sans inclinaison.

(Voy. la Science navale d'Euler, la Nouvelle théorie de la manœuvre du vaisseau de Jean Bernoulli, le Traité du navire de Bouguer, et les divers traités de la manœuvre.)

Dans les navires à hélice qui ont un puits de remontage, la barre du gouvernail ne pourrait conserver sa position et sa longueur ordinaire, sans passer sur l'orifice du puits et rendre la manœuvre du remontage impossible. On est obligé de ne donner à la barre qu'une faible longueur MB (fig. 5),

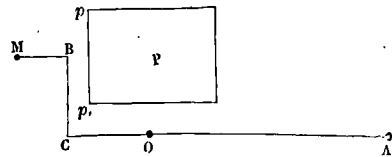


Fig. 5.

et de l'arrêter un peu avant la paroi arrière pp' du puits P; mais, pour n'avoir pas à exercer un effort plus considérable, on relie l'extrémité B de la barre, par le moyen d'une bielle BC articulée à ses extrémités, à un levier CA, mobile autour d'un point fixe O, et c'est à l'extrémité A de ce levier qu'est fixée la drosse qui fait mouvoir le gouvernail. L'effort à exercer en A est alors celui qui s'exerce

à l'extrémité de la barre ordinaire. Mais l'effort en C, et par suite en B, étant beaucoup plus considérable, il en résulte une pression beaucoup plus grande sur les aiguillots, dont les dimensions doivent être calculées en conséquence. (*Voy. le Traité de l'hélice propulsive* de E. Paris.)

GOUVERNEMENT D'UN NAVIRE, art de disposer des VOILES, du GOUVERNAIL et même de la charge du navire pour suivre une route déterminée, pour évoluer, ou pour remédier, au contraire, aux mouvements d'ÉVOLUTION, de TANGAGE, ou de ROULIS que le bâtiment tend à prendre (*Voy. STABILITÉ SOUS VOILE*, et les mots SOULIGNÉS ci-dessus).

GRADE, centième partie du quadrant dans la nouvelle division de la circonférence; le grade se divise en 100 minutes, et chaque minute en 100 secondes. Un nombre de grades, minutes et secondes, s'écrit immédiatement sous la forme d'un nombre décimal; ainsi 22 grades 38 minutes 79 secondes s'écriront 22^e,3879. Ce mode de division est d'une grande commodité dans les calculs. Néanmoins, malgré ses avantages, il n'a pas prévalu; et les astronomes en particulier ont continué à se servir de l'ancienne division. Mais la nouvelle est employée par l'état-major français. Pour convertir un nombre de grades et fraction décimale de grade, en degrés, minutes et secondes sexagésimales, on le multiplie d'abord par 0,9, attendu que le grade est les $\frac{9}{10}$

du degré : la partie entière du produit donne les degrés; on multiplie la fraction décimale par 60 : la partie entière de ce nouveau produit donne les minutes; on multiplie enfin la fraction décimale restante par 60, et l'on a le nombre des secondes sexagésimales, et, s'il y a lieu, une fraction décimale de la seconde. On trouvera ainsi que 22^e,3879 valent 27° 8' 56", 796. Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés, minutes et secondes en grades et fraction décimale du grade, on commence par réduire les minutes en secondes, puis le total des secondes en fraction décimale du degré, en remarquant qu'une seconde est $\frac{1}{3600}$ de degré; on a ainsi un nombre décimal de degrés, que l'on divise par 0,9. Ainsi, 20° 8' 56", 796 reviennent à 20^e,14911 qui, divisés par 0,9, donnent 22^e,3879. — Il existe des tables pour la réduction des degrés en grades et des grades en degrés; une de ces tables est jointe aux tables de logarithmes de Callet.

GRAMME, unité de poids adoptée dans le système métrique. C'est le poids (dans le vide) d'un centimètre cube d'eau distillée au maximum de densité, c'est-à-dire prise à 4^e,1 au-dessus de zéro (*Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE*).

GRAND-MÂT, mât principal d'un navire de haut bord, placé à peu près au milieu de la longueur (*Voy. MÂTURE, VOILES*).

GRAPHOMÈTRE (de γράφω, j'écris, et de μέτρον, mesure), instrument qui sert à mesurer les angles sur le terrain. Sa partie principale est un demi-cercle LL (fig. 1) qui a ordinairement de 16 à 22 centimètres de diamètre et qui est divisé en demi-degrés. Il est muni de deux ALIDADES (*Voy. ce mot*), l'une fixe AB, dirigée suivant le diamètre, l'autre mobile CD, qui peut tourner autour du centre O; les extrémités de celles-ci sont amincies en biseau suivant des arcs de cercle dont O est le

centre, et qui, dans toutes les positions de l'alidade, coïncident, l'un ou l'autre, avec le cercle divisé du limbe; ces mêmes extrémités portent des VERNIERS (*Voy. ce mot*) qui permettent d'évaluer les fractions

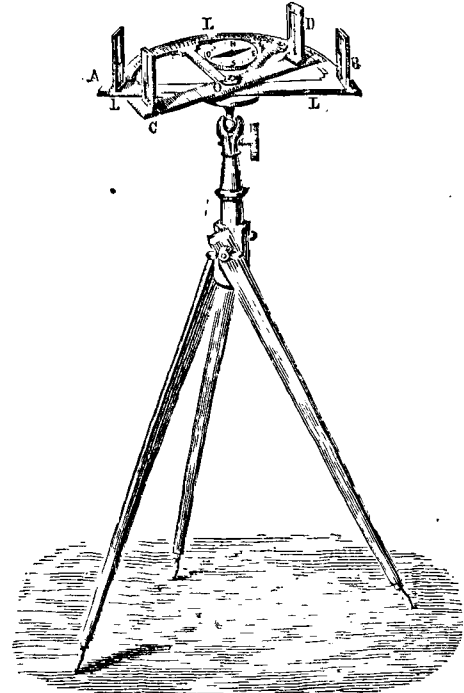


Fig. 1.

de division. Au-dessous du centre, et perpendiculairement au plan du limbe, est fixée une tige cylindrique qui se termine par une petite sphère de 2 à 3 centimètres de diamètre; cette sphère s'engage entre deux coquilles qu'on peut rapprocher au moyen d'une vis, et qui sont elles-mêmes fixées à un support à trois pieds. La sphère pouvant prendre toutes les positions entre les coquilles, on peut, en serrant la vis, maintenir le plan du limbe dans telle direction qu'on désire, depuis la direction horizontale jusqu'à la direction verticale; les coquilles sont en effet échancrées de manière à laisser passer la tige qui réunit la sphère au limbe lorsqu'on veut placer cette tige horizontalement. Sur l'alidade fixe est tracée une droite AB passant par le centre et correspondant aux fils des pinnules; c'est ce qu'on appelle la *ligne de foi* de l'alidade fixe; c'est à partir de cette ligne de foi que se comptent les divisions du limbe. L'alidade mobile a aussi sa ligne de foi CD, qui se continue au delà des pinnules et correspond au zéro de chaque vernier. Le limbe est muni d'une petite boussole qui permet de s'orienter sur le terrain.

Dans les graphomètres très-soignés, l'alidade est munie d'une *VIS DE RAPPEL* (*Voy. ce mot*) qui sert à l'amener graduellement dans la position qu'on veut lui faire prendre. Les pinnules opposées sont alors remplacées par une *LUNETTE PLONGEANTE* (*Voy. ce mot*); en un mot l'instrument ne diffère essentiellement d'un *CERCLE RÉPÉTITEUR* (*Voy. ce mot*) qu'en

ce que le limbe, au lieu d'embrasser 360° , n'en embrasse que 180° , ou 180° et quelques degrés en plus pour que les angles voisins de 180° puissent être mesurés à l'aide du vernier comme les autres.

Pour mesurer avec cet instrument un angle dont le plan est horizontal, ou pour mesurer un angle quelconque réduit à l'horizon (Voy. RÉDUCTION À L'HORIZON), on établit d'abord l'instrument au sommet de l'angle, de manière que le centre du limbe soit à très-peu près dans la verticale de ce sommet; on est assuré d'y être parvenu lorsqu'en laissant tomber une petite pierre du dessous de ce centre, elle tombe dans le trou fait par le jalon qui occupait précédemment le sommet. On s'assure que le limbe est horizontal au moyen d'un NIVEAU À BULLE D'AIR (Voy. ce mot). On dirige l'alidade fixe vers le signal qui marque l'un des côtés, c'est-à-dire de manière qu'en regardant par la fente de la pinnule A, on aperçoive ce signal coupé par le fil qui traverse la fenêtre de la pinnule B. Enfin, on fait tourner l'alidade mobile vers le signal qui marque le second côté; et l'on est assuré qu'on y est parvenu lorsque, en regardant par la fente de la pinnule C, on aperçoit ce signal coupé par le fil qui traverse la fenêtre de la pinnule D. Si l'instrument est muni d'une vis de rappel, on place d'abord l'alidade mobile à peu près dans la direction voulue, puis on l'y amène peu à peu en tournant la vis de rappel. L'alidade mobile une fois à sa place, on lit sur le limbe le nombre de degrés et demi-degrés compris entre la ligne de foi de l'alidade fixe et celle de l'alidade mobile; et l'on évalue, à l'aide du vernier, les fractions de demi-degré (Voy. VERNIER).

Pour mesurer dans son plan un angle qui n'est pas horizontal, on amène par tâtonnement le limbe dans la direction de ce plan; on en est assuré lorsque, en faisant tourner l'alidade mobile, on peut viser successivement les pieds des deux signaux qui marquent les côtés de l'angle. Sans déranger le plan du limbe, on le fait alors tourner de manière à amener l'alidade fixe dans la direction de l'un des deux signaux, puis on vise l'autre signal avec l'alidade mobile, et l'on mesure l'angle comme ci-dessus.

Pour faire, en un point donné d'une droite, un angle dont la mesure est donnée, on place le graphomètre au point donné, on dirige la ligne de foi de l'alidade fixe suivant la droite donnée, et l'on fait tourner l'alidade mobile de manière que l'angle formé par les deux lignes de foi ait la mesure donnée; on fait alors planter un jalon dans la direction déterminée par les pinnules de l'alidade mobile, et le problème est résolu. — On peut, par ce moyen, élever une perpendiculaire en un point donné d'une droite, puis que cela revient à faire en ce point un angle de 90° .

Un graphomètre dont on se sert pour la première fois a besoin d'être vérifié. La première chose à faire est de voir si, lorsqu'on amène l'alidade mobile dans la direction de l'alidade fixe, de manière que les fils des 4 pinnules soient dans un même plan, le zéro du vernier de l'alidade mobile coïncide bien avec le zéro du limbe. Il faut voir en second lieu si l'axe de rotation de l'alidade mobile est bien au centre du cercle gradué. Pour cela, on détermine sur le terrain deux directions XX' , YY' qui se coupent en un point O (fig 2 et 3). On mesure

l'angle YOX . Supposons, pour fixer les idées, que l'axe de rotation O de l'alidade mobile soit situé un peu à droite du centre C du limbe; il est aisé de voir, et la figure 2 montre, qu'on obtiendra une

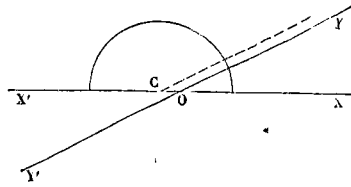


Fig. 2.

mesure trop petite. On mesurera l'angle adjacent YOX' , en faisant passer l'alidade fixe de la direction XX' à la direction YY' (fig. 3); il est clair qu'on obtiendra encore une mesure trop faible. Par con-

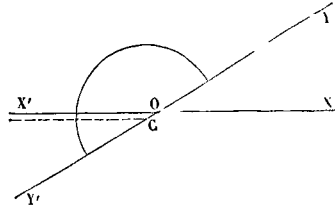


Fig. 3.

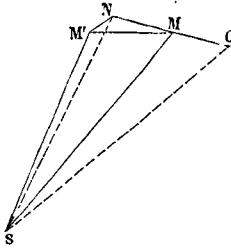
séquent la somme des angles mesurés sera moindre que 180° . Le contraire arriverait si l'axe de rotation de l'alidade était à gauche du centre du limbe. Il suffit donc de faire la somme des deux angles adjacents mesurés pour savoir si les points O et C coïncident, comme cela doit avoir lieu, ou si l'un est un peu à droite ou à gauche de l'autre. — Il reste à vérifier la graduation; le moyen le plus simple est de prendre sur la circonférence graduée une ouverture de compas qui embrasse un certain nombre de degrés qui ne soit pas un sous-multiple exact de 90° , par exemple 7° ou 11° ; en promenant cette ouverture de compas sur la circonférence, elle doit embrasser partout le même nombre de degrés. On peut encore faire, sur le terrain, ce qu'on appelle un tour d'horizon, c'est-à-dire mesurer, toujours à partir du zéro de la graduation, les angles successifs formés par les rayons visuels menés du lieu de l'observateur à divers points situés autour de lui, et voir si la somme des angles ainsi mesurés fait exactement 360° , comme cela doit avoir lieu.

GRAVIMÉTRIQUE, qui se mesure par le poids. Se dit de la densité apparente de la poudre; la densité gravimétrique est le poids du litre de poudre exprimé en kilogrammes. Elle varie, dans les poudres ordinaires, de $0^s, 810$ à $0^s, 923$. Elle ne doit pas être confondue avec la densité des grains, ni avec la densité absolue de la poudre (Voy. POUDRÉ [Propriétés balistiques de la]).

GRAVITATION UNIVERSELLE, loi générale qui préside aux mouvements des corps célestes, et suivant laquelle deux molécules de matière s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. La découverte de cette loi appartient à Newton, qui l'a déduite des lois de Ké-

pler. Voici comment on l'établit aujourd'hui d'après ces mêmes lois.

Suivant l'une des lois de Képler, les aires décrites par le rayon vecteur mené du Soleil à une planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire. Il en résulte que la planète est soumise à une force dirigée vers le centre du Soleil. En premier lieu, elle est soumise à une force, car autrement elle serait animée d'un mouvement rectiligne et uniforme. En second lieu, cette force est dirigée vers le centre du Soleil. Soit en effet S ce centre,



elle est réellement venue en M'. Or, en vertu de la loi des aires, les triangles OSM et MSM' sont équivalents; il en est par conséquent de même des triangles MSM' et NSM, ce qui montre que NM' est parallèle à MS. Le mouvement de la planète suivant MM' peut être considéré comme résultant de deux mouvements simultanés, l'un suivant MN, dû à la vitesse que la planète possédait en arrivant en M; l'autre suivant NM', dû à l'action de la force considérée; la direction de cette force, au moment où la planète était en M, était donc la droite MS, c'est-à-dire que cette force est constamment dirigée vers le centre du Soleil, puisqu'on en pourrait dire autant pour un point quelconque de la trajectoire.

Suivant une autre loi de Képler, la planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. Or on démontre, dans la Mécanique rationnelle, que si un point matériel ayant l'unité de masse est attiré vers un centre fixe par une force φ qui n'est fonction que de la distance du mobile à ce centre, on a, en désignant par ρ et θ les coordonnées polaires du mobile par rapport à ce même centre pris pour pôle, et par c une constante,

$$\varphi = \frac{c^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} \right]. \quad [1]$$

Si la trajectoire est une ellipse dont des foyers sont le pôle, on a entre ρ et θ la relation

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad [2]$$

dans laquelle p est le demi-paramètre et e l'excentricité. De cette relation on tire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p},$$

d'où
$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} = - \frac{e \cos \theta}{p}.$$

Substituant cette valeur dans la relation [1], on obtient

$$\varphi = \frac{c^2}{p\rho^2},$$

ce qui montre que la force agissant sur le mobile

varie en raison inverse du carré de la distance de ce mobile au foyer. Si le mobile a une masse égale à m fois l'unité de masse, il est naturel d'admettre que la force agissant sur ce mobile sera égale à $m\varphi$. Par conséquent, la force que le Soleil exerce sur une planète est proportionnelle à la masse de cette planète et en raison inverse du carré de sa distance au Soleil.

La troisième loi de Képler démontre que la force exercée par le Soleil à une même distance sur l'unité de masse de chaque planète est la même, quelle que soit la planète considérée. En effet, si, pour plus de simplicité, on suppose que la planète décrit un cercle d'un mouvement uniforme, l'expression de la FORCE CENTRIFÈTE (Voy. ce mot) qui la sollicite sera $\frac{mv^2}{a}$, en appelant m sa masse, v sa vitesse et a le rayon du cercle, ou la moyenne distance de la planète au Soleil. Or, si T désigne la durée de sa révolution, on a

$$v = \frac{2\pi a}{T};$$

par conséquent, l'expression de la force centripète devient

$$\frac{m \cdot 4\pi^2 a}{T^2}.$$

La force exercée, à la même distance, sur l'unité de masse, serait donc

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2},$$

et, à l'unité de distance, cette force deviendrait

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \quad [A]$$

Mais, en vertu de la troisième loi de Képler, le quotient $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes; par conséquent la force exercée par le Soleil, à l'unité de distance, sur l'unité de masse d'une planète quelconque, est la même quelle que soit cette planète.

Il est naturel d'étendre à des points matériels placés comme on voudra dans l'espace le principe d'égalité entre l'action et la réaction (Voy. RÉACTION). Il en résulte que chaque planète attire le Soleil d'après la même loi qu'elle est attirée par lui; et l'on en conclut que si f désigne l'attraction qui s'exerce à l'unité de distance entre deux corps ayant l'unité de masse, celle qui s'exercera à la distance ρ entre deux corps ayant des masses M et m sera exprimée par $\frac{Mmf}{\rho^2}$; c'est-à-dire que deux corps quelconques

exercent l'un sur l'autre une attraction qui est directement proportionnelle aux masses de ces corps, et en raison inverse du carré de leur distance. Tel est l'énoncé du principe général qui sert de base à l'astronomie moderne et qui est connu sous le nom de principe de l'Attraction. Ce principe appliqué non-seulement aux mouvements des planètes, mais à ceux de leurs satellites, fournit l'explication et la mesure de toutes les perturbations que ces corps exercent mutuellement les uns sur les autres, et a permis à la science astronomique d'atteindre à un degré de précision inconnu avant Newton.

Mais si telle est la loi qui régit les mouvements de la matière, l'attraction que les corps éprouvent à la surface du globe terrestre ne doit être qu'un

cas particulier de l'attraction universelle. C'est, en effet, ce qu'il est facile de vérifier. La vitesse qu'acquiert, au bout d'une seconde de chute, un corps tombant sans vitesse initiale dans le vide à la surface du globe est, comme on sait, $9^m, 8088$; et cette vitesse peut être prise pour la mesure de la force attractive que le globe exerce sur l'unité de masse. Si l'attraction nommée pesanteur n'est qu'un cas particulier de l'attraction universelle, elle doit être la même que la force qui retient la Lune dans son orbite. Pour s'en assurer, on suppose qu'on transporte un corps pesant de la surface de la Terre à une distance de son centre égale à la distance de la Terre à la Lune; la force variant en raison inverse du carré de la distance, qui est devenue 60 fois plus grande (*Voy. LUNE*), aura pour mesure $\frac{9^m, 8088}{(60)^2}$ ou $0^m, 0027246$. Or la force qui retient la Lune dans son orbite a pour expression $\frac{mv^2}{R}$, en appelant m sa masse, v sa vitesse, et R sa distance à la Terre (*Voy. FORCE CENTRIFÈTE*). Et la même force, rapportée à l'unité de masse, serait simplement $\frac{v^2}{R}$.

Or on a $v = \frac{2\pi R}{T}$, en désignant par T la durée de la révolution sidérale; et $R = 60 \cdot r$, en appelant r le rayon terrestre; la force qui retient sur l'orbite de la Lune l'unité de masse de ce satellite a donc pour mesure

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \text{ ou } \frac{4\pi^2 \cdot 60r}{T^2}, \text{ ou enfin } \frac{2\pi r \cdot 2\pi \cdot 60}{T^2}.$$

Mais $2\pi r = 40000000^m$; $T = 27, 321661 \times 86400^s$; en effectuant les calculs, on trouve $0^m, 0027061$, nombre qui diffère à peine du nombre $0^m, 0027246$ trouvé plus haut. La différence tient d'une part à ce qu'on a supposé implicitement la vitesse de la Lune constante et son orbite circulaire; elle tient en outre à ce qu'on a traité la question comme si la Terre était immobile, et que le mouvement de la Lune fût un mouvement absolu, tandis qu'il aurait fallu considérer son mouvement relatif; enfin on a négligé l'effet de la force centrifuge à la surface de la Terre, etc. Mais cette vérification, due à Newton, suffit néanmoins pour établir l'identité de la pesanteur avec la force attractive que les corps célestes exercent les uns sur les autres : identité qui a fait donner à l'attraction dont nous parlons le nom de GRAVITATION UNIVERSELLE.

C'est à l'aide des considérations qui précèdent que l'on a pu évaluer la masse du Soleil, de la Lune, et des planètes, et mesurer l'intensité de la pesanteur à la surface de ces corps. On sait que l'expérience de Cavendish a donné 5,44 pour la densité moyenne du globe terrestre, rapportée à celle de l'eau; les dimensions de la Terre étant connues, on a pu en déduire son volume; le produit de ce volume par la densité moyenne a donné la masse du globe (*Voy. MASSE*). On prend cette masse pour unité quand il s'agit d'évaluer celle des corps célestes.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de comparer la masse du Soleil à celle d'une planète ayant un satellite. Soit M la masse du Soleil, m celle de la planète, μ celle de son satellite; soit a la distance de la planète au Soleil, T la durée de sa révolution;

α la distance du satellite à la planète, τ la durée de la révolution de ce satellite. Si f désigne toujours l'attraction mutuelle de deux unités de masse placées à l'unité de distance, l'attraction mutuelle du Soleil et de la planète sera exprimée par $F = \frac{fMm}{a^2}$.

Pour la planète, l'accélération sera $\frac{F}{m}$ ou $\frac{fM}{a^2}$ dirigée vers le Soleil; pour le Soleil, l'accélération sera $\frac{F}{M}$

ou $\frac{fm}{a^2}$ dirigée vers la planète. Si l'on veut avoir l'accélération de la planète dans son mouvement relatif autour du Soleil, le seul que nous puissions observer, il faudra rendre le Soleil fixe en lui imprimant une accélération égale et contraire à celle dont il est animé; mais, pour ne pas changer le mouvement relatif, il faudra imprimer à la planète cette même accélération égale et contraire, c'est-à-dire une accélération $\frac{fm}{a^2}$ dirigée vers le Soleil.

La planète se trouvera alors animée d'une accélération $\frac{fM}{a^2} + \frac{fm}{a^2}$ ou $\frac{f(M+m)}{a^2}$.

Mais la force centripète qui s'exerce sur la planète produit une accélération qui a pour expression $\frac{4\pi^2 a}{T^2}$.

Ces deux expressions d'une même accélération devant être égales, on doit avoir

$$\frac{f(M+m)}{a^2} = \frac{4\pi^2 a}{T^2} \text{ ou } f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

En considérant la planète et son satellite, on obtiendrait de la même manière

$$f(m+\mu) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{M+m}{m+\mu} = \frac{a^3}{a^3} \cdot \frac{\tau^2}{T^2},$$

relation dans laquelle le second membre peut être regardé comme connu. Mais μ étant très-petit par rapport à m , et m très-petit par rapport à M , le premier membre diffère très-peu du rapport $\frac{M}{m}$, qui se trouve ainsi déterminé.

Cette méthode ne peut être employée pour la Terre, parce que la masse de la Lune n'est point négligeable vis-à-vis de celle du globe terrestre. Voici comment on opère. On a, en considérant le mouvement relatif de la Terre autour du Soleil, l'équation

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

établie plus haut pour une planète quelconque. D'un autre côté, on démontre dans la Mécanique céleste que sur le parallèle dont la latitude a pour sinus la racine carrée de $\frac{1}{3}$, l'attraction de la Terre est

sensiblement la même que si elle était sphérique et que le rayon eût pour valeur la distance du point considéré au centre, c'est-à-dire $r = 6364551^m$. En ce même point, l'accélération due à la pesanteur, augmentée de la composante verticale de la force centrifuge, a pour valeur $g' = 9^m, 81645$. On a donc

$$\frac{mf}{r^2} = g'.$$

Des deux relations que nous venons d'écrire, on déduit

$$\frac{(M+m)r^2}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 g'}, \text{ d'où } \frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 g' r^2} - 1.$$

Or a vaut environ 24000 fois le rayon équatorial de la Terre, qui est de 6366 kilomètres, et l'on a

$$T = 86400' \times 365,2563833 \text{ (Voy. SOLEIL);}$$

substituant et remplaçant g' et r par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{M}{m} = 355532.$$

Ce nombre ne peut être qu'approximatif, attendu que l'on a supposé le mouvement de la Terre circulaire et uniforme, et que l'on a pris pour la distance de la Terre au Soleil le nombre rond 24 000 rayons terrestres. *L'Annuaire du Bureau des longitudes* donne pour la valeur exacte de ce rapport 354936.

Une méthode analogue peut être employée pour déterminer le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune, et par conséquent le rapport inverse de la masse de la Lune à celle de la Terre.

Pour les planètes qui n'ont point de satellites, la méthode exposée plus haut n'est plus applicable; leur masse se détermine par les *perturbations* que les actions mutuelles des planètes exercent sur leurs mouvements autour du Soleil. Mais cette question est du ressort de la Mécanique céleste. La même méthode fondée sur l'étude des perturbations que les actions des satellites d'une même planète exercent sur leurs mouvements autour de cette planète, conduit à la détermination des masses de ces satellites, connaissant la masse de la planète elle-même. C'est ainsi que l'on a pu déterminer les masses des satellites de Jupiter (*Voy. PLANÈTES; SATELLITES*).

Pour calculer l'intensité de la pesanteur à la surface du Soleil, de la Lune ou d'une planète, on procède comme il suit. Soit toujours f l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance; si m est la masse de la Terre et r son rayon, $g = \frac{fm}{r^2}$ sera l'attraction sur l'unité de masse à la surface de la Terre. Si M est la masse de l'astre considéré et R son rayon, on aura de même $G = \frac{fM}{R^2}$ pour l'attraction sur l'unité de masse à la surface de cet astre. De ces deux relations on tire

$$\frac{G}{g} = \frac{M}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2}, \text{ d'où } G = g \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

S'il s'agit, par exemple, du Soleil, on a $\frac{M}{m} = 354936$

et $\frac{r}{R} = \frac{1}{112}$; d'où l'on déduit

$$G = g \cdot \frac{354936}{(112)^2} = g \times 28,03.$$

Ainsi, à la surface du Soleil, l'intensité de la pesanteur vaut plus de 28 fois celle qui s'exerce à la surface de la Terre; et, en mettant pour g sa valeur $9^m,8088$, on trouve $G = 274^m,94$. Il en résulte que, dans la première seconde de chute, un corps parcourrait, à la surface du Soleil, une distance verticale de $137^m,47$.

On a trouvé par cette méthode les valeurs suivantes de l'intensité de la pesanteur à la surface des

principaux corps célestes, celle qui s'exerce à la surface de la Terre étant prise pour unité.

NOMS.	Intensité de la pesanteur.
Mercure.....	0,568
Vénus.....	0,942
La Terre.....	1,000
Mars.....	0,417
Jupiter.....	2,816
Saturne.....	1,204
Uranus.....	0,963
Neptune...	1,039
La Lune....	0,179
Le Soleil.....	29,976

(*Voy. l'Annuaire de 1865.*)

GRAVITÉ, synonyme de *pesanteur*. On désigne parfois sous ce nom l'accélération g due à la pesanteur; cette locution est vicieuse. Le nombre g est un nombre de mètres, et ce n'est que d'une manière indirecte qu'il peut représenter la *gravité*. (*Voy. PESANTEUR.*)

GRUE, machine destinée à élever de lourds fardeaux, et dont on fait usage dans les ports, dans les ateliers de construction de machines, dans les fonderies, dans les magasins de fers en gros, etc.

I. Elle peut varier de forme; mais sa disposition la plus rationnelle est la suivante. La machine se compose d'un arbre vertical OB (*fig. 1*), reposant

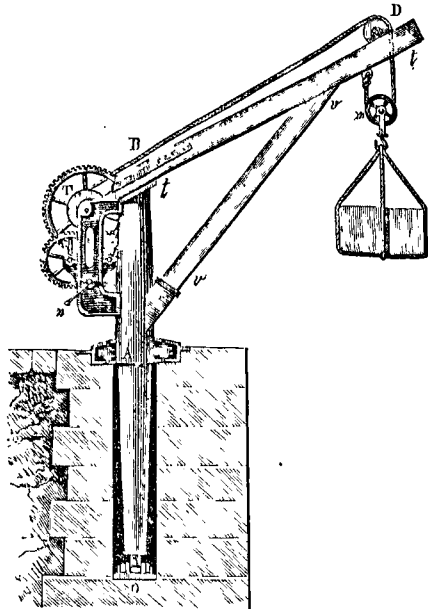


Fig. 1.

par son extrémité inférieure sur un support fixe, dont on trouvera la disposition à l'article Pivoir. Cet arbre est en outre maintenu vers le milieu A de sa longueur par une sorte d'anneau formé de roulettes, que l'on appelle un *collier à galets*, et qui a pour but de rendre insensible le frottement que l'arbre pourrait éprouver en tournant autour de son axe. L'appui A est ordinairement au niveau du sol, et l'appui O au fond du puits pratiqué pour loger la partie OA de l'arbre. Des points A et B partent deux

pièces obliques: la première, *vu*, s'appelle la *volée*; la seconde, *tt*, se nomme le *tirant*. Cette seconde pièce dépasse la première. Elle est double, et dans l'intervalle des deux tirants est logée en D une poulie, sur laquelle passe une corde, qui va s'enrouler sur une poulie mobile *m* et vient se fixer par une de ses extrémités au tirant. Le second brin de la corde suit le tirant parallèlement à sa longueur, et vient s'enrouler sur un treuil T, que l'on fait mouvoir, par l'intermédiaire d'un système de roues dentées, à l'aide d'une manivelle *n*, ou de deux manivelles montées sur le même axe. La charge à élever est suspendue à la poulie mobile; en agissant sur les manivelles, on fait enrouler la corde sur le treuil, et par conséquent la poulie mobile s'élève avec le fardeau. Pour déposer celui-ci en un autre point, on fait tourner la grue autour de son axe vertical; lorsqu'elle est arrivée dans la position voulue, on laisse descendre le fardeau, en n'agissant sur les manivelles que pour empêcher le mouvement de descente de s'accélérer.

II. On peut, à l'aide de cet appareil, soulever un poids considérable; mais son mouvement d'ascension est nécessairement très-lent. Pour un service ordinaire, il est nécessaire d'obtenir un peu plus de célérité, sans que cependant l'effort exercé sur les manivelles soit différent dans les deux cas. La disposition des roues dentées satisfait à cette condition. On l'a représentée sur la figure 2, en suppri-

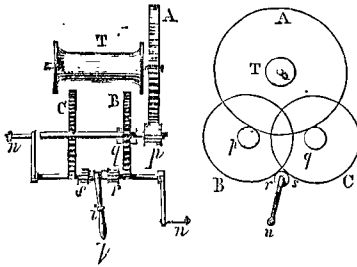


Fig. 2.

mant, pour plus de clarté, les points d'appui des axes, qui sont pris sur des consoles (KL, fig. 1) fixées à l'arbre vertical. — Sur l'axe du treuil T est montée une roue A engrenant avec un pignon *p*. Sur l'axe de ce pignon est montée une roue B engrenant avec un pignon *q*. Sur l'axe de ce pignon *q* est montée une roue C égale à B, et placée à la même hauteur. L'axe des manivelles est situé à la partie inférieure de ces deux roues; il porte deux pignons égaux *r* et *s* qui peuvent engrener, le premier avec la roue B, le second avec la roue C. L'EMBRAYAGE (Voy. ce mot) se fait à l'aide d'un levier *l* mobile autour d'un point fixe *i*. Si l'on fait engrener *r* avec B, l'axe des manivelles fait mouvoir le treuil T par l'intermédiaire des roues *r*, B, *p*, A. Si l'on fait engrener *s* avec C, le mouvement est donné au treuil par l'intermédiaire des roues *s*, C, *q*, B, *p*, A. Désignons les nombres de dents de ces diverses roues par les lettres mêmes qui désignent ces roues; soit Ω la vitesse angulaire de l'axe des manivelles, et ω celle du treuil. On aura dans le premier système (Voy. ROUAGE)

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{r \cdot p}{B \cdot A} \quad [1]$$

et dans le second

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{s \cdot q \cdot p}{C \cdot B \cdot A} \quad [2]$$

La seconde valeur est égale à la première multipliée par $\frac{q}{C}$. Avec une même vitesse donnée aux manivelles, on obtient donc pour le treuil, dans le second système, une vitesse beaucoup moindre que dans le premier.

III. On peut se rendre aisément compte du poids P qui peut être enlevé dans ces deux cas. Soit *f* la force appliquée aux manivelles, λ la longueur de celles-ci; soit R le rayon du treuil et T la tension de la corde qui s'y enroule. On remarquera d'abord que le poids P étant suspendu à la chape d'une poulie mobile, la tension T est la moitié de ce poids (Voy. POULIE.) Dans l'unité de temps, le chemin décrit par l'un des boutons de manivelle est $\omega\lambda$; le travail de la force *f* est donc $f\omega\lambda$ par seconde. Dans le même temps, le chemin décrit par un point de la circonférence du treuil est ΩR ; le travail de la force T par seconde est donc $T\Omega R$, ou $\frac{1}{2}P\Omega R$. D'après le principe de la TRANSMISSION DU TRAVAIL (Voy. ce mot) et en négligeant les résistances passives, on a donc, puisque le mouvement est uniforme,

$$\omega\lambda = \frac{1}{2}P\Omega R, \text{ d'où } P = \frac{2f\lambda}{R} \cdot \frac{\omega}{\Omega} \quad [3]$$

Dans le premier système, on a donc

$$P = 2f \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{A \cdot B}{p \cdot r} \quad [4]$$

et dans le second

$$P = 2f \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{A \cdot B \cdot C}{p \cdot q \cdot s} \quad [5]$$

Si l'on prend pour exemple une grue construite pour le port de Brest par M. Cavé, et citée dans le *Cours élémentaire de Mécanique* de M. Delaunay, on aura

$$A = 66, B = C = 54, p = 11, q = r = s = 9.$$

Si l'on admet qu'un homme appliqué à chaque manivelle exerce un effort de 10 kilogrammes, on trouvera, en supposant $\lambda = 3R$, dans le premier système

$$P = 2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot \frac{66 \cdot 54}{11 \cdot 9} = 4320^k,$$

et dans le second

$$P = 2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot \frac{66 \cdot 54 \cdot 54}{11 \cdot 9 \cdot 9} = 25920^k.$$

Si l'on pouvait appliquer 2 hommes à chaque manivelle, on soulèverait dans le premier cas un poids de 8640 kilogrammes, et dans le second un poids de 51840 kilogrammes. Le mouvement est 6 fois plus lent dans le second système que dans le premier.

Il est également facile de calculer le temps nécessaire pour élever d'un mètre le poids P à l'aide de la grue. D'après M. Poncelet, un manœuvre agissant sur une manivelle peut soutenir d'une manière continue un effort de 8 kilogrammes avec une vitesse de $0^m,75$, ce qui donne par seconde un travail de 6^k . Comme nous supposons 10 kilogrammes au lieu de 8, nous adopterons $7^k,50$ pour le travail par seconde. Pour 2 hommes, le travail par seconde sera donc de 15^k . Si le poids 4320 kilogrammes s'élève d'un mètre, le travail total produit sera 4320^k ; en divisant ce nombre par 15^k , on aura le nombre de secondes employé; on trouve

144 secondes, ou 2^m24^s . Pour un poids 6 fois plus considérable, ou 25920 kilogrammes, le temps sera 6 fois plus grand, c'est-à-dire 864 secondes, ou 14^m24^s .

IV. Pour déterminer les réactions qu'éprouve la grue de la part de ses appuis, il suffit d'appliquer les conditions d'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan (*Voy. ÉQUILIBRE*). Soient X et Y les composantes horizontale et verticale de la réaction F qui s'exerce au point O (fig. 3), et Z

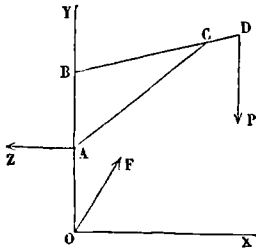


Fig. 3.

la réaction qui s'exerce au point A, réaction évidemment horizontale, puisque l'arbre OB n'a aucune tendance à glisser dans le sens vertical. Soit P la charge appliquée en D à une distance p de l'axe OB; soit Q le poids de la grue elle-même, agissant à une distance Q du même axe; enfin soit h la distance OA. En égalant à zéro la somme des projections de ces forces sur l'horizontale OX et sur la verticale OY, et la somme des moments des mêmes forces par rapport au point O, on trouvera

$$X + Z = 0, \quad [6]$$

$$Y - P - Q = 0,$$

$$Pp + Qq - Zh = 0.$$

On tire de ces équations

$$Z = \frac{Pp + Qq}{h},$$

$$Y = P + Q \quad [7]$$

et

$$X = -Z.$$

La valeur de Z est généralement supérieure à P; on voit qu'elle diminue à mesure que h augmente. Aussi place-t-on quelquefois le point d'appui A à la partie supérieure de l'arbre, lorsqu'on ne craint pas de gêner la manœuvre de l'appareil. (La grue est alors dite de *première classe*; celle de la figure 1 est de *seconde classe*.)

V. Pour déterminer les dimensions transversales de l'arbre, de la volée et du tirant, il est nécessaire de connaître les réactions qui s'exercent entre ces pièces aux points A, B, C. Soient A_x, A_y les composantes horizontale et verticale de la réaction que l'arbre exerce sur la volée; B_x, B_y celles de la réaction que le même arbre exerce sur le tirant; $-C_x, -C_y$ celles de la réaction que le tirant exerce sur la volée; $+C_x, +C_y$ seront celles de la réaction égale et contraire exercée par la volée sur le tirant; soit H la hauteur OB, et α et β les coordonnées du point C. L'équilibre de la volée donnera, en négligeant le poids de cette pièce vis-à-vis des réactions considérables qu'elle éprouve, les trois conditions :

$$\begin{aligned} A_x - C_x &= 0, & A_y - C_y &= 0, \\ A_x(\beta - h) - A_y\alpha &= 0; \end{aligned} \quad [8]$$

cette dernière équation est obtenue en prenant les moments par rapport au point C.

Si l'on considère maintenant l'équilibre du système formé par la volée et le tirant, les réactions qui s'exercent au point C disparaîtront comme égales et contraires, et l'on aura, en négligeant aussi le poids du tirant,

$$A_x + B_x = 0, \quad A_y + B_y - P = 0,$$

$$A_x(\beta - h) + B_x\beta - A_y\alpha - B_y\alpha - Pk = 0, \quad [9]$$

en appelant k la distance horizontale des points C et D. Cette dernière équation se réduit, en vertu de la dernière des équations [8], à

$$B_x\beta - B_y\alpha - Pk = 0, \quad [10]$$

ou, en remplaçant B_x et B_y par $-A_x$ et par $P - A_y$, et changeant les signes,

$$A_x\beta - A_y\alpha + P(\alpha + k) = 0. \quad [11]$$

Des équations [8] et [11] on tirera A_x et A_y ; les deux premières équations [9] donneront B_x et B_y ; les deux premières équations [8] donneront C_x et C_y .

Ayant ainsi déterminé les réactions qui s'exercent aux points A, B et C, on projettera sur la direction AC les deux composantes A_x et A_y , et l'on aura la force qui tend à raccourcir la volée; on déterminera donc la section transversale de celle-ci, en divisant la force obtenue par la résistance par mètre carré qu'il convient de ne pas dépasser (*Voy. COMPRESSION*). On projettera de même sur la direction de BC les composantes B_x, B_y , et l'on aura la force qui tend à allonger la partie BC du tirant; on déterminera sa section comme il vient d'être dit (*Voy. ALLONGEMENT*). Mais il faudra que la partie CD résiste à l'effort de la charge P; il faudra donc qu'en appliquant la formule

$$R = \frac{v\mu}{I}, \quad [12]$$

dans laquelle on mettra pour μ la valeur Pk , la tension déduite de cette formule ne dépasse pas celle qu'il convient de prendre pour limite. Pour calculer la section de l'arbre, on considérera la partie OA comme encastree au point A; et l'on appliquera la formule (*Voy. FLEXION PLANE*)

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{T}{\Omega}, \quad [13]$$

dans laquelle on mettra pour μ la valeur Xh , et pour T la valeur Y. — On regardera de même la partie AB comme encastree en A, et l'on appliquera la même formule en mettant pour μ la valeur $B_x(H - h)$, et pour T la valeur B_y . — Les constructeurs, pour se mettre à l'abri des accidents qui pourraient résulter des chocs auxquels la grue est exposée, font ordinairement leurs calculs en décuplant la valeur de la force P, que la machine est destinée à supporter.

Il y a des grues de première classe, c'est-à-dire dont le collier est placé à la partie supérieure de l'arbre, dans lesquels le tirant est horizontal, et où la charge, au lieu d'être suspendue en un point fixe, est suspendue à un chariot mobile le long du tirant. On dit alors que la grue est à *portée variable*.

On emploie dans certains travaux une grue *chariot mobile*, qui n'est pas susceptible, comme la grue ordinaire, de tourner autour d'un point fixe, mais qui peut être transportée sur le point des travaux où son action est nécessaire. La figure 4 représente la partie supérieure d'une des grues em-

ployées à la pose des tuyaux destinés à amener à Paris les eaux de la Dhuy. A la partie supérieure de l'échafaudage sont établis des rails sur lesquels roule un chariot formé de 4 galets, dont deux seu-

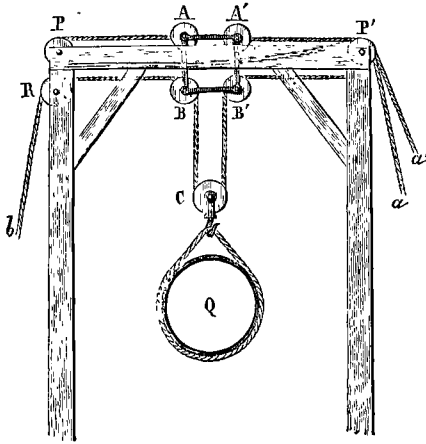


Fig. 4.

lement, A et A', sont visibles sur la figure. Une corde, fixée par son extrémité à l'axe des galets A, vient s'enrouler sur une poulie P, puis sur une poulie P'; on voit le bout de cette corde en a. Une autre corde pareille, fixée par son extrémité à l'axe des galets A', s'enroule directement sur une poulie P'' qui, sur la figure, est cachée par la poulie P'; on voit le bout de cette seconde corde en a'. Si l'on tire sur la corde a, le chariot marche vers la gauche; si l'on tire sur la corde a', le chariot marche vers la droite. A ce chariot sont fixées deux poulies égales B et B', sur lesquelles s'enroule une corde attachée par une de ses extrémités en un point fixe F. Cette corde supporte une poulie mobile C, au crochet de laquelle est suspendue la charge Q à soulever. La corde, après avoir passé sur la poulie B, vient s'enrouler sur une autre poulie R, et l'on voit son autre bout en b. Elle s'enroule sur un treuil à engrenage et à déclin, comme dans les grues ordinaires. Si l'on fait tourner le treuil dans un sens convenable, on soulève la charge; si on le fait tourner en sens contraire, la charge redescend. Une disposition analogue permet d'agir à volonté sur la corde a ou sur la corde a', suivant le sens dans lequel on fait tourner le treuil sur lequel ces deux cordes s'enroulent en sens contraire. On peut donc, à l'aide de cet appareil, enlever la charge du point où elle se trouve pour la transporter en un autre point, soit dans le sens de P vers P', soit dans le sens de P' vers P.

Dans les grands travaux de construction, on fait usage d'une grue du même genre, mais dont l'échafaudage lui-même est mobile sur des rails dans le sens perpendiculaire au mouvement du chariot. A l'aide de ce double mouvement, on peut prendre la charge en un point quelconque des travaux, et la transporter en un autre point quelconque. Ce genre d'appareil est connu sous le nom de *grue roulante*. Le chariot porte le treuil sur lequel s'enroule la corde ou la chaîne à l'aide de laquelle on soulève la charge; des manivelles spéciales agissant par l'in-

termédiaire d'un engrenage, font tourner un des essieux qui portent les roues du chariot, et servent à le faire avancer ou reculer sur les rails qui le portent. Un plancher établi sur l'échafaudage, et ne laissant que l'ouverture nécessaire pour le passage de la corde ou de la chaîne, sert à la manœuvre de la charge et à celle du chariot. (Voyez, dans le XII^e volume de la *Publication industrielle* de M. Armengaud, la description détaillée de la grue roulante de M. Neustadt.)

GRUE A VAPEUR, grue dans laquelle le fardeau est élevé par l'action d'une machine à vapeur. L'idée d'appliquer la vapeur à la manœuvre des grues est déjà ancienne; Armstrong et M. Hague en Angleterre, et M. Claparède en France, avaient successivement abordé ce problème. Mais il a été résolu d'une manière complète par MM. Lebrun et Cavé.

Le cylindre à vapeur sert d'axe à la grue, et peut tourner sur un pivot. La vapeur, venant d'un générateur placé où l'on voudra, pénètre dans un manchon fixe qui enveloppe le cylindre, et de là dans le cylindre lui-même, par un orifice qui est mobile avec lui. La tige du piston s'articule à un arbre coudé qui, par l'intermédiaire d'un engrenage, fait mouvoir la chaîne à laquelle le fardeau est suspendu. (Voy. la description détaillée de cette machine dans le II^e volume de la *Publication industrielle* de M. Armengaud.)

GRUE HYDRAULIQUE, ou **TREUIL HYDRAULIQUE**, genre de grue où le fardeau est élevé par l'action d'une machine hydraulique. Cette machine se compose d'un cylindre vertical dans lequel se meut un piston; le cylindre présente des ouvertures et est muni d'une boîte de distribution analogues à celles des machines à vapeur. A la tige du piston est attachée la corde sur laquelle il faut agir pour élever le fardeau. L'eau d'un réservoir supérieur est introduite au-dessus du piston, qui, sous la pression de ce liquide, descend en faisant monter le fardeau. Quand le piston est au bas de sa course, on fait mouvoir la boîte de distribution, et l'on ouvre ainsi une issue à l'eau introduite, en même temps que l'orifice d'admission de l'eau du réservoir se ferme. On fait remonter le piston en agissant sur la partie de la corde qui soutenait le fardeau. On voit que la machine hydraulique agit comme une machine à vapeur à simple effet.

Le mouvement de rotation de la grue autour d'un axe vertical s'obtient d'une manière analogue, au moyen d'un piston qui se meut dans un cylindre horizontal placé sous le sol, et disposé comme une machine à vapeur à double effet. A la tige du piston est attachée une chaîne, passant sur une poulie, dont le mouvement se transmet à la grue par l'intermédiaire d'un engrenage.

Il ne faut pas confondre l'appareil dont il s'agit ici avec le réservoir à double tuyau qui, dans les gares de chemins de fer, sert à l'alimentation des tenders, et auquel on donne aussi le nom de *grue hydraulique*.

GUETTE, pièce de charpente d'une grande inclinaison (plus de 45 degrés) qui relie les tournisses d'un même trumeau, quand la largeur de celui-ci est peu considérable. (Voy. PANS DE BOIS.)

GUIDES DU MOUVEMENT, dispositifs employés pour assurer la direction du mouvement. Nous dis-

tinguerons les guides du mouvement de translation rectiligne, ceux du mouvement de rotation, et ceux du mouvement suivant une courbe donnée.

I. *Mouvement de translation rectiligne.* Le dispositif le plus usité consiste dans l'emploi des languettes et des rainures; la figure 1 représente

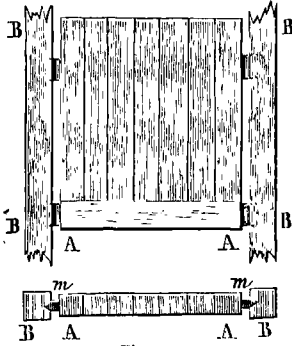


Fig. 1.

les projections d'un châssis de scies qui est guidé de cette manière : de chaque côté du châssis on a adapté des oreilles ou languettes *mm*, taillées en couteaux; ces languettes s'engagent dans des rainures longitudinales pratiquées dans les montants *BB* qui doivent guider le châssis, rainures dont la section est la même que celle des languettes, sauf le jeu indispensable. Le chariot qui porte la pièce à débiter est souvent guidé d'une manière analogue.

Quelquefois c'est la pièce mobile qui présente des rainures dans lesquelles s'engagent des languettes fixes adaptées aux montants, comme l'indique la figure 2. Les pièces appelées *glissières* sont des



Fig. 2.

pièces mobiles guidées comme nous venons de le dire, et qui transmettent le mouvement rectiligne à d'autres pièces auxquelles elles sont liées, à des tiges de pistons par exemple.

Les menuisiers emploient les languettes, en bois ou en métal, à section rectangulaire ou en queue d'hironde, pour guider les tiroirs, les tablettes mobiles, les tables à rallonge, etc.

On emploie aussi pour guides des pièces cylindriques fixes dans lesquelles glissent des anneaux adaptés à la pièce mobile, comme le montre la figure 3. Dans d'autres cas, les pièces cylindriques

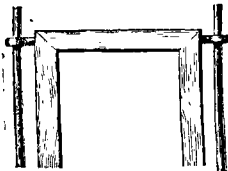


Fig. 3.

sont adaptées au corps mobile, et ce sont les anneaux qui sont fixes, comme l'indique la figure 4.

Pour guider les tiges des pistons de pompes, on

se contente quelquefois de les faire passer par un trou cylindrique dont le centre est sur l'axe du mouvement.

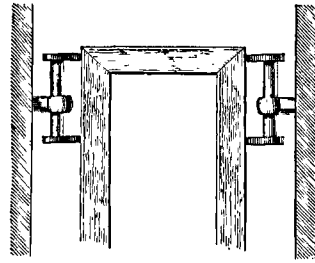


Fig. 4.

Les tiges des pistons de machines à vapeur sont souvent guidées au moyen d'une traverse terminée à ses deux extrémités par des roulettes ou poulies à gorge qui roulent sur des montants cylindriques fixes (fig. 5). Quelquefois, comme dans les machines de Maudslay, l'extrémité du piston porte un

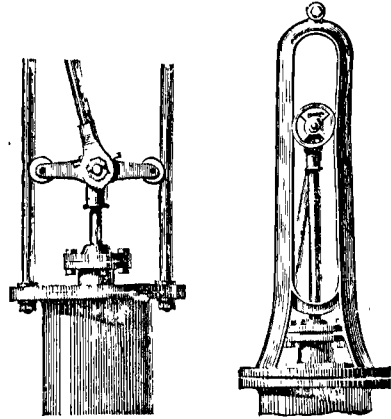


Fig. 5.

Fig. 6.

galet qui roule dans une rainure longitudinale de même diamètre (fig. 6).

On guide encore le mouvement de translation rectiligne en terminant le corps mobile par des surfaces planes et parallèles que l'on fait passer entre des rouleaux, comme l'indique la figure 7.

Les rouleaux servent aussi à faire mouvoir sur un sol horizontal un madrier chargé d'un fardeau (*Voy. ROULEAUX*).

Les roulettes, ou les roues, peuvent être employées de diverses manières pour assurer le mouvement rectiligne. On les dispose par paires, qui roulent sur des guides parallèles. Tantôt ce sont des roulettes qui roulent dans des guides à rainures, comme les roulettes de lits (fig. 8); tantôt ce sont des roues qui reposent sur des bandes en saillie, comme dans les chemins de fer (fig. 9) (*Voy. RAILS*); tantôt l'une des roulettes formant la paire est creusée en gorge et roule sur un rail en saillie, tandis que l'autre est cylindrique et roule sur une bande plane, comme on le voit quelquefois dans les scieries (fig. 10).



Fig. 7.

Dans les chemins de fer du SYSTÈME ARNOUX (Voy. ce mot), le premier essieu de chaque train est dirigé par quatre galets obliques qui roulent sur la surface interne et inférieure du rail (fig. 11). Ces

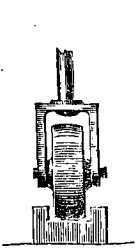


Fig. 8.

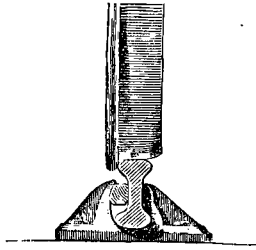


Fig. 9.

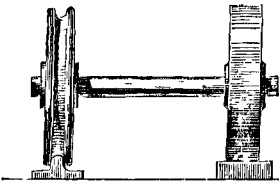


Fig. 10.

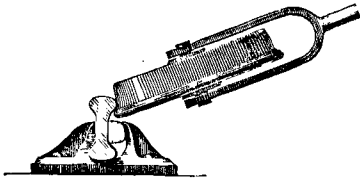


Fig. 11.

galets ont pour fonction de maintenir l'essieu dans une direction perpendiculaire à celle des rails.

Le mouvement guidé par des rails n'est jamais rigoureusement assuré, à cause du jeu qu'il faut nécessairement laisser pour rendre le mouvement possible. Pour guider le chariot des *Mull-Jenny* dans les filatures, de manière à assurer parfaitement sa direction, on ajoute à l'emploi des rails celui d'un dispositif ingénieux qui résout complètement le problème. Il est représenté fig. 12; il se

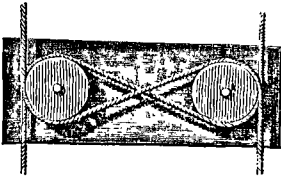


Fig. 12.

compose de deux cordes parallèles qui viennent s'enrouler, en formant un Z, sur deux poulies invariablement fixées au chariot. La déviation se trouve ainsi empêchée par la rigidité des cordes.

Lorsque le mouvement rectiligne ne doit avoir qu'une faible amplitude, il est quelquefois avantageux de lui substituer un mouvement curviligne qui en diffère très-peu; c'est sur ce principe qu'est fondé l'emploi du PARALLÉLOGRAMME DE WATT, et

du BALANCIER A BRIDE ou *balancier et contre-balancier* (Voy. ces mots), pour guider la tige du piston des machines à vapeur. (Voy. aussi l'art. SYSTÈME SARRUT.)

II. *Mouvement de translation curviligne.* Ce genre de mouvement est rarement employé; nous citerons cependant, pour exemple, le mécanisme auquel on donne le nom de PARALLÈLE. Il se compose de deux plans horizontaux AB, CD (fig. 13), dont

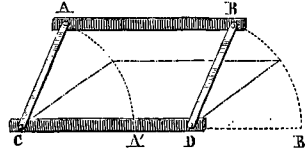


Fig. 13.

l'un CD est fixe, et l'autre AB mobile; ils sont reliés par 4 tiges articulées égales, dont deux seulement AC et BD sont visibles sur la figure et cachent les deux autres. Le quadrilatère ABCD étant un parallélogramme, la droite AB, dans toutes ses positions, reste parallèle à CD, et le plan AB ne cesse pas d'être horizontal. Ce mécanisme est fréquemment appliqué dans les théâtres pour amener d'une certaine hauteur jusqu'au niveau de la scène une *gloire* portant un ou plusieurs personnages. On voit qu'ici le mouvement, guidé par les tiges AC et BD, est un mouvement de translation circulaire.

III. *Mouvement de rotation.* Lorsque l'axe est horizontal, le moyen le plus général d'assurer ce mouvement consiste à adapter au corps mobile deux cylindres d'un petit diamètre, ayant le même axe, et que l'on nomme *tourillons* ou *portées* A (fig. 14).

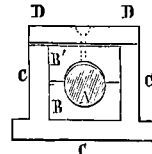


Fig. 14.

Ces tourillons reposent sur des coussinets B d'un diamètre légèrement supérieur, placés eux-mêmes sur des supports CCC nommés *paliers*. Le tourillon est recouvert d'un *contre-coussinet* B'; et le tout est surmonté d'un *chapeau* D. On peut, en enlevant successivement ces pièces, remplacer aisément un coussinet usé. Un trou percé dans le chapeau et dans le contre-coussinet sert à amener l'huile destinée à graisser le tourillon; des rainures pratiquées à la paroi interne du contre-coussinet permettent à l'huile de se répandre aisément sur la surface du tourillon.

Pour empêcher le mouvement du corps dans le sens parallèle à l'axe, il est nécessaire d'y ménager deux *épaulements* qui s'appuient soit sur les deux faces, interne et externe, d'un même palier, soit sur la face externe de l'un d'eux et sur la face externe de l'autre. Si le corps repose sur ses appuis par plus de deux tourillons, comme cela a lieu pour un arbre de couche faisant mouvoir plusieurs mécanismes, on n'emploie toujours que deux épaulements, correspondants à un même palier ou à deux paliers différents.

Quelquefois, dans le but de diminuer le frottement, on fait reposer les tourillons sur des *galets* (fig. 15) tournant eux-mêmes, à l'aide de tourillons sur des supports fixes. Ce dispositif est employé dans

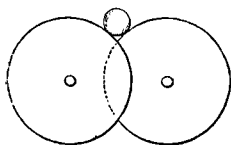


Fig. 15.

la MACHINE D'ATWOOD (*Voy. ce mot*) pour donner à la poulie la plus grande mobilité possible.

Si le mouvement de rotation est alternatif et d'une médiocre amplitude, on peut remplacer les galets par des secteurs. Ce moyen de suspension sert depuis plusieurs siècles à guider le mouvement de la grosse cloche de la cathédrale de Metz; il est représenté fig. 16. Dans les oscillations de la cloche,

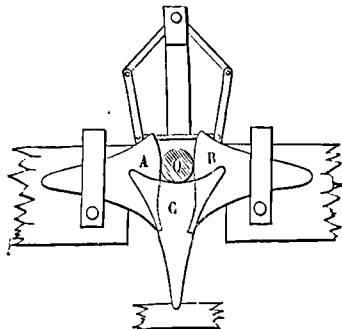


Fig. 16.

l'un des secteurs, A ou B, s'élève tandis que l'autre s'abaisse; une troisième pièce mobile C, analogue aux deux secteurs, sert de support au tourillon O, qui roule ainsi sur trois courbes en n'éprouvant qu'un frottement de roulement, négligeable par rapport à celui qu'il éprouverait s'il tournait sur une surface fixe. Les secteurs A et B sont reliés à la tête de la cloche par des tiges articulées, de manière à assurer leur mouvement oscillatoire.

Au lieu de tourillons cylindriques, on emploie quelquefois des tourillons coniques arrondis à leur extrémité, et qui s'engagent dans des cavités de même forme. On dit alors que la pièce tournante est *montée sur pointes*; cette disposition, qui n'est applicable qu'aux pièces légères, se rencontre fréquemment dans l'horlogerie, dans le but de diminuer le frottement; ces tourillons coniques prennent le nom de *pivots*.

On remplace quelquefois les tourillons mobiles par un axe fixe qui traverse le corps tournant: c'est ce qui a lieu le plus souvent pour les poulies; elles sont percées d'un trou central cylindrique appelé *œil*, dans lequel passe l'axe fixe autour duquel s'effectue la rotation. — Il peut arriver que l'axe soit conique, comme cela a lieu pour l'extrémité des essieux des roues de voitures; il prend alors le nom de *fusée*.

Lorsque l'axe de rotation est vertical, l'arbre tournant repose, à sa partie inférieure, par un *pivot* sur une *crapaudine* (*Voy. Pivot*). Il est retenu à

la partie supérieure par un *collet*, ou anneau cylindrique dans lequel il peut tourner sans pouvoir dévier de sa position verticale. Quand l'arbre tournant est soumis à des efforts latéraux qui tendent à l'appuyer contre le collet, on diminue le frottement en remplaçant ce simple collet par un *collier à galets* (fig. 17) qui transforme le frottement de glisse-

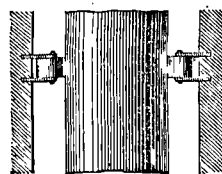
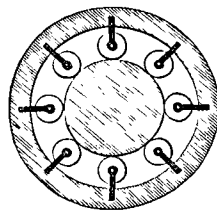


Fig. 17.

ment en un frottement de roulement. Cette disposition est employée pour les GRUES (*Voy. ce mot*) qui servent aux chargements et aux déchargements sur les ports.

Le collet ou le collier à galets peuvent encore être remplacés par un autre dispositif, dont on trouve un exemple dans les *plaques tournantes* employées au déplacement des wagons dans les gares de chemins de fer. La figure 18 montre cette dis-

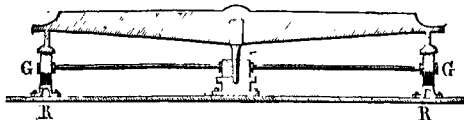


Fig. 18.

position. Sur l'axe vertical de rotation est monté un plateau horizontal qui est ici la pièce principale; il repose par ses bords sur des galets coniques GG, dont les axes sont reliés à un collier mobile autour de l'axe vertical, et qui roulent sur un rail circulaire RR ayant son centre sur cet axe. Le mouvement de rotation du plateau se trouve ainsi assuré, en même temps que la charge du pivot se trouve diminuée.

IV. *Mouvement suivant une courbe donnée.* La courbe peut être plane ou à double courbure. Dans les deux cas, le guide consiste dans une rainure dans laquelle s'engage une cheville, faisant partie du corps mobile; la cheville, obligée de glisser le long de la rainure, prend le mouvement curviligne indiqué par la forme de cette rainure. Comme cette condition ne suffit pas pour déterminer le mouvement du corps mobile, on l'assujettit en outre à d'autres conditions. S'il s'agit, par exemple, d'une courbe plane, on peut assujettir le corps mobile à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de la courbe, en s'éloignant ou en s'approchant de cet axe. Pour cela on pratique

dans le corps lui-même une rainure rectiligne dans laquelle cet axe s'engage. On rencontre cette disposition dans divers mécanismes propres à tracer des courbes (*Voy. TOUR A GUILLOCHER, ROSETTE*). S'il s'agit d'une courbe à double courbure, la rainure est ordinairement tracée sur un cylindre droit à base circulaire; on assujettit le corps mobile à se mouvoir parallèlement à l'axe de ce cylindre; si l'on fait tourner celui-ci, la cheville engagée dans la rainure se meut d'un mouvement *relatif* suivant la courbe donnée, tandis que le corps mobile prend un mouvement absolu de translation parallèle à l'axe du cylindre. Cette combinaison peut être employée pour produire un mouvement de translation rectiligne suivant une loi déterminée.

Quelques auteurs limitent l'application du mot *guide* aux dispositifs employés pour assurer et guider le mouvement rectiligne.

GUIDES (FROTTEMENT DES). Une pièce animée d'un mouvement rectiligne éprouve de la part de ses guides des réactions qui tendent à s'opposer au mouvement, et qui dans certains cas peuvent le rendre impossible. Considérons, par exemple, une tige verticale MN (fig. 1) dont la direction est assu-

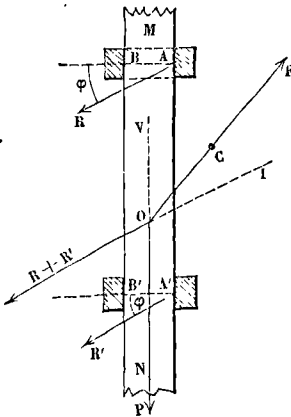


Fig. 1.

rée par deux colliers ou anneaux AB, A'B', dans lesquels elle passe. Soit P la force verticale résistante appliquée à la tige et qui comprend son propre poids; soit F la force mouvante appliquée en un point quelconque C lié à la tige. Par suite du jeu nécessaire qui est laissé entre la tige et ses guides, le contact n'a jamais lieu que d'un côté de chacun d'eux. Dans le cas de la figure 1, le contact aura lieu en A et en A'. Soient R et R' les réactions exercées en ces points par les guides sur la tige mobile. Les forces R et R' sont parallèles et de même sens, et se composeront par conséquent en une seule $R + R'$, parallèle et de même sens. Les deux forces F et P prolongées se rencontrent en un point O; il faut donc pour l'équilibre que la force $R + R'$ passe par ce même point (*Voy. EQUILIBRE*). Si l'on prend la force connue P en sens contraire et qu'on la décompose en deux, suivant les directions de F et de $R + R'$, les composantes donneront l'une la valeur de la force mouvante F, l'autre la valeur de la résultante $R + R'$ des deux réactions; en décom-

posant cette dernière en deux forces parallèles respectivement appliquées en A et en A', on aura les deux réactions R et R'.

On voit que, pour que l'équilibre soit possible, il faut que la direction de la force F passe au-dessus du prolongement OI de la résultante $R + R'$, ce qui exige qu'elle fasse avec l'horizon un angle plus grand que l'angle BAR ou B'A'R', c'est-à-dire un angle plus grand que l'angle φ du frottement (*Voy. FROTTEMENT*).

On trouvera pour F une valeur d'autant plus grande que sa direction se rapprochera davantage de OI; si elle était dirigée suivant OI, ou si elle passait au-dessous, le glissement de bas en haut deviendrait impossible. Le minimum de F répondrait au contraire au cas où cette force serait verticale; et, dans ce cas, les réactions R et R' seraient nulles.

Nous avons supposé la force mouvante appliquée entre les deux guides; si elle était appliquée au-dessous de l'anneau inférieur, les résultats seraient différents (fig. 2). Le contact aurait alors lieu en B et en A'; les réactions R et R', au lieu d'être parallèles, se rencontreraient en un point K; et comme

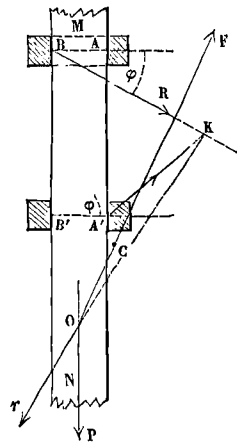


Fig. 2.

les forces F et P se rencontrent en un point O, il serait nécessaire pour l'équilibre que la résultante r des forces R et R', qui passe par le point K, passât en même temps par le point O, c'est-à-dire qu'elle fût dirigée suivant KO. Prenant comme ci-dessus la force donnée P en sens contraire, et la décomposant suivant les directions OC et Or, on aurait d'une part la force mouvante F, de l'autre la résultante r; transportant cette dernière en K, et la décomposant suivant les directions KB et KA', on aurait les réactions R et R'. Le minimum de F a encore lieu quand cette force est verticale, auquel cas les réactions R et R' sont nulles; elle augmente à mesure que sa direction se rapproche de OK; et si elle atteint cette direction ou si elle passe en dessous, le glissement de bas en haut devient impossible.

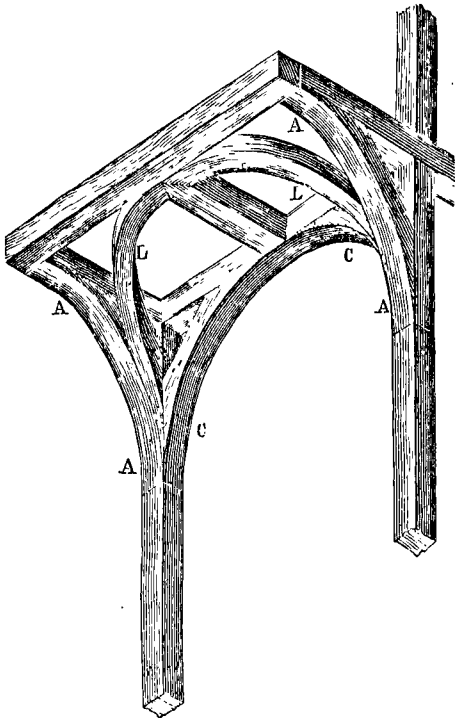
On arrive à des résultats analogues, quelle que soit la disposition des guides. Si cependant le contact avait lieu par l'intermédiaire d'un galet, le frottement de glissement se trouverait remplacé par un frottement de roulement qui est beaucoup

moindre, et les limites entre lesquelles doit être comprise la direction de la force F, pour que le mouvement de bas en haut reste possible, seraient beaucoup plus éloignées.

Les mêmes questions peuvent être traitées par le calcul (Voy. le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bélanger à l'École centrale); mais ce mode de solution offre moins de clarté que la solution graphique. On peut, du reste, de celle-ci déduire les formules qui donnent F dans l'un ou l'autre des deux cas ci-dessus examinés; car tout se réduit à des calculs de triangles.

Voyez à l'article MARTEAUX l'évaluation du frottement des prisons ou guides de la tige d'un pilon.

GUITARE, charpente composée de pièces courbes, employée pour soutenir les toits en saillie des lucarnes ou des fenêtres qu'on veut abriter de la pluie poussée par le vent. Les guitares se distinguent des simples combles de lucarnes en ce qu'elles présentent des liens en diagonales, appelés *liens guitares*, qui dessinent l'intersection des surfaces cylindriques formées d'une part par le cintre de la baie, et de l'autre par les aisseliers qui soutiennent la saillie du toit. La figure ci-contre représente une guitare en perspective isométrique (Voy. PERSPEC-



IVE AXONOMETRIQUE); la pièce C C forme le cintre de la baie; les pièces A A sont les aisseliers soutenant le toit en saillie; les pièces L L sont les liens guitares. Ils figurent généralement des lignes à double courbure.

On donne aux guitares des formes diverses; on en trouvera plusieurs exemples dans le *Traité de l'art de la charpente* de M. Émy.

GYROSCOPE (du grec γυρος, mouvement circu-

laire, et σκοπέω, regarder), appareil imaginé en 1852 par M. Léon Foucault, pour fournir une nouvelle preuve de la rotation du globe terrestre.

L'appareil (fig. 1) se compose essentiellement d'un

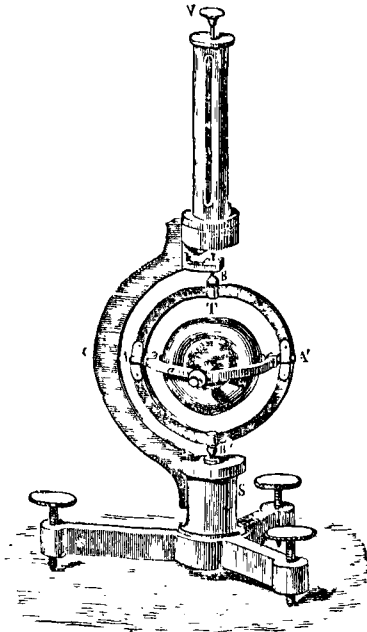


Fig. 1.

tore métallique T, rempli au centre et parfaitement équilibré, c'est-à-dire dont le centre de gravité est exactement sur l'axe de figure. Cet axe, en acier trempé, est terminé par deux petites pointes, entrant à frottement doux dans de petites crapaudines pratiquées dans deux vis taraudées aux extrémités d'un même diamètre d'un anneau métallique AaA'. Cet anneau porte en A et A', c'est-à-dire aux extrémités du diamètre de l'anneau perpendiculaire à l'axe du tore, deux couteaux dont les arêtes reposent sur des plans d'agate disposés dans l'intérieur d'un second anneau BAB'. Ce second anneau est mobile autour d'un axe vertical BB', au moyen de pointes qui s'engagent dans un demi-cercle fixe, porté par un support à vis calantes. Ce mode de suspension, analogue à la suspension de Cardan, permet à l'axe du tore de prendre dans l'espace toutes les directions imaginables. La mobilité de toutes les pièces est rendue aussi parfaite que possible. Pour y parvenir, on a suspendu l'anneau BAB' à l'aide d'un fil de cuivre, porté lui-même par un fil de soie sans torsion, contenu dans un tube de verre et venant se fixer à une vis V, à l'aide de laquelle on peut faire monter ou descendre l'anneau de quantités très-petites. L'anneau BAB' est ainsi suspendu, sans reposer dans la crapaudine B', où sa pointe inférieure n'est engagée que pour éviter les oscillations latérales.

Quand on veut mettre l'appareil en expérience, il faut d'abord imprimer au tore une grande vitesse de rotation autour de son axe. On le place pour cela dans une chape provisoire, et, à l'aide d'un

système de roues dentées, dont la dernière engrène avec un pignon monté sur l'axe du tore même, on communique à celui-ci une vitesse qui peut aller jusqu'à 150 tours par seconde. On l'enlève alors de sa chape provisoire, et on le suspend dans le cercle AaA' , soit par les couteaux qui terminent l'axe AA' , soit par les vis p qui terminent l'axe de révolution du tore, selon les effets que l'on veut produire. — Des cercles divisés permettent d'apprécier, à l'aide du microscope, les moindres déplacements de l'axe du tore, soit par rapport au méridien, soit par rapport à la verticale. — Voici maintenant les expériences fondamentales que l'on exécute avec cet appareil.

I. M. Quet a démontré, par l'analyse, que lorsqu'un corps est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe dont un point est entraîné dans le mouvement diurne du globe, la direction de l'axe de rotation demeure invariable dans l'espace absolu; de telle sorte que, pour un observateur emporté à son insu dans la rotation diurne, cet axe paraîtrait se mouvoir uniformément autour de l'axe du globe, en sens contraire du mouvement réel de la terre, exactement comme le ferait une lunette parallactique constamment pointée vers une même étoile. Le gyroscope permet de vérifier approximativement cette loi, que M. Foucault avait d'ailleurs annoncée et formulée. Nous disons approximativement, parce que le mouvement de rotation du tore ne pouvant pas se prolonger au delà de 10 minutes, temps pendant lequel la terre ne tourne que de $2^{\circ} \frac{1}{2}$, l'expérience ne saurait être aussi concluante que si elle se prolongeait plusieurs heures. — Le meilleur mode d'expérimentation consiste à placer l'axe du tore horizontalement. Une petite glace montée perpendiculairement sur l'axe du tore permet de donner à celui-ci la position horizontale, avec le secours d'une mire et d'une lunette à niveau. Le gyroscope étant complètement libre, on voit l'axe du tore se mouvoir comme une lunette constamment pointée sur une étoile très-voisine de l'horizon. Le mouvement en azimut demeure sensiblement constant pendant la durée de l'expérience, quel que soit l'azimut initial, et égal au mouvement diurne, estimé en sens contraire et multiplié par le sinus de la latitude du lieu de l'observation. C'est ce qui doit arriver en effet; car la rotation du globe autour de la ligne des pôles peut être regardée comme la résultante de deux rotations simultanées (Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS), l'une autour de la verticale du lieu, l'autre autour de la méridienne (Voy. COMPOSITION DES ROTATIONS), c'est-à-dire que les choses se passent comme si la terre tournait autour de la verticale, pendant que cette verticale tournerait autour d'une parallèle à la méridienne. C'est la première de ces deux composantes, prise en sens contraire, qui produit l'apparence du mouvement en azimut; or, d'après la règle du parallélogramme des rotations, elle est égale à la rotation du globe multipliée par le cosinus de l'angle que la ligne des pôles fait avec la verticale, ou, ce qui revient au même, par le sinus de la latitude.

II. Voici maintenant les expériences les plus frappantes, et qui font le plus grand honneur au génie inventif de M. Foucault.

Au lieu de suspendre l'anneau AaA' par les cou-

teaux qui terminent l'axe AA' , il le suspend par les vis p qui terminent l'axe de révolution du tore. Il en résulte que cet axe est contraint à demeurer horizontal, et ne peut plus tourner que dans son plan horizontal par suite du mouvement en azimut de l'anneau vertical BAB' . M. Foucault place ce cercle vertical de manière que l'axe du tore soit dirigé à peu près de l'est à l'ouest, l'axe de rotation, entendu d'après les conventions généralement adoptées, étant pointé à l'ouest; c'est-à-dire qu'un observateur placé à l'est de l'appareil et regardant vers l'ouest, verrait le tore tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. L'appareil étant alors abandonné à lui-même, on voit le cercle vertical BAB' tourner peu à peu autour de la verticale jusqu'à ce que l'axe de révolution du tore vienne se placer dans le plan du méridien en pointant vers le nord. Il dépasse un peu cette position; mais il ne tarde pas à y revenir pour la dépasser en sens contraire; en un mot, il oscille autour de cette position et finirait par s'y fixer si l'expérience pouvait être prolongée suffisamment. On voit que l'axe du tore tend à se placer dans le méridien de manière que la rotation de ce corps soit de même sens que celle du globe.

Cette tendance est évidemment due à la rotation du globe. Mais elle n'est pas produite, comme on pourrait le croire, par la composante de cette rotation autour de la verticale. Celle-ci, en effet, est sans influence sur le mouvement de l'axe du tore; car, pour qu'elle pût se composer avec la rotation propre du tore, il faudrait que l'axe instantané de rotation, ou la direction de la résultante, pût venir se placer dans l'angle formé par l'axe du tore et par la verticale, ce qui est impossible, puisque cet axe est contraint de faire un angle droit avec cette verticale. C'est au contraire la rotation composante autour de la méridienne qui produit l'effet observé. En se composant avec la rotation propre du tore, elle donne une résultante dont la direction se rapproche constamment de la méridienne. Et si l'axe du tore dépasse le méridien, elle tend à l'y ramener en sens contraire. Mais il faut bien remarquer que la position de l'axe du tore ne devient stable que si l'axe pointe vers le nord, auquel cas sa rotation et celle du globe sont de même sens; car si cet axe pointait vers le sud, au moindre déplacement, la composition des rotations dont nous parlons ramènerait l'axe du tore vers l'axe de la rotation composante du globe, c'est-à-dire vers la méridienne, mais pointant vers le nord.

M. Foucault a formulé en ces termes le résultat général auquel conduit cette expérience :

Tout corps tournant autour d'un axe libre de se diriger sans sortir du plan horizontal, fournit un nouveau signe de la rotation de la terre; car cette rotation développe une force directrice qui sollicite l'axe du corps vers le méridien, et dispose ce corps pour tourner dans le même sens que le globe. Donc: sans le secours d'aucune observation astronomique, la rotation d'un corps à la surface de la terre suffit à indiquer le plan du méridien.

III. Le plan du méridien étant connu, M. Foucault replace le tore dans l'anneau BAB' en le faisant reposer par les couteaux qui terminent l'axe AA' . Mais à l'aide de la vis V il soulève l'anneau et le serre de manière à l'empêcher de tourner au-

tour de la verticale. Tout l'appareil est orienté de manière que l'anneau BAB' soit dans le plan du premier vertical. L'expérimentateur place l'axe du tore horizontalement, de manière que l'axe de sa rotation, entendu comme nous l'avons expliqué plus haut, pointe vers le nord. Le tore étant abandonné à lui-même, on voit son axe s'incliner peu à peu jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à l'axe du globe, l'axe de sa rotation pointant toujours vers le nord, pour un observateur placé au sud de l'appareil; c'est-à-dire que la rotation du tore est de même sens que celle du globe.

L'explication du phénomène est la même que plus haut. La rotation du globe, en se composant avec celle du tore, rapproche peu à peu l'axe instantané, ou la direction de la rotation résultante, de la direction de la ligne des pôles. L'axe du tore dépasse cette position, pour y revenir par des oscillations successives. Et si l'expérience pouvait se prolonger suffisamment, l'axe du tore se placerait en définitive dans une position parallèle à l'axe du globe; la rotation se faisant dans le même sens que celle de la terre, sans quoi l'équilibre serait instable.

M. Foucault a tiré de cette expérience la conclusion suivante :

Tout corps tournant autour d'un axe libre de se diriger sans sortir du méridien jouit de la propriété de s'orienter parallèlement à l'axe du monde, et de manière à tourner dans le même sens que la terre. D'où l'on peut conclure que sans le secours d'aucune observation astronomique, la rotation d'un corps à la surface de la terre suffit à faire connaître la latitude du lieu, le méridien étant connu.

On peut remarquer que le gyroscope n'est qu'un perfectionnement de l'APPAREIL DE BOHNENBERGER (Voy. ce mot). M. Person avait remarqué, en effet, qu'avec cet appareil on pouvait démontrer la rotation de la terre. Le mérite de la démonstration n'en revient pas moins à M. L. Foucault.

IV. Mais la théorie précédente, uniquement fondée sur la composition des rotations, et qui est, sauf la différence du langage, celle qu'a donnée M. Foucault, ne rend qu'imparfaitement compte des phénomènes observés; et pour les étudier d'une manière plus intime, il est nécessaire d'avoir recours aux principes sur le mouvement relatif (VOY. THÉORÈME DE CORIOLIS). Considérons d'abord

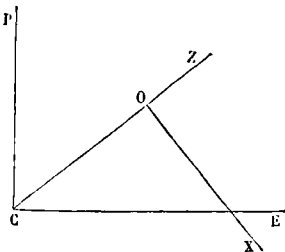


Fig. 2.

l'expérience qui fait connaître le méridien. Soit C (fig. 2) le centre de la terre, CP l'axe du globe, CZ la verticale du lieu où se fait l'expérience. Soit CE la trace du méridien PCZ sur le plan de l'équa-

teur, l'angle ZCE = λ sera la latitude du lieu de l'observation. Soit O le centre du gyroscope. Par ce point concevons trois axes rectangulaires, le premier OZ suivant la verticale, le second OX suivant la méridienne; le troisième OY, se projetant en O sur le plan de la figure, sera la ligne Est et Ouest. Nous nommerons I_x, I_y, I_z , les moments d'inertie du tore par rapport à ces trois axes, en désignant plus particulièrement par I le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation du tore. Ce mobile étant parfaitement équilibré, la résultante des réactions de ses supports est égale et directement opposée à son poids, en sorte que la somme des moments de ces forces par rapport à un axe quelconque est nulle, et que nous n'aurons pas à nous en occuper. Nous désignerons par φ_1 la première force apparente qu'il faut, pour ramener le mouvement relatif à un mouvement absolu, appliquer à un point matériel quelconque faisant partie du tore; cette force n'est autre ici que la force centrifuge par rapport à l'axe de rotation CP du globe. Nous nommerons φ_2 la deuxième force apparente à appliquer au même point matériel; elle a pour expression $2mw.v$ en désignant par m la masse du point matériel considéré, par v sa vitesse relative par rapport au globe, et par ω la vitesse angulaire de celui-ci; et pour avoir la direction de cette force, nous rappelons qu'il faut prendre la composante de v perpendiculairement à CP, c'est-à-dire parallèlement à l'équateur, et la faire tourner de 90° en sens contraire de la rotation du globe. Enfin, nous appellerons ω la vitesse angulaire du tore par rapport à son axe de figure, ρ la distance du point dont la masse est m à cet axe, et x, y, z les coordonnées du même point relativement aux axes OX, OY, OZ mobiles avec le globe.

Supposons d'abord que l'axe du tore soit dirigé suivant l'axe OY, l'axe de la rotation, entendu comme il a été dit plus haut, pointant vers l'Ouest, c'est-à-dire en avant de la figure. On aura $I_x = I$. Évaluons les moments des forces φ_1 et φ_2 par rapport à la verticale OZ. Dans la situation où le tore est placé, il est coupé symétriquement par le méridien PCZ et par un plan mené parallèlement à l'équateur par le point O. En vertu d'un théorème de M. Poncelet (VOY. FORCE CENTRIFUGE), la résultante des forces centrifuges est ici la force centrifuge du centre de gravité O du tore, et son moment par rapport à OZ est nul, puisqu'elle est dans un même plan avec cet axe. Évaluons le moment de la force φ_2 . Pour cela, considérons un point du tore se projetant sur le plan ZOY dans l'angle des coordonnées positives. Remarquons que la vitesse relative $\omega\rho$ du point est parallèle au plan ZOY. Décomposons-la en deux autres, respectivement parallèles à OZ et à OX. Les angles du rayon ρ avec ces axes ayant respectivement pour cosinus $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{z}{\rho}$, les angles de la vitesse $\omega\rho$ perpendiculaire à ce rayon auront pour cosinus $\frac{x}{\rho}$ et $-\frac{z}{\rho}$ en ayant égard au sens de la rotation du tore. Les composantes de $\omega\rho$ seront donc ωx suivant OZ, et $-\omega z$ suivant OX. La projection de ωx sur l'équateur sera $\omega x \cos \lambda$; en multipliant par $2mw$, on aura la valeur d'une des composantes de φ_2 , c'est-à-dire

$$2mw \omega x \cos \lambda;$$

et sa direction s'obtiendra en la faisant tourner de 90° en sens inverse de la rotation du globe, ce qui l'amènera parallèlement à l'axe OY, et en avant du plan de la figure. Le moment de cette composante par rapport à OZ s'obtiendra donc en la multipliant par sa distance x à cet axe, ce qui donnera $2mw\omega x^2 \cos \lambda$.

La projection de $-\omega z$ sur l'équateur sera $-\omega z \sin \lambda$.

La seconde composante de φ_2 sera donc $-2mw\omega x \sin \lambda$.

En la faisant tourner de 90° en sens contraire de la rotation du globe, on l'amènera parallèlement à OY, mais en arrière du plan de la figure; son moment par rapport à OZ s'obtiendra donc aussi en multipliant par x , ce qui donnera $-2mw\omega x^2 \sin \lambda$.

Or, obtiendra les mêmes résultats pour tout autre point du tore, sauf le signe des coordonnées.

La somme des moments de toutes les forces φ_2 aura donc pour expression

$$2w\omega \cos \lambda \Sigma mx^2 - 2w\omega \sin \lambda \Sigma mx.$$

Mais $\Sigma mxz = 0$

puisque le centre de gravité O du tore est l'origine des coordonnées. D'un autre côté, à cause de la symétrie du tore par rapport aux plans ZOY et XOY, on a

$$\Sigma mx^2 = \Sigma mz^2 = \frac{1}{2} \Sigma m(x^2 + z^2) = \frac{1}{2} \Sigma mp^2 = \frac{1}{2} I.$$

Par conséquent la somme des moments des forces apparentes par rapport à la verticale se réduit en définitive à $I \cdot w\omega \cos \lambda$,

et ce moment tend à ramener l'axe de rotation du tore vers l'axe des x .

Supposons en second lieu que l'axe du tore soit dirigé suivant OX, l'axe de la révolution pointant vers les x négatifs, c'est-à-dire vers le nord. On verra, comme plus haut, que la résultante des forces centrifuges, par rapport à l'axe du globe, est située dans le plan du méridien, et que par conséquent son moment par rapport à la verticale est nul. Évaluons le moment des forces φ_2 . Considérons un point du tore se projetant sur YOZ dans l'angle des coordonnées positives. La vitesse relative $\omega\rho$ est ici parallèle au plan YOZ. Nous la décomposerons en deux, l'une $-\omega x$ suivant l'axe OY, l'autre $+\omega y$ suivant OZ. La projection de la première sur l'équateur est $-\omega x$ lui-même. La composante correspondante de φ_2 est

$$-2mw\omega x;$$

en la faisant tourner de 90°, on l'amène dans la direction parallèle à CE. Pour avoir son moment, il faut d'abord la projeter sur un plan perpendiculaire à OZ, ce qui donne

$$2mw\omega x \sin \lambda;$$

puis, il faut la multiplier par y , ce qui donne

$$2mw\omega xy \sin \lambda.$$

La somme de tous les moments analogues est donc $2w\omega \sin \lambda \Sigma myx$.

Mais $\Sigma myz = 0$

à cause de la symétrie du tore par rapport au plan YOZ; cette première somme de moments est donc égale à zéro.

La projection de ωy sur l'équateur est $\omega y \cos \lambda$, et la composante correspondante de φ_2 est

$$2mw\omega y \cos \lambda;$$

en la faisant tourner de 90°, on l'amène parallèle-

ment à OY. Pour avoir son moment par rapport à OZ, il suffit donc de le multiplier par x , ce qui donne

$$2mw\omega xy \cos \lambda.$$

La somme de tous les moments analogues est donc $2w\omega \cos \lambda \Sigma mxy$.

Mais $\Sigma mxy = 0$

à cause de la symétrie du tore; cette seconde somme de moments est donc nulle comme la première. Il en résulte que, dans cette position du tore, son axe n'a aucune tendance à tourner autour de la verticale.

Supposons maintenant l'axe du tore dans une position intermédiaire entre OY' (prolongement de OY) et OX, c'est-à-dire dans le plan YOX, et faisant avec OX un angle que nous désignerons par α . Nous pourrions décomposer la vitesse angulaire ω en deux, l'une $\omega \sin \alpha$ suivant l'axe OY', la seconde $\omega \cos \alpha$ suivant l'axe OX. D'après ce que nous venons de dire, la rotation autour de OX ne fera naître aucune tendance au déplacement de l'axe du tore; le déplacement ne pourra provenir que de la rotation autour de OY', et, d'après ce qui a été établi plus haut, on obtiendra la somme des moments des forces φ_2 relatives à ce cas, en remplaçant, dans l'expression

$$I\omega w \cos \lambda,$$

la vitesse angulaire ω par sa composante $\omega \sin \alpha$, ce qui donne $I\omega w \cos \lambda \sin \alpha$.

On voit par cette expression que le moment qui produit le déplacement de l'axe du tore est d'autant plus grand que α est plus près de 90°, et qu'il diminue à mesure que l'axe se rapproche de la méridienne. On voit aussi qu'il est proportionnel au cosinus de la latitude, en sorte que sa plus grande valeur a lieu à l'équateur, et qu'il serait rigoureusement nul au pôle. C'est-à-dire qu'au pôle l'axe du tore étant placé horizontalement, il n'aurait aucune tendance à se déplacer autour de la verticale.

L'expression du moment des forces apparentes change de signe avec α , le sens de la rotation de l'axe du tore est donc toujours celui qui ramène cet axe vers la méridienne. Ce moment s'annule pour $\alpha = 180^\circ$ comme pour $\alpha = 0$, mais le sens du moment fait voir que l'équilibre de l'axe n'est stable que dans le second cas.

Dans l'expérience de M. Foucault, le tore ne pouvant que tourner autour de la verticale, l'équation différentielle de son mouvement est, d'après l'expression connue de l'ACCÉLÉRATION ANGULAIRE (Voy. ce mot)

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{I\omega w \cos \lambda}{I_0} \cdot \sin \alpha = - A \sin \alpha.$$

(Le signe $-$ vient de ce que α diminue à mesure que t augmente.) On tire de cette équation, en appelant α_0 l'écart initial de l'axe par rapport à la méridienne

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2A(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}$$

et

$$t\sqrt{A} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}}.$$

Si l'on suppose l'écart initial très-faible, de manière qu'on puisse remplacer $2 \cos \alpha_0$ par

$$2 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{1.2} \right),$$

on obtient

$$t\sqrt{A} = - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha_0^2}} = \arccos \frac{\alpha}{\alpha_0} + \text{const},$$

et si T est la durée d'une oscillation entière de l'axe, c'est-à-dire la valeur de t répondant à

$$\alpha = -\alpha_0,$$

il vient $T\sqrt{A} = \pi$, d'où $T = \pi \sqrt{\frac{I_x}{I\omega w \cos \lambda}}$.

Pour la terre, on a $w = 0,000072$. Si l'on suppose au tore une vitesse angulaire de 150 tours par seconde, on a $\omega = 471,24$. Supposons $\lambda = 45^\circ$, il vient $\cos \lambda = 0,707$. Par conséquent, en effectuant

les calculs, $T = 20'' , 28 \sqrt{\frac{I_x}{I}}$,

expression dans laquelle le radical est une fraction, attendu que le moment d'inertie du tore autour de son axe est le plus grand de ses moments d'inertie.

Y. Considérons en dernier lieu l'expérience qui sert à déterminer la latitude. Supposons d'abord que l'axe du tore soit dirigé suivant OX, l'axe de la rotation pointant vers le nord comme ci-dessus. A cause de la faiblesse des dimensions du tore par rapport à sa distance à l'axe du globe, les forces centrifuges qui se rapportent à la rotation de la terre peuvent être regardées comme parallèles à EC et par conséquent parallèles entre elles; d'ailleurs elles sont proportionnelles à leur distance à OP; il en résulte que leur résultante est parallèle à EC et passe par le centre de gravité O du tore; son moment par rapport aux trois axes peut donc être regardé comme nul. On calculera comme dans la question précédente la valeur des forces φ_2 ; mais, au lieu de prendre leurs moments par rapport à la verticale, il faudra les prendre par rapport à la ligne Est et Ouest, c'est-à-dire par rapport à l'axe OY. Si l'on considère un point du tore se projetant sur le plan YOZ dans l'angle des coordonnées positives, on voit que les composantes de sa vitesse relative $\omega\rho$ sont ωy suivant OZ et $-\omega x$ suivant OY. Si l'on projette la première sur l'équateur et qu'on la fasse tourner de 90° , elle devient parallèle à OY, et par conséquent son moment par rapport à cet axe est nul. La seconde composante $-\omega x$ se projette en vraie grandeur sur le plan de l'équateur, et en la faisant tourner de 90° dans le sens contraire à w on l'amène parallèlement à CE; la composante correspondante de φ_2 a donc pour valeur

$$2m\omega\omega x.$$

Pour avoir son moment par rapport à OY, il faut la multiplier par sa distance à cet axe, laquelle n'est autre chose que la projection sur une parallèle à CP du chemin formé par les coordonnées x et x , c'est-à-dire $x \sin \lambda - x \cos \lambda$.

La somme des moments des forces φ_2 est donc, sauf les signes des coordonnées,

$$2w\omega \Sigma mx (x \sin \lambda - x \cos \lambda)$$

ou $2w\omega \sin \lambda \cdot \Sigma mx^2 - 2w\omega \cos \lambda \Sigma mx^2$.

Or $\Sigma mx^2 = 0$ et $\Sigma mx^2 = \frac{1}{2}I$;

la somme demandée est donc en définitive représentée par $Iw\omega \sin \lambda$.

Cette somme de moments tend à faire tourner l'axe du tore autour de OY dans le sens de OZ vers OX.

Supposons en second lieu que l'axe du tore soit dirigé suivant la verticale; l'axe de la rotation, défini comme on l'a fait plus haut, pointant vers

le zénith. En prenant toujours un point du tore qui se projette sur le plan XOY dans l'angle des coordonnées positives, on verra que sa vitesse relative $\omega\rho$ se décompose en ωy suivant OX et en $-\omega x$ suivant OY. La première composante projetée sur l'équateur et tournée de 90° devient parallèle à OY et donne un moment nul. La seconde se projette en vraie grandeur, et devient, après une rotation de 90° en sens contraire de w , parallèle à la direction CE. La composante correspondante de φ_2 est

$$2m\omega\omega x.$$

Pour avoir son moment, il faut, comme ci-dessus, multiplier par $x \sin \lambda - x \cos \lambda$.

La somme des moments de toutes les forces φ_2 est donc, sauf les signes des coordonnées,

$$2w\omega \Sigma mx (x \sin \lambda - x \cos \lambda)$$

ou $2w\omega \sin \lambda \Sigma mx^2 - 2w\omega \cos \lambda \Sigma mx^2$.

Or $\Sigma mx^2 = 0$ et $\Sigma mx^2 = \frac{1}{2}I$.

La somme des moments considérés a donc pour valeur définitive $-Iw\omega \cos \lambda$.

Elle tend à faire tourner l'axe du tore autour de OY dans le sens de OX vers OZ, c'est-à-dire en sens contraire de la somme ci-dessus obtenue.

Supposons enfin que l'axe du tore, étant situé dans le plan du méridien, ait une direction quelconque intermédiaire entre OX et OZ' (prolongement de OZ), et fasse avec OX un angle que nous désignerons par β . On pourra décomposer la vitesse angulaire ω du tore en deux, l'une $\omega \cos \beta$ suivant OX, et l'autre $\omega \sin \beta$ suivant OZ.

Le moment des forces φ_2 produites par la première composante sera $Iw\omega \sin \lambda \cos \beta$, et le moment des forces φ_2 produites par la deuxième composante aura pour expression $-Iw\omega \cos \lambda \sin \beta$.

La somme des moments des forces apparentes sera donc

$$Iw\omega (\sin \lambda \cos \beta - \cos \lambda \sin \beta) \text{ ou } Iw\omega \sin (\lambda - \beta).$$

On voit que ce moment est nul pour $\beta = \lambda$; c'est-à-dire que la tendance au déplacement de l'axe du tore disparaît lorsque cet axe est parallèle à l'axe du globe, et que l'axe de la rotation pointe vers le Nord, en d'autres termes quand le tore tourne dans le même sens que la terre.

Le maximum de ce moment répond au contraire

$$\text{à } \lambda - \beta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta = \lambda - \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire au cas où l'axe du tore est perpendiculaire à l'axe du globe.

On verrait comme plus haut que, si l'axe du tore ne peut se mouvoir que dans le plan du méridien, l'équation différentielle de son mouvement est

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{Iw\omega}{I_y} \sin (\lambda - \beta),$$

et l'on en déduirait de même la durée des petites oscillations de cet axe de part et d'autre de la parallèle à l'axe du globe.

La théorie est donc en tout conforme aux expériences de M. Foucault. Mais on voit, et il faut bien remarquer, que l'axe du tore n'ayant plus la liberté de se mouvoir dans tous les sens, sa déviation n'est plus proportionnelle au sinus de la latitude, et cette observation avait déjà été faite par plusieurs des personnes qui ont répété les expériences de M. Foucault, et en particulier par M. George Sire. (Mémoire à la Société d'émulation du Doubs.)

H

HABITACLE, sorte de petite armoire fixe placée, dans un navire, au milieu du gaillard d'arrière, et qui renferme la boussole.

HALAGE, traction des bateaux à l'aide d'une corde, sur laquelle des hommes ou des chevaux agissent en suivant un chemin spécial ménagé sur une des rives, et nommé *chemin de halage* (Voy. NAVIGATION INTÉRIEURE).

HANCHE, partie de la coque d'un navire comprise entre la poupe et les haubans du grand-mât.

HAUBANS, cordages qui lient les mâts d'un navire aux deux bords. Ils prennent le nom du mât auquel ils se rapportent. Ils forment des échelles de cordes qui sont indispensables pour la manœuvre (Voy. MÂTURE).

Dans les *ponts suspendus* on donne aussi le nom de *haubans* à des câbles qui relient le sommet de chacun des supports de la chaîne au pied du support qui précède, et au pied du support qui suit (Voy. PONTS SUSPENDUS).

HAUSSE, petite règle divisée placée à la culasse des canons et obusiers, et qui peut glisser dans une rainure perpendiculaire à l'axe de la pièce; elle sert à l'opération du *POINTAGE* (Voy. ce mot). La ligne qui va de l'extrémité de la hausse au cran de mire placé à la bouche est la *ligne de mire*, qui doit être dirigée sur le but. Les carabines à longue portée sont munies d'une hausse fixe. On donne aussi le nom de *hausse* à la longueur comprise entre l'extrémité supérieure de la règle et la plate-bande de la culasse; les *TABLES DE TIR* (Voy. ce mot) contiennent une colonne où sont inscrites les *hausse*s qu'il faut employer suivant le calibre, la charge et la distance du but. Les *hausse*s, dans cette seconde acception du mot, peuvent être *négatives*; c'est ce qui a lieu quand le but est à une distance moindre que la portée de *BUT-EN-BLANC* (Voy. ce mot).

HAUTEUR DUE À UNE PRESSION, ou *hauteur représentative d'une pression*, hauteur d'une colonne fluide dont le poids serait équivalent à la pression considérée (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE, PIÉZOMÈTRE).

HAUTEUR DUE À UNE VITESSE, hauteur à laquelle s'élèverait un mobile lancé verticalement, et de bas en haut, dans le vide, avec cette vitesse. Cette hauteur est exprimée par la formule (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES) :

$$h = \frac{v^2}{2g},$$

v désignant la vitesse donnée.

Cette quantité joue un rôle important en Mécanique; on trouvera à l'article *VITESSE DUE À UNE HAUTEUR*, une table qui permet de calculer par interpolation la hauteur due à une vitesse donnée.

HAUTEUR D'UN ASTRE AU-DESSUS DE L'HORIZON, complément de la *DISTANCE ZÉNITHALE* (Voy. ce mot). En mer, au lieu d'observer les distances zénithales, on observe les hauteurs, parce qu'il est toujours facile, surtout dans le jour, d'avoir une horizontale en menant un rayon visuel à la limite de l'horizon.

Mais les hauteurs ainsi mesurées doivent être corrigées de la *DÉPRESSION* (Voy. ce mot), indépendamment de la *RÉFRACTION*, de la *PARALLAXE* et du *DEMI-DIAMÈTRE APPARENT* qui affectent les hauteurs aussi bien que les distances zénithales, mais en sens contraire (Voy. ces mots). Ainsi, pour avoir la *hauteur vraie* d'un astre, il faut de la *hauteur apparente* (celle que l'on a mesurée) retrancher la *réfraction*, ajouter la *parallaxe*, retrancher la *dépression*, enfin ajouter ou retrancher le *demi-diamètre apparent* de l'astre selon que l'on a observé son bord inférieur ou son bord supérieur.

Des opérations inverses donnent la hauteur apparente connaissant la hauteur vraie du centre de l'astre. On commence par ajouter ou retrancher le *demi-diamètre apparent*, suivant que l'on veut avoir la hauteur du bord supérieur ou du bord inférieur. On détermine des valeurs approchées de la *réfraction* et de la *parallaxe* en se servant de la hauteur vraie donnée comme si c'était la hauteur apparente; on ajoute la *réfraction*, on retranche la *parallaxe*, et l'on a une hauteur apparente approchée; on s'en sert de nouveau pour déterminer la *réfraction* et la *parallaxe*, et l'on a une nouvelle valeur plus approchée de la hauteur apparente. L'approximation étant ordinairement suffisante, on ajoute la *dépression*, et l'on a la hauteur apparente cherchée.

La hauteur d'un astre au moment de son passage au méridien porte le nom de *hauteur méridienne*.

La hauteur d'un astre à un moment donné quelconque peut être obtenue par le calcul lorsqu'on a l'heure exacte, en temps moyen, et les coordonnées géographiques du lieu où l'on se trouve. En effet, avec l'heure moyenne et la longitude on aura l'heure moyenne de Paris. Si l'astre considéré est le Soleil, à l'aide de cette heure moyenne et des données de la *Connaissance des temps*, on calculera par interpolation : 1° la déclinaison du soleil, dont le complément sera sa distance polaire; 2° l'équation du temps, qui permettra de calculer l'heure vraie, et par conséquent l'angle horaire. Si l'astre dont on cherche la hauteur est la lune, on calculera de même sa déclinaison, et de plus son ascension droite; et, en convertissant l'heure moyenne en heure sidérale, on en déduira l'angle horaire. S'il s'agissait d'une étoile, la marche serait la même, sauf que l'ascension droite serait donnée sans calcul. — On ne considère pas le cas où l'astre serait une planète, attendu que les éléments qui concernent ces corps célestes ne sont pas donnés avec assez d'exactitude dans la *Connaissance des temps* pour que le calcul d'interpolation dont il s'agit puisse leur être applicable. (Voy. LONGITUDE, DÉCLINAISON, ASCENSION DROITE, ÉQUATION DU TEMPS, CONVERSION DES TEMPS.)

Cela posé, dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z et l'astre S, triangle qu'on appelle souvent *triangle de position*, on connaîtra le côté PZ, complément de la latitude, le côté PS, complément de la déclinaison, et l'angle compris P, qui n'est autre chose que l'angle horaire.

On pourra donc calculer, par les formules connues de trigonométrie sphérique, le troisième côté SZ, distance zénithale de l'astre, dont le complément sera la hauteur demandée. Ce problème est l'inverse de celui qui consiste à déterminer l'heure par l'observation de la hauteur d'un astre (Voy. HEURE [Détermination de l']).

Par des considérations analogues à celles qui sont employées dans l'article cité, on trouve qu'une erreur sur l'angle horaire a le moins d'influence possible sur la hauteur à calculer, quand l'astre est près du méridien. Au contraire, une erreur sur la latitude influe le moins possible sur les résultats du calcul quand l'astre est voisin du premier vertical. Quant à l'influence d'une erreur sur la distance polaire, elle est la plus faible possible quand l'angle en S approche d'un angle droit. On devra donc se placer dans les circonstances les plus favorables en vue de l'erreur qu'on aura le plus à redouter. (Voy. le Cours de Navigation et d'Hydrographie de E. P. Dubois, page 265 et suiv.)

On a quelquefois besoin de réduire une hauteur, observée d'un certain point, à ce qu'elle eût été si elle eût été observée d'un autre point. On trouvera à l'article LATITUDE (IV, fig. 2) le calcul à faire pour opérer cette réduction.

HAUTEUR SOUS CLEF, hauteur verticale d'une voûte (Voy. ce mot) comprise entre la CLEF et le PLAN DE NAISSANCE (Voy. ces mots).

HAUTEURS CORRESPONDANTES (MÉTHODE DES), l'une des méthodes employées pour déterminer l'heure (Voy. HEURE [Détermination de l']).

HAUTURIÈRE (NAVIGATION), ou *long cours*. La navigation hauturière est ainsi nommée parce que, se faisant en pleine mer, elle exige l'observation de la hauteur des astres (Voy. HAUTEUR), et en général des observations astronomiques. Elle est opposée au *cabotage*, dans lequel on va de cap en cap, sans quitter la terre de vue, et qui n'exige qu'une connaissance exacte de toutes les particularités relatives à la côte le long de laquelle on navigue (Voy. LATITUDE, LONGITUDE, HEURE, PROBLÈME DES ROUTES, LOXODROMIE, etc., etc.).

HECTARE, mesure agraire qui vaut 100 ares, ou 10000 mètres carrés. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

HECTOGRAMME, unité de poids valant 100 grammes; elle équivaut au poids de 100 centimètres cubes ou 1 décilitre d'eau distillée. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

HECTOLITRE, mesure de capacité qui vaut 100 litres, ou un dixième du mètre cube. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

HECTOMÈTRE, mesure de longueur qui vaut 100 mètres. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

HÉLIAQUE (du grec $\eta\lambda\iota\omicron\varsigma$, soleil), se dit du lever et du coucher d'un astre lorsqu'ils ont lieu, savoir : le lever, une heure avant celui du soleil; le coucher, une heure après. Les anciens, qui faisaient leurs observations à l'horizon, se servaient fréquemment des levers ou des couchers héliaques. Mais cette particularité a perdu de son importance depuis que les observations se font au méridien.

HÉLICE, courbe tracée sur un cylindre droit à base circulaire, de manière à couper ses génératrices sous un angle constant. Il résulte de cette définition que si l'on développe la surface cylindrique sur un plan, tous les éléments de l'hélice viendront

s'y placer en ligne droite dans le prolongement les uns des autres. Et réciproquement, si l'on enroule le plan sur le cylindre, la droite ainsi tracée sur le plan redeviendra l'hélice.

I. C'est ordinairement ce dernier mode de génération que l'on adopte. Soit OO' (fig. 1) l'axe du

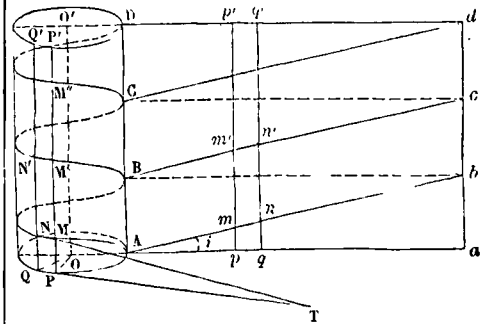


Fig. 1.

cylindre, et AD l'une de ses génératrices. Concevons qu'on développe sa surface sur un plan, à partir de cette génératrice; et soit AAdD le rectangle qui forme ce développement. Traçons sur ce rectangle une droite quelconque Ab. Si l'on enroule le rectangle sur le cylindre, cette droite deviendra une courbe satisfaisant à la définition de l'hélice. En effet, prenons sur la droite deux points m et n infiniment voisins; soient M et N les positions correspondantes de ces points sur la courbe. Par les points m et n menons les droites pp' et qq' parallèles à AD; et par les points M et N menons les génératrices PP' et QQ'. Lorsqu'on enroule le plan sur le cylindre, la droite pp' vient s'appliquer suivant la génératrice PP', et la droite qq' suivant la génératrice QQ'; l'élément rectiligne mn vient s'appliquer sur MN; d'ailleurs pq vient prendre la position PQ; en un mot le trapèze mpqn vient s'appliquer sur MPQN. Or, la distance des droites pp' et qq', et par conséquent aussi la distance des génératrices PP' et QQ', étant infiniment petite, le trapèze curviligne MPQN peut être regardé comme plan; l'élément MN de la courbe fait donc avec la génératrice QQ' un angle MNQ égal à mnq. Or, ce dernier est constant et égal à DAb; donc l'angle MNQ, qu'un élément de la courbe fait avec la génératrice passant par son extrémité, est un angle constant; d'après la définition, la courbe est donc une hélice.

II. La droite Ab, en s'enroulant sur le cylindre, ne donne qu'une portion AMB de l'hélice. Pour obtenir l'hélice entière, il faudrait supposer le plan indéfini, la droite Ab prolongée indéfiniment dans les deux sens, et le plan enroulé un nombre indéfini de fois sur le cylindre, dans les deux sens, à partir de AD. Mais on peut aussi l'obtenir d'une autre manière. Par le point B, qui est à une distance de A égale à ba, menons une parallèle à Ab; soit Bc cette parallèle. Quand on enroulera le plan sur le cylindre, elle donnera une seconde hélice BM'C qui coupera les génératrices du cylindre sous un angle égal à DBC ou, ce qui revient au même, à DAb; ce sera donc le prolongement de la première hélice. Le point C sera à une distance de B

égale à bc ; par le point C on pourra mener à Bc une parallèle Cd , laquelle, en s'enroulant sur le cylindre, donnera une nouvelle portion $CM''D$ de l'hélice; et ainsi de suite.

On voit qu'une même génératrice PP' est coupée un nombre indéfini de fois par l'hélice. La distance MM' ou $M'M''$, entre deux points d'intersection consécutifs de l'hélice avec une même génératrice du cylindre, est ce que l'on appelle le *pas* de l'hélice. Ce pas est égal à ab , ou à AB , à bc ou à BC , etc.

L'inclinaison de l'hélice est le complément de l'angle que chacun de ses éléments fait avec la génératrice qu'il rencontre; c'est l'angle de MN avec un plan perpendiculaire à l'axe, ou l'angle de mn avec pq , ou encore l'angle $b\lambda a = i$, que la droite Ab , développement de l'hélice, fait avec Aa , développement du cercle de base. Il y a entre le pas de l'hélice, son inclinaison, et le rayon du cylindre une relation très-simple. Soit h le pas, et r le rayon. On a, dans le triangle $b\lambda a$,

$$\text{tang } i = \frac{ab}{Aa} = \frac{h}{2\pi r} \quad [1]$$

c'est-à-dire que la tangente de l'inclinaison de l'hélice est le rapport entre son pas et la circonférence de la base du cylindre. L'une quelconque des trois quantités i , h , r est donnée par la relation [1], quand les deux autres sont connues.

III. La tangente à l'hélice en un point M donné sur cette courbe peut se construire très-aisément. Cette tangente n'est autre chose que l'élément MN prolongé. Cet élément est contenu dans le plan des deux génératrices consécutives PP' et QQ' , c'est-à-dire dans le plan tangent au cylindre. Ce plan contient l'élément PQ du cercle de base, et coupe conséquemment la base suivant le prolongement de cet élément, c'est-à-dire suivant la tangente en P à cette base. La tangente à l'hélice vient donc couper cette tangente au cercle en un point T . Or, l'angle PMT étant égal à pmA ou à $90^\circ - i$, on a, dans le triangle MTP ,

$$PT = \frac{MP}{\text{tang } i}$$

Mais dans le triangle mAp on a

$$Ap = \frac{mp}{\text{tang } i}$$

et, comme $mp = MP$, il en résulte $PT = Ap = AP$.

Ainsi, pour construire la tangente en M à l'hélice, on mènera la génératrice MP ; par le point P on mènera la tangente au cercle de base; sur cette tangente on portera une longueur PT égale au développement de l'arc AP , et l'on joindra MT ; ce sera la tangente demandée.

IV. Les triangles semblables Amp et Aba donnent la proportion

$$mp : Ap = ab : Aa.$$

Or

$mp = MP$, $Ap = AP$, $ab = h$, $Aa = 2\pi r$; on peut donc écrire

$$MP : AP = h : 2\pi r, \quad [2]$$

c'est-à-dire que les longueurs MP et AP sont proportionnelles. Il en résulte qu'on peut concevoir l'hélice comme engendrée par un point mobile qui tournerait autour de l'axe du cylindre (en restant à la même distance de cet axe), et en s'éloignant de sa base d'une quantité proportionnelle au nombre de tours ou fraction de tour qu'il aurait fait. C'est ce

mode de génération qu'on emploie pour trouver les équations de l'hélice. Prenons pour origine le centre O de la base du cylindre, les axes des x et des y dans ce plan, et rectangulaires entre eux, l'axe des z sera l'axe du cylindre. Soit M (fig. 2) un point de l'hé-

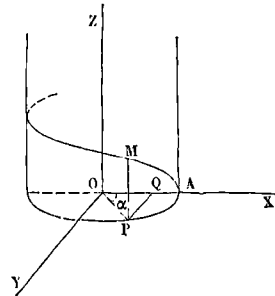


Fig. 2.

lice, laquelle part du point A situé sur OX ; soit MP la génératrice qui passe par le point M . Joignons OP , et désignons par α l'angle POA . Menons PQ parallèle à l'axe des y . Nous aurons

$$\begin{aligned} x &= OQ = r \cos \alpha, \\ y &= PQ = r \sin \alpha, \\ z &= MP = h \cdot \frac{r\alpha}{2\pi r} = \frac{h}{2\pi} \cdot \alpha. \end{aligned}$$

On obtient en éliminant α

$$x = r \cos \frac{2\pi}{h} z \quad \text{et} \quad y = r \sin \frac{2\pi}{h} z; \quad [3]$$

ce sont les équations de l'hélice.

On en tire aisément les propriétés de la tangente. D'abord, si l'on prend les dérivées des deux membres des équations [3], on trouve

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{2\pi r}{h} \sin \frac{2\pi}{h} z = -\frac{2\pi}{h} y, \\ y' &= +\frac{2\pi r}{h} \cos \frac{2\pi}{h} z = +\frac{2\pi}{h} x. \end{aligned}$$

Par suite les équations de la tangente sont, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$\begin{aligned} X - x &= -\frac{2\pi}{h} y (Z - z), \\ Y - y &= +\frac{2\pi}{h} x (Z - z). \end{aligned} \quad [4]$$

L'équation de la projection sur le plan des xy s'obtiendra en éliminant Z ; pour cela il suffit de multiplier la première équation par x , la seconde par y , et d'ajouter membre à membre, ce qui donne

$Xx + Yy - x^2 - y^2 = 0$ ou $Xx + Yy = r^2$, c'est l'équation de la tangente en P au cercle de base, ce qui vérifie une des propriétés de la tangente.

Maintenant, l'angle qu'une droite ayant pour équations

$$x = ax \quad \text{et} \quad y = bx,$$

fait avec l'axe des x a, comme on sait, pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

Pour la tangente à l'hélice on a

$$a = -\frac{2\pi y}{h} \quad \text{et} \quad b = +\frac{2\pi x}{h};$$

en nommant donc V l'angle que la tangente fait avec l'axe des z , ou avec l'axe du cylindre, ou en-

core avec la génératrice du point de contact, on aura

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 y^2}{h^2} + \frac{4\pi^2 x^2}{h^2}}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}} \quad [5]$$

quantité constante. Par conséquent, la courbe coupe toutes les génératrices du cylindre sous un angle constant. On reconnaît aisément que la cotangente de cet angle a pour valeur $\frac{h}{2\pi r}$.

V. Considérons maintenant deux points quelconques M et N (fig. 3), placés sur l'hélice à une distance finie l'un de l'autre. Menons les génératrices MP et NQ. Par le point N menons un plan perpendiculaire à l'axe; et du point O' où ce plan rencontre cet axe, décrivons l'arc de cercle NH terminé au prolongement de la génératrice MP. Enfin, joignons OP, OQ, O'H, O'N. D'après ce qui a été établi plus haut, on aura

$$NQ = AQ \cdot \frac{h}{2\pi r} = AOQ \cdot \frac{h}{2\pi r},$$

$$MP = AP \cdot \frac{h}{2\pi r} = AOP \cdot \frac{h}{2\pi r},$$

d'où $NQ - MP = (AOQ - AOP) \frac{h}{2\pi r},$

ou $MH = POQ \cdot \frac{h}{2\pi r} \quad [6]$

Supposons que le cylindre tourne autour de son axe d'une quantité angulaire égale à POQ, le point N viendra en H. Supposons ensuite que le cylindre s'abaisse, sans tourner, d'une quantité égale à HM, le point H viendra en M. Si les deux mouvements ont lieu à la fois, le point N viendra en M. On voit donc que si le cylindre prend un double mouvement de rotation autour de son axe et de translation parallèlement à cet axe, de haut en bas, tels qu'il y ait entre l'angle décrit autour de l'axe et le chemin parcouru parallèlement à l'axe, la proportion

$$MH : h = POQ : 2\pi,$$

le point N ne quittera pas l'hélice. Et comme on en pourrait dire autant de tout autre point de l'hélice, on voit que, dans ce mouvement du cylindre, l'hélice devenue mobile ne cessera pas de coïncider avec sa position primitive.

L'hélice est la seule courbe à double courbure qui jouisse, comme la droite et le cercle, de la propriété de pouvoir glisser ainsi sur elle-même sans cesser de coïncider avec sa première position.

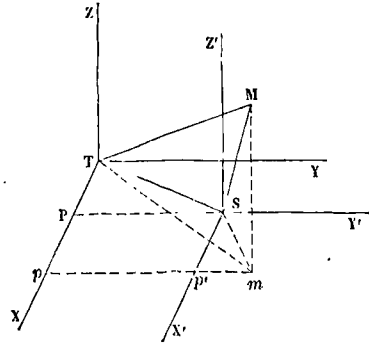
VI. Les applications de l'hélice sont très-nombreuses. Ses propriétés servent de base à la construction et à l'emploi de la vis (Voy. ce mot), qui se retrouve, soit comme machine, soit comme simple organe de transformation de mouvement, dans un grand nombre d'appareils.

HÉLICE PROPULSIVE. Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES.

HÉLIOCENTRIQUE (de ἥλιος, soleil, et de κέντρον, centre), qu'on a pour centre celui du soleil. Se dit de la longitude et de la latitude des astres, et particulièrement des planètes, dans l'hypothèse où l'observa-

teur serait placé au centre du soleil. On passe des coordonnées géocentriques d'un astre, ou d'un point quelconque de l'espace, à ses coordonnées héliocentriques, ou *vice versa*, à l'aide de formules qui peuvent être établies de la manière suivante.

Soient T le centre de la terre et S le centre du



soleil. Soient TX la ligne des équinoxes, TY la ligne des solstices, TZ l'axe de l'écliptique; ces trois droites formeront un système de coordonnées rectangulaires. Menons SX' parallèle à TX, SY' parallèle à TY et SZ' parallèle à TZ; les coordonnées du point S seront

$$X = TP, \quad Y = SP \quad \text{et} \quad Z = 0.$$

Soit M un point quelconque de l'espace; abaissons Mm perpendiculaire sur le plan XTY de l'écliptique, et mp'p perpendiculaire sur TX; les coordonnées du point M par rapport aux axes TX, TY, TZ seront $x = Tp, \quad y = mp, \quad z = Mm;$ celles de ce même point par rapport aux axes SX', SY', SZ' seront

$$x' = Sp', \quad y' = mp', \quad z' = Mm.$$

Et l'on sait qu'entre ces coordonnées on aura les relations

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z. \quad [1]$$

Cela posé, soit L la longitude du soleil, ou l'angle SIX; soit l la longitude géocentrique du point M, ou l'angle mTX, et λ sa latitude géocentrique, ou l'angle MTm; soit l' la longitude héliocentrique du même point, ou l'angle mSX', et λ' sa latitude héliocentrique, ou l'angle MSm; posons

$$TS = R, \quad TM = \rho \quad \text{et} \quad SM = \rho'.$$

On trouve aisément sur la figure les relations

$$X = R \cos L; \quad Y = R \sin L;$$

$$x = Tm \cdot \cos l = \rho \cos \lambda \cos l;$$

$$y = Tm \cdot \sin l = \rho \cos \lambda \sin l;$$

$$z = \rho \sin \lambda;$$

$$x' = Sm \cdot \cos l' = \rho' \cos \lambda' \cos l';$$

$$y' = Sm \cdot \sin l' = \rho' \cos \lambda' \sin l';$$

$$z' = \rho' \sin \lambda'.$$

Substituant dans les équations [1] on obtient les relations

$$\rho' \cos \lambda' \cos l' = \rho \cos \lambda \cos l - R \cos L, \quad [2]$$

$$\rho' \cos \lambda' \sin l' = \rho \cos \lambda \sin l - R \sin L, \quad [3]$$

$$\rho' \sin \lambda' = \rho \sin \lambda. \quad [4]$$

Si l'on élève les deux membres de chacune de ces équations au carré, qu'on les ajoute membre à membre, et qu'on divise par ρ^2 , on obtient, en désignant par n le rapport de R à ρ ,

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = 1 + n^2 - 2n \cos \lambda \cos (l - L). \quad [5]$$

Divisant membre à membre l'équation [3] par l'équation [2], puis divisant par ρ les deux termes de la fraction obtenue, on trouve

$$\text{tang } l' = \frac{\cos \lambda \sin l - n \sin L}{\cos \lambda \cos l - n \cos L} \quad [6]$$

Enfin l'équation [4] donne

$$\sin \lambda' = \frac{\sin \lambda}{\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)} \quad [7]$$

La relation [5] fera connaître $\frac{\rho'}{\rho}$, et par suite ρ' ; la relation [6] donnera l' , et la relation [7] fournira λ' ; ainsi les formules [5], [6], et [7] serviront à passer des coordonnées géocentriques aux coordonnées héliocentriques.

Si l'on veut passer au contraire des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques, on fera passer les termes $R \cos L$ et $R \sin L$, des équations [2] et [3], du second membre dans le premier, et, par un calcul tout semblable à celui qu'on vient de faire, on trouvera, en désignant par n' le rapport de R à ρ' ,

$$\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = 1 + n'^2 + 2n' \cos \lambda' \cos (l' - L), \quad [8]$$

$$\text{tang } l = \frac{\cos \lambda' \sin l' + n' \sin L}{\cos \lambda' \cos l' + n' \cos L}, \quad [9]$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \lambda'}{\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)}, \quad [10]$$

formules qui feront connaître successivement $\frac{\rho}{\rho'}$, l et λ .

HÉLIOMÈTRE (du grec $\eta\lambda\iota\omicron\varsigma$, soleil, et $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$, mesure), micromètre à double image imaginé primitivement par Bouguer, en 1747, pour mesurer le diamètre apparent du soleil, mais perfectionné depuis par Savery, Dollond, Frauenhofer, et employé à divers autres usages, en particulier à la recherche de la parallaxe des étoiles. (Voy. MICRO-MÈTRE.)

HÉLIOTROPE DE GAUSS (du grec $\eta\lambda\iota\omicron\varsigma$, soleil, et $\tau\rho\acute{\epsilon}\pi\omega$, tourner), appareil employé comme signal dans les opérations géodésiques. (Voy. SIGNAUX.)

HÉMISPÈRE, chacune des deux parties égales de la sphère terrestre ou de la sphère céleste séparées par l'équateur.

HÉRISON, poulie dont la circonférence est armée de saillies destinées à se loger dans les mailloons d'une chaîne sans fin. (Voy. COURROIE SANS FIN.)

HERPOLODIE (pour *Poltherpodie*, du grec $\pi\acute{o}\lambda\omicron\varsigma$, pôle, $\epsilon\rho\pi\omega$ je serpente, et $\delta\omicron\varsigma$, chemin; *route serpentine du pôle*), nom donné par M. Poinso à la courbe formée par la série des points de contact de l'ellipsoïde central avec un plan fixe (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ). Voy. la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, par M. Poinso.

HERSE, projection générale des chevrons et empanons d'un comble sur les plans de lattis supérieurs, ramenés en suite dans un même plan. (Voy. GROUPE, NOUVE.)

HERSE. Voy. MACHINES AGRICOLES.

HEURE (DÉTERMINATION DE L'). Observations et calculs nécessaires pour obtenir l'heure avec exactitude, et pour régler en conséquence les horloges et les chronomètres.

I. La méthode la plus précise est la *méthode des hauteurs correspondantes*, qu'on emploie dans les observatoires. On observe au THÉODOLITE (Voy. ce mot) la hauteur d'un astre, d'une étoile par exemple, trois ou quatre heures avant son passage au méridien, et l'on note exactement l'heure à laquelle l'étoile vient traverser le fil horizontal du réticule de la lunette fixée au limbe vertical. Sans déranger cette lunette par rapport à son limbe, on fait ensuite tourner le cercle vertical de manière à lui faire faire avec le méridien, du côté de l'ouest, un angle égal à celui qu'il faisait vers l'est au moment de la première observation. On attend alors que l'étoile vienne de nouveau traverser le fil horizontal du réticule; et l'on note l'heure précise de ce deuxième passage. La moyenne entre les heures observées est évidemment celle que marquait l'horloge au moment du passage de l'étoile au méridien. Pour plus d'exactitude, on fait ainsi plusieurs observations avant le passage de l'étoile au méridien, et on les répète pour les mêmes hauteurs après ce passage; chaque couple d'observations correspondantes donne une valeur de l'heure marquée par l'horloge au moment du passage au méridien, et l'on prend la moyenne. Il est clair que, pour une étoile, les observations doivent se faire trois ou quatre heures avant minuit, et trois ou quatre heures après minuit; la moyenne calculée est l'heure de l'horloge à minuit. On choisit pour ce genre d'observations une étoile dont la déclinaison ne dépasse pas 30 degrés, parce qu'au delà la lenteur de son mouvement rend incertaine l'observation de l'heure précise du passage de l'étoile sous le fil horizontal.

Au lieu d'une étoile, on peut observer la hauteur du soleil, c'est-à-dire de l'un de ses bords. Les observations se font alors trois ou quatre heures avant midi et trois ou quatre heures après; la moyenne calculée est l'heure de l'horloge à midi vrai.

II. Mais lorsqu'on opère avec le soleil, comme sa déclinaison varie, on a à faire une correction à laquelle on a donné le nom d'*équation des hauteurs correspondantes*. Considérons le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith et le centre du soleil; les trois côtés de ce triangle sont la distance zénithale z du soleil, sa distance polaire qui est le complément de sa déclinaison, ou $90^\circ - D$, enfin la distance zénithale du pôle, qui est le complément de la latitude du lieu, ou $90^\circ - \lambda$. Dans ce triangle, l'angle opposé à z est l'angle horaire AI du soleil. On a donc

$$\cos z = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D \cos AI, \quad [1]$$

d'où l'on tire en différentiant par rapport à AI et à D

$$dAI = \left(\frac{\text{tang } \lambda}{\sin AI} - \frac{\text{tang } D}{\text{tang } AI} \right) dD$$

Les variations correspondantes de D et de AI qui ont lieu dans l'intervalle des deux observations étant très-faibles, on peut dans l'expression ci-dessus remplacer le rapport de dAI à dD par celui de ΔAI à ΔD , et écrire

$$\Delta AI = \left(\frac{\text{tang } \lambda}{\sin AI} - \frac{\text{tang } D}{\text{tang } AI} \right) \Delta D. \quad [2]$$

La *Connaissance des temps* donne pour chaque jour de l'année la déclinaison du soleil, et, dans une colonne intitulée *Diff.*, la variation de cette déclinaison d'un jour à l'autre; on prend cette différence

pour le jour de l'observation et pour le jour suivant ; c'est la quantité dont la déclinaison varie en 24 heures à l'époque de l'année que l'on considère ; une simple proportion donne la quantité dont elle varie dans l'intervalle des deux observations correspondantes. C'est la valeur de ΔD ; la formule [2] donne $\Delta . AI$, en y mettant pour AI sa valeur approchée, calculée d'après la différence d'heure des deux observations. Si h et h' sont les heures de ces observations, $\frac{1}{2}(h' - h)$, converti en degrés, sera la valeur qu'on pourra mettre pour AI . Cela posé, si H désigne l'heure de l'horloge à midi vrai, on aura, en convertissant AI en temps,

$$H = h + \frac{1}{15} AI \quad \text{et} \quad H = h' - \frac{1}{15} (AI + \Delta . AI),$$

d'où, en ajoutant et divisant par 2,

$$H = \frac{1}{2} (h + h') - \frac{1}{30} \Delta AI.$$

Supposons, par exemple, que, la latitude étant $41^{\circ} 53' 52''$, on ait trouvé pour l'heure de la première observation $8^h 48^m 15^s$, et pour l'heure de la seconde $15^h 1^m 15^s$. On calculera d'abord la valeur approchée de AI ; pour cela on fera la différence des heures observées ; on trouvera $6^h 13^m$, dont la moitié est $3^h 6^m 30^s$. Ce temps, converti en degrés en multipliant par 15, donne pour l'angle horaire approché $46^{\circ} 30'$. Supposons maintenant que le jour de l'observation soit le 25 août 1862 ; la *Connaissance des temps* donne pour la déclinaison du soleil ce jour-là $D = 10^{\circ} 46' 46''$. La différence tabulaire est $20' 49''$; c'est la quantité dont la déclinaison diminue en 24 heures, puisque l'époque considérée est comprise entre le solstice d'été et le solstice d'hiver. Par une proportion on trouve aisément qu'en $6^h 13^m$ la diminution est de $5' 23''$, 5 ; telle est la valeur de ΔD ; on doit la regarder comme négative, puisque la déclinaison va en diminuant. On trouvera ensuite

$$\frac{\text{tang } \lambda}{\sin AI} = \frac{\text{tang } 41^{\circ} 53' 52''}{\sin 46^{\circ} 30'} = 1,23685,$$

puis

$$\frac{\text{tang } D}{\text{tang } AI} = \frac{\text{tang } 10^{\circ} 46' 46''}{\text{tang } 46^{\circ} 30'} = 0,18067.$$

Par suite

$\Delta AI = (1,23685 - 0,18067) (5' 23'', 5) = 5' 41'', 7$, quantité qu'il faut également regarder comme négative, puisque AI décroît avec D .

Enfin

$$H = \frac{1}{2} (8^h 48^m 15^s + 15^h 1^m 16^s) + \frac{1}{30} (5' 47'', 7),$$

ou

$$H = 11^h 54^m 45^s + 11^s, 4 = 11^h 54^m 56^s, 4,$$

c'est-à-dire que le soleil aurait passé au méridien à l'instant où l'horloge marquait $11^h 54^m 56^s$ et $\frac{4}{10}$ dixièmes de seconde.

Cette méthode peut être employée même à bord, à l'aide du sextant. Elle offre l'avantage d'être indépendante des erreurs qui peuvent affecter l'observation des hauteurs ; mais elle a un grand inconvénient : c'est que dans l'intervalle des deux observations le temps peut se couvrir et faire manquer l'opération.

III. L'heure peut être déterminée par une ou plusieurs observations de hauteurs absolues. Le TRIANGLE DE POSITION (*Voy.* ce mot) qui a pour

sommets le pôle, le zénith et le centre de l'astre, fournit la relation (*Voy.* la formule [A] de l'art. cité) :

$$\sin \frac{1}{2} AI = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin(S-h)}{\cos \lambda \cdot \cos \delta}}, \quad [3]$$

dans laquelle AI désigne l'angle horaire, c'est-à-dire l'angle en P , h la hauteur observée, λ la latitude, δ la distance polaire de l'astre, ou le complément de sa déclinaison, et où S est donné par la relation

$$2S = h + \lambda + \delta.$$

L'angle horaire AI étant calculé par cette formule, on le convertira en temps, et, en l'ajoutant à l'heure observée, ou en l'en retranchant, selon que l'observation aura été faite avant ou après le passage au méridien, on aura l'heure que marquait l'horloge à l'instant de ce passage. On ne se contente pas d'une seule observation, on en fait un certain nombre ; on prend la moyenne des hauteurs et la moyenne des heures observées, et c'est à ces deux moyennes qu'on applique le calcul précédent. Ceci suppose que, pendant la durée des observations, les hauteurs varient proportionnellement au temps, ce qui est sensiblement exact si ces observations sont suffisamment rapprochées, et si l'on opère près du premier vertical. Dans l'application de la méthode qui nous occupe, les hauteurs doivent être corrigées de la *réfraction*, de la *dépression*, et s'il s'agit du soleil, il faut en outre faire la correction de la parallaxe. — De plus, comme on n'observe que la hauteur de l'un des bords du soleil, il faudrait encore tenir compte de son demi-diamètre apparent ; mais on peut s'en dispenser en combinant les observations par couples, dans lesquels on observe alternativement le bord supérieur et le bord inférieur. Quant à la déclinaison, s'il s'agit du soleil, il faut pour la déterminer connaître au moins approximativement la longitude du lieu de l'observation, afin de savoir l'heure de Paris correspondante à l'instant de l'observation. La connaissance de la différence entre cette heure et le midi moyen de Paris permet de calculer par une simple proportion la variation de la déclinaison entre les deux instants, au moyen de la différence tabulaire, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut.

Comme exemple de la disposition des calculs, nous donnerons la détermination suivante, d'après le *Cours d'Observations et de Calculs nautiques* de M. Krantz à l'École navale.

ÉNONCÉ. Le 5 novembre 1854, vers $20^h 7^m$, temps moyen, d'un lieu situé par $47^{\circ} 45' 11''$ de latitude Nord, et $160^{\circ} 35' 0''$ de longitude Ouest, on a observé la hauteur du bord inférieur du soleil = $10^{\circ} 32' 44''$; l'œil était élevé de $5^m, 7$. On demande l'heure. T. M., du lieu.

ÉLÉMENTS DU CALCUL.

Heure estimée du lieu.....	20 ^h 7 ^m 0 ^s
Longitude O en temps.....	+ 10 42 20
Heure estimée de Paris, le 6....	6 ^h 49 ^m 20 ^s
Déclinaison de 0 ^h T. M. de Paris,	
le 6.....	— 15 ^o 59' 12",5
Changement en 24 ^h	— 17' 52,7
Partie proportionnelle pour 6 ^h	
49 ^m 20 ^s	— 5 4,7
Déclinaison calculée.....	— 16 ^o 4' 17",2
Distance polaire δ	106 ^o 4' 17",2
Hauteur observée.....	10 ^o 32' 44"

Report.....	10° 32' 44"
Dépression (Voy. ce mot) pour 5 ^m , 7	— 4' 14"
Hauteur apparente ☉.....	10° 28' 30"
Réfraction — parallaxe (Voy. ces mots).....	— 4 58
Hauteur vraie ☉.....	10° 23' 32"
Demi-diamètre.....	+ 16' 10"
Hauteur vraie du centre, ou h...	10° 39' 42"

CALCUL.

h = 10° 30' 42"	
λ = 47° 45' 11"; compl ^t log cos.....	0,1724192
δ = 106° 4' 17"; compl ^t log sin.....	0,0173054
2S = 164° 29' 10"	
S = 82° 14' 35"; log cos.....	9,1302404
S — h = 71° 34' 53"; log sinus.....	9,9771625
Somme.....	19,2971275

Demi-somme, ou log sin $\frac{1}{2}$ AI.....	9,6485637
$\frac{1}{2}$ AI.....	26° 26' 12", 1
AI.....	52° 52' 24", 2

Angle horaire en temps..... 3^h 31^m 29^s, 6
 C'est le temps qui reste à s'écouler jusqu'au midi du 6 novembre; en le retranchant de 24^h on aura l'heure vraie du lieu le 5..... = 20^h 28^m 30^s, 4
 Équation du temps (Voy. ce mot), calculée pour l'heure de Paris. + 11^h 43^m 47^s, 16

Heure, temps moyen, du lieu le
 5 novembre..... 20^h 12^m 17^s, 56
 ou, en temps civil, 8^h 12^m 17^s, 56 du matin, le 6 novembre.

IV. Il est utile de se rendre compte de l'influence que peut avoir sur la détermination de l'angle horaire AI une erreur commise sur la distance zénithale x ou sur la latitude λ. Pour cela, différencions la relation [1] par rapport à AI et à x, nous trouverons

$$d. AI = \frac{\sin x}{\cos \lambda \cos D \sin AI} . dx. \quad [4]$$

Or, si A désigne l'azimut du côté x sur l'horizon du lieu, 180° — A est l'angle opposé à 90° — D dans le triangle sphérique qui a fourni la relation [1]; on a donc, par la proportionalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés,

$$\frac{\sin AI}{\sin A} = \frac{\sin (90^\circ - D)}{\sin x},$$

d'où cos D . sin AI = sin x sin A.
 Faisant cette substitution, on obtient

$$d. AI = \frac{dx}{\cos \lambda \sin A}. \quad [5]$$

Cette relation montre que l'erreur commise sur l'angle horaire est toujours plus grande que l'erreur commise sur la distance zénithale. On voit de plus que d.AI est minimum pour A = 90°; c'est donc dans le voisinage du premier vertical (Voy. ce mot) que l'observation est la plus avantageuse. En même temps, la première forme [4] fait voir que l'erreur sur AI est d'autant moindre, pour une même erreur commise sur x, que la distance zénithale est elle-même plus petite, ou que la hauteur de l'astre observé est plus grande. On peut remarquer en même temps que d.AI change de signe avec A, c'est-à-dire suivant que l'observation est faite le matin ou le soir.

Différentions de même la relation [1] par rapport à AI et à λ, il viendra

$$d. AI = \frac{\cos \lambda \sin D - \sin \lambda \cos D \cos AI}{\cos \lambda \cos D \sin AI} d\lambda. \quad [6]$$

Or on sait qu'entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique on a la relation
 $\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \sin c \cos A.$

Si l'on applique cette formule en y remplaçant a par 90° — D, b par 90° — λ, C par AI, c par x, et l'angle A opposé à a, par l'angle 180° — A opposé à 90° — D, il vient

$$\sin D \cos \lambda - \cos D \sin \lambda \cos AI = - \sin x \cos A.$$

En même temps, on peut, au dénominateur de l'expression [6] substituer au produit cos D sin AI son égal sin x sin A; il vient ainsi

$$d. AI = - \frac{\sin x \cos A}{\cos \lambda \sin x \sin A} . d\lambda = - \frac{\cot. A}{\cos \lambda} . d\lambda. \quad [7]$$

Cette relation montre que l'erreur commise sur l'angle horaire par suite de l'erreur dont la latitude peut être affectée, est d'autant moindre que A approche plus de 90°; et lorsque l'observation est faite dans le premier vertical, l'erreur d.AI devient nulle indépendamment de la latitude. Pour calculer d.AI sans se servir de l'azimut A, il faut conserver la formule [6] que l'on peut mettre sous la forme

$$d. AI = \left(\frac{\text{tang } D}{\sin AI} - \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } AI} \right) d\lambda.$$

V. De ces calculs il est facile de déduire l'état de l'horloge ou du chronomètre employé, c'est-à-dire son avance ou son retard soit sur le temps sidéral, soit sur le temps moyen. Supposons que l'on ait observé le Soleil. 1° Si le chronomètre est réglé sur le temps sidéral, il devra marquer, au moment du passage au méridien, l'ascension droite du Soleil à midi vrai. Or, cette ascension droite est donnée par la Connaissance des temps pour midi moyen; on l'obtiendra pour midi vrai en faisant la correction indiquée par cette proportion :

24 h. : la différence d'ascension droite en un jour (colonne diff.) = la différence entre midi vrai et midi moyen, c'est-à-dire l'équation du temps : un quatrième terme qui sera la correction.

Elle sera de même sens que l'équation du temps. La comparaison entre le résultat obtenu et l'heure indiquée par le chronomètre donnera l'état de cet instrument.

2° Si le chronomètre est réglé sur le temps moyen, il devra marquer, au moment du passage au méridien, le temps moyen à midi vrai. Or ce temps est donné pour Paris par la Connaissance des temps; on l'obtiendra pour le lieu de l'observation en faisant une correction analogue à la précédente et indiquée par la proportion :

24 h. : la variation de l'équation du temps en un jour (colonne diff.) = la longitude du lieu de l'observation exprimée en temps : un quatrième terme qui sera la correction.

Si l'équation du temps est croissante, la correction sera positive ou négative suivant que la longitude sera occidentale ou orientale; l'inverse aura lieu si l'équation du temps est décroissante.

Supposons en second lieu que l'on ait observé une étoile. 3° Si le chronomètre est réglé sur le temps sidéral, il devra marquer, au moment du passage de cette étoile au méridien, l'ascension droite apparente de cette étoile, c'est-à-dire l'ascension

droite corrigée de la précession, de la nutation et de l'aberration (Voy. ces mots). 4^e Si le chronomètre est réglé sur le temps moyen, le plus simple serait de convertir ses indications en temps sidéral (Voy. CONVERSION DES TEMPS).

L'observation répétée de l'état d'une horloge ou d'un chronomètre fera connaître sa MARCHÉ (Voy. ce mot).

Quant à l'heure vraie de l'observation, si c'est le Soleil que l'on a observé, elle est donnée par l'angle horaire. Elle a pour expression cet angle converti en temps, si l'observation a été faite après midi, ou le complément à 12 h. si elle a été faite avant midi. Si c'est une étoile qui a été observée, l'heure vraie de l'observation est la somme de l'ascension droite de l'étoile et de l'angle horaire converti en temps si l'observation a été faite après midi, ou la différence entre l'ascension droite et l'angle horaire, si l'observation a été faite avant midi.

VI. Par l'une des méthodes indiquées plus haut, on peut obtenir l'heure à terre avec une grande exactitude, si l'on opère avec un théodolite et que la latitude soit exactement connue. Avec un simple sextant et un horizon artificiel on peut, dans les circonstances les plus favorables, obtenir l'heure à une seconde près. En mer, vu l'incertitude qui affecte toujours la dépression, l'heure ne peut être obtenue qu'à 2, 3 ou même 4 secondes près. Mais on atténue les erreurs en combinant convenablement les observations; et, même en mer, on peut arriver à obtenir l'heure à $\frac{1}{2}$ seconde près.

(Voy., pour la manière de combiner les observations, la méthode de M. Soldner, insérée dans les *Éphémérides de Berlin* pour 1818, et reproduite dans le *Traité de Géodésie* de Puissant, tome I, n^o 308. — Voy. également le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier, le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, p. 224 et suiv., et le *Cours de Géodésie* de M. Laussedat à l'École polytechnique.)

HEURE SIDÉRALE, 24^e partie du jour sidéral. — Temps sidéral écoulé depuis le passage du POINT VERNAL (Voy. ce mot) au méridien du lieu. Connaissant l'angle que le cercle horaire de ce point fait avec le cercle horaire d'une étoile, il suffit, pour avoir l'heure sidérale, d'observer l'instant du passage de cette étoile au méridien du lieu (Voy. ANGLE HORAIRE).

HOMALOGRAPHIQUE (CANEVAS), canevas imaginé par M. Babinet pour le tracé des cartes géographiques. Les parallèles y sont représentés par des lignes droites, et les méridiens par des ellipses. Le rapport des surfaces est rigoureusement conservé. (Voy. CARTES GÉOGRAPHIQUES.)

HORAIRE, qui se rapporte aux heures. On nomme *cercles horaires* les grands cercles qui passent par les pôles du monde et qui partagent l'équateur en 24 parties égales.

HORIZON, grand cercle de la sphère céleste, dont le plan est perpendiculaire à la verticale d'un lieu, et qui divise la sphère en deux hémisphères, dont un seul est visible. Quand on a égard aux dimensions de la terre, on appelle *horizon rationnel* le cercle que nous venons de définir; et l'on nomme *horizon sensible* un plan mené perpendiculairement à la verticale par le point de la surface terrestre

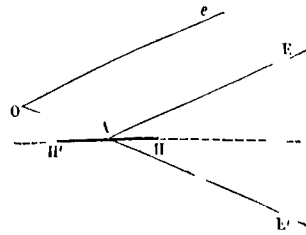
que l'on considère. L'intersection de ce plan avec la sphère céleste se confond d'ailleurs avec l'horizon rationnel, attendu que le rayon du globe est négligeable vis-à-vis du rayon que l'on attribue à la sphère céleste.

Au lieu d'*horizon rationnel*, on dit aussi *horizon céleste*.

C'est sur l'horizon que se comptent les AZIMUTS (Voy. ce mot).

HORIZON ARTIFICIEL, instrument qui sert à mesurer, à terre, la hauteur des astres avec un sextant ou avec un cercle à réflexion. Il se compose d'une glace plane, ordinairement circulaire, dépolie et noircie à sa face inférieure, et enchâssée dans une monture en cuivre qui repose elle-même sur un trépied à vis calantes. — Pour donner à la glace une position parfaitement horizontale, on y pose un NIVEAU A BULLE D'AIR (Voy. ce mot) parallèlement à la droite qui joint deux des vis calantes; et l'on fait mouvoir ces vis en sens contraire jusqu'à ce que la bulle du niveau vienne se placer entre ses repères; on place alors le niveau dans une direction perpendiculaire à la première, et l'on se sert de la troisième vis calante pour ramener la bulle entre ses repères, si elle s'en est d'abord éloignée. On est sûr alors que la surface de la glace renferme deux horizontales, et qu'elle est par conséquent horizontale elle-même.

Dans les observatoires, on emploie souvent comme horizon artificiel un bain de mercure, d'huile ou même d'eau. Pour mesurer avec un horizon artificiel HH' la hauteur d'une étoile E, c'est-à-dire l'an-



gle que fait avec l'horizon le rayon visuel Oe mené à cette étoile, on mesure l'angle eOE' que fait ce rayon visuel avec le rayon OAE dirigé vers l'image E' de l'étoile dans le miroir horizontal qui forme la partie essentielle de l'horizon artificiel. L'angle eOE' est le double de l'angle EAH que l'on cherche; car, les lignes Oe et AE pouvant être regardées comme parallèles, à cause de l'éloignement du point où elles se rencontrent, on a $eOE' = EAE'$, ou $eOE' = 2.EAH$, en vertu des lois de la réflexion.

On se sert aussi de l'horizon artificiel, et particulièrement du bain de mercure, pour donner à l'axe d'une lunette une position verticale. (Voy. LUNETTE.)

Les trépédations du sol, notamment dans le voisinage des grandes villes, agitent la surface du mercure au point de faire disparaître les images. Pour remédier à cet inconvénient, on place le bain dans une capsule circulaire. Les ondulations du mercure sont alors concentriques; en sorte que si l'on pointe la lunette de manière que l'un des fils aille du centre à la circonférence, l'image de ce fil

reste visible, ce qui suffit ordinairement. Cette méthode est due au colonel Hossard.

HORLOGE, instrument de précision employé pour la mesure du temps. Dans une horloge comme dans un **CHRONOMÈTRE** (*Voy.* ce mot), on distingue le *moteur*, le *rouage*, le *régulateur*, l'*échappement*, le *mécanisme du remontage*; pour l'horloge, il faut ajouter de plus la *sonnerie*.

Le *moteur* d'une horloge est un poids suspendu à l'extrémité d'une corde flexible qui s'enroule sur un cylindre horizontal auquel elle est fixée; sur l'axe de ce cylindre est montée une roue dentée qui forme le premier mobile du rouage.

Le *rouage*, indépendamment de la roue dont on vient de parler, et qui porte le nom de *roue de tambour*, comprend en outre la *roue de temps*, la *roue de minutes*, la *petite moyenne* et la *roue d'échappement*, dont chacune porte sur son axe un pignon qui engrène avec la roue précédente. La figure 1 montre la disposition adoptée pour ces

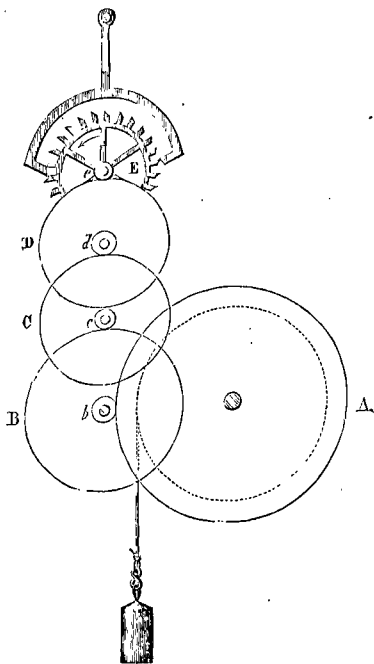


Fig. 1.

roues dans plusieurs horloges astronomiques anciennes, qui peuvent être prises pour modèles à certains égards.

Voici les nombres de dents des roues et pignons qui composent ce rouage :

Roue de tambour A.....	112 dents.
Pignon de temps b.....	16 —
Roue de temps B.....	106 —
Pignon de minutes c.....	14 —
Roue de minutes C.....	96 —
Pignon de petite moyenne d.	12 —
Petite moyenne D.....	90 —
Pignon d'échappement e.....	12 —
Roue d'échappement E.....	30 —

Comme une dent de cette dernière échappe toutes

les deux secondes, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, la roue d'échappement fait un tour en 60 secondes ou 1 minute, et par conséquent 60 tours en une heure. Il est facile ensuite de conclure des nombres ci-dessus

que la petite moyenne fait un tour en 7 minutes $\frac{1}{2}$,		
— roue de minutes —	—	60 ^m ou 1 heure,
— roue de temps —	—	7 h. $\frac{4}{7}$,
— roue de tambour —	—	53 h.

Et il en résulte que si la corde à laquelle le poids est suspendu est enroulée de 4 tours sur le tambour, l'horloge pourra marcher sans être remontée pendant 212 heures, ou 8 jours et 20 heures; elle marcherait plus d'un mois si la corde s'enroulait de 14 tours.

Dans le modèle représenté par la figure 1, l'axe de la roue des minutes correspond au centre du cadran, et porte l'aiguille des minutes; un canon qui enveloppe cet axe porte l'aiguille des heures; il est mis en mouvement par un engrenage de renvoi, comme dans la minuterie des **MONTRES** et **CHRONOMÈTRES** (*Voy.* ces mots). Quant à l'aiguille des secondes, elle est montée sur l'axe de la roue d'échappement et parcourt un petit cadran séparé, placé entre le centre du grand cadran et le point qui répond à midi. Dans les horloges modernes, les secondes sont *concentriques*, c'est-à-dire que les trois aiguilles tournent autour du même axe; c'est l'axe de la roue d'échappement qui occupe le centre du cadran et porte l'aiguille des secondes; un canon enveloppant cet axe porte l'aiguille des minutes, et un second canon enveloppant le premier porte l'aiguille des heures; ces canons sont mis en mouvement par des engrenages de renvoi animés chacun par l'un des mobiles du rouage. On conçoit d'ailleurs que la disposition et les nombres du rouage puissent varier d'une infinité de manières, selon les idées de chaque constructeur, tout en atteignant le même but.

Le *régulateur* des horloges est un **PENDULE COMPOSÉ** (*Voy.* ce mot), formé d'une lentille fixée à l'extrémité d'une tige métallique, mobile autour d'un axe horizontal placé à l'autre extrémité. Deux modes de suspension ont été successivement employés pour le pendule : la suspension à *couteau*, analogue à celle du fléau d'une balance de précision, et la suspension à *ressorts*; on a renoncé au premier de ces deux modes qui laissait trop d'influence au frottement, et l'on a adopté le mode de suspension à *deux ressorts*, représenté par la figure 2. Il se compose d'une sorte de cadre AA'B'B dont les deux montants verticaux sont deux lames d'acier R et R' formant ressorts; la traverse AA' est fixe, et le pendule P est adapté à la traverse BB'. Il résulte de cette disposition que le pendule peut osciller perpendiculairement au plan de la figure, par suite de la flexibilité des ressorts, et qu'aucun frottement ne s'oppose à ce mouvement oscillatoire.

Dans les horloges astronomiques, la longueur du pendule est réglée de manière qu'il batte exactement la seconde; cette condition ayant été remplie à peu près par le constructeur, on parvient à la remplir rigoureusement en faisant varier la hauteur d'un écrou E vissé à l'extrémité du pendule.

Pour que les variations de la température n'influent pas sur la longueur du pendule, on emploie

soit le *pendule compensateur à grille*, soit le *pendule compensateur à mercure*, de Graham. Le compensateur à grille est décrit dans tous les traités de Physique. La lentille est adaptée à une traverse de

laiton *aa* (fig. 3), d'où partent deux tiges de fer fixées à leur extrémité supérieure à une traverse semblable *bb*; de cette seconde traverse partent deux tiges de zinc fixées à leur extrémité inférieure à une troisième traverse *cc*; sur celle-ci est fixée une douille de laiton percée de trous équidistants, dans laquelle s'engage une tige de fer, également percée de trous, qu'on y fixe par une goupille *m*, et qui, après avoir traversé la traverse *bb*, va s'adapter à la suspension à ressorts. Si la température vient à s'élever, toutes les tiges s'allongent, mais inégalement; la dilatation de la tige de fer centrale et de la douille de cuivre abaisse la traverse *cc*; la dilatation des tiges de zinc élève la



Fig. 2.

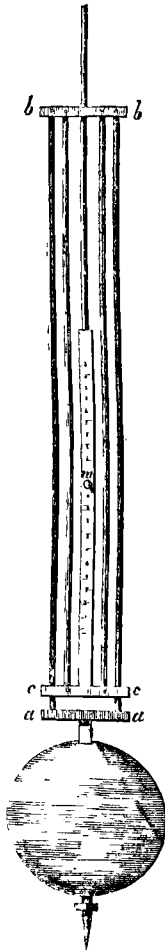


Fig. 3.

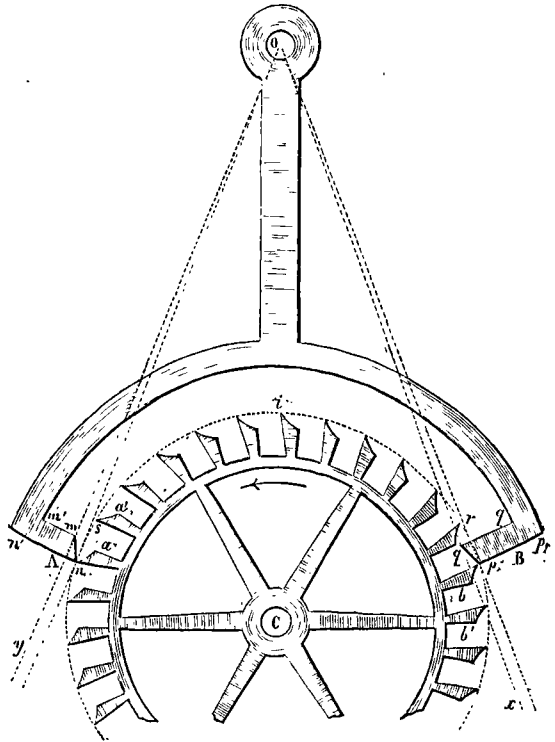


Fig. 4.

traverse *bb* d'une quantité plus grande; mais en même temps l'allongement des tiges de fer abaisse la traverse *aa*, et par suite la lentille. Ces effets sont combinés de manière que le CENTRE D'OSCILLATION (*Voy.* ce mot) reste à la même hauteur; et, comme on ne pourrait y parvenir exactement par le calcul, on fait varier le point d'attache de la tige centrale à la douille de laiton, en déplaçant convenablement la goupille, pour obtenir le résultat qu'on cherche.

Dans le compensateur de Graham, la lentille est remplacée par deux cylindres de verre contenant du mercure; quand la tige du pendule, en s'allongeant, abaisse les cylindres et tend à ralentir l'oscillation, le mercure, en se dilatant dans ces cylindres, tend à l'accélérer, et la hauteur du mercure est réglée de manière à obtenir la compensation.

L'échappement dans les horloges astronomiques

est celui qui porte le nom d'*échappement à ancre*, et qui a été perfectionné par Graham. Cet échappement est représenté figure 4. La roue C, de 30 dents, est la roue d'échappement, que le rouage fait mouvoir dans le sens indiqué par la flèche. La pièce AOB, liée avec le régulateur et oscillant avec lui, est l'ancre, qui a pour fonction d'arrêter et de laisser échapper alternativement les dents de la roue d'échappement. L'ancre est représentée dans la position qui répond à l'instant où le centre de gravité du régulateur se trouve dans la verticale du point de suspension O; la dent *a* est sur le point d'échapper. La dent *b* agit alors sur le plan incliné *pq* qui termine la branche B de l'ancre, et la force à marcher dans le sens de A vers B, en lui restituant la force vive précédemment perdue par la rencontre de l'ancre avec la roue: c'est ce qu'on appelle la *levée*; l'extrémité A s'étant rapprochée de la verti-

cale, la dent *a'* vient faire son repos sur l'arc *mm'* qui termine intérieurement la branche A; en même temps la dent *b* échappe. A l'oscillation contraire, la dent *b'* vient faire son repos sur l'arc *pp'* qui termine extérieurement la branche B; mais bientôt la dent *a'* agit sur le plan incliné *mn* qui termine la branche A, la force à marcher dans le sens de B vers A, en lui restituant de nouveau la force vive perdue : ce qui constitue une seconde levée; puis la dent *a'* échappe à son tour, et ainsi de suite. On voit qu'une dent échappe à chaque demi-oscillation; mais comme chacune doit échapper deux fois, d'abord à l'action de la branche B, puis à celle de la branche A, il n'échappe réellement qu'une dent en 2 secondes, ce qui fait 60 secondes ou 1 minute pour les 30 dents; la roue d'échappement fait donc un tour par minute.

Pour tracer cet échappement, on fait d'abord passer une circonférence par les extrémités de toutes les dents, et l'on détermine l'arc *nip* d'après le nombre de dents qu'on veut faire embrasser par les branches de l'ancre. On prend alors le milieu de l'arc *pr* compris entre la pointe de la dent extrême *b* et la pointe de la dent qui la suit dans le sens du mouvement; et l'on joint ce milieu au point *p*. On prend de même le milieu de l'arc *ns* compris entre la pointe de la dent extrême *a* et la pointe de la dent qui la précède dans le sens du mouvement, et l'on joint ce milieu au point *n*. Les deux lignes de jonction prolongées viennent se rencontrer en un point O, qui est le centre d'oscillation de l'ancre, et aussi du régulateur. Ayant déterminé l'angle α dont on veut que le régulateur s'écarte de la verticale dans un sens ou dans l'autre, on mène les droites *Ox* et *Oy* faisant respectivement avec *Op* et *On* des angles égaux à α . Du point O comme centre on décrit deux arcs de cercle, l'un *m'mq'* passant par les milieux des arcs *ns* et *pr*, l'autre *n'np'* passant par les points *n* et *p*; ces arcs limitent les branches de l'ancre; ils coupent *Ox* au point *q* et *Oy* au point *m*; on tire *pq* et *mn* qui représentent les plans inclinés sur lesquels s'effectuent les levées. Dans le cas de la figure, où l'arc *nip* embrasse les $\frac{12}{30}$ de la circonférence circonscrite aux dents, la distance des points O et C est un peu moindre que le triple du rayon de cette circonférence.

A l'axe de l'ancre est fixée une tige verticale qui se recourbe horizontalement à son extrémité inférieure et présente une fourche entre les branches de laquelle passe la tige du pendule; c'est par ce moyen que les oscillations du pendule se transmettent à l'ancre. Pour que cette transmission se fasse avec précision, il est nécessaire que l'axe horizontal de l'ancre soit dans le prolongement de l'axe d'oscillation du pendule.

On emploie assez souvent un échappement qui, sans être susceptible d'autant de précision que l'échappement à ancre, donne cependant de bons résultats, et est d'une construction plus facile; il s'agit de l'échappement à chevilles, qui a été perfectionné par Lepaute, et qui est représenté fig. 5. La roue d'échappement C porte 60 chevilles, dont 30 font saillie en avant de la figure et les 30 autres

en arrière; les premières sont teintées en noir sur la figure, les autres ne sont que ponctuées; ces chevilles sont des demi-cylindres, dont la figure montre la disposition. Sur l'axe O du régulateur

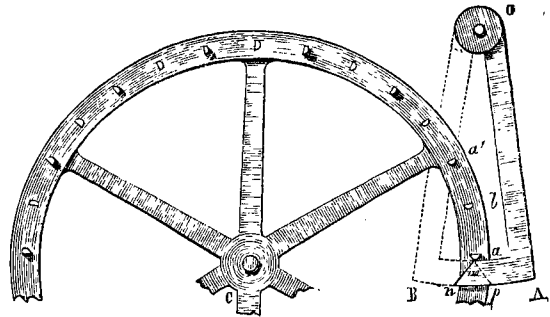


Fig. 5.

sont montés deux bras OAmn et OBmp qui oscillent avec lui; l'un de ces bras est un peu en avant de la roue et l'autre un peu en arrière. L'échappement est représenté à l'instant où la cheville *a* vient de faire son repos sur la partie Am du bras antérieur, laquelle est un arc décrit du point O. Le régulateur marchant de B vers A, la cheville *a* parcourt le plan incliné *mn*, qui constitue la levée, et rend à l'échappement, et par suite au régulateur, une portion de la force vive perdue; mais le bras OB s'étant ainsi avancé vers la droite, il arrête la dent *b*, qui fait son repos sur l'arc Bm. A la demi-oscillation suivante, la cheville *b* agit sur la levée *mp*, fait marcher l'échappement de A vers B, et la cheville *a'* vient à son tour faire son repos sur l'arc Am, et ainsi de suite. Une dent échappe à chaque demi-oscillation, c'est-à-dire à chaque seconde; la roue d'échappement fait donc un tour par minute.

Dans les horloges anciennes on faisait usage de l'échappement à verge ou à palettes, qui est décrit à l'article MONTRÉ.

Le mécanisme du remontage, dans la plupart des horloges astronomiques, est celui qui est adopté pour les CHRONOMÈTRES (Voy. ce mot). Cependant on emploie aussi une disposition ingénieuse qu'il est utile de connaître. Le poids moteur P (fig. 6) est suspendu à la chape d'une poulie mobile C, dont les cordons passent sur deux poulies fixes A et B. La première porte une roue à rochet, retenue par un doigt qu'un ressort presse constamment contre la roue; il en résulte qu'elle ne peut tourner que dans le sens indiqué par la flèche. La seconde poulie fixe C fait l'office du cylindre du tambour des horloges ordinaires; c'est sur l'axe de cette poulie qu'est montée la première roue du rouage. La corde qui passe sur ces deux poulies A et B est une corde sans fin qui vient s'enrouler sur la gorge

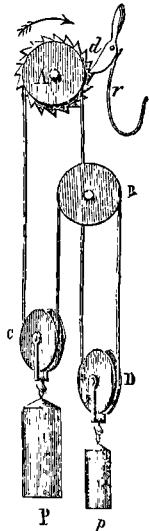


Fig. 6.

d'une quatrième poulie mobile D, à la chape de laquelle est suspendu un poids p suffisant pour tenir la corde tendue. Les gorges des poulies A et B étant disposées de manière que la corde ne puisse y glisser, le poids P fait tourner la poulie B, et par suite tout le rouage. Pour remonter le poids P, il suffit de tirer de haut en bas le cordon qui joint les poulies A et D; la poulie A tourne alors dans le sens de la flèche, et le poids P remonte sans cesser d'agir sur la poulie B, par conséquent sans arrêter le mouvement de l'horloge.

La sonnerie d'une horloge constitue un mécanisme à part, qui est mû par un poids comme le mécanisme principal. Le cylindre A (fig. 7) reçoit

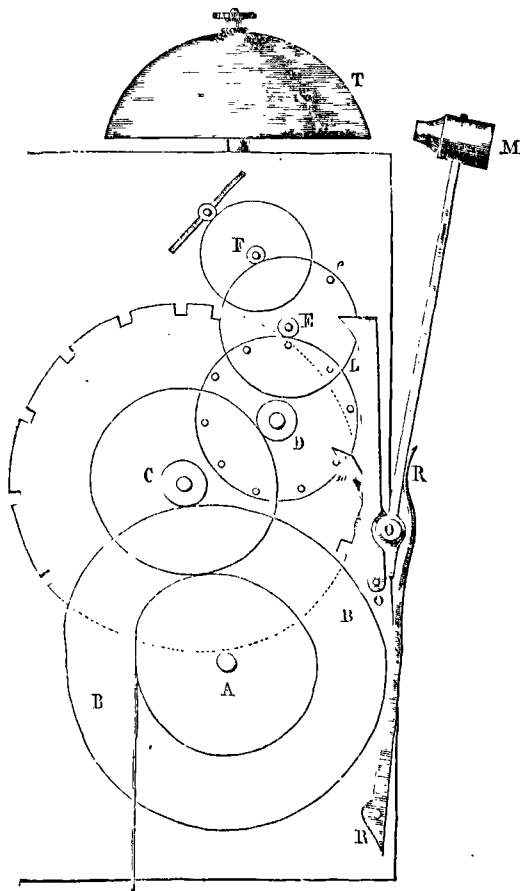


Fig. 7.

la corde à laquelle est suspendu le poids moteur de la sonnerie. Sur l'axe de ce cylindre est montée une roue dentée B qui forme le premier mobile du rouage. La roue B engrène avec le pignon d'une roue C dite *roue de compte*; on verra tout à l'heure pourquoi. La roue de compte engrène avec le pignon d'une roue D dite *roue de chevilles*, parce qu'elle porte à sa circonférence des chevilles également espacées. La roue de chevilles engrène avec le pignon d'une roue E dite *roue d'étoteau*, du nom d'une

La roue d'étoteau engrène avec le pignon d'une dernière roue F, qui fait mouvoir un pignon sur l'axe duquel sont montées deux ailettes formant *volant*. Dans l'état de repos, l'étoteau e est arrêté par l'extrémité L d'un levier mobile autour du point O. Un autre levier, dont l'extrémité m peut être rencontrée par les chevilles de la roue D, est mobile autour d'un axe O', sur lequel est monté le marteau M, destiné à frapper sur le timbre T. Enfin un troisième levier, qui n'est point visible sur la figure, est lié avec le levier L et mobile autour du même axe O; et son extrémité peut être rencontrée par une cheville placée à la circonférence de la roue des heures du rouage principal. Lorsque l'heure doit sonner, cette cheville vient saisir l'extrémité de ce levier, l'oblige à tourner autour du point O, ainsi que le levier L, et dégage l'extrémité de celui-ci. L'étoteau n'étant plus arrêté par le levier L, le rouage de sonnerie se met en mouvement sous l'action du poids appliqué au cylindre A; le mouvement va d'abord en s'accélégrant; mais, par l'effet de la résistance de l'air sur les palettes du volant, qui est animé d'une grande vitesse, le mouvement du rouage est bientôt ramené à l'uniformité. Chaque fois qu'une des chevilles de la roue D vient rencontrer le levier L, le marteau s'éloigne un peu du timbre; mais, ramené vivement en sens contraire par l'action d'un ressort, il vient frapper un coup, et reprend aussitôt sa position primitive, grâce à l'élasticité de son manche. Le nombre de coups que le marteau doit frapper est réglé par une roue G, nommée *chaperon*, qui est montée sur l'axe de la roue de compte C; elle porte à sa circonférence une série d'entailles inégalement distantes, dans lesquelles peut entrer un couteau lié au levier L. Tant que ce couteau rencontre la roue de chaperon dans l'intervalle de deux entailles, le levier L est suffisamment écarté de sa position de repos pour laisser passer l'étoteau, et le rouage continuant à se mouvoir, la sonnerie continue; mais dès que le couteau s'engage dans une des entailles du chaperon, le levier L reprend sa position de repos, arrête l'étoteau, par suite tout le rouage, et la sonnerie cesse. Les intervalles entre les entailles sont réglés de manière que le levier L reste écarté de sa position de repos le temps nécessaire pour que les chevilles de la roue D fassent frapper le nombre de coups nécessaire.

Lorsque, indépendamment des heures, l'horloge doit sonner un coup à chaque demie, la roue des heures du rouage principal porte deux chevilles diamétralement opposées, dont l'une détermine la sonnerie des heures et l'autre la sonnerie des demies; les entailles du chaperon sont alors réglées en conséquence. Quand l'horloge ne doit sonner que les heures, elle a 78 coups à sonner en 12 heures; le nombre de coups s'élève à 90 dans le même temps quand l'horloge doit en outre sonner un coup à chaque demie.

Une horloge bien construite et placée de manière à être soustraite aux oscillations du sol peut marcher, sans se déranger, pendant un temps considérable. Une pareille horloge fait partie du ma-

autour du point L, de manière que le galet ne cesse pas de s'appuyer sur la courbe E. Il résulte de ce mouvement de la roue H, de sens contraire à celui de tout à l'heure, que le bras HI tourne aussi en sens contraire, et que le point I marche vers l'. La roue o roule encore sur la roue n, mais en sens contraire de tout à l'heure; il en est de même de la roue p, et par suite de la roue v; en sorte que l'aiguille V du temps vrai s'éloigne de l'aiguille M du temps moyen. Rendons maintenant aux roues m et n, que nous avions supposées immobiles, le mouvement dont elles sont réellement animées; le mouvement absolu des roues o, p, r, v ne sera plus le même, mais leur mouvement relatif ou différentiel n'aura pas changé; l'aiguille V du temps vrai s'écartera donc de l'aiguille M du temps moyen, ou s'en rapprochera, de la même quantité que si les roues m et n étaient immobiles. — Ce système de liaison entre les deux aiguilles est celui qui est dit à *roue satellite*, parce que la roue o tourne autour de la roue comme un satellite autour de la planète principale; il se rattache au mode de transmission connu sous le nom d'ENGRENAGE DIFFÉRENTIEL (*Voy. ce mot*).

Pour déterminer la courbe E, on fait mouvoir à la main la roue annuelle; et pour tous les jours de l'année, ou de 5 jours en 5 jours, après avoir mis les aiguilles du temps moyen sur midi, on place l'aiguille V du temps vrai de manière qu'elle marque, par rapport à l'aiguille M, la différence donnée pour le jour que l'on considère par le tableau de l'équation du temps. En vertu des liaisons qui viennent d'être expliquées, le râteau prend une certaine position, et l'on trace sur le plateau qui doit devenir la courbe E la position occupée par le galet; l'enveloppe de toutes les positions du galet, ou la courbe tangente à toutes les circonférences qui représentent les positions successives de ce galet, est la courbe E demandée; car il est clair qu'en agissant sur le galet, elle lui fera prendre les positions qui correspondent aux différences de temps relatives aux divers jours de l'année.

Il reste à montrer comment Berthoud fait mouvoir la roue annuelle, et règle le quantième dans les années bissextiles ou non bissextiles. Un doigt P lié au mouvement principal de l'horloge, et faisant un tour en 24 heures, fait avancer chaque jour la roue annuelle d'une dent. A côté de la roue annuelle est établie une étoile à 8 pointes X, maintenue par un ressort sautoir SS. Toutes les fois que le 1^{er} janvier vient se placer sous l'index t qui occupe le point le plus élevé de la roue, une cheville a fait sauter une dent de l'étoile; un cercle YY, solidaire avec cette étoile, saute en même temps qu'elle, et l'un de ses quadrants vient se placer sous un index fixe K; on reconnaît ainsi, par l'indication tracée par ce quadrant, si l'année est bissextile ou si elle ne l'est pas, et quel rang elle occupe dans la suite des années qui séparent deux bissextiles. Si l'année n'est pas bissextile, lorsque le 29 février vient se placer sous l'index t, une cheville b fait sauter une seconde dent de l'étoile; mais, dès que la pointe opposée a dépassé le sommet de l'angle du sautoir, elle est poussée en avant par le second côté de cet angle; la dent qui suit celle qui a été poussée par la cheville b

rencontre une troisième cheville c, et, par sa vitesse acquise, pousse cette cheville et fait sauter un jour à la roue annuelle; le nombre des jours de l'année se trouve ainsi réduit à 365. Mais si l'année est bissextile, la dent qui devrait pousser la cheville c se trouve avoir une échancrure qui ne lui permet pas d'atteindre cette cheville quand elle est poussée par l'effet du sautoir; et le nombre des jours de l'année reste de 366, comme le nombre des dents de la roue annuelle.

On voit que les horloges à équation sont ordinairement à quantième, parce qu'il est naturel de se servir de la roue annuelle pour donner l'indication du mois et du jour. On peut consulter sur ce sujet les ouvrages spéciaux, et particulièrement le *Traité d'Horlogerie* de Moinet.

HORLOGE A QUANTIÈME, horloge qui donne, indépendamment de l'heure, le nom du mois et le quantième du jour. (*Voy. HORLOGE À EQUATION.*)

HORLOGE LUNAIRE, horloge qui donne, indépendamment du temps moyen, l'âge et les phases de la lune. Pour obtenir l'indication de l'âge de la lune, il faut mettre en communication avec la roue ordinaire des heures, qui fait un tour en 12 heures, une autre roue qui ne fasse un tour entier que dans 29^h 12^m 44^s 3^m, la durée moyenne de la lunaison; c'est-à-dire que le rapport des vitesses de ces deux roues doit être de 2 551 443^m à 43 200^m, ou de 850 481 à 14 400. On pourrait résoudre la question d'une manière approximative, et à l'aide de rouages ordinaires, en substituant à ce rapport un rapport qui en diffère peu et qui soit exprimé en termes plus simples, facilement décomposables en facteurs (*Voy. ROUAGE*); mais M. Pecqueur a montré que la question pouvait être résolue d'une manière rigoureuse par l'emploi des ENGRENAGES DIFFÉRENTIELS (*Voy. ce mot*). L'indication des phases s'obtient par des moyens analogues.

HORLOGES PUBLIQUES, horloges placées au sommet des édifices publics, et qui ne diffèrent des autres qu'en ce que les pièces y sont plus fortes, qu'il n'y a point d'aiguille de secondes, et que le rouage de sonnerie agit à l'aide de cordes sur les marteaux ordinairement placés à un étage supérieur. Dans les horloges publiques les plus modernes, les mobiles, au lieu d'être les uns au-dessus des autres, sont rangés sur une même ligne horizontale, ce qui permet de les nettoyer et de les réparer plus facilement. Au lieu d'un mécanisme de sonnerie, il y en a quelquefois deux, l'un pour les heures et l'autre pour les quarts et avant-quarts. — Les horloges publiques en France sont réglées sur le temps moyen; elles marchent ordinairement de 24 à 48 heures; cependant il y en a qui peuvent marcher 8 jours sans avoir besoin d'être remontées. (*Voy. HORLOGE.*)

HOUE À CHEVAL. *Voy. MACHINES AGRICOLES.*

HOULICE, tenon qui se réduit à un prisme triangulaire; on en fait usage pour assembler une pièce verticale avec une pièce oblique. (*Voy. ASSEMBLAGES.*)

HUNE, plate-forme établie à la partie supérieure d'un bas mât. Son principal usage est de servir de point d'attache aux haubans des mâts supérieurs. Les hunes se distinguent par le nom du mât auquel elles se rapportent; on dit ainsi : *grande hune*, *hune d'artimon*, *hune de misaine*, pour indiquer la

hune du grand-mât, celle de l'artimon, celle du mât de misaine (Voy. MATURE, VOILES).

HUNIER, ou *mât de hune*, partie du mât placée au-dessus de la hune. On appelle *grand-hunier*, *hunier d'artimon*, *petit-hunier*, le hunier du grand-mât, celui du mât d'artimon et celui du mât de misaine.

Le mot *hunier* employé seul s'applique aussi à la voile carrée du mât de hune (Voy. MATURE, VOILES).

Le hunier d'artimon porte également le nom de *perroquet de fougue*.

HYDRAULIQUE (du grec ὕδωρ, eau, et αὐλός, tuyau), science appliquée, qui traite du mouvement des eaux et de leur emploi comme moteur. (Voy. les articles: ÉCOULEMENT DES LIQUIDES, JAUGEAGE DES COURS D'EAU, RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES, MACHINES A COLONNE D'EAU, BÉLIER HYDRAULIQUE, POMPES, etc., et les articles auxquels ceux-ci renvoient.) — On comprend ordinairement dans l'hydraulique les théories et les applications relatives au mouvement des gaz. (Voy. les articles: ÉCOULEMENT DES GAZ, ÉLASTICITÉ, MACHINES SOUFFLANTES, VENTILATEURS, RÉSERVOIR D'AIR, ANÉMOMÈTRE, MOULINS A VENT, etc., et ceux auxquels ceux-ci renvoient.)

HYDRODYNAMIQUE (du grec ὕδωρ, eau, et δύναμις, force), branche de la Mécanique rationnelle qui traite du mouvement des fluides. Cette science, considérée au point de vue de ses applications, prend le nom d'HYDRAULIQUE (Voy. ce mot).

HYDROGRAPHIE (du grec ὕδωρ, eau, et γράφω, je décris), partie de la GÉODÉSIE (Voy. ce mot) qui a pour objet la représentation des portions aqueuses du globe. Elle comprend deux parties principales: 1° le lever des plans et le nivellement sous-marin; 2° le tracé des cartes. Le lever des plans se divise lui-même en deux parties, suivant qu'il s'agit de la représentation des côtes d'un pays de quelque étendue, des grandes îles, etc., qui sont l'objet d'une carte générale, ou bien qu'il s'agit d'une baie, d'une rade, avec les îlots, dangers, etc., qui peuvent s'y trouver, et dont la représentation constitue en quelque sorte la TOPOGRAPHIE HYDROGRAPHIQUE (Voy. ce mot) d'un espace maritime peu étendu. Dans les levés d'une grande étendue de côte, on distingue deux cas: si la côte est abordable en tous ses points, les opérations ne diffèrent pas de celles qui sont usitées en Géodésie, et l'on fait usage des mêmes instruments: THÉODOLITE, CERCLE RÉPÉTITEUR, etc., et, au besoin, LUNETTE MÉRIDIENNE (Voy. ces mots); si la côte n'est pas abordable, il faut effectuer ce qu'on appelle un LEVER SOUS VOILES ou sous vapeur (Voy. ce mot); on opère alors avec les instruments à réflexion: SEXTANT, CERCLE À RÉFLEXION, et avec le COMPAS DE VARIATION, etc. (Voy. ces mots). Dans l'un et l'autre cas, on peut avoir besoin de se procurer une *base* en mer; on y parvient ou par une mesure directe, ou par la hauteur de la mâture du navire sur lequel on opère, ou par la vitesse du son, ou enfin par des observations astronomiques (Voy. BASE). Dans la Topographie hydrographique, la méthode généralement employée est celle des INTERSECTIONS ou des RECOUPEMENTS (Voy. ces mots), c'est-à-dire que chaque point est déterminé par l'intersection de deux, ou mieux de trois rayons visuels menés par des points de premier ou second ordre déjà fixés sur la carte. Le

NIVELLEMENT SOUS-MARIN (Voy. ce mot) s'exécute à l'aide de sondages convenablement dirigés. Comme l'hydrographie a surtout en vue les besoins de la navigation, les cartes dont on y fait usage sont les CARTES MARINES (Voy. ce mot) ou cartes réduites de Mercator.

On comprend quelquefois sous le nom d'hydrographie la science de la navigation elle-même, c'est-à-dire les méthodes en usage pour déterminer le lieu ou la route du navire; aussi les traités d'hydrographie se confondent-ils en général avec les traités de navigation. Les hydrographes qui ont le plus contribué à l'avancement de la science maritime sont J. Hadley, Tobie Meyer, Borda, Beaumont-Beaupré, M. Chazallon, etc.

HYDROMÉTRIE (du grec ὕδωρ, eau, et μέτρον, mesure), mesure des eaux courantes. (Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES, JAUGEAGE DES COURS D'EAU, JAUGEAGE DES POMPES, POUCE D'EAU, MODULE D'EAU.)

HYDROSTATIQUE (du grec ὕδωρ, eau, et στάσις, je m'arrête), partie de la Mécanique qui traite de l'équilibre des fluides. Dans la Mécanique rationnelle, on établit analytiquement les conditions de cet équilibre. Dans la Mécanique appliquée, on n'a à considérer que les principes élémentaires de l'hydrostatique. On les trouvera exposés aux articles: FLUIDE PARFAIT, PRESSION D'UN FLUIDE, VASES COMMUNIQUANTS, PRINCIPE D'ARCHIMÈDE, CORPS PLONGÉS, CORPS FLOTTANTS, PRESSE HYDRAULIQUE, MANOMÈTRE, PIÉZOMÈTRE, BAROMÈTRE (comportant la mesure des hauteurs à l'aide de cet instrument), CENTRE DE PRESSION, STABILITÉ HYDROSTATIQUE, MÉTACENTRE, DÉPLACEMENT, etc.

HYPERBOLOÏDE DE RACCORDEMENT, hyperboloïde à une nappe qui a une génératrice commune avec une surface gauche donnée et les mêmes plans tangents en chacun des points de cette génératrice.

Si la surface est donnée par trois directrices A, B, C, que m , n , p désignent les points où ces directrices sont rencontrées par une génératrice donnée G, et que mT , nU , pV représentent les tangentes menées par les points m , n , p aux directrices respectives, ces trois tangentes pourront être considérées comme trois génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe. Cet hyperboloïde sera complètement déterminé par ces trois génératrices. De plus, il se raccordera avec la surface donnée. Car le plan des droites G et mT est tangent aux deux surfaces au point m ; le plan des droites G et nU est tangent aux deux surfaces au point n ; et le plan des droites G et pV est tangent aux deux surfaces au point p . Or, lorsque deux surfaces gauches ont les mêmes plans tangents en trois points d'une même génératrice, elles se raccordent le long de cette génératrice. (Voy. PARABOLOÏDE DE RACCORDEMENT.)

HYPERBOLOÏDES PRIMITIFS, hyperboloïdes de révolution, qui, en tournant autour de leurs axes, se conduiraient mutuellement par simple contact (avec glissement parallèle à la génératrice commune), comme un engrenage hyperboloïde donné (Voy. ENGRENAGES).

HYSOMÉTRIE (du grec ὕψος, hauteur, μέτρον, mesure), partie de la Géodésie qui s'occupe de la mesure des hauteurs. [Voy. les articles: NIVELLEMENT (géodésique), BAROMÈTRE (mesure des hauteurs par le), ALTITUDE.]

I

ILLUMINATION D'UN CADRAN SOLAIRE, durée pendant laquelle le cadran peut recevoir les rayons du soleil; cette durée dépend de la latitude du lieu et de l'orientation du cadran (*Voy. CADRANS SOLAIRES*).

IMPOSTE, moulure composée qui couronne les piédroits d'une arcade, et sur laquelle repose l'archivolte. Sa largeur est souvent d'un module : c'est la proportion indiquée par Vignole; mais d'autres auteurs trouvent cette proportion faible, et Palladio lui donne quelquefois un tiers et même une moitié en sus. L'imposte reproduit quelquefois les moulures de l'archivolte; mais, dans les ordonnances élégantes ou riches, on donne quelquefois à l'imposte un larmier, une frise, une astragale, qui ne se retrouvent jamais dans l'archivolte. La saillie supérieure de l'imposte sur le plan du piédroit peut être du quart au tiers de sa hauteur; elle est généralement de 3 parties (*Voy. MODULE*) dans l'ordre toscan, de 8 parties dans l'ordre dorique, de 12 parties dans les trois autres ordres. Voyez à l'article ARCHIVOLTE les figures qui montrent la disposition mutuelle de l'archivolte et de l'imposte et les moulures dont l'imposte se compose le plus ordinairement. Dans le cas où l'ordonnance prend un caractère ou plus simple ou plus grave, l'imposte se réduit quelquefois à une simple face sans moulures. On cite comme exemples d'impostes à Paris les arcades sous le portique de la Bourse, et celles de la cour de l'hôtel des Invalides.

On donne aussi le nom d'*imposte* à la partie supérieure d'une porte ou d'une fenêtre cintrée, partie en demi-cercle ordinairement fixe, tandis que la partie inférieure est mobile.

IMPULSION, produit d'une force constante par la durée de son action. Pour étendre cette notion à une force variable, on nomme *impulsion élémentaire* le produit d'une force par la durée infiniment petite pendant laquelle on peut la considérer comme constante, et l'on appelle *impulsion totale* la somme des produits analogues étendue à la durée finie du mouvement que l'on considère. Ainsi F représentant une force variable, et donnée en fonction du temps, Fdt est son impulsion élémentaire, et son impulsion totale est l'intégrale définie

$$\int_0^t F dt.$$

Le plus ordinairement on ne considère que les impulsions des forces projetées sur des axes. Si $F, F', F'', \text{etc.}$, désignent les forces appliquées à un système de points matériels, $F_x, F'_x, F''_x, \text{etc.}$, les projections de ces forces sur un même axe, on a à considérer la somme des impulsions totales de ces projections, c'est-à-dire la quantité

$$\Sigma \int_0^t F_x dt.$$

Comme il est permis d'intervertir l'ordre des deux signes Σ et \int , on peut écrire $\int_0^t \Sigma F_x dt.$

Mais, si l'on désigne par R la *résultante de translation* des forces $F, F', F'', \text{etc.}$, et R_x sa projection sur l'axe considéré, on a $\Sigma F_x = R_x$ (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*); on peut donc écrire

$$\int_0^t R_x dt,$$

c'est-à-dire que la somme des impulsions totales des forces appliquées à un système matériel, projetées sur un axe quelconque, est égale à l'impulsion totale de la résultante de translation de ces forces, projetée sur le même axe.

On remarque que dans cette expression les **FORCES MUTUELLES** (*Voy. ce mot*) que les diverses molécules du système exercent les unes sur les autres disparaissent d'elles-mêmes; car, si on les transporte en un même point de l'espace pour déterminer la résultante de translation, comme elles sont deux à deux égales et de sens contraire, elles se détruisent deux à deux, et la résultante R est indépendante de ces forces moléculaires.

Dans les calculs, l'impulsion d'une force représente un nombre de kilogrammes, attendu que dans toutes les formules de la Mécanique le temps figure comme un nombre abstrait. (*Voy. les Leçons de Mécanique* de M. Bélanger.)

L'*impulsion* d'une force est ce que M. Poncelet a désigné sous le nom d'*activité* de cette force.

INDICATEUR DE WATT, petit appareil qu'on adapte aux machines à vapeur pour connaître la pression dans le cylindre, et constater la loi de sa variation pendant la détente, et en général pendant une double course du piston. Cet appareil a été imaginé par Watt et perfectionné par Mac Naught. Il est représenté figure 1, à peu près au quart de sa

grandeur habituelle. Il se compose d'un petit cylindre creux AA, qui peut être vissé sur le chapeau du cylindre de la machine à vapeur; on y introduit la vapeur en ouvrant le robinet R. Dans ce cylindre AA se meut un piston dont la tige s'aperçoit au travers de la fenêtre longitudinale ff, et sort par la partie supérieure du petit cylindre. Cette tige est entourée d'un ressort en hélice, fixé d'une part au petit piston, et de l'autre à la partie supérieure du cylindre AA. La vapeur, en vertu de la pression qu'elle exerce sur le petit piston, force ce ressort à se comprimer; et, si le ressort est fait avec soin, la quantité dont il se comprime dans le sens vertical est proportionnelle à la pression que le petit piston éprouve; en sorte que la pression dans le cylindre de la machine à vapeur est mesurée par la quantité dont le petit piston s'élève

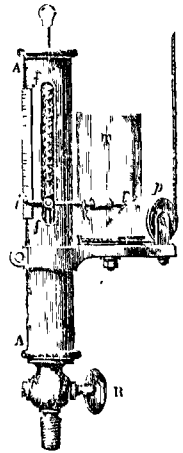


Fig. 1.

au-dessus de sa position initiale, qui répond à une pression nulle. Ce déplacement du petit piston est mesuré au dehors par celui d'un style \dot{K} , fixé à la tige du petit piston par l'intermédiaire d'un bras qui traverse la fenêtre longitudinale; l'extrémité \dot{i} de ce style parcourt une règle divisée fixée au cylindre, et donne ainsi la mesure de la pression.

Réduit aux organes que nous venons de décrire, l'instrument serait déjà d'un emploi précieux puisqu'il permettrait d'apprécier la pression dans le cylindre de la machine à vapeur, pression qui est toujours notablement inférieure à celle qui s'exerce dans la chaudière et qui est mesurée par le manomètre. Mais les perfectionnements apportés à l'appareil lui permettent d'enregistrer les variations de la pression, et d'en exprimer la loi par une courbe, voici comment : Sur un support fixé au cylindre AA, est établi un tambour T, mobile autour de son axe, et sur lequel est enroulée une bande de papier. Ce tambour est creusé en gorge à sa partie inférieure; un fil, attaché à cette gorge, s'y enroule, vient passer sur une poulie p à axe horizontal, établie sur le même support, et se relevant verticalement, va s'attacher à un bras horizontal fixé à la tige du piston de la machine à vapeur. Il en résulte que le tambour tourne sur son axe d'une quantité proportionnelle au déplacement du piston de la machine à vapeur. Un ressort en spirale, fixé intérieurement à la paroi du tambour d'une part, et à un point fixe de l'autre, se comprime pendant la rotation du tambour qui correspond à la course ascendante du piston de la machine, et il ramène le tambour à sa position primitive pendant la course descendante. A l'extrémité K du style \dot{K} , est adapté un crayon, dont la direction fait un angle obtus avec celle du style, et dont la pointe vient s'appuyer sur le tambour. Pendant le mouvement simultanément du petit piston et du tambour, ce crayon trace donc sur la surface de celui-ci une courbe qui exprime la loi de la variation de la pression dans le grand cylindre; car les déplacements du crayon dans le sens vertical, comptés à partir de la position répondant à une pression nulle, sont proportionnels à la pression, et la rotation du tambour est proportionnelle au chemin parcouru par le grand piston.

La disposition que nous avons décrite suppose que la circonférence de la gorge du tambour est au moins égale à la course du piston; comme cette condition ne serait pas toujours commode à remplir, on fait d'abord passer le fil venant de la gorge du tambour sur un petit treuil solidaire avec la poulie p et ayant le même axe; un second fil, attaché à la gorge de la poulie, à laquelle on peut donner un rayon assez grand pour que sa circonférence surpasse la course du piston, se relève verticalement et va se fixer à un bras horizontal lié à la tige du grand piston. On peut, par ce dispositif, faire en sorte que l'indicateur puisse s'appliquer à des courses très-diverses.

Si l'on développe après l'expérience la feuille de papier qui était enroulée sur le tambour, on obtient une courbe ou *diagramme*, analogue à la figure 2, et qui représente la loi de la variation de la pression pendant une double course du piston. Dans une expérience préalable, et avant de visser l'indicateur sur le cylindre de la machine, on a fait

mouvoir le tambour, et le crayon y a tracé la droite horizontale OX qui répond à une pression nulle, puisque la pression atmosphérique agissait alors sur les deux faces du petit piston. On y a tracé

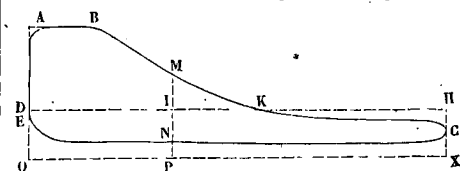


Fig. 2.

aussi la droite DH qui répond à une pression atmosphérique, ce qui est facile, connaissant sous la compression que le ressort en hélice éprouve sous l'action d'un poids donné. Soit donc MP l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe par rapport à OX, laquelle ordonnée rencontre en I l'horizontale DH. Le rapport de MP à IP exprimera le rapport de la pression de la vapeur dans le cylindre à la pression atmosphérique, pour la position du piston qui répond à une fraction de la course marquée par le rapport de OP à OX (OX répondant à la course entière). Au lieu d'exprimer la pression par un rapport, on peut l'exprimer par un nombre de kilogrammes par centimètre carré; il suffit pour cela de choisir une échelle à laquelle IP représente $1^{m},033$.

En examinant le diagramme, on voit que la portion AB répond à la période d'admission de la vapeur dans le cylindre. La portion BMC répond à la période de détente; la pression, qui était supérieure à la pression atmosphérique, lui devient égale pour la position du piston qui répond au point K, puis elle lui devient inférieure. La portion CND répond à la période d'émission pendant laquelle la pression est celle du condenseur. Cette dernière partie de la courbe vient se raccorder avec la première à la fin de cette seconde course, et le diagramme est une courbe fermée.

Lorsqu'on donne une certaine avance à l'admission ou à l'émission, toutes les circonstances du mouvement se trouvent représentées par le diagramme.

Ce diagramme permet aussi de calculer le travail correspondant à une course du piston. En effet, puisque l'ordonnée MP exprime la pression, et l'abscisse OP le chemin parcouru, le travail de la vapeur sur le piston pendant une course est représenté par l'aire OABCO (Voy. TRAVAIL). Mais, par une raison semblable, le travail exercé sur la même face du piston dans la course suivante est exprimé par l'aire OENCO. Par conséquent le travail développé en définitive sur le piston pendant une course est la différence des deux précédents, c'est-à-dire qu'il est exprimé par l'aire comprise dans la courbe fermée qui forme le diagramme. Cette aire peut être évaluée à l'aide du PLANIMÈTRE (Voy. ce mot) ou par une formule d'approximation (Voy. QUADRATURE).

L'indicateur de Watt est employé par la plupart des expérimentateurs qui étudient les effets de la vapeur dans les machines. M. Morin a proposé un appareil différent, dans lequel les pressions sont exprimées par les flexions d'une lame élastique, et

enregistrées sur une bande de papier continue comme dans ses DYNAMOMÈTRES (Voy. ce mot). Cet appareil, dont on trouvera la description dans le tome I des *Leçons de Mécanique pratique*, avait pour but de remédier à un inconvénient de l'indicateur de Watt, qui consiste à ce que, si l'on prolonge l'expérience. les diagrammes, qui ne sont jamais rigoureusement égaux, se superposent d'une manière confuse pour l'œil. Mais l'indicateur de Watt est plus portatif et d'une installation plus commode, et c'est ce qui l'a fait préférer jusqu'ici.

INDICATEURS DE NIVEAU, appareils de sûreté appliqués aux générateurs à vapeur pour faire connaître le niveau de l'eau dans la chaudière. Il est indispensable, en effet, que ce niveau puisse être déterminé à chaque instant; car, s'il est trop élevé, la capacité de la chambre à vapeur (Voy. GÉNÉRATEURS) devient trop petite, la vapeur augmente de pression au delà de la limite fixée; s'il est trop bas et qu'il s'abaisse au-dessous de la limite de chauffe, une partie des parois peut être portée à une haute température: et, dans les deux cas, il peut en résulter des accidents graves. — D'après les règlements administratifs, tout générateur doit être muni de deux indicateurs de niveau.

Le plus ancien et le plus simple des indicateurs de niveau est l'*indicateur à robinets*. Il se compose de deux conduits horizontaux, fermés par des robinets extérieurs, et communiquant l'un avec la chambre à vapeur, l'autre avec l'eau de la chaudière, mais à une distance de quelques centimètres seulement l'un au-dessus et l'autre au-dessous du niveau normal. Si le niveau se maintient entre des limites convenables, en ouvrant le robinet supérieur on doit obtenir de la vapeur, et en ouvrant le robinet inférieur on doit obtenir de l'eau. Le plus souvent on place entre les deux robinets un troisième conduit, fermé à robinet comme les deux autres, et établi à peu près à la hauteur du niveau normal. Avec ces trois robinets les indications sont évidemment plus précises, puisque le robinet intermédiaire donne de la vapeur ou de l'eau selon que le niveau est au-dessous ou au-dessus. Les clefs des robinets se font en bois pour qu'ils puissent être maniés sans inconvénient malgré l'élévation de la température. Dans les locomotives, les robinets, au lieu d'être adaptés directement à la chaudière, sont adaptés à un tube vertical en cuivre qui communique par le haut avec la chambre à vapeur, et par le bas avec l'eau de la chaudière; le niveau de l'eau dans ce tube est évidemment le même que dans la chaudière.

On obtient des indications continues en remplaçant le tube de cuivre par un tube de verre, qui laisse voir le niveau. Cette disposition est très-usitée dans les locomotives, et ce genre d'indicateur est connu sous le nom d'*indicateur à tube de verre*.

On emploie un autre genre d'indicateurs, fondés sur un principe différent, ce sont les *indicateurs à flotteur*. Le plus ordinairement le flotteur est un disque en pierre, soutenu par un fil de cuivre qui traverse la partie supérieure de la chaudière dans une boîte à étoupes, et se termine par une petite chaîne qui s'enroule sur une poulie et supporte à son autre extrémité un contre-poids. Cet appareil est représenté fig. 1. — On règle le contre-poids Q de manière que le flotteur plonge jusqu'à moitié de

sa hauteur. Si P est le poids du flotteur, p le poids de l'eau dont le volume équivaut à la moitié de celui du flotteur, on doit avoir pour l'équilibre $Q = P - p$. Une aiguille fixée à l'axe de la poulie

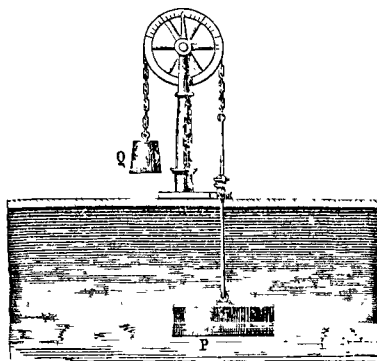


Fig. 1.

parcourt un cadran divisé, tracé sur la poulie elle-même, et indique ainsi à quelle hauteur s'élève le niveau de l'eau dans la chaudière.

C'est également un flotteur qui fait jouer le **SIFFLET D'ALARME** (fig. 2), destiné à avertir le

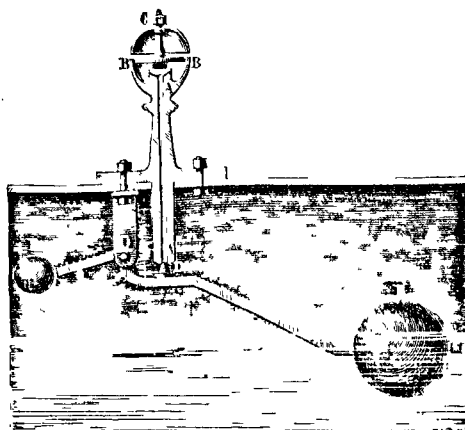


Fig. 2.

chauffeur quand le niveau s'abaisse au-dessous de la limite fixée. Ce sifflet est formé d'un canal vertical très-étroit AA, qui peut communiquer avec la chaudière; la vapeur, en suivant ce canal, est obligée de sortir par un orifice annulaire BB; et, rencontrant le bord d'un timbre CC, elle fait entendre un son plus ou moins aigu. Dans l'état ordinaire, l'orifice inférieur du canal est fermé par une petite soupape D adaptée à un levier mobile autour d'un point fixe O, et dont les extrémités portent, l'une un flotteur F, l'autre un contre-poids P. Quand le niveau s'abaisse au-dessous de la limite fixée, le flotteur descend avec l'eau, la soupape D s'ouvre, et la vapeur, trouvant une issue par le canal A A, fait entendre un son prolongé qui sert à avertir le chauffeur.

Une disposition fréquemment employée dans l'industrie consiste à réunir dans un même appareil

l'indicateur de niveau et le sifflet d'alarme. Cette disposition, imaginée par M. Bourdon, est représentée par la figure 3. L'appareil se compose d'une boîte triangulaire AAA, communiquant avec la

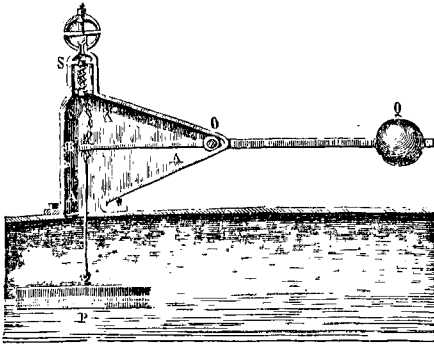


Fig. 3.

chaudière par sa partie inférieure. A la partie supérieure de cette boîte est établi un sifflet d'alarme, fermé par une soupape S qu'un ressort maintient habituellement fermée. Au sommet O de la boîte est fixé un axe O, autour duquel peut se mouvoir un levier, dont la branche OB est intérieure à la boîte, et supporte à son extrémité B le flotteur P, tandis que l'autre branche, extérieure à la boîte, porte à son extrémité un contre-poids Q. Sur le même axe O, et extérieurement à la boîte, est montée une aiguille, qu'on ne peut voir sur la figure, et qui parcourt un cadran divisé établi sur la paroi même de la boîte. Enfin à l'extrémité B de la branche intérieure du levier, est fixé l'un des bouts d'une petite chaîne, dont l'autre bout est adapté à la soupape S. Le jeu de l'appareil est facile à comprendre. Les oscillations ordinaires du niveau sont accusées par l'aiguille sur le cadran qu'elle parcourt. Mais si le niveau de l'eau descend au-dessous de la limite fixée, le point B, en s'abaissant, tire la chaîne, ouvre la soupape, et fait jouer le sifflet d'alarme jusqu'à ce que le niveau se rétablisse.

Il existe un grand nombre de variétés des appareils que nous venons de décrire; mais elles sont fondées sur les mêmes principes, et nous renvoyons à cet égard aux ouvrages spéciaux, et en particulier au *Traité de la Chaleur* de M. Péclat.

Dans les locomotives, le sifflet d'alarme est à la disposition du mécanicien, qui le fait jouer à l'aide d'un robinet, et s'en sert comme signal, pour les manœuvres de gare et pendant la marche des trains.

INDICATIONS CONTINUES (APPAREILS λ). Voy. ENREGISTREURS.

INERTIE, propriété générale de la matière, en vertu de laquelle un corps ne peut de lui-même modifier son état de repos ou de mouvement. Le contraire semble arriver journellement; mais ce n'est qu'une illusion que la réflexion n'a pas de peine à dissiper. Lorsque, par exemple, on fait rouler une bille sur le sol, elle ne tarde pas à s'arrêter; et il peut sembler, au premier abord, qu'elle s'arrête d'elle-même. Mais si l'on fait rouler cette bille de la même manière, c'est-à-dire avec la

même vitesse initiale, sur un terrain battu et parfaitement horizontal, son mouvement se prolonge en ligne droite pendant une plus longue durée, et s'étend à une plus grande distance. Si on la fait rouler, toujours de la même manière, sur un parquet ciré, dans une salle de grande dimension, la durée et l'étendue de son mouvement sont plus grandes encore. Enfin, si on la fait rouler de même sur de la glace bien unie, la durée et l'étendue du mouvement sont encore plus considérables. Ainsi, moins la surface sur laquelle la bille roule est raboteuse, c'est-à-dire moins cette surface présente d'obstacles au mouvement de la bille, plus ce mouvement se prolonge en durée et s'étend en parcours. On doit conclure de cette observation que si nul obstacle ne s'opposait à ce mouvement, il se prolongerait indéfiniment sans se modifier. En y réfléchissant, on ne conçoit pas, en effet, comment un corps inanimé pourrait de lui-même modifier le mouvement qu'il a reçu. C'est à cette propriété des corps de ne pouvoir d'eux-mêmes ni se mettre en mouvement, ni modifier le mouvement qu'ils possèdent, qu'on a donné le nom d'inertie.

Ses effets frappent chaque jour nos yeux. Lorsque, par exemple, un cheval lancé au galop vient à s'arrêter brusquement, son cavalier, s'il manque d'expérience, peut être lancé par-dessus la tête de l'animal, parce qu'il possède encore, au moment où le cheval s'arrête, la vitesse dont ils étaient animés en commun. Lorsque nous descendons d'une voiture pendant qu'elle est en mouvement, nous courons risque d'être jetés sur le sol dans le sens de ce mouvement, parce qu'à l'instant où nos pieds touchent le sol et se trouvent ainsi arrêtés par le contact, notre corps est encore animé de la vitesse que nous possédions en commun avec la voiture. C'est sur l'inertie qu'est fondé le procédé dont on fait usage pour emmancher les outils. Pour emmancher un marteau, par exemple, on y introduit d'abord le bout du manche, puis on frappe vivement avec l'autre bout contre un mur; le marteau, qui avait pris la vitesse imprimée au manche, la possède encore au moment où celui-ci s'arrête; il continue donc à se rapprocher du mur lorsque le manche est déjà arrêté, et, par conséquent, le manche s'engage de plus en plus dans le marteau.

INFLAMMATION DE LA POUDRE, se dit, dans le sens général, de la propagation de l'ignition à toute la masse d'une traînée ou d'une charge, et, dans un sens plus particulier, de la propagation de la flamme à la surface de la charge ou à la surface d'un grain. Les lois mathématiques de l'inflammation de la poudre ont été l'objet d'un savant et ingénieux mémoire de M. Piobert (1835). [*Voy. Poudre* (Propriétés balistiques de la)].

INJECTEUR GIFFARD, ou *Injecteur automateur*, appareil employé à l'alimentation des chaudières et à divers autres usages. Cet appareil est représenté dans la figure suivante, dégagé de quelques parties accessoires et de détails d'assemblage qui n'intéressent que le constructeur. Pour rendre les parties essentielles distinctes, il a fallu altérer les dimensions relatives; mais nous donnerons plus loin les dimensions exactes. La partie principale de l'injecteur est une tuyère *ttt*, qui communique par des orifices latéraux *ooo*, avec le tuyau de prise de vapeur *VV*. Dans l'intérieur de cette tuyère

peut se mouvoir, à l'aide d'une vis commandée par une manivelle extérieure, une pièce centrale *aa*, qu'on appelle l'aiguille, et qui sert à rétrécir plus ou moins le passage par lequel la vapeur sort de la tuyère. La tuyère elle-même peut avancer ou reculer dans le sens de son axe; on obtient ce mouvement en agissant sur une autre manivelle que la figure ne montre pas. Le bout de la tuyère s'engage

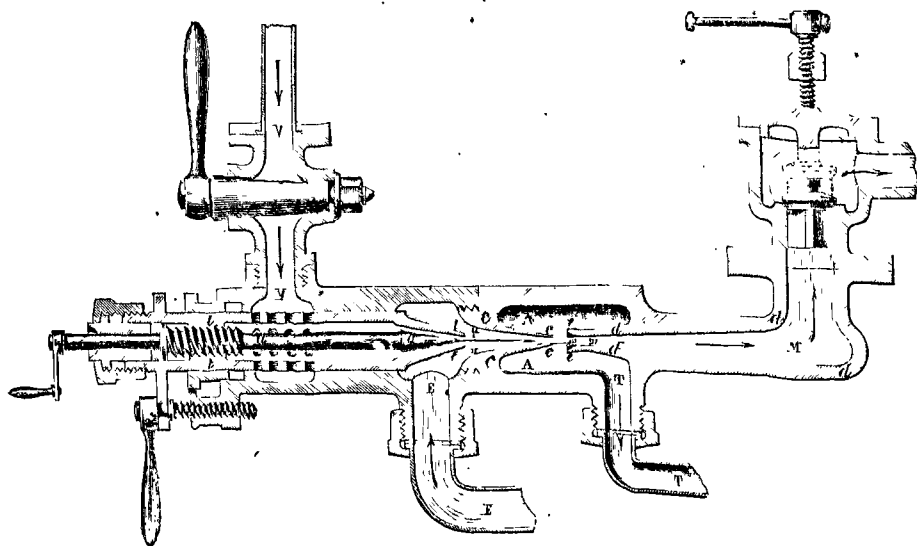


Fig. 3.

dans une cheminée *cccc*, qui communique avec le tuyau *EE* par lequel afflue l'eau venant du réservoir d'alimentation. A quelques millimètres en avant de l'orifice de la cheminée, s'ouvre, par un orifice évasé *ee*, un second tube ayant le même axe que le premier, mais dont la section va en augmentant à partir d'une section minimum *mm*, et que, pour cette raison, on appelle le *tube divergent dddd*. Ce tube divergent communique avec le tuyau qui conduit l'eau d'alimentation dans la chaudière. Ce tuyau est fermé par une soupape qu'on ne voit pas sur la figure, mais qui s'ouvre de bas en haut pour laisser passer l'eau qui se rend à la chaudière, et en empêcher le retour vers l'injecteur. Les orifices *cc* et *ee* du tube divergent et de la cheminée sont environnés d'un espace annulaire *AAAA* qui communique avec un tuyau de dégagement *TT*.

La vapeur venant de la chaudière par le tuyau *VV*, sous une forte pression, sort de la tuyère *tt* par un très-petit orifice, et par conséquent avec une très-grande vitesse. Elle rencontre l'eau qui remplit le tuyau *EE* et qui environne la tuyère; elle pousse cette eau devant elle en s'y condensant, et produit ainsi une aspiration qui fait monter l'eau dans le tuyau *EE*. L'eau provenant de la vapeur condensée et l'eau venant du réservoir d'alimentation sortent mélangées de la cheminée et forment un jet qui pénètre dans le tube divergent. L'air qui a pu se dégager de l'eau, et l'eau non entraînée dans le jet, se rendent dans l'espace annulaire *AA* et s'échappent par le tuyau *TT*. L'eau engagée dans le tube divergent y chemine en diminuant peu à peu de vitesse; et lorsqu'elle arrive dans le tuyau *MM*, elle a la vitesse réduite qui convient à l'alimentation.

La théorie complète et rigoureuse de cet appareil

serait fort difficile à établir. M. Giffard, dans sa *Notice théorique et pratique de l'Injecteur automatique* (1861), en a donné une théorie approximative fondée sur la considération des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (Voy. ce mot). Soit *p* le poids de vapeur qui s'écoule en une seconde par l'orifice de la tuyère, *P* le poids d'eau aspirée dans le même temps par le tuyau *EE*; soient *m* et *M* les masses correspondantes à ces poids; soit ω la section de l'orifice de la tuyère, *V* la vitesse de la vapeur en ce point; soit *a* la section minimum *mm* du tuyau divergent, *v* la vitesse de l'eau en ce point. Considérons la portion du fluide en mouvement comprise entre les sections *tt* et *mm*; au bout d'un temps très-court θ , les molécules qui étaient en *tt* seront venues se placer en *uu*, et celles qui étaient en *mm* seront venues prendre la position *nn*. En vertu de la permanence du mouvement, la quantité de mouvement de la portion de fluide comprise entre les sections *uu* et *mm* sera la même au commencement et à la fin du temps θ ; l'accroissement de quantité de mouvement du fluide considéré se réduira donc à la différence entre la quantité de mouvement de la portion *mm*, *nn* et celle de la portion *tt*, *uu*, c'est-à-dire à $(m + M)\theta.v - m\theta.V$.

Soit *R* la somme des projections sur l'axe du mouvement des forces extérieures qui agissent sur le fluide considéré, on aura donc, en vertu du principe des quantités de mouvement,

$$(m + M)\theta v - m\theta V = R\theta,$$

ou

$$(m + M)v - mV = R.$$

Si l'on néglige les frottements et qu'on admette que la somme des pressions d'amont est égale à la somme des pressions d'aval, on peut regarder *R* comme nul, et écrire avec M. Giffard :

$$(m + M)v - mV = 0;$$

d'où, en remplaçant les masses par les poids,
 $(P + p)v - pV = 0;$ [1]

et par suite,

$$p = (P + p) \cdot \frac{v}{V}. \quad [2]$$

La somme $P + p$ est ordinairement donnée; c'est le poids d'eau à introduire par seconde dans la chaudière; il est égal au poids de vapeur que la chaudière doit produire, d'après sa surface de chauffe, augmenté de 40 pour 100 environ, afin de tenir compte de l'eau mécaniquement entraînée. Les vitesses v et V ne sont pas immédiatement données. M. Giffard admet que la vapeur s'écoule comme un liquide de même densité (*Voy. ÉCOULEMENT DES GAZ*); soit donc δ cette densité, ou plutôt le poids du mètre cube de vapeur, et n le nombre d'atmosphères qui exprime la pression dans la chaudière, diminué d'une unité, puisque, autour de la veine fluide, la pression peut être regardée comme égale à la pression atmosphérique, on peut écrire :

$$V = \sqrt{2g \cdot \frac{10334 \cdot n}{\delta}}. \quad [3]$$

Soit H le poids du mètre cube du liquide qui s'écoule dans le tuyau divergent. Pour que ce liquide puisse s'introduire dans la chaudière, il faut que sa puissance vive soit égale au travail négatif de la pression qui tend à s'opposer à cette introduction, ce qui revient à dire qu'on doit avoir $v = \sqrt{2gH}$, en appelant H la hauteur du liquide qui représente la pression. Mais, d'une part, l'expérience fait voir qu'au point *mm* le liquide, encore mélangé d'air et de vapeur non condensée, a une densité beaucoup moindre que l'eau; d'autre part, pour tenir compte du frottement dans le tuyau *MM*, il est nécessaire de donner au liquide un excès de vitesse. Par ces considérations, M. Giffard est conduit à poser :

$$v = \sqrt{2gk \cdot \frac{10334 \cdot n}{1000}}, \quad [4]$$

k étant un coefficient dont la valeur paraît devoir être prise entre 2 et 2,25 pour satisfaire aux faits observés.

On a d'ailleurs

$$[5] \quad p = \omega V \cdot \delta \quad \text{et} \quad P + p = av \cdot \Pi, \quad [6]$$

en désignant par Π le poids du mètre cube du liquide en *mm*, lequel paraît différer peu de 500^k. Les formules [2], [3], [4], [5], [6], renferment la solution du problème.

Les équations [3] et [4] donneront d'abord les vitesses V et v ; l'équation [2] fera connaître alors le poids p , puisque $P + p$ est donné; les équations [5] et [6] donneront alors les sections ω et a . — Connaissant $P + p$ et p , on en déduira P .

La température de l'eau d'alimentation se déduit aisément de la connaissance des poids P et p . Soit T la température de la vapeur à la sortie de la tuyère, t celle de l'eau affluant par le tuyau *EE*, et τ celle du mélange qui coule dans le tube divergent. La quantité de chaleur abandonnée par la vapeur en passant de la température T à la température τ est, d'après les expériences de M. Regnault,

$$p(606,5 + 0,305T - \tau),$$

et la quantité de chaleur gagnée par l'eau en passant de la température t à la température τ est $P(\tau - t)$. La perte devant être égale au gain, si l'on néglige les déperditions, on doit avoir :

$$p(606,5 + 0,305T - \tau) = P(\tau - t);$$

$$\text{d'où} \quad \tau = \frac{p(606,5 + 0,305T) + Pt}{P + p},$$

valeur que l'on peut écrire

$$\tau = t + \frac{p}{P + p} (606,5 + 0,305T - t). \quad [7]$$

La température T n'est pas exactement connue; mais on peut la supposer au moins égale à 100°; et l'on en déduira le minimum de la température du mélange.

Supposons, par exemple, une chaudière où la vapeur se forme à une pression de 6 atmosphères, et ayant 20^m de surface de chauffe. En admettant une production moyenne de 20^k de vapeur par mètre carré et par heure, on obtient 400^k pour le poids de vapeur produit dans une heure. Il faut y ajouter 40 p. 100 environ, afin de tenir compte de l'eau entraînée, ce qui donne 560^k d'eau à fournir par heure, soit 0^mat. cub., 155555... par seconde. On a donc, dans ce cas, $P + p = 0^k, 156$ environ. On a de plus $n = 5$; la densité de la vapeur à 6 atmosphères, ou à la température de 160°₂, est 0,003, c'est-à-dire que le poids du mètre cube de vapeur à cette température est $\delta = 3^k$. On a donc

$$V = \sqrt{2g \cdot \frac{10334 \cdot 5}{3}} = 581^m, 3,$$

$$\text{et} \quad v = \sqrt{2g \cdot 2,25 \cdot \frac{10334 \cdot 5}{1000}} = 47^m, 8.$$

Par suite,

$$p = 0^k, 156 \cdot \frac{47,8}{581,3} = 0^k, 156 \cdot 0,082 = 0^k, 0128.$$

Les formules [5] et [6] donnent ensuite

$$\omega = \frac{0,0128}{581,3 \times 3} = 0^m, 00000734 \quad \text{ou} \quad 7^m, 34,$$

$$a = \frac{0,156}{47,8 \cdot 500} = 0^m, 00000653 \quad \text{ou} \quad 6^m, 53,$$

ce qui répond à des diamètres de 3^{mm} et de 2^{mm}, 5, à très-peu près.

On trouvera ensuite, si l'on suppose l'eau du réservoir à 12°, et $T = 100^\circ$,

$$\tau = 12^\circ + 0,082(637 - 12) = 63^\circ, 25;$$

c'est le minimum de température de l'eau d'alimentation.

Afin de donner une idée des dimensions ordinaires de l'injecteur Giffard, nous prendrons pour exemple celui dont l'auteur a donné le dessin, à grandeur d'exécution, dans sa notice citée plus haut :

Diamètre du tuyau de prise de vapeur,	
à l'intérieur.....	0,0135
Diamètre du corps de la tuyère, à l'extérieur.....	0,020
Diamètre du corps de la tuyère, à l'intérieur.....	0,010
Longueur de la partie conique de la tuyère.....	0,045
Diamètre de l'orifice de la tuyère....	0,003
Diamètre du tuyau d'aspiration EE....	0,0165
Longueur de la cheminée.....	0,036
Diamètre à l'orifice de la cheminée... 0,002	
Distance entre l'orifice de la cheminée et celui du tube convergent.....	0,004
Diamètre minimum du tube divergent.	0,002
Diamètre intérieur de l'espace annulaire.....	0,037
Diamètre du tuyau de dégagement...	0,0165

Longueur du tube divergent jusqu'à l'évasement de ce tube..... 0,050
 Diamètre du tuyau d'alimentation..... 0,015
 Longueur de l'aiguille..... 0,050

Quelles que soient les dimensions de cet appareil, elles restent proportionnelles; c'est-à-dire que si l'on prend pour unité le diamètre minimum *mm* du tube divergent, comme le fait M. Giffard, toutes les dimensions s'expriment de la même manière en fonction de cette unité, indépendamment des grandeurs absolues.

L'aiguille sert principalement à la mise en train de l'appareil. On l'engage dans la tuyère, dont elle a exactement l'inclinaison; on peut ainsi réduire à volonté l'espace par lequel la vapeur est obligée de passer, et accroître par conséquent sa vitesse. Quand l'aspiration est établie, on dégage peu à peu l'aiguille de la tuyère, et le mouvement continue dans ses conditions normales.

L'injecteur automoteurs s'adapte aisément à toutes les chaudières; il fonctionne tout seul avec une grande régularité; il ne consomme qu'une faible quantité de chaleur, $\frac{1}{600}$ environ de celle qui est fournie à la chaudière; il supprime le travail de la pompe à air, et dispense de réchauffer l'eau d'alimentation. Aussi est-il déjà adopté sur plusieurs chemins de fer, et tend-il à se répandre de plus en plus.

M. Giffard l'a appliqué avec succès à l'élévation de l'eau et à l'épuisement des cales de navires. (Voy. la Notice citée plus haut.)

INTÉRÊT SIMPLE, bénéfice que rapporte une somme prêtée, ou placée dans une entreprise quelconque. La somme placée prend le nom de *capital*; l'intérêt que rapportent 100 francs par an est ce qu'on appelle le *taux* de l'intérêt. Dans les transactions commerciales, le taux stipulé ne peut, d'après la loi, être supérieur à 6 pour 100. Mais le taux réel du bénéfice réalisé dans une entreprise peut être beaucoup plus considérable.

Il y a entre le capital *a*, le taux *t* de l'intérêt, le nombre *n* de jours pendant lequel le capital a été placé, et l'intérêt *i* de ce capital, une relation très-simple à établir :

L'intérêt de 100 francs pour un an ou 360 jours, étant *t*, l'intérêt de 1 franc pour 360 jours est $\frac{t}{100}$,

l'intérêt de 1 franc pour 1 jour est $\frac{t}{100 \times 360}$, l'in-

térêt de 1 franc pour *n* jours est donc $\frac{nt}{36000}$, et l'in-

térêt de *a* francs pour *n* jours est $\frac{atn}{36000}$; on a donc

$$i = \frac{atn}{36000} \quad [1]$$

c'est-à-dire que, pour obtenir l'intérêt, il faut multiplier le capital par le taux et par le nombre de jours, et diviser le produit par 36000.

Si l'on demandait, par exemple, l'intérêt de 2400 francs à 6 pour 100 pour 175 jours, on aurait

$$i = \frac{2400 \cdot 6 \cdot 175}{36000},$$

ou $i = 70$ francs.

Si l'on représente par *d* le quotient de 36000 par

le taux *t*, la valeur de ce taux sera exprimée par $\frac{36000}{d}$, et en remplaçant *t* par cette valeur dans la formule [1], on obtiendra

$$i = \frac{an}{d} \quad [2]$$

Dans le calcul commercial des intérêts, le produit de la somme *a* par le nombre de jours *n* est ce que l'on appelle le *nombre*; et le quotient *d* de 36000 par le taux se nomme le *diviseur fixe*; en sorte que, d'après la formule [2], on obtient l'intérêt en divisant le nombre par le diviseur fixe. Dans l'exemple ci-dessus, le nombre serait 2400×175 ou 420 000 francs, et le diviseur fixe serait le quotient de 36000 par 6, c'est-à-dire 6000. En divisant 420 000 par 6000 ou 420 par 6, on obtient, en effet, 70 francs comme ci-dessus.

Au lieu de diviser *an* par *d*, on pourrait le multiplier par $\frac{1}{d}$, c'est-à-dire par le quotient obtenu en divisant l'unité par le diviseur fixe, quotient auquel on donne en conséquence le nom de *multiplicateur fixe*. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{6000} = 0,00016666\dots;$$

et par suite

$$i = 420000 \times 0,00016666\dots,$$

c'est-à-dire 69,997 ou 70 fr.

Ces deux méthodes ont été employées et le sont encore dans plusieurs maisons de commerce.

Mais la méthode qui a été reconnue la plus expéditive, malgré sa complication apparente, consiste : 1° à prendre le centième du capital, ce qui donne l'intérêt à 6 pour 100 pour 60 jours (l'année commerciale étant de 360 jours); 2° à en déduire, par la méthode des parties aliquotes, l'intérêt pour le nombre de jours donnés; 3° à en déduire l'intérêt au taux donné, à l'aide de la règle suivante. Si le taux est 5, il faut retrancher 1 sur 6 ou $\frac{1}{6}$ de l'intérêt calculé; si le taux est 4 $\frac{1}{2}$, il faut retrancher

1 $\frac{1}{2}$ sur 6 ou $\frac{1}{4}$ de l'intérêt calculé; si le taux est

4, il faut retrancher 2 sur 6 ou $\frac{1}{3}$ de l'intérêt calculé; enfin si le taux est 3, il faut retrancher 3 sur 6, ou la moitié de l'intérêt calculé.

Soit demandé, par exemple, l'intérêt de 2400 fr.

à 4 $\frac{1}{2}$ pour 100, pendant 175 jours. On divisera d'abord par 100, ce qui donnera 24 francs pour l'intérêt à 6 pour 100 pendant 60 jours. On formera alors le tableau suivant :

Intérêts pour 60 jours.	24 ^f
id.	id.
id.	30
id.	20
id.	5
	<hr/> 2

Soit pour 175 jours. 70^f (Comme plus haut.)

Il en faut retrancher le quart ou..... 17^f,5

Il reste donc..... 52^f,50

pour l'intérêt à 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 pendant 175 jours.

Cette méthode est très-pratique, quand on a sou-

vent à prendre l'intérêt au même taux, parce que les opérations partielles sont toujours les mêmes, et que dès lors elles s'exécutent pour ainsi dire mécaniquement et sans fatigue pour l'intelligence.

Dans la formule [1], c'est ordinairement l'intérêt i qui est inconnu. Cependant, comme elle renferme quatre quantités variables i , a , t , n , on conçoit que les trois dernières pourraient à leur tour être prises pour inconnues.

On pourrait, par exemple, demander quel est le capital qui, placé au taux t pendant n jours, produirait l'intérêt i ; l'équation [1] résolue par rapport à a donnerait

$$a = \frac{36000 \cdot i}{tn} \quad [2]$$

Si $t = 4 \frac{1}{2}$, $n = 175$, $i = 70'$, on trouvera

$$a = \frac{36000 \cdot 70'}{4,5 \cdot 175} = 2400'$$

On opérerait d'une manière semblable dans les autres cas. Mais ces questions inverses ne se rencontrent presque jamais dans les applications.

INTÉRÊTS COMPOSÉS. On dit qu'une somme est placée à *intérêts composés* lorsque, chaque année, le capital s'accroît des intérêts produits pendant l'année précédente. Soit a la somme placée, que l'on désigne sous le nom de *capital primitif*, t le taux de l'intérêt, n le nombre d'années qui exprime

la durée du placement, et A le capital augmenté de ses intérêts composés, auquel on donne le nom de *capital définitif*. Au bout de la première année, le capital a s'est accru de ses intérêts pendant un an, c'est-à-dire de $\frac{at}{100}$ (Voy. INTÉRÊT SIMPLE) ou de

ar , en désignant par r le quotient du taux t par 100; le capital est donc devenu $a + ar$ ou $a(1 + r)$, c'est-à-dire que le capital primitif se trouve multiplié par $1 + r$. Au bout de la seconde année, le capital $a(1 + r)$ se trouve de nouveau multiplié par $1 + r$, et devient par conséquent $a(1 + r)^2$. Au bout de la troisième année, le capital deviendrait $a(1 + r)^3$; et, au bout de la $n^{\text{ième}}$ année, il devient $a(1 + r)^n$. On a donc

$$A = a(1 + r)^n; \quad [1]$$

c'est la formule des intérêts composés. On en tire $\log A = \log a + n \log(1 + r)$. [2]

Si, par exemple, on a $a = 12500'$, $t = 4,5$ et $n = 7$, on trouvera

$$\log A = 4,2307241, \text{ d'où } A = 17010',77.$$

En faisant $a = 1$, on forme aisément, à l'aide de la formule [2], le tableau des capitaux définitifs correspondants à divers taux et à divers nombres d'années. Si a diffère de l'unité, on n'a qu'à multiplier le nombre que donne la table par la valeur de a pour obtenir le capital définitif correspondant A .

NOMBRE d'années.	3 pour 100.	3 $\frac{1}{2}$ pour 100.	4 pour 100.	4 $\frac{1}{2}$ pour 100.	5 pour 100.	5 $\frac{1}{2}$ pour 100.	6 pour 100.
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000
2	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025	1,102500	1,113025	1,123600
3	1,092727	1,108717	1,124864	1,141166	1,157625	1,174242	1,191016
4	1,125509	1,147522	1,169858	1,192518	1,215506	1,238825	1,262477
5	1,159273	1,187685	1,216652	1,246182	1,276281	1,306960	1,338226
6	1,194052	1,229254	1,265318	1,302260	1,340095	1,378843	1,418520
7	1,229873	1,272278	1,315930	1,360362	1,407100	1,454679	1,503631
8	1,266769	1,316808	1,368568	1,422101	1,477455	1,534687	1,593849
9	1,304772	1,362896	1,423310	1,486095	1,551328	1,619096	1,689480
10	1,343916	1,410597	1,480243	1,552969	1,628894	1,708146	1,790845
11	1,384233	1,459968	1,539452	1,622853	1,710339	1,802094	1,898300
12	1,425760	1,511066	1,601029	1,695882	1,795856	1,901209	2,012198
13	1,468532	1,563954	1,665072	1,772196	1,885649	2,005776	2,132930
14	1,512588	1,618692	1,731674	1,851946	1,979931	2,116094	2,260906
15	1,557966	1,675346	1,800941	1,935293	2,078928	2,232479	2,396561
16	1,604706	1,733983	1,872979	2,022370	2,182875	2,355266	2,540355
17	1,652846	1,794672	1,947897	2,113377	2,292018	2,484806	2,692776
18	1,702431	1,857485	2,025813	2,208479	2,406619	2,621470	2,854343
19	1,753504	1,922497	2,106845	2,307861	2,526950	2,765651	3,025604
20	1,806109	1,989784	2,191119	2,411715	2,653297	2,917763	3,207141
21	1,860293	2,059427	2,278763	2,520242	2,785963	3,078240	3,399569

Pour $t=4,5$ et $n=7$, par exemple, la table donne 1,360862; si l'on a comme ci-dessus $a=12500$, on aura donc

$$A = 1^{\circ},360862 \times 12500 \text{ ou } A = 17010^{\circ},775.$$

La formule [1] ou la formule [2] contiennent quatre quantités, et peuvent par conséquent servir à résoudre quatre problèmes différents, suivant que l'une ou l'autre de ces quantités est prise pour inconnue. La formule [2] résout le cas où l'inconnue est A. Dans les trois autres cas, on en tire

$$\log a = \log A - n \log(1+r), \quad [3]$$

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}, \quad [4]$$

$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}. \quad [5]$$

Dans ce dernier cas, $\log(1+r)$ étant connu, on en déduit r ; en retranchant 1 l'on a r , et en multipliant par 100 on obtient le taux t .

Les mêmes problèmes peuvent aussi se résoudre à l'aide du tableau ci-dessus. Si l'on demande, par exemple, au bout de combien d'années une somme de 12500 francs placée à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés produira un capital définitif de 17010^o,77; on commencera par diviser ce capital définitif par 12500, afin d'avoir le capital définitif correspondant à un capital primitif de 1 franc; on trouvera pour quotient 1^o,360862; en cherchant ce nombre dans la colonne verticale qui porte en tête $4\frac{1}{2}$, on verra qu'il est dans la ligne horizontale se rapportant à 7 années; la durée demandée est donc 7 ans.

Lorsque la durée du placement se compose d'un certain nombre entier d'années augmenté d'une fraction, il faut supposer que le capital primitif a été placé à intérêts composés pendant le nombre entier d'années, et que le capital produit est resté placé à intérêts simples pendant la fraction d'année restante. Supposons, par exemple, que la durée du placement se compose de n années, plus une fraction d'année représentée par k . Soit A' le capital produit au bout de n années, et A le capital définitif; on aura

$$A' = a(1+r)^n \text{ et } A = A' + A'kr = A'(1+kr),$$

par conséquent

$$A = a(1+r)^n(1+kr), \quad [6]$$

d'où $\log A = \log a + n \log(1+r) + \log(1+kr)$. [7]
Si, par exemple, on a comme ci-dessus $a = 12500^{\circ}$, $t = 4,5$, et de plus $k = \frac{5}{12}$ (5 mois), on trouvera $A = 17329^{\circ},72$.

La formule [7] résout aisément les problèmes inverses où l'inconnue est a ; mais si l'inconnue est r ou n , il faut avoir recours à des procédés particuliers. Supposons d'abord que l'inconnue soit r ; on obtiendrait sa valeur en résolvant l'équation [6]; mais cette équation est de degré supérieur par rapport à r . Le plus simple est de procéder par approximations successives. La quantité r ne se composant en général que de degrés centésimes, le binôme $1+kr$ diffère peu de $(1+r)^k$. On a donc approximativement

$$A = a(1+r)^{n+k}, \text{ d'où } \log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n+k}.$$

Soit r , la valeur de r tirée de cette équation; on

la portera dans le dernier facteur de l'équation [6], c'est-à-dire qu'on posera

$$A = a(1+r)^n(1+kr),$$

d'où

$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a - \log(1+kr)}{n}.$$

Soit r_2 la valeur de r tirée de cette relation; on la portera à son tour dans le dernier facteur de l'équation [6], et l'on posera

$$A = a(1+r)^n(1+kr_2),$$

$$\text{d'où } \log(1+r) = \frac{\log A - \log a - \log(1+kr_2)}{n}.$$

En continuant ainsi on obtiendrait r avec une approximation indéfinie, mais généralement la seconde valeur approchée suffira.

Supposons maintenant que l'inconnue soit la durée du placement. Si cette durée était exprimée par un nombre entier d'années, ce nombre serait donné par l'équation [4]. On appliquera donc d'abord cette formule, et si elle donne pour n un nombre entier, l'hypothèse sera justifiée, et l'on aura la durée demandée. Si la valeur de n fournie par la relation [4] n'est pas entière, on en conclura que la durée du placement n'est pas un nombre entier d'années. Mais on peut démontrer dans ce cas que la partie entière de la valeur trouvée pour n est la partie entière du temps inconnu. En effet, soient m et $m+1$ les deux nombres entiers qui comprennent entre eux le second membre de la relation [4], on aura

$$m < \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} < m+1,$$

d'où

$$m \log(1+r) < \log A - \log a < (m+1) \log(1+r)$$

$$\text{ou } \log(1+r)^m < \log \frac{A}{a} < \log(1+r)^{m+1},$$

$$\text{d'où } (1+r)^m < \frac{A}{a} < (1+r)^{m+1}$$

ou encore $a(1+r)^m < A < a(1+r)^{m+1}$, ce qui montre que la durée du placement est comprise entre m et $m+1$, et se compose par conséquent d'un nombre entier m d'années, plus une fraction.

Le nombre n de la formule [6] se trouvant ainsi déterminé et égal à m , on en tire

$$1+kr = \frac{A}{a(1+r)^m} \text{ et } k = \frac{A}{ar(1+r)^m} - \frac{1}{r},$$

ce qui fait connaître la fraction d'année à ajouter au nombre entier.

Comme application de cette méthode, on peut chercher le temps nécessaire pour qu'un capital placé à intérêts composés soit doublé; il suffit de faire $A=2a$; le capital primitif a disparaît de la formule, et l'on trouve, pour la durée cherchée

1° Si le taux est 5 pour 100: 14 ans, 2 mois, 13 jours;

2° — $4\frac{1}{2}$ — 15 ans, 8 mois, 27 jours;

3° — 4 — 17 ans, 8 mois, 1 jour.

Dans des circonstances exceptionnelles, les questions relatives au CRÉDIT FONCIER par exemple (Voy. ce mot), les intérêts, au lieu de se capitaliser, par années, se capitalisent par semestre, c'est-à-dire qu'à la fin de chaque semestre le capital s'augmente des intérêts produits pendant le semestre précédent. En raisonnant comme on l'a fait pour établir la formule [1], on trouvera qu'il faut y rem-

placer r par $\frac{1}{2}r$, et le nombre d'années n par le nombre de semestres, que nous désignerons par N ; on a ainsi

$$A = a \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^N. \quad [8]$$

Si l'on veut comparer les capitaux définitifs produits par un même capital primitif, pendant le même nombre d'années, suivant que les intérêts se capitalisent par année, ou par semestre, il faut remplacer N par $2n$; et si l'on désigne par A' le capital définitif dans la seconde hypothèse, on aura

$$A = a(1+r)^n \quad \text{et} \quad A' = a \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^{2n}.$$

On en tire

$$\frac{A'}{A} = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2}r\right)^2}{1+r} \right]^n = \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{1+r}\right)^n;$$

ainsi A' est plus grand que A , ce que l'on pouvait prévoir.

Si les intérêts se capitalisent par trimestre, comme cela a lieu dans les questions relatives à la CAISSE DE RETRAITES POUR LA VIEillesse (Voy. ce mot), la formule des intérêts composés devient

$$A = a \left(1 + \frac{1}{4}r\right)^t, \quad [9]$$

r désignant toujours le centième du taux annuel de l'intérêt, et t étant le nombre de trimestres qui exprime la durée du placement; on verrait, comme ci-dessus, que le capital définitif est plus grand dans ce système que si les intérêts se capitalisaient par année ou par semestre.

Les intérêts composés donnent lieu à des problèmes très-divers, dont on trouvera des exemples dans nos *Problèmes et Exercices d'arithmétique et d'algèbre*; nous nous contenterons d'indiquer les trois suivants :

I. Une somme de 60000^f a été placée à intérêts composés pendant un certain nombre d'années. Si elle était restée placée un an de moins, le capital définitif eût été inférieur de 3996^f,12; si, au contraire, elle était restée placée un an de plus, le capital définitif eût été supérieur de 4156^f,02. On demande quel était le taux de l'intérêt, et quelle a été la durée du placement. Les conditions de l'énoncé sont exprimées par les deux équations

$$60000^f (1+r)^n - 60000 (1+r)^{n-1} = 3996^f,12,$$

$$60000 (1+r)^{n+1} - 60000 (1+r)^n = 4156^f,02,$$

que l'on peut écrire

$$(1+r)^{n-1} \cdot r = 0,066602,$$

$$(1+r)^n \cdot r = 0,069267,$$

en divisant par 60000^f et mettant en facteur la plus petite puissance de $1+r$.

Si l'on divise ces deux dernières membre à membre, on obtient

$$1+r = \frac{0,069267}{0,066602}, \quad \text{d'où} \quad r = 0,04.$$

Au moyen de cette valeur, la première équation devient

$$(1,04)^{n-1} \cdot 0,04 = 0,066602,$$

d'où l'on tire $n-1=13$, et par conséquent $n=14$. Le taux de l'intérêt est $r > 100$ ou 4^f,04.

II. On a deux sommes, l'une de 24000^f, l'autre de 36000^f, à placer pendant 10 ans à deux taux différents et à intérêts composés. Si l'on place la plus petite somme au taux le plus élevé et la plus

grande au taux le plus bas, on obtiendra un capital définitif de 87474^f,45. Si, au contraire, on place la plus petite somme au taux le plus bas, et la plus grande au taux le plus élevé, on gagnera à cette combinaison 3419^f,73. On demande à quels taux les deux sommes doivent être placées. Soient r et r' l'intérêt annuel de 1^f correspondant à chacun des deux taux, les conditions de l'énoncé seront exprimées par les équations

$$36000 (1+r)^{10} + 24000 (1+r')^{10} = 87474,45,$$

$$24000 (1+r)^{10} + 36000 (1+r')^{10} = 90894,18.$$

Posons $x = (1+r)^{10}$ et $y = (1+r')^{10}$; en divisant par 1000, nous aurons

$$36x + 24y = 87,47445,$$

$$24x + 36y = 90,89418.$$

On en tire, par les méthodes connues,

$$x = 1,6288940 \quad \text{et} \quad y = 1,3439165,$$

d'où l'on déduit, soit par logarithmes, soit à l'aide de la table donnée plus haut,

$$r = 0,03 \quad \text{et} \quad r' = 0,05,$$

les deux taux demandés sont donc 3 pour 100 et 5 pour 100.

III. Une somme a est placée pendant un certain nombre d'années à intérêts composés, en capitalisant les intérêts par semestre; à quel taux eût-il fallu placer la même somme pendant le même temps pour obtenir le même capital définitif, si les intérêts avaient été capitalisés par année? En appelant a le capital primitif, r le taux connu, x le taux cherché, et n le nombre d'années du placement, on devra avoir

$$a(1+x)^n = a \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^{2n},$$

d'où, en divisant par a et extrayant la racine de degré n ,

$$1+x = \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^2$$

$$\text{ou} \quad x = \left(1 + \frac{1}{2}r\right)^2 - 1 = r + \frac{1}{4}r^2.$$

Si, par exemple, on a

$$r = 0,04,$$

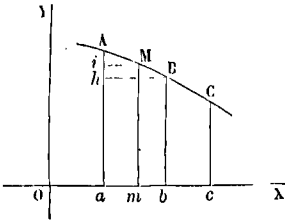
on trouvera $x = 0,0404$.

Dans ce cas, le taux cherché serait 4^f,04 pour 100.

INTERPOLATION GRAPHIQUE, interpolation à l'aide d'une courbe. On sait en quoi consiste le problème général de l'interpolation: étant donnée une série de valeurs d'une fonction, correspondantes à autant de valeurs de la variable indépendante, trouver la valeur que prend cette fonction pour une valeur intermédiaire de la variable. On a à résoudre ce problème toutes les fois qu'on a à se servir d'une table des valeurs d'une fonction; la table ne donne la fonction que pour certaines valeurs de la variable; si l'on veut avoir la fonction pour une valeur intermédiaire entre deux de celles qui sont inscrites dans la table, il faut faire une interpolation. C'est ainsi qu'une table de logarithmes des nombres ne donne que les logarithmes des nombres entiers; si l'on veut obtenir le logarithme d'un nombre fractionnaire, compris entre deux nombres entiers de la table, il faut interpoler. Il existe des méthodes analytiques pour opérer l'interpolation. Lagrange a donné une formule générale pour cet objet, et Newton en a fait connaître une autre pour le cas où la variable croit en progression arithmétique. Ces formules sont exposées dans tous les traités d'algèbre supérieure. Mais elles

sont d'un emploi pénible, souvent même impraticable. Dans la pratique, on suppose, ce qui a presque toujours lieu en effet, que les *différences troisièmes* soient négligeables, et l'on applique la formule de Newton en n'y conservant que les *différences secondes*. Mais elle suppose, comme nous l'avons dit, que la variable croisse en progression arithmétique.

Dans beaucoup de cas, il est plus simple de recourir à un procédé graphique, qui ne suppose aucune loi particulière d'accroissement de la variable. Désignons par y la fonction et par x la variable. Supposons connues trois valeurs y_0, y_1, y_2 de la fonction, correspondantes aux valeurs x_0, x_1, x_2 de la variable, et supposons qu'on demande la valeur de y pour une valeur x' de x , comprise entre x_0 et x_1 . Si l'on pouvait exprimer d'une manière générale y en fonction de x , on aurait une formule qui donnerait la valeur de y pour une valeur quelconque de x , et en particulier pour $x=x'$. Or cette formule serait l'équation d'une courbe; le problème de l'interpolation revient donc à faire passer une courbe par les points qui ont pour coordonnées $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$, et à mesurer l'ordonnée de cette courbe qui correspond à l'abscisse x' . On tracera donc deux axes OX, OY quelconques; il est



commode de les prendre rectangulaires. On construira le point A qui a pour coordonnées

$$Oa = x_0 \text{ et } Aa = y_0,$$

le point B qui a pour coordonnées

$$Ob = x_1 \text{ et } Bb = y_1;$$

puis le point C qui a pour coordonnées

$$Oc = x_2 \text{ et } Cc = y_2.$$

Par les points A, B, C ainsi obtenus, on fera passer une courbe continue. On portera ensuite sur l'axe des x une longueur $Om = x'$; par le point m on fera passer l'ordonnée mM ; la longueur de cette ordonnée sera la valeur y' de la fonction proposée correspondante à la valeur x' de la variable.

Le problème de l'interpolation est indéterminé, comme on le voit, puisque par les points A, B, C, on peut faire passer une infinité de courbes. Mais on trace la courbe de manière qu'elle s'éloigne le moins possible de la ligne brisée inscrite ayant pour sommets les points A, B, C.

Quand les trois points sont très-rapprochés, la portion de courbe, quelle qu'elle soit, comprise entre deux de ces points, entre A et B par exemple, diffère très-peu d'une ligne droite. On a très-sensiblement dans ce cas.

$$Ai : Ah = im : ab$$

$$\text{ou } Aa - Mm : Aa - Bb = am : ab,$$

c'est-à-dire que la variation de la fonction est proportionnelle à la variation de la variable. C'est sur cette proportionnalité qu'est fondé le procédé employé pour calculer le logarithme d'un nombre qui

ne se trouve pas dans la table, ou du moins la *partie proportionnelle* qu'il faut ajouter au plus petit des logarithmes de la table comprenant le logarithme cherché pour obtenir ce logarithme. L'interpolation telle qu'on la pratique à l'aide des différences tabulaires, dans les tables des logarithmes des nombres et dans les tables des logarithmes des lignes trigonométriques, revient donc à supposer que la courbe qui exprime la loi de variation de la fonction, se confond avec une ligne droite dans l'intervalle que l'on considère.

INTERSECTION (MÉTHODE D'), méthode de lever des plans dans laquelle chaque point est déterminé par l'intersection de deux droites. (Voy. LEVER DES PLANS.)

INTERSECTION DE DEUX DROITES JALONNÉES. Voy. JALONNER.

INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS. (Géométrie descriptive).

I. INTERSECTION DE DEUX DROITES. Pour que deux droites aient un point commun, il faut que leurs projections horizontales se coupent et qu'il en soit de même de leurs projections verticales; il faut de plus que les points d'intersection de ces projections soient les projections d'un même point de l'espace, c'est-à-dire qu'elles soient situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Quand cette condition est remplie, on peut affirmer que les deux droites données se coupent, et l'on a immédiatement le point d'intersection.

Il n'y a de difficulté que lorsque les deux droites sont dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et ne sont données que par leurs traces. Il faut alors rabattre le plan des deux droites sur l'un des plans de projection pour déterminer le point commun, et par suite les projections de ce point.

Soient a et b' (fig. 1) les traces de la première

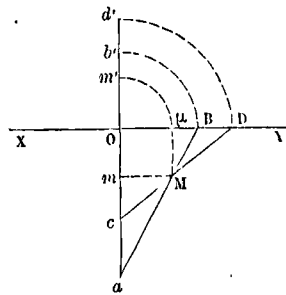


Fig. 1.

droite, c et d' celles de la seconde, situées toutes les quatre sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Concevons que l'on fasse tourner le plan des deux droites autour de sa trace horizontale Oa pour le rabattre sur le plan horizontal; les traces a et c ne changeront pas de place; les traces b' et d' viendront sur la ligne de terre en B et D, en décrivant des arcs de cercle dont O est le centre. Les deux droites se rabatront donc en aB et en cD . Soit M le point commun; en abaissant de ce point la perpendiculaire Mm sur la trace Oa du plan rabattu, on aura en m la projection horizontale du point M relevé; pour obtenir la projection verticale, il faut abaisser du point M sur la ligne

de terre la perpendiculaire $M\mu$, et décrire du point O comme centre l'arc $\mu m'$; le point m' ainsi obtenu est la projection verticale demandée. En effet, dans la rotation autour de Oa le point M décrit un arc de cercle qui est parallèle au plan vertical et qui se projette par conséquent suivant une parallèle à la ligne de terre sur le plan horizontal, et suivant un arc de même rayon sur le plan vertical.

II. INTERSECTION DE DEUX PLANS. Dans les cas ordinaires, la recherche de cette intersection n'offre aucune difficulté. Soient $P\alpha P'$ et $P\beta P'$ (fig. 2) les

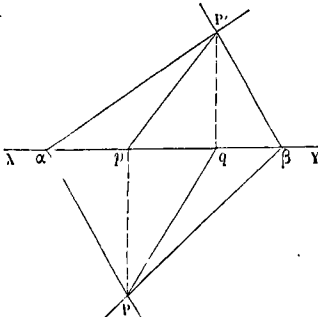


Fig. 2.

deux plans donnés. Le point P où se coupent les traces horizontales est un point commun aux deux plans; et, comme il est dans le plan horizontal, c'est la trace horizontale de l'intersection demandée. De même, le point P' où se rencontrent les traces verticales des plans donnés est la trace verticale de leur intersection. Tout se réduit donc à trouver les projections d'une droite dont on a les traces. Or il suffit pour cela d'abaisser des points P et P' sur la ligne de terre les perpendiculaires Pp et $P'q$, et de joindre Pq et $P'p$; ce sont les projections demandées. (Voy. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.)

Mais il y a divers cas particuliers où la construction ci-dessus est en défaut.

1. Il peut arriver, en premier lieu, que les traces des deux plans se rencontrent en un même point de la ligne de terre, comme αP et $\alpha P'$, αR et $\alpha R'$ (fig. 3). Dans ce cas, il suffit de transporter le plan

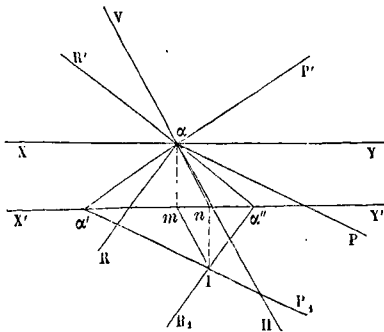


Fig. 3.

horizontal parallèlement à lui-même pour faire disparaître la difficulté. Soit $X'Y'$ la nouvelle ligne de terre. Les traces verticales $\alpha P'$ et $\alpha R'$ ne changent pas; il suffit de les prolonger jusqu'en α' et en

α'' . Quant aux nouvelles traces horizontales, elles sont évidemment parallèles aux anciennes, puisque les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles; on les obtiendra donc en menant $\alpha'P$, parallèle à αP , et $\alpha''R$, parallèle à αR . On peut alors appliquer la construction indiquée ci-dessus, et déterminer les projections $I m$ et αn de l'intersection. Pour revenir à l'ancien plan horizontal, on remarque que la projection verticale αn ne change pas; il suffit de la prolonger en αV ; quant à la projection horizontale, elle reste parallèle à l'ancienne; on l'obtient donc en menant αH parallèle à mI . Ainsi αH et αV sont les projections, sur les plans primitifs, de l'intersection demandée.

2. Il peut arriver que les deux plans donnés soient tous deux parallèles à la ligne de terre. Dans ce cas, il est nécessaire de les couper par un plan auxiliaire, de construire l'intersection de ce plan auxiliaire avec chacun des deux proposés, et de déterminer le point commun aux deux intersections obtenues. Ce point commun est un point de l'intersection des deux plans proposés, et, comme cette intersection doit être parallèle à la ligne de terre, on obtient aisément ses projections.

Soient PQ , $P'Q'$ (fig. 4) les traces du premier

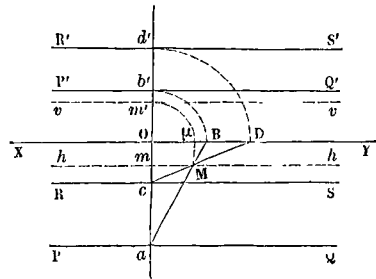


Fig. 4.

plan, RS , $R'S'$ celles du second. Pour plus de simplicité on prend le plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre. Soient a , b' , c , d' les points où ses traces coupent celles des plans donnés. L'intersection du plan auxiliaire avec le plan PQ , $P'Q'$ est la droite qui, dans l'espace, va du point a au point b' ; et l'intersection du plan auxiliaire avec le plan RS , $R'S'$, est la droite qui, dans l'espace, va du point c au point d' . Si l'on rabat le plan auxiliaire sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de Oa , les points b' et d' viendront sur la ligne de terre en B et D ; et les deux droites dont il s'agit se rabatront en αB et en αD . Soit M le point commun à ces deux droites; en le relevant on obtiendra, comme il a été dit à l'occasion de la figure 1, ses projections m et m' . Par ces points on mènera donc des droites hh et vv parallèles à la ligne de terre; ce seront les projections de l'intersection demandée.

3. Il peut arriver que les traces des deux plans donnés ne se rencontrent pas dans le cadre de l'épure.

On tourne cette difficulté en coupant les deux plans proposés par deux plans auxiliaires horizontaux. Soient $P\alpha P'$ et $R\beta R'$ (fig. 5) les deux plans proposés. Soit $a'b'$ la trace verticale d'un plan horizontal auxiliaire. Ce plan coupe $P\alpha P'$ suivant une

horizontale parallèle à αP , et dont la trace verticale est a' ; on obtient sa projection horizontale en abaissant $a'a$ perpendiculaire à la ligne de terre, et menant am parallèle à αP . Le plan auxiliaire

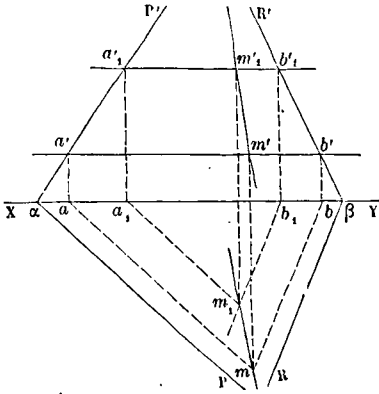


Fig. 5.

coupe $R\beta R'$ suivant une horizontale parallèle à βR , et dont la trace verticale est β' ; on obtient sa projection horizontale en abaissant $\beta'b$ perpendiculaire sur XY , et menant bm parallèle à βR . Le point m où les droites am et bm se rencontrent, est donc la projection horizontale d'un point commun aux deux plans proposés. La projection verticale correspondante m' doit être située sur $a'b'$, et on l'obtient en élevant par le point m une perpendiculaire à la ligne de terre. En employant un second plan horizontal auxiliaire, on obtiendra de même les projections m_1 et m'_1 d'un second point commun aux deux plans proposés. En joignant donc mm_1 et $m'm_1$, on aura les projections de l'intersection demandée.

4. On a pu remarquer dans le cours de la démonstration précédente comment on obtient l'intersection d'un plan donné avec un plan horizontal. On a, comme dans le cas général, la trace verticale de l'intersection doit être parallèle à la trace horizontale du premier plan, puisque c'est une horizontale; pour obtenir la projection horizontale de l'intersection demandée, il suffit donc de projeter la trace verticale de cette intersection sur la ligne de terre, et de mener, par le point ainsi obtenu, une parallèle à la trace horizontale du premier plan. Quant à sa projection verticale, elle se confond évidemment avec la trace verticale du plan horizontal donné.

On verrait de même que, pour obtenir la projection verticale de l'intersection d'un plan donné avec un plan parallèle au plan vertical, il faut, du point de rencontre des traces horizontales abaisser une perpendiculaire sur la ligne de terre, et mener, par le pied de cette perpendiculaire, une parallèle à la trace verticale du premier plan. Quant à la projection horizontale, elle se confond avec la trace horizontale du second plan, parallèle au plan vertical de projection.

5. Si l'un des deux plans donnés était horizontal et l'autre parallèle au plan vertical de projection, les traces de ces deux plans seraient elles-mêmes les projections de l'intersection demandée.

Si les deux plans donnés étaient verticaux, leur intersection serait verticale; elle aurait pour projection horizontale le point commun aux traces horizontales des deux plans, et pour projection verticale une perpendiculaire à la ligne de terre, passant par ce point commun.

De même, si les deux plans donnés étaient tous deux perpendiculaires au plan vertical de projection, leur intersection serait elle-même perpendiculaire à ce plan; sa projection verticale serait le point commun aux traces verticales des deux plans donnés, et sa projection horizontale serait une perpendiculaire à la ligne de terre passant par ce point commun.

III. INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. La méthode consiste à mener un plan par la droite donnée, à construire l'intersection de ce plan avec le plan donné, et à déterminer le point commun à cette intersection et à la droite donnée. Le plan auxiliaire pouvant être choisi d'une infinité de manières, on prend ordinairement, pour plus de simplicité, le plan qui projette la droite sur l'un des plans de projection, sur le plan horizontal, par exemple. Soit $P\alpha P'$ (fig. 6) le plan donné, et ab ,

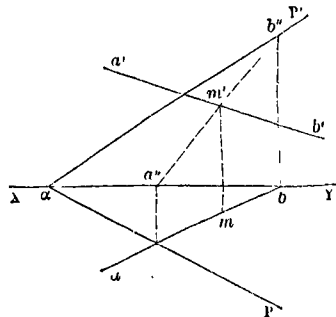


Fig. 6.

$a'b'$ les projections de la droite donnée. Le plan qui projette cette droite sur le plan horizontal a pour trace horizontale ab , et pour trace verticale la droite bb'' perpendiculaire à la ligne de terre. Les points de rencontre des traces des deux plans sont donc les points a et b'' ; et, par suite, la projection verticale de leur intersection s'obtiendra en abaissant aa'' perpendiculaire sur la ligne de terre, et joignant $a''b''$. Quant à la projection horizontale de cette intersection, c'est la droite ab elle-même. Cela posé, les projections verticales $a'b'$ et $a''b''$ se coupent en un point m' , qui est la projection verticale du point où la droite donnée perce le plan donné; et la projection horizontale correspondante m est située à la rencontre de ab avec une perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point m' .

On arriverait au même résultat en prenant pour plan auxiliaire le plan qui projette la droite donnée sur le plan vertical.

Les constructions qui viennent d'être indiquées peuvent servir à trouver le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan. Mais on le détermine plus souvent d'une autre manière. [Voy. DISTANCES (Problèmes sur les).]

IV. Il arrive fréquemment que le point de rencontre d'un plan avec la ligne de terre est situé

nors du cadre de l'épure, et l'on peut avoir à résoudre ce problème : *Étant donné l'une des traces d'un plan et un point de l'autre trace, trouver sa direction.* Soit PP' (fig. 7) la trace horizontale

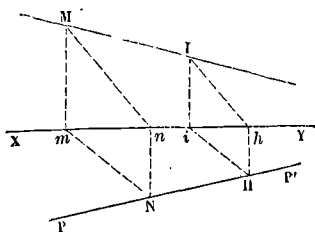


Fig. 7.

d'un plan, et M un point de sa trace verticale. On mènera par le point M une droite quelconque dans le plan donné; comme le point M est la trace verticale de cette droite, il suffit de prendre sur PP' un point quelconque N pour sa trace horizontale; abaissant des points M et N sur la ligne de terre les perpendiculaires Mm et Nn , on a en mN et Mn les projections de la droite dont il s'agit. Cela fait, on choisit sur PP' un second point quelconque H , et par ce point on mène une parallèle à la première droite; pour cela on abaisse Hh perpendiculaire sur la ligne de terre, on mène Hh parallèle à Nm , et hI parallèle à nM . On élève enfin iI perpendiculaire à XY ; le point I ainsi obtenu est la trace verticale de la parallèle qu'on vient de mener. Or, cette parallèle étant dans le plan donné, sa trace I est un point de la trace verticale de ce plan; pour avoir la direction de cette trace, il suffit donc de joindre MI . Cette construction est d'un usage continu. — Au lieu de mener par le point H une parallèle à la première droite, on pourrait le joindre à un point quelconque pris sur cette première droite; on aurait encore ainsi une seconde droite du plan, et par conséquent sa trace verticale appartiendrait encore à la trace verticale du plan. Mais il est plus commode en général de se servir d'une parallèle.

V. Nous terminerons par la solution d'un problème que l'on a fréquemment à résoudre dans les questions relatives aux surfaces réglées (*Voy. SURFACES COURBES*); c'est celui-ci : *Étant données deux droites et un point, situés comme on voudra dans l'espace, mener par ce point une troisième droite qui rencontre les deux premières.* La méthode consiste à mener un plan par le point donné et par la première droite donnée, à chercher l'intersection de ce plan avec la seconde droite, et à joindre cette intersection au point donné; la ligne de jonction est la droite demandée. En effet : elle passe par le point donné; elle rencontre, en général, la première droite, puisqu'elle est dans un même plan avec elle; enfin elle rencontre la seconde. — La figure 8 montre la suite des opérations. Les projections des deux droites données sont ab , $a'b'$ et cd , $c'd'$; celles du point donné sont m et m' . Par ce point on mène une parallèle à la première droite : ses projections sont $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$. On joint les traces a , α et b' , β' des deux parallèles; on obtient ainsi les traces du plan contenant le point donné et la pre-

mière droite donnée. On cherche, par la méthode exposée ci-dessus (fig. 6) le point où ce plan est rencontré par la seconde droite. Pour cela, on mène ck et dk perpendiculaires à la ligne de terre,

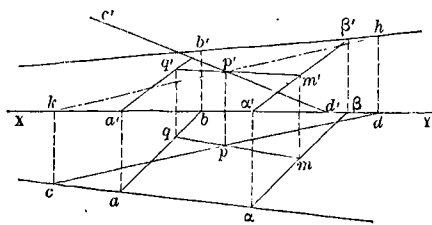


Fig. 8.

et l'on joint kh , qui rencontre $c'd'$ en un point p' ; par ce point on fait passer une perpendiculaire à la ligne de terre, qui rencontre cd en un point p ; les points p et p' sont les projections du point demandé. On joint alors $m'p'$, qui rencontre $a'b'$ en un point q' , et mp qui rencontre ab en un point q ; les points q et q' doivent être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. La droite dont les projections sont mpq , $m'p'q'$ est la droite demandée.

INTERSECTIONS DE SURFACES (Géométrie descriptive). La méthode générale pour construire l'intersection de deux surfaces a été indiquée par Monge. Si S et S' désignent les deux surfaces données, on choisit une surface auxiliaire variable Σ dont on sache construire les intersections A et A' avec les deux surfaces données. Si les courbes A et A' se coupent en un point M , ce point appartient évidemment aux deux surfaces S et S' , et est par conséquent un point de l'intersection demandée. En faisant varier la surface auxiliaire Σ , on peut obtenir ainsi autant de points que l'on veut de cette intersection.

I. Les surfaces auxiliaires que l'on emploie sont ordinairement des plans. Cependant il peut arriver qu'il soit plus commode d'employer des sphères; nous en ferons connaître des exemples.

S'il s'agit de deux surfaces cylindriques, on se sert de plans auxiliaires parallèles à la fois aux génératrices des deux cylindres; ces plans coupent les deux cylindres suivant des génératrices, dont les points communs sont faciles à obtenir.

S'il s'agit d'un cylindre et d'un cône, on mène par le sommet du cône des plans auxiliaires parallèles aux génératrices du cylindre; ces plans coupent encore les deux surfaces suivant des génératrices.

S'il s'agit de deux cônes, on fait passer les plans auxiliaires par les sommets des deux cônes; ces plans coupent encore les deux surfaces suivant des génératrices.

Si l'on avait à construire l'intersection d'une surface réglée quelconque avec un cylindre, on mènerait par les génératrices de la surface réglée des plans auxiliaires parallèles aux génératrices du cylindre.

Pour obtenir l'intersection d'une surface réglée et d'un cône, on mènerait les plans auxiliaires par le sommet du cône et par les génératrices de la surface réglée.

L'intersection d'une surface de révolution avec un cône ou un cylindre s'obtient en coupant les deux surfaces par des plans auxiliaires perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution.

Quand la base du cône ou du cylindre est un cercle, et que, comme on le suppose d'ordinaire, l'axe de révolution est perpendiculaire au plan de cette base, on obtient ainsi des couples de cercles qui se projettent en vraie grandeur sur le plan de la base, et dont il est par conséquent facile de déterminer les points communs. Si la base du cône ou du cylindre n'est pas un cercle, on aurait à construire par points l'intersection de chaque plan auxiliaire avec ce cône ou ce cylindre. On évite cette difficulté en faisant usage de projections obliques. Si, par exemple, il s'agit d'une surface de révolution et d'un cylindre, on projette les parallèles de la surface de révolution sur le plan de la base du cylindre, non plus par des perpendiculaires à cette base, mais par des parallèles aux génératrices du cylindre; la projection est un cercle égal au parallèle projeté; d'un autre côté, l'intersection du plan auxiliaire avec le cylindre se projette suivant la base même de ce cylindre; et il devient facile de déterminer les points communs. S'il s'agit d'une surface de révolution et d'un cône, on projette les parallèles de la surface par des droites issues du sommet du cône; la projection est un cercle, dont il est facile de trouver le centre et le rayon; l'intersection du plan auxiliaire avec le cône se projette d'ailleurs ainsi suivant la base du cône, et la détermination des points communs n'offre plus aucune difficulté.

On peut avoir à construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent; il est commode dans ce cas d'employer pour surfaces auxiliaires des sphères. Soient S et S' les deux surfaces; on prend le plan vertical de projection parallèle au plan de leurs axes, et pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe de l'une d'elles, de la première par exemple. Désignons par O le point de concours des deux axes. Si l'on conçoit une sphère ayant le point O pour centre, elle coupera les deux surfaces suivant deux parallèles de ces surfaces; ces parallèles se projettent verticalement suivant des droites; le point commun à ces droites sera la projection verticale des points communs aux deux parallèles, et l'on en déduira aisément les projections horizontales correspondantes.

On peut même, comme l'a montré M. Dunesme, étendre cette méthode au cas où la surface S' serait un ellipsoïde à trois axes inégaux, pourvu que l'axe moyen de la surface fût alors perpendiculaire au plan vertical. En effet, les sections circulaires de l'ellipsoïde se projettent alors suivant des droites sur le plan vertical. Si l'on considère une de ces sections, que par son centre on élève une perpendiculaire à son plan, cette perpendiculaire ira rencontrer l'axe de la surface de révolution S en un point O ; et si l'on conçoit la sphère qui a le point O pour centre et qui contient la section circulaire considérée, elle coupera la surface de révolution suivant un parallèle, qui se projettera sur le plan vertical suivant une droite. La solution du problème sera donc la même que dans le cas de deux surfaces de révolution, avec cette seule différence que les sphères auxiliaires, au lieu d'être décrites d'un

centre fixe, se trouvent décrites d'un centre O variable situé sur l'axe de révolution.

II. A mesure que l'on détermine un point de l'intersection de deux surfaces, il est utile pour le tracé de déterminer en même temps la tangente en ce point. Or, cette tangente devant être contenue à la fois dans le plan tangent en ce point à chacune des deux surfaces (*Voy.* PLAN TANGENT), elle n'est autre chose que l'intersection de ces deux plans tangents, ce qui permet de la construire. Pour cela, on détermine ordinairement le point commun aux traces horizontales des deux plans tangents; c'est la trace horizontale de la tangente demandée. Si cette trace n'est pas dans le cadre de l'épure, on se procure un point de la tangente, en coupant les deux plans tangents par un plan auxiliaire; les deux intersections obtenues se coupent elles-mêmes en un point qui appartient aux deux plans tangents et par conséquent à la tangente demandée.

On peut encore déterminer la tangente dont il s'agit en menant les normales aux deux surfaces; le plan de ces normales est perpendiculaire à la tangente demandée.

La construction précédente est en défaut quand les deux surfaces sont tangentes au point considéré, car alors les deux plans tangents se confondent, et il en est de même des normales. Dans ce cas, on détermine les traces horizontales des tangentes en un certain nombre de points de la courbe d'intersection, pris avant et après le point considéré; par ces traces, on fait passer une courbe continue, qui coupe la trace horizontale du plan tangent; le point de rencontre est la trace de la tangente demandée. Ce procédé est toujours d'une exactitude suffisante dans les applications. Si les traces des tangentes dont il vient d'être parlé n'étaient pas dans le cadre de l'épure, on les y ramènerait en transportant le plan horizontal parallèlement à lui-même. (*Voy.* CHANGEMENT DE PLANS DE PROJECTION.)

On demande quelquefois le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe d'intersection. Ce qui caractérise ces points, c'est que la tangente γ est horizontale. Il en résulte que les plans tangents aux deux surfaces en chacun de ces points ont des traces horizontales parallèles. Cette remarque sert à les déterminer par tâtonnement. On régularise ce tâtonnement en faisant usage d'une courbe d'ERREUR (*Voy.* ce mot), que l'on peut tracer de plusieurs manières.

On emploierait des procédés analogues pour déterminer les points de l'intersection le plus rapproché et le plus éloigné du plan vertical, ou encore les points situés à droite et à gauche, où la tangente est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Mais quand le tracé des projections de la courbe d'intersection est fait avec assez de soin, ces divers points s'obtiennent par le tracé même avec une exactitude suffisante.

III. La courbe d'intersection peut avoir des branches infinies; et si ces branches ont des asymptotes rectilignes, il est utile de les déterminer.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de l'intersection d'un cylindre et d'un cône. La circonstance dont nous parlons se présentera si, parmi les génératrices du cône, il y en a une G qui soit parallèle

aux génératrices du cylindre, et qu'en même temps elle soit intérieure à ce cylindre; toutes les génératrices du cône rencontreront alors la surface cylindrique, à l'exception de celle, G , qui est parallèle aux génératrices de ce cylindre. Le plan tangent au cône suivant cette génératrice coupera le cylindre suivant deux génératrices g , g' parallèles à celle-ci; ce seront les asymptotes de la courbe. En effet, la génératrice G ne peut rencontrer les génératrices g et g' qui lui sont parallèles; mais si par la génératrice G on mène un plan sécant faisant avec le plan tangent un angle aussi petit qu'on le voudra, ce plan rencontrera le cône suivant deux génératrices que nous appellerons G_1 et G_2 , et le cylindre suivant deux autres génératrices que nous désignerons par g_1 et g_2 . Or, G_1 et G_2 rencontrant G au sommet du cône, rencontreront g_1 et g_2 qui sont parallèles à G et situées dans le plan sécant. Ainsi, la courbe d'intersection rencontrera toutes les génératrices du cylindre, à l'exception de g et de g' ; elle les rencontrera d'ailleurs d'autant plus loin du sommet que le plan sécant se rapprochera d'avance du plan tangent, et que par conséquent les génératrices g_1 et g_2 se rapprocheront elles-mêmes davantage de g et de g' . Donc ces dernières droites sont des asymptotes de la courbe d'intersection. Les projections de ces droites seront par conséquent asymptotes des projections de la courbe, hors le cas exceptionnel où l'asymptote serait perpendiculaire à l'un des plans de projection. Mais dans ce cas la projection de la courbe passerait évidemment par le point projection de l'asymptote.

Pour reconnaître si le cône donné a une génératrice parallèle aux génératrices du cylindre donné, on mène par la projection verticale du sommet du cône une parallèle à la projection verticale des génératrices du cylindre; la droite ainsi menée peut être considérée comme la projection verticale d'une génératrice du cône; on détermine la projection horizontale de chacune des génératrices correspondantes; il reste à voir si l'une d'elles est parallèle à la projection horizontale des génératrices du cylindre.

Supposons qu'il s'agisse de l'intersection de deux cônes. La courbe d'intersection aura des branches infinies si une génératrice G du premier cône est parallèle à une génératrice G' du second; ces deux génératrices sont, en effet, comprises dans l'un des plans auxiliaires menés par les sommets des deux cônes, et elles donnent par leur rencontre à l'infini un point de l'intersection cherchée. Donc la courbe d'intersection a des branches infinies. Son asymptote s'obtient d'ailleurs, comme ses autres tangentes, par l'intersection des plans tangents au point commun des deux surfaces, c'est-à-dire ici par l'intersection des plans tangents menés aux deux surfaces suivant les génératrices parallèles G et G' . Cette asymptote est évidemment parallèle à G et à G' .

Pour reconnaître si deux cônes C et C' ont des génératrices parallèles, on se sert d'un cône auxiliaire C'' semblable à C et ayant le même sommet que C' . Les deux cônes C et C'' ont, à cause de leur similitude, leurs génératrices homologues parallèles; si donc une génératrice G du cône C est parallèle à une génératrice G' du cône C' , les deux cônes C'' et C' auront une génératrice commune, qui sera précisément G' . Les traces horizontales des

cônes C'' et C' devront donc avoir un point commun: ce sera la trace horizontale de G' ; cette génératrice sera ainsi déterminée, ainsi que sa parallèle G . Il y aura autant de couples de génératrices parallèles dans les deux cônes donnés qu'il y aura de points communs entre les traces horizontales des deux cônes C' et C'' .

Il pourrait arriver que les traces horizontales des deux cônes C' et C'' fussent tangentes au point commun, trace de la génératrice commune G' . Dans ce cas, les plans tangents aux deux cônes suivant les génératrices parallèles G et G' seraient parallèles, et l'asymptote s'éloignerait à l'infini. C'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe d'intersection, bien qu'ayant des branches infinies, n'aurait pas d'asymptote rectiligne parallèle à la direction des génératrices G et G' .

IV. Dans chaque problème d'intersection de surfaces, on détermine ordinairement à l'avance les limites entre lesquelles on doit mener les surfaces auxiliaires. Cette détermination n'offre jamais de difficulté; nous en donnerons des exemples plus loin; mais il serait impossible de formuler à cet égard aucune règle générale, et l'inspection des données suffit pour faire connaître les limites relatives au cas que l'on traite.

V. Les surfaces qui se coupent peuvent avoir l'une par rapport à l'autre deux positions que l'on a caractérisées par des dénominations particulières. Pour les faire comprendre, considérons d'abord deux cylindres. Si toutes les génératrices de l'un pénétrant dans la surface de l'autre, et la coupent ainsi en deux points, la courbe d'intersection se compose de deux courbes distinctes, dont l'une prend le nom de *courbe d'entrée*, et l'autre celui de *courbe de sortie*; et l'on caractérise la position mutuelle des deux surfaces en disant qu'il y a *pénétration*. Si une partie seulement des génératrices de l'un des deux cylindres pénètre dans la surface de l'autre, la courbe d'intersection est une courbe unique et fermée; on dit alors qu'il y a *arrachement*. Il y a une troisième position mutuelle qui sert de limite entre les deux précédentes, c'est celle où toutes les génératrices du premier cylindre pénètrent dans la surface du second, à l'exception de l'une d'elles qui est tangente à la seconde surface. Dans ce cas, les deux cylindres ont un plan tangent commun, et leur position mutuelle, qui n'a pas reçu de nom particulier, pourrait être caractérisée par la dénomination de *pénétration tangentielle*, ou de *pénétration avec plan-tangent commun*.

Pour étendre ces considérations aux autres surfaces, imaginons d'abord deux surfaces tangentes extérieurement; si l'on fait marcher la seconde vers la première, parallèlement à elle-même, et dans le sens de la normale à cette seconde surface, chacune des deux surfaces entrera en partie dans l'autre, et semblera en détacher, en arracher une portion, et il y aura *arrachement*. Si l'on continue à faire marcher la seconde de plus en plus dans le même sens, il arrivera, si son étendue dans le sens de cette normale est limitée et moindre que celle de la première surface, qu'elle finira par se trouver environnée par cette première surface, sur une certaine portion de son étendue, et il y aura *pénétration* de la seconde surface dans la première. Il y aurait *pénétration tangentielle* si l'on arrêtait la

mouvement de la seconde surface au moment où elle devient tangente intérieurement à la première.

Ces positions mutuelles peuvent encore être caractérisées d'une autre manière. Lorsque deux surfaces se coupent, elles circonscrivent en général une certaine partie de l'espace, à laquelle on a donné le nom de *solide commun*. Si ce solide commun n'a que deux parois, continues toutes deux, et

appartenant l'une à la première surface, l'autre à la seconde, il y a *arrachement*. Si le solide commun a trois parois, l'une continue, appartenant à la première surface, les deux autres séparées et appartenant à la seconde surface, il y a *pénétration* de la seconde surface dans la première. Dans le cas de la *pénétration tangentielle*, les deux parois séparées, appartenant à la seconde surface, viennent se rejoindre en un point, et la courbe d'intersection

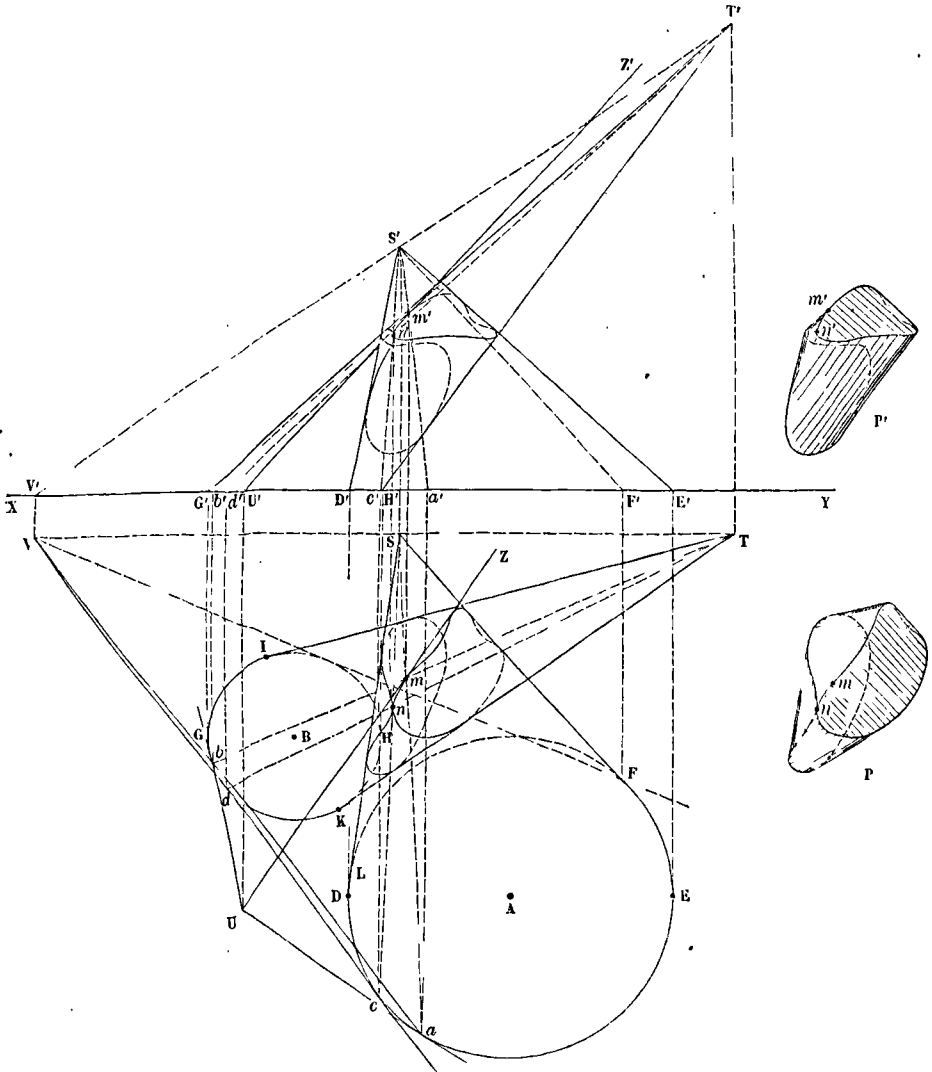


Fig. 1.

des deux surfaces présente un point double, qui est le point de contact de ces deux surfaces.

Dans les cas de pénétration des surfaces du second ordre, que l'on rencontre fréquemment dans les applications, on emploie utilement cette propriété facile à démontrer par le calcul, savoir : que si la *courbe d'entrée est plane, il en est de même de la courbe de sortie*. Il peut arriver que ces deux courbes se confondent en une seule; dans ce cas, les deux

surfaces sont tangentes le long de cette courbe commune.

VI. Il nous reste à développer quelques exemples. Nous les choisirons de manière à passer en revue les particularités les plus intéressantes,

1. *Intersection de deux cônes* (fig. 1). Le sommet du premier cône est S, S'; sa base est le cercle A, ou DE, ayant pour projection verticale D'E'. Le sommet du second cône est T, T'; sa base est le

cercle B, projeté verticalement en $G'H'$. Le contour apparent du premier cône est limité sur le plan horizontal par les droites SL et SF, sur le plan vertical par les droites $S'D'$ et $S'E'$; le contour apparent du second cône est limité de même, sur le plan horizontal, par les droites TI et TK, et sur le plan vertical par les droites $T'G'$ et $T'H'$. Par les sommets des deux cônes, on mène une droite, qui a pour projections TS et $T'S'$; et l'on détermine sa trace horizontale V, V' . Par le point V on mène une droite quelconque Vba , qui coupe les bases des deux cônes en des points a et b . Cette droite peut être considérée comme la trace horizontale d'un plan sécant auxiliaire passant par les sommets des deux cônes, et les points a et b sont alors les traces horizontales de deux génératrices contenues dans le plan sécant. On détermine les projections aS , $a'S'$ et bT , $b'T'$ de ces deux génératrices; elles se coupent aux points m et m' qui sont les projections d'un point commun aux deux cônes, et qui par conséquent doivent, comme vérification, être situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. On obtient par le même procédé autant de points que l'on veut de l'intersection des deux surfaces.

Pour déterminer les tangentes en m et m' , on mène par les points a et b des tangentes aux bases des deux cônes; ce sont les traces horizontales des plans tangents à ces cônes au point commun m , m' . Ces tangentes se coupent en un point U qui est la trace horizontale de l'intersection des deux plans tangents, c'est-à-dire de la tangente en m , m' . Si donc on joint Um, on aura la tangente en m à la projection horizontale de l'intersection; et si l'on projette le point U en U' sur la ligne de terre, et qu'on joigne $U'm'$, on aura la tangente en m' à la projection verticale de cette même intersection. Les droites Um et $U'm'$ sont les projections de la tangente au point m , m' . On déterminerait de la même manière la tangente en un point quelconque de l'intersection. Cette courbe est tracée sur la figure en projection horizontale et en projection verticale; et l'on a eu soin de marquer en points les parties de la courbe qui sont cachées, et en lignes pleines celles qui sont vues.

Les projections de la courbe d'intersection sont tangentes aux contours apparents qui leur correspondent. On obtient les points de contact en faisant passer le plan auxiliaire par chacune des génératrices dont une projection appartient à l'un des contours apparents.

On a figuré à part en P et P' le solide commun, sous les deux aspects qu'il présenterait, vu en projection horizontale ou en projection verticale. Les contours curvilignes sont la reproduction de ceux de l'épure; ils sont raccordés par des tangentes rectilignes, qui figurent les portions de génératrices limitant le contour apparent. On a indiqué par des hachures la direction des génératrices des deux cônes, afin de rendre l'image du solide commun plus intelligible.

Cette épure, dont les données sont empruntées aux Notes et croquis de Géométrie descriptive de M. Bardin, présente une particularité: c'est que si par le point V on mène une tangente Vd au cercle B, elle est en même temps tangente en un point C au cercle A, ce qui montre que les deux cônes ont un plan tangent commun, dont la trace horizontale est

Vdc . Pour obtenir le point de contact commun, on mène les projections cS , $c'S'$ et dT , $d'T'$ des génératrices des deux cônes qui ont pour traces horizontales a et b ; ces génératrices se coupent aux points n et n' , qui sont les projections du point cherché, et qui sont situés par conséquent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Ce point est un point double où les deux portions de la courbe d'intersection viennent se toucher. On est ici dans le cas que nous avons désigné sous le nom de pénétration tangentielle, et qui sert de limite entre la pénétration et l'arrachement. Le solide commun est limité par trois parois, comme dans le cas de la pénétration: l'une de ces parois est continue et appartient au cône T, l'autre est divisée en deux parties et appartient au cône S; mais ces deux parties sont rapprochées de manière à avoir un point commun n , n' , et la paroi continue se réduit en n , n' à ce seul point.

La construction de la tangente en n , n' échappe à la méthode générale, puisque les deux plans tangents en ce point aux deux cônes se confondent en un seul, et il faudrait pour déterminer cette tangente avoir recours au procédé approximatif qui a été expliqué plus haut. On ne l'a point figurée sur l'épure, parce que, à l'échelle qu'il a fallu adopter, la construction de la tangente en quelques points voisins de n , n' , en deçà et au delà, eût entraîné trop de confusion.

On remarquera que la droite VF, tangente au cercle B, mais coupant le cercle A, est la limite des positions que peut prendre le plan sécant auxiliaire. L'autre limite est évidemment la tangente commune Vdc .

VII. 2. Intersection d'un cône et d'un cylindre (fig. 2). Le sommet du cône est S, S' ; sa base est le cercle AB projeté en $A'B'$. C'est un cône droit, dont le contour apparent sur le plan vertical est déterminé par les droites $S'A'$ et $S'B''$. Le cylindre a pour base le cercle O; son contour apparent sur le plan horizontal est déterminé par les droites EG, FH, et sur le plan vertical par les droites $C'C''$, $D'D''$.

Par le sommet du cône, on mène une parallèle SI, $S'I'$ aux génératrices du cylindre, et l'on détermine sa trace horizontale I, I' . Par cette trace, on mène une droite quelconque Ip; elle peut être considérée comme la trace horizontale d'un plan auxiliaire, parallèle aux génératrices du cylindre et passant par le sommet du cône. Il coupe le cône suivant une génératrice pS , $p'S'$, et le cylindre suivant une génératrice qg , $q'g'$. Ces deux génératrices se coupent elles-mêmes en un point m , m' , qui est un point de l'intersection cherchée. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de cette intersection.

Pour déterminer la tangente au point m , m' , on mène en p une tangente au cercle S, et en q une tangente au cercle O. Ces tangentes sont les traces des plans tangents au cône et au cylindre suivant les génératrices pS , $p'S'$ et qg , $q'g'$, qui ont le point m , m' commun. Par conséquent le point V, où ces deux tangentes se rencontrent, est la trace horizontale de la tangente au point m , m' . Si donc on joint Vm, on aura la tangente en m à la projection horizontale de l'intersection; et si, après avoir projeté V en V' sur la ligne de terre, on joint $V'm'$, on aura la tangente en m' à la projection verticale de cette

même intersection. On obtiendrait de la même manière la tangente en un point quelconque de l'intersection des deux surfaces.

Les données de l'épure, qui sont empruntées au

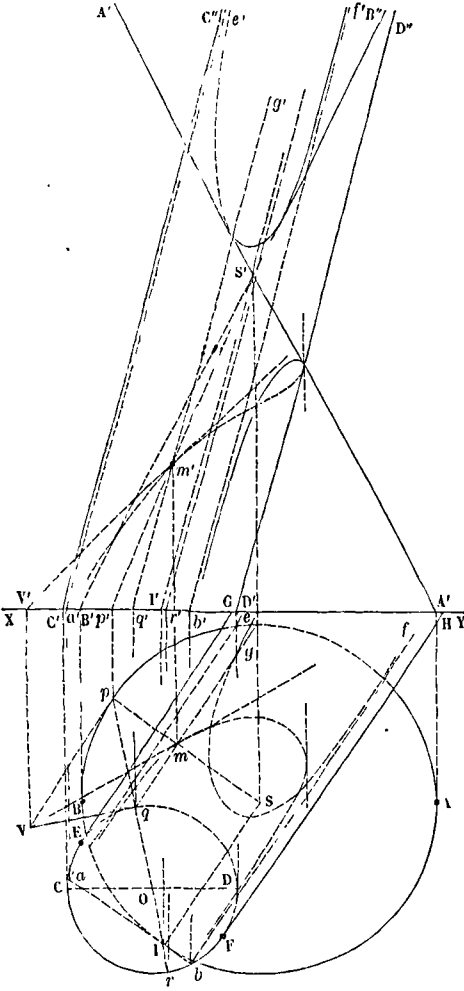


Fig. 2.

Traité de Géométrie descriptive de M. de la Gournerie, présentent une particularité : la trace I de la droite menée par le sommet du cône parallèlement aux génératrices du cylindre, se trouve sur la circonférence S; c'est-à-dire que le cône a une génératrice SI, S'I' parallèle aux génératrices du cylindre. Il en résulte que la courbe d'intersection a des branches infinies, et qu'il y a lieu d'en déterminer les asymptotes.

Pour cela, conformément à ce qui a été expliqué plus haut, menons par le point I la tangente *ab* au cercle S; elle coupe la base du cylindre en des points *a* et *b*, qui sont les traces horizontales de deux génératrices *ae*, *a'e'* et *bf*, *b'f'* du cylindre. Ces génératrices sont les asymptotes de la courbe d'intersection; leurs projections sont donc les asymptotes des projections correspondantes de cette courbe.

La courbe d'intersection est tracée sur la figure 2, elle se compose de deux parties appartenant respectivement aux deux nappes du cône.

VIII. 3. *Intersection d'un cylindre et d'une surface de révolution* (fig. 3). La base du cylindre est une ellipse *ab*; le contour apparent est déterminé sur le plan horizontal par les droites *cd*, *ef*, et sur le plan vertical par les droites *a'a''*, *b'b''*. La surface de révolution est donnée par son axe *O, O''*, perpendiculaire au plan de la base du cylindre, et par la projection verticale *BA'B'* de la section méridienne parallèle au plan vertical, ainsi que par la projection horizontale *OA* de son équateur.

Si l'on employait pour surfaces auxiliaires des plans horizontaux, on aurait, pour chacun d'eux, à construire par points la projection horizontale de son intersection avec le cylindre. On évite ce travail en faisant usage de projections obliques, au moyen de projectantes parallèles aux génératrices du cylindre. Soit *pq* la projection verticale d'un parallèle quelconque de la surface de révolution; le point *i*, situé sur l'axe, sera la projection du centre de ce parallèle. Par ce centre menons une parallèle aux génératrices du cylindre; cette parallèle aura pour projection la droite *Oh* parallèle à *cd*, et la droite *ih'* parallèle à *a'a''*. La trace horizontale *h* de cette droite sera la projection oblique du parallèle considéré sur le plan horizontal. Quant à l'intersection du plan horizontal *pq* avec le cylindre, elle aura pour projection horizontale la courbe *ab*, qui sert de base au cylindre. Si donc on décrit du point *h* comme centre, avec le rayon *hp* du parallèle, une circonférence, et si *n* est un des points où cette circonférence rencontre la base du cylindre, ce point *n* sera la projection oblique d'un point commun aux deux surfaces. Par ce point *n* menons une parallèle aux génératrices du cylindre; elle passera par le point commun dont il s'agit. Projétons *n* en *n'* sur la ligne de terre; menons *nt'* parallèle à *cd* et *n't'* parallèle à *a'a''*, ces droites seront les projections de la parallèle considérée. La droite *n't'* coupe *pq* en un point *m'*, qui est la projection verticale du point cherché; et, en menant par le point *m'* une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de *nt'*, on obtient la projection horizontale *m* du même point. Comme vérification, le point *m* doit se trouver sur la projection horizontale du parallèle *pq*, c'est-à-dire sur la circonférence décrite du point *O* comme centre, avec *ip* pour rayon. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de l'intersection demandée; chaque parallèle, tel que *pq*, en fournit généralement plusieurs, deux ou quatre, suivant que le cercle analogue à *hn* coupe la base du cylindre en deux ou quatre points.

Pour construire la tangente au point *m*, *m'*, on construit les traces horizontales des plans tangents en *m*, *m'* aux deux surfaces. La trace du plan tangent au cylindre s'obtient en menant la tangente en *n* à sa base. La trace du plan tangent à la surface de révolution se construit conformément aux règles données à l'art. PLAN TANGENT. On mène en *p* la tangente *pr'* à la projection *BA'B'* de la section méridienne parallèle au plan vertical; c'est la projection verticale de la tangente à cette section méridienne qui touche la courbe sur le parallèle projeté *pq*; la projection horizontale correspon-

dante est la droite Or parallèle à la ligne de terre. La trace horizontale de cette tangente est donc le point r , dont r' est la projection verticale.

On tire le rayon Om et l'on ramène le point r en s sur la ligne de jonction par un arc de cercle décrit du point O . Le point s est la trace horizontale de la tangente en m, m' au méridien de la surface de révolution. Si donc on mène par le point s une perpendiculaire à Os , on aura la trace horizontale du

plan tangent. Cette trace rencontre en un point V la trace du plan tangent au cylindre; le point V est donc la trace horizontale de la tangente cherchée. Si donc on projette V en V' sur la ligne de terre, et qu'on joigne mV et $m'V'$, on aura les projections de la tangente en m, m' . On opère d'une manière analogue pour construire la tangente en un point quelconque de l'intersection.

Cette courbe est représentée sur la figure 3; les

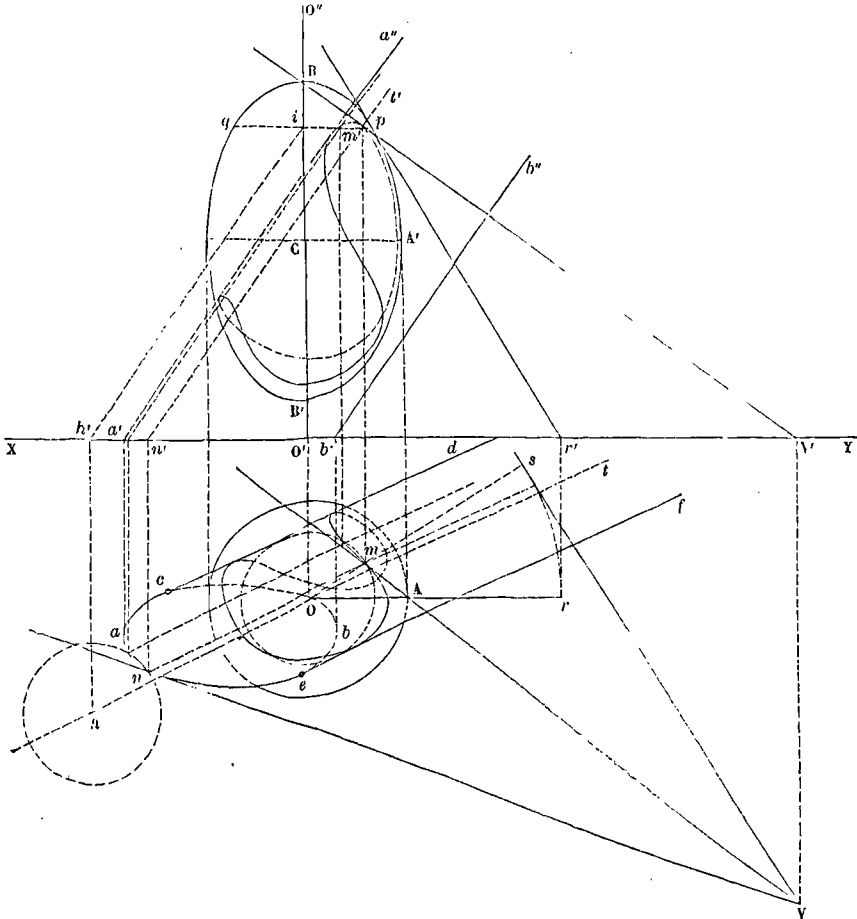


Fig. 3.

parties cachées y sont tracées en points. Les parallèles limites sont ceux dont la projection oblique est tangente à la courbe ab ; au delà ou en deçà on n'obtient plus d'intersection.

IX. 4. *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent* (fig. 4). L'axe de la première surface est vertical et se projette en O et $O'O''$; la section méridienne parallèle au plan vertical est projetée en $MA'NB'$, et l'équateur en AB . L'axe de la seconde surface est parallèle au plan vertical et a pour projections OD et $C'D'$; il coupe le premier au point O, C' . La section méridienne est projetée en $PQRS$. Du point C' comme centre, on décrit un arc de cercle $qrps$, qui coupe les projections des deux sections méridiennes aux points p, q et r, s . Cet arc de cercle figure une sphère dé-

crité du point O, C' ; ou, pour parler plus exactement, c'est la projection verticale de l'intersection de cette sphère avec le plan méridien commun aux deux surfaces et qui a pour trace horizontale AB .— Cette sphère coupe les deux surfaces suivant des parallèles dont le plan est perpendiculaire au plan vertical, et qui ont pour traces verticales les cordes pq et rs . Ces cordes se coupent en un point m qui est la projection verticale d'un point commun aux deux parallèles, et par conséquent aux deux surfaces. On obtient la projection horizontale correspondante en abaissant du point m' une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite du point O , comme centre, avec ip pour rayon, c'est-à-dire jusqu'à la rencontre de la projection horizontale du parallèle pq . Il y a

deux points qui correspondent, en général, à une même projection verticale m' , puisqu'une droite rencontre généralement un cercle en deux points. On obtient de la même manière autant de points que l'on veut de l'intersection demandée.

Pour construire la tangente au point m, m' , il faut construire les plans tangents en ce point aux deux surfaces. Le plan tangent à la première surface s'obtient par les règles ordinaires, rappelées à

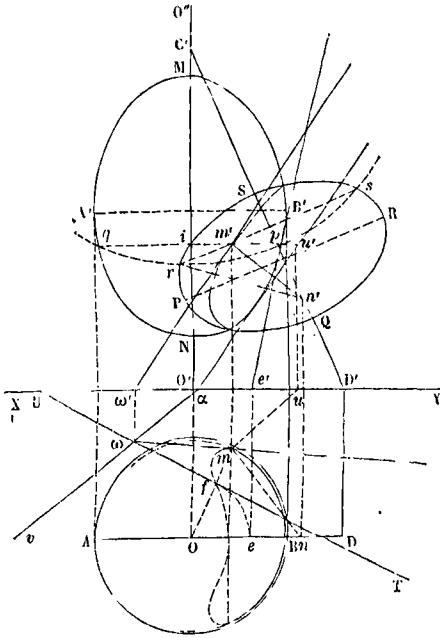


Fig. 4.

l'occasion du problème précédent (Voy. PLAN TANGENT). Sa trace horizontale est une droite UT. Pour construire le plan tangent à la seconde surface, on se sert avec avantage des propriétés de la normale. On sait que toutes les normales aux différents points d'un même parallèle vont rencontrer l'axe en un même point. Si donc on mène la normale à la projection PQRS de la section méridienne, au point r de cette section, le point n' où elle rencontrera la projection verticale $C'D'$ de l'axe, sera la projection verticale d'un point de la normale en m, m' . La projection horizontale correspondante s'obtient en abaissant du point n' une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de OD, en n . En joignant $m'n'$ et mn , on aura les projections de la normale au point m, m' à la seconde surface, et il restera à mener par ce point un plan perpendiculaire à cette normale, problème que l'on sait résoudre. [Voy. PLANS (Problèmes sur les)]. On mènera donc successivement mu perpendiculaire à mn , jusqu'à sa rencontre en u avec la ligne de terre; uu' perpendiculaire à XY jusqu'à la rencontre de pq prolongé en un point u' ; $w'a$ perpendiculaire à $m'n'$, et av perpendiculaire à mn ; ces deux dernières droites seront les traces du plan tangent à la seconde surface. Les deux traces UT et av se coupent en un point ω , qui est la trace de la tangente demandée;

on projettera donc ce point en ω' sur la ligne de terre, et en joignant $m\omega$ et $m'\omega'$, on aura les projections de la tangente en m, m' . On opérera de la même manière pour construire la tangente en tout autre point de l'intersection.

Cette intersection est tracée sur la figure 4; sa projection horizontale est une courbe fermée; sa projection verticale est un arc limité (c est un arc d'ellipse dans l'exemple de la figure 4). Les extrémités de cet arc sont les points d'intersection des projections des deux courbes méridiennes: ce sont les points qui répondent aux sphères limites à employer.

Avec d'autres données, il pourrait arriver, dans le problème actuel et dans le précédent, que la courbe d'intersection eût des branches infinies. Les asymptotes rectilignes, lorsqu'il y en a, se construisent d'après les mêmes principes que les tangentes, en considérant qu'une asymptote est une tangente dont le point de contact est situé à l'infini. Nous ne pourrions, sans sortir des bornes imposées à cet article, insister davantage sur ce point.

X. 5. Intersection d'une surface hélicoïde et d'un cylindre. La surface hélicoïde (fig. 5) est une

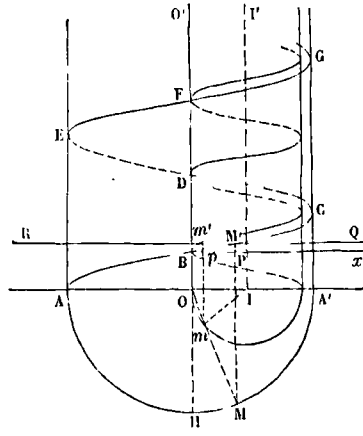


Fig. 5.

surface de vis à filet carré, donnée par son axe OO perpendiculaire à la ligne de terre, et par une hélice directrice qui se projette horizontalement suivant la circonférence AHB, et dont la projection verticale ABCDEFG peut être construite par points, connaissant le pas AE de l'hélice (Voy. HELICE). Le cylindre est un cylindre droit à base circulaire Ob, dont une génératrice est précisément l'axe OO' de la surface hélicoïde.

Les surfaces auxiliaires à employer ici sont des plans horizontaux; chacun d'eux coupe la surface hélicoïde suivant une droite, et le cylindre suivant un cercle égal au cercle de base. Soit PQ la trace verticale d'un de ces plans. Elle coupe la projection verticale de l'hélice directrice en un point M' , qui est la projection verticale du point de cette hélice contenu dans le plan PQ. On obtient la projection horizontale correspondante M en abaissant du point M' une perpendiculaire sur la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la circonférence AHB. Joignons OM; cette droite est la trace horizontale d'un plan vertical passant par le point M, M' et par l'axe OO' de

la surface hélicoïde. Ce plan coupe cette surface suivant une droite horizontale qui a pour projections OM et PQ lui-même. C'est l'intersection du plan PQ avec la surface hélicoïde. L'intersection du plan PQ avec le cylindre a d'ailleurs pour projections le cercle Ob et la droite PQ. Le point *m*, où OM rencontre le cercle Ob, est donc la projection horizontale d'un point commun aux deux intersections considérées, et par conséquent commun aux deux surfaces. On obtient la projection verticale correspondante *m'* en élevant *mm'* perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de PQ. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de l'intersection cherchée.

Mais il est aisé de reconnaître la nature de cette intersection. Prenons pour origine de l'hélice directrice le point situé dans le plan vertical OH et qui se projette en B; soit Bx une parallèle à la ligne de terre, et soient *p* et P les points où cette parallèle est rencontrée par les droites *mm'* et MM'. Par la propriété fondamentale de l'hélice, on aura, en appelant H le pas de l'hélice directrice,

$$M'P : H = HOM : 2\pi.$$

Mais $M'P = m'p$, et l'angle HOM qui, étant formé par une tangente et une corde aboutissant au point de tangence, a pour mesure la moitié de l'arc Om, est lui-même la moitié de l'angle Oim, qui a pour mesure l'arc entier. On peut donc écrire

$$M'p : H = \frac{1}{2} Oim : 2\pi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$m'p : \frac{1}{2} H = Oim : 2\pi,$$

c'est-à-dire que la hauteur du point *m*, *m'* au-dessus du plan horizontal passant en B est proportionnelle à l'angle Oim. Cela revient à dire que la courbe, lieu du point *m*, *m'*, est une hélice dont le pas est $\frac{1}{2}H$, c'est-à-dire la moitié du pas de l'hélice directrice. Et ce résultat est indépendant des rayons OA et OI.

Il est facile dès lors de mener la tangente en un point quelconque de la courbe obtenue.

Les questions relatives aux intersections de surfaces se rencontrent à chaque pas dans les applications, et particulièrement dans celles qui se rapportent à la COUPE DES PIERRES, aux OMBRES et à la PERSPECTIVE (Voy. ces mots, ainsi que l'art. SECTIONS PLANES).

(Voyez, pour plus de détails, les traités spéciaux de Géométrie descriptive, et particulièrement le traité de M. de la Gournerie, déjà cité.)

INTERVALLE, distance entre les projections horizontales de deux points d'une droite dont les cotes diffèrent de 1 mètre. La connaissance de cet intervalle sert à *graduier* la projection de la droite, c'est-à-dire à y marquer les projections des points de la droite qui ont des cotes exprimées par les nombres entiers consécutifs. (Voy. PLANS COTÉS.)

INTRADOS, surface interne d'une voûte (Voy. ce mot), celle que l'on voit par-dessous.

INVERSION DE LA VEINE, phénomène auquel donne lieu l'écoulement d'un liquide par un orifice polygonal. Il consiste en une transformation graduelle de la forme de la section de la veine, à me-

sure qu'elle s'éloigne de l'orifice; de telle sorte qu'à une certaine distance, la section présente des angles là où l'orifice offrait des côtés, et *vice versa*. Par exemple, dans une expérience faite par MM. Poncelet et Lesbros, sur une veine s'écoulant par un orifice carré de 0^m,20 de côté, ils ont obtenu aux distances 0^m,15 et 0^m,30 les sections indiquées par la figure 1. ABCD représente l'orifice; *abcdefgh* est la section de la veine à 0^m,15 de l'orifice; MNOP est la section à la distance de 0^m,30.

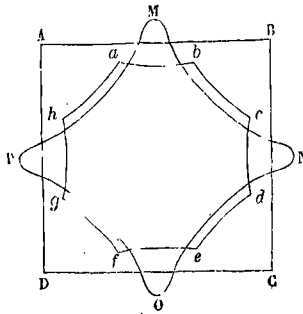


Fig. 1.

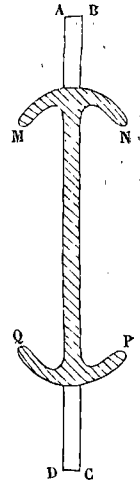


Fig. 2.

Bidone, savant piémontais, a obtenu, avec un orifice pentagonal, une section formant une étoile à cinq branches, dont les pointes correspondaient aux milieux des côtés de l'orifice.

On peut rattacher au même phénomène d'autres modifications bizarres que peuvent offrir les veines jaillissantes par des orifices de formes diverses.

Ainsi M. Lesbros, dans une expérience faite sur une veine qui s'écoulait par un orifice rectangulaire ABCD (fig. 2), de 0^m,60 de haut sur 0^m,02 de large, a obtenu des sections variant de forme avec leur distance à l'orifice, de manière à offrir, à la distance de 1^m,10, la forme singulière représentée en MNPQ. Ces phénomènes sont encore inexplicables.

IONIQUE (ORDRE), l'un des cinq ORDRES D'ARCHITECTURE (Voy. ce mot).

ISOCHRONE (du grec *ισος*, égal, et *χρονος*, temps), qui a la même durée. Se dit des oscillations du pendule (Voy. PENDULE SIMPLE); ces oscillations sont isochrones lorsque l'écart initial est très-petit. Ce mot s'applique aussi aux oscillations du spiral dans les montres ou chronomètres.

La propriété qu'ont les périodes d'un mouvement d'avoir la même durée, constitue l'*isochronisme* de ce mouvement.

ITINÉRAIRES (MESURES), mesures qui servent à évaluer les grandes distances, telles que celles que l'on parcourt dans les voyages. Dans le système métrique, les mesures itinéraires sont le KILOMÈTRE et le MYRIAMÈTRE. On employait autrefois la LIEUE. La LIEUE MARINE est encore employée par les navigateurs. (Voy. les mots en petites capitales.)

J

JACQUARD (MÉTIER À LA). *Voy.* OPÉRATEURS.

JALON, piquet en bois, ferré par le bas, que l'on plante verticalement pour servir de SIGNAL (*Voy.* ce mot), ou pour déterminer sur le terrain la direction d'une ligne droite (*Voy.* JALONNER). Les jalons sont fendus longitudinalement à leur partie supérieure pour recevoir soit un morceau de papier, soit un voyant peint de deux couleurs, blanc et rouge ordinairement, qui permettent de les apercevoir de loin, soit qu'ils se détachent sur le ciel, soit qu'ils se projettent sur des objets sombres. Les jalons se font ordinairement en bois de chêne.

JALONNER UNE DIRECTION, planter une série de jalons dans le plan vertical déterminé par deux signaux, et marquer par conséquent un certain nombre de points sur l'intersection de ce plan vertical avec la surface du terrain. Pour *jalonner une direction*, l'opérateur se place derrière le premier signal, et fait planter par son aide un jalon entre les deux signaux, de manière qu'en regardant dans la direction du second signal, celui-ci soit caché par le jalon; les jalons intermédiaires se placent de la même manière, et lorsqu'ils sont suffisamment rapprochés pour qu'on puisse transporter la chaîne d'arpenteur (*Voy.* CHAÎNE) de l'un à l'autre sans dévier sensiblement de la ligne tracée, la direction est jalonnée. — Lorsque le terrain est très-accidenté, il est nécessaire de rapprocher les jalons pour que, de chacun d'eux, on puisse toujours apercevoir celui qui précède et celui qui suit.

Pour *prolonger une direction jalonnée*, l'opérateur se place derrière l'avant-dernier jalon, et, regardant dans la direction du dernier, il en fait planter un nouveau par son aide, au delà du dernier, de manière à ce qu'il soit caché par celui-ci; on répète cette opération pour chaque jalon nouveau, et l'on prolonge ainsi une direction aussi loin qu'il est nécessaire.

Pour *déterminer le point d'intersection de deux lignes jalonnées*, on chemine sur la première jusqu'à ce qu'on se trouve sur la seconde; on est certain d'être au point cherché quand chaque série de jalons se trouve cachée par le jalon le plus voisin dans cette direction; on plante un nouveau jalon au point ainsi déterminé.

JAMBAGE, l'un des montants verticaux qui limitent la baie d'une porte ou d'une fenêtre; on lui donne aussi le nom de *piédroit*. On distingue dans un jambage : le *parement*, ou face du mur dans lequel la baie est percée, le *tableau*, ou paroi interne du jambage, perpendiculaire au parement, la *feuillure*, entaille à angle droit, dans laquelle se loge le vantail de la porte ou le battant de la croisée; enfin l'*ébrasement*, face verticale, mais oblique au mur, et qui va de la feuillure au parement et a pour but de favoriser l'accès de la lumière, et le libre jeu du vantail ou du battant.

Un jambage est ordinairement orné d'une moulure composée appelée *chambranle*. (*Voy.* PORTE, FENÊTRE.)

JAMBE DE FORCE, pièce de charpente placée obliquement pour relier l'entrait d'une ferme avec le tirant. (*Voy.* FERMES.)

Dans les ponts de bois on appelle aussi *jambes de force* les pièces obliques à l'aide desquelles on relie les poutres horizontales qui soutiennent le tablier avec les pièces verticales établies le long des piles. (*Voy.* PONTS, PONTS BIAIS.)

Le même nom s'applique dans beaucoup d'autres circonstances analogues.

JAMBETTE, courte pièce de charpente placée verticalement dans une ferme pour relier l'arbalétrier au tirant, à une petite distance de leur point de jonction. (*Voy.* FERMES.)

JAMBETTES, pièces de la membrure des poupes carrées (*Voy.* CONSTRUCTION NAVALE). Chaque jambette se compose de deux parties : l'une, appelée plus particulièrement *quenouillette*, repose sur la barre d'Hourdy, et forme la membrure de la voûte; l'autre, qui est la jambette proprement dite, forme la membrure du tableau. Les jambettes et quenouillettes ont deux faces planes verticales parallèles au longitudinal; leurs deux autres faces sont des surfaces cylindriques droites qui ont pour base les arêtes avant et arrière de la pièce, lesquelles se projettent en vraie grandeur sur le longitudinal. Le travail de ces pièces n'offre donc aucune difficulté.

On appelle **JAMBETTES DE CORNIÈRE** les jambettes les plus éloignées de l'étambot; elles déterminent l'intersection de la voûte et du tableau avec la surface de la coque. Quelquefois elles ne diffèrent point des autres pièces du même nom. Quelquefois, au contraire, les faces planes sont inclinées à la fois sur le longitudinal, sur le latitudinal et sur l'horizon. Dans ce cas, il faut que le devis donne la projection horizontale de chaque arête, et l'une de ses projections verticales; on en déduit alors, par les procédés ordinaires de la Géométrie descriptive, le rabattement de cette arête sur l'un des plans de projection; ce qui fournit le gabarit de la pièce. Les équerrages s'obtiennent en coupant la jambette par des plans horizontaux; les intersections de chacun de ces plans avec deux faces contiguës forment un angle qui se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, et qu'on peut y relever à la fausse équerre; on le reporte sur la pièce en appliquant le manche de l'équerre sur l'intersection du plan horizontal considéré, avec la face plane de la jambette, et tenant le plan de l'angle horizontalement; la direction de la lame est alors celle de la génératrice correspondante de la face contiguës.

JANTE DE VOLANT, anneau qui forme la partie principale d'un volant (*Voy.* VOLANT) et qui est relié au moyeu par des bras. Les conditions mécaniques auxquelles ce régulateur doit satisfaire permettent de déterminer son moment d'inertie; mais on peut obtenir le même moment d'inertie en faisant varier à la fois le rayon et la section de la jante. Indépendamment des dispositions locales

qui peuvent limiter le rayon, il y a une autre raison pour maintenir ce rayon dans des limites convenables: il faut que la jante résiste à l'action de la force centrifuge. Soit ρ le rayon intérieur de la jante, e son épaisseur dans le sens du rayon, h sa largeur dans le sens de l'axe de rotation. On démontre (*Voy. VASES CYLINDRIQUES*) que si un anneau supporte, du dedans au dehors, une pression P par mètre carré de surface, la tension R que la matière de l'anneau éprouve par unité de surface, dans le sens perpendiculaire à la section méridienne de l'anneau, est donnée par la formule

$$R = P \frac{\rho}{e}$$

On en conclut, en appelant ds un élément de la circonférence dont le rayon est ρ ,

$$R h ds = P h ds \frac{\rho}{e}$$

Or $P h ds$ est la pression exercée sur un élément de la jante; et cette pression n'est autre chose que la force centrifuge $m \omega^2 \rho$ de cet élément (ρ pouvant être considéré comme la distance de cet élément à l'axe); en mettant pour m sa valeur $\frac{\Pi}{g} e h ds$, Π désignant le poids du mètre cube de la matière de l'anneau, on aura donc

$$R h ds = \frac{\Pi}{g} e h ds \cdot \omega^2 \rho \frac{\rho}{e}$$

ou simplement

$$R = \frac{\Pi}{g} \omega^2 \rho^2, \text{ d'où } \rho = \sqrt{\frac{Rg}{\Pi \omega^2}}$$

Les volants étant ordinairement en fonte, on a $\Pi = 7200$,

et l'on peut prendre $R = 2\,000\,000$ pour la tension limite à laquelle le métal peut être soumis; il vient ainsi

$$\sqrt{\frac{Rg}{\Pi}} = \sqrt{\frac{2\,000\,000 \cdot 9,8088}{7200}} = 52,20,$$

et par conséquent $\rho = \frac{52,20}{\omega}$.

Il est à remarquer que cette limite est indépendante de la section de la jante.

Si l'on adopte ce rayon limite, la connaissance qu'on a du moment d'inertie déterminera la section eh de l'anneau.

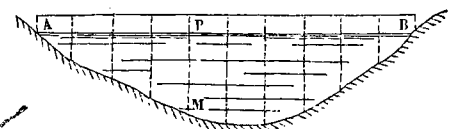
JARRET, angle formé par deux courbes qui ont un point commun, mais qui ne se *raccordent* pas en ce point; c'est-à-dire qui n'ont pas en ce point une tangente commune.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU, évaluation du volume d'eau qui s'écoule dans l'unité de temps par une section transversale quelconque de ce cours d'eau.

Pour les eaux qui se meuvent dans des tuyaux de conduite, voyez l'article **CONDUITES**. Il ne sera question ici que du jaugeage des canaux et des rivières. Nous distinguerons deux cas: celui où le mouvement est sensiblement uniforme, et celui où le mouvement est varié.

I. Lorsque le mouvement est uniforme, au moins dans une certaine étendue du cours d'eau, le jaugeage se réduit à déterminer la section transversale Ω et la vitesse moyenne U . — Pour obtenir la section transversale, on tend un cordeau en travers du courant; on se transporte en bateau le long de

ce cordeau, et de distance en distance, de mètre en mètre par exemple, on mesure la profondeur de l'eau à l'aide d'une sonde. Les résultats de cette opération donnent les abscisses horizontales AP et



les ordonnées verticales MP d'un certain nombre de points du lit; on reporte ces points, à une échelle convenue, sur une feuille de dessin, et par ces points on fait passer une courbe continue qui représente le contour de la section. On peut alors, par les procédés connus de **QUADRATURE APPROCHÉE** (*Voy. ce mot*), évaluer l'aire de cette section.

Pour évaluer la vitesse moyenne, on commence par mesurer la vitesse à la surface, au point où elle paraît la plus grande, et qu'on appelle le fil de l'eau. Pour cela on plante, aux deux bords d'une même section transversale, deux piquets destinés à servir de jalons; on choisit, à une distance connue en aval de cette première section, une seconde section transversale que l'on marque de même par deux jalons plantés aux deux bords. On fait jeter en amont de la première station, et vers le milieu du courant, un flotteur formé d'un disque de liège, lesté à sa partie inférieure, de manière qu'il dépasse à peine le niveau de l'eau. Ce flotteur, poussé par l'eau en mouvement, ne tarde pas à prendre la vitesse de l'eau à sa surface. Un observateur, placé à la première station, note, à l'aide d'un compteur, le moment précis où le flotteur passe dans l'alignement des deux premiers jalons. Un second observateur opère de même à la seconde station. La différence des heures indiquées par les deux compteurs donne le temps employé par le flotteur à franchir l'intervalle des deux stations. Cet intervalle étant connu, on le divise par le nombre de secondes employées par le flotteur à le franchir, et l'on a la vitesse du flotteur, ou, ce qui revient au même, la vitesse de l'eau à la surface. Si, par exemple, la distance des deux stations est de 200 mètres, et que les heures indiquées par les deux compteurs aux instants du passage soient $11^h 22^m 13^s$ et $11^h 27^m 21^s$, le temps employé par le flotteur à parcourir les 200 mètres est la différence de ces heures ou $5^m 8^s$, soit 308 secondes; la vitesse à la surface de l'eau est donc $\frac{200^m}{308}$ ou $0^m,649$, ou à peu près $0^m,65$.

Quand on a la vitesse à la surface, il s'agit d'en déduire la vitesse moyenne. D'une série d'expériences faites par Dubuat sur des canaux artificiels, M. de Prony a conclu que le rapport de la vitesse moyenne U à la vitesse à la surface V pouvait être représenté par la formule

$$\frac{U}{V} = \frac{V + 2,37}{V + 3,15}$$

qui, pour des valeurs de V , croissant de $0^m,50$ en $0^m,50$, donne les valeurs suivantes:

$$V \dots 0^m,50 \quad - \quad 1^m,00 \quad - \quad 1^m,50 \quad - \quad 2^m,00,$$

$$\frac{U}{V} \dots 0,786 \quad - \quad 0,812 \quad - \quad 0,832 \quad - \quad 0,848,$$

V..... 2^m,50 — 3^m,00 — 3^m,50 — 4^m,00,
 $\frac{U}{V}$ 0,862 — 0,873 — 0,883 — 0,891.

Dans les circonstances les plus ordinaires, on peut prendre $U=0,80.V$. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on aurait

$$U=0^m,649 \times 0,8=0^m,519.$$

Cependant, pour les grands cours d'eau, cette formule paraît donner des valeurs trop grandes : M. Raucourt, dans ses expériences sur la Néva, n'a trouvé que 0,75; et d'autres expériences faites sur la Seine ont donné 0,62. Dans les canaux tapissés de joncs le rapport de U à V s'abaisse à 0,60 et au-dessous.

Il existe un autre moyen de déterminer la vitesse moyenne : c'est de mesurer à l'aide du MOULINET DE WOLTMANN (Voy. ce mot) la vitesse des filets à différentes profondeurs sur une même verticale, de tracer la courbe de ces vitesses, et de déterminer l'ordonnée moyenne, ou la vitesse moyenne dans cette verticale; en la multipliant par 0,88 ou 0,90, on obtient la vitesse moyenne du cours d'eau. C'est la méthode employée par beaucoup d'ingénieurs allemands.

La vitesse moyenne étant obtenue, on la multiplie par la section transversale du cours d'eau et l'on a la dépense. Si, par exemple, dans l'exemple ci-dessus, on suppose que la section ait été trouvée de 10^m·s,85, on aura, en appelant Q la dépense,

$$Q=0^m,519 \times 10^m \cdot s,85=5^m \cdot s,631.$$

Au lieu du moulinet de Woltmann on peut employer le TACHOMÈTRE DE BRUNINGS, le TUBE DE PITOT, le PENDULE HYDROMÉTRIQUE (Voy. ces mots), ou quelque autre appareil propre à mesurer la vitesse des filets liquides à une profondeur déterminée.

II. Lorsqu'on dispose du temps nécessaire, on peut employer le moulinet de Woltmann à la détermination directe de la dépense, en suivant une marche qui a été indiquée par M. Defontaine dans ses études sur le Rhin. Elle consiste à diviser le cours d'eau par des plans horizontaux à peu près équidistants, et par des plans verticaux parallèles au courant, et à peu près équidistants aussi, en cours d'eau partiels que l'on jauge séparément. La section transversale de chacun d'eux s'obtient sans difficulté, puisque la distance de deux plans horizontaux consécutifs ou de deux plans verticaux consécutifs est connue. Pour obtenir la vitesse moyenne, on mesure, à l'aide du moulinet, la vitesse aux quatre arêtes du prisme d'eau ainsi formé, et l'on en prend la moyenne. Multipliant cette moyenne par la section transversale du prisme, on obtient la dépense correspondante; la somme des dépenses partielles donne la dépense totale. Mais cette opération demande un temps considérable dont on ne peut pas toujours disposer.

III. Lorsque le mouvement est varié, les méthodes précédentes ne peuvent plus être employées. On peut recourir à une méthode purement expérimentale, qui consiste à établir en travers du cours d'eau un BARRAGE (Voy. ce mot) qui force l'eau à s'écouler en DÉVERSOIR (Voy. ce mot). En appliquant les formules relatives à ce genre d'écoulement, on peut obtenir assez exactement la dépense. Dans un canal on peut faire servir au même usage

l'écoulement par les VANNES (Voy. ce mot) d'écluses.

Une autre méthode, plus exacte, mais moins expéditive, consiste à faire usage de la formule du mouvement varié de l'eau dans les canaux et rivières (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS).

$$z = \alpha \cdot \frac{U''^2 - U'^2}{2g} + \int_0^s \frac{\chi}{\Omega} (aU + bU^2) ds, \quad [1]$$

dans laquelle z représente la pente totale de la surface entre deux sections transversales extrêmes, α un coefficient numérique que l'on peut prendre égal à 1,1; U'' et U' les valeurs de la vitesse moyenne dans les deux sections extrêmes considérées, U la vitesse moyenne dans une section intermédiaire quelconque, χ le périmètre mouillé de cette section, Ω l'aire de la surface, s la distance des deux sections extrêmes. En mettant pour U'' , U' et U leurs valeurs en fonction de la dépense et de la section, on met cette formule sous la forme

$$z = \alpha \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega'^2} - \frac{1}{\Omega''^2} \right) + aQ \int_0^s \frac{\chi}{\Omega^2} ds + bQ^2 \int_0^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds. \quad [2]$$

La pente z peut être déterminée par un NIVELLEMENT (Voy. ce mot). Les sections Ω'' et Ω' peuvent être mesurées comme il a été dit plus haut. Pour calculer la première intégrale définie, on fera un certain nombre de sections transversales dans lesquelles on mesurera l'aire Ω et le périmètre mouillé; on calculera la quantité $\frac{\chi}{\Omega^2}$. On regardera

les valeurs de cette quantité comme les ordonnées d'une courbe dont les valeurs correspondantes de s seront les abscisses; on tracera cette courbe à une échelle convenue, et l'on évaluera son aire par un procédé de quadrature approchée quelconque; cette aire sera la valeur de l'intégrale définie que l'on considère. Les mêmes mesures serviront à calculer de la même manière la seconde intégrale définie. Dès lors, dans l'équation [2], qui est du second degré par rapport à Q , tout sera connu, excepté cette quantité; en la résolvant, on aura la dépense. On peut remarquer que z étant essentiellement positif, ainsi que le coefficient de Q^2 , l'équation aura nécessairement une racine positive et une racine négative; c'est la première qu'il faudra évidemment prendre.

(Voy. le Cours d'Hydraulique de M. Bélanger à l'École centrale.)

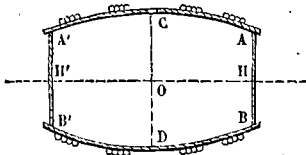
JAUGEAGE DES NAVIRES, détermination de la capacité intérieure laissée libre pour le chargement. Cette capacité s'évalue en tonneaux d'arrimage, dont chacun équivaut à 1^m·cb,500 et représente le volume moyen occupé à bord par un poids de 1000^{kg}. Le calcul de la capacité d'un navire pourrait se faire par des méthodes analogues à celles qu'on emploie pour déterminer le DÉPLACEMENT (Voy. ce mot); mais il faudrait retrancher du volume obtenu celui des ponts, des porques, des guirlandes, etc., et autres liaisons intérieures, etc. Comme une extrême précision n'est d'ailleurs pas nécessaire dans une pareille question, on se contente de la règle empirique suivante. On mesure la longueur du na-

vire, la largeur de son maitre-bau, et la hauteur du dessus de ce dernier au-dessus de la carlingue (Voy. CONSTRUCTION NAVALE); on fait le produit de ces trois dimensions, et l'on divise par 3,8. Pour les bâtiments à vapeur, on déduit 15 pour 100 afin de tenir compte de l'emplacement occupé par les machines (Voy. les ordonnances des 18 nov. 1837, 12 mars 1838, et 18 août 1839). Par *longueur du bâtiment*, il faut entendre ici la moyenne entre la longueur du pont, de râblure en râblure, et la longueur de la quille.

JAUGEAGE DES POMPES, évaluation exacte du volume d'eau fourni dans un temps donné par les pompes. Pour procéder à cette évaluation, on reçoit les eaux dans un bassin spécial, que l'on nomme une *cuvette de jauge*. Ce bassin est divisé en compartiments par des cloisons qui ne vont pas jusqu'au fond, en sorte que, pour couler de l'un dans l'autre, l'eau est obligée de passer par-dessous ces cloisons et que, parvenue à la surface, elle s'y trouve dans l'état de repos nécessaire. La paroi du dernier bassin est percée d'un grand nombre d'orifices circulaires de 2 centimètres de diamètre, dont les centres sont placés sur une même ligne horizontale, et qui sont munis d'ajutages de 17 millimètres de longueur. Ces orifices sont primitivement bouchés; mais on en débouche le nombre nécessaire pour que le niveau de l'eau dans le bassin se maintienne à 4 centimètres au-dessus des centres des orifices. Quand on a réglé le nombre des orifices ouverts de manière à ce que cette condition soit remplie, on est sûr que le produit de ces orifices est précisément égal au produit de la pompe, puisque le niveau ne varie pas. Or, d'après les dispositions qui ont été prises, le produit d'un quelconque de ces orifices est précisément un *pouce d'eau* (mesures nouvelles), c'est-à-dire de 20^{m.cub} en 24 heures. Si *n* est le nombre des orifices débouchés, 20^{m.cub} × *n* est donc le produit de la pompe en 24 heures.

Une cuvette de jauge de ce genre est établie au haut de l'aqueduc de Marly (Voy. la description de cette cuvette de jauge dans le *Cours élémentaire de Mécanique*, de M. Delaunay).

JAUGEAGE DES TONNEAUX, évaluation de leur capacité. La forme de cette capacité intérieure est une surface de révolution, divisée en deux parties égales par le plan mené par le centre de la bonde perpendiculairement à l'axe. Si l'on pouvait négliger la courbure de la génératrice AC, la moitié



du tonneau pourrait être assimilée à un tronc de cône; et en nommant R le rayon du cercle CD qu'on appelle le *bouge*, r le rayon du cercle AB qu'on appelle le *jable*, et h la hauteur OH, on aurait pour l'expression du volume :

$$\frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Mais cette expression donne un volume trop faible, puisqu'on a négligé la courbure de l'arc AC; pour

en tenir compte, on remplace le produit Rr par le carré R², ce qui donne :

$$\frac{1}{3} \pi h (2R^2 + r^2)$$

pour la moitié de la capacité du tonneau, et

$$\frac{2}{3} \pi h (2R^2 + r^2)$$

pour la capacité entière. Si H désigne la *longueur* HH' de la pièce, D le diamètre CD du bouge, d le diamètre AB du jable, et V le volume cherché, on a :

$$h = \frac{1}{2} H, \quad R = \frac{1}{2} D, \quad r = \frac{1}{2} d.$$

Substituant ces valeurs, on obtient la formule dite *formule d'Ougtred* :

$$V = \frac{1}{12} \pi H (2D^2 + d^2),$$

ou

$$V = 0,262 H (2D^2 + d^2);$$

c'est-à-dire que pour obtenir la capacité d'un tonneau, il faut faire le carré du diamètre du jable, y ajouter le double du carré du diamètre du bouge, multiplier la somme par la longueur de la pièce et prendre les 0,262 du produit. C'est, en effet, la règle suivie pendant longtemps dans les contributions indirectes.

Exemple. On a trouvé pour le diamètre du jable d'une barrique de vin de Bordeaux *d* = 0^m,52, pour le diamètre du bouge 0^m,61, et pour la longueur de la pièce H = 0^m,90. On aura : *d*² = (0,52)² = 0,2704, *D*² = (0,61)² = 0,3721, d'où $\frac{2D^2 + d^2}{2} = 0,7442$

La somme est donc..... 1,0146

Multipliant par 0,90, on trouve 0,91314; multipliant enfin par 0,262, on obtient : 0^{m.cub}, 23924, ou 239^{lit}, 24.

Aujourd'hui, on fait usage en France de la formule suivante, dite *formule de Dez* :

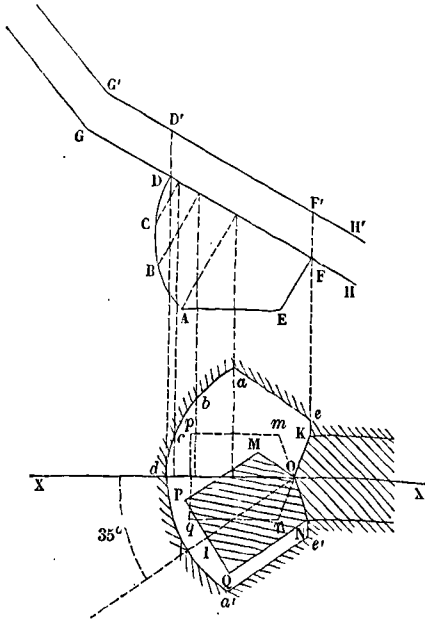
$$V = \pi H \left[R - \frac{3}{8} (R - r) \right]^2 = 3,14 \cdot H \left[R - \frac{3}{8} (R - r) \right]^2$$

Appliquée à l'exemple ci-dessus elle donnerait : 0^{m.cub}, 23486 ou 234^{lit}, 86, résultat un peu moindre.

Il faut rappeler que si les surfaces des bases sont elliptiques, chacune d'elles équivaut à un cercle dont le rayon serait la moyenne géométrique entre le plus grand et le plus petit rayon de l'ellipse. C'est ce rayon moyen proportionnel qu'il faudrait prendre pour celui du bouge ou du jable.

JAUMIÈRE, ouverture pratiquée à la *voûte* d'un navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE) pour le passage de la mèche du gouvernail. Soit *mOnqp* une coupe faite dans la mèche perpendiculairement aux arêtes de l'étambot; et soit *KON* la coupe correspondante de celui-ci. Les droites *mO* et *KO* également inclinées de part et d'autre sur la droite *XX*, axe de symétrie des sections considérées, doivent faire entre elles un angle de 35°, de telle sorte que lorsque la mèche du gouvernail, en tournant autour du point *O*, est arrivée à sa position limite *MONQP*, son axe *OI* fasse avec *XX* un angle de 35°; c'est la plus grande excursion qui puisse être admise dans la pratique. Pour déterminer l'ouverture demandée on décrit du point *O* comme centre un arc de cercle *ada'*, d'un rayon suffisant pour laisser à la mèche du gouvernail le jeu nécessaire; on mène *a'e'* parallèle à *NQ*, à une distance convenable; et *ae* symétrique de *a'e'*; on achève le contour par les petites droites *eK* et *e'N* perpendiculaires à *XX*. Soit maintenant *GH* la trace verticale de la voûte; il s'agit d'obtenir l'intersection

de sa surface, considérée comme plane dans l'étendue que l'on considère, avec un cylindre droit ayant pour base le contour *OKeada'e'*. Pour cela, après avoir pris sur l'arc *ad* quelques points intermédiaires



b, c, o, on élève par les points *a, b, c, d, e*, des perpendiculaires à *XX*, terminées à la rencontre de *GH*; puis on porte à partir des points de rencontre et perpendiculairement à *GH*, des longueurs respectivement égales aux distances des points *a, b, c, d, e* à *XX*; ce qui donne les points *A, B, C, D, E*; on joint les points *A, B, C, D* par une courbe continue, et les points *A, E* par une droite; et l'on a le demi-contour *FEABCD* de l'ouverture à pratiquer à la voûte. Le gabarit de ce contour peut servir à tracer l'ouverture à l'intérieur de la voûte; si *G'H'* représente la trace verticale de sa surface intérieure, il suffit de prolonger les perpendiculaires *dD* et *eE* jusqu'en *D'* et en *F'* pour obtenir la position à donner au gabarit. — Si la ligne *DF* ne pouvait pas être regardée comme une ligne droite, après y avoir projeté comme ci-dessus les points *a, b, c, e*, on la développerait à part en ligne droite; aux points marqués sur ce développement, on élèverait des perpendiculaires égales aux distances de *a, b, c, e* à l'axe *XX*; et l'on obtiendrait des points analogues à *A, B, C, D, E*, qui détermineraient le contour cherché, développé sur un plan; on en prendrait le gabarit avec une matière flexible, du carton par exemple, et l'on appliquerait ce gabarit en *DF* sur la surface courbe.

JEANNETTE. Voy. MULL-JENNY.

JET D'EAU, veine d'eau jaillissante, dans une direction verticale ou peu inclinée, par un tuyau muni d'un ajutage. Sans la résistance de l'air, l'eau jaillirait ainsi à une hauteur égale à la colonne piézométrique (Voy. PIÉZOMÈTRE) qui mesure l'excès de pression près de l'orifice sur la pression atmosphérique, car la vitesse de sortie est précisément

la vitesse due à cette hauteur (Voy. THÉORÈME DE D. BERNOULLI, MOUVEMENT DES PROJECTILES). Mais la résistance de l'air diminue toujours un peu la hauteur d'ascension, surtout quand la veine jaillit verticalement, parce que l'eau qui monte est en outre rencontrée par celle qui retombe. Quand la veine est inclinée, elle trace dans l'espace une parabole, et l'eau qui monte n'étant plus rencontrée par celle qui redescend, la hauteur d'ascension se rapproche davantage de la hauteur piézométrique. — Pour mesurer cette hauteur piézométrique, il faut avoir égard à la hauteur du bassin d'alimentation au-dessus de l'orifice, et au frottement de l'eau dans la conduite (Voy. CONDUITES).

Les jets d'eau isolés, ou réunis en gerbes, servent à l'ornement des jardins. Il y a des jets d'eau isolés qui s'élèvent à de grandes hauteurs. Le jet que l'on obtient avec les pompes à incendie de Paris, manœuvrées par huit hommes, peut s'élever jusqu'à 32 et même 38 mètres; mais ici la vitesse d'écoulement dépend de la pression exercée par le piston de la pompe foulante sur la surface de l'eau.

JOINT DE CARDAN. Voy. JOINT UNIVERSEL.

JOINT DE HOOKE, réunion de deux joints de Cardan. (Voy. JOINT UNIVERSEL.)

JOINT DE OLDHAM, mode de liaison employé pour transmettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre axe parallèle très-peu distant du premier. Il consiste en un croisillon *ABCD* (fig. 1)

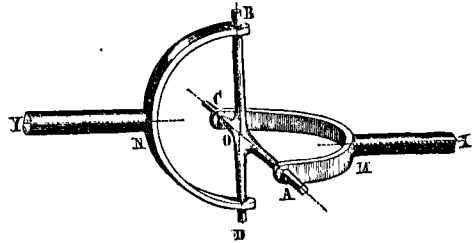


Fig. 1.

formé de quatre branches dirigées suivant deux droites *AC* et *BD* perpendiculaires entre elles, et arrondies en tourillons sur la plus grande partie de leur longueur. Les tourillons *A* et *C* s'engagent dans des orifices pratiqués aux extrémités des branches d'une fourche *AMC* montée sur l'axe de rotation *MX*; les tourillons *B* et *D* s'engagent de même dans des orifices pratiqués aux extrémités des branches d'une autre fourche *BND* montée sur l'axe de rotation *NY*. Le croisillon peut ainsi glisser dans le sens de chacun de ses deux diamètres *AC* ou *BD*, en même temps qu'il tourne dans son plan. Si l'on conçoit maintenant que la fourche *AMC* tourne autour de l'axe *OX*, elle entraînera le croisillon, et l'obligera à tourner dans son plan, lequel est perpendiculaire à *OX*; mais le croisillon entrainera à son tour la fourche *BND*, et l'obligera à tourner autour de l'axe *NY*. Mais on voit que cette transmission n'est possible qu'à la condition que le croisillon puisse se déplacer par rapport à chaque fourche en glissant dans le sens du diamètre correspondant. C'est ce qui distingue le joint de Oldham du JOINT UNIVERSEL (Voy. ce mot) dans lequel le glissement longitudinal n'est pas possible.

Dans cette transmission, la vitesse angulaire est la même autour de chacun des deux axes parallèles. Soient, en effet, A et C (fig. 2) la position, à un instant quelconque, des orifices percés dans la

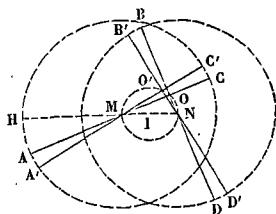


Fig. 2.

fourche AMC; et soit, au même instant, B et D la position des orifices percés dans la fourche BND. Les diamètres du croisillon occuperont à cet instant les positions des droites AC et BD perpendiculaires entre elles, et passant respectivement par les points M et N qui sont les projections des deux axes parallèles. Dans le mouvement, les points A et C parcourront une circonférence ayant M pour centre et AM pour rayon; les points B et D parcourront de même une circonférence ayant pour centre N et pour rayon NB. Supposons que le système ait tourné, et que les points A et C se soient transportés en A' et C'; le second diamètre du croisillon restant perpendiculaire au premier sera maintenant dirigé suivant une droite menée par le point N perpendiculairement à A'C'; ainsi les points B et D seront venus en B' et D'. Il en résulte d'abord que le centre O du croisillon parcourt la circonférence décrite sur MN comme diamètre. En second lieu, les angles OMO' et ONO' ayant dans cette circonférence la même mesure OO', sont égaux; donc les diamètres AC et BD ont tourné de la même quantité angulaire autour des axes M et N; ce qui d'ailleurs était évident *a priori*.

Mais ces considérations vont permettre d'évaluer les vitesses de glissement longitudinal du croisillon suivant ses deux diamètres. Soit en effet ω la vitesse angulaire commune autour des deux axes supposée constante, ρ la distance OM, ρ' la distance ON, v et v' les vitesses de glissement suivant AC et BD. Si l'on prend pour position initiale du diamètre AC la position MH, prolongement de MN, on aura $HA = \omega t$. D'ailleurs,

$OM = MN \cdot \cos \angle OMN$ ou $\rho = a \cos \omega t$,
en désignant par a la distance MN des deux axes.
On en déduit

$$\frac{d\rho}{dt} = v = -a\omega \sin \omega t. \quad [1]$$

On a de même

$$ON = MN \sin \angle OMN \text{ ou } \rho' = a \sin \omega t;$$

on en déduit

$$\frac{d\rho'}{dt} = v' = +a\omega \cos \omega t. \quad [2]$$

Ces vitesses varient depuis 0 jusqu'à $a\omega$ en valeur absolue; et elles varient en sens inverse.

On tire des relations [1] et [2]

$$v^2 + v'^2 = (a\omega)^2. \quad [3]$$

Enfin, si le mouvement de rotation est uniforme, le centre O du croisillon se meut uniformément sur la circonférence MON; car on a

$$OMN = \omega t.$$

De plus, la vitesse angulaire de ce point, considéré comme tournant autour du milieu I de MN, est le double de ω ; car on voit aisément que le point O parcourt la demi-circonférence NOM quand le croisillon tourne d'un quadrant. On arriverait au même résultat en joignant le rayon OI et évaluant l'angle OIN.

JOINT DE RUPTURE, joint suivant lequel s'opère la rupture d'une voûte. (Voy. POUSSÉE DES VOÛTES.)

JOINT HOLLANDAIS. Voy. JOINT UNIVERSEL.

JOINT UNIVERSEL, mode de liaison employé pour transmettre à un axe le mouvement de rotation d'un autre axe coupant le premier sous un angle très-obtus. Il consiste en un croisillon ABCD (fig. 1), présentant aux extrémités de deux dia-

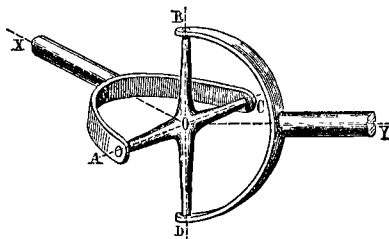


Fig. 1.

mètres perpendiculaires quatre tourillons A, B, C, D dont les axes se coupent mutuellement en deux parties égales en un point O. Les deux tourillons A et C tournent, sans glissement longitudinal, dans des orifices pratiqués à l'extrémité des branches d'une fourche AMC montée au bout de l'un des deux axes de rotation OX; les deux autres tourillons tournent de même dans des orifices pratiqués à l'extrémité des branches d'une autre fourche BND montée au bout du second axe de rotation OY. Le centre O du croisillon est ainsi le point d'intersection des prolongements des deux axes. On conçoit que si l'on donne à la première fourche un mouvement de rotation autour de l'axe OX, les quatre rayons du croisillon seront entraînés dans ce mouvement; il en résulte que la seconde fourche sera obligée de tourner autour de l'axe OY. Toutefois, il est aisé de voir que la transmission deviendrait impossible si les axes OX et OY étaient perpendiculaires, parce qu'alors l'effort des rayons OB et OD sur la fourche BND s'exercerait dans le plan déterminé par ces rayons et par l'axe OY, et que cet effort ne pourrait obtenir aucun effet par suite de la fixité de cet axe suivant la droite OY. En général, ce mode de transmission ne peut être employé que lorsque l'angle XOY est très-obtus; dès qu'il atteint une valeur moindre que 135°, l'effort des rayons OB et OD sur la fourche BND, lequel s'exerce toujours dans le plan du croisillon, fait avec le plan BD, OY un angle trop petit pour que sa composante normale à ce plan suffise à opérer la rotation autour de OY; ou, en d'autres termes, il faut exercer un trop grand effort autour de l'axe OX pour produire le mouvement autour de OY.

Les vitesses angulaires ω et ω' autour des axes OX et OY sont liées par une relation qui explique la remarque ci-dessus. Supposons le diamètre AC primitivement placé dans le plan XOY, et le diamètre

BD par conséquent perpendiculaire à ce plan, puisqu'il est perpendiculaire à AC et à OY. Les quatre points A, B, C, D se meuvent sur une sphère dont le centre est O et le rayon OA. Cette sphère est représentée figure 2. Menons le grand cercle

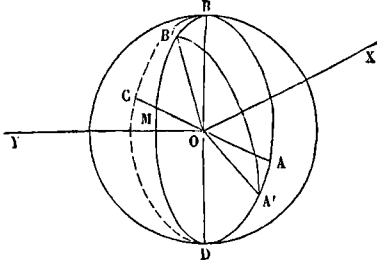


Fig. 2.

BAD qui est perpendiculaire à OX; menons de même un grand cercle BMD perpendiculaire à OY; les plans de ces deux grands cercles feront entre eux un angle supplémentaire de XOY, et que nous désignerons par V. Supposons maintenant que le croisillon se déplace de manière que le diamètre AC tourne autour de OX, le point A viendra sur le cercle BAD en un point A', en décrivant un arc AA' ré pondant à un angle au centre AOA' que nous appellerons α . Par suite de ce mouvement, le diamètre BD se déplacera en tournant autour de OY, et le point B viendra sur le cercle BMD en un point B', en décrivant un arc BB' ré pondant à un angle au centre BOB' que nous désignerons par β . D'ailleurs, le croisillon demeurant invariable de forme, les diamètres AC et BD n'auront pas cessé d'être perpendiculaires; par conséquent, si l'on joint les points A' et B' par un arc de grand cercle, cet arc sera de 90°. Dans le triangle sphérique A'BB', le côté A'B est donc égal à $90^\circ + \alpha$, le côté BB' à β , le côté A'B' à 90° , et l'angle en B, qui mesure l'angle des plans BAD et BMD, est égal à V. On a donc, en vertu de la relation fondamentale des triangles sphériques,

$$\cos 90^\circ = \cos (90^\circ + \alpha) \cos \beta + \sin (90^\circ + \alpha) \sin \beta \cos V$$

$$\text{ou } 0 = -\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos V,$$

$$\text{d'où } \tan \alpha = \tan \beta \cos V. \quad [1]$$

Si l'on différentie cette relation par rapport au temps, en remarquant que l'on a

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega' \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

on trouve

$$\frac{\omega'}{\cos^2 \beta} = \frac{\omega \cos V}{\cos^2 \alpha}, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos V, \quad [2]$$

ou, en remplaçant $\cos^2 \beta$ par sa valeur tirée de [1] et simplifiant

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos V}{1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha}. \quad [3]$$

On voit que le rapport des vitesses angulaires est variable, et qu'il croît avec α ; ses valeurs extrêmes, ré pondant à $\alpha = 0$ et à $\alpha = 90^\circ$, sont

$$\cos V \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos V}.$$

Le rapport est égal à l'unité pour $\cos V = 1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha,$

d'où l'on tire successivement

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos V}{\sin^2 V}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos V - \cos^2 V}{\sin^2 V},$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos V}. \quad [4]$$

On peut remarquer que de cette dernière relation on déduit

$$\tan \alpha \tan \beta = 1,$$

c'est-à-dire que les angles α et β sont alors complémentaires.

On remarquera enfin que, dans le cas de $V = 90^\circ$, la relation [1] donne $\beta = 0$, et la relation [3], $\omega' = 0$, relations qui s'accordent à montrer que la transmission est alors impossible, ainsi qu'on l'avait annoncé à priori.

Le joint universel est dû à Cardan, géomètre français qui vivait dans le seizième siècle; il porte en France, pour cette raison, le nom de *joint de Cardan*. En Angleterre, ce mode de liaison est connu sous le nom de *joint de Hooke*, bien que le géomètre anglais Hooke soit né cinquante-neuf ans après la mort de Cardan.

Le joint universel est peu usité; on s'en sert pour briser des arbres de couche très-longs, afin de se garantir des tassements irréguliers. On s'en sert en Hollande pour transmettre le mouvement des moulins à vent aux vis d'Archimède qu'on emploie aux épaissements, ce qui lui a fait donner aussi le nom de *joint hollandais*. Son principal avantage consiste en ce que l'angle des deux axes peut varier sans interrompre la transmission.

Lorsqu'on a à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes dont l'angle est voisin de 90° , on ne peut plus employer directement le joint universel; mais on peut recourir à un axe auxiliaire coupant les deux premiers sous un angle de 155° environ, et lier cet axe auxiliaire à chacun des deux axes donnés au moyen d'un joint universel. Dans le cas où les extrémités des deux axes donnés sont trop voisines pour qu'on puisse faire usage d'un troisième axe auxiliaire, on peut réduire cet axe aux deux fourches qui le terminent; on obtient ainsi ce qu'on appelle le *double joint de Hooke*. La transmission à l'aide de ce double joint est représentée figure 3.

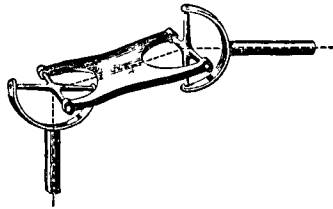


Fig. 3.

(Voy. les *Principles of Mechanism* de Willis, la *Cours de Mécanique appliquée* de M. Poncelet, le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye, celui de M. Bélanger, et le *Traité des Mécanismes* de M. Haton de la Goupillière.)

JOINTS DE LITS, ou *joints continus*, surfaces qui divisent une voûte en assises et déterminent sur l'intrados les *arêtes de douelle* (Voy. VOÛTES).

JOINTS MONTANTS, ou *joints discontinus*, surfaces qui, dans une voûte, divisent en voussoirs une même assise (Voy. VOÛTES).

JOUR, nom donné dans le langage ordinaire à l'intervalle de temps qui s'écoule entre le lever et le coucher du soleil. Pour déterminer cet intervalle, on considère le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z, et le soleil S; dans ce triangle, l'angle en P est l'angle horaire AI (Voy. COORDONNÉES HORAIRES), le côté PZ est le complément de la latitude λ , le côté PS est le complément de la déclinaison D du soleil, enfin le côté ZS est la distance zénithale z du soleil. On a donc

$$\cos ZS = \cos PZ \cos PS + \sin PZ \sin PS \cdot \cos P$$

ou $\cos z = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D \cdot \cos AI$,

$$\text{d'où} \quad \cos AI = \frac{\cos z - \sin \lambda \sin D}{\cos \lambda \cos D} \quad [A]$$

Au moment du lever, ou au moment du coucher, la distance zénithale du soleil est de 90° ; on a donc $\cos z = 0$; par suite

$$\cos AI = -\frac{\tan \lambda \cdot \tan D}{1} \quad [1]$$

formule qui donnera l'angle horaire à l'instant du lever ou du coucher, et par suite la durée de la moitié du jour.

Soit ω la valeur moyenne de l'obliquité de l'écliptique; on sait que D est compris entre $+\omega$ et $-\omega$; par conséquent les limites entre lesquelles varie l'angle horaire AI sont données par les relations :

$$\cos AI = -\frac{\tan \lambda \cdot \tan \omega}{1} \quad [2]$$

et

$$\cos AI = +\frac{\tan \lambda \cdot \tan \omega}{1} \quad [3]$$

L'inégalité des jours est d'autant plus grande que les valeurs absolues données par ces formules sont elles-mêmes plus grandes; par conséquent, cette inégalité croît avec la latitude; elle est nulle pour les lieux situés sous l'équateur, où $\lambda = 0$; elle augmente avec λ .

Pour la latitude de Paris, c'est-à-dire pour

$$\lambda = 48^\circ 50' 13'',$$

on trouve, en adoptant la valeur moyenne de ω au 1^{er} janvier 1862, c'est-à-dire $\omega = 23^\circ 27' 27'', 24$,

$$AI = 119^\circ 45' 15'' \text{ et } AI = 60^\circ 14' 45'',$$

valeurs qui, converties en temps sidéral, à raison d'une heure pour 15° , donnent pour la durée de la moitié du jour

$$7^h 59^m 1^s \text{ et } 4^h 0^m 59^s,$$

et par conséquent, pour la durée du jour lui-même,

$$15^h 58^m 2^s \text{ et } 8^h 1^m 58^s.$$

Le premier de ces nombres correspond au solstice d'été et le second au solstice d'hiver. On verra tout à l'heure quelles sont les causes qui modifient ces nombres.

Pour que les formules [2] et [3] donnent des valeurs réelles, il faut que la valeur absolue du second membre soit au plus égale à 1, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\tan \lambda \leq \frac{\tan \omega}{1}, \text{ ou } \lambda \leq 90^\circ - \omega.$$

La latitude du lieu doit donc être au plus égale au complément de la plus grande déclinaison du soleil, ce qui correspond aux lieux placés sous le cercle polaire (dans l'un ou dans l'autre hémisphère).

Si $\lambda = 90^\circ - \omega$, les valeurs [2] et [3] deviennent

$$\cos AI = -1 \text{ et } \cos AI = +1$$

ou $AI = 180^\circ$ et $AI = 0$,

valeurs qui donnent 12^h et $zéro$ pour la durée de la moitié du jour, et par conséquent 24^h et $zéro$ pour la durée du jour entier. Ainsi, sous le cercle

polaire, le jour est de 24^h au solstice d'été et nul au solstice d'hiver.

Supposons maintenant que λ soit plus grand que $90^\circ - \omega$, ou que le lieu considéré soit situé entre le cercle polaire et le pôle, et posons

$$\lambda = 90^\circ - \omega + \varepsilon.$$

La formule [1] pouvant se mettre sous la forme

$$\cos AI = -\frac{\frac{\tan D}{\cot \lambda}}{\frac{\tan D}{\tan(\omega - \varepsilon)}}$$

on voit qu'en été, dès que la déclinaison du soleil sera supérieure à $\omega - \varepsilon$, la valeur de AI sera imaginaire, c'est-à-dire que le soleil restera constamment au-dessus de l'horizon; en hiver, au contraire, dès que la déclinaison aura atteint la valeur $-(\omega - \varepsilon)$, le soleil restera constamment au-dessous de l'horizon.

Au pôle, où $\lambda = 90^\circ$, la valeur de $\cos AI$ est constamment imaginaire, excepté pour $D = 0$, c'est-à-dire qu'à l'équinoxe le soleil reste tout un jour dans le plan de l'horizon; mais que de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne il demeure au-dessus de ce plan, tandis que de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps il demeure constamment au-dessous, ce qui produit un jour de 6 mois, suivi d'une nuit de même durée.

Les résultats donnés par la formule [1] sont modifiés par la RÉFRACTION, par le DIAMÈTRE APPARENT du soleil, et par le CRÉPUSCULE (Voy. ces mots). La réfraction élève le soleil de $35'$; son diamètre apparent permet d'apercevoir son disque lorsque le centre est encore à $16'$ au-dessous de l'horizon; enfin, le crépuscule prolonge le jour pendant le temps que le soleil met à parcourir un arc de 18° ; le jour commence donc, non pas lorsque la distance zénithale du soleil est 90° , mais bien $90^\circ + 35' + 16' + 18^\circ$, c'est-à-dire $108^\circ 51'$, et le jour ne finit que lorsque la distance zénithale du soleil a repris cette valeur. Pour avoir la durée de la moitié du jour, il faut donc, dans la formule [A], faire $z = 108^\circ 51'$. Si l'on fait le calcul pour la latitude de Paris, on trouve pour AI une valeur imaginaire, correspondant au solstice d'été, et une valeur de $87^\circ 40' 57''$, 3 correspon ante au solstice d'hiver. Cette dernière valeur donne pour la durée du jour au solstice d'hiver $11^h 41^m 27^s$, 6. Quant à l'époque du solstice d'été, on voit qu'à ce moment il n'y a pas de nuit complète; et si l'on veut avoir la déclinaison du soleil pour laquelle cet effet commence à avoir lieu, il n'y a qu'à faire dans l'équation [A] $\cos AI = -1$, ce qui donne

$$-\cos(\lambda + D) = \cos z \text{ ou } \lambda + D = 180^\circ - z,$$

c'est-à-dire

$$48^\circ 50' 13'' + D = 180^\circ - (108^\circ 51');$$

d'où

$$D = 22^\circ 18' 47'',$$

et, en consultant la table des déclinaisons du soleil dans la *Connaissance des temps*, on voit que D surpasse cette valeur du 3 juin au 9 juillet; il n'y a pas de nuit complète dans cet intervalle.

JOUR LUNAIRE, intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la lune au même méridien. Sa durée moyenne est de $24^h 50^m \frac{1}{2}$ de temps moyen. En effet, la durée de la révolution synodique de la lune est de $29^j 12^h 44^m 2^s$, 9 de temps moyen (Voy. LUNE); mais, dans cet intervalle de temps, la lune, en vertu de son mouvement propre, a passé une fois de moins au méridien

dien que le soleil. On peut donc dire que 29^j 12^h 44^m 2^s,9 de temps moyen, ou 29^j, 53 solaires moyens valent 28^j, 53 lunaires moyens; d'où il résulte que le jour lunaire vaut $\frac{29.53}{28,53}$ jours moyens, ou 1^o 50^m 28^s,3 ou environ 24^h 50^m $\frac{1}{2}$.

Il résulte de là que l'heure lunaire moyenne est la 24^e partie de 1^o 0^m 50^m 28^s,3, c'est-à-dire 1^h 2^m 6^s,2.

JOÜR MOYEN, intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil moyen au méridien du lieu. (Voy. TEMPS MOYEN.)

JOÜR SOLAIRE ou VRAI, intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil vrai au méridien d'un lieu. (Voy. TEMPS VRAI.)

JOURS COMPLÉMENTAIRES, jours, au nombre de 5 dans les années ordinaires, et de 6 dans les années bissextiles, que l'on ajoutait aux 12 mois de 30 jours, dans le calendrier républicain, pour compléter le nombre de 365 ou de 366. Ces jours commençaient, suivant les années, le 17 ou le 18 septembre. (Voy. CALENDRIER.)

JOÜR SIDÉRAL, intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours successifs d'une même étoile au méridien d'un lieu. Le jour sidéral est plus court que le jour solaire (Voy. TEMPS SIDÉRAL, TEMPS VRAI). On prend pour origine du jour sidéral l'instant où l'équinoxe du printemps, ou point vernal, passe au méridien.

JUPITER, la plus grande des planètes connues. Sa moyenne distance au soleil est 5,202798, celle de la terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est de 4332^j,58482 ou près de 12 ans, et son

moyen mouvement diurne est de 4' 59",1286. Son orbite, dont l'excentricité est 0,0482388, fait un angle de 1° 18' 52" avec le plan de l'écliptique. Le diamètre de Jupiter est 11,160, celui de la terre étant 1; il en résulte que son volume est exprimé par 1389,996, celui de la terre étant pris pour unité. Sa masse est 337 fois (337,171) plus grande que celle de notre globe, et sa densité est exprimée par 0,257, celle de la terre étant 1; celle de la houille, 1,29.

Jupiter tourne en 9^h 55^m d'occident en orient, autour d'un axe qui est presque perpendiculaire au plan de son orbite. Les saisons doivent y être peu sensibles.

Cette planète n'offre pas de phases sensibles. Elle se présente à nos yeux comme une étoile un peu moins brillante que Vénus et d'une teinte un peu jaunâtre. Quand on l'observe à l'aide d'une bonne lunette, on remarque dans le sens de son axe de rotation un aplatissement très-prononcé, qui a été évalué à $\frac{1}{17}$. La surface de son disque présente, dans le voisinage de l'équateur, des bandes transversales plus blanches, que l'on croit dues à des nuages entraînés par des vents analogues à nos vents alisés.

Jupiter est remarquable par la présence des 4 satellites dont il est accompagné. (Voy. SATELLITES; voy. aussi ÉCLIPSES des satellites de Jupiter.)

Les astronomes représentent Jupiter par le signe ♃.

(Voy. l'Annuaire du bureau des longitudes pour l'année 1865.)

JUSANT. Voy. REFLUX, MARÉE.

K

KAKATOËS, la partie la plus élevée de chaque mât, celle qui est placée au-dessus du mât de perroquet ou de perruche. Chaque kakatoès porte le nom du mât auquel il se rapporte; on dit ainsi : grand kakatoès, kakatoès de misaine, kakatoès d'artimon. Le nom de kakatoès s'applique aussi aux voiles qui correspondent à cette partie du mât. (Voy. MÂTURE, VOILES.)

KARAT, unité employée pour évaluer le poids des diamants et des perles fines. D'après Jacques Bruce, célèbre voyageur écossais, connu principalement par son voyage à la recherche des sources du Nil (1773), le nom de karat viendrait d'une plante du genre Erythrine, nommée kouara chez les Changallas, en Abyssinie, et dont les semences, petites fèves rouges présentant un point noir, sont employées dans les Indes-Orientales pour peser les diamants et les perles. D'autres dérivent ce mot du grec κεράτιον, poids qui valait le tiers d'une obole. Mais la première étymologie est plus probable.

Quoi qu'il en soit, le karat, d'après la métrologie de Pauton, est évalué à 3 grains 876 millièmes, poids de marc, ce qui revient à 205 milligrammes et 872 millièmes.

Les diamants se pèsent à l'once de 29^{gr},592. Cette once se subdivise en 144 karats, et chaque karat en

4 grains. Mais on pousse plus loin la division de karat, et on évalue non-seulement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ de karat, mais $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et jusqu'à $\frac{1}{64}$. Voici le tableau de ces subdivisions avec leurs valeurs rapportées au gramme :

	milligr
Karat.....	205,5000
$\frac{1}{2}$ karat.....	102,7500
$\frac{1}{4}$ karat ou grain	51,3750
$\frac{1}{8}$ karat ou $\frac{1}{2}$ grain ..	25,6875
$\frac{1}{16}$ karat ou $\frac{1}{4}$ de grain	12,8438
$\frac{1}{32}$ karat ou $\frac{1}{8}$ de grain	6,4219
$\frac{1}{64}$ karat ou $\frac{1}{16}$ de grain ...	3,2109

Voici maintenant la valeur du karat dans les principaux pays d'Europe :

	milligr
En Angleterre.....	205,4090
En Allemagne.....	205,40

	gr
A Amsterdam.....	205,0440
A Berlin.....	205,4400
En Espagne.....	205,3930
A Florence.....	197,2000
A Francfort-sur-le-Mein.....	205,7700
A Hambourg.....	205,4400
En Hollande.....	206,4460
A Lisbonne.....	205,7500
A Livourne.....	215,9900
A Madras, le karat pèse.....	207,3533
A Amboyne (Moluques).....	219,0000

Pour obtenir la valeur approximative d'un diamant brut, on évalue son poids en karats, on élève ce nombre au carré, et l'on multiplie par 50 francs, ou par 2 livres sterling. Si, par exemple, un diamant brut pèse 6 karats $\frac{1}{2}$, on élève 6,5 au carré.

ce qui donne 42,25, et l'on multiplie par 50 francs, ce qui donne 2112^f,50 pour la valeur du diamant. Quand un diamant est taillé, on double son poids karat avant d'élever au carré, parce qu'on admet que le diamant a perdu la moitié de son poids par le travail du lapidaire.

On emploie aussi le mot *karat* pour évaluer le degré de pureté des métaux précieux. On suppose que le métal pur, quel que soit son poids, renferme

24 karats; ce qui revient à évaluer le titre en 24^m^{es}. Ainsi de l'or à 23 karats est de l'or au titre de $\frac{23}{24}$ ou 0,958; de l'or à 22 karats est de l'or au titre de $\frac{22}{24}$ ou 0,9166. Et ainsi de suite.

KILOGRAMME (du grec χίλιοι, mille, et γράμμα, trait, et par suite espèce de poids), unité du système métrique, valant 1000 grammes. C'est l'unité courante du commerce. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.) Elle équivaut au poids d'un litre d'eau pure.

KILOGRAMMÈTRE, nom formé du mot *kilogramme* et du mot *mètre*, unité adoptée dans l'évaluation du travail des forces; c'est le travail nécessaire pour élever un poids d'un kilogramme à la hauteur d'un mètre. On désigne un nombre de kilogrammètres par les lettres *km* placées à gauche de ce nombre et un peu au-dessus : ainsi 75^{km} représente 75 kilogrammètres. (Voy. TRAVAIL.)

KILOLITRE (du grec χίλιοι, mille, et λίτρα, livre), unité du système métrique valant 1000 litres, ou un mètre cube. Cette mesure est peu usitée. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

KILOMÈTRE (du grec χίλιοι, mille, et μέτρον, mesure), unité du système métrique valant 1000 mètres. C'est une mesure itinéraire. (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE.)

L

LACET (MOUVEMENT DE), mouvement ondulatoire dans le sens horizontal que prennent souvent les trains sur les voies ferrées, et qui paraît dû aux actions alternatives des deux pistons de la locomotive. (Voy. LOCOMOTIVE.)

LAMBOURDES, poutres horizontales établies le long d'un mur pour soutenir les solives d'un PLANCHER (Voy. ce mot); elles reposent elles-mêmes sur des consoles ou sur des corbeaux en fer.

On donne aussi le nom de *lambourdes* aux pièces de bois placées transversalement aux solives, et sur lesquelles on cloue les planches jointives qui forment le parquet.

LAMINOIR, machine avec laquelle on réduit les métaux malléables en feuilles ou en lames. Un laminoir se compose essentiellement de deux cylindres égaux, en acier ou en fonte, AA (fig. 1), placés

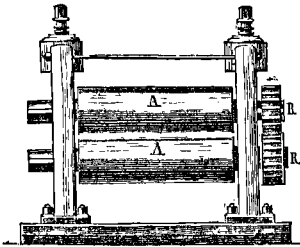


Fig. 1.

horizontalement l'un au-dessus de l'autre, à une distance qu'on peut faire varier à l'aide de vis de pression agissant sur leurs coussinets. Ces coussinets sont établis dans un bâti en fer, solidement

maintenu par le haut et par le bas, que l'on appelle la *cage*. Les deux cylindres sont munis, en dehors de la cage, de deux roues dentées RR cylindriques, égales, qui, recevant l'action du moteur, les font tourner en sens contraire, à raison de 60 à 80 tours par minute pour le travail du fer. Si, entre ces deux cylindres, dont la surface a été parfaitement tournée, on introduit une lame métallique d'une épaisseur un peu plus grande que la distance des deux cylindres, cette lame, entraînée par le frottement, passe entre les cylindres en s'amincissant et en augmentant de longueur, tout en conservant des faces parfaitement planes. Au moment du passage, il se produit une résistance énorme, qui arrêterait la machine, si sur un axe voisin des laminoirs n'était établi un volant de grandes dimensions (Voy. VOLANT), et animé par conséquent d'une puissance vive considérable. C'est aux dépens de cette puissance vive que s'effectue le travail résistant des cylindres lamineurs; elle est promptement restituée par le moteur dans l'intervalle de deux passages consécutifs.

L'emploi des laminoirs s'est beaucoup répandu depuis un certain nombre d'années, et il ne se borne plus au laminage proprement dit : on les fait fonctionner à l'instar d'une filière pour réduire les métaux ductiles en barres ayant une section donnée. Pour cela, au lieu de deux cylindres, on emploie deux surfaces de révolution dont les sections méridiennes laissent entre elles des intervalles qui présentent la forme de la section droite qu'on veut donner à la barre. La figure 2 représente un train laminoir employé pour obtenir des barres à section hexagonale. La figure 3 représente un train lami-

neur employé à la fabrication des rails de chemins de fer. En introduisant successivement la barre

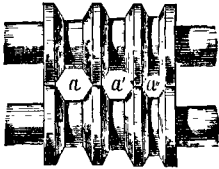


Fig. 2.

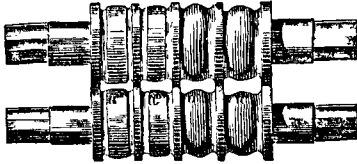


Fig. 3.

dans les intervalles a , a' , a'' , a''' , on l'amène peu à peu à la forme qu'on veut lui donner.

LARMIER, face verticale d'une corniche, faisant saillie sur les moulures placées plus bas. Il se termine à sa partie inférieure par une arête vive, et présente en dessous, près de cette arête, un canal qui empêche les eaux de couler le long du plafond de la corniche et de se répandre ainsi sur le reste de l'édifice. L'eau arrêtée par le larmier s'en écoule ainsi par gouttes ou larmes, d'où ce nom de larmier. A cause de sa destination, le larmier est presque toujours lisse; cependant, dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite, il reçoit quelquefois des ornements.

Par extension, on donne le nom de larmier à toute saillie pratiquée hors de l'aplomb d'un mur pour arrêter les eaux pluviales.

On appelle aussi larmier en menuiserie, la pièce de bois placée au bas d'un châssis de fenêtre pour empêcher l'eau de s'introduire dans l'appartement.

LATITUDE CÉLESTE, l'une des deux coordonnées écliptiques qui servent à déterminer sur la sphère céleste la position d'un point. Si par le point considéré et par l'axe de l'écliptique on mène un plan, il coupera la sphère céleste suivant un grand cercle perpendiculaire à l'écliptique, que l'on nomme un *cercle de latitude*; l'arc de ce cercle compris entre l'écliptique et le point considéré est ce qu'on appelle la *latitude* de ce point. Elle se compte de *zéro* à 90° , à partir de l'écliptique, dans le sens boréal ou dans le sens austral.

LATITUDE GÉOGRAPHIQUE, une des deux coordonnées géographiques qui déterminent la position d'un lieu à la surface du globe; c'est l'angle que fait la verticale de ce lieu avec le plan de l'équateur. Si l'on considère le globe comme sphérique, on peut dire que la latitude d'un point du globe est l'arc de méridien compris entre l'équateur et ce point. La latitude se compte de *zéro* à 90° à partir de l'équateur; elle est boréale ou australe, suivant que le point considéré est situé dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral. Le complément de la latitude porte le nom de *colatitude*; ce complément n'est autre chose que la distance zéni-

thale du pôle. La latitude d'un lieu est donc égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon de ce lieu.

Il existe un grand nombre de méthodes pour déterminer les latitudes; nous ne parlerons que de celles qui sont le plus généralement adoptées.

I. *Par les passages au méridien d'une étoile circumpolaire*. On observe la distance zénithale d'une étoile circumpolaire à son passage supérieur au méridien et à son passage inférieur; la moyenne de ces deux distances zénithales est la distance zénithale du pôle; le complément de cette distance zénithale est la latitude du lieu de l'observation. Les hauteurs observées doivent être corrigées de la réfraction; mais le résultat est indépendant de la déclinaison de l'étoile, de l'aberration et de la nutation (*Voy. ces mots*).

II. *Par l'observation de la hauteur méridienne d'un astre*. On choisit une étoile qui passe au méridien près du zénith, afin de diminuer les chances d'erreur dues à la réfraction. On observe sa hauteur méridienne ou plutôt sa distance zénithale au moment de son passage au méridien. Si l'étoile passe au méridien du côté du sud, sa distance zénithale, ajoutée à sa déclinaison, donne la latitude cherchée. Si l'étoile passe au méridien du côté du nord, on obtient la latitude en retranchant sa distance zénithale de sa déclinaison.

Afin d'atténuer l'erreur qui pourrait provenir de la flexion de la lunette (*Voy. DISTANCE ZÉNITHALE*), on fait ordinairement deux déterminations de la latitude, en employant deux astres qui passent au méridien, l'un du côté du nord, l'autre du côté du sud, à des distances du zénith à peu près égales; l'une des latitudes ainsi déterminées est un peu trop faible, l'autre un peu trop forte: la moyenne est sensiblement la latitude exacte. Cette méthode offre en même temps l'avantage d'atténuer l'erreur due à la réfraction, parce qu'elle est sensiblement la même, au sens près, dans les deux cas.

Les marins emploient préférentiellement l'observation de la hauteur méridienne du soleil, à cause de la difficulté d'observer l'horizon la nuit. Dans le cas où il s'agit du soleil, il est nécessaire de déterminer sa déclinaison au moment de son passage au méridien du lieu. Cette déclinaison étant donnée pour Paris dans la *Connaissance des temps*, on calculera au moyen de la longitude de ce lieu, qui est toujours approximativement connue, l'heure moyenne de Paris correspondante au midi vrai du lieu, et l'on déterminera la variation de déclinaison correspondante à cette heure en posant la proportion 24^h : la variation de déclinaison en un jour = le temps compris entre le midi moyen de Paris et le midi vrai du lieu; un quatrième terme, qui sera la variation cherchée.

La déclinaison du soleil étant ainsi déterminée, on achèvera comme ci-dessus le calcul de la latitude.

III. *Par des observations circumméridiennes*. On fait un certain nombre d'observations de hauteurs avant le passage au méridien, et le même nombre d'observations après ce passage; l'ensemble de ces observations ne doit pas durer plus d'un quart d'heure. Soit x la distance zénithale correspondante à l'heure h , et Z la distance zénithale méridienne; d'après la marche qui a été suivie, la différence entre x et Z sera une quantité très-petite, que nous

désignerons par x . Mais si D est la déclinaison de l'astre, λ la latitude cherchée et AI l'angle horaire correspondant à x et à h , on aura, dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith et l'astre,

$$\cos x = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D \cos AI,$$

formule que l'on peut écrire

$$\cos x = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D - 2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI,$$

ou

$$\cos x = \cos(\lambda - D) - 2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI.$$

Mais $\lambda - D$ est, au signe près, la distance zénithale méridienne Z ; on a donc

$$\cos x - \cos Z = -2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI,$$

ou

$$2 \sin \frac{1}{2}(x + Z) \sin \frac{1}{2}(x - Z) = -2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI,$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{2}(x + Z)$ par x , ce qui est permis, attendu que x et Z diffèrent très-peu, et en mettant pour $\sin \frac{1}{2}(x - Z)$ l'arc $\frac{1}{2}(x - Z)$ ou $\frac{1}{2}x$,

$$x \sin x = -2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI,$$

d'où

$$x = - \frac{2 \cos \lambda \cos D \sin^2 \frac{1}{2} AI}{\sin x \cdot \sin 1''}, \quad [1]$$

en évaluant x en degrés. Cette formule, qu'on appelle la *formule de réduction au méridien*, contient λ dans le second membre; mais si x' , x'' , x''' , etc., désignent les distances zénithales observées, et ζ leur moyenne, cette moyenne différera peu de Z , et l'on pourra prendre $\lambda = D - \zeta$. Ayant calculé de cette manière les corrections x' , x'' , x''' , etc., correspondantes aux autres distances zénithales observées z' , z'' , z''' , etc., on pourrait prendre pour la valeur de Z l'une des valeurs

$$z - x, \quad z' - x', \quad z'' - x'', \quad \dots;$$

mais il sera préférable de prendre leur moyenne et d'écrire

$$Z = \frac{1}{n} \Sigma z - \frac{1}{n} \Sigma x.$$

Le premier terme du second membre se lira sur l'instrument même, si c'est un instrument répétiteur, et l'on n'aura à calculer que le second terme. Dans le calcul de x et de ses analogues, D est la déclinaison du soleil au moment de son passage au méridien du lieu, que l'on calculera comme il a

été dit plus haut. Comme l'angle horaire $\frac{1}{2} AI$ est très-petit, on pourra remplacer le carré du sinus par le carré de l'arc, et écrire $\frac{1}{2} AI^2$ à la place de

$2 \sin^2 \frac{1}{2} AI$. Quant à AI lui-même, il a pour valeur $15(h - R)$ en appelant R l'ascension droite apparente de l'astre, c'est-à-dire l'ascension droite corrigée de la précession, etc. Il est inutile de répéter que les distances zénithales doivent être corrigées

de la réfraction, de la dépression, et, s'il s'agit du soleil, de la parallaxe et du demi-diamètre apparent, puisqu'on ne peut observer qu'un des bords.

IV. *Par des observations extra-méridiennes.* Les observations méridiennes ou circumméridiennes peuvent manquer par suite de l'état nuageux du ciel au moment du passage de l'astre considéré au méridien; il est donc nécessaire de pouvoir déterminer la latitude par des observations faites à une distance quelconque du méridien. Une seule observation de hauteur pourrait suffire si l'on avait à sa disposition un chronomètre dont l'état et la marche fussent parfaitement connus. En effet, dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith et l'astre considéré, on connaît alors deux côtés, la distance zénithale de l'astre, le complément de la déclinaison, c'est-à-dire sa distance polaire, et l'angle opposé au premier côté, qui n'est autre que l'angle horaire, déterminé par l'heure même de l'observation; on pourrait donc calculer le troisième côté, qui est le complément de la latitude cherchée. Mais, à cause de l'incertitude qu'il peut y avoir sur l'heure exacte de l'observation, on préfère employer deux observations de hauteurs, ce qui n'exige que la connaissance du temps écoulé entre les deux observations. Voici le principe de cette méthode. Soient P (fig. 1) le pôle, Z le zénith. S et S' les deux positions de l'astre observées aux heures h et h' . Dans le triangle sphérique SPS' on connaît les côtés PS et PS' , compléments de la déclinaison de l'astre observé, déclinaison qui est immédiatement connue s'il s'agit d'une étoile, et qu'il est facile de calculer, connaissant, approximativement au moins, l'heure de chaque observation, s'il s'agit du soleil; d'ailleurs l'angle SPS' est connu par l'intervalle de temps compris entre les deux observations. On peut donc calculer le côté SS' et l'angle PSS' . Dans le triangle ZZS' , on connaîtra alors les trois côtés, puisque les côtés ZS et ZS' sont les distances zénithales observées; on pourra donc calculer l'angle ZSS' . La différence des angles calculés ZSS' et PSS' donnera l'angle ZSP . Dans le triangle ZPS on connaîtra donc deux côtés PS , ZS et l'angle compris, et l'on pourra calculer le troisième côté PZ , dont le complément sera la latitude demandée. Cette méthode est une de celles qui sont le plus fréquemment employées en mer. (*Voy. le Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, p. 355.)

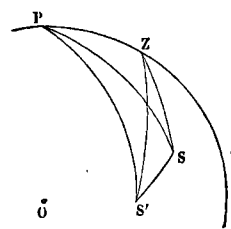


Fig. 1.

Généralement le navire s'est déplacé d'une quantité notable dans l'intervalle des deux observations; pour les rendre comparables, il faut donc réduire l'une des hauteurs observées à l'horizon de l'autre, c'est-à-dire à ce qu'elle eût été si les deux observations eussent été faites dans le même lieu.

Soient Z et Z' (fig. 2) les zéniths des deux stations, PZM le méridien de la première, S le centre de l'astre, ou plutôt sa projection sur la sphère céleste; les arcs de grands cercles ZS et $Z'S$ seront les compléments des hauteurs h et h' de l'astre

supposées observées au même instant; ZZ' sera le chemin m parcouru par le vaisseau; l'angle Z'ZS, que l'on appelle l'angle de gisement, est la différence entre l'azimut de l'astre observé de la station Z et celui du chemin ZZ'; nous le désignerons par V. Le triangle ZSZ' donne

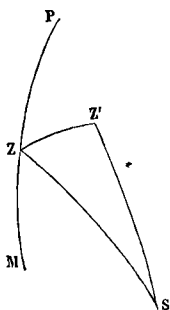


Fig. 2.

$\sin h' = \cos m \sin h$
 $+ \sin m \cos h \cdot \cos V.$

Posons

$$h' = h + x;$$

substituons et développons; puis, remarquant que x étant très-petit, ainsi que m , on peut remplacer leurs sinus par les arcs et leurs cosinus par l'unité, il restera

$$x = m \cos V,$$

et par conséquent

$$h' = h + m \cos V.$$

Telle est la valeur qui eût été obtenue pour la seconde hauteur si elle eût été observée de la première station.

V. Par des observations dans le premier vertical. On installe une lunette dans le premier vertical, c'est-à-dire dans un plan vertical perpendiculaire au méridien, et l'on note les heures h et h' où une même étoile traverse ce plan, d'abord du côté de l'est, ensuite du côté de l'ouest. Le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle, le zénith, et l'étoile au moment de l'un de ces passages, est rectangle au zénith; en nommant donc D la déclinaison de l'étoile, λ la latitude cherchée, et AI l'angle horaire, on a la relation

$$\cos D \cos AI = \cos \lambda.$$

Or D est connu; AI se déduit de l'intervalle de temps compris entre les deux observations; on a

$$AI = 15 \cdot \frac{1}{2} (h' - h).$$

Il ne reste donc d'autre inconnue que la latitude λ

Cette méthode, due à Bessel, paraît susceptible d'une grande précision; elle est, en outre, indépendante de la réfraction et des erreurs de division et de lecture.

Parmi les autres méthodes employées à la détermination de la latitude, nous citerons la méthode par les digressions de la Polaire (Voy. le Traité de Géodésie de Puissant, t. I, p. 186), et la méthode par les hauteurs de la Polaire. (Voy. la Géodésie de Franccœur, p. 399. Voy. aussi le Cours d'Astronomie élémentaire et de Géodésie de l'École polytechnique.

Comme exemple de la disposition des calculs, voici une détermination de latitude par la hauteur méridienne du soleil, extraite du Cours d'observations et de calculs nautiques fait par M. Krantz à l'École navale.

Enoncé. Le 5 mars 1853, étant par 45° de longitude O, l'œil élevé de 7 mètres, on a observé la hauteur méridienne du bord inférieur du soleil = 51°33'50"; on faisait face au sud. Quelle est la latitude.

ÉLÉMENTS DU CALCUL.

Heure vraie du lieu le 5 mars.....	0 ^h 0 ^m 0,0
Longitude O, en temps.....	+ 3 ^h
Heure vraie de Paris, le 5.....	3 ^h 0 ^m 0,0

Report....	3 ^h 0 ^m 0,0
Équation du temps.....	0 ^h 12 ^m 0,0
Heure moyenne de Paris, le 5.....	3 ^h 12 ^m 0,0
Déclinaison ☉ le 5 à 0 ^h à Paris	5° 57' 58",0 austr.
Variation en 24 ^h	— 25' 14",1
Partie proportionnelle pour 3 ^h 12 ^m	— 3' 6",0
Déclinaison ☉ à midi vrai du lieu.....	5° 54' 52",3 austr.
Calcul.	
Hauteur observée ☉.....	51° 33' 50",00
Dépression (Voy. ce mot)....	— 4' 41"
Hauteur apparente ☉.....	51° 29' 9"
Réfraction.—Parallaxe (Voy. ces mots).....	— 40"
Hauteur vraie ☉.....	51° 28' 29"
Demi-diamètre.....	+ 16' 8"
Hauteur vraie ☉.....	51° 44' 37"
Distance zénithale.....	38° 15' 23"
Déclinaison calculée.....	— 5° 54' 52"
Latitude nord.....	= 32° 20' 31"

Pour la détermination des latitudes des sommets successifs d'un réseau de triangles, voyez l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des).

LATITUDE (CORRECTION DE), correction qu'il faut faire subir aux coordonnées géographiques des différents sommets d'un réseau de triangles (Voy. TRIANGULATION), et aux azimuts des divers côtés, par suite d'une erreur commise sur la latitude de l'un de ces sommets. Soit A le sommet sur la latitude l duquel une légère erreur a été commise; soit M un autre sommet quelconque dont la latitude, déduite de la précédente, a été trouvée égale à l' ; soit φ la différence des longitudes de ces deux points. Considérons le triangle sphérique qui a pour sommets les points A, M et le pôle; désignons le côté AM par m , et les angles en A et en M par les lettres A et M.

On a d'abord, par la proportionnalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés,

$$\sin A \cdot \sin m = \cos l' \cdot \sin \varphi. \quad [1]$$

Différentiant, en regardant m et A comme constants, on trouve

$$0 = \cos l' \cos \varphi d\varphi - \sin l' \cdot \sin \varphi dl',$$

d'où

$$dl' = \cot l' \cdot \cot \varphi \cdot d\varphi. \quad [2]$$

Le même triangle donne

$$\sin l' = \sin l \cos m + \cos l \sin m \cos A. \quad [3]$$

Différentiant par rapport à l' et à l , on obtient

$$\cos l' dl' = \cos l \cos m dl - \sin l \sin m \cos A \cdot dl.$$

Mais, par une formule connue de trigonométrie sphérique, on a

$$\cos l \cos m - \sin l \sin m \cos A = \cos l' \cos \varphi;$$

on peut donc écrire, en divisant par $\cos l'$,

$$dl' = \cos \varphi \cdot dl. \quad [4]$$

Égalant cette valeur à la valeur [2], on obtient

$$dl = \frac{\cot l'}{\sin \varphi} d\varphi \quad \text{ou} \quad d\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cot l'} dl. \quad [5]$$

Enfin le même triangle donne encore

$$\sin l = \sin l' \cos m + \cos l' \sin m \cdot \cos M. \quad [6]$$

Différentiant par rapport à l , l' et M, on obtient

$$\cos l dl = \cos l' \cdot \cos m dl' - \sin l' \sin m \cos M \cdot dl'' - \cos l' \sin m \sin M \cdot dM.$$

ou, en remplaçant le produit $\sin m \cos M$ par sa valeur tirée de [6], et simplifiant :

$$\cos l dl = d'l' \frac{\cos m - \sin l \sin l'}{\cos l'} - \cos l' \sin m \sin M dM,$$

ou, en remplaçant $\cos m - \sin l \sin l'$ par sa valeur $\cos l \cos l' \cos \varphi$,

$$\cos l dl = d'l' \cos l \cos \varphi - \cos l' \sin m \sin M dM.$$

Mais, par la relation des sinus, on a $\sin m \sin M = \cos l \sin \varphi$;

faisant cette substitution, on trouve, après avoir divisé par $\cos l$,

$$dl = d'l' \cos \varphi - \cos l' \sin \varphi dM.$$

Remplaçant enfin $d'l'$ par sa valeur [4] et réduisant, on obtient

$$dM = \frac{\sin \varphi}{\cos l'} \cdot dl. \quad [7]$$

Les relations [4], [5] et [7] permettront de calculer les corrections qu'il faut faire subir à la latitude du point M, à sa longitude, et à l'azimut du côté AM sur l'horizon de ce point, et par suite à l'azimut des côtés qui aboutissent au point M, par suite de l'erreur commise sur la latitude du point A.

LATITUDES CROISSANTES, distances entre les parallèles d'une CARTE MARINE (*Voy.* ce mot) et l'équateur, ou nombres de minutes de l'équateur qui mesurent la distance de l'équateur à un parallèle quelconque. Ces nombres sont donnés par la formule.

$$\varphi = \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \log' \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} l \right)$$

(*Voy.* LOXODROME), dans laquelle φ représente la distance du parallèle à l'équateur et l la latitude correspondante à ce parallèle. Les latitudes croissantes jouent un rôle important dans la résolution des problèmes auxquels peut donner lieu l'emploi des cartes marines. Nous donnons ci-dessous la table des latitudes croissantes de 10' en 10'. Les valeurs de la fonction φ sont données immédiatement sous la forme d'un nombre abstrait; pour les exprimer en minutes, il faut les diviser par la valeur de l'arc d'une minute, qui est 0,000 290 888.

La première colonne indique les degrés de latitude; les six autres les valeurs de φ de 10' en 10'.

	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0°	0,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0
1	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0	110,0
2	120,0	130,0	140,0	150,1	160,1	170,1
3	180,1	190,1	200,1	210,1	220,2	230,2
4	240,2	250,2	260,3	270,3	280,3	290,3
5	300,4	310,4	320,5	330,5	340,5	350,6
6	360,7	370,7	380,8	390,8	400,9	411,0
7	421,1	431,1	441,2	451,3	461,4	471,5
8	481,6	491,7	501,8	511,9	522,0	532,1
9	542,2	552,4	562,5	572,6	582,8	592,9
10	603,1	613,2	623,4	633,6	643,7	653,9
11	664,1	674,3	684,5	694,7	704,9	715,1
12	725,3	735,6	745,8	756,0	766,3	776,5
13	786,8	797,0	807,3	817,6	827,9	838,2
14	848,5	858,8	869,1	879,4	889,8	900,1
15	910,5	920,8	931,2	941,6	951,9	962,3
16	972,7	983,1	993,6	1004,0	1014,4	1024,9
17	1035,3	1045,8	1056,2	1066,7	1077,2	1087,7
18	1098,2	1108,7	1119,3	1129,8	1140,4	1150,9
19	1161,5	1172,1	1182,7	1193,3	1203,9	1214,5
20	1225,1	1235,8	1246,4	1257,1	1267,8	1278,5
21	1289,2	1299,9	1310,6	1321,4	1332,1	1342,9

	0'	10'	20'	30'	40'	50'
22	1253,7	1364,5	1275,3	1386,1	1396,9	1407,8
23	1418,6	1429,5	1440,4	1451,3	1462,2	1473,1
24	1484,1	1495,0	1506,0	1517,0	1528,0	1539,0
25	1550,0	1561,0	1572,1	1583,2	1594,3	1605,4
26	1616,5	1627,6	1638,8	1649,9	1661,1	1672,3
27	1683,5	1694,8	1706,0	1717,3	1728,5	1739,8
28	1751,2	1762,5	1773,9	1785,2	1796,6	1808,0
29	1819,4	1830,9	1842,3	1853,8	1865,3	1876,8
30	1888,4	1899,9	1911,5	1923,1	1934,7	1946,4
31	1958,0	1969,7	1981,4	1993,1	2004,8	2016,6
32	2028,4	2040,2	2052,0	2063,9	2075,7	2087,6
33	2099,5	2111,5	2123,4	2135,4	2147,4	2159,4
34	2171,5	2183,6	2195,7	2207,8	2219,9	2232,1
35	2244,3	2256,5	2268,8	2281,0	2293,3	2305,6
36	2318,0	2330,4	2342,8	2355,2	2367,6	2380,1
37	2392,6	2405,2	2417,7	2430,3	2442,9	2455,6
38	2468,3	2481,0	2493,7	2506,3	2519,3	2532,1
39	2544,9	2557,8	2570,7	2583,7	2596,7	2609,7
40	2622,7	2635,8	2648,9	2662,0	2675,2	2688,4
41	2701,6	2714,9	2728,2	2741,5	2754,9	2768,3
42	2781,7	2795,2	2808,7	2822,2	2835,8	2849,4
43	2863,1	2876,8	2890,5	2904,3	2918,1	2931,9
44	2945,8	2959,7	2973,7	2987,7	3001,7	3015,8
45	3029,9	3044,1	3058,3	3072,4	3086,8	3101,9
46	3115,6	3130,0	3144,4	3158,9	3173,5	3188,2
47	3202,7	3217,4	3232,1	3246,9	3261,7	3276,1
48	3291,5	3306,5	3321,5	3336,6	3351,7	3366,6
49	3382,1	3397,4	3412,7	3428,0	3443,5	3458,9
50	3474,5	3490,1	3505,7	3521,4	3537,1	3552,9
51	3568,8	3584,7	3600,7	3616,7	3632,8	3649,0
52	3665,2	3681,5	3697,8	3714,2	3730,7	3747,2
53	3763,8	3780,4	3797,1	3813,9	3830,8	3847,7
54	3864,6	3881,7	3898,8	3916,0	3933,2	3950,6
55	3968,0	3985,4	4003,0	4020,6	4038,3	4056,1
56	4073,9	4091,8	4109,8	4127,9	4146,1	4164,3
57	4182,6	4201,0	4219,5	4238,1	4256,7	4275,5
58	4294,3	4313,2	4332,2	4351,3	4370,5	4389,8
59	4409,1	4428,6	4448,2	4467,8	4487,6	4507,4
60	4527,4	4547,4	4567,2	4587,2	4608,2	4628,7
61	4649,2	4669,9	4690,7	4711,6	4732,6	4753,7
62	4775,0	4796,3	4817,8	4839,4	4861,1	4883,0
63	4904,9	4927,0	4949,2	4971,6	4994,1	5016,7
64	5039,4	5062,3	5085,3	5108,5	5131,8	5155,2
65	5178,8	5202,6	5226,4	5250,5	5274,7	5299,0
66	5323,5	5348,2	5373,0	5398,0	5423,2	5448,5
67	5474,0	5509,7	5525,6	5551,6	5577,8	5604,2
68	5630,8	5657,6	5684,6	5711,8	5739,2	5766,8
69	5794,6	5822,6	5850,8	5879,2	5907,9	5936,8
70	5965,9	5995,3	6024,9	6054,7	6084,8	6115,1
71	6145,7	6176,6	6207,7	6239,0	6270,7	6302,6
72	6334,8	6367,4	6400,2	6433,3	6466,7	6500,4
73	6534,4	6568,8	6603,5	6638,5	6673,9	6709,7
74	6745,7	6782,2	6819,1	6856,3	6893,9	6931,9
75	6970,3	7009,2	7048,5	7088,2	7128,4	7169,0
76	7210,1	7251,7	7293,7	7336,3	7379,4	7423,0
77	7467,2	7511,9	7557,3	7603,2	7649,7	7696,8
78	7744,6	7793,0	7842,1	7891,9	7942,4	7993,7
79	8045,7	8098,5	8152,1	8206,6	8261,9	8318,1
80	8375,2	8433,3	8492,3	8552,4	8613,5	8675,7
81	8739,1	8803,6	8869,3	8936,3	9004,7	9074,3
82	9145,5	9218,1	9292,2	9368,0	9445,5	9524,7
83	9605,8	9688,9	9773,9	9861,2	9950,7	10042,5
84	10136,9	10233,9	10333,7	10436,5	10542,5	10651,8
85	10764,6	10881,3	11002,1	11127,2	11257,7	11392,1
86	11532,5	11678,9	11831,9	11991,9	12159,7	12336,2
87	12522,1	12718,7	12927,2	13149,1	13386,4	13641,2
88	13916,4	14211,6	14543,3	14905,6	15310,5	15769,6
89	16299,6	16926,4	17693,5	18622,5	20076,4	22459,3
90°	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Dans les basses latitudes et dans les latitudes moyennes, ces nombres croissent assez lentement pour qu'on puisse interpoler par une simple proportion. Au delà, il faudrait avoir recours aux différences secondes.

Il existe différentes tables des latitudes croissantes. Celle dont on fait usage au Dépôt de la Marine est la table de Mendoza. M. Caillet a publié, d'après un ouvrage allemand, une table des latitu-

des croissantes où l'on a eu égard à la forme elliptique du méridien (*Voy. LOXODROMIE*); cette table n'a point été adoptée par les navigateurs.

LATITUDINAL, plan vertical mené perpendiculairement au LONGITUDINAL (*Voy. ce mot*) d'un navire, et qui divise le MAITRE-COUPLE (*Voy. ce mot*) en deux parties égales dans son épaisseur. (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE.*)

LENTILLE, verre auquel on donne le plus souvent la forme d'une lentille, et qui entre comme partie principale dans un très-grand nombre d'instruments d'optique, particulièrement dans les lunettes. On appelle lentilles *convergentes* celles qui font converger les rayons émanés d'un point lumineux vers un même point appelé *foyer conjugué*, situé de l'autre côté de la lentille, et où se forme une image *réelle* du point lumineux. On appelle lentilles *divergentes* celles qui font diverger davantage les rayons émanés d'un point lumineux; les prolongements de ces rayons convergent vers un même point appelé aussi *foyer conjugué*, mais situé du même côté de la lentille que le point lumineux, et ne donnant lieu qu'à une image *virtuelle* du point lumineux. On distingue six formes de lentilles : les lentilles *bi-convexes* (fig. 1), les lentilles *plan-convexes* (fig. 2), les *ménisques convergents* (fig. 3), les

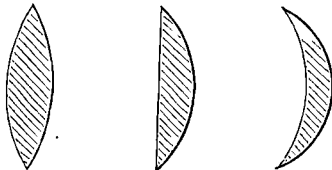


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

concaves (fig. 4), les lentilles *plan-concaves* (fig. 5), les *ménisques divergents* (fig. 6). Les trois premières ont pour caractère commun d'être plus épaisses au centre que vers le bord; elles rappro-

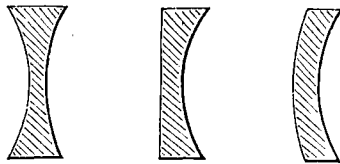


Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6.

chent les rayons du centre, et sont par conséquent convergentes. Les trois dernières ont, au contraire, pour caractère commun d'être plus épaisses au bord qu'au centre; elles éloignent les rayons du centre, et sont par conséquent divergentes.

I. Les distances du point lumineux et du foyer conjugué à la lentille sont liées par une relation qu'il est facile d'établir. Prenons d'abord le cas d'une lentille convergente, de la lentille bi-convexe pour fixer les idées. Désignons par n l'indice de réfraction, c'est-à-dire le rapport constant qui existe entre le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction, pour la matière dont la lentille est formée. Soit L (fig. 7) le point lumineux, LI le rayon incident, NIO la normale en I; II'K la direction du rayon réfracté, N'I'O' la normale en I'; enfin I'F le rayon émergent. Nous supposons que

les points I et I' soient très-près de l'axe de figure de la lentille. En vertu de la réfraction qui s'opère en I, on aura

$$\sin LIN = n \cdot \sin OIK \text{ ou } LIN = n \cdot OIK,$$

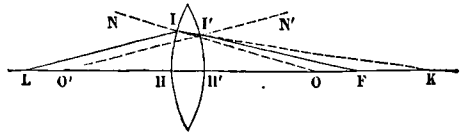


Fig. 7.

attendu que les angles sont supposés assez petits pour se confondre avec leurs sinus; cette relation peut s'écrire, en désignant par L, K, O les angles aigus qui ont leur sommet aux points marqués par ces lettres :

$$L + O = (O - K), \text{ d'où } nK = (n - 1)O - L. [1]$$

En vertu de la réfraction qui s'opère en I', on aura de même

$$\sin FI'N' = n \cdot \sin KI'N' \text{ ou } FI'N' = n \cdot KI'N';$$

car si F était le point lumineux, et FI' le rayon incident, le rayon réfracté serait I'I. Cette relation peut s'écrire, en appelant O' l'angle I'O'K, et F l'angle I'FO' :

$$O + F = n(O' + K), \text{ d'où } nK = F - (n - 1)O'. [2]$$

Comparant les relations [1] et [2], on en tire

$$F + L = (n - 1)(O + O'). [3]$$

Mais les points I et I' étant très-près de l'axe, les arcs IH et I'H' peuvent être considérés comme des droites égales perpendiculaires à cet axe; on peut négliger l'épaisseur HH' de la lentille par rapport aux distances LH, FH'; en remplaçant donc les angles par leurs tangentes dans la relation [3], divisant par IH, ou I'H', et désignant LH par p et FH' par p' , OI par r et O'I' par r' , on obtiendra

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right). [4]$$

Si le point lumineux est situé à l'infini, on a $p = \infty$; le point F' prend le nom de *foyer principal*; la distance FH' ou p' devient ce que l'on appelle la *distance focale principale* de la lentille; et en la désignant par f , on a

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right). [5]$$

Par conséquent, la relation [4] peut s'écrire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. [6]$$

Cette relation montre que les distances p et p' varient en sens inverse. Si $r = r'$, ce qui est le cas le plus ordinaire, on a

$$f = \frac{r}{2(n - 1)};$$

et comme, pour le verre, $n = \frac{3}{2}$, il vient simplement

$f = r$. Dans le cas d'une lentille plan-convexe, il faut faire $r' = \infty$; et dans le cas d'un ménisque convergent il faut supposer r' négatif.

Une marche identique conduit, dans le cas d'une lentille bi-concave (fig. 8), à la relation

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}, [7]$$

qui montre que les distances p et p' varient alors dans le même sens.

On pourrait, à l'aide de conventions convenables sur les signes, réunir en une seule les formules [6] et [7].

II. On appelle *centre optique* d'une lentille un point qui jouit de cette propriété que tout rayon réfracté qui y passe n'éprouve aucune déviation et sort parallèlement à sa direction première. Il est facile

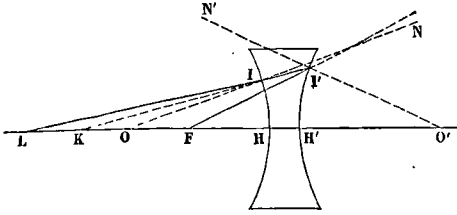


Fig. 8.

d'en déduire la position de ce point. Soient LI et I'F (fig. 9) les deux rayons incident et émergent; C le point où le rayon réfracté II' coupe l'axe. Les angles LII' et II'F étant égaux par hypothèse,

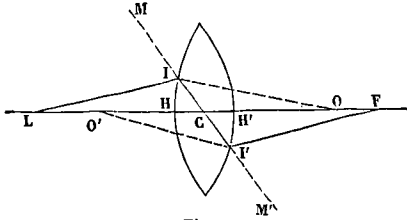


Fig. 9.

il en résulte que les angles LIM et F'I'M' sont égaux aussi; donc, en vertu des lois de la réfraction, les angles O'I' et O'I sont égaux, et les droites O'I' et OI sont parallèles. Dès lors, les triangles semblables OIC et O'IC donnent :

$$OI : O'I' = OC : O'C \text{ ou } OH : O'H' = CO : O'C,$$

d'où

$$OH - OC : O'H' - O'C = OH : O'H'$$

ou

$$HC : H'C = r : r',$$

c'est-à-dire que le centre optique divise la droite HH' en parties proportionnelles aux rayons des sphères qui terminent la lentille.

Un raisonnement semblable ferait voir que la propriété subsiste pour une lentille divergente (Voy. la figure 10).

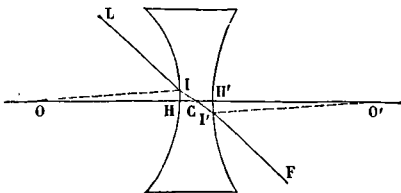


Fig. 10.

III. Lorsque le point lumineux n'est pas sur l'axe de figure, l'image de ce point est sur la droite qui joint le point lumineux au centre optique, droite à laquelle on donne le nom d'*axe secondaire*; et les formules [6] et [7] subsistent, au moins très-approximativement.

Considérons d'abord une lentille convergente.

Soit L (fig. 11) le point lumineux; en négligeant l'épaisseur de la lentille, on peut dire que le rayon LC qui passe au centre optique n'éprouvera pas de déviation; par conséquent, l'image du

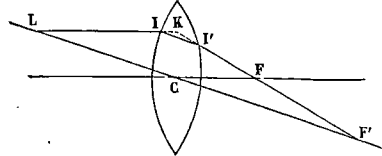


Fig. 11.

point L sera sur le prolongement de LC. Mais si l'on mène le rayon LI parallèle à l'axe de figure, ce rayon, pouvant être regardé comme émanant d'un point situé à l'infini sur cet axe, viendra, après la réfraction, passer au foyer principal F, et coupera LC en F'; ce point F' sera le foyer *conjugué* de L. Or, si l'on prolonge LI et F'I' jusqu'à leur rencontre en K, les triangles semblables CF'F et LF'K donnent

$F'L : F'C = LK : CF$ ou $LC + CF' : F'C = LK : CF$. Remplaçant LC par p , F'C par p' , CF par f , et remarquant que LK diffère très-peu de LC, il viendra

$$p + p' : p' = p : f, \text{ d'où } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \quad [8]$$

Les mêmes raisonnements montrent que dans le

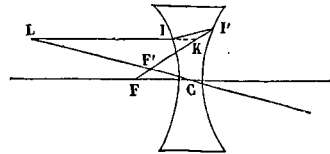


Fig. 12.

cas d'une lentille divergente (fig. 12) on aurait

$$LC : F'C = LK + FC : FC,$$

ou

$$p : p' = p + f : f,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}. \quad [9]$$

Lorsque le point lumineux est remplacé par un objet AB (fig. 13) dont tous les points émettent de la

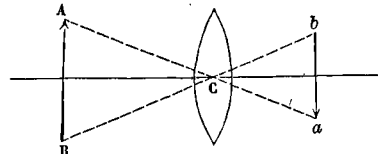


Fig. 13.

lumière, on obtient l'image par la considération des *axes secondaires* menés par le centre optique C. Si, par exemple, la lentille est convergente (fig. 13), le point A donne une image a située sur l'axe secondaire AC à une distance qui serait donnée par la formule [8], et le point B donne une image b située sur l'axe secondaire BC à la même distance. Il en résulte que si AB est placé au delà du foyer principal, l'image ab est renversée, mais réelle,

c'est-à-dire qu'elle pourrait être reçue sur un écran. Si AB s'approche de la lentille, l'image ab s'en éloigne, et augmente de grandeur. Si AB se place au foyer principal, ab se transporte à l'infini, et il n'y a plus d'image. Si AB passe entre le foyer principal et la lentille, p' devient négatif et l'image passe de l'autre côté de la lentille; elle est alors droite, mais virtuelle. Si la lentille est divergente (fig. 14), l'image ab

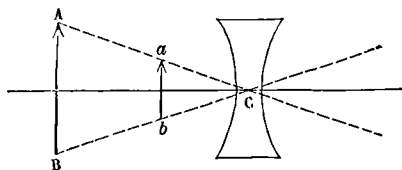


Fig. 14.

est d'abord droite et virtuelle; quand AB s'approche de la lentille, l'image s'en approche également et diminue de grandeur. Quand AB se place au foyer principal, l'image est à la distance $\frac{f}{2}$. L'objet continuant à approcher de la lentille, l'image s'en approche aussi et continue à diminuer de grandeur; mais elle reste toujours virtuelle. La discussion de la formule [9] rend compte de toutes ces circonstances.

IV. Les lentilles convergentes dont il a été question jusqu'ici ont l'inconvénient de colorer les bords de l'image, à cause de l'inégale réfrangibilité des rayons de couleurs diverses qui composent la lumière blanche. On fait disparaître ce défaut en employant, dans la construction de la lentille, deux espèces de verre dont le pouvoir dispersif est différent, et en combinant leurs formes de manière à produire des effets inverses. A une lentille bi-concave de *crown-glass* (verre vert) on juxtapose une lentille bi-concave de *flint-glass* (verre blanc, qui renferme une grande quantité de plomb); l'ensemble de ces deux lentilles forme un ménisque convergent (fig. 15). La première lentille fait converger les rayons en dispersant les couleurs; la seconde détruit la dispersion et diminue la convergence sans la faire disparaître entièrement. C'est de cette manière que sont construits les objectifs des lu-

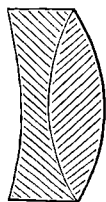


Fig. 15.

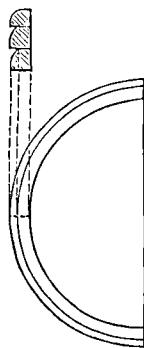


Fig. 16.

nettes astronomiques, et de tous les instruments d'optique de quelque valeur. Ces objectifs portent le nom d'objectifs *achromatiques* (de α privatif et de $\gamma\pi\omega\mu\alpha$, couleur).

On emploie dans les phares des séries de *lentilles annulaires* (fig. 16), dont les sections méridiennes sont des portions de lentilles convergentes plan-convexes, et dont la forme est calculée de manière que le foyer principal soit le même pour toutes.

LETTRE DE CHANGE, effet de commerce, par lequel une personne donne ordre à une autre, habitant un lieu différent, de payer à une troisième une somme dont elle reconnaît avoir reçu la valeur en espèces ou en marchandises. La personne qui donne l'ordre s'appelle le *tireur*, celle qui reçoit l'ordre s'appelle le *tiré*; la personne qui est porteur de la lettre de change, et au profit de qui elle est soucrite, porte le nom de *preneur*. L'ordre inscrit dans une lettre de change est ordinairement conçu comme dans cet exemple :

« Paris, le 17 septembre 1864.

« A présentation, payez par cette seule de change, à M. Urbain, négociant à Lyon, ou à son ordre, la somme de *trois mille cinq cents francs*, valeur en marchandises.

« A M. Raymond,

Signé : Gilbert. »

« Négociant à Lyon.

Dans cet exemple, Gilbert est le tireur, Raymond le tiré, et Urbain le preneur.

Les mots *ou à son ordre* indiquent qu'Urbain, au lieu de toucher lui-même, peut transmettre ses droits à une quatrième personne, en *endossant* la lettre de change, c'est-à-dire en apposant au dos sa signature, précédée des mots :

« Payez à M. ***, ou à son ordre, valeur en marchandises, » ainsi que du nom du lieu et de la date.

La lettre de change, au lieu d'être payable à présentation, peut l'être à trois mois, à six mois. Il peut arriver, dans ce cas, que le preneur, ayant des doutes sur le crédit accordé au tireur, veuille obtenir l'*acceptation*, ou l'engagement personnel du tiré. Si celui-ci l'accorde, il écrit en travers sur la lettre même : *Accepté pour* (la somme), et sa signature. Il se trouve dès lors dans la même situation que s'il avait souscrit un billet au tireur, et que celui-ci l'eût négocié au preneur. Si l'acceptation est refusée, le preneur, après l'avoir fait constater par un protêt, peut exiger du tireur une caution ou la consignation de la somme.

Il existe une espèce particulière de lettre de change, non soumise aux obligations relatives à l'acceptation; c'est le *mandat*, qui est ordinairement rédigé sous cette forme :

« A trois mois, payez par le présent mandat, non susceptible d'acceptation, à M. ***, ou à son ordre, la somme de..... »

Les lettres de change portent aussi le nom de *traites*.

L'usage des lettres de change paraît remonter à la fin du douzième siècle.

LETTRE DOMINICALE, lettre de l'alphabet qui, dans le calendrier ecclésiastique, désigne le premier dimanche de l'année, et par suite tous les autres dimanches. On attribue la lettre A au premier jour de l'année, B au second, C au troisième, etc., G au septième; puis de nouveau A au huitième, B au neuvième, et ainsi de suite jusqu'à la fin de l'année; les lettres employées étant au nombre de sept comme les jours de la semaine, il est clair que si

A se trouve représenter un mardi, tous les autres mardis de l'année seront marqués de la lettre A ; la lettre F désignant alors le premier dimanche, tous les autres jours marqués de la lettre F seront des dimanches; on dit dans ce cas que F est la lettre dominicale.

La connaissance de la lettre dominicale est indispensable dans le COMPUT ECCLÉSIASTIQUE (Voy. ce mot). Pour déterminer cette lettre, il faut savoir que la première année du CYCLE SOLAIRE (Voy. ce mot) a été l'an IX avant J. C., et que le premier jour de cette année était un lundi, d'où il suit que la lettre dominicale était G. Il faut remarquer ensuite que le nombre des jours d'une année commune, ou 365, étant de la forme $7n + 1$, le jour qui finit l'année est le même que celui qui la commence, c'est-à-dire que si une année commune commence par un mardi, elle finit également par un mardi; tandis que le nombre des jours d'une année bissextile, ou 366, étant de la forme $7n + 2$, l'année finit par un jour qui, dans l'ordre des jours de la semaine, suit le jour par lequel elle a commencé; c'est-à-dire que si une année bissextile a commencé par un mercredi, elle se termine par un jeudi.

Il résulte de cette observation qu'après une année commune, le premier dimanche de l'année doit tomber un jour plus tôt que l'année précédente, dans l'ordre des dates, et qu'après une année bissextile, il doit tomber deux jours plus tôt; d'où il résulte qu'après une année commune la lettre dominicale devra rétrograder d'un rang dans l'ordre des lettres, et qu'après une année bissextile elle devra rétrograder de deux rangs. Si, par exemple, dans une année commune, la lettre dominicale est F, l'année suivante ce sera E; et si, dans une année bissextile, la lettre dominicale est F, l'année suivante ce sera, non pas E, mais bien D.

On est convenu d'employer, dans les années bissextiles, deux lettres dominicales: l'une du 1^{er} janvier au 24 février inclusivement, l'autre du 25 à la fin de l'année. Le changement de lettre dominicale se fait, comme on voit, non pas le 29 février, mais le 25, jour de Saint-Mathias.

D'après le calendrier Julien, rien n'est plus facile que de trouver la lettre dominicale d'une année. Soit, par exemple, l'année 1861; on ajoutera 9 afin d'avoir le nombre d'années écoulées depuis l'origine du cycle solaire, ce qui donnera 1870; on divisera par 28, nombre des années de ce cycle; le reste 24 donnera le rang de l'année 1870 dans le cycle. Or, remarquant que la première année du cycle a dû être bissextile, on pourra former le tableau suivant :

Rang de l'année dans le cycle.	Lettres dominicales.
1	G, F
2	E
3	D
4	C
5	B, A
6	G
7	F
8	E
9	D, C

Rang de l'année dans le cycle.	Lettres dominicales.
10	B
11	A
12	G
13	F, E
14	D
15	C
16	B
17	A, G
18	F
19	E
20	D
21	C, B
22	A
23	G
24	F
25	E, D
26	C
27	B
28	A

On voit qu'au nombre 24 répond la lettre F. La lettre dominicale sera donc F, c'est-à-dire que le premier dimanche sera le 6 janvier.

Si du calendrier Julien on veut passer au calendrier Grégorien, on ajoutera 12 à la date du 6 janvier, ce qui donnera le 18. Il en résulte que le 18 sera un dimanche; il en sera de même du 11 et du 4; or le 4 est marqué de la lettre D dans le calendrier ecclésiastique: la lettre dominicale sera donc D.

Faisons un calcul analogue pour l'année 1864; ajoutant 9 on obtient 1873, qui, divisé par 28, donne pour reste 25. Or, dans le tableau ci-dessus, on voit qu'au nombre 25 répondent les deux lettres E et D; la première lettre dominicale répondra donc à 5.— Ajoutant 12 à 5, on obtient le 17, qui, divisé par 7, donne pour reste 3; le premier dimanche de l'année sera donc le 3. Or, au 3 répond la lettre C; la première dominicale sera donc C; par suite, la seconde sera B, à partir du 25 février.

LEVER DES PLANS, ensemble des opérations qu'il faut effectuer pour déterminer les positions relatives des projections des divers points d'un terrain sur un même plan horizontal. S'il s'agit d'une contrée ayant une étendue un peu considérable, on exécute une TRIANGULATION (Voy. ce mot) et l'on rapporte les résultats sur une feuille plane qui prend alors le nom de CARTE (Voy. CARTES). Mais s'il s'agit d'un terrain de médiocre étendue, on choisit sur son contour un certain nombre de points remarquables que l'on joint par des droites consécutives; ces droites forment les côtés d'un polygone auquel on donne le nom de POLYGONE TOPOGRAPHIQUE (Voy. ce mot); on lève avec soin le plan de ce polygone, et l'on y rapporte tous les autres points remarquables du terrain, auxquels on rattache à leur tour les menus détails. On suit pour cela diverses méthodes dont le choix dépend des instruments que l'on a à sa disposition, ou du degré d'exactitude que l'on veut obtenir.

LEVER AU MÈTRE. Lorsqu'on ne dispose que d'une chaîne d'arpenteur, on mesure les côtés du polygone topographique, s'ils sont horizontaux, ou leurs projections horizontales, s'ils sont inclinés à l'horizon (Voy. CHAÎNE D'ARPEUTEUR). Quant aux an-

gles, on les obtient de la manière suivante : désignons par A, B, C, trois sommets consécutifs du polygone, et supposons que l'on veuille obtenir l'angle B, réduit à l'horizon (Voy. RÉDUCTION À L'HORIZON); on prendra sur le côté AB un point arbitraire *m*, et sur le côté BC un point arbitraire *n*, tous deux peu éloignés de B; on mesurera à la chaîne les distances *mB*, *Bn*, *mn* si elles sont horizontales, ou leurs projections horizontales si elles sont inclinées à l'horizon; on pourra alors construire un triangle ayant pour côtés les trois distances horizontales obtenues, réduites à une échelle choisie à l'avance (Voy. ÉCHELLE); l'angle de ce triangle opposé à la projection de *mn* sera l'angle B réduit à l'horizon. On obtiendra ainsi tous les angles de la projection horizontale du polygone topographique, et l'on pourra construire cette projection à l'échelle choisie. La surabondance des données, puisqu'on a mesuré tous les côtés et tous les angles, servira de vérification; il faudra que le polygone se ferme de lui-même, ce qui exige que la somme des angles mesurés soit égale à autant de fois 180° qu'il y a de côtés moins 2; si cela n'est pas, et que la différence soit faible, on la répartit également entre tous les angles; si, par exemple, la somme des angles est de 30' trop faible, et qu'il y ait 10 angles, on augmentera chacun d'eux du dixième de 30', c'est-à-dire de 3'. Mais il faut bien remarquer que s'il y a un angle rentrant, ce n'est pas cet angle, moindre que 180°, qui doit entrer dans le calcul, mais bien l'excès de 360° sur ce même angle.

Ayant obtenu ainsi le plan du polygone topographique, on y rattache un point important quelconque du terrain, en joignant ce point à deux points déterminés du contour du polygone, deux sommets par exemple, et mesurant les projections horizontales des lignes de jonction; car le point dont il s'agit se trouve ainsi lié au polygone par un triangle dans lequel on connaît les trois côtés. Les points ainsi déterminés servent à leur tour à fixer la position des points secondaires, et ainsi de suite.

Dans les levés de bâtiments, on substitue souvent à la chaîne d'arpenteur un ruban de même longueur, divisé en mètres, décimètres et centimètres, qui s'enroule dans une boîte cylindrique, comme le mètre dont se servent les tailleurs et les ouvriers en robes; ce petit instrument très-portatif est connu sous le nom de *roulette*.

Dans les opérations militaires, qui exigent plus de célérité que d'exactitude, on se passe d'un instrument de mesure qui exige le concours de deux opérateurs, et l'on prend pour unité de longueur le *pas*, dont la valeur moyenne pour chaque opérateur est ordinairement connue à l'avance, ou peut être déterminée après coup; on évalue approximativement à l'œil la réduction que chaque ligne mesurée doit subir, d'après la pente correspondante, pour donner sa projection horizontale.

LEVER A LA CHAÎNE ET AU GRAPHOMÈTRE. Le plan du polygone topographique s'obtient comme plus haut, avec cette différence que les angles sont mesurés au GRAPHOMÈTRE (Voy. ce mot), qui les donne tout réduits à l'horizon si le limbe est disposé horizontalement. On détermine comme ci-dessus chaque point important du terrain en le joignant à deux points connus sur le contour du polygone to-

pographique; mais, au lieu de mesurer à la chaîne les lignes de jonction, on peut mesurer au graphomètre les angles qu'elles font avec la droite qui joint les deux points; le triangle, au lieu d'être déterminé par ses trois côtés, l'est alors par un côté et les deux angles adjacents. Même observation pour la détermination des points secondaires à l'aide des points principaux.

LEVER A LA PLANCHETTE. Dans cette méthode, on se procure d'abord sur le terrain une base AB (fig. 1),

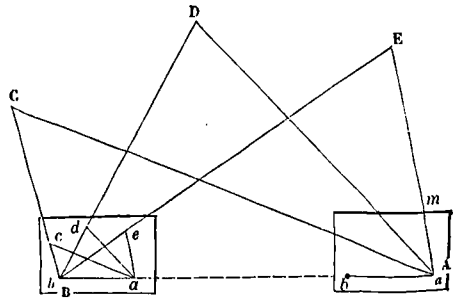


Fig. 1.

choisie de manière que tous les points importants du terrain soient visibles de ses extrémités, qu'aucun point important du terrain ne se trouve sur son prolongement ou près de ce prolongement, et qu'elle puisse être mesurée à la chaîne. On trace sur la PLANCHETTE (Voy. ce mot) une droite *ab* qui représente AB à une échelle convenablement choisie. On place la planchette horizontalement en A, de manière que *a* soit à peu près sur la verticale de A, et que *ab* soit dirigé suivant AB. On vise alors, avec l'alidade, les points C, D, E, etc., marqués précédemment sur le terrain, et l'on trace sur la planchette, avec l'alidade même, les directions *aC*, *aD*, *aE*, etc. On transporte alors la planchette en E, et on l'y installe horizontalement, de manière que *b* soit à peu près sur la verticale de B, et que *ba* soit dirigé suivant BA. On trace avec l'alidade les directions *bC*, *bD*, *bE*, etc.; qui coupent respectivement en *c*, *d*, *e*, etc. les directions obtenues à la station A. Les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc., représentent sur la planchette les points A, B, C, D, E, etc. du terrain. Cette méthode est expéditive; mais elle n'est pas susceptible d'une grande précision. S'il y avait des points voisins du prolongement de la base, ils seraient mal déterminés, parce que les droites qui devraient les donner par leur intersection se couperaient sous un angle trop aigu.

Il n'est pas indispensable qu'à la station A, le point *a* de la planchette soit placé exactement dans la verticale de A; il en est de même à la station B; il faudrait qu'on opérât à une très-grande échelle pour qu'une légère différence à cet égard affectât l'exactitude du lever.

La méthode des intersections pourrait au reste être appliquée sans employer la planchette; on pourrait mesurer au graphomètre les angles CAB, DAB, EAB, etc., puis les angles CBA, DBA, EBA, etc.; en les reportant sur le plan à l'aide du rapporteur, on obtiendrait comme ci-dessus les points *c*, *d*, *e*, etc., par les intersections des droites correspondantes menées de A et de B.

Lorsqu'il se trouve sur le terrain deux points dont la distance horizontale est connue à l'avance, et que nous nommerons A et B pour faciliter le discours, on peut en général éviter la mesure d'une base. D'abord, si l'on peut établir la planchette en A et en B, et apercevoir de ces deux stations tous les points importants du terrain, la ligne AB peut être prise pour base elle-même. Mais il peut arriver qu'on ne puisse *stationner*, c'est-à-dire établir de station, qu'en un de ces deux points, en A par exemple; dans ce cas, si l'on peut trouver un point C (fig. 2) où l'on puisse stationner et d'où l'on aper-

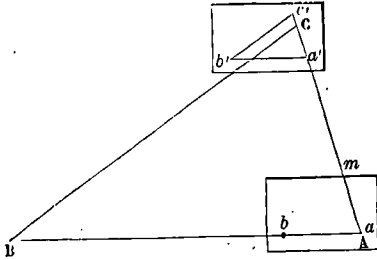


Fig. 2.

çoit A, B et tous les points importants du terrain, on pourra prendre pour base AC. En effet, à la station A, on placera *a* à peu près dans la verticale de A, on dirigera *ab* suivant AB, et l'on tracera avec l'alidade la direction *amC*; on se transportera ensuite en C, et l'on établira la planchette de manière que la verticale de C perce la surface en un point de la direction *am*; on tracera avec l'alidade la direction BC; puis on mènera *b'c'* parallèle à BC; le triangle ABC se trouvant ainsi levé en *a'b'c'*, la distance AC sera connue, et l'on pourra prendre AC pour base. Plus généralement, si l'on ne peut stationner ni en A ni en B, mais qu'on puisse trouver sur le terrain deux points C et D d'où l'on puisse apercevoir A, B et tous les points importants, la ligne CD pourra être prise pour base; car si *a, b, c, d* sont les points qui sur le plan représentent A, B, C, D, on aura, en ne considérant que les distances horizontales,

$$CD = cd \cdot \frac{AB}{ab}.$$

Or le rapport $\frac{AB}{ab}$ est déterminé par l'échelle adoptée; *cd* peut être mesuré sur le plan; on peut donc regarder CD comme connu.

Une fois les points principaux déterminés, on s'en servira pour obtenir les points secondaires, comme dans les autres méthodes.

LEVER A LA CHAÎNE ET A LA BOUSSOLE. Si l'on ne recherche pas une grande précision, la BOUSSOLE peut remplacer le graphomètre dans la mesure des angles (*Voy. BOUSSOLE*). C'est d'ailleurs le seul moyen qu'on puisse employer dans les forêts et dans les mines. On transporte successivement la boussole à chaque sommet du polygone topographique, et l'on mesure l'AZIMUT MAGNÉTIQUE (*Voy. ce mot*) de chacun des côtés qui y aboutissent, en ayant soin de compter tous les azimuts dans un même sens; la différence des azimuts de deux côtés consécutifs donne l'angle de ces deux côtés. On peut remarquer que l'azimut de chaque côté se

trouve ainsi obtenu deux fois; mais comme un même côté a deux directions contraires suivant que l'on stationne à l'une ou à l'autre de ses extrémités, la différence des deux azimuts obtenus dans ces deux cas doit être exactement de 180 degrés. Cette vérification est d'autant plus nécessaire que l'aiguille aimantée, en passant d'une station à l'autre, peut être déviée par quelque masse de fer invisible.

Ordinairement on lève les plans d'ensemble à la chaîne et au graphomètre, et l'on réserve l'emploi de la boussole pour le lever des détails, particulièrement des cours d'eau sinueux.

LEVER A L'ÉQUERRE. Cette méthode s'emploie surtout lorsque le terrain est sensiblement horizontal. Elle consiste à tracer sur le terrain une directrice rectiligne qui le traverse dans sa plus grande longueur, et à abaisser, à l'aide de l'ÉQUERRE D'AR-PENTEUR (*Voy. ce mot*), des perpendiculaires sur cette droite de tous les sommets du polygone topographique; on mesure à la chaîne ces perpendiculaires ainsi que les distances consécutives de leurs pieds, ou, ce qui offre moins de chances d'erreur, les distances de ces pieds consécutifs à un même point de la directrice; et l'on a tous les éléments nécessaires pour tracer le plan du polygone topographique. Les points intérieurs se déterminent ensuite par les perpendiculaires abaissées de ces points, soit sur les côtés du polygone, soit sur la directrice, soit sur d'autres droites convenablement choisies, que l'on désigne quelquefois sous le nom de *traverses*.

Le lever à l'équerre est susceptible d'assez d'exactitude; il offre de grands avantages lorsque le contour ou l'intérieur du terrain présentent des parties courbes; il est encore avantageux quand le terrain est couvert de constructions ou qu'il offre des alignements naturels quelconques qui fournissent des traverses commodes.

Les diverses méthodes qu'on vient de décrire peuvent souvent être combinées de manière à abrégé les opérations; l'habitude de la pratique suggère dans chaque cas la meilleure marche à suivre. En général, on emploie la chaîne et le graphomètre pour déterminer le polygone topographique, surtout si le terrain a une grande étendue; on détermine les points principaux du plan au moyen de la planchette, en prenant pour bases les côtés du polygone topographique; les menus détails se déterminent à la boussole ou à l'équerre. La méthode qui sert à déterminer le polygone topographique s'appelle méthode par *cheminement*, parce que l'instrument qui sert à la mesure des angles est transporté successivement à tous les sommets; lorsqu'on fait usage de la planchette, on dit qu'on opère par *intersection*, parce que chaque point est déterminé par la rencontre de deux droites. Souvent, pour mieux assurer la position de certains points et se ménager des vérifications, on les détermine par la rencontre de trois droites, en les visant successivement de trois stations différentes; cette méthode est dite méthode par *recoupement*; on l'emploie surtout pour les points séparés par des obstacles qu'on ne peut franchir et qui empêcheraient de les relier directement (*Voy. PLANS TOPOGRAPHIQUES*).

Enfin, si l'on a besoin d'une grande précision,

comme cela a lieu lorsqu'on dresse la carte d'une contrée un peu étendue, les angles doivent être mesurés au CERCLE RÉPÉTITEUR (Voy. ce mot); et il est nécessaire de mesurer au moins une distance avec les soins minutieux et les méthodes perfectionnées dont on trouvera le détail à l'article BASE. Quant aux triangles qui servent à rattacher les points principaux du terrain au polygone topographique, au lieu de se contenter de les construire, on en calcule les éléments inconnus à l'aide des formules de la Trigonométrie.

LEVER D'UN ASTRE, instant où le centre de cet astre traverse le plan de l'horizon pour s'élever au-dessus de ce plan.

L'instant du lever d'un astre se calcule, comme celui de son COUCHER (Voy. ce mot), en déterminant l'angle horaire de l'astre à l'instant du lever. On convertit cet angle horaire en temps, et l'on a l'heure cherchée en temps astronomique; en retranchant 12 heures, on l'obtient en temps civil. Il faut se rappeler en effet que les angles horaires se comptent de 0° à 360° à partir du méridien et dans le sens du mouvement apparent.

LEVERS EXPÉDIÉS, opérations topographiques dans lesquelles on sacrifie la précision à la célérité. Cela arrive dans les études préliminaires d'un projet, cela arrive surtout dans les reconnaissances militaires qui se font en vue de l'ennemi. — Les principes généraux du LEVER DES PLANS et du NIVELLEMENT (Voy. ces mots) restent les mêmes; mais l'application diffère, soit par le choix des méthodes, soit par le choix des instruments employés. Il faut toujours déterminer un POLYGONE TOPOGRAPHIQUE auquel on rapporte tous les détails; mais on doit se proposer surtout d'arriver promptement à la détermination de deux ou trois stations d'où l'on puisse, si cela est possible, relever tous les points importants à la PLANCHETTE ordinaire ou avec une planchette de campagne, par la méthode d'intersections ou de *recoupement*; les détails se rattachent ensuite aux points obtenus, au moyen de perpendiculaires abaissées sur des directions déjà déterminées. Si le pays est trop couvert pour qu'on puisse opérer à la planchette, on procède par opérations partielles dans lesquelles on mesure des distances et des angles.

Sauf la BASE des opérations qui doit être mesurée à la chaîne, à moins que l'on n'ait une base connue par des levés antérieurs, les distances doivent être mesurées ou avec la LUNETTE STADIA si le temps le permet, soit au pas, dont la longueur moyenne est supposée connue. Dans les reconnaissances militaires on mesurera surtout au pas; quelquefois il faudra se contenter d'apprécier les distances avec la STADIA MILITAIRE, quelquefois on sera obligé de les apprécier à vue en s'aidant des renseignements qu'on aura pu recueillir (Voy. les mots en petites capitales).

Les angles se mesureront soit avec la BOUSSOLE DE BURNIER, soit avec la BOUSSOLE À RÉFLEXION, soit avec la BOUSSOLE D'HOSSARD; si l'on est privé du secours de ces instruments, ce qui pourra arriver dans les reconnaissances militaires, on pourra se servir ou d'un simple rapporteur posé horizontalement à la hauteur de l'œil, soit de lignes tracées au crayon sur un carton horizontal, soit de tout autre moyen analogue; quelquefois il faudra se contenter d'apprécier un angle à vue. Pour s'orienter

si l'on n'a pas de boussole, on peut employer un instrument grossier, mais qu'il est facile de se procurer pourvu que l'on ait une montre; l'un des jours précédents on a eu soin de planter une aiguille verticale au centre d'un carton horizontal, et de marquer d'heure en heure, ou de demi-heure en demi-heure, la direction de l'ombre de l'aiguille; arrivé sur le terrain, il suffira, s'il fait soleil, de placer le carton horizontalement, de remettre l'aiguille verticale, et de faire tourner ce carton jusqu'à ce que l'ombre de l'aiguille exprime l'heure indiquée par la montre; la direction de l'ombre à midi, qui a été marquée sur le carton, sera celle de la méridienne.

Pour ce qui regarde le nivellement, on fera usage du CLISIMÈTRE DE BURNIER ou du NIVEAU À RÉFLEXION DE BUREL. Si l'on n'a pas ces instruments à sa disposition, on peut avoir recours au procédé suivant: on suspend une petite règle à un fil de manière qu'elle soit horizontale, et on la tient devant soi à la hauteur de l'œil; on remarque quelqu'un des points du terrain rencontrés par les rayons visuels qui rasent le bord de la règle; ce point est plus élevé que celui où l'on se trouve d'une quantité égale à la distance de l'œil au-dessus du sol, distance qui peut avoir été déterminée à l'avance; on se transporte en ce point, et l'on recommence l'opération en s'élevant ainsi depuis la partie inférieure du terrain jusqu'à la partie supérieure; les différences de niveau des divers points observés se trouvent ainsi connues avec une approximation suffisante. En un mot, dans les opérations de ce genre, surtout à la guerre, il faut savoir se créer des ressources, pour suppléer à l'absence des instruments nécessaires et au défaut de temps.

LEVER SOUS VOILES, ou SOUS VAPEUR, ensemble des opérations qu'il faut effectuer pour lever le plan d'une côte, lorsqu'elle n'est abordable par aucun de ses points. Ces opérations se composent: 1° de relèvements des divers points de la côte, faits de trois stations au moins; 2° d'un tracé graphique d'après les données fournies par ces relèvements. Nous supposons d'abord que l'on a tout le temps nécessaire pour opérer en sécurité et d'une manière complète. Soient P, Q, R les trois stations du navire.

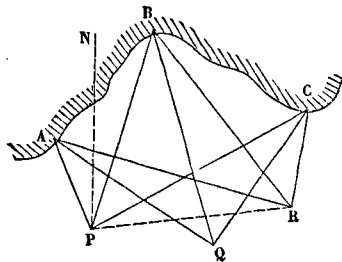


Fig. 1.

Deux d'entre elles, les plus éloignées par exemple, devront être déterminées astronomiquement, c'est-à-dire qu'on déterminera par des observations astronomiques leurs coordonnées géographiques, ce qui permettra de les placer sur la carte et de calculer leur distance PR qui servira de base (Voy. DISTANCES GÉOGRAPHIQUES). De chacune des trois stations on relèvera tous les points remarquables de la côte, tels

que roches, arbres, taches blanches sur une roche, limites d'une plage de sable, etc. : c'est-à-dire qu'on observera les angles que les rayons visuels menés à ces divers points font avec le méridien magnétique et par suite avec le méridien géographique. On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour fixer sur la carte les points observés. On pourra mener sur la carte les droites PA et RA dont les angles avec le méridien sont connus, ce qui déterminera le point A ; on mènera de même les droites PB et RB qui détermineront le point B ; et ainsi des autres. Mais les observations faites de la station Q serviront de vérification. On connaît les directions des rayons visuels de la station Q aux points A, B, C ; on pourra donc mener sur la carte les droites AQ, BQ, CQ qui devront se couper en un même point Q. Si cette condition est sensiblement remplie, tous les points observés sur la côte seront déterminés par le recoupement des trois rayons visuels menés des stations P, Q, R ; et le lever sera exécuté de la manière la plus satisfaisante.

Si deux points de la côte, A et B par exemple, étaient déjà marqués sur la carte, il ne serait pas nécessaire de déterminer astronomiquement la position géographique des stations ; les relevements faits de ces stations suffiraient. On connaîtrait, en effet, les directions AP et BP, qui détermineraient le point P, les directions AQ et BQ, qui détermineraient le point Q, et les directions AR et BR, qui détermineraient le point R. Tous les points de la côte seraient encore donnés par le recoupement des trois rayons visuels menés des trois stations P, Q, R.

Il peut arriver qu'un seul point A de la côte soit déjà marqué sur la carte ; dans ce cas on déterminera astronomiquement la position de la première station P. Les relevements opérés aux trois stations détermineront encore ces stations et par suite tous les points observés de la côte. On emploie pour cela divers tracés graphiques parmi lesquels nous choisissons le suivant, dû à feu M. Vincendon-Dumoulin, parce que le principe en est ingénieux. On connaît les directions PBX, PCY, ARW, AOZ (fig. 2), sur les-

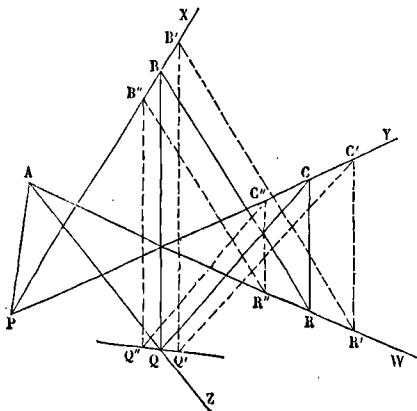


Fig. 2.

quelles il s'agit de placer respectivement les points B, C, R, Q. Faisons une première hypothèse sur la position du point B, et mettons-le en B'. La direction du rayon visuel RB étant connue, on peut lui mener

la parallèle B'R' ; de même, la direction du rayon visuel RC étant connue, on peut lui mener la parallèle R'C' ; enfin, si par les points B' et C' on mène des droites B'Q' et C'Q' respectivement parallèles aux rayons visuels QB et QC dont la direction est connue, on déterminera un point Q', qui devrait se confondre avec le point Q si B' se confondait avec B, mais qui sera en général différent. Faisons une seconde hypothèse sur la position du point B, et mettons-le en B'' ; puis menons les droites B''R'', R''C'', B''Q'', C''Q'' respectivement parallèles aux précédentes, nous déterminerons un nouveau point Q'', qui différera en général du point Q. Or, on démontre aisément, soit par l'analyse, soit par des considérations géométriques, que le lieu des points Q', Q'', etc., ainsi obtenus, est une droite ; si donc on joint Q'Q'', le point cherché Q devra se trouver sur cette droite ; et comme il est déjà sur la droite AQZ, il devra se trouver à leur intersection Q. Le point Q étant ainsi obtenu, par de nouvelles droites parallèles aux précédentes on déterminera les points B, C et R. Les trois stations étant ainsi déterminées, chaque point de la côte s'obtiendra encore par le recoupement de trois rayons visuels menés de ces trois stations. Cette méthode, tout à fait analogue à celle qui est connue en arithmétique sous le nom de *règle de fausse position*, fournit un tracé très-rapide ; malheureusement le point Q se trouve souvent déterminé par deux droites qui se coupent sous un angle très-aigu, ce qui est un inconvénient. On peut faire le même reproche à un autre tracé que le lecteur trouvera dans le *Cours de Navigation et d'Hydrographie*, de E. P. Dubois, p. 606. Il peut même arriver que les droites qui doivent, par leur intersection, donner le point principal de la figure, se confondent dans un cas particulier, auquel cas la solution devient illusoire. C'est pourquoi il est prudent de faire les relevements de plus de trois stations, afin de choisir celles qui donnent la meilleure solution ; on se procure d'ailleurs ainsi des vérifications utiles. Si aucun point de la côte n'était marqué sur la carte, et si l'on n'avait pas le temps de déterminer astronomiquement la position d'une des stations, il faudrait se contenter des relevements. Dans ce cas, on apprécierait à vue la distance PA de la première station à l'un des points relevés, afin d'avoir une échelle approximative, et l'on opérerait comme il vient d'être dit.

Lorsqu'on fait un lever avec un bâtiment à vapeur, on peut employer une méthode assez simple, connue sous le nom de *lever par alignements*. On fait placer le navire O (fig. 3) dans l'alignement de deux caps M et N ; et l'on détermine astronomiquement l'azimut de la direction OMN ; puis du point O on relève les angles MOA, MOB, MOC, etc., que fait cette direction avec les rayons visuels menés aux points de la côte qu'on veut représenter sur la carte. Cela fait, on met le navire en marche dans la direction OMN ; on s'arrête en un nouveau point O' ; et l'on relève de même les angles MO'A, MO'B, MO'C, etc., que fait la direction O'MN avec les rayons visuels menés aux points de la côte déjà observés de la première station. On mesure la distance OO', soit directement, soit par la hauteur de la mâture, soit par la vitesse du son (*Voy. Base*) ; et l'on a tous les éléments nécessaires pour lever le plan de la côte ABCDEM. On lèverait de même la partie FGH à l'aide

d'un nouvel alignement xy , et ainsi de suite. L'expérience et la sagacité de l'officier chargé de l'opération le guideront dans le choix des alignements mieux que ne pourraient le faire des préceptes généraux.

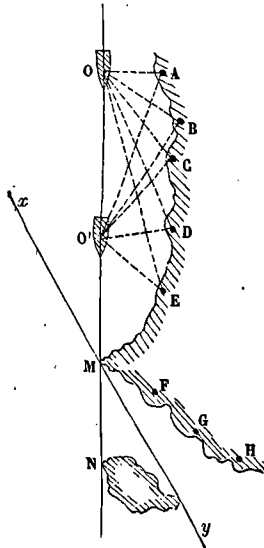


Fig. 3.

On ne détermine dans une première opération que les points principaux de la côte; ce sont les points de premier ordre. Dans une seconde opération, on se sert des points de premier ordre, déjà déterminés et placés sur la carte, pour fixer la position de nouvelles stations d'où l'on relève les points de second ordre. La détermination des points de troisième ordre ne présente plus aucune difficulté, et forme ce qu'on peut appeler

la TOPOGRAPHIE HYDROGRAPHIQUE (Voy. ce mot) de la côte considérée.

LEVIER, l'une des machines simples. Tout corps solide mobile autour d'un point fixe peut être considéré comme un levier; mais on lui donne le plus souvent la forme d'une barre droite ou courbe (fig. 1,

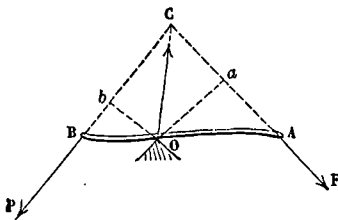


Fig. 1.

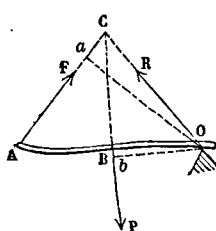


Fig. 2.

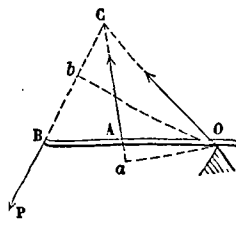


Fig. 3.

2 et 3). Le levier est ordinairement soumis à trois forces : une force mouvante F appliquée à l'une de ses extrémités, une force résistante P , appliquée à l'autre extrémité, et enfin la réaction R du point fixe. On distingue trois espèces de leviers. 1° Si le point fixe O se trouve entre les points d'application

A et B de la force mouvante et de la force résistante, comme dans la figure 1, le levier est dit du **premier genre**. 2° Si le point d'application A de la force résistante est situé entre le point fixe O et le point d'application B de la force mouvante, comme dans la figure 2, ce levier est dit du **second genre**. 3° Si le point d'application A de la force mouvante est situé entre le point fixe O et le point d'application B de la force résistante, comme dans la figure 3, le levier est dit du **troisième genre**. Ainsi, la balance est un levier du premier genre; la pince dont se

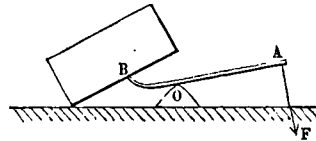


Fig. 4.

servent les carriers pour soulever les blocs de pierre, leur sert ou comme levier du premier genre (fig. 4),

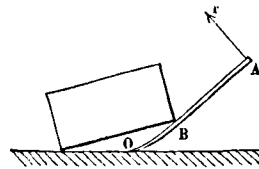


Fig. 5.

ou comme levier du second genre (fig. 5); la pédale du piano est un levier du second genre (fig. 6); la

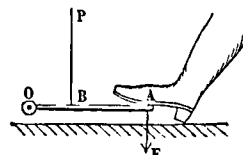


Fig. 6.

pédale du remouleur est un levier du troisième genre (fig. 7) : il en est de même de la pédale de

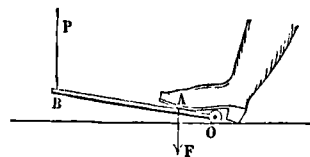


Fig. 7.

l'harmonium. Mais les trois genres de levier peuvent être réunis dans une même théorie.

1. Pour l'équilibre du levier, il faut que les trois forces F , P , R soient dans un même plan et que l'une quelconque d'entre elles soit égale et opposée à la résultante des deux autres (Voy. EQUILIBRE). Il en résulte d'abord que les forces F et P doivent être dans un même plan avec le point fixe O (fig. 1, 2 et 3). Si maintenant on prend les moments des forces par rapport à une droite menée perpendiculairement à ce plan par le point fixe, la réaction R disparaît (Voy. MOMENT), et il faut que la somme algébrique

des moments des forces F et P soit égale à zéro. Abaissons du point O la droite Oa perpendiculaire sur la direction de la force F et la droite Ob perpendiculaire sur la direction de la force P; les moments de ces forces auront pour expression F.Oa et P.Ob; ils devront être égaux et de signe contraire; on devra donc avoir :

$$F.Oa = P.Ob, \quad [1]$$

ce qui exige que les forces F et P tendent à faire tourner le levier en sens contraire. Les perpendiculaires Oa et Ob sont ce qu'on appelle les bras du levier des forces F et P; si donc on met la relation [1] sous la forme

$$\frac{F}{P} = \frac{Ob}{Oa}$$

on pourra l'énoncer en disant que la force mouvante et la force résistante doivent être en raison inverse de leurs bras de levier. Ainsi les conditions d'équilibre du levier sont au nombre de trois; il faut 1° que la force mouvante et la force résistante soient dans un même plan avec le point fixe; 2° que ces forces tendent à faire tourner le levier en sens contraire; 3° qu'elles soient en raison inverse de leurs bras de levier (ou de leur distance au point fixe).

Ordinairement la force P est donnée en grandeur et en direction, la force F est donnée en direction seulement, et la force R est inconnue; on sait seulement qu'elle passe par le point fixe. On déduira de la relation [1] l'intensité de la force F. Quant à la force R, elle est égale et opposée à la charge R' du point d'appui, en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction; et celle-ci peut être déterminée de deux manières. Supposons d'abord que les forces F et P concourent en un point C (fig. 1, 2 et 3); en joignant OC on aura la direction de la charge R'; et pour avoir son intensité, il suffira de projeter les forces F et P sur cette direction, et d'en faire la somme, s'il s'agit d'un levier du premier genre, ou la différence si le levier est du second ou du troisième genre. On peut encore transporter les forces F et P parallèlement à elles-mêmes au point fixe, et les composer en une seule par la règle du parallélogramme (Voy. COMPOSITION DES FORCES); la résultante sera la charge R', puisque chacune des trois forces F, P et R doit être égale et opposée à la résultante de deux autres. Si les forces F et P sont parallèles, R' devra leur être parallèle aussi, et son intensité sera égale à F + P si le levier est du premier genre, à P - F si le levier est du second genre, ou à F - P si le levier est du troisième genre.

Nous avons, dans ce qui précède, négligé le poids du levier. Si l'on voulait y avoir égard, il faudrait commencer par composer ce poids avec la force résistante donnée P, ce qui permettrait de remplacer ces deux forces par leur résultante P'; et l'on n'aurait plus qu'à considérer l'équilibre du levier sous l'action des trois forces F, P' et R.

II. Pour que le levier fût réellement mobile autour d'un point fixe, il faudrait que le support se terminât par une sphère pénétrant dans une cavité également sphérique et de même rayon pratiquée dans le levier. Le centre commun O (fig. 8) de ces deux sphères demeurerait fixe dans l'espace pendant que le levier prendrait autour de ce point telle position que l'on voudrait; cette disposition est celle du genou à coquilles qui sert d'articulation entre le graphomètre et son pied. Mais le plus souvent le

levier n'est que posé sur un appui; et la surface de contact peut avoir assez d'étendue pour que le point de contact change avec l'inclinaison du levier. Il peut arriver en outre que le levier tende à glisser

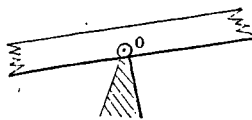


Fig. 8.

sur son appui; il faut alors pour l'équilibre, indépendamment des trois conditions énoncées ci-dessus, que la résultante des forces F et P soit normale à la surface de contact, ou qu'elle fasse du moins avec la normale un angle inférieur à l'angle du frottement (Voy. FROTTEMENT).

Le plus souvent, le contact du levier avec son appui a lieu, non par un point, mais par une droite. Mais les forces F et P sont alors dans un même plan perpendiculaire à cette droite, et la théorie du levier n'est point changée, quoiqu'on puisse, à la rigueur, rapporter alors cette théorie à celle du treuil.

III. Le levier est fréquemment employé comme organe de transformation de mouvement, pour transformer un mouvement alternatif suivant un arc de cercle en un mouvement alternatif suivant un autre arc de cercle tracé dans le même plan et concentrique au premier, mais placé comme on voudra par rapport à lui.

Soit O (fig. 9) le centre commun des deux arcs,

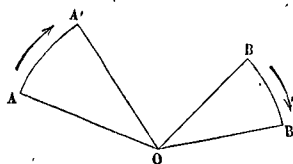


Fig. 9.

A et B les positions initiales des mobiles à faire mouvoir; on disposera un levier coudé AOB, mobile autour du point O; l'une des extrémités de ce levier parcourant l'arc AA', l'autre parcourra l'arc BB'. Les angles AOB et A'OB' étant égaux, si l'on en retranche A'OB, il reste AOA' = BOB', c'est-à-dire que les angles au centre sont égaux, et que par conséquent les arcs AA' et BB' parcourus par les extrémités du levier coudé sont semblables et proportionnels à leurs rayons OA et OB.

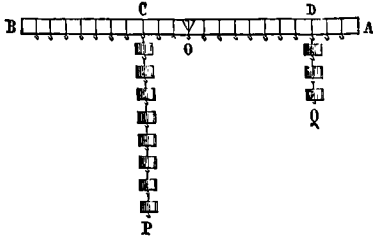
Si l'angle AOA' est suffisamment petit, l'arc AA' peut être regardé comme une ligne droite; il en est de même de l'arc BB'. Le levier coudé peut alors servir à transformer un mouvement rectiligne suivant AA' en un autre mouvement rectiligne suivant BB'. Les chemins parcourus sont proportionnels aux bras OA et OB du levier coudé; ils sont égaux quand ces bras sont égaux. — On connaît l'emploi des leviers coudés dans le mécanisme des sonnettes d'appartement. On retrouve ces leviers dans un grand nombre de machines; toutes les fois qu'on a à transmettre à distance un mouvement d'une faible amplitude, on peut avoir recours à ce moyen. Le manœuvre du disque-signal dans les chemins de fer (Voy. CHEMINS DE FER), et divers détails du mé-

canisme des locomotives sont, en particulier, des applications de ce principe.

On donne aussi le nom de *leviers* aux barres qui servent à la manœuvre du TREUIL ou du CABESTAN (Voy. ces mots).

Voyez aussi l'article BALANCE.

LEVIER ARITHMÉTIQUE, instrument imaginé par Dominique Cassini, pour démontrer par l'expérience les lois de l'équilibre du levier, et perfectionné par M. Delaunay. Il se compose d'un levier ou fléau, rectiligne, suspendu à son centre de gravité, comme le fléau d'une balance, au moyen de couteaux O reposant sur des plans d'acier ou d'a-



gate. Les deux bras OA et OB du fléau sont divisés, à partir du point de suspension O, en un même nombre de parties égales; et à chaque point de division est fixé un petit anneau auquel on peut accrocher un poids. Un certain nombre de poids égaux, portant à leur face supérieure un crochet, et à leur face inférieure un anneau, peuvent être accrochés verticalement au-dessous les uns des autres en tel point de division du fléau qu'on le désire. L'expérience qui démontre la loi d'équilibre du levier peut se faire alors de diverses manières. Si, par exemple, au troisième point de division du côté de OB on suspend huit poids égaux, et qu'au huitième point du côté de OA on en suspende trois, on verra qu'il y a équilibre. Si l'on suspendait six poids égaux à la quatrième division du côté de OB, et 4 poids égaux à la sixième division du côté de OA, il y aurait également équilibre. Généralement, si l'on suspend n poids égaux au $m^{\text{ième}}$ point de division du côté de OB, et m poids égaux au $n^{\text{ième}}$ point de division du côté de OA, on reconnaîtra qu'il y a équilibre. Or, si l'on nomme p l'un des poids égaux, et a la longueur d'une des divisions du fléau, la force P appliquée du côté de OB sera np , et sa distance OC à l'axe de suspension sera ma ; la force Q appliquée du côté de OA sera au contraire mp , et sa distance OD au point O sera na .

On aura donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{np}{mp} = \frac{n}{m} \quad \text{et} \quad \frac{OD}{OC} = \frac{na}{ma} = \frac{n}{m},$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{OD}{OC},$$

c'est-à-dire que les forces P et Q sont en raison inverse de leurs bras de leviers.

On remplace quelquefois deux ou trois poids p par un poids multiple; c'est ce qui a lieu dans le levier de Cassini déposé au Conservatoire des arts et métiers. Mais l'expérience ne parle pas aussi bien aux yeux que lorsque tous les poids sont égaux, comme dans l'appareil de M. Delaunay, et que leur nombre

peut être apprécié d'un coup d'œil, aussi bien que celui des divisions comprises entre O et C ou entre O et D.

On vérifie aisément, à l'aide du levier arithmétique, que deux poids égaux se font équilibre s'ils sont appliqués à égale distance de l'axe de suspension, ce qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la règle générale, et qu'un poids quelconque appliqué au fléau dans la verticale de l'axe de suspension ne trouble point son équilibre. On peut encore montrer, à l'aide du même appareil, que des poids égaux uniformément répartis sur toute la longueur du fléau s'y maintiennent en équilibre; si, par exemple, on suspend à tous les points de division du fléau des poids égaux à p , le fléau demeurera horizontal.

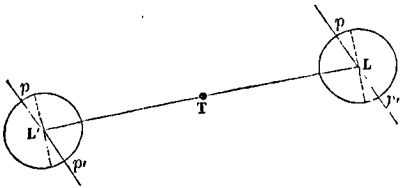
LEVIER DE LAGAROUSSE. Voy. ENCLIQUE-TAGES.

LIBAGE, pierre sans parements, et qui ne sert que de remplissage. (Voy. COUPE DES PIERRES.)

LIBRATION, mouvement apparent de la lune en vertu duquel cet astre semble se balancer (en latin *librare*) autour d'une position moyenne. La libration totale de la lune est la résultante de trois librations partielles que l'on désigne sous les noms de *libration en longitude*, *libration en latitude*, et *libration diurne*.

Si le mouvement de translation de la lune autour de la terre était uniforme, comme il en est de même de son mouvement de rotation autour de son axe, et que les deux révolutions s'exécutent dans le même temps, la lune nous présenterait rigoureusement la même face à un instant quelconque, parce que l'angle dont elle aurait tourné autour de son axe serait exactement égal à celui dont elle aurait tourné autour de la terre. Mais il n'en est point ainsi : le mouvement de rotation seul est uniforme; le mouvement de translation est varié; et la vitesse de la lune est la plus grande au périégée et la plus petite à l'apogée. Lorsque la vitesse angulaire de translation l'emporte sur la vitesse angulaire de rotation, l'angle décrit par le rayon vecteur mené de la terre à la lune, dans un certain temps, est plus grand que l'angle décrit par la lune autour de son axe; il en résulte qu'on peut apercevoir de la terre, du côté du bord *occidental*, des points que l'on n'apercevait pas précédemment. Lorsqu'au contraire la vitesse angulaire de rotation l'emporte sur la vitesse angulaire de translation, la lune tourne autour de son axe, dans un certain temps, d'un angle plus grand que celui qui est décrit par le rayon vecteur mené de la terre; il en résulte qu'on peut apercevoir de la terre, du côté du bord *oriental*, des points qui n'étaient point aperçus jusque-là. En vertu de ces inégalités entre la vitesse angulaire de rotation et la vitesse angulaire de translation, la lune, pour l'observateur placé à la surface de la terre, semble éprouver un balancement d'orient en occident et d'occident en orient. C'est à ce balancement apparent qu'on a donné le nom de *libration en longitude*, parce que l'axe autour duquel le balancement semble s'effectuer est perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire, et diffère par conséquent peu d'une perpendiculaire à l'écliptique, sur lequel se comptent les longitudes. L'amplitude de la libration en longitude est d'environ $4^{\circ} 20'$.

L'axe de rotation de la lune fait avec une perpendiculaire au plan de son orbite un angle de 53° 23' (Voy. LUNE); et cet axe est dans un plan perpendiculaire à la ligne des nœuds. Il en résulte que lorsque la lune est à 90 degrés de ses nœuds, dans deux positions diamétralement opposées comme L



et L', dans l'une de ces positions L, on aperçoit de la terre le pôle supérieur p de l'axe de rotation, tandis que le pôle inférieur p' est invisible; mais dans la position opposée L', c'est le pôle inférieur p' qui devient visible, tandis que le pôle supérieur p est caché pour nous. Il en résulte que, dans le cours d'une lunaison, la lune semble éprouver un deuxième balancement dans le sens perpendiculaire au premier, et que, pour cette raison on a nommé *libration en latitude*. Son amplitude est d'environ 3° 35'.

Enfin, pour l'observateur placé à la surface de la terre, le mouvement diurne donne lieu à un troisième balancement apparent. Si l'on fait abstraction des deux premières librations, le rayon vecteur mené du centre de la terre au centre de la lune rencontrera la surface de ce satellite en un même point de sa surface, quelle que soit sa position; mais il en est tout autrement pour un rayon vecteur mené d'un point de la surface terrestre. Lorsque la lune est à l'orient, ce second rayon vecteur perce la surface lunaire un peu à l'occident du premier; c'est l'inverse qui a lieu quand la lune est à l'occident. La lune, en vertu du mouvement diurne, semble donc, de son lever à son coucher, éprouver un balancement d'occident en orient, auquel on a donné le nom de *libration diurne*; son amplitude n'est du reste que de 32° environ.

LIERNE, pièce de charpente placée horizontalement et servant à relier les différents poteaux d'un PAN DE BOIS, ou les arbalétriers d'un COMBLE. (Voy. PANS DE BOIS, COMBLES.)

LIEUE, ancienne mesure itinéraire. On distinguait en France trois espèces de lieues: la *lieue commune*, de 25 au degré, valant 2280 toises; la *lieue de poste*, valant 2000 toises, et la *lieue marine*, de 20 au degré, valant 2850^m⁰⁰, 4. Ces unités, exprimées en mètres, équivalent respectivement, savoir :

- La lieue commune à..... 4444^m,44...
- La lieue de poste à..... 3898^m,00...
- La lieue marine à..... 5555^m,55...

On donne quelquefois le nom de lieue à une distance de 4000 mètres; c'est à peu près l'équivalent de l'ancienne lieue de poste.

Le degré ne vaut 20 lieues marines que sur l'équateur; mais les marins ont adopté l'usage d'exprimer les degrés de longitude en lieues marines, de 20 au degré, quelle que soit la latitude; les minutes du degré sont alors exprimées en milles

(Voy. MILLE). Mais pour rendre les mesures de distance comparables, il faut ensuite les exprimer en lieues marines comptées sur l'équateur; c'est ce que l'on appelle convertir les *lieues mineures* en *lieues majeures*, ce qui se fait d'après les principes suivants. La circonférence d'un parallèle est à celle de l'équateur, comme le rayon r de ce parallèle est au rayon R de l'équateur, c'est-à-dire comme le cosinus de la latitude est à l'unité; il en résulte que le degré de parallèle est au degré de l'équateur comme le cosinus de la latitude est à 1; et que, par conséquent, n degrés de parallèle valent un nombre de degrés de l'équateur marqué par n cos λ, en appelant λ la latitude. Pour convertir un nombre de lieues mineures en lieues majeures, il suffit donc de le multiplier par le cosinus de la latitude. Si, par exemple, on demande ce que valent 48 lieues mineures, comptées sur le parallèle correspondant à une latitude de 45 degrés, il faudra multiplier 45 par le cosinus de 45 degrés, c'est-à-dire par $\frac{1}{2} \sqrt{2}$

ou 0,7071, ce qui donnera 33,94 pour le nombre de lieues majeures cherché. Si au contraire on demandait combien il faut de lieues mineures, à une latitude donnée, pour faire un nombre donné de lieues majeures, il faudrait diviser ce dernier par le cosinus de la latitude. Si, par exemple, on demande combien il faut de lieues mineures à la latitude de 60 degrés pour faire 50 lieues majeures, il faudra diviser 50 par cos 60°, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à multiplier par 2, et donne pour résultat 100 lieues mineures.

LIGNE D'ABOUT, intersection du plan de lattis supérieur d'un comble avec le plan supérieur de la sablière. (Voy. COMBLE, GROUPE, NOUE.)

LIGNE D'EAU, intersection de la surface libre d'une eau courante par un plan perpendiculaire à sa direction.

LIGNE DE COURONNEMENT. Voy. FAÎTE.

LIGNE DE FAÎTE, ligne de partage des eaux, ou ligne la plus élevée entre les deux versants d'un coteau; c'est une LIGNE DE PLUS GRANDE PENTE (Voy. ce mot), caractérisée par cette propriété qu'on ne peut s'en éloigner perpendiculairement sans descendre. On peut remarquer aussi que si l'on suit une ligne de faite en descendant, elle rencontre les COURBES DE NIVEAU (Voy. ce mot) par leur concavité. (Voy. FIGURÉ DU RELIEF.)

LIGNE DE FEUX, crête intérieure d'un parapet (Voy. FORTIFICATION), ainsi nommée parce que c'est de cette crête que partent les coups de feu.

LIGNE DE FLOTTAISON, intersection de la coque d'un navire avec la surface de la mer. La ligne de flottaison en charge prend le nom de *ligne de science*. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

LIGNE DE FOI, ligne droite tracée sur une ALI DADE (Voy. ce mot), et qui est la trace du plan déterminé par les fils des PINNULES. — Ligne droite à partir de laquelle se comptent les divisions d'un cercle ou d'un VERNIER circulaire. (Voy. VERNIER.)

LIGNE DE FOULÉE, courbe tracée parallèlement à la projection horizontale de la rampe d'un escalier, à une distance d'environ 48 centimètres; c'est la projection de celle que l'on parcourt en montant ou en descendant, lorsqu'on s'appuie sur la rampe. (Voy. ESCALIERS.)

LIGNE DE GORGE, intersection du plan de lattis inférieur d'un comble avec le plan supérieur de la sablière. (Voy. (OMBLES, CROUPE, NOUE.)

LIGNE DE MIRE, ligne droite déterminée dans une bouche à feu par l'extrémité supérieure de la hausse (Voy. ce mot) et le cran de mire antérieur placé sur le bourrelet dans le canon et sur la plate-bande de la bouche dans l'obusier. Quand la hausse est nulle, la ligne de mire est déterminée par les deux crans de mire; on lui donne alors le nom de *ligne de mire naturelle*. (Voy. POINTAGE.)

LIGNE DE NAISSANCE, ligne suivant laquelle s'opère le raccordement entre la surface d'intrados d'une voûte (Voy. ce mot) et celle des piédroite qui la supportent.

LIGNE DE SCIENCE, ou ligne de flottaison en charge, intersection du plan de la mer avec la surface extérieure de la coque d'un navire chargé. Cette ligne est tracée à l'avance sur la coque, ou plutôt sur le bordé; elle sert de limite au doublage en cuivre. Les calculs de déplacement font connaître le tirant d'eau; et il est facile d'en déduire les points où la ligne de flottaison coupe l'étrave, l'étambot et les couples; on obtient ainsi un nombre suffisant de points pour tracer la ligne de science. (Voy. DÉPLACEMENT, CONSTRUCTION NAVALE.)

LIGNE D'HORIZON, terme de perspective, horizontale menée dans le plan du tableau par le point de vue. C'est la trace du plan horizontal qui contient l'œil du spectateur.

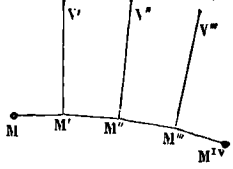
LIGNE D'OMBRE, ligne qui sépare l'ombre propre d'une surface courbe éclairée, de la partie qui est éclairée. On lui donne aussi le nom de *séparatrice*. (Voy. OMBRES.)

LIGNE GÉODÉSIQUE, ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur une surface donnée. Le caractère commun des lignes géodésiques est que leurs plans osculateurs sont normaux à la surface sur laquelle elles sont tracées. Sur la sphère, les lignes géodésiques sont des arcs de grands cercles. Sur les surfaces développables, les lignes géodésiques sont des lignes qui deviennent droites dans le développement. Ainsi, sur un cylindre de révolution, les lignes géodésiques sont des hélices.

Lorsque l'on jalonne une distance à la surface du globe, les pieds des jalons déterminent une ligne géodésique. En effet, on donne aux jalons la direction verticale, c'est-à-dire la direction d'une normale à la surface; on sait d'ailleurs que si l'on vise dans la direction de deux jalons consécutifs, ces deux jalons, réunis pour l'œil, cachent le pied du jalon suivant, d'où il résulte que deux éléments consécutifs de la ligne tracée sont dans un même plan avec le jalon qui les sépare. En d'autres termes, le plan de deux éléments consécutifs, c'est-à-dire le plan osculateur de la ligne tracée, contient la normale à la surface; il est par conséquent normal. C'est cette propriété des lignes jalonnées qui a fait donner le nom de ligne géodésique à toute ligne tracée sur une surface de telle sorte que ses plans osculateurs soient normaux.

Nous ne nous occuperons ici que des lignes géodésiques proprement dites, c'est-à-dire de celles qui sont tracées à la surface terrestre, et dont les lignes jalonnées nous offrent l'image. Si la surface de la terre pouvait être considérée comme une

sphère, les lignes géodésiques seraient des arcs de grands cercles; mais, en réalité, une ligne géodésique est une ligne à double courbure, même sur la surface d'un ellipsoïde de révolution. Soit, en effet, MM' un premier élément d'une ligne géodésique tracé dans une direction quelconque; soit $M'V'$ la verticale du point M' . Pour avoir un second élément de la courbe, on mènera le plan vertical $MM'V'$, qui coupera la surface terrestre suivant une



certaine ligne; sur cette ligne on prendra un second élément $M'M''$. Pour en avoir un troisième, on mènera la verticale $M''V''$; le plan vertical $M'M''M''V''$ coupera la surface suivant une ligne sur laquelle on prendra un troisième élément $M''M'''$; et ainsi de suite. Mais il est aisé de voir que les verticales $M'V'$, $M''V''$, qui sont des normales à la surface de l'ellipsoïde de révolution, et par conséquent aux méridiens respectifs des points M' , M'' , M''' , etc., vont rencontrer l'axe de révolution en des points différents, attendu que dans l'ellipse les normales ne sont point concourantes; par conséquent les plans verticaux successifs que nous avons considérés ne coïncident pas; et la ligne géodésique $MM'M''M'''$... est une courbe à double courbure.

Une ligne géodésique tracée sur la surface d'un ellipsoïde de révolution jouit d'une propriété remarquable: c'est que le sinus de l'angle qu'elle fait avec un méridien est en raison inverse du rayon du parallèle sur lequel elle le rencontre. (Voy. le *Traité de Géométrie* de Puissant, tome II, page 303.) — Il existe toujours un méridien qu'une ligne géodésique donnée rencontre à angle droit; et la propriété qui vient d'être énoncée donnerait au besoin le rayon du parallèle sur lequel a lieu la rencontre avec ce méridien. Ainsi, une ligne géodésique peut toujours être considérée comme une perpendiculaire à un méridien.

Legendre a intégré, pour le cas de l'ellipsoïde de révolution, les équations différentielles de la ligne géodésique; et, par des développements en séries, il est parvenu à des formules qui sont d'un fréquent usage dans la résolution des TRIANGLES SPHÉROÏDIQUES (Voy. ce mot). La première de ces formules donne la longueur s d'une ligne géodésique, connaissant la latitude l du point où elle rencontre le méridien auquel elle est perpendiculaire, et la latitude l' de son autre extrémité. Soit λ un angle défini par la relation

$$\text{tang } \lambda = \frac{b}{a} \text{ tang } l \quad [1]$$

qu'il serait facile de traduire géométriquement. Soit de même

$$\text{tang } \lambda' = \frac{b}{a} \text{ tang } l'. \quad [2]$$

Soit enfin σ un angle auxiliaire défini par la relation

$$\cos \sigma = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} \quad [3]$$

la longueur s est donnée par l'expression

$$\frac{s}{b} = \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \lambda - \frac{3}{64} e^4 \sin^4 \lambda \right) \sigma.$$

$$+ \left(\frac{1}{8} e^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{32} e^4 \sin^4 \lambda \right) \sin 2\sigma \\ - \frac{1}{256} e^4 \sin^4 \lambda \cdot \sin 4\sigma, \quad [A]$$

dans laquelle b représente le rayon du pôle et e l'excentricité.

La seconde formule donne la différence de longitude φ entre les deux extrémités de la ligne géodésique considérée. Si ω désigne un angle auxiliaire défini par la relation

$$\cos \omega = \frac{\tan \lambda'}{\tan \lambda}, \quad [4]$$

on a

$$\varphi = \omega - \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{8} e^4 - \frac{1}{16} e^4 \sin^2 \lambda \right] \sigma \cos \lambda \\ + \frac{1}{32} e^4 \sin^2 \lambda \cos \lambda \sin 2\sigma. \quad [B]$$

La troisième fait connaître au contraire l'angle σ , et par suite l'angle λ' et la latitude l' , quand on a mesuré la longueur s de la ligne géodésique. En appelant u le rapport $\frac{s}{b}$, on a

$$\sigma = u \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \lambda + \frac{7}{64} e^4 \sin^4 \lambda \right) \\ - \sin 2u \left(\frac{1}{8} e^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{16} e^4 \sin^4 \lambda \right) \\ + u \cos 2u \cdot \frac{1}{16} e^4 \sin^4 \lambda \\ + \frac{5}{256} e^4 \sin 4u \cdot \sin^4 \lambda. \quad [C]$$

A ces formules il faut joindre la relation

$$\sin V' = \frac{\cos \lambda}{\cos \lambda'}, \quad [D]$$

qui donne l'angle V' que la ligne géodésique fait avec le méridien qui passe par son extrémité.

Ces formules permettent de vérifier si les observations de latitude, de longitude et d'azimut faites sur les différents points d'une perpendiculaire à la méridienne s'accordent avec les hypothèses admises sur la forme du globe terrestre. Elles servent à résoudre un triangle sphéroïdique formé par deux méridiens et par une ligne géodésique perpendiculaire à l'un d'eux.

Si l'on veut, à l'aide de ces formules, déterminer le méridien auquel une ligne géodésique donnée est perpendiculaire, et la latitude du point où elle rencontre ce méridien, on procédera de la manière suivante. L'équation [D], dans laquelle λ' et V' sont supposés connus, donnera λ . La relation [3] fera connaître σ , et la relation [4] donnera ω . Par suite, l'équation [B] déterminera φ , et le méridien cherché sera connu. D'ailleurs, ayant λ , on aura l par la relation [1]; on connaîtra donc ainsi le méridien perpendiculaire à la ligne géodésique donnée, et la latitude du point de rencontre.

Il est facile d'obtenir, à l'aide des mêmes formules, la longitude du point où une ligne géodésique coupe l'équateur. Car si l'on suppose $l' = 0$, on trouve successivement $\lambda' = 0$, $\sigma = 90^\circ$, $\omega = 90^\circ$; et par suite

$$\varphi = 90 \left[1 - \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{8} e^4 \right) \cos \lambda + \frac{1}{16} e^4 \sin^2 \lambda \cos \lambda \right].$$

Cet angle diffère de 90° d'une quantité à peu près

proportionnelle à l'APLATISSEMENT (Voy. ce mot). — On a en même temps

$$s = b \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \lambda - \frac{3}{64} e^4 \sin^4 \lambda \right) \cdot 90^\circ$$

et $\sin V' = \cos \lambda$.

Si l'on fait ensuite $l' = -l$, on obtient successivement $\lambda' = -\lambda$, $\sigma = 180^\circ$, $\omega = 180^\circ$; et, par suite, on trouve pour φ une valeur double de la précédente; il en est de même pour s ; mais il vient $\sin V' = 1$; d'où $V' = 90^\circ$.

Ainsi, la ligne géodésique redevient perpendiculaire au méridien. Mais ce méridien n'est pas celui auquel elle était perpendiculaire pour $l = 0$, puisque la différence de longitude φ est moindre que 180° . En repassant dans l'hémisphère primitif, la ligne géodésique atteint de nouveau la latitude l , où elle est encore perpendiculaire à un nouveau méridien, et ainsi de suite. En sorte qu'elle tourne indéfiniment autour du globe en passant de la latitude l à la latitude $-l$. Les longueurs des portions de la ligne géodésique successivement comprises entre ces latitudes et l'équateur sont toutes égales, et on peut remarquer que leur longueur commune est celle du quart d'ellipse qui aurait pour axes b et $b\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \lambda}$. (Voir le Mémoire de Legendre, inséré dans les *Mémoires de l'Institut* pour l'année 1806.)

Il est inutile de faire remarquer que, dans l'hypothèse où la surface terrestre est un ellipsoïde de révolution, les méridiens sont nécessairement des lignes géodésiques.

LIGNES, système d'ouvrages de fortification passagère qui couvre le front d'une armée en campagne. On en distingue deux espèces: les lignes *continues* ou *bastionnées*, et les lignes à *intervalles*. La construction d'une ligne *bastionnée* diffère peu du tracé d'un front de fortification permanente (Voy. FORTIFICATION). On prend sur la ligne, ordinairement droite, qui doit couvrir l'armée, une série de points distants de 200^m à 300^m au plus; soient A et A' (fig. 1) deux de ces points consécutifs: sur

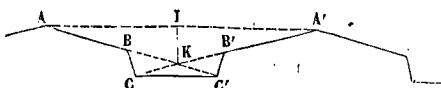


Fig. 1.

le milieu I de AA' on élève une perpendiculaire IK, égale au quart de AA', et l'on joint AK et A'K; sur ces lignes de jonction on prend AB et A'B' égaux au tiers de AA'; et des points B et B' on abaisse respectivement sur A'K et AK prolongés les perpendiculaires BC et B'C'; puis on joint CC', qui sera parallèle à AA'. Les lignes AB et A'B' sont les faces de deux demi-bastions consécutifs; les lignes BC et B'C' sont les flancs de ces mêmes demi-bastions; CC' est la courtine égale au tiers, à peu près, de la distance AA'.

Le profil de l'ouvrage est analogue à tous les profils de fortification: on ne lui donne que $5^m,50$ de relief, avec un fossé de 6^m à 10^m , suivant l'étendue du côté AA'. Ce système se défend d'une manière complète; tout le terrain en avant est battu par les faces des bastions et par la courtine; les faces des bastions sont défendues par les flancs des bastions adjacents; la courtine est défendue par ces

mêmes flancs. En effet, la plongée des parapets étant de 6 de base sur 1 de hauteur, on voit qu'avec un relief de 5^m,50, le coup de feu parti du flanc dans une direction parallèle à la courtine atteint le fond du fossé à une distance du flanc donnée par la proportion

$$1 : 6 = 5^m,50 : x;$$

d'où

$$x = 33^m.$$

Si donc la courtine a plus de 66^m, aucun point du fond du fossé n'échappera aux coups de l'un ou de l'autre flanc. Il suffirait même que la courtine eût 60^m pour que cette condition fût remplie, attendu que dans ce cas le coup de feu parti du flanc atteindrait la verticale élevée au milieu du fossé à une hauteur de 0^m,50 au-dessus du fond, ce qui suffirait pour empêcher l'ennemi de s'établir en ce point.

Mais il y a une autre circonstance à laquelle il est nécessaire d'avoir égard. Pour éviter les déblais inutiles, on donne partout au fossé la même largeur, en sorte qu'il contourne les faces des bastions, leurs flancs et la courtine, en présentant en avant de la courtine un massif MNN'M' (fig. 2) qui pénètre

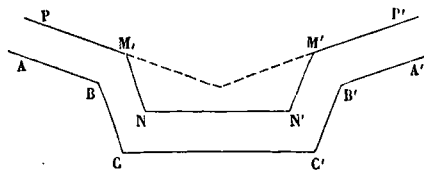


Fig. 2.

entre les flancs BC et B'C'. Or, ce massif pourrait cacher à certaines parties des flancs la vue du fossé de la face opposée; il pourrait arriver, par exemple, que le fond du fossé qui s'étend entre AB et PM ne fût pas vu de certains points du flanc B'C'. Pour remédier à cet inconvénient, on entame de la manière suivante la partie supérieure du massif MNN'M'. Sur la contrescarpe PM, à 0^m,50 au-dessus du fond du fossé, on trace une droite; par cette droite et par le sommet B' de l'angle d'épaule du bastion voisin, on fait passer un plan, et l'on enlève toute la partie du massif comprise au-dessus de ce plan, et limitée au prolongement de la contrescarpe PM. On fait de même passer un plan par le point B e. par une droite tracée sur la contrescarpe P'M', à 0^m,50 au-dessus du fond du fossé, et l'on enlève toute la partie du massif située au-dessus de ce plan et limitée au prolongement de la contrescarpe P'M'. Le massif MNN'M', au lieu d'avoir pour face supérieure un plan horizontal, se termine ainsi par deux rampes inclinées l'une vers le fossé de la face AB, l'autre vers le fossé de la face A'B'. Les plans compacts dont il s'agit sont faciles à déterminer sur le plan coté. Car, connaissant la hauteur et la pente de la contrescarpe PM, par exemple, et la projection de sa crête, il est facile d'obtenir la projection d'une parallèle au pied de la contrescarpe à 0^m,50 au-dessus de ce pied; la cote du point B' est d'ailleurs connue; on a donc tout ce qu'il faut pour déterminer l'échelle de pente du plan coupant (Voy. PLANS COTÉS), et par suite son intersection avec le prolongement de la contrescarpe PM, et avec la contrescarpe NN'. De même pour l'autre plan coupant. Ce problème peut encore être résolu de plu-

sieurs autres manières (Voy. le *Résumé de fortification* de Zaccone); mais on voit que, par le procédé qui vient d'être indiqué, tout le fossé de la face AB est vu de l'angle d'épaule B', et que par conséquent aucun point de ce fossé ne reste sans défense. (Il faut bien remarquer que la ligne ABCC'B'A' représente la projection de la ligne de feux, et non la magistrale.)

Les lignes bastionnées offrent un danger, c'est que les défenseurs des flancs opposés ne tirent les uns sur les autres. Pour éviter cet inconvénient, on brise quelquefois les courtines suivant le prolongement des faces des bastions, comme l'indique la figure 3; encore beaucoup d'officiers prescrivent-ils

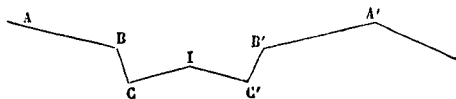


Fig. 3.

dans ce cas de diriger les flancs de manière à faire avec les branches adjacentes des courtines un angle assez obtus pour que les défenseurs des flancs ne puissent atteindre ceux de la courtine. On emploie dans le même but les lignes continues à redans, telles que celle de la figure 4.



Fig. 4.

tracés la défense est incomplète, et il reste des angles morts à tous les rentrants; mais les partisans de ce système pensent que ce défaut n'a pas une grande importance dans la fortification passagère, et que d'ailleurs il peut être corrigé efficacement à l'aide des palissades serrées ou palanques établies dans les fossés.

Les lignes à intervalles se composent ordinairement de trois lignes d'ouvrages détachés. La première ligne est formée de LUNETTES ou de REDOUTES (Voy. ces mots); dans ce second cas, les capitales des redoutes sont dirigées les unes parallèlement, les autres perpendiculairement à la ligne qu'il s'agit de défendre. Dans les deux cas, ces ouvrages ne doivent être qu'à 200^m ou 300^m les uns des autres; leurs faces se flanquent réciproquement, ce qui exige, s'il s'agit de lunettes, que leur angle saillant ne descende pas au-dessous de 80°. La seconde ligne est formée de lunettes dont les faces flanquent les fossés des ouvrages du premier rang, en même temps que leurs faces et leurs flancs donnent des feux dans les intervalles de ces ouvrages. Enfin, les ouvrages du troisième rang sont de simples REDANS (Voy. ce mot) qui flanquent les fossés des ouvrages du second rang, et donnent au besoin des feux dans les intervalles des deux premières lignes.

Les militaires sont divisés sur la question de savoir si les lignes à intervalles doivent être préférées aux lignes continues; les défenseurs de chaque système ne manquent point d'exemples plus ou moins célèbres pour soutenir leur opinion. Mais le débat roule plutôt sur une question de stratégie que sur une question de fortification.

Dans tous les cas, les ouvrages qui forment une ligne de défense, soit continue, soit à intervalles, doivent tirer leur principale force de leur assiette, et satisfaire aux conditions du DÉFILEMENT (*Voy. ce mot*).

Voyez, pour plus de détails, les *Principes de Fortification*, par le général Noizet.

LIGNES DE DÉCLINAISON, lignes tracées sur un cadran solaire par l'extrémité de l'ombre du style dans l'intervalle d'un même jour. Dans les latitudes moyennes, les lignes de déclinaison sont des hyperboles, en négligeant toutefois la variation diurne de la déclinaison du soleil (*Voy. CADRANS SOLAIRES*).

LIGNES DE PASSAGE, lignes suivant lesquelles la surface naturelle du terrain est coupée par la surface d'un projet de route (*Voy. ROUTES*). Il est facile de déterminer ces lignes par points. Pour la facilité du calcul des DÉBLAIS ET REMBLAIS (*Voy. ce mot*) on substitue à la surface du terrain, entre deux profils en travers consécutifs, une surface gauche engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur la ligne du terrain de chacun de ces profils, et à rester parallèle au plan vertical qui passe par l'axe de la route. Cette surface est par conséquent un paraboléide hyperbolique, qui a un plan directeur parallèle au plan vertical dont il vient d'être parlé. Si l'on imagine un plan vertical parallèle quelconque, il coupera le paraboléide suivant une génératrice *ab* (fig. 1) et la surface de la route suivant une droite

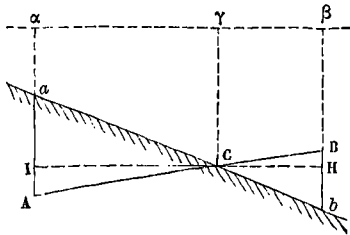


Fig. 1.

AB parallèle à son axe. Si *Aa* et *Bb* sont les traces sur le plan vertical considéré, des plans qui déterminent les deux profils, les longueurs *Aa* et *Bb* seront, au signe près, les CORES ROUGES (*Voy. ce mot*) des points *a* et *b*. Le point *c*, dont la cote rouge est nulle, sera un *point de passage*, c'est-à-dire le point de la ligne de passage qui est contenu dans le plan vertical considéré. Or, si l'on mène par le point *c* l'horizontale *IH*, la similitude des deux triangles *Aca*, *Bcb* donne

$$cl : cI + cH = Aa : Aa + Bb,$$

ou

$$cl : IH = Aa : Aa + Bb;$$

ou, en désignant par *x* la distance inconnue du point de passage au plan du premier profil, par *d* la distance *IH*, par *c'* et *c''* les cotes rouges des points *a* et *b*,

$$x : d = c' : c' - c'', \text{ d'où } x = d \cdot \frac{c'}{c' - c''}, [1]$$

formule dans laquelle *c''* est une quantité négative, puisque *c'* est la cote rouge d'un point situé *au-dessous* du projet de route. Cette formule détermine la position du point de passage sur le terrain et sur le projet.

En faisant varier la position du plan vertical parallèle à l'axe de la route, on obtient autant de

points que l'on veut de la ligne de passage; et l'on peut tracer la projection horizontale de cette ligne, comme nous allons l'indiquer. Soient *xx'* et *yy'* (fig. 2) les traces horizontales des plans des deux profils ne

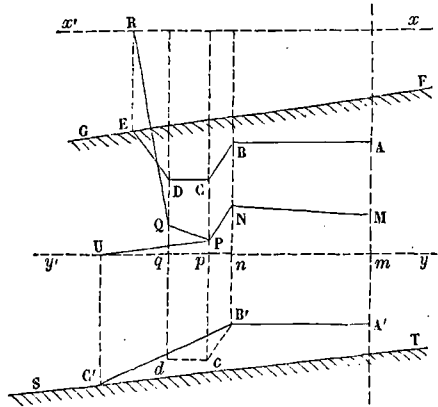


Fig. 2.

travers consécutifs entre lesquels est comprise la ligne de passage. Supposons, comme on le fait d'ordinaire, ces profils rabattus sur le plan horizontal en tournant autour des droites *xx'* et *yy'*. Soient *ABCDE* et *A'B'C'* les lignes du projet, *GF* et *ST* les lignes du terrain. Concevons que par les points *A, B, C, D, E, C'*, on ait mené des plans verticaux parallèles à l'axe de la route, et déterminé dans chacun de ces plans la distance du point de passage à l'un des profils, au profil *yy'* par exemple; on portera ces distances, à l'échelle du plan, sur les perpendiculaires correspondantes *mA, nB, pC, qD*, etc., ce qui donnera les points *M, N, P, Q*. On joindra *MN, NP, PQ*, et la ligne brisée *MNPQ* sera la projection horizontale de la ligne de passage, ou d'une ligne qui en diffère d'autant moins que les plans verticaux parallèles à l'axe de la route auront été plus multipliés.

Lorsque, comme dans l'exemple de la figure 2, l'un des profils est en déblai et l'autre en remblai, le fossé va se perdre dans le remblai; et pour déterminer les points où la rencontre a lieu, on trace le fossé, comme nous l'avons fait en *B'cd* sur le profil en remblai; et c'est d'après ce profil que l'on détermine les points de passage *P* et *Q*.

La même figure donne les limites des déblais et des remblais. Soient *R* et *U* les pieds des perpendiculaires abaissées des points *E* et *C'* sur *xx'* et sur *yy'*; joignons *QR* et *PU*. Le volume des déblais sera limité, en projection horizontale, par la droite *Rx* et par la ligne brisée *MNPQR*; le volume des remblais sera limité de même par la droite *Uy* et par la ligne brisée *MNPU*. (*Voy. le Cours de Routes et Ponts* professé par M. Mary à l'École centrale des arts et manufactures)

LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE, lignes qui rencontrent les COURBES DE NIVEAU (*Voy. ce mot*) sous l'incidence normale (*Voy. FIGURÉ DU RELIEF*).

LIGNES HORAIRES, lignes déterminées sur un cadran solaire, par l'ombre du style aux différentes heures du jour. Quand le cadran est tracé sur une surface plane, les lignes horaires sont des lignes droites (*Voy. CADRANS SOLAIRES*).

haut. Prenons pour ligne de terre une droite XY perpendiculaire à l'arête CC' qui occupe à peu près le milieu de la portion de limon considérée. Si sur le prolongement de CC' on prend une série de

sera limité par les deux joints plans. Il s'agit de trouver les intersections de ces joints avec les quatre plans UZ , XY et OM , $O'M'$. Pour cela, par le point P , P' , intersection du joint inférieur avec la courbe

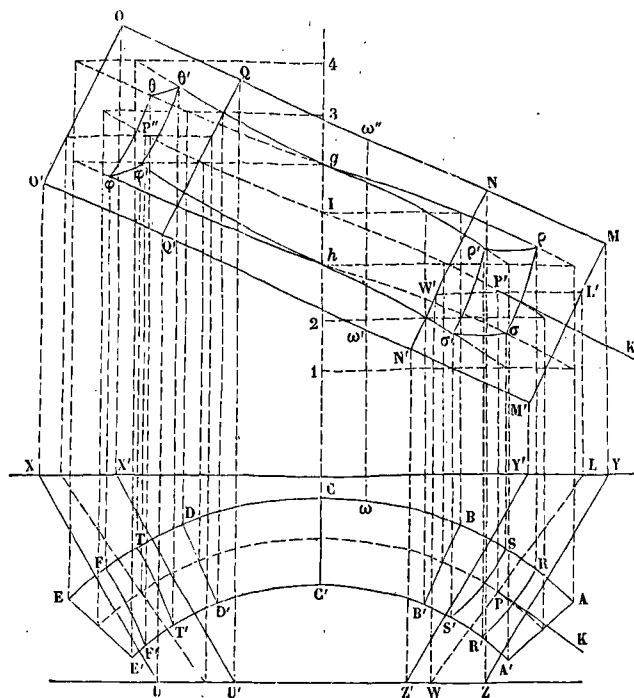


Fig. 2.

points 1, 2, h, I, g, 3, 4 placés à des hauteurs consécutives égales à la hauteur d'une marche; que par ces points on mène des horizontales, et qu'on y projette les extrémités des droites AA' , BB' , DD' , EE' , on pourra tracer les courbes $\rho\theta$, $\rho'g\theta'$, projections verticales des hélices qui terminent le dessus du limon, ainsi que les courbes $\sigma h\phi$, $\sigma'h'\phi'$, projections verticales des hélices qui terminent le dessous. On obtiendra semblablement la courbe moyenne $P'IP''$. La distance gh exprime l'épaisseur du limon dans le sens vertical; on l'a prise ici pour plus de simplicité, égale au double de la hauteur d'une marche. Sur ces hélices, on projettera les sommets R , R' , S , S' de la projection du joint plan inférieur, et les sommets T , T' , F , F' de la projection du joint supérieur; on obtiendra ainsi en $\rho\rho'\sigma'\sigma$ et en $\theta\theta'\phi'\phi$ les projections verticales des deux joints.

Cela fait, il s'agit de déterminer le *solide capable* de la portion de limon que l'on considère, c'est-à-dire un prisme qui contienne cette portion de limon, et dont le volume soit le plus petit possible. Pour cela, on mènera parallèlement à la ligne de terre la droite indéfinie UZ ; le plan vertical qui a pour trace cette droite, et le plan vertical de projection comprendront entre eux la portion de limon considérée. On se procurera deux autres limites en menant perpendiculairement au plan vertical deux plans parallèles OM , $O'M'$ comprenant entre eux la projection verticale $\rho\theta'\theta\phi'\sigma'$. Enfin le solide capable

sera limité par les deux joints plans. Il s'agit de trouver les intersections de ces joints avec les quatre plans UZ , XY et OM , $O'M'$. Pour cela, par le point P , P' , intersection du joint inférieur avec la courbe moyenne, on mènera une génératrice de la surface gauche moyenne; sa projection horizontale WL sera normale à la ligne de foulée, et sa projection verticale $W'L'$ sera parallèle à la ligne de terre. Les points W , W' et L , L' sont ceux où cette droite perce les plans verticaux UZ et XY ; ils appartiennent par conséquent à l'intersection de ces plans verticaux avec le joint considéré. Si donc par le point P , P' on mène la tangente PK , $P'K'$ à la courbe moyenne, et que par les points W et L on mène des perpendiculaires NN' et MM' à cette tangente terminées aux droites OM et $O'M'$, on aura les projections verticales des intersections du joint avec les plans verticaux UZ et XY . Et si l'on projette les points N et N' sur UZ en Z et Z' , et les points M et M' sur XY en Y et Y' , et qu'on joigne YZ et $Y'Z'$, on aura la projection horizontale $YY'Z'Z$ de la face de tête du solide capable. On opérera d'une manière semblable pour le joint supérieur; son plan coupera le solide capable suivant un parallélogramme projeté en $QO'Q'$ et $XX'U'U$.

Pour appliquer le trait sur la pierre, il est nécessaire de connaître en vraie grandeur les faces de tête du solide capable, ainsi que les contours $\rho\rho'\sigma'\sigma$ et $\theta\theta'\phi'\phi$ des joints qui y sont contenus. Pour cela, on rabat la face de tête $MNN'M'$, $YZZ'Y'$, avec les contours qui y sont contenus, sur un plan horizontal, en la faisant tourner autour de l'horizontale WL , $W'L'$. Cette opération s'exécute par les méthodes ordinaires (*Voy. RABATTEMENT*), et ne présente aucune particularité à signaler. On opère de même pour la face opposée $QO'Q'$, $U'X'XU$.

Il faut en outre connaître en vraie grandeur l'intersection de chacun des deux plans OM et $O'M'$ avec les deux cylindres verticaux qui ont pour base $ABCDE$ et $A'B'C'D'E'$. On rabattra comme à l'ordinaire les intersections par le plan OM sur le plan vertical en les faisant tourner autour de OM . (*Voy. SECTIONS PLANES.*) Il sera inutile de déterminer l'intersection par le plan $O'M'$, attendu qu'elle serait identique à la première, puisque les plans OM et $O'M'$ sont parallèles.

Ces divers rabattements fourniront autant de *panneaux* qui serviront à tailler la pierre. Pour cela, on préparera un prisme de pierre égal au solide capable déterminé par la figure 2. Soit $MNQOM'N'Q'O'$ (fig. 3) ce prisme, qui n'est autre chose qu'un parallélépipède tronqué, attendu que les joints plans ne sont point parallèles. Sur les faces supérieure et inférieure on appliquera le

et auxquelles on donne le nom de *linçoirs de pannes*. Les bouts de ces linçoirs sont eux-mêmes assemblés avec les pannes non interrompues.

LINTEAU, pièce horizontale, en bois ou en pierre, qui forme la partie supérieure d'une porte ou d'une fenêtre à baie rectangulaire. Le linteau peut être remplacé par une *plate-bande* ou voûte plate. Il reçoit ordinairement une moulure composée, formant la partie supérieure du *chambranle*. (Voy. PANS DE BOIS, PORTE, FENÊTRE.)

LION, le cinquième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

LISSES, intersections de la *CARÈNE* d'un navire avec un certain nombre de plans perpendiculaires au LATITUDINAL, mais obliques au LONGITUDINAL. Ces courbes, réalisées en quelque sorte à l'aide de pièces de bois d'un faible équarrissage, appelées *cabrions*, prennent le nom de *lisses d'exécution*. C'est sur ces lisses qu'on établit le revêtement extérieur. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE.)

LISTEL, moulure droite sans saillie, et dont la surface est plane. (Voy. MOULURES.)

LIT DE DESSUS, face d'une pierre de taille opposée au *lit de pose*. (Voy. COUPE DES PIERRES.)

LIT DE POSE, face suivant laquelle une pierre taillée s'applique sur une ou plusieurs pierres déjà placées. (Voy. COUPE DES PIERRES.)

LITRE, unité de capacité dans le SYSTÈME MÉTRIQUE (Voy. ce mot). Le litre équivaut au *décimètre cube*.

LITS DE CARRIÈRE, faces d'une pierre de taille qui dans la carrière avaient une position horizontale. (Voy. COUPE DES PIERRES.)

LIVET DE PONT, courbe déterminée sur la surface interne de la coque d'un navire par les extrémités des baux (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). On ne représente cette courbe que par sa projection sur le longitudinal; voici comment on l'obtient. Le devis (Voy. DEVIS DE CONSTRUCTION) fournit la hauteur des extrémités du pont, le *bouge* du maître-bau, c'est-à-dire la flèche de la courbe formée par son arête supérieure, et le *creux* du navire au maître-bau, c'est-à-dire la hauteur au-dessus de la quille de la corde de cette même courbe, corde qu'on appelle la *ligne droite du bau*. En ajoutant ces deux derniers éléments, on obtient la hauteur du milieu du bau au-dessus de la quille. On a ainsi trois points de la ligne médiane du pont projetés sur le longitudinal, et on les réunit par une courbe, soit par la méthode du QUART DE NONANTE (Voy. ce mot), soit par tout autre moyen graphique, ce qui donne la projection de la ligne médiane elle-même. Cette projection rencontre en divers points, que nous nommerons A, B, C, D, etc., pour faciliter le discours, les traces verticales des plans des couples. On prend les hauteurs de ces points au-dessus de la quille, et l'on porte ces hauteurs sur l'axe du latitudinal; on obtient ainsi sur ce plan les projections des points milieux des baux correspondants aux couples successifs. Par ces points milieux on fait passer des courbes déjà tracées sur le latitudinal, et on prolonge ces courbes parallèles jusqu'à leur rencontre avec les arêtes internes des couples correspondants, qui sont également tracés sur ce plan. On obtient ainsi, de part et d'autre de l'axe, une série de points que nous nommerons A', B', C',

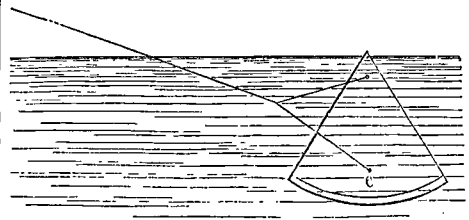
D', etc. On prend la hauteur de ces points au-dessus de l'horizontale passant par la face supérieure de la quille; puis, revenant au longitudinal, on porte ces hauteurs, à partir de la quille, sur les verticales des points, A, B, C, D, etc.; ce qui donne de nouveaux points A'', B'', C'', D'', etc., appartenant à la projection du livet. On n'a plus qu'à les réunir par une courbe continue.

LIVRE, ancienne unité de poids. Cette unité variait d'une contrée à l'autre. A Paris, la livre valait 489^{gr},5. Elle se divisait en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, le gros en 3 *deniers*, et le denier en 24 grains. (Voy. POIDS ET MESURES.)

LIVRE TOURNOIS, ancienne monnaie française.

La livre valait 0^{fr},9876 ou les $\frac{80}{81}$ du franc.

LOCH, instrument employé par les marins pour mesurer la vitesse du navire. Il se compose d'un secteur circulaire en bois, de 18 à 20 centimètres de rayon, et embrassant à peu près 60 degrés; l'arc qui lui sert de base est revêtu d'une lame de plomb qui sert de lest. Ce secteur est ce que l'on appelle le *bateau de loch*; c'est un flotteur qui se tient à la surface de la mer en ne montrant que sa pointe. A ce flotteur est attachée, par deux ou par trois brins, une longue cordelette, qu'on appelle la *ligne de loch*, laquelle s'enroule sur un dévidoir. Lorsque la ligne de loch est légèrement tendue, le bateau de loch tendant à se mouvoir perpendiculairement à sa face, éprouve de la part de l'eau une résistance assez grande pour le maintenir sensiblement à sa place. La ligne de loch est divisée, par des nœuds



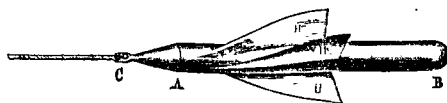
de drap rouge, en intervalles égaux de 45 pieds (14^m,62), divisés eux-mêmes en parties égales, indiquées par de petits bouts de ficelle. Lorsqu'on veut mesurer la vitesse du navire, on jette le bateau de loch à la mer, du côté de l'arrière, et on laisse la ligne de loch se dérouler librement du dévidoir. Le bateau de loch, qui avait la vitesse du navire, ne tarde pas à la perdre par la résistance de l'eau, et devient à peu près stationnaire. L'expérience a indiqué la longueur de ligne qu'il faut dévider pour être sûr que le bateau de loch est devenu à peu près immobile; un premier nœud de drap rouge avertit en passant que cette condition est remplie, et sert de signal pour commencer à compter le temps. On se sert pour cela soit d'une montre à secondes, soit d'un sablier qui se vide en 30 secondes et que l'on appelle *ampoulette*. Au moment où le premier nœud se dégage du dévidoir, l'officier commande *vire*, et l'homme qui tient l'ampoulette la retourne; celui qui tient le dévidoir compte le nombre des nœuds qui se dégagent successivement. Quand le sablier est vide, l'homme qui le porte crie *stopp*, et l'homme qui tient le dévidoir cesse de *filer* la ligne de loch.

L'un des brins de cette ligne aboutissant au bateau de loch, n'y est fixé qu'au moyen d'une cheville *c* introduite dans un trou dont le secteur est percé à sa partie inférieure; il suffit de quelques secousses pour dégager la cheville; le secteur, tiré par le haut, et repoussé par la pression qui s'exerce sur sa face antérieure, bascule, se met à plat sur l'eau, et il ne reste plus qu'à le ramener à bord en enroutant de nouveau la ligne de loch sur le dévidoir. Il est facile alors d'apprécier la vitesse du navire par le nombre de nœuds qui ont été filés pendant l'opération.

En effet, le mille marin étant de 1852 mètres (Voy. MILLE MARIN), autant le navire parcourt de milles dans une heure, autant, dans l'espace de 30 secondes, qui sont la 120^e partie de l'heure, il parcourra de fois la 120^e partie de 1852 mètres, c'est-à-dire 15^m,43. Si donc les nœuds étaient espacés de 15^m,43, le nombre des nœuds filés en 30 secondes exprimerait le nombre des milles parcourus en une heure. Mais ceci exigerait que le bateau de loch fût rigoureusement stationnaire, ce qui n'est pas, et l'expérience a appris que pour établir la correspondance dont nous parlons entre le nombre des milles parcourus en une heure par le navire et le nombre des nœuds filés il ne fallait espacer ces nœuds que de 14^m,62. Avec cet écartement on peut dire qu'un navire qui file 10 nœuds a une vitesse de 10 milles par heure; qu'un navire qui file 8 nœuds a une vitesse de 8 milles, et ainsi de suite. Les fractions de mille s'évaluent au moyen des divisions de la distance de deux nœuds.

On a soin de jeter le loch sous le vent, c'est-à-dire du côté opposé à celui d'où vient le vent. Il faut aussi vérifier de temps à autre la distance des nœuds, parce que la ligne de loch peut s'allonger.

LOCH DE MASSEY, instrument destiné au même usage que le loch ordinaire, mais donnant des indications un peu plus précises. Il se compose de deux parties. La principale est une tige cylindrique AB, terminée en pointe à l'une de ses extrémités C,



et portant des ailettes hélicoïdes H, H, H. Lorsque cette tige est placée horizontalement dans un courant, la pointe tournée vers l'amont, les ailettes lui impriment un mouvement uniforme de rotation, dont la vitesse est proportionnelle à celle du courant. Il en est de même quand l'appareil est tiré horizontalement par l'extrémité C dans une eau tranquille. La seconde partie du loch de Massey est un compteur (Voy. ce mot) renfermé dans une boîte triangulaire aplatie, qui par l'effet de sa forme, se maintient horizontalement à la surface de l'eau. La tige à ailettes est liée au compteur par une corde, qui, participant à la rotation imprimée à la tige par les ailettes, fait tourner les roues de l'appareil. Le compteur est relié au navire par une amarre. Le nombre de tours exécutés dans un temps donné fait connaître la vitesse du navire. Le premier cadran du compteur indique les milles, le second les dizaines, le troisième les centaines de milles.

LOCHOMÈTRE (nom hybride, qui parait formé du mot *loch*, instrument de marine, et du grec μέτρον, mesure), appareil destiné à mesurer la vitesse des navires. Il se compose d'une hélice, à axe horizontal, recouverte par un demi-tuyau. On fixe l'instrument dans le plan longitudinal du navire, à l'arrière. La vitesse relative de l'eau fait tourner l'hélice, dont la rotation se transmet à un compteur. Le nombre de tours d'hélice exécutés dans un temps donné est proportionnel à la vitesse du navire, et peut, par conséquent, servir à mesurer celle-ci, quand leur rapport a été déterminé une fois pour toutes.

LOCOMOBILE, machine à vapeur portée sur roues et qu'un cheval peut transporter au point où son action est nécessaire. Malgré cette faculté, une locomobile doit être considérée comme une machine fixe, attendu qu'elle ne change point de place pendant la durée de son action, et que le travail de la vapeur n'est pas employé, comme dans les locomotives (Voy. ce mot) à transporter la machine elle-même.

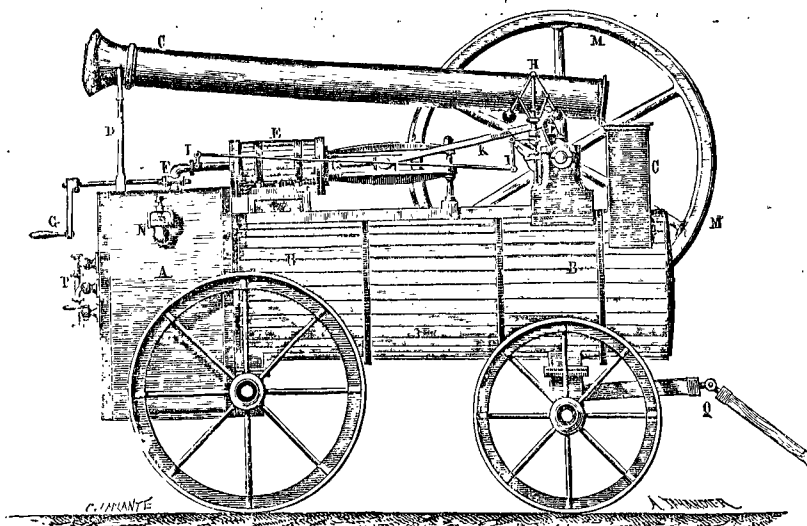
Les locomobiles sont fréquemment employées aujourd'hui dans l'agriculture; on en construit depuis 1 et 2 chevaux jusqu'à 6 ou 8. Elles servent à faire marcher les machines à battre le blé, les hachepaille, les concasseurs, les coupe-racines, les presses, etc., quelquefois les moissonneuses, les charries, les machines à drainer, etc. On s'en est également servi avec succès dans les travaux de construction pour faire marcher les machines à faire le mortier, les sonnettes à battre les pilots, les scies à recéper, etc.

La figure ci-contre, qui représente une locomobile de 6 à 8 chevaux, construite sur le modèle de celles qui sortent des ateliers de M. Calla, fera comprendre la disposition la plus ordinaire de ce genre de machines. A est le foyer; BB la chaudière tubulaire, analogue à celle des locomotives, et la Lote à fumée; CC la cheminée, qui peut s'abattre, comme la figure l'indique, pour la facilité du transport; la partie mobile vient s'appuyer sur une fourche D fixée à la boîte à feu. E est le cylindre à vapeur; F est le tuyau d'admission, dont l'orifice se règle, soit à l'aide de la manivelle G, soit par l'action du régulateur à boules H, dont le manchon fait mouvoir un levier coudé qui agit par l'intermédiaire d'une longue tige II sur une clef qui ouvre ou ferme plus ou moins le tuyau d'admission. La tige du piston est articulée à une bielle K, articulée elle-même à une manivelle L mobile autour d'un axe horizontal, sur lequel est monté le volant MM. Ce volant sert en même temps de poulie pour transmettre, par l'intermédiaire d'une courroie sans fin, l'action de la machine à vapeur, à la machine agricole ou autre qu'il s'agit de faire mouvoir. Sur l'axe de la manivelle est montée une roue verticale qui communique le mouvement à une roue horizontale fixée sur l'axe du régulateur à boules. Sur l'axe de la manivelle sont calés en outre deux excentriques; l'un fait mouvoir le tiroir de distribution de la vapeur; l'autre une pompe d'alimentation placée sur le côté de la chaudière, et à sa partie supérieure, entre les deux roues. Le corps de cette pompe est incliné d'une trentaine de degrés sur l'horizontale. L'échelle de la figure n'aurait pas permis d'y indiquer clairement le jeu de ces deux

excentriques, qu'il est d'ailleurs facile de comprendre.

On voit en N une tubulure pour l'introduction de l'eau dans la chaudière; et en P les robinets de

niveau ordinaires. Toute la machine est portée sur quatre roues, et en Q sont adaptés deux limons qui permettent d'atteler un cheval pour transporter la machine au point où elle doit agir. D'après les r



glements administratifs ce point doit être éloigné de 100 mètres au moins de toute maison habitée. Il est inutile de dire que lorsque la locomobile est en place, il faut avoir soin de caler solidement les roues avant de la mettre en action.

LOCOMOTIVE, machine à vapeur portée sur des roues qu'elle fait mouvoir elle-même, et servant à remorquer les convois sur les chemins de fer. Le premier essai d'une voiture mue par la vapeur remonte à l'année 1769. Cugnot, ingénieur français, construisit à cette époque une voiture à vapeur marchant sur les routes ordinaires; elle faisait environ 4 kilomètres à l'heure, mais ne pouvait fournir une longue course, à cause de l'insuffisance de sa chaudière. La première locomotive marchant sur un chemin de fer a été construite en 1804 par Trewithick et Vivian; elle fut essayée sur le chemin de Merthyr-Tydwll, dans le pays de Galles; elle remorquait un poids de 10 tonnes à une vitesse de 8 kilomètres. Le peu d'adhérence des roues sur les rails conduisit Blenkinsop, en 1811, à placer au milieu de la machine une roue dentée avec une crémaillère fixe établie entre les rails. Sur quelques chemins on remplaça la roue dentée et la crémaillère par des espèces de jambes mobiles. En 1814, Georges Stephenson eut l'idée de faire concourir l'adhérence de toutes les roues au mouvement de la locomotive en liant les trois essieux par des roues dentées sur lesquelles passait une chaîne sans fin, et en 1825 M. Hackworth remplaça la chaîne sans fin et les roues dentées par une bielle d'accouplement. La principale difficulté qui restait à résoudre consistait à produire, dans un temps donné, une quantité de vapeur suffisante, sans accroître outre mesure les dimensions et le poids de la chaudière. C'est M. Marc Séguin qui, en 1828, triompha de cette difficulté par l'invention des *chaudières tubulaires* (Voy. GÉNÉRATEURS), dont la première application fut faite sur le che-

min de fer de Lyon à Saint-Etienne. Enfin, c'est en 1829 qu'une machine nommée *the Rocket* (la *Fusée*), sortie des ateliers de Robert Stephenson, remporta le prix proposé par la Compagnie de Liverpool à Manchester, et opéra une véritable révolution dans l'industrie des chemins de fer, en remorquant un poids de 38 tonnes à une vitesse de 25 kilomètres. Cette machine était à chaudière tubulaire, et le tirage y était activé par un jet de vapeur dans la cheminée. On n'est pas d'accord sur le nom de celui qui le premier a eu l'idée de ce jet de vapeur; les uns l'attribuent à Timothy-Hackworth, d'autres à Pelletan, d'autres enfin à Georges Stephenson. Quoi qu'il en soit, le problème de la locomotion à grande vitesse sur les voies ferrées put être regardé comme résolu à partir de la construction de la *Fusée* de Robert Stephenson. Les locomotives ont reçu depuis cette époque des perfectionnements successifs qui en ont singulièrement accru la puissance. Avant de procéder à la classification des machines de ce genre actuellement en usage, nous croyons utile de décrire la locomotive de Stephenson, modèle de 1845, qui a pendant longtemps été seule employée sur tous les chemins de fer, et qui peut servir de type pour faire comprendre les modifications qu'une étude attentive ou des besoins nouveaux ont apportées à la construction de ces machines.

1. La figure 1 est une coupe verticale de la locomotive, dans le sens de sa longueur; la figure 2 en est le plan, la chaudière enlevée; la figure 3 est une coupe transversale par l'avant; la figure 4 est une coupe transversale par l'arrière. La machine se compose, en réalité, de deux machines à vapeur à haute pression, à détente, et sans condensation (Voy. MACHINES A VAPEUR), portées, ainsi que la chaudière qui les alimente, sur un châssis horizontal qui repose lui-même sur les essieux de trois paires de roues. Le châssis est *extérieur*, c'est-à-

dire qu'il porte sur les extrémités des essieux, et que les roues sont par conséquent *en dedans* du châssis.

La chaudière est une chaudière tubulaire. Le combustible est placé sur une grille à barreaux

mobiles et indépendants, au fond d'une capacité rectangulaire, appelée *boîte à feu*, qui est environnée d'eau de toutes parts, excepté à l'arrière où se trouve la porte par laquelle on introduit le combustible. La chaudière proprement dite se compose

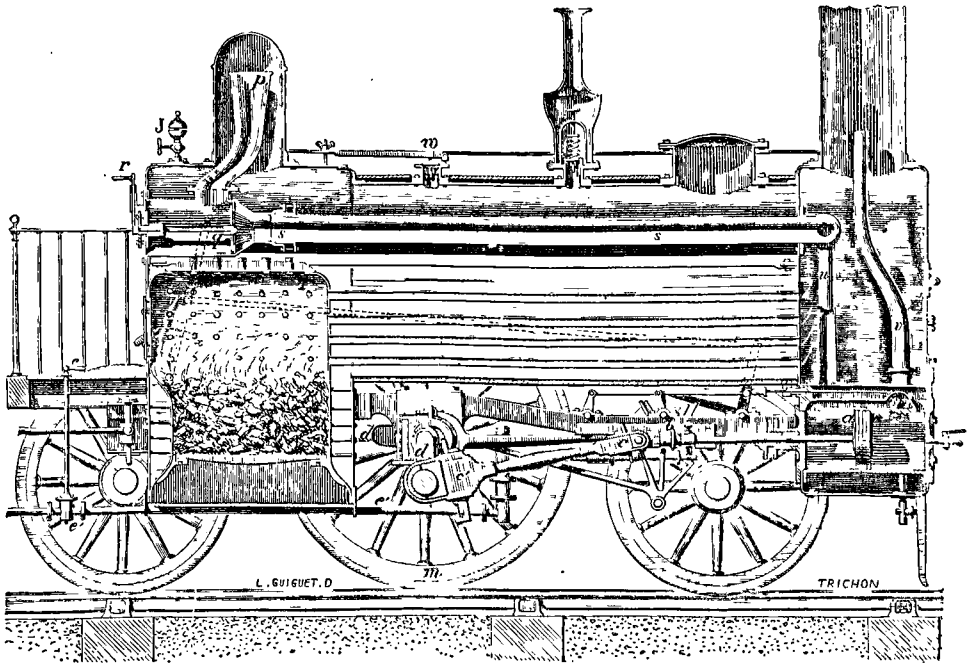


Fig. 1.

d'un cylindre horizontal qu'on nomme le *corps cylindrique*, et qui est traversé dans toute sa longueur par un grand nombre de tubes, s'abouchant par une de leurs extrémités avec la paroi antérieure de la boîte à feu, et débouchant par l'autre extrémité

dans une capacité appelée *boîte à fumée*, communiquant par le haut avec la cheminée. Les tubes dont nous parlons sont aussi entourés d'eau de toutes parts. Les gaz provenant de la combustion traversent ces tubes en abandonnant à l'eau une partie

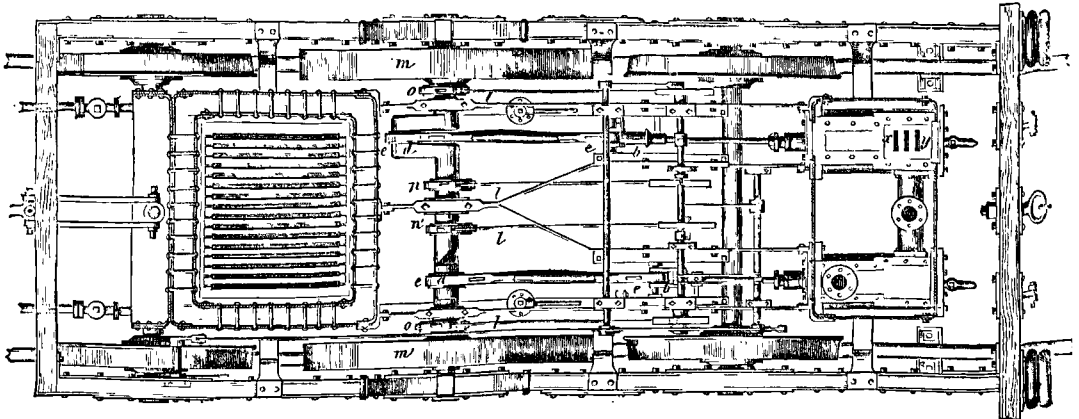


Fig. 2.

de la chaleur, et s'échappent par la cheminée après avoir traversé la boîte à fumée. On a reconnu que, pour assurer le tirage de la cheminée, qui ne peut avoir une très-grande hauteur, il faut lui donner une section qui soit à peu près les trois quarts de la

section totale des tubes réunis. On active d'ailleurs le tirage par un jet de vapeur, comme il sera indiqué plus loin. Le corps cylindrique est ordinairement entouré d'une enveloppe en bois pour le garantir du refroidissement. La chaudière est munie

de ses appareils de sûreté : manomètre, indicateur et robinets de niveau, soupape de sûreté *w*, et sifflet d'alarme *j* (fig. 1).

La vapeur formée dans cette chaudière va se

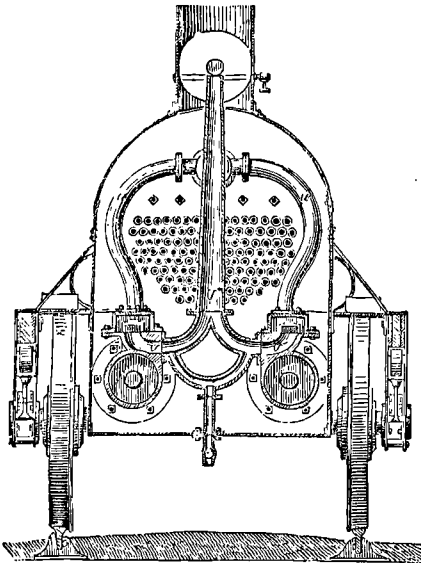


Fig. 3.

rendre sous le dôme *p* (fig. 1), qu'on appelle le réservoir de vapeur; un tuyau intérieur l'amène en

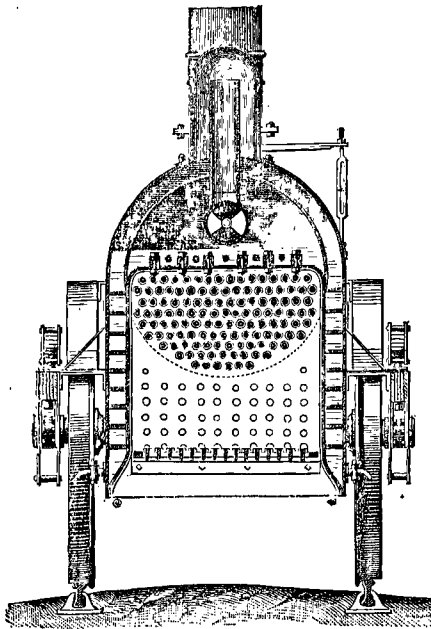


Fig. 4.

présence du régulateur à papillon *q*, espèce de robinet formé de disques évidés dont l'un se manœuvre au moyen de la manette *r*. Le régulateur est vu de face sur la figure 4. Quand ce robinet est

ouvert, la vapeur s'engage dans le tuyau longitudinal *s*, puis dans les tuyaux latéraux *u* et *u'* (fig. 3), par lesquels elle arrive dans les boîtes de distribution, situées à droite et à gauche de la machine, et de là dans les cylindres situés au-dessous. On voit sur la figure 1 une coupe du cylindre de droite; on les aperçoit tous les deux sur la figure 3.

La tige du piston s'articule avec une bielle *cc* qui fait mouvoir, comme une manivelle, l'essieu coudé des roues du milieu. Cet essieu présente un coude de chaque côté; celui de gauche est facile à apercevoir sur la figure 2. Les roues du milieu sont fixées à cet essieu coudé; le mouvement alternatif des pistons ayant pour effet de faire tourner l'essieu, fait tourner en même temps les roues, et, en vertu de l'adhérence sur les rails, déterminée par le poids de la locomotive, la machine entière et le convoi qu'elle remorque sont contraints d'avancer sur la voie. C'est pour cela que les roues du milieu se nomment les *roues motrices*; les autres ne servent qu'à soutenir la machine. Il faut remarquer que les deux coudes de l'essieu sont à angle droit, l'un par rapport à l'autre, et non pas dans un même plan; le but de cette disposition est de faire en sorte que l'un des pistons soit encore au milieu de sa course quand l'autre est au bout de la sienne; de cette manière, la locomotive avance d'une manière continue, et non par saccades, comme cela arriverait si les alternatives de mouvement des deux pistons coïncidaient.

La vapeur qui a agi sur les pistons traverse un conduit particulier de la boîte de distribution, que nous indiquerons tout à l'heure, gagne les tuyaux *v*, *v'* (fig. 3) et de là le tuyau *v''*, par lequel elle s'échappe dans la cheminée.

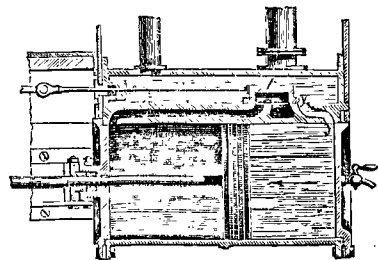


Fig. 5.

La figure 5 montre, à une plus grande échelle, les détails de la distribution. Il est fort important, dans les locomotives, que la distribution soit réglée avec une parfaite précision. Les locomotives font quelquefois jusqu'à 80 et même 100 kilomètres à l'heure. Or le diamètre des roues motrices étant en moyenne de 1^m,40, le train n'avance que de 1^m,40, ou de 4^m,40 par tour de roue, ou pour une double course du piston; il faut donc que le piston exécute $\frac{80000}{4,4}$ à $\frac{100000}{4,4}$, ou 18888 à 22727 doubles courses par heure, ce qui fait de 5 à 6 doubles courses par seconde. Il est donc indispensable que les mouvements du tiroir soient combinés avec la plus rigoureuse exactitude.

Les conduits *xx* et *yy*, partant des extrémités du cylindre, se recourbent et se prolongent pour aboutir au plan sur lequel glisse le tiroir. Leurs sections

rectangulaires s'aperçoivent sur le cylindre de gauche de la figure 2, où l'on a enlevé le tiroir. Entre ces deux ouvertures, ou lumières, on en aperçoit une troisième x ayant les mêmes dimensions : c'est l'orifice de sortie de la vapeur après son action sur le piston.

Le tiroir t (fig. 5) est une boîte rectangulaire renversée, x peut couvrir exactement deux de ces trois lumières. Il est mis en mouvement par un excentrique circulaire monté en n ou n' (fig. 2) sur la partie circulaire de l'essieu des roues motrices. Quand il couvre les lumières x et z , comme on le voit sur la figure 5, la vapeur affluant dans la boîte de distribution ne trouve ouverte que l'issue y , par laquelle elle se rend en avant du piston; en même temps, la vapeur qui était en arrière du piston s'échappe à travers le conduit xx et le tiroir, par l'orifice z , et se rend dans la cheminée par le chemin indiqué plus haut. Quand, au contraire, le tiroir couvre les lumières y et z , la vapeur affluant dans la boîte de distribution ne trouve ouverte que l'issue x , par laquelle elle se rend en arrière du piston; en même temps, la vapeur, qui était en avant du piston, s'échappe à travers le conduit yy et le tiroir, par l'orifice x , et de là dans la cheminée.

La position de l'excentrique est réglée de manière que le tiroir ait un peu dépassé le milieu de sa course quand le piston est à l'un des bouts de la sienne (*Voy. AVANCE DU TIROIR*); et la détente s'obtient en donnant un recouvrement extérieur aux bandes du tiroir (*Voy. DÉTENTE*). La marche en arrière ou à contre-vapeur s'obtient à l'aide d'un mécanisme spécial, visible sur la figure 1, mais qui a été remplacé depuis par la COULISSE DE STEPHENSON (*Voy. ce mot*), laquelle sert aussi à faire varier la détente.

Un wagon spécial, appelé *tender*, qui suit immédiatement la locomotive, porte la provision de combustible et d'eau nécessaire au service de la machine. Un tuyau e (fig. 1) communique du tender à la locomotive; une petite pompe aspirante et foulante, à piston plongeur, mise en mouvement par la tige du piston à vapeur, et dont une partie seulement s'aperçoit sur la figure, extrait l'eau fournie par ce tuyau et la refoule dans la chaudière par un conduit que la figure ne montre pas. Un robinet e' , qui est sous la main du mécanicien, sert à régler l'alimentation.

Dans la locomotive que nous décrivons, la vapeur se forme à une pression de 5 atmosphères. La force moyenne de la machine est de 60 chevaux. La surface de chauffe est de près de 50 mètres carrés, ce qui tient à la forme tubulaire de la chaudière. Les tubes sont au nombre de 150 et plus. C'est à cette circonstance que les locomotives doivent de pouvoir fournir l'énorme quantité de vapeur nécessaire à leur marche rapide. Le poids total de la locomotive de Stephenson est de 12 000 kilogrammes, ou 12 tonnes; elle peut remorquer aisément, dans les temps secs, un convoi pesant 100 tonnes, à une vitesse de 40 kilomètres à l'heure. Elle consomme environ 44 litres d'eau et 7 kilogrammes de coke par kilomètre sur un chemin de niveau.

Les principaux reproches que l'on ait faits à cette machine portent sur l'exiguïté de son foyer, sur l'emploi des essieux coudés, pièces d'une fabrication difficile, et qui offrent peu de sécurité, surtout

dans les grandes vitesses, et enfin sur la position de son mécanisme, difficile à surveiller et à réparer.

II. Depuis 1845, des modifications très-nombreuses ont été introduites dans la construction des locomotives. Nous ne saurions entreprendre de les décrire toutes dans cet article. Nous nous arrêtons principalement sur les types le plus généralement adoptés.

Les locomotives actuellement en usage peuvent être divisées en trois classes : les machines à voyageurs, ou à grande vitesse-e, les machines à marchandises, ou à petite vitesse, et les machines mixtes pouvant faire alternativement ou simultanément les deux services.

Quand on veut obtenir une grande vitesse sans fatiguer le mécanisme de distribution par des alternatives trop nombreuses dans un temps donné, il faut nécessairement accroître le diamètre des roues motrices. Dans les machines destinées à remorquer les trains *express*, le diamètre varie depuis 1^m,68 jusqu'à 2^m,30. Le type le plus fréquemment adopté pour ce service est la locomotive *Crampton*, créée en 1849. Dans cette machine, représentée (fig. 6), les roues motrices sont placées à l'arrière; elles ont 2^m,10 ou 2^m,30 de diamètre; tout le mécanisme est placé à l'extérieur, et les cylindres sont établis vers le milieu de la chaudière. Ils sont horizontaux; mais les boîtes de distribution sont légèrement inclinées. Les tiroirs sont guidés par une coulisse de Stephenson. Cette locomotive se recommande par une grande stabilité, qui tient à l'abaissement du centre de gravité et à l'écartement des essieux. Le mécanisme est facile à surveiller. La puissance de vaporisation est très-grande; la chaudière a 173 tubes, et la surface de chauffe est de près de 100 mètres carrés (98^m,42). Cette locomotive remorque, en temps ordinaire, sur des rampes de 4 à 5 millimètres, des convois de 12 voitures, avec une vitesse de 60 kilomètres à l'heure, arrêts compris. La machine pèse environ 30 tonnes, dont 10,6 forment le poids réparti sur les roues motrices. La consommation de combustible est en moyenne de 8 kilogrammes par kilomètre. Le tender peut contenir 7,1 tonnes d'eau et 1,5 tonnes de coke. La locomotive Crampton est employée sur les lignes de l'Est, de Lyon et du Nord. Le même système est adopté, sauf quelques modifications de détail, sur plusieurs chemins de fer allemands, et en particulier sur les chemins de fer badois.

Parmi les locomotives construites pour les trains à grande vitesse, on peut encore citer le système Mac Connell, le système Buddicom et les machines Stephenson à trois cylindres.

La machine Mac Connell a un foyer immense; elle a un peu moins de stabilité et de puissance que la machine Crampton, mais elle est plus légère et consomme moins de combustible. Elle est employée sur le chemin de Londres à Liverpool.

Dans la machine Buddicom, qui est d'une légèreté remarquable, les roues motrices sont au milieu; les cylindres sont extérieurs et inclinés, mais les tiroirs sont horizontaux. Il y a un châssis intérieur aux roues motrices et un autre châssis extérieur aux petites roues. Cette locomotive est employée en Angleterre. M. Polonceau a construit pour le chemin de fer d'Orléans des machines analogues; mais il a placé les cylindres horizontalement, afin d'évi-

ter le *mouvement de galop* occasionné par l'inclinaison des cylindres dans le système Buddicom. Il a allongé la chaudière, et placé les tiroirs de manière à permettre l'emploi de la coulisse de Stephenson. Il a, en somme, rendu la machine plus puissante et plus simple.

Dans la machine de Stephenson à trois cylindres, deux de ces cylindres sont placés à l'extérieur, et

le troisième dans l'axe de la locomotive; les deux premiers sont symétriques et leurs pistons avancent ou reculent ensemble, tandis que le coude de l'essieu auquel est articulée la bielle du troisième est à angle droit sur les manivelles que font marcher les deux premiers. Il résulte de cette disposition des mouvements parfaitement symétriques; et l'on évite ainsi le *mouvement de lacet*, sorte d'oscillation que

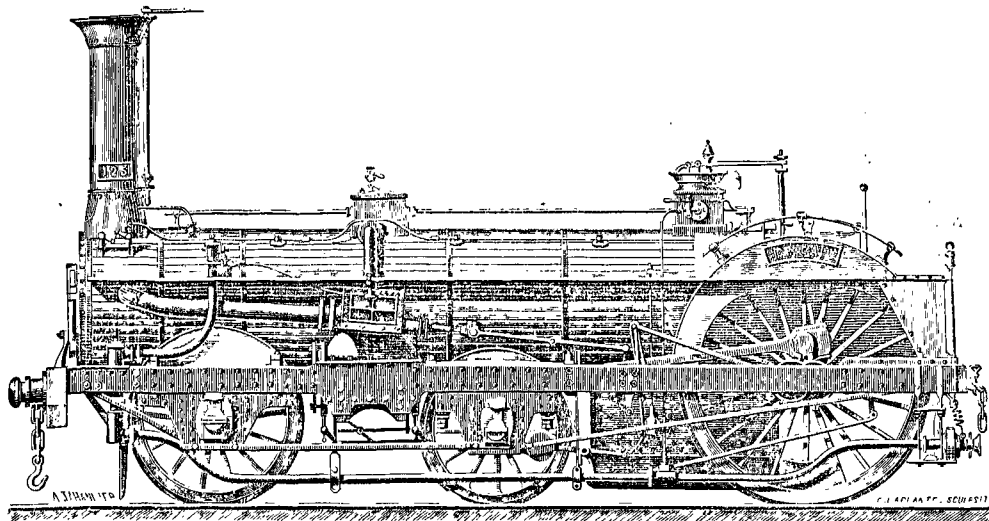


Fig. 6.

prend la machine autour d'un axe vertical dans les locomotives à deux cylindres, oscillation qui provient de l'action alternative des deux pistons, et qui se communique à toutes les voitures du convoi. Les roues motrices sont au milieu. Le châssis est double; les cylindres sont horizontaux, mais les tiroirs sont verticaux; ils sont manœuvrés par deux coulisses, l'une pour les cylindres latéraux, l'autre pour le

cylindre du milieu. Le poids de la machine est de 27 tonnes, dont 12 portent sur les roues motrices. Cette machine fait le service sur le chemin de fer d'York à Newcastle.

III. Pour remorquer à de petites vitesses les trains de marchandises, dont le poids est considérable, il n'est plus nécessaire de donner un grand diamètre aux roues motrices. L'important est d'accroître la

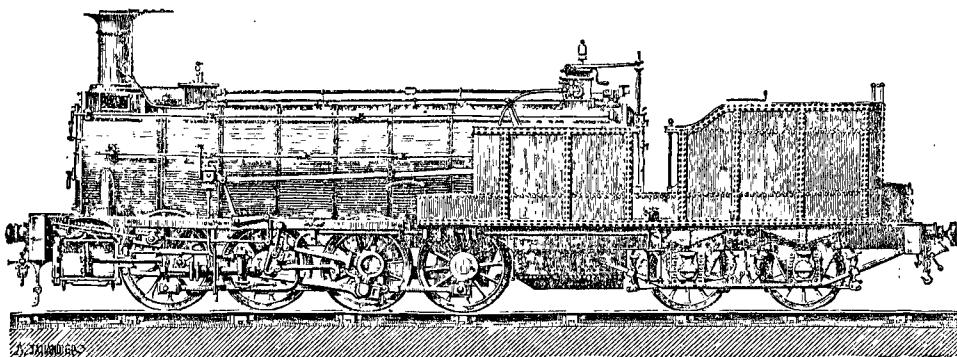


Fig. 7.

puissance de la machine; on y parvient d'une part en augmentant les dimensions du foyer et de la surface de chauffe; de l'autre en accouplant par des bielles plusieurs roues, afin de se servir du poids qu'elles portent et de l'adhérence qui en résulte pour accroître la force de traction sans exposer les roues à *patiner* ou tourner sur place. Le type le plus tranché de ce genre de locomotive est la ma-

chine Engerth, qui date de 1855, et qui est représentée par la figure 7.— Elle porte sur 3 et quelquefois 4 paires de roues couplées; mais une partie du poids du foyer est portée par le tender, qui l'enveloppe latéralement. Ce tender est lié à la locomotive par un boulon d'articulation spécial qui lui permet de tourner de la quantité nécessaire pour parcourir les courbes de petit rayon. La surface de chauffe

est considérable ; elle atteint près de 200 mètres carrés (196^m,98). La vapeur se forme à une tension de 8 atmosphères. Les cylindres sont extérieurs et horizontaux ; tout le mécanisme est visible. Les tiroirs sont guidés par une coulisse fixe. Le poids total de la machine est de 62⁰⁰⁰,8. Ces machines peuvent remorquer, à une vitesse de 30 kilomètres à l'heure, sur des rampes de 5 millimètres, jusqu'à 45 wagons chargés chacun de 10 tonnes de marchandises. Elles sont particulièrement employées sur le chemin de fer du Nord et sur le chemin de fer de Vienne à Trieste. Sur cette dernière voie, pour laquelle elles ont été primitivement construites, M. Engerth a ajouté, sur l'essieu d'arrière de la locomotive et sur l'essieu d'avant du tender, des roues dentées, que l'on peut faire engrener au moyen d'un embrayage, afin de rendre les roues du tender, qui sont couplées, solidaires avec les roues de la machine et augmenter ainsi l'adhérence,

ce qui permet de développer un effort de traction considérable pour franchir les fortes rampes que l'on rencontre au passage de Sommering.

Les machines du système Engerth, mais sans l'engrenage, sont employées sur le chemin de fer de l'Est.

M. Polonceau a fait construire sur le chemin de fer d'Orléans des machines à marchandises qui ont de l'analogie avec les machines Engerth, mais qui, avec une puissance suffisante pour le service qu'elles ont à faire, offrent beaucoup plus de légèreté. Les cylindres y sont inclinés au lieu d'être horizontaux, ce qui n'est pas sans inconvénient.

IV. Les machines mixtes, construites pour faire à la fois le service des voyageurs et celui des marchandises, offrent nécessairement des dimensions intermédiaires entre les deux types que nous avons décrits, et participent plus ou moins aux divers systèmes dont il a été question jusqu'ici. Elles sont

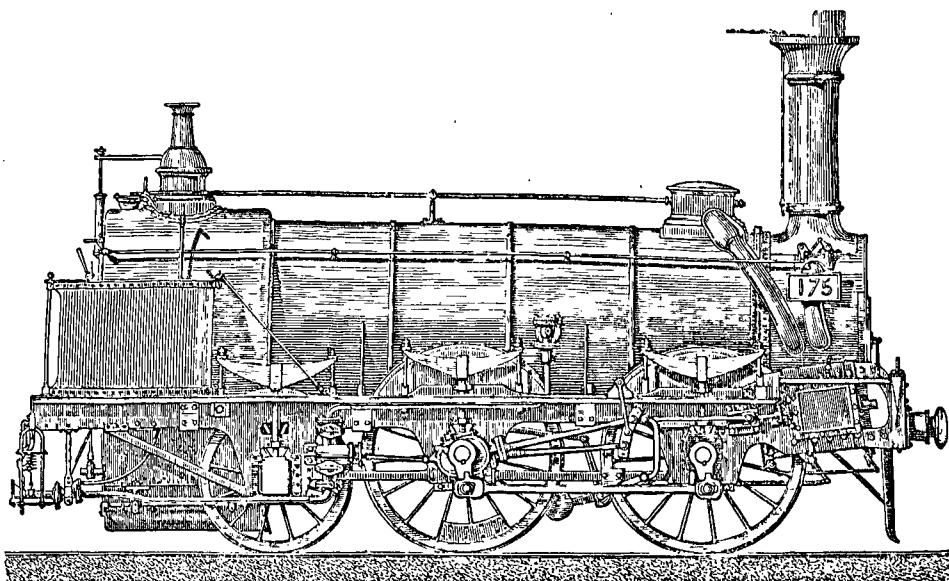


Fig. 8.

en général établies pour remorquer des trains de 20 à 24 voitures, à une vitesse comprise entre 35 et 50 kilomètres à l'heure. On leur donne habituellement 6 roues, et elles présentent toujours deux paires de roues couplées, et par conséquent égales, de plus grand diamètre que les autres. — Nous nous bornerons à citer les types les plus répandus, tels que :

La machine mixte du Nord, ayant deux paires de roues couplées à l'arrière et ses cylindres horizontaux ;

La machine mixte de l'Est, ayant deux paires de roues couplées à l'arrière et ses cylindres légèrement inclinés ;

La machine mixte du chemin de Lyon, ayant deux paires de roues couplées à l'avant et ses cylindres légèrement inclinés ;

La machine mixte du chemin d'Orléans, qui diffère principalement de celle du Nord en ce que l'essieu d'arrière, au lieu d'être en arrière de la

boîté à feu, est engagé sous la chaudière ; cette machine est représentée figure 8.

On peut ajouter à cette liste la machine Borsig, type prussien dans lequel l'essieu moteur est à l'avant ; les cylindres sont extérieurs et les tiroirs intérieurs ; un essieu est à l'arrière du foyer. Dans cette machine, les ressorts des deux paires de roues d'avant sont rendus solidaires par l'intermédiaire d'un balancier, et l'essieu d'arrière a un ressort transversal, en sorte que la machine est en quelque sorte suspendue sur trois points.

On a aussi modifié le système Engerth pour l'appliquer au service mixte ; pour cela, on a réduit les dimensions de la machine et couplé deux paires de roues seulement ; c'est ce qu'on a fait, en particulier, sur le chemin de fer du Nord.

Nous citerons encore, comme exemple de machines mixtes, celles qui sont employées sur le chemin de fer de Sceaux. Elles ont 4 paires de roues ; les deux paires du milieu d'un même diamètre, plus

grand que celui des roues extrêmes, sont couplées et très-rapprochées l'une de l'autre; les roues d'avant et d'arrière ne servent qu'à porter la machine et son tender, et à diriger la locomotive à l'aide de de galets inclinés (*Voy. SYSTÈME ARNOUX*). Les roues couplées sont à bandes cylindriques, sans bourrelet ou rebord. Ces machines passent aisément dans des courbes de 25^m de rayon, et sont assez puissantes pour remorquer de lourds convois.

Sur les chemins allemands et américains on emploie des machines mixtes à 4 paires de roues, dont les deux d'arrière sont couplées. Les cylindres y sont ordinairement inclinés.

V. On peut faire une classe à part des *machines-tenders*, qui servent au service des gares ou au service des voyageurs aux environs des grandes villes. Elles sont ainsi nommées parce que les réservoirs d'eau et de coke font partie intégrante de la machine. Elles sont généralement à 6 roues, dont deux paires à l'arrière sont couplées. Les essieux extrêmes sont peu éloignés, et la machine porte un frein puissant qui permet d'arrêter dans un espace de temps très-court pour les besoins du service.

Dans toutes les locomotives on place aujourd'hui, à l'avant et à l'aplomb de chaque rail, des tiges verticales appelées *chasse-pierres*, que l'on voit sur les figures 6, 7 et 8, et qui ont pour fonction de dégager les voies des obstacles légers qui pourraient l'obstruer.

Nous renverrons, pour plus de détails, aux ouvrages spéciaux sur les locomotives, et particulièrement au *Guide du mécanicien constructeur et conducteur de locomotives*, de MM. Lechatelier, Flachet, Petiet et Polonceau.

VI. La dynamique des fluides élastiques est trop peu avancée pour qu'il soit possible d'établir une théorie mathématique des effets de la vapeur dans une locomotive, en tenant compte de l'admission, de la détente, de l'avance à l'échappement, de la compression, de l'avance à l'admission, de la marche à contre-vapeur, de l'eau entraînée par la vapeur, de la condensation qui s'opère sur le trajet de ce fluide par diverses causes de déperdition de chaleur, etc., etc. M. de Pambour a publié, il y a longtemps, une théorie des locomotives fondée sur des expériences faites, de 1834 à 1836, sur le chemin de fer de Liverpool à Manchester. Mais la distribution de la vapeur se faisait encore, à cette époque, dans des conditions de simplicité qui ont pu lui permettre d'établir des formules approximatives peu compliquées. Depuis cette époque, les locomotives ont subi des modifications telles que ces formules ne représenteraient plus les résultats de l'expérience. Le plus rationnel est donc de consulter la pratique elle-même; et c'est ce qu'a fait M. Lechatelier, en s'aidant des expériences faites par lui en 1844, de concert avec M. Gouin, par Gooch en 1847, et par Bertera en 1850. Il a résumé le résultat de ses recherches en un certain nombre de règles simples, connues sous le nom de *RÈGLES DE M. LECHATÉLIER* (*Voy. ce mot*), et qui suffisent pour servir de guide aux constructeurs.

VII. Les locomotives, indépendamment de leur mouvement de progression principal, sont sujettes à divers mouvements accessoires qu'il importe de resserrer entre les limites les plus rapprochées possible. Ces mouvements sont au nombre de quatre :

Le *mouvement de lacet*, dont nous avons déjà parlé, mouvement sinueux qui se propage dans toute l'étendue du convoi, de sorte que celui-ci s'avance en serpentant;

Le *mouvement de galop*, dont nous avons parlé aussi, qui est un mouvement oscillatoire autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la voie;

Le *mouvement de roulis*, qui est un mouvement oscillatoire autour d'un axe parallèle à la voie;

Le *mouvement de tangage*, dénomination impropre par laquelle on désigne un mouvement d'oscillation longitudinale de l'avant à l'arrière, ou d'avance et de recul.

Le mouvement de lacet tient au défaut de symétrie des mouvements des deux pistons, et il est fort difficile de l'éviter, à moins d'employer trois cylindres. Le mouvement de galop peut tenir à l'inclinaison des cylindres et à l'insuffisance de la charge portée par les essieux extrêmes; et on le diminue notablement en employant des cylindres horizontaux et en répartissant le poids de la machine de manière que les essieux extrêmes soient suffisamment chargés. Le mouvement de roulis peut tenir à l'imperfection de la voie; mais il dépend aussi du défaut de symétrie dans l'action des bielles mues par les deux pistons. On conçoit, en effet, que si les rails fléchissent inégalement, ils peuvent donner lieu à des réactions obliques par rapport au plan de symétrie longitudinal, et inégalement inclinées sur ce plan. D'un autre côté, l'inclinaison des deux bielles n'étant pas la même au même instant, les efforts qu'elles exercent ont des composantes verticales inégales, ou même de sens contraire. Et ces circonstances suffisent pour expliquer le mouvement de roulis.

Le mouvement de tangage tient aux réactions exercées alternativement par la vapeur sur les deux bases de chaque cylindre; mais il peut tenir aussi aux réactions produites par la flexion des rails.

En général, le mode de construction et d'entretien de la voie, celui de la locomotive, l'inertie des pièces oscillantes et les réactions intérieures de la vapeur, sont autant de causes qui concourent à produire les mouvements parasites dont nous parlons. On les a atténués par l'adoption de rails plus lourds et bombés à la partie supérieure. M. Lechatelier, qui a étudié cette question et l'a le premier soumise au calcul, a été conduit à établir sur les roues motrices, à l'opposé des manivelles, des contre-poids dont il a calculé la valeur, et qui ont pour effet de resserrer dans d'étroites limites les mouvements dont nous parlons. Toutefois l'expérience a montré qu'on pouvait réduire au tiers, et quelquefois même à moitié, la valeur de ces contre-poids sans altérer la stabilité de la machine, ce qui montre l'insuffisance du calcul pour la solution de ce problème. Les effets des contre-poids ont été successivement soumis à l'analyse par MM. Yvon-Villarcieu, Couche et Rézal; mais les résultats auxquels ils sont parvenus n'ont pas encore reçu la sanction de la pratique.

VIII. Une machine à voyageurs du système Stephenson coûtait 42 000^f; une machine mixte coûte de 45 000 à 48 000^f; une machine Crampton est évaluée 55 000^f; enfin, une machine Engerth à marchandises coûte jusqu'à 107 000^f.

Une locomotive Crampton, traînant 12 voitures,

consomme 8 kilog. de coke par kilomètre, ce qui répond à une dépense de 0',66. Il en est de même d'une locomotive mixte traînant 18 voitures. Une locomotive Engerth consomme de 16 à 18 kilog. de coke par kilomètre. La dépense moyenne en combustible est de 0',93 par kilomètre.

Une locomotive parcourt en moyenne de 18 000 à 25 000 kilomètres par an; mais le parcours annuel des locomotives Crampton s'élève à plus de 47 000 kilomètres. (Voy. les articles MACHINES À VAPEUR, CHEMINS DE FER, TRACTION DES CONVOIS. Voyez aussi le *Traité élémentaire des chemins de fer*, de M. Perdonnet, et l'ouvrage ayant pour titre : *Simple explication des chemins de fer*, par M. Amédée Guillemain.)

IX. On a repris tout récemment le problème de la circulation des machines locomotives sur les routes ordinaires. On comprend les difficultés de la question : le poids de la locomotive peut creuser dans le sol de profondes ornières qui détruisent la voie, en même temps qu'elles peuvent ralentir indéfiniment ou même arrêter la marche; les inégalités du sol peuvent causer des secousses qui faussent les bielles et amènent leur rupture; enfin, il faut que la machine puisse tourner avec facilité dans des cercles de petits rayons et obéir instantanément au mécanicien pour éviter les obstacles qui se rencontrent à chaque pas, etc., etc. M. Lotz, habile constructeur d'instruments agricoles et de locomobiles, paraît avoir résolu le problème. Il a construit une locomotive qui a été essayée à Nantes le 16 octobre 1864, sur l'une des voies les plus fréquentées de cette ville; elle a été soumise depuis à plusieurs autres essais. Elle a circulé sur une route impériale avec une vitesse de 16 kilomètres à l'heure, entraînant après elle deux voitures; elle a fait des voyages de 40 à 50 kilomètres avec des charges de 5 à 6 tonnes; elle a remorqué des charges de 12 à 15 tonnes à une vitesse de 6 kilomètres à l'heure; elle a gravi avec ces charges des pentes de 7 à 13 centièmes. Si ce succès se confirmait, ce serait toute une révolution nouvelle dans l'industrie des transports.

La machine de M. Lotz est de la force de 5 chevaux-vapeur. Elle porte avec elle son tender. La chaudière est montée sur 4 roues; le train de devant est mobile autour d'une cheville ouvrière, comme dans les voitures ordinaires. Tout le mécanisme est placé au-dessus de la chaudière et parfaitement visible. L'arbre moteur transmet le mouvement à l'une des roues de derrière par l'intermédiaire d'une chaîne sans fin, engrenant avec une roue verticale solidaire avec l'essieu. La bande des roues de derrière a 0^m,20 de largeur; le constructeur a évité ainsi les ornières dont nous parlions en commençant. Les roues sont montées sur ressorts, ce qui évite les secousses brusques capables de fausser les bielles. Un homme, assis sur le devant de la locomotive, manœuvre les roues de devant et fait tourner le véhicule avec la plus grande facilité à l'aide d'une petite roue verticale analogue à celle dont se sert le timonier à bord des navires.

Cette machine ne coûte que 5500'. L'inventeur en construit de nouvelles, dans lesquelles il introduit les modifications indiquées par l'expérience.

LOFER, venir au vent; se dit d'un navire dont la direction, estimée dans le sens de sa marche,

fait un angle de plus en plus petit avec celle d'où vient le vent. L'action de lofer se nomme *auloffée*.

LOI DE BODE, règle empirique donnée à la fin du siècle dernier par Bode, astronome de Berlin, pour retenir ou retrouver les distances des planètes au soleil. Considérez la progression géométrique :

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384...

Écrivez sur une même ligne le nombre 4, puis ce même nombre augmenté de chacun des termes de la progression précédente, ce qui donne

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388,

enfin divisez tous ces nombres par 10, ce qui donne

0,4 0,7 1 1,6 2,8 5,2 10 19,6 38,8.

Les termes de cette série exprimeront les distances des planètes au soleil, celle de la terre étant 1. On a ainsi :

Pour la distance de Mercure.....	0,4
— — Vénus.....	0,7
— — la Terre.....	1
— — Mars.....	1,6
— — planètes télescopiques.	2,8
— — Jupiter.....	5,2
— — Saturne.....	10
— — Uranus.....	19,6

Cette loi, trouvée par Bode avant la découverte des planètes télescopiques, lui avait fait supposer qu'il devait y avoir une planète entre Mars et Jupiter. Au lieu d'une, on a découvert dans l'intervalle indiqué une série de petites planètes, dont le nombre, aujourd'hui connu, est de 91, et dont la distance moyenne au soleil répond effectivement au nombre 2,8. Mais la découverte de Neptune est venue renverser la loi de Bode, qui peut néanmoins être utile pour retenir les distances des planètes anciennement connues.

LOI DES GRANDS NOMBRES. On désigne souvent sous ce nom, dans le calcul des probabilités, le théorème de J. Bernoulli dont voici l'énoncé :

A mesure qu'on multiplie les épreuves, on a une probabilité toujours croissante que le rapport du nombre des événements A à celui des événements contraires B ne s'écartera pas du rapport de leurs probabilités respectives au delà d'une limite donnée, en plus ou en moins; et, quelque resserrée que soit cette limite, la probabilité dont il s'agit pourra approcher de l'unité autant qu'on le voudra, pourvu qu'on augmente suffisamment le nombre des épreuves. (Voy. PROBABILITÉ et THÉORÈME DE J. BERNOULLI.)

LOIS DE KÉPLER, lois qui régissent le mouvement des planètes; elles sont au nombre de trois :

1° Les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

2° Les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps.

3° Les carrés des temps des révolutions (sidérales) sont proportionnels aux cubes des grands axes (des orbites).

On savait avant Képler que les planètes parcourent des orbites planes, mais pour expliquer leurs mouvements on avait recouru à l'hypothèse des *épicycles*, c'est-à-dire que l'on supposait que chaque planète parcourt un cercle, dont le centre se meut suivant un autre cercle, etc. (Voy. SYSTÈMES ASTRONOMIQUES). L'idée d'une orbite elliptique fut suggérée à Képler par l'étude de la planète

Mars; le choix de cette planète offrait deux circonstances favorables : la première, c'est la grandeur de l'excentricité de son orbite, qui devait manifester plus aisément la forme elliptique; la seconde, c'est que Képler avait à sa disposition les observations faites avec beaucoup de soin par Tycho-Brahé sur la planète Mars pendant une période de plus de 30 ans. Képler étendit la première loi aux autres planètes, mais il ne découvrit les deux dernières que 22 ans après, en 1618. Ce sont les lois de Képler qui ont conduit Newton à la découverte de l'attraction universelle.

On expose aujourd'hui dans tous les traités de Mécanique les méthodes analytiques qui permettent de remonter des lois de Képler au principe de l'attraction, ou de démontrer au contraire ces lois quand l'hypothèse de l'attraction est admise.

LONGITUDE CÉLESTE, l'une des deux coordonnées écliptiques qui servent à fixer la position d'un astre sur la sphère céleste. Si par l'astre considéré et par l'axe de l'écliptique on imagine un plan, il coupera la sphère céleste suivant un grand cercle perpendiculaire à l'écliptique, et que l'on nomme *cercle de longitude*; l'arc d'écliptique compris entre le plan de ce cercle et l'équinoxe du printemps est ce qu'on appelle la *longitude* de l'astre considéré. Elle se compte de zéro à 360° à partir du point vernal et dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens du mouvement de la terre sur son orbite, ou dans le sens du mouvement propre du soleil sur la sphère céleste.

LONGITUDE GÉOGRAPHIQUE, l'une des deux coordonnées géographiques qui servent à déterminer la position d'un lieu à la surface du globe terrestre : c'est l'angle dièdre que forme le méridien de ce lieu avec un méridien déterminé appelé *premier méridien*; on peut encore dire que c'est l'arc d'équateur compris entre le premier méridien et le méridien du lieu que l'on considère. La longitude se compte de zéro à 180° vers l'est ou vers l'ouest; on dit qu'elle est orientale dans le premier cas et occidentale dans le second. Les nations européennes se sont longtemps accordées à prendre pour premier méridien, à l'exemple de Ptolémée, le méridien de l'île de Fer, la plus occidentale des îles Canaries; aujourd'hui chaque nation adopte pour premier méridien celui de son principal observatoire; mais les différences de longitude de ces divers observatoires ayant été déterminées avec soin, il ne résulte pas d'inconvénient grave de cette diversité de conventions.

Pour déterminer la longitude d'un lieu du globe, quand on prend, par exemple, pour premier méridien le méridien de l'Observatoire de Paris, tout se réduit à connaître la différence d'heure que marqueraient deux horloges sidérales placées l'une à Paris, l'autre dans le lieu dont on cherche la longitude, et qui seraient réglées toutes deux de manière à marquer 0^h 0^m 0^s quand une même étoile passe au méridien du lieu où elles se trouvent. Car cette différence d'heure indiquerait le temps employé par l'étoile à passer du méridien de Paris au méridien du lieu considéré, ou *vice versa*; et comme elle emploie 24 heures sidérales pour parcourir 360°, ou 1 heure pour parcourir 15°, la différence d'heure dont il s'agit, convertie en degrés à raison de 15° par heure, exprimerait l'angle dièdre com-

pris entre les deux méridiens, c'est-à-dire la différence de longitude de ces méridiens, ou enfin la longitude cherchée, puisque celle de Paris est zéro. Cette longitude serait orientale si l'horloge du lieu considéré avançait sur celle de Paris, c'est-à-dire si l'étoile passait au méridien de ce lieu avant de passer au méridien de Paris; la longitude serait occidentale si l'horloge du lieu considéré retardait sur celle de Paris, c'est-à-dire si l'étoile passait au méridien du lieu après avoir passé au méridien de Paris. Par exemple, ayant constaté qu'une étoile passe au méridien de Saint-Petersbourg 1^h 51^m 53^s avant de passer au méridien de Paris, on en conclut que la longitude de Saint-Petersbourg est orientale et exprimée en degrés par

$$15^{\circ} \times 1 + 15' \times 51 + 15'' \times 53,$$

ce qui donne 27° 58' 13". Ayant constaté de même qu'une étoile passe au méridien de Paris 5^h 5^m 21^s, 8 avant de passer au méridien de New-York, on en conclut que la longitude de New-York est occidentale et exprimée en degrés par

$$15^{\circ} \times 5 + 15' \times 5 + 15'' \times 21,8,$$

ce qui donne 76° 20' 27".

La comparaison directe des deux horloges étant impossible, on y supplée par divers moyens. Le plus usité, surtout chez les navigateurs, consiste à transporter dans le lieu dont on veut avoir la longitude un **CHRONOMÈTRE** (*Voy.* ce mot) réglé à Paris; si cet instrument n'éprouve pas de dérangement sensible dans le voyage, on a à chaque instant l'heure de Paris, et en la comparant avec celle du lieu où l'on se trouve [*Voy.* **HEURE** (détermination de l')], on obtient immédiatement la longitude de ce lieu. Dans les voyages qui ont pour objet spécial la détermination des longitudes, on ne se contente pas d'un seul chronomètre; on en emporte un certain nombre, choisis parmi les plus exacts, et l'on compare leur marche jour par jour; on répète plusieurs fois les mêmes voyages afin d'avoir pour chaque station des observations répétées et se rapportant à diverses saisons; c'est de l'ensemble et de la discussion de ces observations que l'on déduit les différences d'heure qui, converties en degrés, font connaître les longitudes.

A terre, et lorsque les stations que l'on veut comparer ne sont pas très-éloignées, on peut employer la méthode de Cassini, qui consiste à produire en un point intermédiaire une clarté instantanée qui puisse être observée des deux stations; la clarté produite par une fusée ou par la combustion subite de quelques onces de poudre suffit pour être aperçue de 100 kilomètres; si les deux stations dont il s'agit ne sont pas distantes de plus du double, deux observateurs placés à ces stations apercevront au même instant le signal de feu, et s'ils notent exactement l'heure à laquelle ce signal aura été produit, la comparaison des heures notées donnera la différence d'heure qui exprime la différence de longitude des deux stations.

Mais la télégraphie électrique fournit un moyen plus précis encore de déterminer les différences de longitude. Les signaux se transmettent par cette voie avec une vitesse de plus de 30 000 kilomètres par seconde; le temps de la transmission peut donc être négligé, et si deux observateurs placés à deux stations reliées par un télégraphe électrique notent avec précision l'heure à laquelle l'un d'eux trans-

met un signal et celle à laquelle l'autre le reçoit, la différence des heures fera connaître la différence de longitude.

C'est ainsi que les observatoires de Paris et de Greenwich ont été reliés l'un à l'autre en 1854; la moyenne de deux séries de plusieurs centaines de signaux a donné 9^m 20^s,63 pour la différence de longitude en temps de ces deux observatoires; en degrés, cette différence est 2^o 20' 9",40. Quand on emploie les signaux électriques, il est nécessaire de faire ainsi deux séries d'observations dans lesquelles les observateurs permutent, afin de faire disparaître les erreurs dues aux appréciations personnelles.

En mer, ou même à terre, lorsque les communications électriques manquent, le plus précis de tous les moyens consiste dans l'observation simultanée d'un même phénomène céleste. Les *distances lunaires* sont le sujet d'observation le plus fréquemment employé par les navigateurs depuis les perfectionnements apportés à la théorie de la lune. Le bureau des longitudes publie, pour chaque année, et longtemps à l'avance, dans la *Connaissance des temps*, une table qui donne pour tous les jours de l'année, et de 3 heures en 3 heures chaque jour, les distances angulaires du centre de la lune, soit au centre du soleil, soit au centre des principales planètes, Mars, Vénus, Jupiter, Saturne, soit à quelques-unes des étoiles les plus remarquables, Aldébaran, Antarès, α de l'Aigle, α du Bélier, Fomalhaut, α de Pégase, Pollux, Régulus, α de la Vierge. Ces distances peuvent être observées à bord, soit à l'aide du sextant, soit à l'aide du cercle à réflexion (*Voy. ces mots*); si la distance observée se trouve dans la table, on lit à côté l'heure correspondante à l'Observatoire de Paris; si cette distance ne se trouve pas dans la table, elle tombe entre deux distances consécutives insérées dans la table, et l'heure correspondante de Paris s'obtient par une interpolation analogue à celle que l'on fait quand on se sert d'une table de logarithmes, et qui n'exige qu'une simple proportion, la table donnant dans une colonne spéciale les différences successives entre les distances inscrites. Connaissant l'heure de Paris et celle du bord, on en conclut la longitude du lieu où le bâtiment se trouve.

Le commencement d'une éclipse de soleil ou de lune, l'instant de l'occultation par le disque de la lune d'une étoile remarquable, phénomènes prévus et dont l'heure précise pour l'observatoire de Paris est également fournie par la *Connaissance des temps*, sont encore des phénomènes dont l'observation fait connaître l'heure de Paris, laquelle comparée à celle du lieu où l'observation est faite, donne la longitude de ce lieu. Mais il reste toujours quelque incertitude sur l'instant précis où l'on observe le commencement d'une éclipse.

La détermination de la longitude par les premières méthodes indiquées ci-dessus ne donne lieu qu'à des calculs fort simples. Un seul cas demande quelques développements, c'est celui où l'on observe les *distances lunaires*. La distance obtenue par l'observation n'est pas la distance vraie, attendu que les hauteurs des deux astres sont affectées d'erreurs, dues à la réfraction, à la parallaxe, à la dépression, au demi-diamètre apparent. Il faut donc corriger les hauteurs observées, et se servir

ensuite de ces hauteurs corrigées pour calculer la distance vraie. Soit Z le zénith, L et S les positions apparentes de la lune et du soleil; la position vraie de la lune sera un peu plus près du zénith, en L', attendu que pour cet astre la correction due à la parallaxe est plus grande que celle qui est due à la réfraction; pour le soleil, c'est le contraire, et sa position vraie sera en S' un peu plus loin du zénith; la distance apparente des centres des deux astres était l'arc de grand cercle LS, la distance vraie sera l'arc de grand cercle L'S'. Désignons par H et H' les hauteurs apparentes de la lune et du soleil, par h et h' les hauteurs corrigées ou vraies, par D la distance apparente des centres des deux astres, par d leur distance vraie, et par Z l'angle des plans verticaux ZL et ZS. Dans le triangle ZLS on a

$$\cos D = \sin H \sin H' + \cos H \cos H' \cos Z,$$

formule qui fera connaître cos Z. Mais dans le triangle ZL'S' on a de même

$$\cos d = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z;$$

en mettant pour cos Z sa valeur, on aurait donc celle de cos d. Mais la formule à laquelle on parvient ainsi ne se prêtant pas au calcul logarithmique, Borda l'a transformée de la manière suivante.

Les deux relations ci-dessus donnent

$$\frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}.$$

On remplace

$$\sin H \sin H' \text{ par } \cos H \cos H' - \cos(H + H')$$

et $\sin h \sin h'$ par $\cos h \cos h' - \cos(h + h')$,

et l'on obtient, en simplifiant,

$$\frac{\cos D + \cos(H + H')}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d + \cos(h + h')}{\cos h \cos h'}.$$

On remplace le numérateur du premier membre

$$\text{par } 2 \cos \frac{1}{2}(H + H' + D) \cos \frac{1}{2}(H + H' - D)$$

et le numérateur du second par

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} d + 2 \cos^2 \frac{1}{2}(h + h') - 1;$$

on tire la valeur de

$$\sin^2 \frac{1}{2} d,$$

et l'on pose

$$H + H' + D = 2S, \text{ d'où } H + H' - D = 2(S - D);$$

ce qui donne

$$\sin^2 \frac{1}{2} d =$$

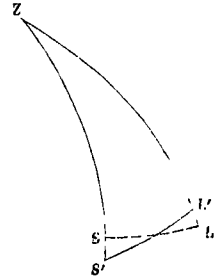
$$\cos^2 \frac{1}{2}(h + h') \left[1 - \frac{\cos S \cos(S - D) \cos h \cos h'}{\cos^2 \frac{1}{2}(h + h') \cdot \cos H \cos H'} \right]$$

et l'on en déduit

$$\sin \frac{1}{2} d = \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(h + h'), \quad [1]$$

en désignant par φ un angle auxiliaire déterminé par la relation

$$\cos^2 \varphi = 1 - \frac{\cos S \cos(S - D) \cos h \cos h'}{\cos^2 \frac{1}{2}(h + h') \cos H \cos H'}$$



qui revient à

$$\sin \varphi = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(h+h')} \sqrt{\frac{\cos S \cos(S-D) \cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}} \cdot [2]$$

Les formules [1] et [2] sont connues sous le nom de *formules de Borda*. On trouvera le type du calcul que ces formules exigent dans les *tables de Callet* (page qui précède la table des logarithmes des nombres). Il y a une correction à faire aux demi-diamètres apparents du soleil et de la lune, parce que ces demi-diamètres sont donnés dans la *Connaissance des temps* de 12^h en 12^h pour la lune, et de 5^l en 5^l seulement pour le soleil, en sorte qu'il y a un calcul d'interpolation à effectuer pour obtenir ce demi-diamètre pour le jour et l'heure de l'observation.

Les mêmes formules serviraient à calculer la distance vraie de la lune à une étoile, seulement il n'y aurait pour l'étoile aucune correction de parallaxe ni de demi-diamètre à faire.

Il existe pour le même objet d'autres formules, et en particulier la formule de Mendoza, qui exige l'emploi de tables spéciales. On la trouvera dans les traités spéciaux de navigation. (Voy. le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, p. 411.)

On trouvera dans le *Traité de Géodésie* de Puitsant (tome II, p. 265) le développement de la méthode de Lagrange pour déterminer les longitudes par les éclipses, méthode qui est irréprochable au point de vue analytique, mais qui n'a pas prévalu dans la pratique à cause de la longueur des calculs qu'elle entraîne.

On emploie encore d'autres méthodes pour déterminer les longitudes, par le passage de la lune au méridien des deux stations, par les *culminations* d'une étoile et d'un bord de la lune, c'est-à-dire par l'observation du passage au méridien des deux stations d'un bord de la lune et d'une étoile voisine. Ces étoiles voisines de la lune sont dites de *culmination lunaire*; leurs coordonnées sont publiées dans le *Nautical almanack*. En observant ainsi, un peu avant et un peu après le passage de la lune, le passage des étoiles voisines, on s'affranchit des erreurs sur la détermination de l'heure; et la méthode des culminations lunaires, dont l'emploi se propage de plus en plus, grâce à l'usage des lunettes méridiennes portatives, est aujourd'hui regardée comme la plus exacte de toutes celles que l'on peut employer pour déterminer la différence de longitude de deux lieux séparés par l'Océan ou par des obstacles infranchissables.

(Voy. la *Géodésie* de Francœur et le *Cours d'Astronomie et de Géodésie* de M. Laussedat à l'École polytechnique.)

Les déterminations de longitudes faites à bord sont toujours entachées d'erreurs, qui peuvent aller jusqu'à plusieurs minutes; aussi est-il important de les corriger dans les relâches toutes les fois que cela est possible. Pour cela, on a soin, à chaque relâche, de faire des déterminations d'heure [Voy. HEURE (détermination de l')] nécessairement plus exactes que celles qui ont pu être faites dans la traversée, et à l'aide desquelles on corrige la marche des montres marines (Voy. MARCHÉ D'UN CHRONOMÈTRE). Ces corrections faites aux indications des chrono-

mètres permettent de faire des corrections correspondantes aux longitudes observées en mer.

Pour la détermination des longitudes des sommets successifs d'un réseau de triangles, voy. l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (calcul des).

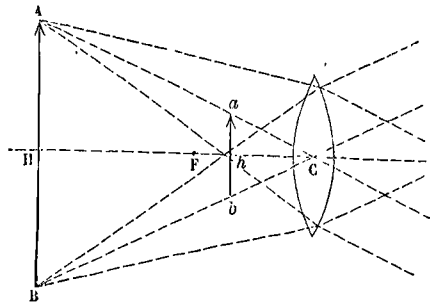
LONGITUDE (CORRECTION DE), correction qu'il faut faire subir à la longitude des différents sommets d'un réseau de triangles (Voy. TRIANGULATION) par suite d'une erreur commise sur la longitude de l'un d'eux. Cette erreur n'a d'autre influence que d'augmenter ou de diminuer d'autant les longitudes de tous les sommets.

LONGITUDINAL, plan vertical qui, dans l'état de repos, divise un navire en deux parties symétriques (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

LONG-PAN, pan de charpente ayant la forme d'un trapèze, et qui forme l'une des grandes faces d'un COMBLE (Voy. ce mot).

LOUIS, ancienne monnaie d'or en usage en France jusqu'en 1810. Le louis valait 24 livres, et en dernier lieu 24 francs.

LOUPE (Géodésie), instrument d'optique dont on se sert pour regarder de très-petits objets. Une loupe n'est autre chose qu'une *lentille convergente* (Voy. LENTILLE). On place l'œil très-près de la lentille, et l'objet à observer très-près du foyer principal, mais entre la lentille et ce foyer. Il résulte de cette disposition que les rayons émanés d'un point de l'objet, qui avaient, avant de traverser la lentille, une divergence considérable, sont ramenés à une divergence moindre, en rapport avec la vue distincte (Voy. VISION). Le point *a* de l'objet est



rapporté en A au sommet du cône formé par les rayons qui, émanés du point *a*, sont arrivés à l'œil après avoir traversé la lentille; de même le point *b* est rapporté en B. Il en résulte que l'image AB est droite, mais plus grande que l'objet; et comme elle se trouve à la distance de la vue distincte, l'œil peut en saisir tous les détails, comme si, au lieu d'une image, il apercevait un objet réel ayant les dimensions de AB.

Le *grossissement* d'une loupe est le rapport entre le diamètre apparent de l'image (Voy. DIAMÈTRE APPARENT) et celui qu'aurait l'objet placé à la même distance, c'est-à-dire à la distance de la vue distincte. Ce grossissement peut être approximativement calculé. L'œil étant très-près de la lentille, on peut supposer qu'il est en C; le diamètre apparent de l'image et celui qu'aurait *ab* s'il était placé sur AB, sont donc dans le rapport de AB à *ab*, ou; ce qui revient au même, dans le rapport de CH à Ch. Or, A est le foyer conjugué de *a*, foyer qui est virtuel

dans le cas qui nous occupe; de même B est le conjugué de b ; par une raison analogue, H peut être considéré comme le foyer conjugué de h ; on peut donc appliquer aux distances CH, Ch et FC la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ (Voy. LENTILLE, formule 8); mais p ou Ch étant ici moindre que f , p' ou CH, doit être regardé comme négatif; faisons-le égal à $-p''$, il viendra

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p''} = \frac{1}{f}, \text{ d'où l'on tire } \frac{p''}{|p} = 1 + \frac{p''}{f}.$$

La distance p'' est donnée, puisque c'est la distance de la vue distincte; on voit donc que le grossissement sera d'autant plus considérable que f sera plus petit par rapport à p'' .

Cependant on ne peut pas obtenir un grossissement indéfini, attenduque, plus une lentille est convergente, plus elle colore les bords de l'image et nuit ainsi à sa netteté, en même temps qu'elle la déforme par une autre cause, l'aberration de sphéricité.

On peut remarquer qu'une même loupe produit un grossissement plus considérable pour un presbyte que pour un myope, puisque p'' est plus grand dans le premier cas.

LOXODROMIE (du grec λοξός, oblique, et δρόμος, course), courbe tracée sur la surface d'une sphère et coupant tous les méridiens sous un même angle; c'est la courbe que décrit un navire lorsqu'il se dirige constamment vers un même point de la boussole: ce que les marins expriment aussi en disant qu'ils naviguent sur un même rumb de vent (Voy. RUMB).

Soit A le point de départ, B le point d'arrivée, l_0 la latitude du point A, L_0 sa longitude, l_1 et L_1 les coordonnées analogues pour le point B, l et L les coordonnées d'un point quelconque M de la loxodromie; celles du point infiniment voisin M' seront $l + dl$ et $L + dL$. Soit Z l'angle constant PMB que fait la courbe avec le méridien PM. Appelons ds l'élément MM'; et menons l'arc de parallèle M Q. Le triangle MQM' pouvant être considéré comme un triangle rectiligne rectangle en Q, on aura (Voy. ROUTES [Problèmes des]):

$$[1] \quad dl = ds \cdot \cos Z \quad \text{et} \quad dL = \frac{ds \cdot \sin Z}{\cos l}. \quad [2]$$

Ce sont les équations [1] et [2] de l'article cité, dans lesquelles on a remplacé $l' - l$ par dl , $L' - L$ par dL , et k par ds . L'angle Z étant constant, on a d'abord en intégrant l'équation [1] du point A jusqu'au point B,

$$l_1 - l_0 = s \cdot \cos Z. \quad [3]$$

Maintenant, en divisant l'équation [2] par l'équation [1], on obtient

$$\frac{dL}{dl} = \frac{\tan Z}{\cos l}, \quad \text{ou} \quad dL = \tan Z \cdot \frac{dl}{\cos l},$$

et en intégrant depuis A jusqu'à B

$$L_1 - L_0 = \tan Z \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{\cos l} \quad [4]$$

On calcule l'intégrale du second membre en posant $\sin l = x$, d'où $dl = \frac{dx}{\cos l}$, par suite

$$\int \frac{dl}{\cos l} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log' \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ = \log' \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} l \right) + \text{const.}$$

Il vient donc

$$L_1 - L_0 = \tan Z \left[\log' \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} l_1 \right) - \log' \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} l_0 \right) \right]. \quad [5]$$

Les logarithmes sont ici des logarithmes népériens, qu'on obtiendra, à défaut d'une table spéciale, en prenant les logarithmes vulgaires et multipliant par le module 2,3025851.

Les formules [3] et [5] renferment la solution des *Problèmes des routes* (Voy. ROUTES [Problèmes des]). Mais pour la commodité du calcul on a calculé une table des valeurs de la fonction

$$\varphi(l) = \log' \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} l \right).$$

On a donné à cette table le nom de *table des latitudes croissantes*, pour une raison qu'on trouvera expliquée à l'article CARTES MARINES.

La relation [5] peut s'écrire

$$L_1 - L_0 = \tan Z [\varphi(l_1) - \varphi(l_0)]; \quad [6]$$

elle peut être regardée comme l'équation de la loxodromie, rapportée aux coordonnées géographiques l et L . Elle se simplifie lorsqu'on prend pour point de départ un point de l'équateur dont on regarde la longitude comme nulle; car alors $L_0 = 0$, et la fonction φ s'annule avec l , on a aussi $\varphi(l_0) = 0$; en sorte qu'il reste

$$L_1 = \tan Z \cdot \varphi(l_1). \quad [7]$$

En discutant l'équation sous cette forme, on reconnaît: 1° qu'elle se compose de deux branches inversement symétriques par rapport à l'équateur; 2° qu'on ne peut avoir $l_1 = 90^\circ$ qu'avec $L_1 = \infty$; en sorte que la courbe tourne indéfiniment autour de chaque pôle sans pouvoir l'atteindre.

Reprenons maintenant les équations [3] et [6] pour résoudre les problèmes des routes. Nous supposons connues les coordonnées géographiques du point de départ; et nous aurons à traiter les cas suivants:

1. On donne S et Z . L'équation [3] donnera l_1 ; et dès lors l'équation [6] fera connaître L_1 .
2. On donne l_1 et L_1 . L'équation [6] donnera Z ; et dès lors l'équation [3] fera connaître s .
3. On donne Z et l_1 . L'équation [6] donnera L_1 ; et l'équation [3] donnera s .
4. On donne Z et L_1 . L'équation [6] donnera $\varphi(l_1)$; la table des latitudes croissantes fera connaître l_1 ; et dès lors la formule [3] donnera s .
5. On donne s et l_1 . La formule [3] donnera Z ; et dès lors la relation [6] fera connaître L_1 .
6. On donne s et L_1 . Ce problème est le seul qui ne puisse être résolu directement par les relations [3] et [6]. Pour le résoudre, on a construit, à l'aide des formules [3] et [6], une table à deux entrées donnant pour tous les systèmes de valeurs de s et de Z les valeurs correspondantes de $l_1 - l_0$ et de $L_1 - L_0$. On peut s'en servir pour trouver au contraire $l_1 - l_0$ et Z , quand on connaît s et $L_1 - L_0$; il suffit d' chercher le lieu où ces valeurs de s et de $L_1 - L_0$ se correspondent; la table fera connaître Z et $l_1 - l_0$.

Il va sans dire que si les valeurs données de s et de $L_1 - L_0$ ne se trouvent pas exactement dans la table, on aura à effectuer une INTERPOLATION (Voy. ce mot) analogue à celle que l'on fait lorsque l'on cherche le nombre correspondant à un logarithme donné.

A défaut de la table dont nous parlons, on peut résoudre le problème en s'aidant d'une construction graphique. On attribue à l_1 une valeur arbitraire; si l'on était tombé par hasard sur la véritable, les valeurs de Z tirées des relations [3] et [6] devraient être égales. Elles ne le seront pas en général, et il y aura une *erreur*. En attribuant à l_1 d'autres valeurs, on obtiendra des erreurs différentes; et en traçant une COURBE D'ERREURS (Voy. ce mot), on trouvera, avec une approximation généralement suffisante, la véritable valeur de l_1 , et par suite celle de Z .

Pour les valeurs de la fonction φ , voyez l'article LATITUDES CROISSANTES.

Lorsqu'on veut avoir égard à la forme elliptique du méridien, l'équation de la loxodromie prend une forme un peu plus compliquée. Le triangle MQM', considéré comme rectiligne et rectangle en Q, donne

$$MQ = \tan Z \cdot M'Q. \quad [8]$$

Or MQ est l'élément du parallèle du point M; il a donc pour valeur le produit de dL par le rayon de ce parallèle, c'est-à-dire par

$$\frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}$$

(Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE). Quant à M'Q c'est l'élément de l'ellipse méridienne, qui a pour expression (même article)

$$\frac{a(1 - e^2) dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{3/2}}$$

En substituant ces valeurs dans la relation [8], on obtient

$$\frac{a \cdot dL \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}} = \tan Z \cdot \frac{a(1 - e^2) dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{3/2}}$$

ou $dL = \tan Z \cdot \frac{(1 - e^2) dl}{\cos l (1 - e^2 \sin^2 l)}$; c'est l'équation différentielle de la loxodromie. Pour l'intégrer, on peut la mettre sous la forme

$$dL = \tan Z \left[\frac{dl}{\cos l} - \frac{e^2 \cos l \cdot dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)} \right],$$

ou $dL = \tan Z \left[\frac{dl}{\cos l} - e \cdot \frac{d \cdot e \sin l}{1 - e^2 \sin^2 l} \right]$; d'où, en intégrant entre les limites 0 et l ,

$$L - L_0 = \tan Z \int_0^l \frac{dl}{\cos l} - e \tan Z \int_0^l \frac{d \cdot e \sin l}{1 - e^2 \sin^2 l}$$

Nous connaissons la première intégrale; la seconde se ramène, en posant $x = e \sin l$, à

$$\int \frac{dx}{1 - x^2},$$

qui donne $\frac{1}{2} \log' \frac{1+x}{1-x}$. Il vient donc

$$L - L_0 = \tan Z \left[\log' \tan \left(45^\circ + \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{2} e \log' \frac{1 + e \sin l}{1 - e \sin l} \right] = \tan Z \cdot \Phi(l). \quad [9]$$

L_0 est la longitude du point où la courbe coupe l'équateur. On reconnaît aisément que $l = 90^\circ$ donne $L = \infty$, et que par conséquent la loxodromie tourne indéfiniment autour du pôle sans l'atteindre.

Pour $Z = 0$ on a $L = L_0$; et la courbe est un méridien. Pour $Z = 90^\circ$, on a $\Phi(l) = 0$, d'où $l = \text{constante}$; et la courbe est un parallèle.

La fonction $\Phi(l)$ qui exprime les *latitudes croissantes*, est plus compliquée que dans le cas de la sphère. Il a été publié en Allemagne une table des valeurs de cette fonction; elle a été reproduite en France par M. Caillet. Elle suppose un aplatissement de $\frac{1}{303}$.

La différence entre les valeurs des fonctions $\Phi(l)$ et $\varphi(l)$ peut donner jusqu'à 23' d'erreur (Voy. le *Cours de Navigation* de M. Dubois). Cependant, comme, dans les applications, on n'a le plus souvent à considérer que des différences de latitudes croissantes pour des points dont les latitudes sont elles-mêmes peu différentes, les marins préfèrent s'en tenir à l'hypothèse d'un globe terrestre sphérique. Les moyens d'observation dont ils disposent et l'incertitude qui règne encore sur l'exacte FIGURE DE LA TERRE (Voy. ce mot) rendraient d'ailleurs illusoire la prétention d'arriver à une approximation plus grande en ayant égard à la forme elliptique du méridien.

LUCARNE, petite construction en charpente destinée à recouvrir une ouverture pratiquée dans un comble, et qui a pour objet de permettre plus facilement la vue au dehors. Elle se compose ordinairement de deux *joues* verticales en pans de bois, supportant un petit toit à deux égouts. Les chevrons qui portent les joues de la lucarne doivent être un peu plus forts que les autres. Le toit de la lucarne s'unit au comble d'après les mêmes principes que pour un toit de plus grandes dimensions (Voy. NOUË). La lucarne se termine sur le devant par un châssis dormant auquel on peut adapter une fenêtre ou des volets. Les lucarnes de grandes dimensions construites d'après ces principes portent le nom de *mansardes*. On peut aussi donner une petite *croupe* (Voy. ce mot) au toit de la lucarne.

Quelquefois, pour le service d'un grenier, on donne à la lucarne une certaine saillie en prolongeant au dehors les solives du plancher; on peut alors soutenir le toit par des joues jusqu'à l'aplomb du mur de face, et au delà par des consoles. On peut donner à la saillie la forme demi-circulaire, et remplacer la croupe par un toit conique.

Parfois aussi, on donne au toit seul une saillie que l'on soutient au moyen d'une construction du genre de celles qui portent le nom de GUITARE (Voy. ce mot).

Les lucarnes reçoivent des formes très-diverses selon le goût de l'architecte. On en trouvera de nombreux exemples dans le *Traité de l'art de la charpente* de M. Émy.

LUMIÈRES, orifices par lesquelles la vapeur passe de la boîte à vapeur dans le cylindre, ou du cylindre dans le condenseur. (Voy. DISTRIBUTION, MACHINES A VAPEUR.)

LUNAISON, durée de la révolution synodique de la lune, ou intervalle de temps compris entre deux conjonctions consécutives; il est de 29^d 12^h 44^m 2^s.9. (Voy. LUNE, PHASES.)

LUNE, satellite de la terre; globe céleste qui nous éclaire pendant la nuit, et qui se présente à nous sous des formes variables appelées PHASES (Voy. ce mot). Ces phases obligent, comme on va le voir, à observer avant tout le diamètre apparent de

la lune; or, cette observation peut presque toujours être faite, quoiqu'on ne puisse pas toujours apercevoir les bords opposés du disque. Lorsqu'en effet le disque lunaire se réduit à un mince croissant AMB (fig. 1), les cornes A et B de ce croissant sont

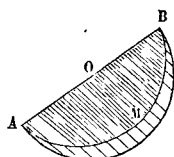


Fig. 1.

les extrémités d'un même diamètre; la distance angulaire de ces cornes donne donc le diamètre apparent. Ce diamètre varie de 33' 32", à 28' 48"; sa valeur moyenne est 31' 10". Cette valeur convertie en temps, à raison de 15 degrés par

heure, donne 2^m 4^s, 6 pour le temps que le disque lunaire emploierait à traverser le méridien en vertu du mouvement diurne. Cela posé, pour obtenir l'ascension droite du centre de la lune, on observe l'ascension droite de l'un de ses bords; si c'est le bord oriental qui a été observé, on ajoute 1^m 2^s, 3 au temps obtenu; si c'est le bord occidental, on retranche au contraire 1^m 2^s, 3. De même, pour obtenir la déclinaison du centre de la lune, on observe la déclinaison de son bord inférieur ou de son bord supérieur; si c'est le bord inférieur qui a été observé, on ajoute le demi-diamètre apparent, on le retranche au contraire si c'est le bord supérieur qui a pu être observé directement.

La déclinaison obtenue doit être corrigée de la RÉFRACTION et de la PARALLAXE (Voy. ces mots). La parallaxe horizontale de la lune, rapportée au rayon de l'équateur, varie entre 53' 53" et 61' 27"; sa valeur moyenne est 57' 40". La parallaxe horizontale varie d'un point de la surface du globe à l'autre, en sens inverse du rayon qui aboutit à ce point; à Paris, sa valeur moyenne est 57' 33", 5. Connaissant la parallaxe horizontale, on en déduit la parallaxe de hauteur (Voy. PARALLAXE).

Si chaque jour, au moment où la lune passe au méridien, on observe son ascension droite et sa déclinaison, et qu'à l'aide de ces coordonnées on marque sa position sur un globe, on trouve qu'au bout de 27 jours environ, cet astre a fait le tour de la sphère, en sens inverse du mouvement diurne, et en suivant une courbe qui diffère peu d'un grand cercle; mais si l'on opère de la même manière pour des périodes successives de 27 jours, on reconnaît que ce grand cercle varie, et qu'il semble tourner d'un mouvement uniforme autour de l'axe de l'écliptique, en faisant avec le plan de celui-ci un angle de 5° 8' 47", 9. Les points où l'orbite de la lune coupe l'écliptique se nomment les *nœuds* de cette orbite; le nœud *ascendant* correspond à l'époque où la lune passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal, et le nœud *descendant* correspond au contraire à l'époque où la lune passe de l'hémisphère boréal dans l'hémisphère austral. Ces nœuds ont sur l'écliptique un mouvement uniforme de sens contraire à celui de la lune dans son orbite, et auquel on donne le nom de *rétrogradation des nœuds*. Ils font le tour de l'écliptique en 18 ans $\frac{2}{3}$,

ou plus exactement en 6793¹/₃₉. Ce phénomène est analogue à celui qui porte le nom de PRÉCESSION DES ÉQUINOXES (Voy. ce mot), et il se lie au phénomène connu sous le nom de NUTATION de l'axe de la terre (Voy. ce mot).

L'analogie est complétée par une nutation de l'axe de l'orbite lunaire. Le plan de cette orbite ne fait pas un angle constant avec le plan de l'écliptique; le nombre 5° 8' 47", 9 n'est que la valeur moyenne de cet angle; il s'en écarte de 8' 47" en plus ou en moins dans le temps employé par la lune à faire une révolution; il atteint sa valeur maximum à l'époque des *quadratures*, c'est-à-dire lorsque les longitudes du soleil et de la lune diffèrent de 90 degrés; et son minimum dans les *syzygies*, c'est-à-dire lorsque le soleil et la lune ont des longitudes égales ou différant de 180 degrés. On peut se représenter l'axe de l'orbite lunaire comme décrivant, d'un mouvement uniforme, un cône circulaire autour de sa position moyenne, tandis que celle-ci décrit elle-même, d'un mouvement uniforme, un cône circulaire autour de l'axe de l'écliptique. A ces notions on peut ajouter que le mouvement de rétrogradation des nœuds n'est pas rigoureusement uniforme, mais qu'on peut le regarder comme résultant d'un mouvement uniforme et d'un mouvement oscillatoire autour de la position moyenne due à ce mouvement uniforme. Ces diverses particularités du mouvement de l'orbite lunaire ont été découvertes par Tycho-Brahé.

La connaissance de la parallaxe de la lune a permis de déterminer sa distance à la terre (Voy. PARALLAXE); elle a été trouvée de 60 fois environ le rayon terrestre. Le rapport exact de cette distance au rayon équatorial terrestre est, en moyenne, 60,67 (l'Annuaire de 1865 donne 60,273); il varie entre 57,34 et 64,00.

L'observation du diamètre apparent de la lune permet de déterminer la distance de cet astre à la terre pour une position donnée de cet astre lorsqu'on connaît la distance correspondante à une autre position (Voy. DIAMÈTRE APPARENT). Mais il faut pour cela tenir compte des variations que le diamètre apparent de la lune éprouve par l'effet du mouvement diurne. Lorsque la lune est au zénith, elle est plus près de l'observateur que lorsqu'elle se trouve à l'horizon, et la différence est précisément le rayon terrestre, ou $\frac{1}{60}$ environ de la distance de

l'astre à la terre; le diamètre apparent de la lune dans ces deux positions varie dans un rapport inverse. Pour rendre les observations immédiatement comparables, on peut les rapporter au centre de la terre; si AZ (fig. 2) est la verticale du lieu A du

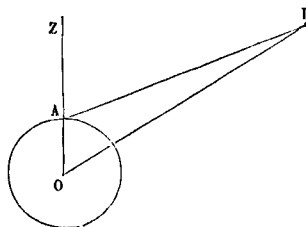


Fig. 2.

globe, L la position de la lune, O le centre de la terre, on connaît dans le triangle AOL, l'angle en A, supplément de la distance zénithale de l'astre, et l'angle en L, ou la *parallaxe de hauteur*, laquelle se déduit aisément de la parallaxe horizontale; on

connaît donc le rapport des distances AL et OL; or ce rapport est l'inverse de celui qui existe entre le diamètre apparent observé du point A, et le diamètre apparent qu'on observerait du point O; il est donc facile d'en déduire ce dernier.

La détermination des distances de la lune à la terre dans ses diverses positions a fait voir que son orbite n'est point un cercle, mais qu'elle se rapproche d'une ellipse dont la terre occuperait un des foyers. Le mouvement de la lune sur cette orbite est soumis à la loi des aires (Voy. Lois de KÉPLER); mais ce mouvement s'accélère de siècle en siècle, et il se complique d'un grand nombre d'inégalités, dont les principales sont l'équation du centre, l'évection, la variation, l'équation annuelle (Voy. ces mots). Les tables de la lune ne contiennent pas moins de 60 inégalités ou équations qui entrent dans le calcul de la position de cet astre à une époque donnée; et, malgré la perfection de ces tables, l'erreur peut s'élever encore jusqu'à 15".

Les éléments de l'orbite lunaire sont au nombre de 7, comme pour les planètes, savoir :

- L'inclinaison de l'orbite, que l'on désigne par i ;
- La longitude du nœud ascendant..... Ω ;
- Le demi grand axe..... a ;
- L'excentricité..... e ;
- La longitude du périégée..... Π'
- La longitude de l'époque, c'est-à-dire la longitude moyenne à l'origine du temps M' ;
- La durée de la révolution sidérale..... S'

On a vu plus haut qu'on a

$$i = 5^\circ 8' 47'',9.$$

On a trouvé

$$S' = 27^j,321655 \text{ jours moyen, ou } 27^j 7^h 43^m 11^s,3.$$

On en déduit pour le moyen mouvement, ou $\frac{360^\circ}{S'}$,

la valeur $n = 13^\circ 10' 35'',03$. La valeur de Ω se déduit de l'observation, à l'instant où la latitude de la lune devient égale à zéro. Au 1^{er} janvier 1801, la valeur de Ω était $13^\circ 53' 17'',7$. Au 1^{er} janvier 1850 elle était $146^\circ 13' 40''$.

On a vu plus haut qu'en prenant pour unité le rayon équatorial terrestre, le demi grand axe de l'orbite lunaire, ou sa moyenne distance à la terre, est exprimée par 60,67; et que la plus grande distance de la lune à la terre est exprimée par 64. L'excentricité de l'orbite lunaire est donc exprimée par

$$\frac{64 - 60,67}{60,67} \text{ ou } 0,0549.$$

La longitude du périégée se déduit de l'observation de la vitesse, qui, d'après la loi des aires, est maximum à l'instant où la lune est le plus près de la terre. Au 1^{er} janvier 1801, cette longitude était $266^\circ 10' 7'',5$. Au 1^{er} janvier 1850 elle était $99^\circ 51' 52'',1$.

La longitude moyenne au 1^{er} janvier 1801 était $118^\circ 12' 8'',3$. Au 1^{er} janvier 1850 elle était $122^\circ 59' 55''$.

On en déduirait la longitude moyenne au bout du temps t , compté à partir de cette époque, en ajoutant le produit nt du moyen mouvement par le nombre de jours écoulés.

On dit que la lune est en *conjonction* avec le soleil lorsque les deux astres ont même longitude. L'intervalle de temps compris entre deux conjon-

tions consécutives est ce que l'on appelle la *révolution synodique* de la lune; la durée de cette révolution est plus longue que celle de la révolution sidérale, attendu que, pendant que la lune fait le tour de la sphère pour revenir à une même étoile, le soleil a marché sur la sphère dans le même sens; la durée de la révolution synodique est $29^j,530589$ ou $29^j 12^h 44^m 2^s,9$ (jours moyens). Cette durée, qui excède peu $29^j \frac{1}{2}$, est ce qu'on appelle une *lunaison*. L'âge de la lune est le nombre de jours écoulés depuis la dernière conjonction. (Voy. ÉPACTE.)

On distingue trois autres espèces de révolutions lunaires : la *révolution tropique* est la durée du retour de la lune à un même équinoxe; elle est de $27^j 7^h 43^m 4^s,7$. La *révolution anomalistique* est la durée du retour de la lune au périégée; elle est de $27^j 13^h 18^m 37^s,4$; elle excède la révolution sidérale, parce que le périégée a un mouvement dans le même sens que celui de la lune, et en vertu duquel il fait le tour du ciel en $3232^j,57$. Enfin on appelle *révolution draconitique* l'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs de la lune au même nœud; elle est de $27^j,21$.

L'observation des taches que présente le disque de la lune montre que, dans son mouvement autour de la terre, cet astre tourne toujours vers nous la même face; on en a conclu qu'indépendamment de son mouvement de translation autour de notre globe, la lune est animée d'un mouvement de rotation autour d'un certain axe peu incliné sur le plan de son orbite, et que cette rotation s'exécute dans un temps précisément égal à celui que la lune emploie à parcourir cette orbite. Mais, d'une part, le mouvement de rotation est uniforme, tandis que le mouvement de translation ne l'est pas; en second lieu, l'axe de rotation n'est point perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire; il fait avec cette perpendiculaire un angle de $6^\circ 37' 33''$, et est situé dans un plan perpendiculaire à la ligne des nœuds. Il résulte de ces deux circonstances, combinées avec le mouvement diurne, divers déplacements apparents des taches auxquels on donne le nom de *LIBRATIONS* (Voy. ce mot).

Le rayon de la lune se déduit aisément de sa parallaxe et de son diamètre apparent. Soient T et L (fig. 3) les centres de la terre et de la lune; AL et BT des tangentes, AT et BL les rayons menés aux points de contact; posons

$$\alpha = \text{BTL} \text{ et } \beta = \text{ALT};$$

soit d la distance TL, et soient

$$AT = R \quad \text{et} \quad BL = r.$$

On aura

$$r = d \sin \alpha \quad \text{et} \quad R = d \sin \beta,$$

d'où

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

en prenant le rapport des arcs pour celui des sinus, ce qui est permis, attendu la petitesse de ces arcs. Or α est le demi-diamètre apparent de la lune et β est la parallaxe; on aura donc, en prenant les valeurs correspon-

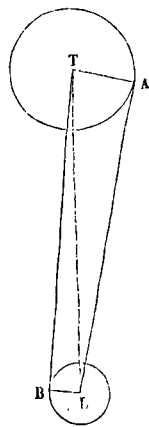


Fig. 3.

dantes à la distance moyenne de la lune à la terre,

$$\alpha = \frac{1}{2} (31' 10'') = 15' 35'' = 935'',$$

$$\beta = 57' 40'' = 3460'',$$

par conséquent

$$\frac{r}{R} = \frac{935}{3460}, \text{ ou environ } \frac{3}{11}.$$

Le rapport des surfaces est le carré de cette fraction, ou un peu plus de $\frac{1}{14}$; le rapport des volumes

est le cube de $\frac{3}{11}$, ou à peu près $\frac{1}{49}$.

Par des considérations tirées de la GRAVITATION UNIVERSELLE (*Voy. ce mot*), on a pu déterminer le rapport de la masse de la lune à celle de la terre; on a trouvé que cette dernière étant représentée par 1, celle de la lune est représentée par $\frac{1}{88}$. Le rapport des masses étant égal au rap-

port des volumes multipliés par le rapport des densités, en appelant x ce dernier rapport on devra avoir $\frac{1}{88} = \frac{1}{49} x$, d'où $x = \frac{49}{88}$, ou à très-peu près $\frac{5}{9}$; c'est-à-dire que la densité moyenne de la lune est à peu près les $\frac{5}{9}$ de celle de la terre (densité 3,30: celle du cristal).

Le disque de la lune est sensiblement circulaire, et les mesures les plus précises n'ont pu constater aucun aplatissement. La lumière que la lune nous envoie est une lumière réfléchie, comme le démontrent, d'une part les phases, et de l'autre la position à peu près constante des taches. La lune n'a point d'atmosphère; on remarque, en effet, que les étoiles occultées par le disque lunaire disparaissent instantanément et reparaissent de même, et l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux phénomènes est précisément égal à celui qu'un mobile, animé de la vitesse de la lune dans son orbite à l'époque de l'observation, emploierait à parcourir sur le disque de la lune, supposé immobile sur la sphère céleste, la corde que déterminent les points d'occultation et de réapparition.

Il en serait tout autrement si la lune était environnée d'une atmosphère; par l'effet de la réfraction qui aurait lieu dans cette atmosphère, l'étoile occultée resterait visible plus tard et réapparaîtrait plus tôt. — La lune n'ayant point d'atmosphère, il ne peut y avoir de liquides à sa surface; ce qui exclut l'idée d'une végétation semblable à celle de la terre, ou d'animaux organisés comme ceux qui vivent à la surface de notre globe. La lune est donc vraisemblablement un corps solide; sa surface offre de nombreuses aspérités, et particulièrement des montagnes circulaires analogues à ce que les géologues appellent des cratères de soulèvement et dont quelques-unes ont jusqu'à 90 000 mètres de diamètre. La hauteur des principales montagnes de la lune a pu être déterminée d'après la longueur de l'ombre qu'elles projettent; voici par quelle méthode. Concevons pour plus de simplicité que l'on soit au premier quartier (*Voy. PHASES*), et qu'en conséquence une moitié seulement du disque lunaire soit éclairée; la partie obscure est séparée de la partie lumineuse par un grand cercle PQ (fig. 4) dont le plan est perpendiculaire à la direction

des rayons émanés du soleil. Soit S le sommet d'une montagne lunaire, et T le point où le rayon lumineux rasant le sommet S vient rencontrer la surface de la lune; par le rayon ST et par le centre O de la lune, concevons un plan MN; menons les droites OS, OT, et prolongeons ST qui, étant perpendiculaire au plan PQ sera également perpendiculaire à la trace OA de ce plan sur le plan MN. Par des mesures micro-

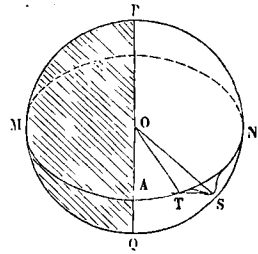


Fig. 4.

métriques on peut déterminer les arcs sous-tendus dans le ciel par les droites ST et TA, et en les comparant au demi-diamètre apparent, on aura le rapport de ces droites au rayon. Dans le triangle OAT on pourra donc déterminer l'angle OTA; par suite, on aura son supplément OTS; dans le triangle OTS on connaîtra donc deux côtés OT, TS, et l'angle compris; on pourra donc calculer le troisième côté OS; et, en retranchant le rayon, on aura la hauteur du sommet S au-dessus de la surface de la lune. On a trouvé ainsi que plus de 20 montagnes de la lune surpassent la hauteur du mont Blanc (4800 mètres); et que quelques-unes atteignent et surpassent 7000 mètres; la plus haute, parmi celles qui ont été mesurées, a 7603 mètres. — Il existe des cartes très-détaillées de la lune, notamment celle d'Hévelius, et celle de MM. W. Beer et Mædler (*Voy. SÉLÉNOGRAPHIE*).

Les mouvements de la lune et de la terre par rapport au soleil donnent lieu au phénomène des ÉCLIPSES (*Voy. ce mot*). L'étude approfondie du mouvement de la lune offre le moyen le plus précis de déterminer les LONGITUDES (*Voy. ce mot*). Les astronomes et les géomètres qui ont le plus contribué à perfectionner la théorie de la lune, et à la traduire en tables, sont Halley, Flamsteed, Euler, Clairaut, Dalember, Tobie Mayer, Burg, Burckhardt, et, dans ces derniers temps, MM Damoiseau, Pontécoulant, Plana, Hansen, Adams, Delaunay. Les tables dont on se sert le plus généralement sont celles de M. Hansen.

LUNETTE (Géodésie), instrument d'optique qui sert à observer les objets placés à de grandes distances.

La lunette astronomique la plus simple (fig. 1) se compose de trois parties adaptées à des tubes ABA'B', CDC'D', efe'f' qui entrent l'un dans l'autre à frottement doux. Le premier tube porte à son extrémité une lentille convergente Ω (*Voy. LENTILLE*), que l'on dirige vers l'objet à observer, et que, pour cette raison, l'on désigne sous le nom d'objectif. Le dernier tube efe'f' porte vers son extrémité une seconde lentille convergente plus petite et près de laquelle on place l'œil; elle a reçu le nom d'oculaire. Le tube intermédiaire CDC'D' porte un diaphragme dans lequel on peut faire mouvoir, à l'aide d'une vis V, un petit châssis muni de deux fils très-fins ordinairement croisés à angle droit, et que l'on nomme le RÉTICULE. (*Voy. ce mot*.) Le point où les deux fils se croisent est ce que l'on nomme la croisee

des fils. — Les rayons lumineux partis de l'objet, après s'être réfractés en traversant l'objectif, vont former au foyer de cette lentille une image réelle et renversée que l'on regarde avec l'oculaire comme

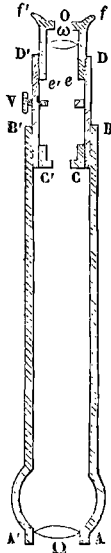


Fig. 1.

avec la croisée des fils, ce qui n'aurait pas lieu si cette image était dans un plan différent de celui du réticule.

On appelle **AXE OPTIQUE** (Voy. ce mot) de la lunette, la droite qui joint la croisée des fils au centre optique de l'objectif. Il ne faut pas confondre cet axe avec l'axe de figure de la lunette, non plus qu'avec la droite qui joint les centres optiques des deux lentilles, quoique ces trois droites diffèrent ordinairement très-peu. C'est l'axe optique que l'on dirige vers l'objet à observer; et cette condition est remplie lorsque l'image de l'objet coïncide avec la croisée des fils; car les deux foyers conjugués et le centre optique de la lentille sont nécessairement en ligne droite. L'axe optique est aussi connu sous le nom de *ligne de visée* ou de *ligne de collimation*.

Comme les objets qu'on observe sont ordinairement très-éloignés, le foyer conjugué à ces objets diffère généralement très-peu du foyer principal de l'objectif, en sorte qu'on peut, sans de grands inconvénients, rendre le réticule fixe et supprimer le tuyau intermédiaire. Mais l'emploi du porte réticule est toujours préférable; il sert d'ailleurs à raccourcir la lunette quand on veut la transporter.

Le porte-réticule est muni à son extrémité CC' d'un diaphragme dont les bords sont destinés à arrêter les rayons lumineux qui, coupant l'axe optique sous un trop grand angle, ne rencontreraient pas l'oculaire. On obtient ainsi une image plus nette; mais on diminue en même temps le *champ* de la lunette, c'est-à-dire la portion de l'espace qui peut envoyer des rayons lumineux jusqu'à l'oculaire. Cette portion de l'espace est limitée par le cône qui aurait pour base la circonférence interne du diaphragme, et pour sommet le centre optique de l'objectif. L'amplitude du champ a pour mesure le

rapport entre le diamètre de la base de ce cône et sa hauteur, c'est-à-dire entre le diamètre du diaphragme et la distance focale de l'objectif.

Le **grossissement** d'une lunette astronomique est le rapport entre le **DIAMÈTRE APPARENT** (Voy. ce mot) de l'image et celui de l'objet observé à l'œil nu. La longueur de la lunette pouvant être négligée par rapport à la distance de l'objet qu'on observe, le diamètre apparent de cet objet, vu à l'œil nu, est le même que si l'œil était placé au centre optique de l'objectif; soit ACB (fig. 2); le même par consé

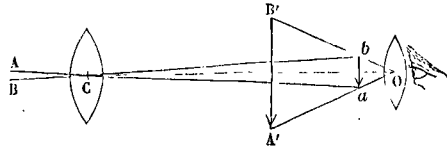


Fig. 2.

quent que celui aCb de l'image réelle formée au foyer de l'objectif, supposée vue de ce même centre optique C. En sorte que si l représente la demie-hauteur de l'image, F la distance focale de l'objectif, et α le diamètre apparent de l'objet vu à l'œil nu,

on aura
$$l = F \tan \frac{1}{2} \alpha.$$

Quant au diamètre apparent de l'image virtuelle définitive A'B', il est le même que celui aOb de l'image réelle ab vue du centre optique de l'oculaire; en sorte qu'en appelant f la distance focale de l'oculaire et β le diamètre apparent de l'image définitive, on aura

$$l = f \tan \frac{1}{2} \beta.$$

De ces deux relations on déduit

$$\frac{\tan \frac{1}{2} \beta}{\tan \frac{1}{2} \alpha} = \frac{F}{f};$$

ou, en remplaçant les tangentes par les arcs, et supprimant le facteur $\frac{1}{2}$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{F}{f},$$

c'est-à-dire que le grossissement de la lunette est le rapport entre les distances focales de l'objectif et de l'oculaire.

Il résulte de là qu'on peut obtenir le même grossissement avec des objectifs de grandeurs très-différentes; mais on leur donne ordinairement le plus grand diamètre possible, parce que, à grossissement égal, la clarté de l'image est proportionnelle à la surface de l'objectif. M. Lerebours a construit en France un objectif achromatique (Voy. LENTILLE) de 38 centimètres de diamètre, donnant un grossissement de 3000. — Pour obtenir de pareils grossissements, il faut employer des oculaires dont la distance focale n'est que de quelques millimètres; mais alors le champ de la lunette est très-restreint, et les astres, à cause de leur mouvement diurne, n'y restent pas assez longtemps pour être convenablement observés. Pour remédier à cet inconvénient, on fait mouvoir la lunette elle-même, à l'aide d'un mécanisme d'horlogerie, d'un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à celui du globe,

et avec une vitesse angulaire égale à celle du mouvement diurne. On maintient ainsi l'astre dans le champ de la lunette aussi longtemps qu'il est nécessaire pour l'observation. Une lunette ainsi montée porte le nom de *lunette parallatique*.

Les grandes lunettes astronomiques sont ordinairement munies d'une lunette plus petite, établie sur le côté, et dont on rend l'axe optique parallèle à celui de la lunette principale. Cette petite lunette, destinée à faciliter le pointé de la grande, est ce que l'on appelle un *chercheur*.

Une bonne lunette doit être exempte de deux défauts qui malheureusement s'y rencontrent assez souvent, savoir : l'*aberration de sphéricité* qui tient à ce que les courbures de l'objectif ne sont pas exactement en rapport avec son ouverture, et l'*aberration de réfrangibilité* qui tient à l'inégale réfrangibilité des rayons diversement colorés. — Pour s'assurer qu'une lunette n'a pas le premier de ces deux défauts, on la met au point sur les taches de la lune, par exemple, et l'on amène l'image vers les bords du champ ; elle doit conserver sa forme et sa netteté. On peut encore poser au centre de l'objectif des disques de papier de plus en plus grands ; l'image va en s'affaiblissant, mais elle ne doit pas cesser d'être nette. — On fait disparaître en partie l'aberration de sphéricité en plaçant un diaphragme près de l'objectif ; mais les images en devenant plus nettes perdent de leur éclat.

L'aberration de réfrangibilité est corrigée dans les lunettes *achromatiques*. Pour s'assurer qu'une lunette n'a pas ce défaut, on la met au point sur un cercle blanc ; si l'on enfonce l'oculaire, l'image doit alors se colorer en rouge verdâtre ; si l'on retire au contraire l'oculaire, elle doit se colorer en violet pourpre.

Une lunette est souvent mobile autour d'un axe horizontal de manière que son axe optique décrive un plan perpendiculaire à cet axe. Il faut ordinairement alors que l'un des fils du réticule demeure dans ce plan. On s'assure que cette condition est remplie en visant un point éloigné de manière qu'il soit couvert par le fil dont il s'agit ; en faisant mouvoir la lunette autour de son axe, le fil ne doit pas cesser de couvrir le point visé. Dans le cas contraire, on fait tourner le porte-réticule autour de son axe de manière à obtenir le résultat désiré.

Après la lunette astronomique, la lunette la plus simple est la *lunette de Galilée*. Dans cet instrument, l'oculaire, au lieu d'être convergent, est une lentille divergente placée un peu en avant du foyer de l'objectif, d'une quantité égale à sa propre distance focale. Les rayons émanés de l'objet, et rendus convergents par l'objectif, rencontrant l'oculaire avant leur réunion au foyer, deviennent divergents ;

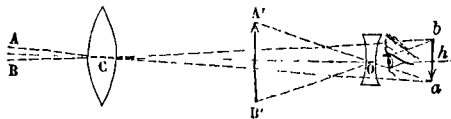


Fig. 3.

mais la divergence est réglée de manière à correspondre à la vue distincte (*Voy. VISION*) ; en sorte que ces rayons, qui auraient produit une image réelle et renversée *ab* (fig. 3), donnent lieu à une image

virtuelle et droite *A'B'*. — Le grossissement peut s'obtenir comme dans la lunette astronomique. Le diamètre apparent de l'objet vu à l'œil nu est *ACB*, en négligeant la longueur de la lunette, ou, ce qui revient au même, *aCb*. Le diamètre apparent de l'image *A'B'* est *A'OB'* ou *aOb* ; on aura donc, comme ci-dessus :

$$\frac{A'OB'}{ACB} = \frac{aOb}{aCb} = \frac{Ch}{Oh} = \frac{F}{f'}$$

c'est-à-dire que le grossissement doit être calculé d'après la même règle que pour la lunette astronomique. La lunette de Galilée, outre l'avantage qu'elle offre de redresser les images, ce qui est souvent important dans les observations terrestres, a encore celui d'occuper moins de longueur.

Il est rare que les lunettes soient aussi simples que celles que nous venons de décrire ; cependant, dans beaucoup d'instruments de Géodésie, tels que le graphomètre, la boussole, etc., les lunettes sont à objectif et à oculaire simples, convergents, et elles renversent les objets. Mais, dans la plupart des cas, la construction des lunettes est plus compliquée, particulièrement en ce qui concerne l'oculaire ; le but qu'on se propose est, d'une part, de compléter l'achromatisme, en faisant en sorte que l'aberration de réfrangibilité soit combattue et à peu près compensée par l'aberration de sphéricité ; d'autre part, on a en vue d'agrandir le *champ* de la lunette. Dans les lunettes astronomiques, on compose souvent l'oculaire de deux lentilles plan-convexes, ayant même distance focale, placées les faces courbes en regard, au delà du foyer de l'objectif. Dans les lunettes terrestres, l'oculaire est composé ou de trois lentilles biconvexes, ou de quatre lentilles plan-convexes, etc. ; on fait usage à cet égard de combinaisons très-variées que nous ne saurions énumérer ici.

On emploie dans les observations des lunettes à collets carrés appelées *LUNETTES D'ÉPREUVE*. (*Voy. CERCLE MURAL* ; *voy.* aussi l'art. *COLLIMATEURS*.)

LUNETTE (Coupe des pierres), ouverture que produit un *BERCEAU* (*Voy.* ce mot) en pénétrant dans une voûte plus élevée. La courbe qui limite cette ouverture porte le nom d'*arétier* ; c'est ordinairement une courbe à double courbure. On distingue ordinairement trois cas principaux : celui où le berceau pénètre dans un autre berceau, celui où il pénètre dans une voûte annulaire, ou *BERCEAU TOURNANT* (*Voy.* ce mot), enfin celui où il pénètre dans une voûte sphérique (*Voy.* ce mot). La lunette est dite *droite* lorsque, dans le premier cas, son axe est perpendiculaire à celui de la voûte cylindrique, ou lorsque, dans les deux autres, son axe rencontre l'axe vertical de la surface de révolution. Si ces conditions ne sont pas remplies, on dit que la lunette est *biaise*. Pour plus de généralité, nous supposons qu'il s'agit d'une lunette biaise ; on apercevra aisément les simplifications qui se présenteraient si la lunette était droite.

LUNETTE BIAISE DANS UN BERCEAU. Soit *O'O'O'* (fig. 1) l'axe de la lunette, et *OZ* l'axe du berceau principal, qui se rencontrent en *o* sous un angle θ quelconque, différent d'un angle droit. Soient *a'a''* et *f'f''* les lignes de naissance du petit berceau, et *A'A''* l'une des lignes de naissance du grand. Soit *abcdef* la section droite du petit berceau, rabattue sur le plan de naissance avec le tracé de

son appareil; soit de même ABCD... la section droite du grand berceau, rabattue sur le même plan, avec l'appareil qui s'y rapporte. De la section droite du petit berceau, on commencera par déduire sa section $a'b'c'd'f'$ par un plan vertical XY parallèle à Af'' (Voy. BERCEAU). On cherchera ensuite la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces cylindriques. Pour cela, on mènera une série de plans horizontaux auxiliaires; chacun d'eux coupera les deux cylindres suivant des génératrices dont l'intersection déterminera autant de points de la courbe que l'on cherche. Par le point d' , par exemple, on mènera une parallèle à XY jusqu'à la rencontre du prolongement IH de LT en un point 1; on ramènera ce point sur XY au point 2 par un arc de cercle décrit du point I comme centre; et par

le point 2 on mènera une parallèle à LT; elle rencontrera la courbe d'intrados ABCD en un point 3, qui, supposé relevé, sera à la même hauteur que le point d' au-dessus du plan de naissance; si donc on mène par le point d' une génératrice du petit berceau, et par le point 3 une génératrice du grand, elles se rencontreront en un point d'' qui sera un point de la projection horizontale de l'arête. On en obtiendra de la même manière autant qu'on voudra, et l'on pourra tracer la courbe $a''b''c''d''f''$.

On démontre aisément par le calcul que cette courbe est une hyperbole qui, lorsque les sections droites des deux berceaux sont des cercles, a pour asymptotes les bissectrices des angles $O''\omega O$ et $O''\omega Z$, et est par conséquent équilatère. En effet, si R est le rayon OA, r le rayon oa , en prenant pour axes

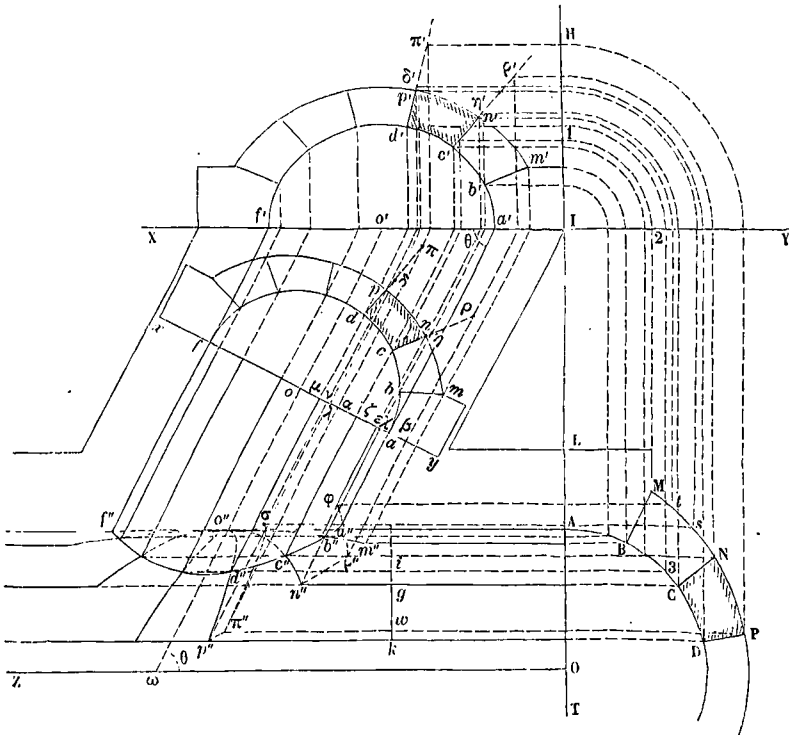


Fig. 1.

des x et des y les droites $\omega O''$ et ωO , et pour axe des z la verticale du point ω , on aura pour l'équation du petit berceau

$$\frac{z^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{\sin \theta}\right)^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 \sin^2 \theta = r^2,$$

et pour l'équation du grand berceau

$$z^2 + x^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

De ces deux relations on déduit

$$y^2 - x^2 = -\frac{R^2 - r^2}{\sin^2 \theta},$$

équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont représentées par $y = \pm x$, ce qui démontre la proposition. Cette remarque permettra de tracer la courbe avec plus d'exactitude.

Il faut, en second lieu, chercher l'intersection des joints du petit berceau avec la voûte principale. Considérons en particulier le joint dp ; il coupe la douelle du grand berceau suivant un arc d'ellipse, dont la projection horizontale sera elle-même un arc d'ellipse ayant une de ses extrémités en d'' . Pour avoir l'autre extrémité, on cherchera sur $d'p'$ un point d'' à la même hauteur que le point D; la figure montre suffisamment comment ce point peut être obtenu; par les points d' et D on mènera deux droites respectivement parallèles aux génératrices des deux cylindres; elles se couperont en un point dont la projection horizontale est p'' ; c'est l'extrémité de l'arc considéré, car l'intersection du joint avec la douelle du grand berceau ne saurait être prolongée au delà de l'arête de douelle correspon-

dante au point D. On se procurera des points intermédiaires sur l'arc $d''p''$ en se servant de plans horizontaux intermédiaires. On obtiendra de la même manière les projections horizontales des arcs d'ellipses suivant lesquels la voûte principale est coupée par les joints du petit berceau. Toutes les ellipses auxquelles les arcs obtenus appartiennent, ont pour diamètre commun la droite $O''\omega$, et le point O'' est un point de chacune d'elles.

Le joint dp rencontre le joint DP suivant une droite, dont une extrémité est projetée en p'' . Pour avoir la projection de l'autre extrémité, on cherchera sur le prolongement de $d''p''$ un point π'' qui soit à la même hauteur que P; la figure montre comment on l'obtiendra. Par les points π'' et P on mènera, comme ci-dessus, des droites respectivement parallèles aux génératrices des deux cylindres; elles se rencontreront en un point dont la projection horizontale π'' sera l'extrémité cherchée, et l'on joindra $p''\pi''$.

Le même joint dp rencontre l'extrados de la voûte principale, si cet extrados est à base circulaire ou elliptique, l'intersection est un arc d'ellipse, qui se projette suivant un autre arc d'ellipse, ayant l'une de ses extrémités en π'' . On obtiendra l'autre extrémité en déterminant sur la courbe d'extrados MNP un point s qui soit à la même hauteur que l'extrémité supérieure p' du joint considéré. Par les points p' et s on mènera encore deux droites respectivement parallèles aux génératrices des deux cylindres; elles se rencontreront en un point dont la projection horizontale σ sera l'extrémité cherchée. A l'aide de plans horizontaux intermédiaires on pourra se procurer autant de points que l'on voudra sur l'arc $\pi''\sigma$.

Enfin le joint dp rencontre l'extrados du petit berceau suivant une génératrice qui se projette suivant $\sigma\nu$; il rencontre d'ailleurs la douelle du même berceau suivant la génératrice projetée en $d''\mu$. D'ailleurs le joint sera limité par un certain plan vertical dont la trace est $\mu\nu$, et qui sert de joint montant, et sépare le voussoir considéré de celui qui le suit dans la même assise. La projection du joint dont on vient de s'occuper sera donc la figure $\mu d''p''\pi''\sigma\nu$. On obtiendra de la même manière la projection $\zeta c''n''\rho''\varphi\epsilon$ du joint suivant, et celle de tous les autres

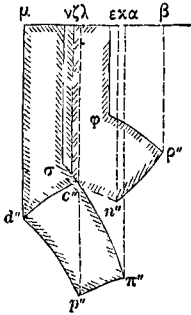


Fig. 2.

Il faut maintenant se procurer le développement des douelles du petit berceau, et les panneaux de joint correspondants à chaque douelle. Supposons qu'il s'agisse de la douelle cd et des joints dp et cn . On commencera par reporter les points d' et π' en δ et π sur le joint dp et sur son prolongement, à la même hauteur au-dessus du plan de naissance. On reportera de même les points c' et η' en ρ et η . Cela fait, sur une droite indéfinie, on portera

(fig. 2) les longueurs : $\mu\zeta$ égale à l'arc cd développé, $\mu\nu = dp$, $\mu\lambda = d\delta$, $\mu\alpha = d\pi$, $\zeta\epsilon = cn$, $\zeta\zeta' = c\eta$, $\zeta\beta = c\rho$. Aux points μ , λ , ν , ζ , χ , ϵ , α , β on élèvera des perpendiculaires respectivement égales

aux distances correspondantes de la figure 1. On joindra $p''\pi''$ et $n''\rho''$ par des droites, $d''p''$, $\pi''\sigma$, $c''n''$, $\rho''\varphi$ par des arcs d'ellipses dont on pourra déterminer des points intermédiaires, comme il a été expliqué ci-dessus. On aura ainsi en $\mu d''c''\zeta$ le développement du panneau de douelle, et en $\mu d''p''\pi''\sigma\nu$ d'une part, et en $\zeta c''n''\rho''\varphi\epsilon$ de l'autre les deux panneaux de joint. On opérera de la même manière pour les autres voussoirs.

On aura alors tous les éléments nécessaires pour appliquer le trait sur la pierre. Supposons que l'on veuille tailler le voussoir qui a pour panneaux de tête $cdpn$ dans le petit berceau et CDPN dans le grand, et qui est projeté horizontalement suivant le contour $\mu d''p''k i \rho''\varphi\epsilon$; on préparera d'abord un prisme droit ayant ce contour pour base, et une hauteur égale à la différence de niveau des deux points c et P. Sur les faces verticales répondant à $\mu\epsilon$ et à ki on tracera les verticales des points ν , ζ , ω et g ; puis on appliquera sur ces faces les deux panneaux de tête $cdpn$ et CDPN, en ayant soin que le point c tombe en ζ , et les points d , p , n sur les verticales des points μ , ν et ϵ , et que, de même, le point P tombe en haut de la verticale du point ω , et les points N, C, D sur les verticales des points i , g , k . On enlèvera alors l'excédant de pierre perpendiculairement aux faces $\mu\epsilon$ et ki , et l'on poussera les surfaces ainsi obtenues jusqu'à ce qu'on puisse appliquer sur la douelle et sur les deux faces de joint, les panneaux de la figure 2. On pourra alors tracer sur ces surfaces l'arc $d''c''$ de l'arêtier, les arcs d'ellipses $d''p''$, $\sigma\pi''$, $c''n''$, $\rho''\varphi$, et les droites $p''\pi''$ et $n''\rho''$. Il sera facile alors de tailler la douelle du grand berceau, puisqu'on aura deux directrices $d''p''$ et CD de cette surface, et que l'on pourra tracer la génératrice qui passe par les points p'' et D, et qui se trouve sur la face du prisme répondant à $p''k$. On taillera de même les deux joints plans déterminés l'un par les droites $p''\pi''$ et DP, l'autre par les droites $n''\rho''$ et CN. Quant à l'extrados on pourrait le tailler à l'aide des directrices np et NP, mais on se contente ordinairement de le dégrossir. Le voussoir ainsi obtenu aura la forme représentée par la figure 3. On y voit en $cdpn$,

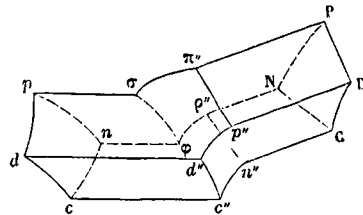


Fig. 3.

CDPN les panneaux de tête; $cd d''c''$ est la douelle du petit berceau, $Cn''c''d''p''D$ est la douelle du grand berceau, $dd''p''\pi''\sigma p$ et $cc''n''\rho''\varphi n$ sont les panneaux de joint normaux à la première douelle; $Dp''\pi''P$ et $Cn''\rho''N$ sont les joints normaux à la seconde; $c''d''$ est la portion de l'arêtier comprise dans le voussoir; $\sigma\varphi$ représente l'intersection des deux extrados. On opérerait d'une manière analogue pour obtenir un autre voussoir contenant une portion de l'arêtier. Quant aux autres, ils se tailleront comme pour un berceau ordinaire.

Si la lunette était droite au lieu d'être biaisée, les opérations seraient les mêmes, sauf que la section $a'b'c'd'f'$ de la petite voûte en serait la section droite, ce qui simplifierait l'épure.

L'espèce de ressaut qui existe entre les points c'' et c ou entre d'' et D est assez disgracieux à l'œil; on évite ce défaut, et, en même temps, on simplifie l'épure, en divisant la section droite de la grande voûte de manière à faire coïncider les arêtes de douelles des deux berceaux, c'est-à-dire que les génératrices cc'' et Cn'' se rencontrent, ainsi que les génératrices dd'' et Dp'' , et que les arcs d'ellipses $c''n''$ et $d''p''$ sont supprimés. Si le petit berceau est à plein cintre et que sa section droite soit divisée en parties égales, les divisions correspondantes du grand berceau vont en diminuant à mesure que les assises sont plus éloignées du plan de naissance; mais, une fois arrivé à l'assise qui forme le sommet de la lunette, on conserve pour les autres assises du grand berceau la dimension de celle-ci, en sorte que l'inégalité des premières assises n'a plus rien de choquant. Dans tous les cas, lorsqu'on ne fait pas coïncider les arêtes de douelles des deux berceaux, il faut toujours faire en sorte que chaque arête de douelle du petit berceau soit un peu au-dessous de celle qui lui correspond dans le grand. S'il en était autrement, si, par exemple, le premier point de division b était au-dessus du premier point de division B , cet ordre dans les hauteurs ne se maintiendrait pas jusqu'au sommet de la lunette; il y aurait bientôt un point de division de celle-ci qui se trouverait au-dessous de son correspondant dans la grande voûte; il en résulterait que ce seraient d'abord les joints du grand berceau qui couperaient la douelle du petit suivant des arcs d'ellipse, mais qu'il viendrait un moment où ce seraient au contraire les joints du petit berceau qui couperaient la douelle de la grande voûte; ce changement serait encore plus désagréable à l'œil que les ressauts dont nous avons parlé.

LUNETTE BIAISÉE DANS UNE VÔTE ANNULAIRE. La marche est la même que dans la question précédente; la différence essentielle consiste en ce que les points de la projection horizontale, au lieu d'être obtenus par l'intersection de deux droites, se déterminent par la rencontre d'une droite et d'un arc de cercle. Soit $abcdef$ (fig. 4) la section droite du berceau, et $ABCD$ la section méridienne de la surface annulaire, dont l'axe vertical est projeté en ω . L'axe Ox du berceau ne rencontrant pas la verticale du point ω , la lunette est biaisée. Prenons, comme plus haut, pour plan horizontal de projection le plan de naissance des deux voûtes. On construira d'abord la projection horizontale de l'intersection des deux douelles. Pour cela, par la génératrice du berceau projetée verticalement en d , on imaginera un plan horizontal; il coupera la section méridienne du tore en un point 3, qu'on obtiendra en menant $d1$ parallèle à la ligne de terre XY , jusqu'à la rencontre de la verticale IH , en 1; rabattant ce point 1 sur XY par un arc de cercle 1, 2, décrit du point I comme centre, et menant 1.3 parallèle à la trace IO de la section méridienne. On projettera le point 3 sur IO en 4, et du point ω comme centre on décrira avec $\omega . 4$ pour rayon un arc de cercle, qui rencontrera en d' la perpendiculaire à XY menée par le point d ; ce

point d' sera un point de la projection horizontale de l'arétier. On en obtiendra de la même manière autant que l'on voudra, et l'on pourra tracer la courbe $a'b'c'd'f'$. Cette courbe est une courbe du quatrième degré, car si l'on prend pour axe des x la droite ωU perpendiculaire à ωI , pour axe des y la droite ωI elle-même, et pour axe des z la verticale du point ω , on aura pour l'équation du berceau

$$(x-\alpha)^2 + z^2 = r^2,$$

en appelant α la distance ωI et r le rayon oa . En désignant par ρ le rayon vecteur d'un point quelconque de la projection horizontale cherchée, c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + y^2}$, on aura pour l'équation du tore

$$(\rho - \beta)^2 + z^2 = R^2,$$

en appelant β la distance ωO et R le rayon OA . Éliminant z entre les équations de ces surfaces, on aura l'équation de la courbe $a'b'c'd'f'$; on trouve ainsi

$$(\rho - \beta)^2 - (x - \alpha)^2 = R^2 - r^2, \quad [1]$$

équation du quatrième degré quand on remplace ρ par sa valeur et que l'on fait disparaître le radical.

Pour obtenir l'intersection du joint dp avec la douelle annulaire, on déterminera sur dp le point δ qui est à la même hauteur que D au-dessus du plan de naissance; la figure montre clairement comment il faut opérer pour trouver ce point; l'extrémité de l'intersection cherchée sera à la rencontre de la parallèle à l'axe du berceau menée par le point δ avec le parallèle du tore passant par le point D ; ce qui donne le point p' . L'intersection dont il s'agit se projette donc suivant une courbe $a'p'$, dont on aura autant de points que l'on voudra en menant des plans horizontaux auxiliaires entre d et δ ; et déterminant, pour chacun d'eux, son intersection avec le joint dp et avec le tore. On obtiendra de la même manière les intersections $c'n'$, $b'm'$, etc., des autres joints avec la surface annulaire.

L'intersection du joint plan dp avec le joint conique DP est un arc d'hyperbole dont on obtiendra l'extrémité en déterminant sur le prolongement de dp le point π à la même hauteur que le point P ; l'extrémité cherchée sera à l'intersection de la parallèle à l'axe du berceau menée par le point π , avec le parallèle de l'extrados annulaire mené par le point P ; on obtiendra ainsi la projection π' de cette extrémité; et, en joignant $p'\pi'$ par une courbe, dont on aura autant de points intermédiaires qu'on voudra, on aura la projection de l'intersection des deux joints dp et DP .

Le joint dp coupe l'extrados de la voûte annulaire. On obtiendra l'extrémité de cette intersection en déterminant sur la courbe d'extrados MNP le point t qui est à la même hauteur que p ; l'extrémité cherchée sera à la rencontre de la parallèle à l'axe du berceau menée par le point p avec le parallèle de l'extrados annulaire mené par le point t ; on obtiendra ainsi le point σ pour la projection horizontale de l'extrémité cherchée. On joindra les points π' et σ par une courbe dont on obtiendra autant de points intermédiaires qu'on voudra en menant des plans horizontaux auxiliaires entre p et π .

Enfin le joint dp coupe l'extrados du berceau suivant une parallèle à son axe, qui se projette suivant la droite σv . On aura donc en $md'p'\pi'\sigma v$ la

projection horizontale du joint limité aux surfaces qu'il rencontre; $\mu\epsilon$ étant la trace du plan vertical qui forme le joint montant du berceau qui correspond au voussoir considéré. On obtiendra de la même manière la projection $\zeta c'n'\rho\epsilon$ du joint suivant, et celle de tous les autres.

On pourra dès lors se procurer les panneaux de douelle du petit berceau ainsi que ses panneaux de joint. L'opération sera exactement la même que dans le cas précédent. On aura alors les éléments

nécessaires pour tailler le voussoir. Pour cela, ki étant la trace du plan vertical qui sert de joint montant du côté de la surface annulaire, on préparera un prisme droit ayant pour base la figure $\mu, d'p'kh\rho\epsilon$, et pour hauteur la différence de niveau entre les points c et π . Sur la face correspondant à $\mu\epsilon$ on appliquera le panneau $cdpn$ de manière que c tombe en ζ , d sur la verticale du point μ et n sur la verticale du point ϵ ; on entaillera alors la pierre suivant le contour $cdpn$ et perpen-

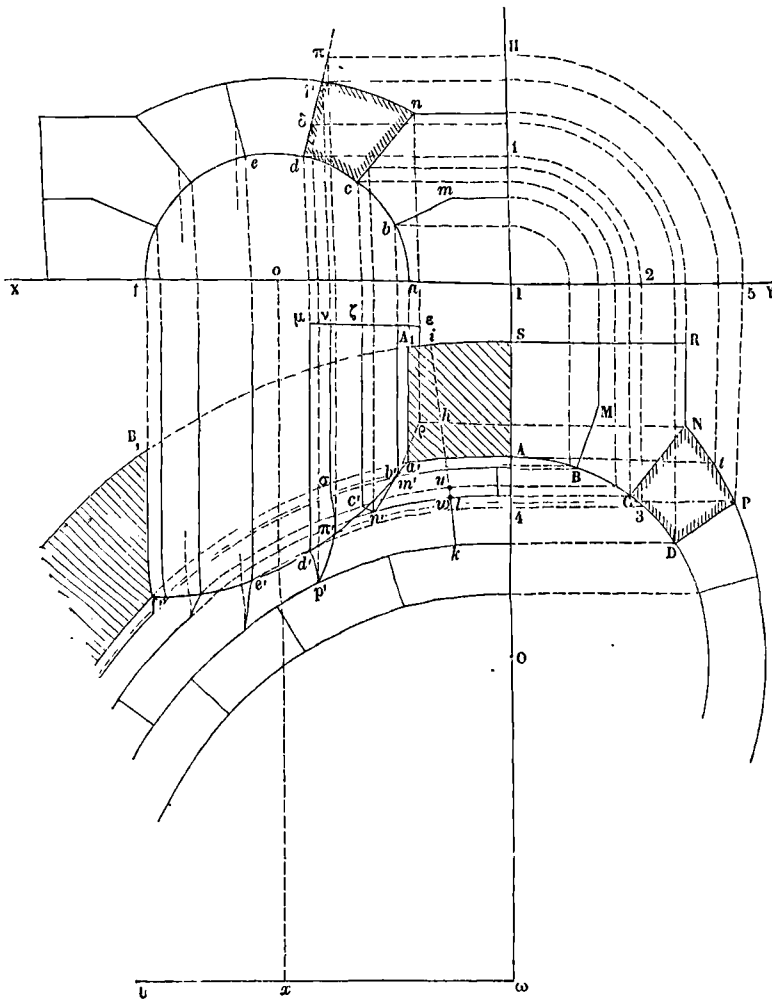


Fig. 4.

diculairement à cette face jusqu'à ce qu'on puisse appliquer le panneau de douelle correspondant à cd et les panneaux de joint correspondant à dp et à cn , on pourra alors tracer les courbes $d'p'$ (fig. 5), $\pi'\sigma$, $c'n'$, et les droites $p'\pi'$ et $n'\rho$. Sur la face verticale répondant à ki (fig. 4), on appliquera le panneau $CDPN$, de manière que le point D soit sur la verticale de k , le point N sur la verticale de h , le point P à l'extrémité supérieure de la verticale

de w ; sur la face horizontale supérieure, on tracera alors l'arc $\pi'P$ (fig. 5) dont on a les extrémités, et dont la courbure est celle de l'arc $\pi'l$ de la figure 4. Sur la face horizontale inférieure on tracera de même l'arc $c'u$ (fig. 5) dont on a les extrémités et dont la courbure est celle de l'arc $c'u$ de la figure 4. Sur la face cylindrique répondant à $p'k$ (fig. 4), on tracera l'arc $p'D$ (fig. 5) dont on a les extrémités; on se servira pour cela d'une règle ployante. On pourra alors tailler le joint conique

$p'DP'$, au moyen d'une règle posée sur les deux arcs πP et $p'D$; on taillera la douelle annulaire au moyen d'une cerce taillée sur la méridienne ABCD, que l'on posera normalement sur les arcs $p'D$ et $c'u$.

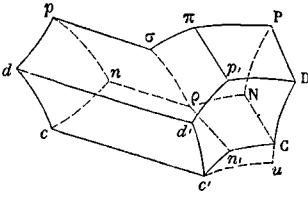


Fig. 5.

On tracera l'arc $n'C$ dont on a les extrémités, et qui doit être parallèle à $p'D$. Enfin sur le cylindre extérieur, répondant à ρh de la figure 4, on pourra tracer l'arc ρN dont on a les extrémités, et qui doit être horizontal; on pourra dès lors tailler le joint conique $\rho n'CN$, en s'aidant d'une règle posée normalement sur les arcs ρN et $n'C$. On se contentera de dégrossir les extrados $pnr\rho\sigma$ et $P\pi\sigma\rho N$.

Les panneaux de joint pourraient avoir une forme un peu plus complexe si le point p ou le point n (fig. 4) était au-dessous du plan horizontal NR; car le joint, après avoir coupé la douelle annulaire, le joint conique et l'extrados de la voûte annulaire, couperait encore le plan horizontal NR suivant une droite parallèle à l'axe du berceau, et la surface cylindrique correspondant à RS suivant un arc d'ellipse qui se projetterait sur le cercle SA. La figure 6 montre quelle serait, dans ce cas, la

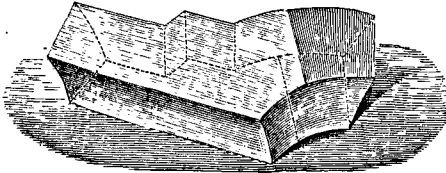


Fig. 6.

forme du voussoir; on obtiendrait sans difficulté, tous les éléments nécessaires pour l'application du trait sur la pierre.

LUNETTE BIAISE DANS UNE VOÛTE SPHÉRIQUE. La méthode est identiquement la même que dans le cas d'une voûte annulaire; il n'y a de différence dans l'épure que pour la section méridienne de la surface de révolution, qui devient une circonférence décrite du point ω lui-même (fig. 4) comme centre. La projection de l'arêtier devient une parabole, car, si dans l'équation [1] on fait $\beta=0$, il reste, après réductions,

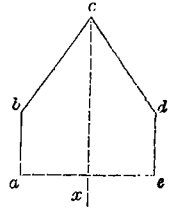
$$y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = R^2 - r^2,$$

équation d'une parabole. Quand la lunette est droite, on a $\alpha=0$, et la parabole devient un système de deux droites, dont une seule répond à la lunette considérée; l'autre répondrait à la courbe de sortie du berceau, si la surface cylindrique traversait la sphère.

(Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, pages 267 et suiv., et le *Traité de la Coupe des pierres* de J. Adhémar, pages 116 et 197.)

LUNETTE (Fortification), ouvrage de fortifica-

tion composé de deux faces bc , cd et de deux flancs ab , de , parallèles à la capitale cx . Son profil est analogue à celui de tous les autres ouvrages, c'est-à-dire qu'il présente un terre-plein, une banquette, un parapet et un fossé. Lorsque cet ouvrage est isolé, il est d'une mauvaise défense, parce qu'il présente un secteur sans feux et des angles morts, et qu'il peut être tourné et pris par la gorge (Voy. *Fortification*). On l'emploie cependant comme ouvrage de campagne pour couvrir un



port, l'entrée d'un village, d'un château, etc., toutes les fois que ses fossés peuvent être flanqués. Comme ouvrage de fortification permanente, on le place en avant d'un bastion, pour retarder les cheminements de l'ennemi; il est alors flanqué par les demi-lunes collatérales; mais cette circonstance oblige à avoir des gardes permanentes dans ces derniers ouvrages, ce qui est un inconvénient. La condition de faire flanquer les lunettes par les demi-lunes empêche de leur donner beaucoup de saillie en avant; et le peu de relief qu'elles doivent avoir, pour être commandées par les ouvrages placés en arrière, rend leur *DÉFILEMENT* (Voy. ce mot) très-difficile, surtout dans les pays accidentés, parce qu'elles sont plus exposées que d'autres ouvrages aux coups de revers par la gorge.

(Voyez pour plus de détails les *Principes de fortification*, par le général Noizet.)

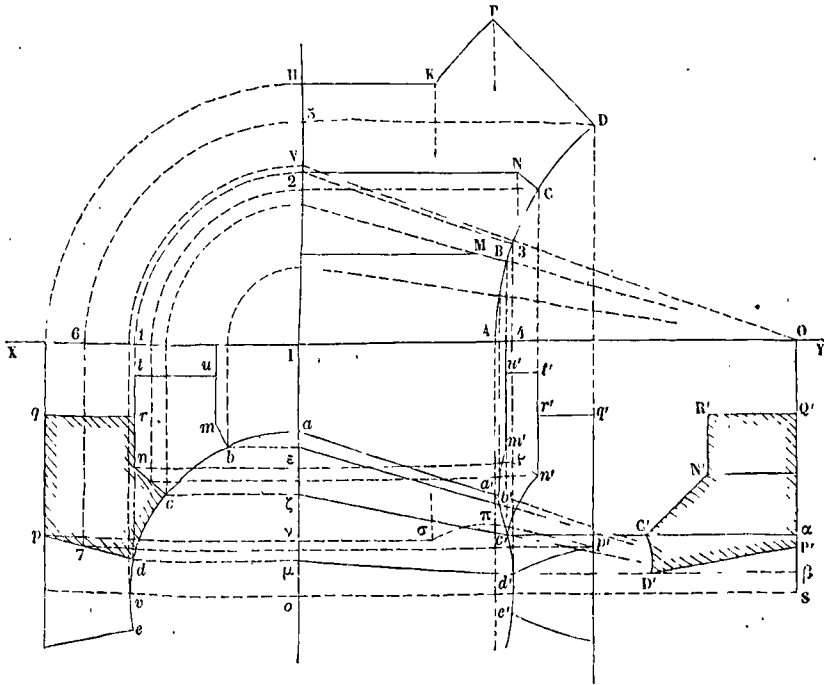
LUNETTE (Artillerie), anneau plat en acier, dont la surface intérieure est un cylindre exact; cet instrument sert à vérifier le diamètre des boulets. Pour cette vérification on emploie ordinairement deux lunettes; savoir: la *grande lunette*, qui a le calibre réglementaire exact; et la *petite lunette*, dont le calibre est inférieur d'une quantité égale à la limite de la tolérance accordée. Pour qu'un boulet soit reçu, il faut qu'il puisse passer dans tous les sens dans la grande lunette, et qu'il ne puisse passer dans aucun sens dans la petite. La différence des deux lunettes est de 1^{mm},5 pour les boulets de 24 et de 16; elle est de 1^{mm},4 pour les autres boulets; elle est de 1^{mm},6 pour l'obus de 22 cent., et de 1^{mm},2 pour les obus de 16, de 15 et de 12 centimètres; elle est de 1^{mm},8 pour les bombes de 27 et de 32 centimètres. L'artillerie de marine admet pour tous les boulets une tolérance de 1^{mm},2.

LUNETTE CONIQUE, ouverture conique pratiquée dans une voûte pour donner du jour. C'est particulièrement aux berceaux et aux voûtes sphériques que l'on applique ce mode d'éclairage. Dans le premier cas, la surface conique qui forme l'intrados de la lunette a son sommet sur l'axe du berceau, et son axe perpendiculaire à celui de cette voûte; le diamètre horizontal du cercle qui sert de base au cône est ordinairement dans le plan de naissance du berceau (Voy. *BERCEAU*). Les arêtes de douelle de la lunette sont dirigées vers le sommet du cône; mais les autres arêtes rectilignes des voussoirs sont des horizontales perpendiculaires à l'axe de la surface cylindrique. Soit ABCDPKHI la section droite du berceau, rabattue sur le plan de

naissance, pris pour plan horizontal de projection ; soit $abcde$ le cercle qui sert de base à l'intrados de la lunette, rabattu également sur le plan de naissance, en tournant autour de Io perpendiculaire à XY . On trace dans ce rabattement l'appareil de la lunette conique, comme l'indique la figure. Il faut imaginer ce tracé exécuté sur la face verticale dont Io est la trace ; et l'on a à déterminer l'intersection de la surface conique, et des joints plans dp , cn , etc., avec la douelle du berceau, et avec les joints de cette voûte. Soit S le sommet du cône, lequel se projette sur la ligne de terre au centre O du cercle $ABCD$. — Supposons que l'on veuille obtenir le point où la génératrice du cône menée par le point d rencontre la douelle cylindrique ; on projettera le point d en μ sur Io et au point 1 sur XY ; on amènera le point 1 en 2 par un arc de cercle décrit de I comme centre ; on joindra μS et 2. O et l'on aura les

projections de la génératrice considérée : du point 3 où sa projection verticale rencontre l'arc $ABCD$, on abaissera une perpendiculaire sur XY ; et le point d' où elle rencontre μS sera la projection horizontale du point de rencontre de la génératrice du cône que l'on considère avec la douelle cylindrique. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces ; et l'on pourra tracer la courbe $a' b' c' d' e' \dots$.

Le joint dp coupe la douelle du berceau suivant un arc d'ellipse dont on déterminera l'extrémité en projetant le point D sur IH en 5, ramenant ce point 5 en 6, par un arc de cercle décrit de I comme centre, puis en 7 par une parallèle à Io ; menant par le point 7 une parallèle à XY , et par le point D une perpendiculaire à cette ligne, on aura à leur point de rencontre p' la projection horizontale de l'extré-



mité cherchée. On joindra d' et p' par un arc d'ellipse, dont on déterminera autant de points intermédiaires qu'on voudra, et faisant une construction analogue pour des points pris entre 3 et D . On obtiendra semblablement les intersections $c' n'$, $b' m'$, des joints cn et bm avec l'intrados du berceau.

Le joint dp coupe le joint DP suivant une droite qui, prolongée, passerait par le sommet du cône puisque les deux joints passent tous deux par ce point. On obtiendra donc la projection horizontale de l'intersection, en joignant le point p' au sommet S , et prolongeant la ligne de jonction jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point P , au point π . On obtiendra de la même manière la projection horizontale $n'p$ de l'intersection des joints cn et CN .

Le joint dp coupe l'extrados du berceau suivant un arc de courbe dont l'extrémité s'obtiendra en

menant par le point p une parallèle à la ligne de terre, et par le point K une perpendiculaire à cette ligne ; leur point de rencontre σ sera la projection de l'extrémité considérée. On obtiendrait un point intermédiaire de l'intersection en prenant un point sur PK , et le point situé à la même hauteur sur le prolongement de dp ; menant par le premier une perpendiculaire à XY , et par le second une parallèle à cette ligne. On pourra donc tracer ainsi l'arc $\pi\sigma$.

Enfin le joint dp coupe le plan horizontal HK suivant une parallèle à XY qui se projette suivant vs ; et le joint cn coupe le plan horizontal $N.2$ suivant une autre parallèle qui se projette en ep . Le contour des joints dp et cn se trouve ainsi complètement déterminé ; et l'on obtiendrait de la même manière celui de tous les autres joints coniques.

Les joints montants du berceau, ayant pour traces

horizontales $r'q'$ et $u't'$ doivent correspondre à ceux qui sont indiqués par leurs traces verticales rq et ut sur le rabattement de la face extérieure du mur vertical.

Il est utile, pour l'application du trait sur la pierre, d'avoir le développement du panneau cylindrique $d'p'q'r'n'c'$. Pour l'obtenir, on prendra une droite $Q'R'$ égale au développement de l'arc CD ; on élèvera les perpendiculaires $Q'P'$ et $R'N'$ respectivement égales à $q'p'$ et à $r'n'$. Ayant pris les points α et β à des distances de Q' respectivement égales aux distances de d' et de c' à la droite $q'r'$, on prendra la perpendiculaire $\alpha c'$ égale au développement de l'arc DB et la perpendiculaire $\beta D'$ égale au développement de l'arc $D.3$; et l'on joindra $N'C'$ et $P'D'$ par des droites qui remplaceront avec une exactitude suffisante le développement des arcs d'ellipses projetés en $c'n'$ et $d'p'$; il serait d'ailleurs facile d'en obtenir des points intermédiaires; enfin on joindra $C'D'$ par un arc de courbe dont on déterminera des points intermédiaires au moyen de points correspondants choisis sur $c'd'$, et projetés sur l'arc AD .

On aura ainsi les éléments nécessaires pour tailler les pierres qui contiennent une partie de la courbe projetée en $a'b'c'd'e'$. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de celle qui répond aux panneaux $cnrqpd$ et $C'N'R'Q'P'D'$. On pourra suivre plusieurs méthodes (Voy. le *Traité de la Coupe des pierres*, de J. Adhémar, p. 165); mais la plus directe et la plus simple est la suivante. On préparera un prisme droit ayant pour base la projection verticale 2.3.DPKH2; et pour hauteur la distance $\beta Q'$ entre le point d' et le joint montant $r'q'$. Sur la face verticale H.2 on appliquera le panneau $cnrqpd$, de manière que pq coïncide avec l'arête horizontale projetée en H, et sur la face cylindrique répondant à 3.CD on appliquera le panneau $C'N'R'Q'P'D'$, de manière que $Q'P'$ coïncide avec l'arête horizontale projetée en D. Les directrices cd et $C'D'$ serviront à tailler la douelle conique; les lignes dp et $D'P'$ détermineront le joint plan dp ; et les lignes cn et $C'D'$ détermineront de même le joint plan cn .

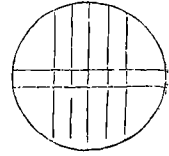
La lunette pourrait être *biaise*; c'est-à-dire que son axe oS pourrait n'être pas perpendiculaire à l'axe du berceau. Les arêtes de douelle de la lunette seraient encore des génératrices convergeant au sommet; les autres arêtes rectilignes de la pierre seraient parallèles à l'axe du cône; les constructions seraient d'ailleurs les mêmes. On trouvera l'épure de cette disposition, d'ailleurs peu usitée, dans le *Traité de la Coupe des pierres*, de J. Adhémar, planche 34.

Si la lunette conique était pratiquée dans une sphère, les droites telles que $p'q'$, parallèles à l'axe du berceau, seraient remplacées par des cercles ayant le point S pour centre commun; les constructions seraient encore analogues. Mais la pénétration d'un cône dans une sphère est traitée d'une manière plus générale à l'article *CEIL-DE-BŒUF*.

Voyez aussi l'article *PORTE CONIQUE*.

LUNETTE MÉRIDIENNE, ou *instrument des passages*, lunette qui sert à observer le passage des astres au méridien du lieu. Cette lunette, dont le grossissement est de 150 à 200 fois, est mobile autour d'un axe horizontal dont les tourillons reposent sur des coussinets installés eux-mêmes sur de forts

pilliers. La direction de l'axe horizontal est telle que l'axe optique de la lunette se meut dans le plan du méridien. Le foyer de la lunette est muni d'un RÉTICULE (Voy. ce mot) composé de 5 fils verticaux équidistants et de 2 fils horizontaux à égale distance du centre. Lorsqu'on veut observer l'instant du passage d'une étoile au méridien, on dirige la lunette vers cette étoile, peu d'instant avant son passage, de manière qu'elle soit comprise entre les deux fils horizontaux; puis, avec une horloge sidérale, on compte l'instant précis du passage de l'étoile derrière chacun des fils verticaux; la moyenne des heures obtenues donne l'heure du passage de l'étoile derrière le fil du milieu, c'est-à-dire dans le plan du méridien. L'erreur à craindre n'est guère que d'un dixième de seconde.



Dans ces derniers temps on a pu porter le nombre des fils verticaux jusqu'à 25, en se servant de l'électricité pour noter l'instant du passage de l'étoile derrière chacun d'eux; il suffit pour cela de poser le doigt sur une touche; un mécanisme transmet instantanément ce mouvement à un style qui vient marquer un point sur une bande de papier animée d'un mouvement uniforme réglé sur celui de l'horloge. L'appareil qui produit cet effet porte le nom d'*enregistreur électrique*. L'erreur à craindre se trouve réduite à quelques centièmes de seconde; mais l'appareil est malheureusement sujet à se déranger.

Avant de se servir d'une lunette méridienne, il y a plusieurs vérifications à faire. En premier lieu, il faut s'assurer que l'axe de rotation est bien horizontal; pour cela on suspend à cet axe un NIVEAU à BULLE D'AIR (Voy. NIVEAU); on note avec soin les divisions du tube entre lesquelles la bulle se trouve comprise; on retourne ensuite le niveau de manière que le bout qui était à gauche occupe la droite, et vice versa; si l'axe est bien horizontal, la bulle doit demeurer entre les mêmes repères. Dans le cas contraire on élève ou l'on abaisse, au moyen d'une vis disposée à cet effet, l'un des coussinets qui supportent l'axe jusqu'à ce que l'horizontalité soit obtenue.

En second lieu, il faut s'assurer que l'axe optique de la lunette est bien perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour cela on dirige la lunette horizontalement vers une mire horizontale divisée, disposée à cet effet; et l'on marque la division de la mire qui se trouve cachée par le fil vertical du réticule qui occupe le centre; cela fait, on retourne la lunette, de manière que le tourillon qui était à gauche occupe la droite, et vice versa; puis on vise de nouveau la mire; le fil vertical du milieu doit correspondre à la même division. Si cela n'avait pas lieu, on ferait mouvoir le réticule de gauche à droite ou de droite à gauche, au moyen de la vis MICROMÉTRIQUE (Voy. ce mot) jusqu'à ce que la condition fût remplie.

Enfin, il faut s'assurer que le plan décrit par l'axe optique de la lunette est bien le plan du méridien. Pour cela on observe deux passages consécutifs au méridien d'une même étoile circumpolaire; si l'axe optique est bien dans le plan du méridien, il doit s'être écoulé exactement 12 heures sidérales entre les deux passages. Si cela n'a pas lieu, on déplace

horizontalement, au moyen d'une vis spéciale, le second coussinet de l'axe de rotation jusqu'à ce que la condition dont il s'agit soit exactement satisfaite.

Comme la lunette est d'un grand poids et qu'elle pourrait fatiguer les coussinets et faire naître un frottement qui nuirait à la facilité de sa rotation, et pourrait déranger l'appareil, on soulage ces coussinets en soutenant les tourillons à l'aide d'un système de leviers et de contre-poids (Voy. le *Cours élémentaire d'Astronomie* de M. Delaunay, et le *Cours de Géodésie* de M. Laussedat à l'École polytechnique).

La lunette méridienne est l'instrument dont on se sert pour déterminer les *ascensions droites* (Voy. ce mot). Elle a été imaginée par Røemer à la fin du dix-septième siècle.

On emploie depuis quelque temps, pour les besoins de la Géodésie et de l'Hydrographie, une *lunette méridienne portative*. Cet instrument, qui peut être facilement installé dans les lieux où il n'y a point d'observatoire, sert à déterminer les LONGITUDES à l'aide des passages de la lune au méridien ; il les donne à 6 ou 8 secondes de temps près ; il sert également à déterminer les LATITUDES et l'état absolu des CHRONOMÈTRES (Voy. ces mots). L'instrument comprend trois parties principales : le *piéd*, la *lunette* et le *cercle méridien*. Le piéd se compose d'une première semelle en fonte reposant sur le sol au moyen de trois vis calantes qui permettent de lui donner une position horizontale ; d'une deuxième semelle en fonte parallèle à la première, mais pouvant prendre, à l'aide d'une vis, un petit mouvement azimutal en tournant autour d'un axe en acier qui la lie à la première ; enfin d'une troisième semelle reposant sur la seconde et faisant corps avec deux montants qui portent les tourillons de l'axe de la lunette ; cette troisième semelle est liée à la seconde au moyen de deux pivots formant un axe horizontal, et d'une vis verticale dite vis de rectification à l'aide de laquelle on peut faire basculer légèrement toute la partie supérieure de l'instrument autour de l'axe formé par les deux pivots. La lunette est une lunette astronomique munie d'un réticule analogue à celui de la lunette méridienne des observatoires ; à l'oculaire peut être adapté un prisme qui renvoie les rayons lumineux perpendiculairement à l'axe optique de la lunette et permet d'observer commodément les astres quelle que soit leur hauteur ; les tourillons sont bien cylindriques et identiques entre eux. Des niveaux permettent de s'assurer de l'horizontalité de l'axe de rotation. Le cercle méridien se compose, comme dans le THÉODOLITE (Voy. ce mot), d'un limbe circulaire monté sur l'axe des tourillons et pouvant tourner avec la lunette, et d'une alidade concentrique munie de verniers dont on peut lire les indications à l'aide de loupes disposées à cet effet. — Après avoir placé la lunette à peu près dans le plan du méridien, on l'y amène rigoureusement à l'aide du mouvement azimutal dont il a été parlé. Les vérifications à faire subir à l'instrument sont de même nature que pour la lunette méridienne des observatoires. Pour plus de détails sur la disposition et l'usage de cet instrument, on peut consulter le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Du Bois, page 556 et suiv.

Voyez aussi l'article LUNETTE.

LUNETTE P. ONGEANTE, lunette mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à son axe op-

tique. Les CERCLES RÉPÉTITEURS, les GRAPHOMÈTRES, les BOUSSOLES (Voy. ces mots) sont ordinairement munis de lunettes plongeantes.

LUNETTES EN CHARPENTE. Elles sont soumises aux mêmes règles que les lunettes en pierre. Le contour formé par l'intersection des deux surfaces est occupé par une pièce de bois courbe, ordinairement construite en plusieurs parties, que l'on appelle l'*arc de lunette*. Elle reçoit les abouts des chevrons et des liernes interrompus. Pour déterminer exactement les assemblages, il faut faire une projection en HERSE (Voy. ce mot). Si l'arc est plan, on prend ce plan même pour celui de la herse. Si l'arc est à double courbure, on prend pour plan de herse un plan passant par les angles des naissances de l'arc, et qui touche cet arc du même côté en un autre point. Si les lignes et les points de repère dont on a besoin ont été déterminés avec précision sur les autres projections, on a tous les éléments nécessaires pour établir convenablement sur la herse les pièces dont on veut piquer les assemblages. — Les lunettes donnent lieu à des combinaisons très-variées ; nous ne pouvons que renvoyer aux traités spéciaux sur la charpente pour de plus amples détails.

LUNETTE STADIA, instrument qui sert à mesurer les distances. Il se compose d'une lunette munie, au foyer de son objectif, de deux fils horizontaux dont on peut faire varier la distance au moyen d'une vis MICROMÉTRIQUE (Voy. ce mot). La lunette est portée sur un piéd et peut s'incliner comme on le veut par rapport à l'horizon. Pour mesurer la distance de l'instrument à un point éloigné, on fait placer en ce point une MIRE (Voy. ce mot) que l'on dresse perpendiculairement à la ligne de visée ; à l'aide d'un tirage convenable de la lunette, on amène exactement les fils au foyer de l'objectif ; l'image des fils embrasse alors sur la mire un certain intervalle H. Soit L la distance de la mire au centre optique de l'objectif, l la distance du foyer conjugué au même centre, h l'écartement des fils, il est aisé de voir que le centre de l'objectif est le sommet commun de deux triangles isocèles semblables qui ont H et h pour bases, L et l pour hauteurs ; on a donc

$$L : l = H : h. \quad [1]$$

Mais si l'on appelle λ la distance focale principale de l'objectif, on sait qu'on a entre les trois quantités L, l et λ la relation

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l}. \quad [2]$$

Éliminant l entre ces deux relations, on en tire

$$L = \frac{\lambda}{h} (H + h). \quad [3]$$

C'est la formule générale de l'instrument. On peut l'employer de deux manières principales. La première, préférée par les praticiens, consiste à conserver aux fils un écartement constant, et à mesurer chaque fois sur la mire, soit à l'aide de voyants, soit à l'aide de divisions tracées à l'avance, l'espace H intercepté sur la mire par l'image des deux fils. Ordinairement on règle h de manière qu'en plaçant la mire à 100^m du centre de l'objectif, l'intervalle intercepté soit de 1^m. On a alors, en vertu de la relation [3],

$$100^m = \frac{\lambda}{h} (1^m + h);$$

et, en éliminant $\frac{\lambda}{h}$, on trouve

$$L = 100^m \cdot \frac{H + h}{1^m + h}. \quad [4]$$

On peut, si l'on veut se contenter d'une approximation, négliger vis-à-vis de 1^m la quantité h qui est toujours très-petite; et il reste

$$L = 100^m \cdot H; \quad [5]$$

on n'a alors qu'à lire sur la mire le nombre de centimètres intercepté, il exprimera le nombre de mètres dont se compose la distance L .

On peut au contraire faire varier h de manière que H soit constant; si h_0 est la valeur que prend h quand L est égal à 100^m , on a alors

$$100^m = \frac{\lambda}{h_0} (H + h_0),$$

et, en éliminant λ entre cette relation et la relation [3], il vient

$$L = 100^m \cdot \frac{h}{h_0} \cdot \frac{H + h}{H + h_0}. \quad [6]$$

Si, pour se contenter d'une approximation, on néglige h_0 et h vis-à-vis de H , il reste

$$L = 100 \cdot \frac{h}{h_0}. \quad [7]$$

Quand on emploie ce procédé, il faut que h et h_0 puissent être mesurés avec beaucoup d'exactitude

par les nombres de tours et fractions de tours de la vis micrométrique.

On fait placer la mire perpendiculairement à la ligne de visée pour éviter la correction qu'il y aurait à faire si on la dressait verticalement et que la ligne de visée fût oblique à l'horizon. Mais c'est alors la distance réelle et non sa projection horizontale; et si c'est cette dernière qu'on veut avoir, comme cela a lieu dans la plupart des cas, il faut réduire à l'horizon la distance obtenue (Voy. RÉDUCTION À L'HORIZON). Pour cela il faut mesurer l'inclinaison de la ligne de visée, au moyen d'un *niveau de pente* (Voy. NIVEAU) dont la lunette est ordinairement munie.

La lunette Stadia, proscrite en 1805 à cause des imperfections qu'elle présentait alors, a été réhabilitée en 1821, à la suite d'un rapport fait à l'Académie des Sciences par MM. Lacroix, Mathieu et Cauchy. Entre les mains d'un opérateur exercé, elle donne des résultats aussi précis que l'usage de la chaîne (Voy. ce mot), du moins jusqu'à des distances qui n'excèdent pas 400 ou 500 mètres. Elle s'emploie avec avantage dans les LEVERS EXPÉDIÉS (Voy. ce mot) et dans les pays de montagnes où la mesure directe à la chaîne serait souvent impraticable.

M

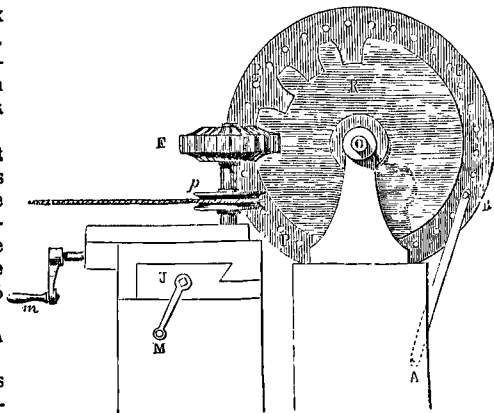
MACHINE À AIR COMPRIMÉ, machine analogue à une machine à vapeur, mais dans laquelle ce fluide est remplacé par de l'air sortant d'un réservoir où il a été comprimé. Une distribution semblable à celle des machines à vapeur fait passer alternativement l'air comprimé sur les deux faces d'un piston se mouvant dans un cylindre. Le mouvement alternatif de ce piston est ensuite transformé par les moyens ordinaires en un mouvement circulaire continu, qui peut à son tour être utilisé de diverses manières.

De puissantes machines à air comprimé sont employées en ce moment (1866) à percer des trous de mine dans le roc que l'on attaque pour ouvrir le tunnel du mont Cenis. La compression de l'air est obtenue à l'aide d'une colonne d'eau d'environ 50 mètres de haut, ce qui correspond à une pression de près de 5 atmosphères.

MACHINE À CANNELER. Voy. MACHINE À RABOTER.

MACHINE À FENDRE, ou à TAILLER LES ROUES D'ENGRENAGES. La disposition la plus employée est la suivante. L'outil dont on se sert a une forme toute particulière. Pour s'en faire une idée exacte, il faut imaginer une surface de révolution ayant pour section méridienne le profil que présente l'intervalle de deux dents consécutives, et concevoir cette surface limitée à deux sections perpendiculaires à l'axe et symétriquement placées par rapport à la section médiane. Le corps ainsi limité a la forme représentée en F sur la figure. L'outil auquel on donne cette forme est exécuté en acier trempé, et on y pratique, dans le sens des sections méridiennes, des entailles tranchantes qui en

font un instrument de la classe de ceux auxquels on donne le nom de *fraise*. Cet outil, mobile autour d'un axe vertical, est mis en mouvement par une corde sans fin s'enroulant sur une poulie p montée



sur son axe. Cet axe repose sur un support à chariot analogue à celui du tour (Voy. ce mot) et susceptible de deux mouvements horizontaux, l'un perpendiculaire au plan de la figure et que l'on règle à l'aide d'une vis mue par la manivelle M , l'autre parallèle au plan de la figure et que l'on règle à l'aide d'une seconde vis mue par la manivelle m . La roue R dont on veut tailler les dents est calée sur un arbre horizontal O , qui repose sur des supports fixes, et qui est parallèle aux jumelles sur lesquelles glisse le chariot porte-outil. Sur

le même axe est montée une plate-forme circulaire PPP, percée près de sa circonférence de trous également espacés, en nombre égal à celui des dents que la roue doit avoir. Une alidade AB, mobile autour d'un point fixe A pris sur le support de l'arbre O, peut être fixée par son extrémité B à la plate-forme à l'aide d'une cheville qui entre dans un des trous dont il vient d'être parlé. La plate-forme se trouve ainsi fixée, ainsi que la roue R montée sur le même axe. Pour faire fonctionner la machine, on fait glisser le chariot porte-outil sur les jumelles J, en agissant sur la manivelle M, jusqu'à ce que l'axe de la fraise F se trouve dans le plan de symétrie de la roue perpendiculaire à l'axe O; puis, en agissant sur la manivelle m, on fait avancer la fraise vers la roue. L'outil, animé d'un mouvement de rotation rapide, entame, à l'aide des tranchants qui y sont pratiqués, la circonférence de la roue; à mesure que la fraise avance vers l'axe O, elle y creuse une entaille de plus en plus profonde, jusqu'à ce qu'enfin elle y ait creusé l'intervalle entier de deux dents consécutives. On fait alors reculer l'outil; on détache l'alidade du trou où elle était fixée, et on la fixe dans le trou suivant, en faisant pour cela tourner la plate-forme d'une quantité angulaire convenable, c'est-à-dire de la *n*^{ième} partie de 360 degrés s'il y a *n* trous.

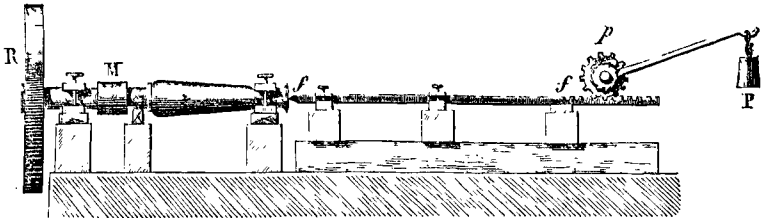
On fait de nouveau avancer l'outil d'une manière graduelle, pour creuser à la circonférence de la roue un nouvel intervalle; et, en continuant ainsi, on obtient, après *n* opérations, les *n* dents que la roue devait avoir.

La plate-forme porte ordinairement plusieurs séries de trous équidistants disposés sur des circonférences concentriques et correspondant aux nombres des dents que l'on a le plus fréquemment à donner aux roues.

MACHINE À FORER, machine à l'aide de laquelle on perce suivant son axe une pièce pleine, cylindrique ou conique. On nomme *foret* l'outil, en acier trempé, qui sert à ce travail, et l'on donne le nom de *forerie* à la machine elle-même. On distingue les *foreries verticales* et les *foreries horizontales*, qui tirent leur nom de la position donnée à la pièce à forer; leur principe est d'ailleurs le même, et le seul avantage des foreries verticales est de permettre à la limaille et autres débris appelés *buchilles*, de se dégager facilement. Mais les foreries horizontales sont d'une installation plus commode. Généralement, on donne à la pièce à forer un mouvement de rotation autour de son axe, et l'outil agissant dans le sens de cet axe, ne fait que presser sur la pièce qui se creuse en tournant.

Pour forer une pièce, on commence par marquer aux deux bouts les points qui appartiennent à l'axe; et l'on y fait, avec un outil à la main, un petit trou conique. On place alors la pièce sur un tour à pointes (Voy. TOUR) d'une puissance suffisante, et l'on tourne les parties qui doivent plus tard porter sur les supports et jouer le rôle de tourillons. Cela

fait, on établit la pièce horizontalement comme l'indique la figure. Elle repose sur deux supports qui lui servent de coussinets; et elle est reliée, à l'aide d'un manchon M, à un arbre horizontal, recevant le mouvement de rotation par l'intermédiaire d'une roue R. Dans la direction de l'axe de la pièce est placé le foret ff, qui est maintenu sur des supports le long desquels il peut glisser horizontalement à frottement dur. La tige du foret se termine par une crémaillère engrenant avec un pignon *p*, qui n'est lié à son axe que par l'intermédiaire d'un dé clic, c'est-à-dire par un cliquet poussé par une roue à rochet (Voy. ce mot) calée sur l'axe lui-même. A la roue à rochet est adapté un levier, à l'extrémité duquel est suspendu un poids P, assez fort pour obliger le foret, poussé par l'intermédiaire de l'engrenage, à s'appuyer sur la pièce à forer. A mesure que cette pièce tourne, l'outil y creuse un trou cylindrique de plus en plus profond, et s'y engage de plus en plus. Il en résulte que le poids P descend; quand il a suffisamment descendu, on le relève; la roue à rochet tourne alors sans entraîner le cliquet, et par conséquent



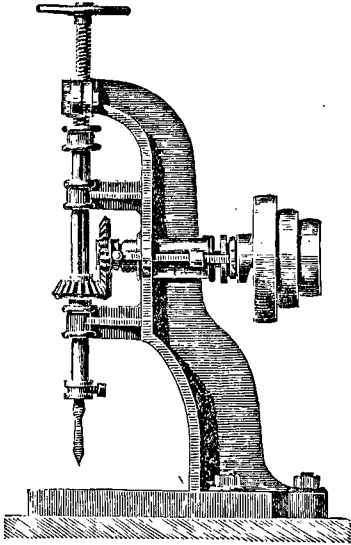
sans faire mouvoir le pignon; en sorte que l'outil continue à s'appuyer sur le fond de l'orifice déjà foré.

On peut aussi appliquer au forage le système à engrenage différentiel employé dans les machines à aléser (Voy. ALÉSOR).

MACHINE À MOLETTES, machine employée dans les mines pour faire monter les tonnes pleines de minerai et descendre les tonnes vides. Elle est tout à fait analogue à un manège de maraicher (Voy. MANÈGE); les tonnes y remplacent les seaux, et de grandes poulies appelées *molettes* remplacent les poulies ordinaires. La machine à molettes est aussi employée aux épaissements.

MACHINE À PERCER. La disposition la plus ordinaire est celle qui est représentée ci-contre. L'outil, ou *foret*, est adapté à l'extrémité inférieure d'une tige cylindrique, appelée *porte-foret*, mobile entre des guides, et susceptible de prendre un mouvement de translation verticale et un mouvement de rotation autour de son axe de figure. Ce porte-foret est lié par un collier à l'extrémité inférieure d'une vis qui traverse la partie supérieure du support; il peut ainsi tourner autour de son axe, sans cesser de participer au mouvement vertical de la vis. Le mouvement de rotation lui est donné par une roue d'angle horizontale, qui s'assemble avec lui à rainure et languette, de manière à lui permettre le mouvement vertical, indépendamment du mouvement de rotation. Cette roue d'angle horizontale engrène avec une roue d'angle verticale, sur l'axe de laquelle sont montées des poulies de divers diamètres; on fait passer sur l'une ou l'autre

la courroie qui les commande, suivant la vitesse qu'on veut obtenir. En agissant sur une petite roue horizontale qui forme la tête de la vis, l'ouvrier peut faire descendre celle-ci et appuyer plus ou moins sur la pièce à percer. L'engrenage peut être remplacé par une poulie (Voy. tome II de la *Publication industrielle* de M. Armengaud.)



Dans les grands ateliers de construction il existe aussi des machines puissantes qui percent les métaux ductiles en agissant par simple pression. Le porte-outil est un cylindre à axe vertical, articulé à un balancier mù par la vapeur. L'outil adapté à l'extrémité de ce cylindre est un poinçon de forme cylindrique ou rectangulaire, qui peut être remplacé par un autre, suivant le travail qu'on a à effectuer. Lorsque la pression exercée est très-considérable, la machine perce d'un seul coup des trous cylindriques ou même des rainures, avec une parfaite netteté. Des bandes de roues de 0^m,025 d'épaisseur sont percées à froid par un poinçon de 23 à 24 millimètres de diamètre.

MACHINE À RABOTER, également connue sous

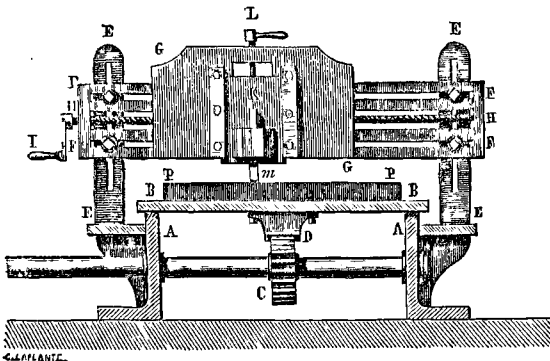


Fig. 1.

le nom de *machine à planer*; machine-outil, à l'aide de laquelle on *dresse* les surfaces, c'est-à-dire à

l'aide de laquelle on obtient des surfaces parfaitement planes. Cette machine peut être disposée de plusieurs manières, mais le principe de la disposition est toujours le même. Voici la plus usitée. Sur deux jumelles AA (fig. 1) dont les *faites*, ou surfaces supérieures, sont bien dressées, peut glisser à coulisse un chariot BB, dont la longueur est un peu moindre que la moitié de celles des jumelles. Ce chariot est mis en mouvement par un pignon C qui engrène avec une crémaillère D, dont la figure ne montre que la section transversale, mais qui s'étend sous le chariot dans toute sa longueur. Sur des supports liés aux jumelles sont établis deux montants EE dont les faces antérieures, parfaitement dressées, sont situées dans un même plan vertical perpendiculaire à la direction des jumelles et de la crémaillère. Sur ces montants est fixé un plateau FF, que l'on nomme la *plaque directrice*; il y est maintenu par des boulons traversant des rainures verticales ménagées dans les montants, et des rainures horizontales ménagées dans la plaque directrice elle-même. Par ce mode de liaison on peut, au besoin, élever ou abaisser cette plaque, ou la déplacer horizontalement. Une seconde plaque GG, que l'on nomme la *courseur*, est adaptée sur la plaque directrice, et peut s'y mouvoir dans le sens horizontal. Pour cela, elle porte en arrière un tenon, qui est caché sur la figure; ce tenon entre dans une large rainure HH, pratiquée au milieu de la hauteur de la plaque directrice; et une longue vis II, traversant les bords verticaux de la plaque s'engage dans un écrou creusé dans ce tenon; de telle sorte qu'en faisant tourner cette vis on fait mouvoir dans le sens horizontal le tenon et le curseur GG dont il fait partie. Enfin le *porte-outil* K, peut se mouvoir à coulisses sur le curseur GG, dans le sens vertical, quand on fait tourner la vis de rappel I. Le *crochet m* du rabot peut ainsi être élevé ou abaissé à volonté.

La pièce à planer PP est fixée sur le chariot à l'aide de boulons ou de toute autre manière. La plaque directrice FF ayant été fixée à la hauteur convenable, on règle, à l'aide des vis I et L la position que doit occuper le crochet m pour qu'il s'engage dans le métal à la profondeur nécessaire. Si l'on conçoit alors que la roue C, recevant le mouvement d'un moteur quelconque, tourne dans un sens convenable, elle fera avancer le chariot de toute sa longueur, et le rabot enlèvera à la surface de la pièce PP un ruban métallique rectiligne, en mettant à nu une bande parfaitement droite, ayant la largeur du crochet m. Supposons maintenant que l'on ramène le chariot dans sa position primitive, et qu'à l'aide de la vis I, on déplace le rabot d'une petite quantité, un peu moindre que la largeur du crochet m; en remettant le chariot en mouvement on enlèvera une nouvelle quantité de métal, et le rabot tracera, à côté de la première bande mise à nu, une nouvelle bande égale, située exactement dans le même plan. En continuant ainsi, on finira par rendre parfaitement plane toute la surface de la pièce PP, sur laquelle on opère.

Le mouvement alternatif du chariot est obtenu par l'emploi d'un des moyens indiqués à l'article

MODIFICATEURS du mouvement; et par des moyens du même ordre on fait en sorte que la machine elle-même fasse tourner en temps utile la vis l pour déplacer, de la quantité nécessaire, le curseur GG et par conséquent le porte-outil. En sorte que, la machine une fois réglée, peut être abandonnée à elle-même jusqu'à la fin du travail.

Dans les machines les plus perfectionnées, le rabot opère constamment, et malgré les alternatives du chariot, en faisant un demi-tour sur lui-même à la fin de chaque course. Voici le moyen ingénieux employé par Whitworth pour obtenir ce résultat. L'outil *m* (fig. 2) est fixé à l'extrémité d'un cylindre

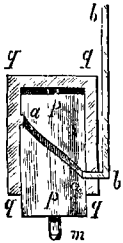


Fig. 2.

plein *pp*, mobile à frottement doux dans un cylindre creux *qq*, dont la figure ne montre que la section. A la surface du cylindre plein est tracée une rainure en hélice *aa*, qui embrasse la moitié d'un pas, c'est-à-dire que ses deux extrémités sont dans un même plan méridien. Le cylindre creux est fendu verticalement dans toute la hauteur de ce demi-pas; et un crochet *bb*, que l'on peut élever ou abaisser à volonté, traverse par son extrémité recourbée cette fente verticale du cylindre creux, et s'engage dans la rainure en hélice du cylindre plein. Il résulte de cette disposition que lorsqu'on élève le crochet *bb*, son extrémité recourbée parcourt la rainure en hélice; et, comme le cylindre creux est fixe, il faut que ce soit le cylindre-plein qui tourne autour de son axe, en faisant ainsi un demi-tour exact, ainsi que l'outil *m* fixé à son extrémité. Le mouvement inverse a lieu quand on abaisse le crochet *bb*. Le mouvement alternatif et intermittent de ce crochet est réglé par la machine elle-même, à l'aide d'un modificateur convenable.

On a construit des machines à raboter dans lesquelles la pièce à planer est fixe, tandis que l'outil est mobile. Telle est la machine construite en 1835 par M. Cavé, et dont on trouvera la description dans le tome I de la *Publication industrielle* de M. Armengaud. Dans cette machine il y a deux outils semblables, dont l'un travaille en allant et l'autre en revenant. Chacun d'eux, indépendamment de son mouvement longitudinal, peut prendre deux autres mouvements qui servent à régler sa position: l'un vertical, obtenu à l'aide d'une vis de rappel; l'autre latéral, à l'aide d'une vis sans fin tournant dans des collets fixes, et engagée dans un écrou dépendant du porte-outil.

La vitesse de l'outil est de 0^m,10 en moyenne.

Le rabot mécanique ne s'emploie pas uniquement pour dresser les surfaces planes, on s'en sert aussi pour canneler les surfaces cylindriques. Il suffit pour cela de placer le cylindre longitudinalement, dans le sens du mouvement du chariot, et de lui donner, à chaque alternative, un petit mouvement de rotation autour de son axe, mouvement qui est ordinairement réglé par un ENCLIQUETAGE (Voy. ce mot). Le rabot creuse ainsi, dans le sens des génératrices, des rainures équidistantes qui constituent les cannelures, et dont on peut faire varier la section en variant la forme du rabot.

MACHINE À TARAUDER, machine-outil à l'aide

de laquelle on creuse les écrous des vis. Il tire son nom de l'outil appelé *taraud* (fig. 1), que l'on emploie à la main pour les écrous de petites dimensions. Cet outil n'est autre chose qu'une vis légèrement conique, en acier trempé, dont on a abattu des pans par des plans sensiblement parallèles à l'axe, de manière à donner à sa section droite la forme indiquée par la figure 2. Les angles des filets sont ainsi rendus coupants, et propres à entamer le métal. Quand on taraude à la main, on introduit le bout du taraud dans le trou cylindrique dont on veut faire un écrou; on fait entrer la tête carrée du taraud dans le trou de même forme ménagé au milieu d'un levier appelé *tourne à gauche*; et, en tournant et dé-tournant successivement, on agrandit peu à peu les creux compris entre les filets de l'écrou.

On distingue deux machines à tarauder. La première est analogue à la MACHINE À FILETER (Voy. ce mot); elle n'en diffère essentiellement qu'en ce que la pièce à tarauder est établie entre des supports fixes, et que l'on adapte un taraud à l'extrémité de l'arbre à manivelle. La seconde, employée surtout pour les écrous de grandes dimensions, est analogue à TOUR À FILETER (Voy. ce mot); la pièce à tarauder est fixée à l'aide d'un mandrin à l'extrémité de l'axe du tour ou de l'arbre de la vis-mère; et l'on fait agir dans le sens de l'axe soit un peigne à dents latérales, soit un crochet de côté, qui produisent les creux en hélices formant l'écrou.

MACHINE D'ÉRICSSON, machine à air chaud, qui est employée dans quelques ateliers de New-York. Un réservoir contenant de l'air comprimé est mis en communication avec le fond d'un cylindre à axe vertical dans lequel se meut un piston; cet air, arrivé dans le cylindre, y est échauffé par un foyer placé au-dessous, se dilate, et fait monter le piston. Quand celui-ci est arrivé au haut de sa course, l'orifice d'admission de l'air comprimé se ferme, l'air chaud est mis en communication avec l'atmosphère et s'échappe; le piston redescend par l'effet de son poids ou des contre-poids dont il est chargé; lorsqu'il est arrivé au bas de sa course, l'orifice d'admission de l'air comprimé se rouvre, la communication avec l'atmosphère se ferme; et le même jeu recommence. Le mouvement du piston est transmis par les moyens ordinaires à un balancier. En même temps il fait mouvoir une pompe qui comprime de l'air dans le réservoir pour remplacer celui qui a fonctionné sous le piston. Cette machine est, comme on voit, à simple effet, puisque l'air chaud n'agit que pendant la montée du piston; mais en accouplant deux machines de telle manière que le piston de l'une descende lorsque le piston de l'autre monte, on peut les faire agir sur un même balancier à la façon d'une machine à double effet.

Dans les premières machines à air chaud construites par M. Ericsson, il plaçait, sur le passage

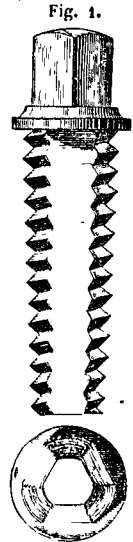


Fig. 2.

de l'air chaud sortant du cylindre, des toiles métalliques auxquelles cet air cédait sa chaleur; et cette chaleur était restituée à l'air comprimé qui se rendait sous le cylindre par la même voie. Cette idée ingénieuse n'a pas produit les effets que l'inventeur avait cru pouvoir en attendre, et il a supprimé les toiles métalliques.

La machine d'Ericsson est une tentative digne d'intérêt pour remédier à l'énorme perte de chaleur qui résulte de l'emploi des machines à vapeur. Mais le but que l'inventeur se proposait n'y est atteint qu'en partie; et le problème a été résolu d'une manière beaucoup plus heureuse dans le moteur LENOIR (Voy. ce mot).

MACHINE D'ATWOOD, appareil à l'aide duquel on démontre expérimentalement les lois de la chute des corps, et en général, les lois du mouvement vertical des corps pesants dans le vide (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES). Une poulie M (fig. 1) repose par son axe sur quatre autres poulies ou galets N, N, dont les tourillons sont portés par des supports fixes. Sur la gorge de cette poulie M, rendue très-mobile par la disposition qu'on vient d'indiquer, puisqu'elle remplace le frottement de glissement des tourillons sur leurs appuis par un frottement de roulement (Voy. FROTTEMENT), s'enroule un cordon délié, qui supporte à ses extrémités deux poids P et Q parfaitement égaux, et qui demeurent en repos dans l'état ordinaire. Mais si l'on place sur le poids P un poids additionnel p, le poids P descendra, et le poids Q montera. On démontre que les lois de ce mouvement sont les mêmes que si le poids p tombait verticalement dans le vide; mais l'accélération est notablement diminuée. En effet, la machine, réduite à sa plus simple expression, se compose d'une poulie très-mobile A (fig. 6) sur laquelle s'enroule un fil très-flexible aux extrémités duquel sont appliqués deux poids égaux P et Q, et le poids additionnel p. Soit T la tension du cordon de droite et T' la tension du cordon de gauche. Le poids P + p étant animé d'un mouvement de translation, l'accélération j de ce mouvement a pour valeur la somme des projections des forces qui sollicitent le corps, sur la direction du mouvement, divisée par la masse du corps (Voy. ACCÉLÉRATION, TRANSLATION), ou $P + p - T$ divisé par $\frac{P + p}{g}$;

on a donc

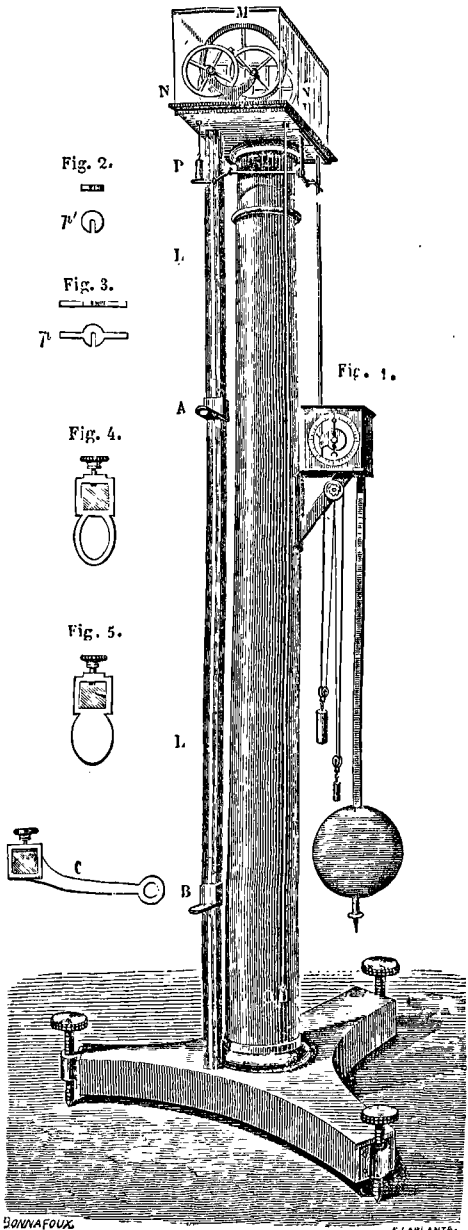
$$j = g \cdot \frac{P + p - T}{P + p} \quad [1]$$

Le mouvement du poids Q étant aussi un mouvement de translation, son accélération s'exprimera de la même manière, en remarquant qu'ici c'est T' qui est la force mouvante et Q qui est la force résistante; d'ailleurs cette accélération est la même que pour le poids P + p, car le fil étant supposé inextensible, l'un de ces corps monte d'une quantité précisément égale à celle dont l'autre descend; les espaces qu'ils parcourent dans un même temps sont donc égaux; il en est donc de même de leurs vitesses, et, par suite, de leurs accélérations; on aura par conséquent

$$j = g \cdot \frac{T' - Q}{Q} \quad [2]$$

Considérons maintenant la poulie; si γ désigne

SON ACCÉLÉRATION ANGULAIRE (Voy. ce mot), la valeur de γ est égale à la somme des moments des forces T et T' qui la sollicitent, pris par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie de la poulie. Les réactions des appuis sur les tou-



rilions peuvent être considérées comme normales si l'on néglige le frottement, leur moment par rapport à l'axe est nul, et disparaîtrait de lui-même. En désignant par q un poids convenablement choisi, et par r le rayon de la gorge de la poulie, on peut représenter son moment d'inertie par

$\frac{2}{g} r$. (Voy. MOMENT D'INERTIE); on a donc

$$\gamma = \frac{Tr - T'r}{g r^2} = g \cdot \frac{T - T'}{qr}$$

d'où

$$\gamma r = g \cdot \frac{T - T'}{q}; \quad [3]$$

mais γr n'est autre chose qu'une nouvelle expression de j , puisque c'est l'accélération à la distance r de l'axe de rotation, c'est-à-dire en un point quelconque de la gorge de la poulie, par exemple en l'un des points de contact du fil avec cette gorge; et, comme le fil est supposé ne pas glisser sur la poulie, la vitesse, et par suite l'accélération d'un point de la gorge, est la même que celle du fil, c'est-à-dire j .

Si l'on ajoute terme à terme

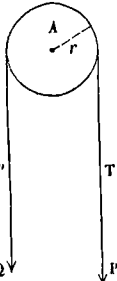


Fig. 6.

les trois fractions égales

$$\frac{P+p-T}{P+p}, \quad \frac{T'-Q}{Q}, \quad \frac{T-T'}{q}$$

on obtient une nouvelle fraction égale

$$\frac{P+p-Q}{P+p+Q+q} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{2P+p+q}$$

dans l'expression de laquelle n'entrent plus les tensions T et T' ; on peut donc écrire

$$j = g \cdot \frac{p}{2P+p+q}; \quad [4]$$

quantité constante. Il en résulte que le mouvement est uniformément varié; sa loi est donc la même que si p tombait librement dans le vide; mais l'accélération est diminuée dans le rapport de p à $2P+p+q$. Si, par exemple, on a

$$p = 20^{\text{gr}}, \quad P = Q = 20^{\text{gr}}, \quad q = 80^{\text{gr}},$$

le rapport dont il s'agit sera celui de 20 à $200.2 + 20 + 80$

ou celui de 20 à 500, ou de 1 à 25; ainsi l'accélération sera rendue 25 fois moindre, et le mouvement deviendra assez lent pour que ses lois puissent être observées.

Nous ferons remarquer avant d'aller plus loin que les premiers membres des équations [1], [2] et [3] étant des quantités positives, il en est de même des seconds, et que par conséquent on a, pendant toute la durée du mouvement,

$$T < P + p, \quad T' < T \quad \text{et} \quad Q < T',$$

d'où il résulte que les quatre quantités

$$Q, \quad T', \quad T \quad \text{et} \quad P + p$$

sont rangées par ordre de grandeurs croissantes.

Nous pouvons maintenant reprendre la description de la machine d'Atwood. Les poids P et Q sont formés de disques échancrés comme le montre la figure 2; le poids additionnel p est un disque analogue, représenté fig. 3, mais présentant deux appendices rectilignes. Derrière le fil qui soutient le poids $P + p$ est disposée une règle LL divisée en centimètres. Le long de cette règle glissent trois curseurs que l'on peut fixer, au moyen d'une vis de pression, en tel point de la règle qu'on le désire. Le premier curseur A, qui est représenté en plan par la figure 4, porte une fourche qui laisse

passer le poids P , mais qui arrête le poids additionnel p . Le second curseur B porte un plan horizontal sur lequel le poids P vient frapper; ce curseur est représenté en plan sur la figure 5. Le troisième curseur C est à fourche comme le curseur A; mais il se rapporte au poids Q . A la colonne qui supporte le système des poulies est fixé latéralement un mécanisme d'horlogerie, dont l'aiguille marque les secondes, et qui, à chaque seconde, fait entendre un battement sec très-distinct, ce qui permet de compter le temps écoulé sans avoir les yeux fixés sur le cadran. Le zéro de la règle LL répond à la partie inférieure du poids P , dans la position la plus élevée. Quand ce poids est dans cette position, on le fait reposer sur un petit support mobile que le mécanisme d'horlogerie fait abaisser quand l'aiguille arrive au zéro du cadran; de cette manière, l'aiguille marque exactement le temps écoulé depuis le départ du mobile.

Voici maintenant comment on vérifie, à l'aide de la machine, les lois de la chute des corps. On détermine d'abord par tâtonnement l'espace parcouru dans la première seconde de chute. Pour cela, on fait varier la position du curseur B jusqu'à ce que le poids P , surchargé d'un poids additionnel p' égal à p , mais d'une forme telle qu'il ne soit pas arrêté en passant dans le curseur A, vienne frapper le plan B à l'instant précis où l'horloge bat la première seconde après le moment du départ. Soit h cette hauteur parcourue pendant la première seconde.

On charge le poids P du poids additionnel p ; on place le curseur B à la distance $4h$ du zéro de l'échelle, et l'on constate que le poids $P + p$ vient frapper le plan à l'instant précis où l'horloge bat la deuxième seconde après l'instant du départ. On place le curseur B à la distance $9h$ du zéro de l'échelle, et l'on constate que le poids $P + p$ vient frapper le plan à l'instant précis où l'horloge bat la troisième seconde après le moment du départ. Les distances parcourues $h, 4h, 9h$, étant proportionnelles aux nombres 1, 4, 9 qui sont les carrés des nombres 1, 2, 3, on reconnaît que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps; ce qui est conforme à la relation $e = \frac{1}{2}gt^2$. (Voy.

MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES.)

On place le curseur A de manière que le poids additionnel p soit arrêté au bout d'une seconde de chute, c'est-à-dire quand le poids $P + p$ a parcouru la distance h . Le mouvement ne continue alors qu'en vertu de la vitesse acquise. Si l'on a placé le curseur B à la distance $3h$ du zéro de l'échelle, on constate que le poids P vient frapper le plan une seconde après l'enlèvement du poids additionnel; il a donc parcouru en une seconde l'espace $3h - h$, ou $2h$ en vertu de la vitesse acquise. Si l'on a placé le curseur B à la distance $5h$ du zéro, on constate que le poids P vient frapper le plan deux secondes après l'enlèvement du poids p ; il a donc parcouru en deux secondes $5h - h$ ou $4h$. Si l'on a placé le curseur B à la distance $7h$ du zéro, on constate que le poids P vient frapper le plan trois secondes après l'enlèvement du poids p ; il a donc parcouru en trois secondes $7h - h$ ou $6h$. Les nombres $2h, 4h, 6h$ étant proportionnels aux

nombres 1, 2, 3, on voit que, dans le mouvement qui succède à l'enlèvement du poids additionnel, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c'est-à-dire que ce mouvement est uniforme. La vitesse dans le mouvement uniforme étant l'espace parcouru dans une seconde, qui est ici $2h$, on voit que la vitesse acquise au bout de la première seconde de chute est le double de l'espace parcouru pendant cette première seconde; ce qui vérifie les valeurs

$$v = g \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2} g,$$

auxquelles se réduisent les équations

$$v = gt \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2} g t^2,$$

lorsque l'on y fait $t = 1$.

On place le curseur A de manière que le poids additionnel p soit enlevé quand le poids $P + p$ a parcouru la distance $4h$, c'est-à-dire au bout de deux secondes de chute. On place le curseur B à la distance $8h$ du zéro. On constate que le poids P vient frapper le plan une seconde après l'enlèvement du poids p ; il a donc parcouru $8h - 4h$, ou $4h$ en une seconde; et, comme on sait qu'après l'enlèvement du poids additionnel le mouvement est uniforme, on voit que la vitesse de ce mouvement est $4h$. La vitesse acquise ayant été trouvée de $2h$ après une seconde de chute, et de $4h$ après deux secondes de chute, on reconnaît que dans la chute des corps la vitesse est proportionnelle au temps; ce qui confirme l'équation $v = gt$.

Après avoir mis le poids P un peu au-dessus du milieu de la règle LL, on place le curseur A de manière que son anneau corresponde à la partie supérieure du poids P; et l'on fixe le curseur C de manière que son anneau soit au niveau de la partie supérieure du poids Q. On amène alors le poids P au zéro de l'échelle; on le charge d'un poids additionnel p ; et l'on place sur l'anneau du curseur C un poids additionnel exactement semblable; puis on met le système en mouvement. Ce mouvement est d'abord uniformément accéléré. Mais, à l'instant où le poids P arrive au curseur A, il abandonne son poids additionnel, retenu par l'anneau, tandis qu'au même instant le poids Q, arrivé à l'anneau du curseur C, se charge d'un poids additionnel exactement égal. Le mouvement continue, en vertu de la vitesse acquise; mais, comme l'action du poids additionnel est alors de sens contraire au mouvement du système, ce mouvement se ralentit de plus en plus; il finit par s'arrêter pendant un instant infiniment court; après quoi il recommence en sens contraire, c'est-à-dire que c'est alors le poids Q qui descend sous l'action du poids additionnel dont il est chargé, tandis que c'est le poids P qui remonte. Or, si l'on a noté avec soin le point précis de l'échelle où le poids P est parvenu avant de remonter, on reconnaît que la distance de ce point au curseur A est égale à celle de ce curseur au zéro de l'échelle; d'où il est facile de conclure que le poids Q, qui avait, en arrivant au curseur C, une vitesse égale à celle que le poids P avait acquise en descendant du zéro de l'échelle jusqu'au curseur A, s'est élevé, d'un mouvement retardé, à une hauteur précisément égale à celle que le poids P avait parcourue pour acquérir cette vitesse. Ceci vérifie un théorème relatif au mouvement vertical des corps

pesants dans le vide, à savoir que le corps lancé de bas en haut avec une certaine vitesse, s'élève à une hauteur précisément égale à celle d'où il faudrait qu'il tombât pour acquérir cette vitesse.

Cette dernière expérience est nécessairement moins précise que les autres, attendu que le choc du poids Q contre le poids additionnel placé à l'avance sur le curseur C diminue un peu sa vitesse.

MACHINE ÉLECTROMOTRICE, machine disposée pour recevoir le mouvement par l'action de l'électricité, et pour le transmettre à un opérateur quelconque. Diverses tentatives ont été faites pour constituer un moteur électrique, en utilisant les propriétés des électro-aimants. Mais on peut dire qu'au point de vue industriel le problème n'est point encore résolu. On a bien imaginé des mécanismes auxquels le mouvement est donné par une action électrique; mais tous les appareils de ce genre sont des instruments délicats qui ne peuvent transmettre que de faibles efforts, et aucun d'eux ne saurait être comparé aux machines puissantes dont l'industrie dispose. M. Froment, l'habile constructeur d'instruments de précision, est celui qui paraît être allé le plus loin dans cette voie; il a établi diverses machines électromotrices, dont il se servait pour diviser les cercles, et qui sont utilisées dans les cours pour faire mouvoir des modèles de transformation de mouvements. Mais la plus forte machine de ce genre n'exécute pas la force d'un cheval-vapeur.

Quoi qu'il en soit, nous donnerons la description sommaire de celle qu'il a construite avec M. Bourbouze pour la Faculté des sciences. A et B (fig 1)

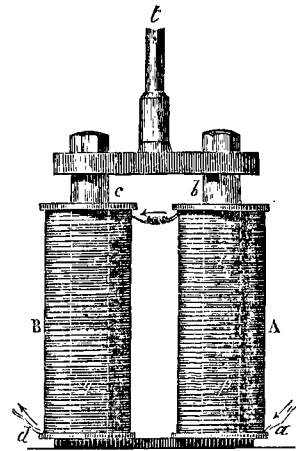


Fig. 1.

sont deux bobines sur lesquelles un fil métallique recouvert de soie s'enroule en hélice, dans un sens opposé sur chacune; en sorte qu'un courant électrique entré par le point a parcourt le fil dans le sens a, b, c, d . Dans l'intérieur de la bobine sont placés quatre barreaux de fer doux; savoir: deux barreaux fixes p et q reliés par une traverse métallique, et deux barreaux mobiles r et s , reliés de même par une traverse métallique, du milieu de laquelle s'élève une tige verticale t qui va s'articuler à l'extrémité d'un balancier mobile autour d'un

axe horizontal passant par son centre. Sous l'influence du courant, les deux barreaux *p* et *q* et leur traverse deviennent un aimant en fer à cheval; il en est de même des barreaux *r* et *s*. Dans ces deux aimants, les pôles du nom contraire se trouvent en regard, en sorte que ces aimants s'attirent; et, comme l'aimant inférieur est fixe, tandis que l'aimant supérieur est mobile, c'est celui-ci qui se déplace en abaissant l'extrémité du balancier à laquelle la tige *t* est articulée. Lorsque le courant est interrompu, les barreaux cessent de s'attirer, et les deux barreaux mobiles peuvent être ramenés à leur position primitive. Concevons qu'un système semblable soit établi à l'autre extrémité du balancier, et que le courant passe alternativement dans le fil des bobines placées à l'une de ces extrémités, puis dans celui des bobines placées à l'autre; les deux extrémités du balancier seront abaissées alternativement, et il prendra un mouvement circulaire alternatif qu'il sera facile de transformer. Dans la machine de M. Froment, une bielle articulée en un point pris sur le prolongement du balancier, fait mouvoir une manivelle montée sur un axe horizontal. Un volant régularise le mouvement de rotation, qui peut être transmis à d'autres organes par les moyens de transformation ordinaires (Voy. TRANSFORMATION DE MOUVEMENTS).

Toute la difficulté consiste donc à faire en sorte que le courant fourni par une pile passe alternativement dans les deux systèmes de bobines. Pour cela, le constructeur a adopté la disposition indiquée en plan par la figure 2. Le fil *mm* en com-

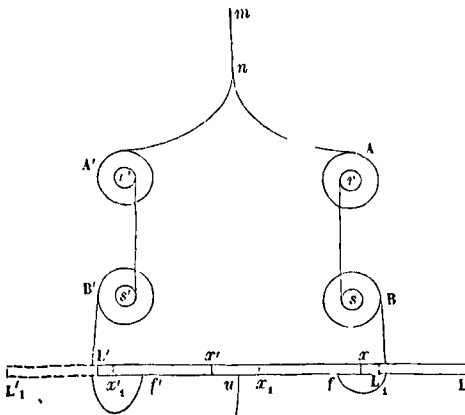


Fig. 2.

munication avec l'un des pôles de la pile se bifurque en *n*; l'une des branches s'enroule sur les bobines A et B qui répondent à l'une des extrémités du balancier, et vient toucher en *f* une glissière LL' dont il sera parlé tout à l'heure; l'autre branche s'enroule sur les bobines A' et B' qui répondent à l'autre extrémité du balancier, et vient toucher en *f'* la même glissière. Cette glissière, qui est en ivoire, est recouverte dans une partie de sa longueur d'une plaque métallique *xx'*, que touche le bout du fil *uv* en communication avec l'autre pôle de la pile. Un excentrique circulaire monté sur l'axe de

la manivelle, communique à la glissière un mouvement alternatif, d'une amplitude telle que la plaque métallique est alternativement en communication avec le fil terminé en *f* et avec le fil terminé en *f'*; en même temps, cette plaque métallique ne cesse pas d'être en communication avec le fil *uv*. Il résulte de cette disposition que le courant passe alternativement par les bobines A et B, et par les bobines A' et B'. Car, dans la position indiquée par la figure 2, le fil terminé en *f'* ne touchant que l'ivoire de la glissière, le courant ne peut passer par les bobines A' et B', tandis qu'il passe librement par les bobines A et B, puisque le fil *f* touche le métal de la plaque *xx'*. Lorsqu'au contraire la glissière a pris la position indiquée par des lignes pointées en L₁L'₁, c'est le fil *f'* qui touche la plaque métallique, tandis que le fil *f* ne touche plus que l'ivoire; le courant passe donc librement par les bobines A' et B', tandis qu'il ne peut plus passer par les bobines A et B.

Le mouvement de cette machine est d'une grande régularité.

MACHINES. On donne le nom de machine à tout corps ou assemblage de corps destiné à transmettre le travail des forces. Pour comprendre comment cette transmission s'opère, il faut considérer que le mouvement d'une machine est généralement périodique, c'est-à-dire qu'au bout de certaines périodes de temps tous les points de la machine reprennent les mêmes vitesses, et que, par conséquent, la puissance vive redevient la même; d'où il suit que, pour chacune des périodes considérées, l'accroissement de puissance vive est nul. En vertu du principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot), la somme algébrique des travaux des forces appliquées à la machine est donc nulle pour une quelconque de ces périodes. Or, la machine reçoit trois espèces de travaux : 1° le travail \mathcal{E}_m exercé par le moteur; 2° le travail \mathcal{E}_r exercé par la résistance principale qu'on se propose de vaincre, c'est-à-dire par les corps sur lesquels la machine est appelée à agir; 3° le travail \mathcal{E}_f des résistances passives, telles que le frottement, la roideur des cordes, etc., travail dans lequel il faut en outre comprendre les pertes de puissances vives dues aux chocs, aux ébranlements, etc. En ayant égard au signe de ces travaux on doit donc avoir

$$\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_r - \mathcal{E}_f = 0,$$

d'où

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_f. \quad [1]$$

Mais le terme \mathcal{E}_r par lequel nous avons désigné le travail exercé sur la machine par les corps soumis à son action, exprime aussi le travail égal et contraire que la machine exerce sur ces corps, c'est-à-dire le *travail utile*. En le désignant par \mathcal{E}_u on a donc en valeur absolue $\mathcal{E}_u = \mathcal{E}_r$, et par conséquent

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_f. \quad [2]$$

S'il était possible de réduire à zéro le travail des résistances passives, on aurait

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{E}_m, \quad [3]$$

c'est-à-dire que le travail exercé par la machine sur les corps soumis à son action serait égal au travail qu'elle a reçu du moteur. Le travail exercé par le moteur serait donc *transmis* par l'intermédiaire de la machine aux corps sur lesquels elle agit, et c'est ce qui a fait donner à l'équation [2] le

nom de *Principe de la transmission du travail*.

En réalité, la transmission n'est jamais complète, attendu que le terme \mathcal{E}_f n'est jamais nul; le travail transmis est toujours moindre que le travail moteur, et le rapport de \mathcal{E}_u à \mathcal{E}_m est ce qu'on appelle le *coefficient d'effet utile* ou le *rendement* de la machine. On tire de l'équation [2]

$$\frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_m} = 1 - \frac{\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_m}; \quad [4]$$

le coefficient d'effet utile est donc toujours moindre que l'unité. Il varie dans les bonnes machines de 0,60 à 0,80. S'il descend au-dessous de 0,60, la machine est médiocre ou mauvaise; elle est au contraire excellente si ce coefficient s'élève au-dessus de 0,80.

L'emploi d'une machine n'a donc pas pour effet d'ajouter à la puissance du moteur. On ne peut même pas dire, comme on l'a dit quelquefois, que par l'emploi d'une machine on gagne en force ce que l'on perd en vitesse, ou que l'on gagne en vitesse ce que l'on perd en force, ce qui ne serait vrai que si le travail moteur était intégralement transmis. On peut dire exactement, au contraire, que l'on gagne toujours moins en force que l'on ne perd en vitesse, ou que l'on gagne moins en vitesse que l'on ne perd en force. Le véritable avantage des machines, ce qui fait qu'il vaut mieux transmettre le travail moteur par leur intermédiaire que de l'appliquer directement aux corps sur lesquels on veut agir, c'est qu'une machine permet, en changeant les facteurs du travail, en augmentant le chemin décrit si l'on ne dispose que d'une petite force, ou en augmentant la force si l'on ne veut faire décrire à son point d'application qu'un court chemin, d'effectuer avec facilité un travail qui serait quelquefois impossible; c'est encore qu'on peut recueillir le travail moteur sur un point donné, et le consommer en d'autres points, souvent fort distants du premier; c'est en un mot que l'on peut faire varier d'une infinité de manières, selon les besoins d'une industrie, l'emploi du travail dont on dispose. Les pertes de travail dues aux résistances passives doivent être réduites autant que possible sans doute, mais elles ne constituent pas un inconvénient comparable aux avantages qui résultent de l'emploi d'une machine bien entendue. (Voy. TRAVAIL, MOUVEMENT PÉPÉTUEL.)

Les machines peuvent être classées de diverses manières, suivant le point de vue auquel on se place. Si l'on ne considère que leur composition plus ou moins complexe, on les divise en MACHINES SIMPLES (Voy. ce mot), telles que le LEVIER, le TREUIL, le PLAN INCLINÉ (Voy. ces mots), et en machines composées, comprenant toutes celles qui ne peuvent être rangées parmi les machines simples. Si l'on a égard au moteur, on distingue les machines mues par l'homme ou par les animaux, les machines mues par l'eau, les machines mues par le vent, les machines à vapeur, les machines mues par les gaz, les machines mues par l'électricité. Si l'on n'a en vue que l'objet auquel la machine doit être appliquée, on a les machines à élever l'eau, les moulins, les machines à débiter les bois, les machines à planer, à alézer, à percer, à filer, etc.; les machines locomobiles, les machines

locomotives, les machines agricoles, etc., etc., dont la nomenclature est en quelque sorte indéfinie.

Quelque compliquée que soit une machine, on n'y distingue que cinq espèces d'organes : le *récepteur*, destiné à recevoir directement l'action du moteur; les *organes de transmission*, qui transforment le mouvement suivant le but qu'on veut atteindre; les *modificateurs instantanés*, qui changent au besoin les conditions du mouvement; le *régulateur*, qui maintient la vitesse entre les limites qu'elle ne doit pas dépasser; et enfin l'*opérateur*, destiné à agir sur les corps soumis à l'action de la machine. Ces diverses espèces d'organes se trouvent réunies dans la plupart des machines un peu complexes.

MACHINES À CALCULER, machines destinées à venir en aide aux calculateurs, en leur permettant de remplacer une partie au moins du calcul mental par des opérations purement mécaniques. Le nombre des tentatives qui ont été faites dans cette voie est considérable, on en trouvera la nomenclature à la suite d'un rapport de Théodore Olivier présenté à la Société d'encouragement en juillet 1843. La plus ancienne machine à calculer connue est le *Souan-pan* des Chinois, qui est encore employé dans tout l'Orient, et qu'on retrouve en Russie dans tous les comptoirs et chez tous les comptables sous le nom de *schtote*; c'est une des variétés de l'Abacus romain, l'origine très-probable de notre système de numération moderne, et le *boulier-compteur* de nos écoles primaires (Voy. ABAQUE). Les autres machines à calculer peuvent être divisées en deux classes : celles qui ne peuvent servir qu'à l'addition et à la soustraction, et celles à l'aide desquelles on peut multiplier et diviser.

A la première classe se rapportent des instruments, sans date ni nom d'auteur, qu'on voit au Conservatoire des arts et métiers. Ils se composent de réglettes chiffrees, mobiles dans des coulisses portant également des chiffres, qui correspondent sur la réglette comme sur la coulisse à des divisions d'égale longueur. Si l'on tire la réglette de manière à l'avancer de a divisions, le trait de rang b de la réglette viendra correspondre, sur le bord de la coulisse, à la somme des nombres a et b . Si au contraire on tire la réglette de manière que le trait de rang b vienne correspondre sur la coulisse au nombre a , le bout ou zéro de la réglette correspondra à la différence des nombres a et b . Il y a autant de réglettes que d'ordres d'unités différents, et l'on peut avec l'instrument additionner ou soustraire des nombres de plusieurs chiffres.

C'est à la même classe qu'appartient la célèbre *Machine arithmétique* de Pascal, inventée en 1642, et dont on trouvera la description complète dans l'Encyclopédie, à l'article *Arithmétique*. Cette machine, réduite à ses parties essentielles, se compose d'une série de roues portant chacune à sa circonférence les chiffres 0, 1, 2, 3, ... jusqu'à 9, qui viennent tour à tour paraître à une lucarne placée au-dessous lorsque l'on fait tourner la roue. Si 3 est le chiffre qui paraît à la lucarne d'une des roues, et qu'on fasse faire à cette roue 4 dixièmes de tour, le chiffre 3 sera remplacé par le chiffre 7, somme des nombres 3 et 4, et l'on aura ainsi fait l'addition de ces deux nombres. A chaque ordre d'unité différent correspond une roue différente;

en peut donc ainsi additionner des nombres de plusieurs chiffres. Pour tenir compte des retenues, Pascal lie les roues consécutives par des échappements qui demeurent immobiles tant que la somme effectuée par chaque roue ne dépasse pas 9, mais dont chacun joue aussitôt que cette somme atteint 10, en faisant tourner d'un dixième de tour la roue suivante placée à gauche. Tel est le principe de cette machine, fort remarquable pour l'époque, si l'on songe surtout que l'inventeur n'avait que dix-huit ans. Quant au mécanisme, il est fort imparfait, et paraîtrait grossier aujourd'hui. Son défaut principal consiste en ce que si tous les chiffres qui apparaissent aux lucarnes sont des 9, et qu'il faille ajouter une unité et reporter par conséquent les retenues successives de plusieurs rangs à gauche, tous les échappements jouent à la fois ; il en résulte qu'il faut exercer un assez grand effort pour opérer ce mouvement si le nombre des ordres d'unités est de 7 ou 8 par exemple, et qu'il y a ainsi une limite forcée au nombre de chiffres sur lesquels la machine peut opérer. La soustraction s'effectue d'ailleurs par des mouvements inverses de ceux qui produisent l'addition.

La machine de Pascal a été imitée à diverses époques et de diverses manières. Le principal perfectionnement qu'elle ait reçu est dû au docteur Roth : il consiste dans la disposition des échappements, qui, au lieu de jouer tous à la fois, opèrent d'une manière successive; en sorte qu'il ne faut exercer qu'une faible pression pour effectuer le mouvement, quel que soit le nombre des chiffres. On trouvera la description de cette machine dans le bulletin de la Société d'encouragement de juillet 1843. La machine de Pascal était disposée pour faire le calcul des livres, sous et deniers; l'additionneur du docteur Roth, et toutes les machines modernes sont entièrement établies d'après le système décimal.

On peut rattacher à la même classe la machine inventée en 1812 par M. Babbage. Elle se compose d'une série d'horloges dont chacune, en sonnante, fait marcher les aiguilles de la suivante. L'emploi de cette machine est fondé sur le principe du calcul des différences, et permet de calculer mécaniquement la valeur numérique des fonctions paraboliques du 4^e degré, de la forme

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

dans lesquelles la différence quatrième est constante. L'horloge de droite donne, ou sonne, la différence constante; les unités de cette différence s'ajoutent à celles de la différence troisième indiquée par l'horloge précédente; celle-ci en sonnante ajoute ses unités à celles de la différence seconde, indiquée par l'horloge précédente; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière horloge à gauche, qui marque la valeur de la fonction y , correspondante à un accroissement donné et constant de la variable x . Cette machine ingénieuse, mais compliquée, était en outre d'un prix excessif; elle avait coûté plus de 400 000 fr. à établir.

A la tête des machines de la seconde classe, il faut placer la RÈGLE À CALCUL (Voy. ce mot), qui a fait tomber dans l'oubli les *baguettes de Néper* décrites par ce célèbre géomètre dans la *Rhabdologia*. Mais ce n'est que dans ce siècle que l'emploi d'un principe mécanique nouveau a permis de construire

de véritables machines effectuant la multiplication et par suite la division. Ce principe introduit pour la première fois dans les machines à calcul par M. Thomas de Colmar, en 1822, a été reproduit en 1849 dans l'*Arithmaurel* de MM. Maurel et Jayet, puis repris par M. Thomas lui-même, qui a fait connaître en 1851, sous le nom d'*Arithmomètre*, la machine à calcul la plus perfectionnée qui ait paru jusqu'à ce jour. M. Binet a rendu compte de la machine de MM. Maurel et Jayet dans un rapport adressé à l'Académie des sciences en 1849, et M. Benoît a décrit l'*Arithmomètre* de M. Thomas dans le bulletin de la Société d'encouragement de mars 1851.

Voici en quoi consiste le principe fondamental de ces deux machines. Un cylindre, mobile autour d'un axe horizontal, est denté sur un peu moins de la moitié de son pourtour; il porte 9 dents, dont la première occupe toute la longueur du cylindre, la seconde les $\frac{8}{9}$ de cette longueur, la troisième les $\frac{7}{9}$, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière qui n'oc-

cupe que $\frac{1}{9}$ de la longueur du cylindre. Un pignon cylindrique de 10 dents, et dont l'axe est parallèle à celui du cylindre, engrène avec lui; mais il peut glisser le long de son axe, de manière à venir se placer sur le premier neuvième de la longueur du cylindre, ou sur le second neuvième, ou sur le troisième, et ainsi de suite. S'il se place sur le premier neuvième, il ne pourra être rencontré que par la plus longue dent du cylindre; en sorte que lorsque celui-ci fera un tour, le pignon ne tournera que d'une dent, ou d'un dixième de tour. S'il se place sur le second neuvième, il sera rencontré par les deux plus longues dents du cylindre; et, à chaque tour de celui-ci, il tournera de deux dents ou de deux dixièmes de tour. S'il se place sur le troisième neuvième, il sera rencontré par trois dents du cylindre; et, à chaque tour de celui-ci, il tournera de trois dixièmes de tour; et ainsi de suite. A l'axe du pignon est lié un bouton à index mobile dans une rainure le long de laquelle sont inscrits les chiffres 0, 1, 2, ..., 9; de telle sorte que pour placer le pignon dans la position où il sera rencontré par n dents du cylindre, il suffit d'arrêter le bouton en face du chiffre n inscrit sur le bord de la coulisse. Perpendiculairement à l'axe du pignon, concevons qu'on ait établi un disque, mobile autour de cet axe avec le pignon, et portant à sa circonférence les dix caractères 0, 1, 2, ..., 9, qui apparaissent tour à tour dans une lucarne verticale. Soit 0 le chiffre qui apparaît. Si l'on fait faire n' tours au cylindre, à chaque tour le pignon tournera de n dixièmes de tour; en n' tours il aura donc tourné d'un nombre de dixièmes marqué par le produit nn' ; et c'est par conséquent ce produit qui apparaîtra à la lucarne verticale. On voit qu'ici c'est le nombre n indiqué par le bouton index qui joue le rôle de multiplicande, et le nombre n' de tours effectués qui joue le rôle de multiplicateur. Tel est le principe fécond sur lequel repose, pour la principale partie, la construction des appareils dont il s'agit, et en particulier de l'*Arithmomètre* de M. Thomas, que notre description aura surtout en vue. En réalité, le disque, au lieu d'être

établi perpendiculairement à l'axe du cylindre, est monté sur un axe perpendiculaire qui reçoit le mouvement du premier par l'intermédiaire d'un engrenage conique; mais les résultats sont les mêmes. Au lieu d'un seul cylindre, il faut aussi en concevoir autant qu'il y a d'ordres d'unités différents au multiplicande; ces cylindres sont parallèles, et mis en mouvement simultané de rotation par l'intermédiaire de roues d'angle, commandées par un même arbre de couche. Tous les disques sont dans un même plan, et toutes les lucarnes sur une même ligne droite horizontale. On comprend déjà que, pour opérer la multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul, il suffirait, si chaque produit partiel ne devait pas excéder 9, de mettre les boutons index des pignons cylindriques en regard des chiffres de leurs coulisses respectives qui indiquent les unités des divers ordres du multiplicande, et de faire faire à tous les cylindres un nombre de tours égal au nombre des unités du multiplicateur.

Mais, comme les produits partiels peuvent dépasser 9, il faut pouvoir tenir compte des retenues. M. Thomas emploie pour cela le même principe que Pascal, mais il l'applique d'une manière différente. Il serait à peu près impossible, sans le secours d'un très-grand nombre de figures, de faire comprendre ce système ingénieux, mais compliqué. Il nous suffira de dire que, chaque fois que l'un des disques, après avoir fait apparaître à sa lucarne le chiffre 9, tourne d'un nouveau dixième et fait apparaître le zéro; il fait, en même temps, agir un *doigt* qui, poussé par un ressort, vient s'interposer entre deux dents du pignon d'angle qui fait mouvoir le disque voisin à gauche, et lui fait faire un dixième de tour supplémentaire. Pour que, dans le cas où plusieurs 9 consécutifs sont inscrits aux lucarnes, la retenue puisse se reporter d'une manière successive d'un ordre d'unités aux ordres supérieurs, les engrenages qui font mouvoir les cylindres sont réglés de telle sorte que l'arbre de couche les fasse tourner d'une manière également successive, quoique à des intervalles très-rapprochés. Le mécanisme n'oppose jamais ainsi qu'une même résistance, quel que soit le nombre des chiffres sur lesquels on opère, et le mouvement de la machine est toujours d'une grande douceur.

Pour multiplier le multiplicande par un nombre formé d'un chiffre significatif suivi d'un zéro, on sait qu'il faut multiplier par ce chiffre significatif, et écrire le résultat au rang des dizaines. Voici comment on fait cette double opération à l'aide de la machine. A chaque disque correspond un cadran portant les chiffres qui apparaissent aux lucarnes. La machine est disposée de telle sorte qu'on peut transporter tous ces cadrans, ainsi que leurs lucarnes, d'un ou plusieurs rangs vers la droite, selon qu'on veut faire exprimer au produit partiel des dizaines, des centaines, des mille, etc.; et les cadrans ainsi déplacés sont mus alors par les cylindres auxquels ils viennent correspondre. Si donc on veut multiplier par 70 par exemple, on pousse tous les cadrans d'un rang vers la droite, et l'on fait faire 7 tours aux cylindres; le produit partiel se trouve effectué, et ajouté en même temps au produit partiel déjà fait. Si l'on veut multiplier par

700, on pousse les cadrans de deux rangs vers la droite, et l'on donne 7 tours de manivelle; le produit partiel s'effectue et s'ajoute aux produits partiels précédents, et ainsi de suite.

Soit, par exemple, à multiplier 5487 par 3269. Après avoir amené aux lucarnes les zéros de tous les cadrans, on écrit avec les index des quatre coulisses de droite les chiffres 5, 4, 8, 7 du multiplicande. On donne 9 tours de manivelle, et l'on voit apparaître aux lucarnes le nombre 49383 produit du multiplicande par 9. On pousse les cadrans d'un rang vers la droite, on donne 6 tours de manivelle, et l'on voit apparaître aux lucarnes le nombre 378603, résultat de l'addition des deux premiers produits partiels. On pousse de nouveau les cadrans d'un rang vers la droite, on donne 2 tours de manivelle, et l'on voit apparaître aux lucarnes le nombre 1476003, résultat de l'addition des trois premiers produits partiels. On pousse enfin les cadrans d'un nouveau rang vers la droite, on donne 3 tours de manivelle, et l'on voit apparaître aux lucarnes le produit total 17937003, résultat de l'addition des quatre produits partiels. Cette opération n'emploie guère plus d'un quart de minute. On peut, en une minute environ, faire ainsi le produit du nombre 99 999 999 par lui-même.

M. Thomas a ajouté à sa machine un dispositif qui dispense de compter les tours de manivelle. Il suffit de placer à l'avance certains index, la manivelle rencontre un arrêt quand elle a fait le nombre de tours voulu.

On comprend qu'une machine qui effectue la multiplication, puisse, par des mouvements inverses, effectuer la division. Dans la machine de M. Thomas, cette opération s'exécute à l'aide d'un mouvement contraire des pignons sur leurs axes, et elle emploie un second système de roues d'angles placées à l'opposé du premier. Nous ne pourrions, sans sortir des bornes imposées à cet article, décrire cette partie du mécanisme, et nous sommes forcés d'omettre beaucoup d'autres détails pour lesquels nous renvoyons au rapport de M. Benoit, ou, ce qui vaudrait mieux encore, à la machine elle-même.

L'Arithmomètre de M. Thomas peut servir à former des puissances et à extraire des racines. C'est donc la machine à calculer la plus parfaite qui ait été construite jusqu'ici. Cependant, malgré l'admiration que cet instrument excite, il est douteux qu'on en tire des avantages pratiques en proportion avec les efforts intellectuels qu'il a coûtés.

MACHINES À COLONNE D'EAU, machines hydrauliques dans lesquelles une chute d'eau est directement employée à produire un mouvement alternatif, qui peut être transmis à toute espèce de mécanisme. L'idée première de ces machines appartient à Bélidor, qui, dans son *Architecture hydraulique*, publiée en 1739, en décrit un appareil de ce genre. Mais cet appareil n'a jamais été exécuté. — On distingue aujourd'hui des machines à colonne d'eau à simple effet, et des machines à colonne d'eau à double effet. — Le meilleur spécimen des machines à simple effet est la machine à colonne d'eau établie par M. Yuncker, dans les mines de plomb argentifère d'Huelgoat, en Bretagne, et dont ce savant ingénieur a donné la description, en 1835, dans les *Annales des mines*. La figure 1 représente cette

machine. Un piston A se meut dans un cylindre vertical BB, ouvert par le haut et fermé par le bas; la tige de ce piston traverse le fond du cylindre à l'aide d'une boîte à étoupes. L'eau de la chute est

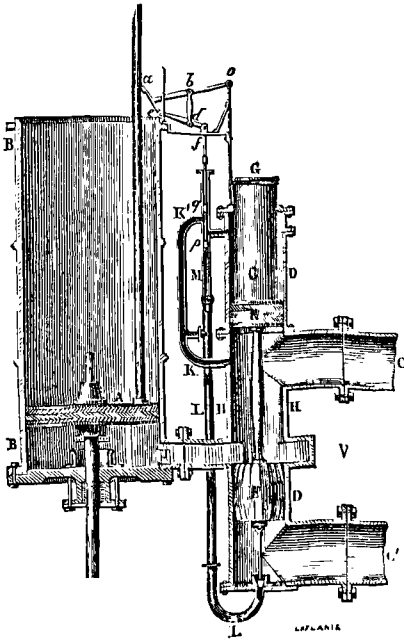


Fig. 1.

amenée par un tuyau C au-dessous de ce piston, et par la pression qu'elle exerce sur sa surface, elle l'oblige à monter. Lorsque le piston est vers le haut de sa course, la communication directe entre le tuyau C et le dessous du piston A se ferme; l'eau introduite au-dessous du piston A est mise en communication avec le tuyau de décharge C', et le piston A redescend par l'effet de son poids et de la pression atmosphérique. Le mouvement de va-et-vient, ainsi imprimé au piston A, est transmis aux pompes qui servent à l'épuisement de la mine.

Pour mettre ainsi le tuyau C en communication tantôt avec le dessous du piston A, tantôt avec le tuyau de décharge C', on emploie la disposition suivante. Les tuyaux C et C', ainsi que le fond du cylindre BB, communiquent avec un tuyau vertical DD, dans lequel se meuvent les deux pistons E et F, liés entre eux par une tige commune; le piston E est surmonté d'un manchon GG, large tige qui traverse, à l'aide d'une boîte à étoupe, la base supérieure du tuyau DD. Lorsque les deux pistons E et F sont dans la position indiquée sur la figure, le tuyau C communique avec le fond du cylindre BB; mais si les deux pistons E et F s'élèvent, de telle sorte que le piston F vienne se placer en HH, la communication entre le tuyau C et le fond du cylindre BB se trouve fermée; l'eau de la chute est conduite par les tuyaux KK' et LL dans le tuyau de décharge, et l'eau introduite au-dessous du piston A communique directement avec le tuyau C'. La marche de la machine dépend donc du mouvement alternatif imprimé aux pistons E et F.

Voici comment ce mouvement est obtenu. L'eau

de la chute communique constamment par le tuyau KK' avec un tuyau vertical MM, faisant suite au tuyau LL, et dans lequel se meuvent deux petits pistons p et q ayant une tige commune; c'est entre ces deux petits pistons que le tuyau KK' s'abouche avec le tuyau MM. Une ouverture i fait communiquer le tuyau MM avec le dessus du piston E. Lorsque le piston p est au-dessous de l'ouverture i le piston E se trouve donc pressé de haut en bas sur l'espace annulaire compris entre les parois du tuyau DD et celle du manchon GG, et de bas en haut sur la face inférieure; d'où il résulte qu'il éprouve une pression de bas en haut sur une surface égale à la section du manchon. Le piston F, de son côté, est pressé de haut en bas sur sa surface supérieure, plus grande que la section du manchon; à cause de la liaison entre ces deux pistons, ils tendent donc à descendre, ou à se maintenir dans la position indiquée sur la figure, où le piston F s'appuie par une tige sur la paroi du tuyau C', en fermant l'ouverture du tuyau LL. Mais si le piston p vient se placer au-dessus de l'orifice i, l'eau introduite au-dessus du piston E s'écoule par cet orifice dans le tuyau MM et de là dans le tuyau de décharge; le piston E n'est plus sollicité que par la pression qui s'exerce sur sa face inférieure; le piston F est d'ailleurs toujours sollicité par la pression qui a lieu sur sa face supérieure; mais comme cette surface est un peu moindre que celle du piston E, le système des deux pistons E et F remonte jusqu'à ce que le piston E soit au bout de sa course, et le piston F dans la position HH.

C'est le mouvement du piston A lui-même qui régit le mouvement alternatif des pistons p et q. La tige du piston q est articulée en f, à l'extrémité d'un levier mobile autour du point fixe e. En un point d de ce levier est articulée une tige verticale bd, également articulée en b avec un autre levier mobile autour du point fixe o. A l'extrémité de ce second levier sont disposées deux cames a et a' qui peuvent être saisies respectivement par les taquets t et t' adaptés à une tringle verticale mobile avec le piston A. Ce piston étant au bas de sa course, comme on le voit sur la figure, le taquet t appuie sur la came a, abaisse le levier ob, par suite la tige bd, le levier ef, et finalement le système des deux pistons p et q. Mais lorsque le piston A en montant arrive vers le haut de sa course, le taquet t' saisit la came a', soulève le levier ob, par suite la tige bd, le levier ef, et finalement le système des pistons p et q.

On peut remarquer qu'à la hauteur de l'orifice U, par lequel l'eau s'introduit sous le piston A, la paroi du tuyau DD est interrompue par une sorte d'évidement V; on a adopté cette disposition pour qu'en passant devant cet orifice, le piston F n'éprouve pas, d'un seul côté, une pression qui aurait pour effet de produire un frottement considérable contre la paroi du tuyau. Ce piston est en outre fendu sur son pourtour, vers le haut et vers le bas, par des cannelures qui ont pour but de rendre moins brusques l'interruption ou le rétablissement de la communication entre le tuyau C et le dessous du piston A. Quand la face supérieure du piston F s'engage dans la partie du tuyau DD supérieure à l'évidement V, l'eau s'écoule encore à travers les cannelures, et l'orifice diminue graduellement jus-

qu'à ce qu'il soit totalement fermé. Il en est de même lorsque la face inférieure du même piston s'engage dans la partie du tuyau inférieure à l'évidement V.

Les tuyaux C et C' sont munis chacun d'une valve circulaire qui permet d'en rétrécir la section et de régler ainsi la dépense.

La machine à colonne d'eau d'Huelgoat se compose en réalité de deux machines jumelles établies l'une à côté de l'autre ; elles sont mises en mouvement par une chute de 60^m de haut. Elles marchent avec une grande régularité et donnent, suivant M. Delaunay, un rendement de près de 0^m,66.

Comme exemple d'une machine à colonne d'eau à double effet, nous prendrons la machine de Saint-Nicolas-Varangeville (Meurthe), établie par M. Pfetsch et décrite dans les *Annales des mines* en 1860. Dans cette machine, les pistons se meuvent horizontalement ; mais le mécanisme serait le même avec des pistons animés d'un mouvement vertical. Le jeu de l'appareil ne diffère d'ailleurs de celui d'une machine à simple effet qu'en ce que l'eau de la chute, au lieu de n'agir que sur l'une des faces du piston principal, agit alternativement sur les deux faces. Ce piston A (fig. 2) se meut dans un cylindre hori-

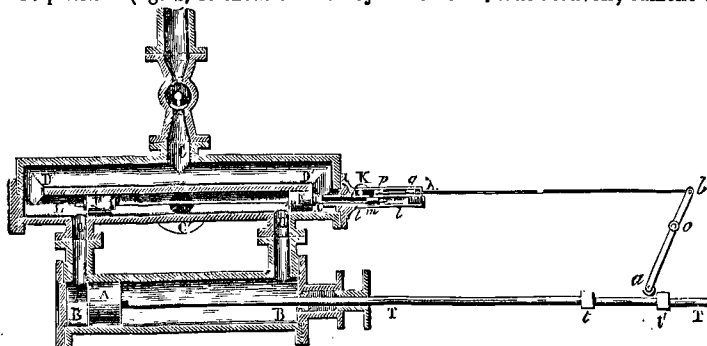


Fig. 2.

zontal BB fermé à ses deux extrémités ; la tige TT de ce piston traverse l'une des bases du cylindre au moyen d'une boîte à étoupes, et transmet le mouvement alternatif du piston à des pompes. L'eau de la chute arrive par le tuyau C, traverse la capacité DD' et pénètre par les orifices D et D' dans le cylindre LL, où se meuvent les pistons E et F, qui ont une tige commune. Sur cette même tige est fixé un troisième piston plus petit m, qui se meut dans un cylindre ll, ayant le même axe. Une ouverture i fait communiquer le cylindre ll avec un autre cylindre ll dans lequel se meuvent deux petits pistons p et q. Dans le cylindre ll est pratiquée une ouverture K par laquelle afflue l'eau de la chute. La tige commune des pistons p et q s'articule en b avec un levier ab, mobile autour d'un axe fixe o. Son extrémité a est comprise entre deux taquets t et t' fixés à la tige TT du piston A, ou à une tige parallèle mobile avec elle. Les choses étant disposées comme l'indique la figure, l'eau de la chute pénètre par l'ouverture D dans le tuyau LL, et de là, par l'ouverture G, dans le tuyau BB, à gauche du piston A, et le fait mouvoir de gauche à droite. En même temps, l'eau de la chute, introduite par l'orifice K dans le tuyau ll, à gauche du

piston p, tend à maintenir le système des pistons p et q dans la position qu'ils occupent. Les trois pistons E, F, m sont maintenus dans la leur par la pression que l'eau exerce de gauche à droite sur la face gauche du piston m. L'eau qui était à droite du piston A s'écoule par l'ouverture H dans le tuyau de décharge C'.

Mais le piston A avançant vers la droite, le taquet t rencontre l'extrémité a du levier ab, le fait mouvoir, et déplace ainsi les pistons p et q. L'orifice K se trouve alors à droite du piston p ; l'eau de la chute pénètre par cet orifice et par l'ouverture i, à droite du piston m, et fait mouvoir vers la gauche le système des trois pistons m, E et F ; les deux derniers viennent respectivement se placer à gauche des ouvertures H et G. Dès lors, l'eau de la chute ne peut plus passer par l'ouverture G, mais elle passe par l'ouverture H, et vient agir sur la surface droite du piston, et le faire marcher de droite à gauche. En même temps, l'eau qui était à gauche du piston A s'écoule par l'ouverture G dans le tuyau de décharge. Le piston A continuant son mouvement vers la gauche, le taquet t' vient à son tour rencontrer l'extrémité a du levier ab, et, en le faisant mouvoir, ramène les pistons p et q dans leur position primitive. L'eau de la chute cesse d'agir sur la face droite du piston m, tandis qu'elle agit sur la gauche ; le système des trois pistons m, E, F se trouve ramené dans la position indiquée sur la figure, et le jeu de la machine recommence.

Ce mécanisme est, en réalité, plus simple que celui des machines à simple effet. La position horizontale des cylindres rend l'installation plus facile, moins coûteuse, et permet

de visiter en tout temps les diverses parties de l'appareil.

Dans la machine de Varangeville, la hauteur de chute est de 163^m, et la dépense par seconde de 3^m,388, ce qui donne pour le travail moteur 633^m,74.

L'effet utile, déduit de l'observation des pompes qu'elle fait mouvoir, est d'ailleurs de 488^m,88. Il en résulte que le rendement est de 0^m,77. — Le piston fait par minute 10 courses simples de 0^m,80.

Les machines à colonne d'eau conviennent dans tous les cas où l'on dispose d'une chute considérable, avec une faible dépense d'eau. Il est facile, au moyen d'un balancier avec parallélogramme de Watt, de transformer le mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston principal en un mouvement circulaire continu, et d'appliquer ainsi la machine à un travail industriel quelconque. (Voy. l'ouvrage de M. Morin ayant pour titre : *Des machines et appareils destinés à l'élevation des eaux* ; le *Traité élémentaire de Mécanique*, de M. Delaunay ; le *Mémoire* de M. Yuncker, et celui de M. Pfetsch, insérés dans les *Annales des mines*, en 1835 et en 1860.)

MACHINES À DIVISER, machines qui servent à tracer des divisions sur les règles, sur les tubes,

d'une manière constante, et l'outil trace des divisions d'égale longueur. Supposons maintenant que l'on veuille tracer des divisions d'inégales longueurs, par exemple, une division plus longue de 5 en 5; les excursions du châssis ne seront plus réglées par le plan d , parce qu'on éloignera suffisamment les vis v et v' ; elles seront réglées par la roue b . Cette roue porte des encoches de distance en distance. Quand elle vient buter contre les vis o ou o' par la partie de sa circonférence intermédiaire entre deux encoches, l'excursion du traçoir est petite, et il trace une petite division; mais si les vis o et o' s'engagent dans une encoche, l'excursion du traçoir est plus grande, et il trace une division plus longue. Pour régler ces alternatives de divisions petites et grandes, on a monté sur l'axe de la roue b une petite roue à rochet r , qui est solidaire avec elle. Un cliquet ou doigt, fixé à l'extrémité de la tige h , s'engage dans les dents de ce rochet. Lorsque le traçoir est amené en avant, l'extrémité h est amenée en arrière, le doigt pousse le rochet, et fait ainsi tourner la roue solidaire b ; quand le traçoir revient en arrière, le doigt échappe des dents du rochet sans le faire tourner. On voit qu'à chaque division que l'on trace, la roue b tourne ainsi d'une certaine quantité, et cette quantité est réglée de telle sorte, qu'à chaque cinquième division, par exemple, la roue b présente aux vis o et o' une de ses encoches, ce qui fait tracer une division plus longue. — Le chariot porte en m un microscope qui permet d'observer les divisions et de s'assurer de leur régularité; il est d'ailleurs muni de tous les mouvements de rappel nécessaires pour donner à la marche de l'outil une direction parfaitement perpendiculaire à l'axe de la vis motrice.

Voici maintenant le mécanisme qui règle l'intervalle des divisions. La roue E , montée sur l'axe de la vis, porte 100 divisions; il en résulte que lorsqu'elle tourne de n divisions, la vis avance de n centièmes de millimètre. Par l'intermédiaire d'un engrenage, on peut, en agissant sur la manivelle M , faire tourner la roue E et observer le nombre de divisions de cette roue qui passent devant un repère fixe. Mais afin de rendre l'opération indépendante, pour ainsi dire, de l'attention de celui qui l'exécute, on a adopté une disposition

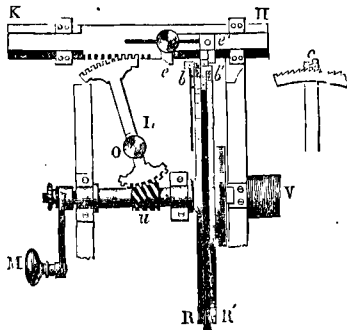


Fig. 2.

qui règle l'écartement des traits d'une manière en quelque sorte automatique, et qui évite les chances d'erreurs. Cette disposition est représentée figure 2, en plan — L'arbre de la manivelle M est indépen-

dant de la vis motrice V . Sur cet arbre est montée une roue à rochet R de 100 dents. En face, et sur l'axe de la vis, est montée une roue semblable R' . La première porte un cliquet c , représenté à part, et qui s'engage dans les dents de la seconde. Si l'on fait tourner la manivelle dans le sens de la flèche de la figure 1, sens que nous appellerons direct, le cliquet de la roue R pousse les dents de la roue R' , et la manivelle fait ainsi tourner la vis; mais si l'on fait tourner la manivelle en sens contraire de la flèche, sens que nous appellerons inverse, le cliquet glisse sur les dents de la roue R' sans la faire tourner. La vis ne tourne donc que lorsque la manivelle tourne dans le sens direct. — La roue R porte, en regard de ses 100 dents, 100 divisions égales; en face du zéro de ces divisions est fixé un butoir b . Un second butoir semblable b' est établi à l'extrémité d'une alidade mobile placée entre les deux roues, sur l'axe de la manivelle. En faisant varier la position de l'alidade on règle aisément la distance angulaire qui sépare les deux butoirs. Ces butoirs viennent rencontrer deux pièces e et e' , en saillie sur une règle KH , mobile entre des guides dans le sens de sa longueur; ces pièces e, e' sont ce que l'on appelle des enclumes. Quand la manivelle tourne dans le sens direct, le mouvement se continue jusqu'à ce que le butoir b vienne rencontrer l'enclume e , placée sur son passage; quand la rotation a lieu dans le sens inverse le mouvement se continue jusqu'à ce que le butoir b vienne rencontrer l'enclume e' . On voit que la vis motrice ne peut avancer ainsi que de la quantité correspondante à l'espace angulaire des deux butoirs, et que par un mouvement alternatif, limité par les enclumes elles-mêmes, l'opérateur fait avancer la vis de quantités rigoureusement égales, et qui ont été réglées à l'avance. Si, par exemple, on veut que la vis motrice avance d'un demi-millimètre à chaque fois, il suffit de placer l'alidade de manière que l'espace angulaire qui sépare les butoirs soit exactement de 180° . (Le plan de la face supérieure de l'une des enclumes étant supposé coïncider exactement avec la face inférieure de l'autre, afin de ne pas être obligé d'avoir égard à l'épaisseur des enclumes.)

Ce dispositif suffit pour assurer l'égalité entre les espaces qui séparent les divisions, toutes les fois que cet espace ne dépasse pas 1 millimètre. Mais si l'intervalle doit surpasser 1 millimètre, il faut un dispositif spécial. Voici en quoi il consiste.

Sur l'arbre de la manivelle est établie une vis sans fin u , qui engrène avec l'une des extrémités d'un levier L , mobile autour d'un axe O . L'extrémité opposée du même levier engrène avec une crémaillère taillée sur la tranche de la règle KH . Il en résulte que la manivelle, en tournant, fait avancer ou reculer la règle dans le sens de sa longueur. Il n'y a donc qu'à régler l'intervalle des enclumes, de telle sorte que le butoir b vienne rencontrer l'enclume e au bout du nombre de tours et fraction de tour correspondants à l'espace qui doit séparer les divisions, le butoir b' étant en contact avec l'enclume e' au commencement du mouvement.

A l'aide de ces dispositions, on trace des divisions dont l'intervalle peut varier depuis 1 centième de millimètre jusqu'à plusieurs millimètres.

La partie de la machine qui sert à régler l'inter-

valle des traits porte le nom de *compteur* ; mais on donne aussi ce nom à la partie qui sert à régler la longueur des traits.

MACHINES À DIVISER LES CERCLES. Dans ces machines, le cercle à diviser est établi concentriquement sur un plateau horizontal, susceptible de tourner autour d'un axe vertical passant par son centre, et mis en mouvement par une *VIS TANGENTE* (Voy. ce mot), à l'aide d'une manivelle. Un traçoir mobile dans le sens du diamètre, afin de pouvoir atteindre le limbe, quel que soit le rayon du cercle à diviser, trace des divisions dirigées vers le centre. La figure 3 montre cette disposition. A est le plateau mobile autour d'un axe vertical dont on aper-

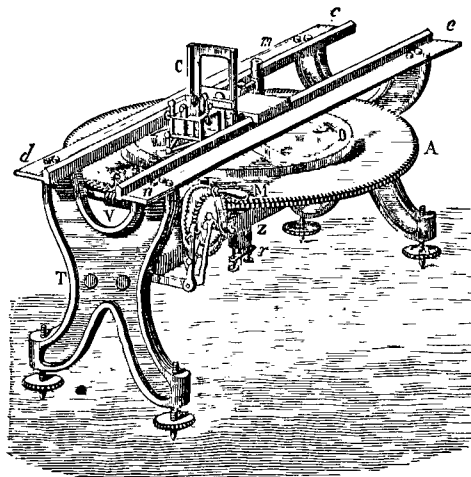


Fig. 3.

çoit en Z l'extrémité inférieure ; B est le cercle à diviser, placé concentriquement au plateau ; cd et ef sont des rails parallèles à un diamètre du plateau, et sur lesquels glisse le chariot C, analogue à celui de la figure 1 et portant le traçoir qui se meut suivant un diamètre ; M est la manivelle qui fait tourner la vis tangente V, laquelle donne le mouvement au plateau. Cette vis est munie d'un *compteur* analogue à celui qui a été décrit pour les machines à diviser la ligne droite. On règle à l'aide de ce compteur la quantité dont la vis tangente doit tourner, et par suite la quantité angulaire dont doit tourner le plateau A pour chacune des divisions à tracer. Le plateau a ordinairement 720 dents, dont chacune répond par conséquent à un demi-degré. Son axe est un tronc de cône en acier qui repose par l'intermédiaire d'un ressort, dans une crapaudine en bronze fixée au support T.

La difficulté principale de l'opération consiste à bien centrer le cercle à diviser. Pour y parvenir, on le fixe d'abord sur le plateau avec de la cire molle ; et, à l'aide d'un *COMPARATEUR* (Voy. ce mot) fixé à l'un des rails, on s'assure que la distance de chaque point de la circonférence du cercle à diviser au centre du plateau est exactement la même, ce qu'on reconnaît lorsque, dans une rotation complète du plateau, l'aiguille du comparateur reste à la même division. On fixe alors le cercle avec un mélange de cire et de résine appelé *aranson*, et l'on

procède à la division du limbe. L'opération du centrage est une opération délicate, mais indispensable, surtout s'il s'agit de diviser le limbe d'un instrument de Géodésie ou d'Astronomie.

MACHINES AGRICOLES. Machines employées dans les divers travaux auxquels donne lieu la culture des terres et l'exploitation immédiate des récoltes. Ces machines sont très-nombreuses, non-seulement à cause du nombre de leurs espèces, mais encore à cause du nombre des variétés de chacune de ces espèces. Pour n'en citer qu'un exemple, nous ferons remarquer qu'au Conservatoire des Arts et Métiers il n'existe pas moins de cent modèles de charrues distinctes. On comprend que nous ne puissions, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, entrer dans de pareils détails au sujet des instruments d'agriculture ; nous ferons connaître les principaux, et nous renverrons pour les autres aux traités spéciaux sur l'agriculture, et en particulier au *Livre de la ferme*, publié sous la direction de M. Joigneaux.

La plus importante des machines agricoles est sans contredit la *charrue*, qu'on retrouve dès la plus haute antiquité chez tous les peuples qui se sont adonnés à la culture des terres. Malgré le grand nombre des variétés de cet instrument, on y distingue un certain nombre de parties essentielles qui se retrouvent dans toutes, depuis la plus primitive jusqu'à la plus perfectionnée.

Nous décrivons particulièrement la *charrue simple* ou *l'araire* (fig. 1), qui est employée dans beaucoup de localités, notamment dans le midi de la France. L'araire, représentée en élévation et en plan par la figure 1, se compose du *soc* A, du *coutre* B, du *versoir* C, de l'*avant-soc* D, du *regulateur* E, de l'*âge* FF, du *sep* G, des *mancherons* H, des *étançons* I, I, et quelquefois du *sabot* ou *ped* K.

Le coutre, le soc et le versoir sont les parties principales de la charrue. Ils forment avec l'avant-soc ce qu'on appelle les *organes actifs*. Le coutre a pour mission de fendre la terre verticalement pour ouvrir le passage aux étançons et de séparer du guéret, partie du sol située à gauche de la charrue et non entamée encore, la bande de terre qu'il s'agit de retourner. L'assemblage du coutre avec l'âge se fait de différentes manières ; dans les charrues les mieux entendues, le coutre est adapté à gauche de l'âge au moyen de deux bandelettes de fer que l'on serre avec des écrous. Le soc a pour mission de couper la terre horizontalement et de commencer à soulever la bande de terre à retourner. Dans l'araire, il affecte le plus souvent la forme d'un triangle rectangle adapté à la droite du sep par l'un des côtés de l'angle droit ; c'est l'hypoténuse qui sert de tranchant. Pour favoriser son entrée on donne à la pointe située en avant une légère inclinaison vers le bas. La fonction spéciale du versoir est de tordre la bande de terre détachée par le soc et le coutre, et de la renverser à droite. Il présente pour cela une surface droite, qui, se raccordant vers l'avant avec celle du soc, va en se redressant vers l'arrière et vers la gauche. Les deux principaux efforts que le versoir ait à vaincre sont la résistance du prisme de terre à la torsion, et le frottement que ce prisme exerce. On diminue la première résistance en allongeant le versoir de l'avant à l'arrière ; mais en même temps

on augmente le frottement; il y a donc une longueur de versoir qui est la plus avantageuse et qu'il convient d'adopter. On a quelquefois comparé l'effet du soc et du versoir à celui de deux coins placés à angle droit l'un sur l'autre; la surface contournée du versoir servirait, dans cette hypothèse, à lier d'une manière continue le premier coin au second. On a souvent essayé de déterminer mathématiquement la surface du versoir pour obtenir le minimum de résistance; mais les hypothèses qu'il faut faire pour rendre le calcul praticable s'éloignent trop de la vérité pour que ce genre de question soit autre chose qu'un jeu d'esprit. Le plus sûr est d'interroger l'expérience; et cela est d'autant plus nécessaire que la forme du versoir doit varier suivant la nature du terrain; dans un sol tenace il faut se servir d'un versoir allongé; on peut, au contraire, dans les terres légères, employer un versoir raccourci. Le versoir se faisait autrefois en bois; on préfère aujourd'hui la fonte qui s'use moins vite et permet de conserver au versoir la forme qui a été reconnue la plus avantageuse.

Le moyen qui a le mieux réussi pour déterminer cette forme consiste à faire d'abord le versoir en bois; au bout d'un certain temps le frottement use les parties exposées à un excès de résistance, et le versoir prend de lui-même la forme la plus avantageuse; le versoir en bois ainsi usé sert de modèle pour exécuter un versoir en fonte.

On cite encore le *versoir Finlayson*, qui a été employé avec succès en Angleterre; au lieu de présenter une surface continue, il est formé de bandes de fer dirigées dans un sens à peu près parallèle au sep, mais auxquelles on peut faire prendre la courbure la plus favorable à l'effet qu'on veut obtenir.

L'avant-soc n'existe pas toujours; c'est une imitation en petit du soc et du versoir; sa fonction est d'écroûter le sol à quelques centimètres et d'enfourer plus sûrement les mauvaises herbes.

Le régulateur se compose d'une tige verticale qu'on peut fixer à différentes hauteurs en avant de l'âge, en la faisant glisser dans une mortaise pratiquée à cet effet, et d'une branche horizontale s'étendant à droite et présentant la forme d'une

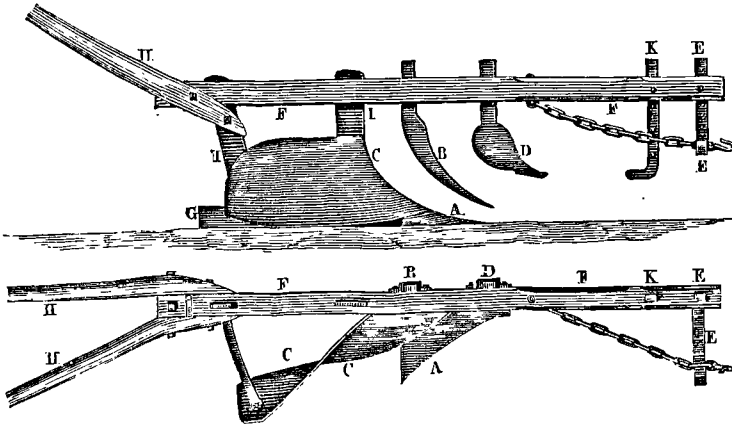


Fig. 1.

crémaillère. C'est par l'intermédiaire d'une chaîne fixée par un bout à l'âge, près de l'avant-soc, et introduite par l'autre bout entre deux dents de la crémaillère, qu'on règle le point d'attelage, et, par suite, la profondeur et la largeur du labour. Le sillon est d'autant plus profond que le point d'attache est plus élevé par rapport à l'âge; ce sillon est d'autant plus large que le point d'attache est plus éloigné de l'âge, ou de l'axe de la charrue, attendu que le tranchant du soc (l'hypoténuse) se présente alors moins obliquement. — Dans quelques charrues, le régulateur est fixe et ne peut être ni élevé ni abaissé; dans ce cas, il ne règle que la largeur du labour. Pour régler la profondeur, on se sert alors du sabot K, dont le bout, en posant sur le sol, empêche le soc de pénétrer plus profondément. Mais le frottement du sabot a l'inconvénient d'accroître le tirage.

L'âge est généralement rectiligne; cependant on lui a quelquefois donné une légère courbure vers le haut; on le fait en bois dans les charrues françaises et belges; il est en fer dans la plupart des charrues anglaises.

Le sep est la pièce inférieure à laquelle s'adaptent le soc et le versoir, et dont la face de dessous, appelée *semelle*, glisse sur le fond du sillon. Il est réuni à l'âge par les étançons.

Les mancherons sont fixés à la partie postérieure de l'âge; ils servent au laboureur à régler le mouvement de la charrue et à remédier aux inégalités de sa marche. En appuyant sur les mancherons, il fait basculer la charrue autour de l'extrémité postérieure du sep, et diminue ainsi l'entrure. Il augmente au contraire l'entrure en soulevant les mancherons. Les charrues belges n'ont en général qu'un seul mancheron; mais cette modification a peu d'importance.

Les dimensions et les dispositions accessoires de la charrue varient suivant les localités et suivant la nature du terrain. Nous ne pouvons citer que les noms des plus estimées, telles que la charrue Mathieu de Dombasle, ou charrue Grangé (fig. 2), la charrue Odeurs, la charrue Armelin, la charrue Bodin.

On distingue une autre classe de charrues, ce sont les *charrues à avant-train*. Ce genre de char-

rue a des avantages dans les terrains peu accidentés, parce qu'elle offre plus de stabilité et qu'elle est plus indépendante de la direction donnée par le laboureur, et qu'elle fait par conséquent un travail

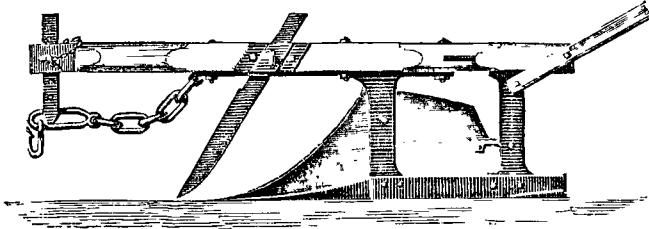


Fig. 2.

plus régulier. Mais il n'en est plus de même dans les terrains qui offrent des accidents nombreux et rapprochés; il est difficile alors d'obtenir un labour uniforme. D'ailleurs l'avant-train augmente le tirage, et c'est un des grands inconvénients de ce genre de machines. — On peut remarquer qu'une charrue à avant-train ne doit pas être gouvernée comme l'araire. Pour obtenir plus d'enture, il faut peser sur les mancherons, tandis que c'est l'inverse dans la conduite de l'araire. Il est essentiel que l'avant-train soit le plus léger possible; l'une des charrues à avant-train les plus estimées est la charrue Howard.

Dans les labours superficiels, qui ne donnent lieu qu'à une faible résistance, on fait usage de charrues à plusieurs socs, auxquelles on donne le nom de *polysocks*. Dans les labours de défoncement, on fait usage au contraire de charrues à un seul soc, très-solides, et offrant un versoir dont les dimensions soient en proportion avec l'épaisseur de la bande de terre à retourner: telle est la charrue Morton, avec laquelle on entame le sol à 40 centimètres, et à laquelle on attelle jusqu'à 8 et 10 chevaux. Si le sous-sol peut être, sans inconvénient, mêlé avec le sol même, on suit quelquefois une autre méthode; on ouvre le sol avec une charrue ordinaire, que l'on fait suivre immédiatement d'une seconde plus puissante et pourvue d'un versoir très-incliné afin de ramener à la superficie la terre du sous-sol: telle est la charrue Bonnet. Si le sous-sol ne peut être sans inconvénient mêlé avec le sol même, on fait usage d'une charrue sans versoir, ou *charrue sous-sol*, que l'on fait marcher dans le sillon ouvert par une charrue ordinaire: telle est la charrue sous-sol de Read. — Enfin, dans les labours à plat, où toutes les bandes de terre doivent être versées dans le même sens, on emploie des charrues à versoir mobile, dites *charrues à tourne-oreilles*; ces charrues sont généralement défectueuses.

On donne le nom d'*extirpateur* à une sorte de charrue polysock, composée d'un bâti, de forme variable, supportant un certain nombre de socs triangulaires à double tranchant, précédés d'autant de coutres. Si l'on imagine qu'on ait supprimé les socs pour ne conserver que les coutres, on a ce qu'on appelle un *scarificateur*. Cependant on donne aussi le nom de *scarificateur* à des instruments qui n'ont que les socs sans coutres.

La *herse* est un instrument que l'on emploie pour faire disparaître les inégalités du sol après le la-

bour, briser les mottes de terre, et préparer le sol à recevoir les semences. Une herse se compose d'un bâti en bois de forme variable, armé inférieurement de dents en bois dur ou en fer, que l'on fait traîner sur le sol par un attelage. Le bâti est ordinairement construit dans un plan; cependant, quand le terrain est disposé en sillons étroits et présentant une convexité très-prononcée, on se sert de herse dont le bâti offre la même courbure. On peut citer encore la herse norvégienne, où les dents sont remplacées par des étoiles à pointes aiguës, placées

verticalement, et mobiles autour d'axes horizontaux; cet instrument, très-lourd et très-puissant, est employé dans les terres rebelles à l'ameublissement.

Le *rouleau* employé, dans les terres légères, pour faire disparaître les dernières inégalités du sol, est un cylindre en bois, mobile autour d'un axe horizontal, fixé à un bâti auquel on applique l'attelage. Dans les terres argileuses on emploie, pour le même objet, soit un *rouleau à chevilles*, soit le *rouleau squelette*, composé de disques tranchants juxtaposés, soit le *rouleau Crosskill* ou le *rouleau de Grignon*, dont les disques présentent à leur circonférence des dents crochues propres à déchirer les mottes de terre. Sur un terrain très-irrégulier, on peut faire usage du *rouleau articulé de M. Claes*, composé de tronçons cylindriques tournant autour d'un même axe, mais assez librement pour pouvoir, au besoin, s'élever ou s'abaisser sur leur essieu. Sur les terres disposées en billons, on se sert de *rouleaux coniques* composés de deux troncs de cône réunis par la petite base. Les rouleaux sont souvent surmontés d'un plateau ou d'une caisse, portant sur l'axe, et que l'on peut charger de matières pesantes pour augmenter la compression.

Un *semoir* est une machine destinée à répandre uniformément la semence sur le terrain préparé pour la recevoir. On en distingue deux espèces principales: le *semoir à lanterne* et le *semoir à brouette*. Le premier se compose d'une boîte ou capsule en fer-blanc, formée de deux troncs de cône réunis par leur grande base à une bande cylindrique percée de trous; cette capsule est portée sur deux roues, et tourne en même temps qu'elles. On la remplit aux deux tiers environ de la graine qu'on veut semer; on ferme l'orifice par lequel la graine a été introduite; et l'on conduit la machine sur les sillons; la graine s'échappe par les trous de la bande cylindrique de la capsule, et tombe régulièrement dans le sillon que l'on suit. — Le semoir à brouette le plus simple se compose d'une trémie A (fig. 3) portée sur une brouette, et contenant la graine à semer; le fond de cette trémie est formé par la surface d'un cylindre qui reçoit, par l'intermédiaire d'une courroie sans fin, un mouvement de rotation en rapport avec celui des roues; la surface de ce cylindre est creusée de trous dans lesquels la graine se loge lorsqu'ils passent sous la trémie, mais d'où elle tombe sur le sol, quand ils arrivent au dehors: tel est le *semoir Dombasle*. Pour empêcher la semence de passer entre le cy-

lindre et les parois de la trémie, on garnit celle-ci de brosses qui forment une clôture suffisante sans gêner le mouvement du cylindre. On a construit des semoirs à brouette, dans lesquels le cylindre,

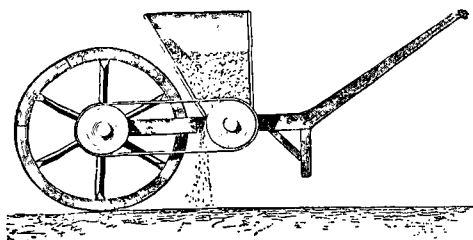


Fig. 3.

au lieu d'être placé au dehors de la trémie, est placé à l'intérieur, tout près d'un orifice longitudinal inférieur, par lequel la graine s'échappe, et tombe sur le sol en suivant un canal spécial ou une simple planche inclinée : tel est le *semoir Tull*. Dans cet appareil, la brouette porte à sa partie postérieure un râteau qui sert à recouvrir de terre la graine semée. On comprend qu'en allongeant le cylindre et en élargissant la trémie, on puisse opérer sur une bande de terrain plus large ; mais il faut alors un cheval pour mettre en mouvement l'appareil. On a imaginé des semoirs plus complexes, pour la description desquels nous renverrons aux traités spéciaux d'agriculture. Ces appareils compliqués obtiennent en général peu de succès ; la simplicité et le bon marché sont des conditions essentielles à remplir dans la construction des machines agricoles. — Pour les céréales, les semoirs sont rarement employés ; l'ensemencement à la volée est celui qui paraît réussir le mieux.

La *houe* est un instrument dont on se sert pour les *binages*, façons que l'on donne à la terre après les semailles, pour entretenir son ameublissement et la débarrasser des mauvaises herbes. Nous ne parlerons ici que de la *houe à cheval*. Une des meilleures est celle de M. Mathieu de Dombasle. Elle se compose d'un châssis triangulaire qui porte à son sommet antérieur une tige verticale armée d'un soc, et sur son pourtour quatre autres tiges semblables armées de couteaux à lame horizontale dont le tranchant est tourné vers l'avant. L'instrument est mis en mouvement par un attelage ; et on le guide à l'aide de mancherons comme une charrue. On fait usage, en Angleterre, de houes à cheval montées sur roues, et à l'aide desquelles on peut biner plusieurs lignes à la fois. Dans l'une des plus renommées, la *houe de Garrett*, les lames sont des couteaux recourbés à angle droit qui font en même temps office de coutre et de soc. Dans la *houe de Barrett*, également estimée, les lames sont des socs triangulaires dont on peut faire varier le point d'attache sur l'avant-train.

On donne le nom de *buttoir* à une espèce de charrue à deux versoirs, dont les ailes peuvent être écartées ou rapprochées. Cet instrument sert à élever des monticules de terre au pied de certaines plantes semées en lignes écartées, comme le maïs, le pavot, la betterave, etc.

La *moissonneuse*, dont le nom indique assez la

fonction, est une machine en général assez compliquée. Elle se compose d'un véhicule mis en mouvement par deux chevaux ; l'une des roues de ce véhicule est armée, à sa circonférence, de saillies, qui pénètrent dans le sol pour accroître la résistance. Une couronne dentée montée sur l'axe de cette roue transmet à une scie, placée près du sol, un mouvement de va-et-vient rapide, dans un sens transversal, à la voie que suit le véhicule, mais en dehors et à droite de cette voie. A droite et en arrière du véhicule principal est une plate-forme inclinée portée sur de petites roues ; sa partie antérieure est armée d'une rangée de piques qui pénètrent parmi les tiges et les maintiennent, pendant que la scie les coupe par le bas ; et une sorte de versoir en bois, appelé le *séparateur*, sépare ces tiges du reste du champ. Elles tombent ainsi sur la plate-forme, d'où un ouvrier, désigné sous le nom de *javelleur*, les rejette sur le sol derrière le véhicule principal. Telle est la moissonneuse de MM. Burgett et Key. Elle exige le travail de deux hommes et de deux chevaux, ou même quatre pour une journée de 10 heures. Il en existe beaucoup d'autres, mais plus compliquées encore. Ces machines, qui sont récentes, quoique leur principe soit fort ancien et se retrouve dans le chariot à moissonner dont se servaient les Gaulois, sont loin d'être arrivées au degré de perfection, et, par conséquent, de simplicité, auquel elles atteindront probablement un jour.

Les *batteuses*, qui ont pour fonction d'égrener les épis, sont, malgré leurs nombreuses variétés, fondées toutes sur le même principe. Un volant, garni à sa circonférence de lames de fer de 1 centimètre de largeur, tourne rapidement dans l'intérieur d'un tambour fixe garni de lames semblables ; l'espace compris entre l'un et l'autre est à peine de 1 centimètre. On introduit les épis entre ces deux pièces, qui les froissent avec énergie, et les grains séparés de l'épi tombent au dehors du tambour. Il y a des batteuses fixes, établies à demeure pour les besoins d'une seule exploitation, et des batteuses mobiles qui peuvent être transportées de ferme en ferme ; les batteuses fixes sont généralement mues par la vapeur ; les batteuses mobiles peuvent être mises en mouvement, soit par la vapeur, soit par un manège.

Le *tarare* (fig. 4) a pour fonction de passer le grain au crible et d'en séparer par la ventilation les pailles et la poussière. Il se compose d'une trémie A dans laquelle on verse le grain, et qui présente à sa partie inférieure une ouverture qui peut être réglée à volonté, à l'aide d'une petite vanne v. Le grain, sortant de la trémie, tombe, dans une capacité fermée, sur des châssis formés de mailles plus ou moins serrées, et auxquels la manivelle, qui fait mouvoir la machine, imprime en même temps un rapide mouvement de va-et-vient. Le grain, sortant des cribles c, c', descend sur un plan incliné PP' le long duquel il s'écoule, et va tomber au dehors. Mais un volant à ailes planes B, animé d'un mouvement de rotation, et enveloppé par un tambour TT, agit comme ventilateur sur le grain qui descend ; aspirant l'air qui afflue par une ouverture pratiquée près de l'axe, il le lance au dehors par une ouverture opposée, et entraîne dans son mouvement toutes les matières légères. La vi-

tesse de rotation doit être assez modérée pour que l'air n'entraîne pas en même temps le grain lui-même. — Un homme, une femme et un enfant peuvent nettoyer ainsi de 50 à 60 hectolitres de grain par jour.

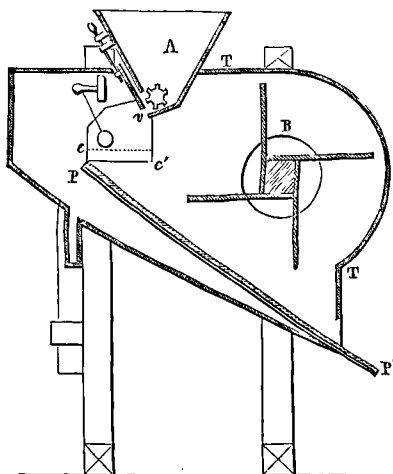


Fig. 4.

Les batteuses mécaniques sont souvent munies de leur tarare, qui agit sur le grain aussitôt qu'il est détaché des épis; il en résulte une économie de temps et d'argent; mais ce système exige une plus grande mise de fonds.

Une *faucheuse*, destinée à couper les herbages, ne diffère pas essentiellement d'une moissonneuse; la différence essentielle consiste dans la substitution d'une lame de faux à une scie, et dans la suppression de la plate-forme inclinée. La même machine peut fonctionner alternativement comme faucheuse et comme moissonneuse.

Une *faneuse* a pour mission de retourner le foin abattu pour hâter sa dessiccation. Nous n'en citons que deux modèles: le *râteau-tournant* (fig. 5)

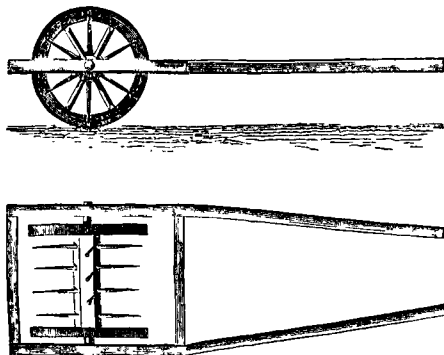


Fig. 5.

et la *faneuse de Nicholson*. — Le râteau tournant est formé d'un axe horizontal à section hexagonale, dont les six faces sont armées de dents analogues à celles d'un râteau. Ce râteau multiple est solidaire avec deux roues, dont l'axe tourne dans un bâti

rectangulaire, auquel on peut appliquer un attelage. — La faneuse de Nicholson est construite d'après le même principe; elle consiste aussi en un certain nombre de râteaux implantés perpendiculairement à un axe, mobile avec les roues d'un véhicule auquel on peut atteler un cheval.

Les *râstleurs*, sortes de grillages auxquels on peut atteler des chevaux pour entraîner les herbages abattus, et le *râteau à cheval*, grand râteau porté sur roues et mis en mouvement par un attelage, contribuent, suivant les cas, à l'opération du fannage.

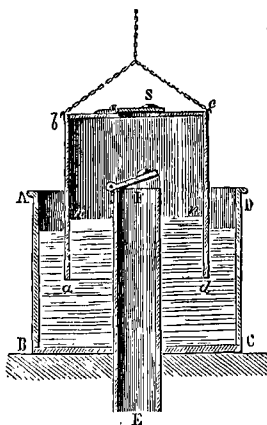
Nous renverrons aux ouvrages spéciaux pour la description des *tord-liens*, des *coupe-racines*, des *broyes* ou *machines à broyer*, etc., et pour toutes les machines secondaires employées dans les exploitations rurales. Ce que nous avons dit suffira pour faire connaître la nature spéciale des machines agricoles, qui doivent, avant tout, réunir la simplicité à la solidité, et, autant que possible, au bas prix.

(Voy. la *Maison rustique*, publiée sous la direction de M. Bailly; le *Livre de la ferme*, publié sous la direction de M. Joigneaux, et les *Traité d'Agriculture*.)

MACHINES ASPIRANTES, machines employées à l'aérage des mines. Une machine aspirante n'est autre chose qu'une pompe aspirante (Voy. POMPES) dont le piston est à soupape, et dans laquelle le corps de pompe est ouvert par le haut. Placée à l'orifice d'un puits de mine, elle aspire l'air du puits à chaque ascension du piston, et le rejette dans l'atmosphère à chaque descente. La quantité d'air extraite ainsi de la mine par le puits où est installée la machine aspirante est remplacée par une quantité d'air égale qui s'introduit par un autre puits; et il en résulte une circulation d'air qui produit l'aérage. — L'air du puits étant à une pression à peu près égale à la pression atmosphérique, le travail dû à l'aspiration et à la compression se réduit sensiblement à zéro, en vertu du théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz (Voy. ELASTICITE). L'effet utile se réduit d'ailleurs à l'élévation d'un poids d'air à une faible hauteur. Il en résulte que les frottements, qui sont ici à peu près les mêmes que si la pompe était employée à élever de l'eau, prennent une très-grande importance, et l'on doit comprendre pourquoi le rendement de la machine est toujours très-faible.

On a employé, dans les mines du Hartz, une disposition ingénieuse, qui a pour effet de faire disparaître le frottement du piston. Le corps de pompe ABCD est rempli d'eau, et le tuyau d'aspiration EF s'élève jusqu'au-dessus du niveau *nn*. La soupape dormante est installée à l'extrémité F de ce tuyau. Le piston est remplacé par une cloche *abcd* qui plonge dans l'eau du corps de pompe à une notable distance des parois de celui-ci. Le fond *bc* de cette cloche porte la soupape *s*; et la cloche, suspendue par sa partie supérieure, peut être alternativement élevée et abaissée. Quand elle s'élève, l'air est aspiré dans la cloche; quand elle s'abaisse, il est expulsé. Deux appareils semblables sont établis l'un près de l'autre, et les deux cloches sont suspendues aux extrémités d'un même balancier auquel une machine motrice imprime un mouvement alternatif. Comme l'air n'a pas à changer notablement de

pression, le niveau de l'eau reste à peu près le même en dedans et en dehors de la cloche. Par ce dispositif, le frottement du piston contre le corps de pompe se trouve remplacé par le frottement de



l'eau contre la cloche, frottement incomparablement moindre; et l'on obtient ainsi un rendement beaucoup plus élevé.

MACHINES À VAPEUR, machines où la vapeur est employée comme force motrice. Ces machines sont une des plus grandes inventions des temps modernes; et l'importance qu'elles ont prise a fait rechercher avec soin à qui l'industrie est redevable de ces puissants engins mécaniques. M. Arago, dans une notice insérée dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, en 1829, a fait l'historique de cette découverte, et M. Figuière l'a développée et complétée, en 1852, dans son ouvrage ayant pour titre : *la Machine à vapeur, son histoire*, etc. Nous en donnerons ici un résumé, en passant sous silence les éolipyles des anciens, sortes de petites machines à réaction; et la *Machine de Branca*, où un jet de vapeur agit sur une roue à palettes, attendu que ces appareils n'ont aucun rapport direct avec les machines à vapeur, quoiqu'on puisse voir à la rigueur dans la dernière la première ébauche de ces machines rotatives.

1. C'est à l'élévation de l'eau que la puissance de la vapeur a été d'abord employée. Dès 1615, Salomon de Caus, Français de naissance, eut l'idée de faire servir la vaporisation de l'eau à l'élévation du liquide lui-même. On se fera une idée de son appareil en se représentant un vase fermé, contenant de l'eau, et dans lequel pénètre un tube vertical ouvert par les deux bouts et plongeant dans l'eau jusque près du fond. Si l'on chauffe l'eau du vase, la vapeur qui se forme ne trouvant point d'issue presse sur la surface de l'eau, et quand la pression est devenue suffisante pour vaincre celle de l'atmosphère, elle fait monter le liquide par le tube vertical, d'où il s'échappe sous forme de jet. Cette expérience très-simple se renouvelle chaque jour sur nos tables dans les appareils qui servent à préparer le café.

Le marquis de Worcester, dans un ouvrage publié, en 1663, sous le titre de *Century of inventions*, décrit un appareil du même genre, mais de dimensions plus grandes. La vapeur se forme dans deux

chaudières sphériques; et l'eau est poussée dans les tubes qui y plongent, s'élève dans ces tubes qui se réunissent, et est reçue dans un réservoir supérieur. Cet appareil n'a vraisemblablement jamais été exécuté.

En 1689, le capitaine Savery fit construire une machine fondée sur le même principe que les deux précédentes, et qui n'en diffère qu'en ce que l'eau à élever n'est pas l'eau même de la chaudière, mais bien l'eau contenue dans un vase séparé; la vapeur est conduite dans ce vase, y chauffe par condensation l'eau contenue, et exerce une pression croissante sur sa surface; quand cette pression est devenue suffisante, l'eau s'élève dans un tube qui s'abouche à la partie inférieure. Quand le vase est vide d'eau, on ferme les communications avec le tuyau d'ascension et avec la chaudière; le vase se refroidit, la vapeur contenue s'y condense. Si l'on ouvre alors une communication avec l'eau contenue dans un réservoir inférieur, cette eau se précipite dans le vase en vertu de la pression atmosphérique. On ferme alors la communication avec le réservoir, et l'on rouvre les communications avec la chaudière et avec le tuyau d'ascension; et le même jeu recommence. Pour éviter les pertes de temps, Savery employait deux vases égaux, communiquant tous deux avec le tuyau d'ascension, et avec la chaudière; mais les communications ne s'établissaient que d'une manière alternative, de telle sorte que la vapeur passait dans l'un des vases pendant que l'autre se refroidissait. Cette machine a été appliquée en grand pour l'élévation des eaux; mais elle ne pouvait les élever à une hauteur considérable sans exiger, de la part de la vapeur, une grande tension; et il en résultait des fuites et des dangers d'explosion qu'on ne savait pas éviter et qui ont empêché de l'employer pour l'épuisement des mines; et aucune tentative nouvelle n'a été faite dans cette voie, sauf un perfectionnement introduit par Papin, dont nous parlerons tout à l'heure, et qui consistait à faire agir la vapeur sur la surface de l'eau par l'intermédiaire d'un piston flottant, afin d'éviter une trop grande condensation de vapeur employée inutilement à chauffer l'eau à élever.

Dès que les travaux de Pascal et d'Otto de Guericke eurent établi la pesanteur de l'air, et mis en évidence la pression que l'atmosphère exerce sur tous les corps qui y sont plongés, les physiiciens songèrent au parti qu'on pourrait tirer de cette force, en quelque sorte indéfinie, pour produire des effets mécaniques. Huyghens proposa d'enflammer de la poudre à canon dans un cylindre vertical parcouru par un piston. L'expansion des gaz provenant de la poudre devait élever le piston jusqu'au bout du cylindre, et chasser la plus grande partie de l'air contenu, en le faisant sortir par une soupape s'ouvrant de dedans en dehors; en se refroidissant, l'air dilaté dans l'intérieur du cylindre devait prendre une tension notablement inférieure à la pression atmosphérique, et dès lors la pression de l'atmosphère sur le piston devait le ramener à sa position primitive, pour recommencer le même jeu; le mouvement alternatif du piston pouvait ensuite, par une transformation convenable, être appliqué à un usage industriel. Mais les essais faits dans cette voie ne donnèrent que de médiocres ré-

sultats, parce que la raréfaction de l'air était insuffisante. — C'est un Français, Denis Papin, né à Blois en 1645, mais réfugié à l'étranger à la suite de la révocation de l'édit de Nantes, en 1685, qui eut, en 1690, l'honneur de résoudre le problème par la substitution de la vapeur à la poudre à canon. Voici en quoi consiste la disposition imaginée par Papin. Dans un cylindre vertical parcouru par un piston, on a introduit une petite quantité d'eau; et l'on a fait descendre le piston jusqu'au niveau de cette eau, l'air s'échappant par une ouverture pratiquée dans le piston et que l'on ferme ensuite. On fait du feu sous le cylindre; quand l'eau a pris la température à laquelle la tension de la vapeur commence à surpasser la pression atmosphérique, le piston soulevé monte vers le haut du cylindre. On le maintient dans cette position au moyen d'un arrêt, et l'on enlève le feu. La vapeur, en se refroidissant, se condense, et il reste sous le piston, non pas le vide, mais de la vapeur à une très-faible tension; si l'on rend alors la liberté au piston, il redescend en vertu de l'excès de la pression atmosphérique sur la faible tension intérieure. On remet le feu sous le cylindre, et le même jeu recommence.

Cette machine n'a été essayée qu'en petit par Papin. Mais elle a été réalisée en grand, en 1705, par Newcomen et Cawley, artisans de Dartmouth, et appliquée avec succès à l'épuisement des mines et à la distribution des eaux dans la ville de Londres. Bien que la machine de Newcomen, dite *machine atmosphérique*, soit aujourd'hui abandonnée, nous la décrivons parce que c'est la première machine à

tige du piston est soutenue par une chaîne S, qui s'applique sur la circonférence d'un balancier à secteurs. La pression atmosphérique qui s'exerce sur le piston est équilibrée en partie par un contre-poids E, soutenu par une chaîne semblable à la première et s'appliquant de même sur la circonférence du balancier, à l'extrémité opposée. Quand le piston est au haut de sa course on ferme le robinet d'admission de la vapeur, et l'on introduit dans le cylindre une petite quantité d'eau froide, qui y est amenée d'un réservoir supérieur par le tuyau D. La vapeur se condense au contact de l'eau froide; et la pression sous le piston se trouvant tout à coup réduite à une très-petite valeur, l'excès de la pression atmosphérique sur cette faible tension fait redescendre le piston, malgré l'action du contre-poids. On rouvre alors la communication avec la chaudière, et le même jeu recommence. Un tuyau qui s'abouche à la partie inférieure du cylindre sert à évacuer de temps à autre l'eau accumulée sous le piston. L'idée d'opérer la condensation par un jet d'eau froide est due à Savery; dans les premiers temps, on opérait le refroidissement en versant de l'eau sur la face supérieure du piston; mais ce moyen était beaucoup trop lent. Cependant ce fut ce moyen qui, dit-on, conduisit à l'autre, parce qu'on remarqua que lorsque des gouttelettes passaient entre les joints du piston et du cylindre, la condensation s'opérait beaucoup plus vite.

Les machines à vapeur demeurèrent dans cet état jusqu'en 1769, époque à laquelle James Watt, ouvrier mécanicien de la ville de Greenock, en Écosse, commença sur ce sujet une série de tra-

vaux qui ont immortalisé son nom. Ses premières tentatives eurent pour objet de perfectionner la machine de Newcomen. Cette machine avait un vice essentiel, c'était le mode de condensation de la vapeur; l'eau injectée refroidissait le cylindre, et la vapeur arrivant dans cet espace refroidi s'y condensait en partie, d'où résultait une perte considérable de chaleur et par conséquent de combustible. Watt eut l'idée d'opérer la condensation dans une capacité spéciale, à laquelle on a donné le nom de *condenseur*; et, par cette amélioration, réalisa sur-le-champ une économie de 75 pour 100 sur le combustible consommé. Une seconde invention capitale due à Watt fut de faire agir la vapeur alternativement sur les deux faces du piston; d'où le nom de *machines à double effet* donné à ces machines, qui cessèrent dès lors d'être des machines atmosphériques, et empruntèrent toute leur puissance à la vapeur elle-même. Une foule d'autres perfectionnements accessoires furent introduits par Watt dans les machines à vapeur, entre autres l'emploi du

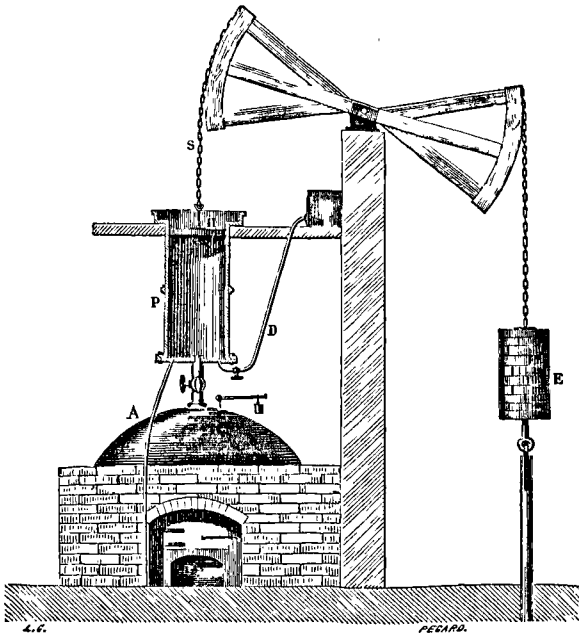


Fig. 1.

vapeur, réellement appliquée à l'industrie, qui ait été construite. La vapeur formée dans la chaudière A (fig. 1) est introduite sous le piston H mobile, dans le cylindre vertical P ouvert par le haut. La

parallélogramme articulé, dit PARALLÉLOGRAMME DE WATT (Voy. ce mot); le RÉGULATEUR À FORCE CENTRIFUGE (Voy. PENDULE CONIQUE); l'application de la MANIVELLE (Voy. ce mot) à la transformation

du mouvement alternatif du piston en un mouvement de rotation continu par l'intermédiaire d'un balancier. C'est encore Watt qui signala le premier tout le parti qu'on pouvait tirer de la DÉTENTE (Voy. ce mot), et qui peut être regardé comme l'auteur de cette modification importante, quoiqu'il ne l'ait pas employée lui-même dans les machines qu'il a construites. — Il ne faut pas qu'un amour-propre national mal entendu nous fasse méconnaître les services rendus à la science mécanique par un étranger. Malgré le génie de Papin, et les idées fécondes qu'il a semées, le véritable inventeur de la machine à vapeur est James Watt, qui a mis à profit sans doute les idées de ses devanciers, mais qui a cependant créé, pour ainsi dire de toutes pièces, une machine complète, admirablement combinée et d'une puissance indéfinie, à laquelle il n'a été apporté depuis lui que des perfectionnements secondaires, si l'on excepte l'emploi des hautes pressions et l'adoption des chaudières tubulaires pour la navigation et des chemins de fer. — Nous décrirons plus loin la machine de Watt; mais auparavant nous devons achever cet historique, déjà un peu long peut-être.

C'est aux machines à simple effet, employées dans les mines du Cornouailles, que la détente a été d'abord appliquée; la détente s'opérait dans le cylindre même. Plus tard sont venues les machines de Woolff, où la détente s'opère dans un cylindre séparé. Les deux systèmes s'emploient encore concurremment aujourd'hui.

L'idée de faire agir la vapeur à haute pression paraît due à Papin; et c'est un mécanicien allemand, Leupold, qui l'a fait connaître d'après lui, en 1724. Mais elle n'a été appliquée que dans les dernières années du dix-huitième siècle par Oliver Evans, en Amérique, et elle n'a été introduite en Angleterre qu'en 1826, par Trévithick et Vivian.

L'invention des chaudières tubulaires, qui a décuplé la puissance des GÉNÉRATEURS (Voy. ce mot), est due à M. Seguin; et dès l'année suivante, c'est-à-dire en 1829, elle a été appliquée par Stephenson aux machines locomotives. Nous ne citerons que pour mémoire les machines à cylindre oscillant de M. Cavé, qui ont été abandonnées presque partout, et les machines rotatives, c'est-à-dire dans lesquelles la vapeur est employée à produire directement un mouvement de rotation, lesquelles n'ont pas encore reçu une forme satisfaisante au point de vue industriel, bien que ce genre de machines paraisse avoir de l'avenir.

II. Si l'on en excepte les machines rotatives, dont nous dirons quelques mots plus loin, toutes les machines à vapeur sont aujourd'hui constituées conformément au type que nous allons décrire.

La vapeur formée dans un générateur, dont la disposition varie suivant les conditions dans lesquelles la machine doit fonctionner (Voy. GÉNÉRATEURS), traverse un conduit que l'on peut ouvrir ou fermer plus ou moins, à l'aide d'une clef d'admission qui fait mouvoir soit un diaphragme mobile, appelé *registre*, soit une soupape spéciale; et cette vapeur se rend dans une première capacité qu'on appelle la *botte à vapeur* ou *botte de distribution*. Dans cette capacité se meut, d'un mouvement alternatif qui lui est communiqué par la machine elle-même, un organe auquel on donne le

nom de *tiroir* , lequel met la botte à vapeur en communication alternative avec les deux extrémités d'un cylindre dans lequel se meut un piston, dont la tige traverse l'une des bases au moyen d'une *botte à étoupes* destinée à empêcher les fuites. Supposons, uniquement pour fixer les idées, que le cylindre soit vertical, et que la vapeur ait d'abord été introduite par le bas. Sa pression fait monter le piston. Quand celui-ci est parvenu à une certaine hauteur, l'orifice d'admission de la vapeur se ferme, et la vapeur introduite continue à pousser le piston vers le haut, mais en se *détendant*, c'est-à-dire en diminuant de pression à mesure que son volume augmente. Quand le piston est arrivé au haut du cylindre, l'orifice qui fait communiquer cette partie du cylindre avec la botte de distribution s'ouvre, et la vapeur introduite agissant sur la face supérieure du piston le fait redescendre. En même temps, le dessous du piston est mis en communication soit avec l'atmosphère, soit avec une capacité spéciale appelée *condenseur*, et la vapeur refoulée dans cette capacité y rencontrant un jet d'eau froide se condense. Quand le piston a effectué une partie de sa course descendante, l'orifice d'admission de la vapeur se ferme, et la vapeur introduite au-dessus du piston continue à le pousser vers le bas en se *détendant*. Lorsque le piston est arrivé au bas du cylindre, l'orifice qui fait communiquer le dessous du piston avec la botte à vapeur se rouvre; la vapeur introduite fait remonter le piston, en même temps que la vapeur restée au-dessus est mise en communication avec le condenseur ou avec l'atmosphère; et le même jeu recommence. Le piston prend ainsi un mouvement rectiligne alternatif, que l'on transforme de diverses manières en un mouvement de rotation continue, ordinairement régularisé par un volant. Le mouvement du tiroir de distribution est réglé par un excentrique monté sur l'axe de rotation du volant; et la *clef* qui règle le passage de la vapeur de la chaudière à la botte de distribution est gouvernée par un PENDULE CONIQUE, mis en mouvement par la machine, et auquel on donne souvent pour cette raison le nom de GOUVERNEUR. La machine fait mouvoir en outre trois pompes: l'une puise dans un réservoir l'eau nécessaire à l'injection dans le condenseur: c'est la *pompe à eau*; une autre puise dans le condenseur l'eau provenant de cette injection et l'air qu'elle a dégagé, et verse cette eau dans une capacité particulière: c'est ce qu'on nomme la *pompe à air*; la troisième puise cette eau et la refoule dans la chaudière: c'est la *pompe alimentaire*.

Une machine à vapeur est dite à *basse pression* quand la vapeur se forme dans la chaudière à une pression de 1 atmosphère $\frac{1}{4}$ ou 1 atmosphère $\frac{1}{2}$; elle est à *moyenne pression* quand la pression dans le générateur est comprise entre 2 et 4 atmosphères; elle est dite à *haute pression* quand la vapeur se forme à une pression supérieure à 4 atmosphères; elle est ordinairement alors de 5 à 6 atmosphères.

La machine est dite à *double effet* lorsque, comme nous l'avons supposé, la vapeur agit alternativement sur les deux faces du piston; elle est à *simple effet* si, comme dans les machines atmosphériques

mentionnées plus haut, la vapeur n'agit que sur l'une des faces du piston.

La machine est dite à *détente* lorsque, comme nous l'avons supposé, l'orifice d'admission de la vapeur dans le cylindre se ferme après que le piston a parcouru une certaine fraction de sa course. On dit que la détente est au cinquième, au quart, au tiers, aux deux tiers, etc., selon que la fraction de course pendant laquelle la vapeur est admise est $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, etc., de la course totale. La machine est *sans détente* si la vapeur est admise dans le cylindre pendant toute la course du piston.

La machine est à *condensation* quand la vapeur

qui a agi dans le cylindre se rend dans une capacité spéciale pour y être condensée; elle est dite *sans condensation* si la vapeur sortant du cylindre s'échappe dans l'atmosphère.

On voit que ces divers éléments peuvent être combinés d'un grand nombre de manières. Mais les systèmes réellement employés se réduisent aux suivants :

1° Les machines à basse pression de Watt, à double effet, à condensation et sans détente;

2° Les machines à moyenne pression, à détente et à condensation, comprenant en particulier :

Les machines de Cornouailles, qui sont à simple effet, et où la détente se fait dans un seul cylindre :

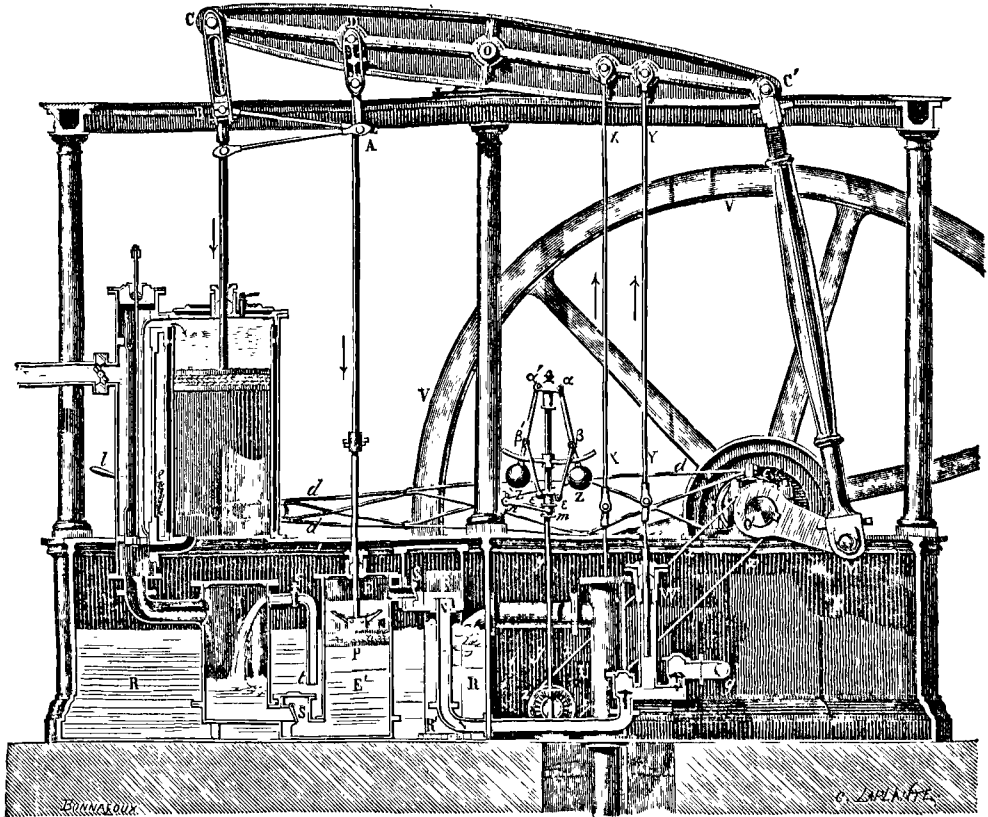


Fig. 2.

Les machines de Woolff, qui sont à double effet, et où la détente se fait dans un second cylindre;

3° Les machines à haute pression, à double effet, à détente, sans condensation;

4° Les machines à haute pression, à double effet, sans détente ni condensation. Ces dernières ne se rencontrent que parmi les locomotives employées à la traction des convois sur les chemins de fer (Voy. LOCOMOTIVES).

Nous décrirons d'une manière plus spéciale chacune des trois premières espèces de machines.

III. MACHINES DE WATT (fig. 2, 3 et 4). Dans les machines de Watt, le générateur est ou une chaudière en tombeau, ou une chaudière cylindrique à tuyau intérieur (Voy. GÉNÉRATEURS). La va-

peur sortant de la chaudière arrive, par le conduit O (fig. 3 et 4), dans une capacité cylindrique AAAA. fermée à la partie supérieure, et communiquant par la partie inférieure avec le condenseur: c'est la boîte à vapeur. Dans cette boîte glisse une autre capacité BBB, ouverte par le bas et par le haut, et dont la figure montre la section verticale: c'est le tiroir. Il est mis en mouvement par la machine elle-même, à l'aide d'une tige verticale qui traverse une boîte à étoupes adaptée au haut de la boîte à vapeur. Quand le tiroir est au haut de sa course, comme on le voit sur la figure 3, la vapeur qui l'environne ne trouve d'issue que par l'orifice C qui conduit au-dessus du piston; et l'orifice D étant alors ouvert, donne passage à la vapeur

qui était au-dessous du piston, laquelle se rend dans le condenseur. Quand le tiroir est au bas de sa course, comme le montre la figure 4, la vapeur qui l'environne ne trouve d'issue que par l'orifice D

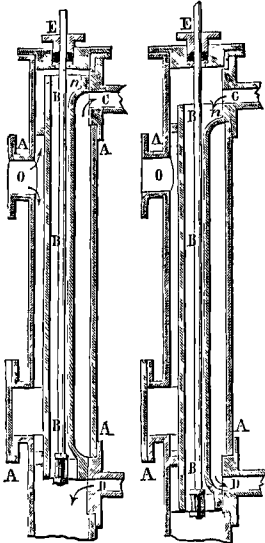


Fig. 3

Fig. 4.

qui conduit au-dessous du piston; mais l'orifice C étant alors ouvert, donne passage à la vapeur qui était au-dessus du piston, laquelle traverse l'intérieur du tiroir et se rend par cette voie dans le condenseur. La vapeur se trouve ainsi *distribuée* alternativement au-dessus et au-dessous du piston. Mais le tiroir et le piston n'arrivent pas ensemble au haut et au bas de leur course; il faut que l'orifice C commence à s'ouvrir quand le piston commence à descendre; il faut donc que la bande supérieure *n* du tiroir ferme cet orifice au moment où le piston est au haut de sa course; il en résulte que le tiroir doit être alors à *peu près* au milieu de la sienne; on arriverait à la même conclusion en considérant l'orifice D. Nous disons à *peu près*, parce qu'en réalité l'ouverture des orifices d'admission doit précéder un peu l'instant où le piston commence sa course (Voy. AVANCE À L'ADMISSION). Nous verrons plus loin comment cette condition est remplie.

Le mouvement alternatif du piston se transmet par l'intermédiaire du parallélogramme articulé ABCD (fig. 2) au balancier CC', lequel est mobile autour d'un axe horizontal O. A l'extrémité C' de ce balancier s'articule une bielle C'M qui fait mouvoir la manivelle O'M. Le mouvement rectiligne alternatif du piston se trouve ainsi transformé en un mouvement circulaire continu autour de l'axe O'. Un volant VV, monté sur cet axe, a pour fonction de régulariser ce mouvement. (Voy. PARALLÉLOGRAMME DE WATT, BALANCIER, BIELLE, MANIVELLE, VOLANT.)

Sur l'axe O' est monté un excentrique circulaire (Voy. EXCENTRIQUES) dont la barre *dd* fait mouvoir, par l'intermédiaire d'une combinaison de leviers, le tiroir de distribution. L'excentrique est *calé* sur

l'arbre du volant, de manière que le tiroir ait atteint l'extrémité de sa course et soit même revenu d'une certaine quantité sur ses pas au moment où le piston est au milieu du cylindre.

Sur le même axe O' est montée une poulie sur la gorge de laquelle passe une corde sans fin *xx*, qui passe également sur la gorge d'une autre poulie *zz*. Le mouvement de celle-ci se transmet, par un engrenage conique, à la tige verticale *yy* qui porte le régulateur à force centrifuge (Voy. PENDULE CONIQUE). Quand la vapeur afflue de la chaudière en trop grande abondance, et que, par suite, le mouvement de la machine s'accélère, l'axe *yy* tourne plus vite; les boules Z, Z' s'écartent; le manchon *m* s'élève, et fait mouvoir une fourchette *am*, qui l'embrasse, et qui est mobile autour du point *a*. Une combinaison de leviers transmet ce mouvement au registre, et rétrécit le passage par lequel la vapeur arrive dans la boîte de distribution. Si, au contraire, la vapeur n'afflue pas en quantité suffisante, la marche de la machine se ralentit; l'axe *yy* tourne moins vite; les boules Z, Z' s'abaissent ainsi que le manchon *m*, et le registre s'ouvre un peu plus pour donner passage à la vapeur. La machine corrige ainsi elle-même les écarts de sa vitesse en plus ou en moins.

Le condenseur est situé en H au-dessous du cylindre. Il est environné d'eau froide contenue dans une bêche RR, où elle est constamment versée par la POMPE À EAU U, dont la tige XX s'articule au balancier. La température dans le condenseur est d'environ 40°, et la pression y est de 0,1 d'atmosphère à peu près. L'excès de la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface de l'eau contenue dans la bêche RR, fait monter l'eau par le tuyau *tt'* et la verse continuellement dans le condenseur, où elle sert à ramener la vapeur à l'état liquide. L'eau du condenseur communique par la soupape S avec le corps de pompe E de la POMPE À AIR, dont la tige s'articule en un point du parallélogramme tellement choisi que son mouvement soit sensiblement vertical (Voy. PARALLÉLOGRAMME DE WATT). L'eau tirée du condenseur par cette pompe est versée par la soupape S' dans une bêche particulière R'R', d'où elle est extraite, en suivant le tuyau NN par la POMPE ALIMENTAIRE W, pompe aspirante et foulante qui la refoule dans le tuyau *g*, d'où elle retourne à la chaudière. La pompe alimentaire est également mue par le balancier (Voy. les mots en petites capitales).

Les machines à basse pression consomment de 5 à 6 kilogrammes de houille par cheval et par heure. Elles transmettent de 0,45 à 0,54 du travail moteur que pourrait fournir la vapeur sortant de la chaudière; le reste est employé à vaincre les frottements, ou est perdu par le refroidissement de la vapeur pendant son action même et par d'autres causes accessoires difficiles à apprécier. Ces machines sont, de toutes les machines à vapeur, celles qui offrent le moins de dangers, mais elles exigent un grand emplacement, et de plus elles dépensent beaucoup d'eau pour la condensation : 900 litres environ par cheval et par heure (Voy. CONDENSATION). Néanmoins elles sont employées avec avantage toutes les fois que l'on a à sa disposition l'espace et l'eau nécessaires.

IV. MACHINES DE CORNOUILLES. Les généra-

teurs sont de longues chaudières à bouilleurs. Ces machines sont à balancier, elles servent à élever les eaux, et la maîtresse-tige des pompes qu'elles mettent en mouvement est articulée à l'une des extrémités du balancier; l'autre extrémité reçoit le mouvement de la tige du piston à vapeur par l'intermédiaire d'un parallélogramme articulé. Ce qui distingue particulièrement les machines de Cornouailles, c'est qu'elles marchent par intermittences, n'étant assujetties qu'à donner par minute un certain nombre de coups de piston, qui, dans les mines, dépend de l'abondance des eaux à épuiser. Comme le mouvement produit est un mouvement rectiligne alternatif, qui ne peut être régularisé par un volant, on emploie pour régler le nombre des coups de pistons un appareil particulier, qu'on appelle la CATARACTE (*Voy.* ce mot). Le passage par lequel la vapeur afflue, est réglé par une soupape qui conserve sa position pendant la marche de la machine, mais qu'on peut déplacer, soit en l'élevant, soit en l'abaissant, suivant qu'on veut accélérer ou ralentir la marche; on l'appelle la *soupape modératrice*. La vapeur n'est employée que pour lever la maîtresse tige des pompes, qui retombe ensuite par son propre poids; il faut donc qu'elle soit introduite au-dessus du piston: c'est ce qu'on obtient en ouvrant une soupape placée au-dessus de la soupape modératrice et qu'on appelle la *soupape d'admission*. Quand le piston a parcouru une partie de sa course, la soupape d'admission se ferme, et le piston continue à descendre par l'effet de la détente. (Dans ces machines, la détente varie de 0,3 à 0,6, c'est-à-dire que le volume décrit par le piston avant le commencement de la détente est les 0,3 ou les 0,6 du volume du cylindre)

Quand le piston est parvenu au bas de sa course, le dessus et le dessous sont mis en communication, en faisant jouer une soupape particulière qu'on appelle la *soupape d'équilibre*; les pressions de la vapeur sur ces deux faces se faisant, en effet, équilibre, le piston remonte par l'effet du poids de la maîtresse-tige. Lorsqu'il a atteint le haut de sa course, la soupape d'équilibre se ferme, et le dessous du piston est mis en communication avec le condenseur, par le jeu d'une soupape appelée *soupape d'exhaustion*. La soupape d'admission se rouvre et le même jeu recommence. Tous ces mouvements de soupapes s'obtiennent par des combinaisons de leviers, de contre-poids et de cliquets que nous n'entreprendrons pas de décrire. Les soupapes d'admission, d'équilibre et d'exhaustion, sont des soupapes à double siège (*Voy.* SOUPAPES).

Les machines de Cornouailles ne consomment que de 1^{er}, 8 à 2^{es} de houille par cheval et par heure; elles n'emploient que 300 litres d'eau par cheval et par heure pour la condensation; elles transmettent jusqu'aux 0,55 du travail que pourrait fournir la vapeur sortant de la chaudière. Deux machines de ce genre sont employées au service des eaux de Paris, à la pompe de Chaillot.

V. MACHINES DE WOOLFF. Les générateurs de ces machines sont des chaudières à bouilleurs. Les machines à deux cylindres ne diffèrent essentiellement des machines de Watt, au point de vue de la distribution et du mécanisme, qu'en ce que la vapeur, en sortant du cylindre ABCD (fig. 5), passe

dans un second cylindre d'un plus grand diamètre où elle se détend. Les pistons p et P sont liés entre eux de manière à monter ou à descendre ensemble; les deux cylindres communiquent par

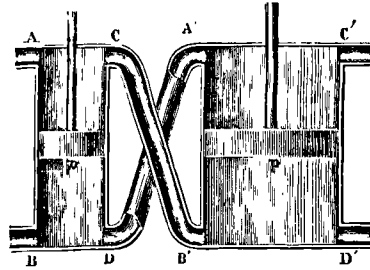


Fig. 5.

deux tuyaux CB' et DA'; les orifices A et B amènent la vapeur de la chaudière; les orifices C' et D' la conduisent au condenseur. Concevons que, les deux pistons étant au haut de leur course, les orifices A, D, A', D' s'ouvrent, et que les orifices B, C, B', C' se ferment. La vapeur affluant de la chaudière par l'orifice A fera descendre le piston p; en même temps, la vapeur qui était sous le piston p, passant par le tuyau DA', fera descendre le piston P; les deux efforts concourent donc à produire un effet commun, la descente des pistons. Ces pistons étant arrivés ainsi au bas de leur course, si l'on ferme les orifices A, D, A', D' et que l'on ouvre les orifices B, C, B', C', la vapeur affluant de la chaudière par l'orifice B fera remonter le piston p; en même temps, la vapeur qui était au-dessus du petit piston, passant par le tuyau CB', fera remonter le grand piston. Les deux efforts concourent donc encore à un même but. Ce dispositif montre de la manière la plus évidente l'accroissement de travail moteur qui résulte de la détente, sans augmentation de combustible. Pour que la vapeur se détende jusqu'à 4 ou 5 fois son volume primitif, il suffit, si les cylindres ont la même hauteur, que l'aire du grand piston soit 4 ou 5 fois l'aire du petit piston. Il en serait de même pour tout autre rapport. Il n'est pas nécessaire du reste que les deux cylindres aient même hauteur. Quelquefois on les place de manière que leurs axes soient dans le plan du balancier, le plus petit étant plus rapproché de l'axe, en sorte que les vitesses des deux pistons soient dans le rapport de 4 à 3; la vitesse du grand piston étant de 1^m, et celle du petit de 0^m,75. On règle les diamètres en conséquence, de façon que la détente se fasse dans le rapport voulu.

Les machines de Woolff consomment environ 3^e de houille par cheval et par heure, et 300 litres d'eau pour la condensation; elles transmettent de 0,30 à 0,43 du travail que pourrait fournir la vapeur sortant de la chaudière, suivant que leur force varie de 10 à 50 chevaux. Ce système convient donc surtout aux machines puissantes.

Comme exemple d'une machine à moyenne pression, à détente et à condensation, *Voy.* à l'article NAVIGATION À VAPEUR la description des anciennes machines employées dans les bateaux à roues.

VI. MACHINES A HAUTE PRESSION. Dans les machines fixes, le générateur est une chaudière à

bouilleurs. On peut donner au cylindre des positions diverses dont nous parlerons plus loin. Comme exemple d'une machine à haute pression, à détente et sans condensation, nous décrirons la machine représentée par la figure 6. La vapeur arrive de la chaudière par le tuyau A; elle pénètre dans la boîte de distribution Z. Dans cette boîte se meut le tiroir BB, représenté à part sur la figure 7 à une plus

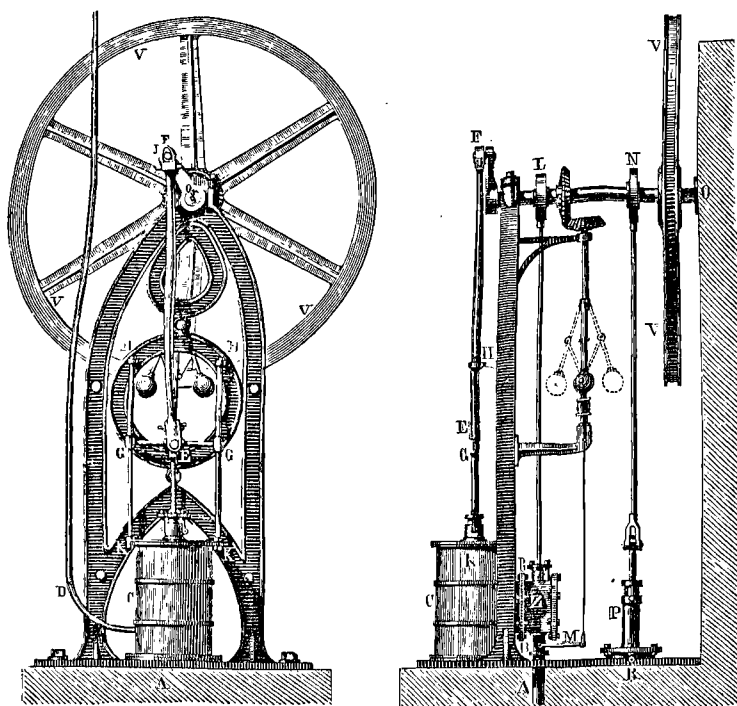


Fig. 6.

grande échelle. C'est ce que l'on appelle un *tiroir à coquille*. Il consiste en une boîte rectangulaire *m*, présentant du côté où elle est ouverte, des *bandes* ou recouvrements *n, n'*; ces bandes glissent sur une

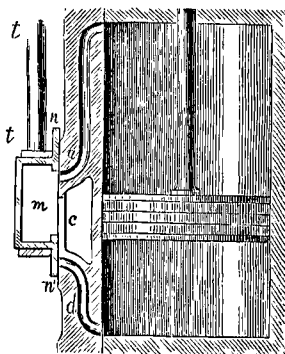


Fig. 7.

surface plane où viennent s'ouvrir les orifices *a, b, c*, dont le premier donne accès à la vapeur au-dessus du piston, le second au-dessous, et dont le troisième communique avec l'atmosphère. Suivant la position que la tige *tt* fait prendre à la boîte, il arrive : ou que, la bande *n* étant au-dessous de l'orifice *a*, la vapeur pénètre par cet orifice au-dessus

du piston, tandis que la vapeur qui est au-dessous sort par l'orifice *b*, traverse la boîte *m* et s'échappe dans l'atmosphère par l'orifice *c*; ou que, la bande *n'* étant au-dessus de l'orifice *b*, la vapeur pénètre par cet orifice au-dessous du piston, tandis que la vapeur qui est au-dessus sort par l'orifice *a*, traverse la boîte *m* et s'échappe dans l'atmosphère par l'orifice *c*; ou que, comme le montre la figure, l'un des orifices extrêmes *a* communique avec l'intérieur de la boîte *m*, l'autre *b* étant couvert par l'une des bandes, auquel cas, la vapeur qui était au-dessus du piston s'échappe par l'orifice *c*, tandis que celle qui est au-dessous du piston se détend. L'orifice *c* communique avec l'atmosphère par le tuyau D (fig. 6).

La tige du piston est guidée par une glissière GG qui suit deux montants verticaux, fixés d'une part au cylindre, en K, et de l'autre au bâti de la machine, en H. A la traverse de cette glissière est articulée une bielle EF qui fait mouvoir la manivelle OI. Sur l'axe OO' de la manivelle est monté le volant VV. Cet axe porte en même temps trois autres organes : 1° un excentrique circulaire L, qui donne le mouvement au tiroir BB; 2° une roue d'angle qui donne le mouvement au régulateur à force centrifuge, lequel fait ouvrir ou fermer la clef M qui donne accès à la vapeur arrivant par le tuyau A; 3° un second excentrique circulaire N qui fait mouvoir la pompe alimentaire P, destiné à fournir l'eau à la chaudière par le tuyau R. Le plus sou-

vent on s'arrange de manière que la vapeur sortant du cylindre traverse le réservoir d'eau froide destinée à l'alimentation de la chaudière; de cette manière, la chaleur que cette vapeur possède n'est pas entièrement perdue.

Les machines à haute pression, à détente et sans condensation, consomment de 4 à 5 kilogrammes de houille par cheval et par heure; elles transmettent à peu près les 0,32 du travail que pourrait fournir la vapeur sortant de la chaudière. Ces machines offrent de plus grands dangers que les machines à basse et à moyenne pression; elles imposent une plus grande surveillance. Mais elles sont d'une grande simplicité, d'un prix peu élevé; elles occupent peu de place, et ces considérations leur font souvent donner la préférence sur les machines à condensation, qui sont d'un prix considérable, et qui exigent un grand emplacement et une source d'eau abondante pour suffire aux besoins de la condensation.

Dans les machines à haute pression employées à la navigation, le générateur est une chaudière tubulaire (Voy. GÉNÉRATEURS).

VII. Il existe deux théories distinctes de la machine à vapeur. La plus répandue suppose que, pendant la détente, la tension de la vapeur varie conformément à la loi de Mariotte. Soit ω l'aire du piston, H sa course, h_0 la portion de cette course parcourue pendant l'admission de la vapeur, h la portion parcourue à un instant quelconque, \mathcal{P}_0 la pression de la vapeur par unité de surface pendant la période d'admission, \mathcal{P} la valeur de cette pression quand le piston a parcouru la distance h , \mathcal{P}_1 sa valeur à la fin de la course; soit \mathcal{P}' la pression en sens contraire exercée sur la face opposée du piston par la vapeur contenue dans le condenseur ou par l'atmosphère, s'il n'y a pas de condensation; enfin soit \mathcal{E} le travail de la vapeur pour un coup de piston. Ce travail se compose du travail avant la détente, plus le travail de la détente elle-même, moins le travail de la contre pression.

Le travail avant la détente est exprimé par

$$\mathcal{P}_0 \omega h_0;$$

le travail de la détente a pour expression (Voy. DÉTENTE, ÉLASTICITÉ), soit que la détente s'opère dans le cylindre même, ou dans un cylindre séparé,

$$\mathcal{P}_0 \omega h_0 \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1};$$

le travail de la pression \mathcal{P}' est d'ailleurs

$$-\mathcal{P}' \omega H;$$

on a donc, en kilogrammètres,

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_0 \omega h_0 \left(1 + \log' \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1} \right) - \mathcal{P}' \omega H$$

Cette formule peut être mise sous une autre forme; en appelant V_0 le volume décrit par le piston pendant l'admission de la vapeur, et V_1 le volume décrit pendant une course entière, on a

$$\omega h_0 = V_0, \quad \omega H = V_1,$$

et, en vertu de la loi de Mariotte,

$$\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_1} = \frac{V_1}{V_0},$$

en mettant donc $\mathcal{P}_0 V_0$ en facteur commun, on peut écrire

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_0 V_0 \left[1 + \log' \frac{V_1}{V_0} - \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}_1} \right]. \quad [1]$$

Si la machine était sans détente, on aurait $V_1 = V_0$.

et le terme logarithmique disparaîtrait. Si la machine était sans condensation, il faudrait mettre pour \mathcal{P}' la pression atmosphérique.

Connaissant le travail \mathcal{E} développé à chaque course du piston, on en déduit le travail par minute en multipliant par le nombre n de coups de piston dans une minute; et le travail par seconde s'en déduit en divisant par 60. Pour avoir le nombre de chevaux que le travail de la machine représente, il faut encore diviser par 75, en sorte qu'en nommant N ce nombre de chevaux, on a

$$N = \frac{n\mathcal{E}}{60 \cdot 75} = \frac{n\mathcal{E}}{4500}. \quad [2]$$

Soient t_0 la température de la vapeur correspondant à la pression \mathcal{P}_0 , et Π le poids de l'unité de volume de vapeur à 100° et sous la pression normale de 10334^k par mètre carré; en appelant Π_0 le poids de l'unité de volume de vapeur à la température t_0 , et sous la pression \mathcal{P}_0 , on aura, d'après des propriétés physiques connues :

$$\frac{\Pi_0}{\Pi} = \frac{1 + 0,00366 \cdot 100}{1 + 0,00366 t_0} \cdot \frac{\mathcal{P}_0}{10334};$$

or $\Pi = 0^k,589$; il vient donc

$$\Pi_0 = \frac{1,366 \cdot \mathcal{P}_0 \cdot 0^k,589}{(1 + 0,00366 t_0) 10334}. \quad [3]$$

D'un autre côté, soit Q le poids de la vapeur dont le volume est V_0 , et soit θ la température de l'eau d'alimentation. Le nombre de calories nécessaires pour convertir 1^{litre} d'eau à la température θ en vapeur à la température t_0 , est, d'après les expériences de M. Regnault,

$$606,5 + 0,305 t_0 - \theta.$$

Pour convertir ainsi un poids Q d'eau, le nombre de calories nécessaires sera

$$Q(606,5 + 0,305 t_0 - \theta).$$

Si M désigne le nombre de calories fournies par 1^{litre} de combustible, le poids q de combustible nécessaire pour convertir en vapeur l'eau dont le poids est Q , sera exprimé par

$$q = \frac{Q(606,5 + 0,305 t_0 - \theta)}{M};$$

d'où
$$Q = \frac{Mq}{606,5 + 0,305 t_0 - \theta}.$$

D'ailleurs on a

$$Q = V_0 \Pi_0, \quad \text{d'où } V_0 = \frac{Q}{\Pi_0}, \quad \text{et } V_0 \mathcal{P}_0 = \frac{Q \mathcal{P}_0}{\Pi_0}.$$

En mettant pour Q et Π_0 leurs valeurs, on obtient

$$V_0 \mathcal{P}_0 = \frac{Mq(1 + 0,00366 t_0) \cdot 10334}{(606,5 + 0,305 t_0 - \theta) \cdot 1,366 \cdot 0,589}$$

ou
$$V_0 \mathcal{P}_0 = 12837 \cdot Mq \frac{1 + 0,00366 t_0}{606,5 + 0,305 t_0 - \theta},$$

et par suite

$$\mathcal{E} = 12837 \cdot Mq \frac{1 + 0,00366 t_0}{606,5 + 0,305 t_0 - \theta} \left[1 + \log' \frac{V_1}{V_0} - \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}_1} \right]. \quad [4]$$

En faisant $q=1$, on aura le travail développé par kilogramme de combustible brûlé.—Pour la houille, le nombre de calories fournies par kilogramme est en moyenne 7500; mais on estime que, dans les meilleurs foyers, la moitié de ce nombre de calories est perdue, et l'on fait, en conséquence, $M=3740$.

Le travail résistant que la machine doit vaincre à chaque coup de piston étant connu, on y ajoutera le travail des résistances passives, les pertes de puissance vive dues au passage de la vapeur à travers

les divers orifices, son frottement dans les conduits, le frottement des pièces mobiles, particulièrement celui du piston et celui du tiroir qui, dans les machines à haute pression, est considérable; et la somme de ces divers travaux résistants devra être égale au travail \mathcal{E} , d'où l'on déduira le poids q de combustible à brûler pour produire le travail nécessaire par coup de piston; on en conclura aisément le poids de combustible à brûler par heure.

Toute cette théorie suppose, indépendamment de la loi de Mariotte, que la pression dans le cylindre est sensiblement égale à celle qui a lieu dans la chaudière. Or, il résulte des expériences de M. Morin que l'application de la loi de Mariotte à la détente donne un résultat trop fort de $\frac{1}{30}$ environ; d'autre

part, certains observateurs ont trouvé que la pression dans le cylindre n'était souvent que les 0,60 de celle de la chaudière, et parfois moindre. Si l'on tient compte, en outre, des déperditions de chaleur qu'on n'évite jamais complètement, même en entourant le cylindre d'une double enveloppe où circule de la vapeur, on s'expliquera pourquoi les machines à vapeur ne transmettent point le travail exprimé par la relation [4], et pourquoi il est nécessaire d'affecter l'expression de \mathcal{E} d'un coefficient qui varie, comme on l'a vu, suivant la nature des machines, de 0,55 à 0,32.

En outre la théorie dont il s'agit ne fournit aucune lumière sur la vitesse que prend la machine lorsqu'elle a à vaincre une résistance donnée, ou sur la résistance qu'elle peut vaincre en prenant une vitesse déterminée; encore moins sur la vitesse et sur la résistance qui conviennent au maximum d'effet utile.

VIII. La seconde théorie, qui a été proposée par M. de Pambour, est fondée sur des considérations toutes différentes. En premier lieu, l'auteur remarque que la pression dans le cylindre est toujours, contrairement à l'hypothèse admise dans la théorie précédente, notablement inférieure à celle de la chaudière, et que le rapport de ces deux pressions, généralement égal à 0,60, comme nous l'avons indiqué plus haut, peut descendre, suivant Tredgold, jusqu'à 0,47 dans les machines de Woolf. Il rejette donc cette hypothèse; mais il admet que la pression qui s'établit dans le cylindre pendant la période d'admission est toujours celle qui convient à l'équilibre dynamique; en sorte qu'en nommant R la résistance par unité de surface qui s'exerce sur la face opposée du piston, on a toujours, en désignant par \mathcal{P}_0 la pression initiale du cylindre,

$$\mathcal{P}_0 = R. \quad [5]$$

La densité maximum de la vapeur à la pression \mathcal{P} est donnée par des tables qu'on trouve dans tous les Traités de Physique; M. de Pambour représente les nombres de ces tables par une expression de la forme

$$\frac{\alpha}{\beta + \mathcal{P}}, \quad [6]$$

dans laquelle il fait $\alpha = 20\,000\,000$ et $\beta = 1200$, si la machine est à condensation; ou $\alpha = 21\,232\,000$ et $\beta = 3020$, si elle est sans condensation: la pression \mathcal{P} étant exprimée dans les deux cas en kilogrammes par mètre carré.

Il admet que, dans tout son parcours, la vapeur reste au maximum de densité correspondant à la

température, en se fondant sur ses expériences personnelles, qui lui ont montré que la vapeur avait en chaque point de ce parcours la température qui correspondait à sa pression dans l'hypothèse du maximum de densité. Il en résulte que, U et U' représentant les volumes répondant aux pressions \mathcal{P} et \mathcal{P}' , on doit avoir

$$U = \frac{\alpha}{\beta + \mathcal{P}}, \quad U' = \frac{\alpha}{\beta + \mathcal{P}'};$$

d'où résulte

$$\frac{U}{U'} = \frac{\beta + \mathcal{P}'}{\beta + \mathcal{P}}, \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{U'}{U} (\beta + \mathcal{P}') - \beta; \quad [7]$$

relation qui, dans les calculs, remplace la loi de Mariotte, dont elle diffère du reste fort peu.

Soit toujours \mathcal{P}_0 la pression dans le cylindre pendant la période d'admission, on a, à un instant quelconque de la détente,

$$\mathcal{P} = \frac{U_0}{U} (\beta + \mathcal{P}_0) - \beta, \quad [8]$$

en appelant U_0 l'espace occupé par la vapeur au commencement de la détente, et U celui qu'elle occupe quand le piston est à la distance h de son point de départ. On a d'ailleurs

$$U_0 = \omega (h_0 + e) \quad \text{et} \quad U = (h + e),$$

en désignant par e l'espace *invisible* compris entre le piston et le fond du cylindre au commencement de sa course; par conséquent

$$\mathcal{P} = (\beta + \mathcal{P}_0) \frac{h_0 + e}{h + e} - \beta. \quad [9]$$

Cela posé, le travail élémentaire pendant la détente, ou $\mathcal{P} \omega dh$, a pour valeur

$$\mathcal{P} \omega dh = (\beta + \mathcal{P}_0) \left(\frac{h_0 + e}{h + e} \right) \omega \cdot \frac{dh}{h + e} \beta \omega dh.$$

Intégrant entre les limites h_0 et H , et ajoutant le travail avant détente $\mathcal{P}_0 \omega h_0$, on obtient le travail moteur pour un coup de piston; en l'égalant au travail résistant $R \omega H$, on trouve :

$$\omega (h_0 + e) (\beta + \mathcal{P}_0) \left[\frac{h_0}{h_0 + e} + \log' \frac{H + e}{h_0 + e} \right] - \beta \omega H = R \omega H.$$

On en déduit, comme dans la méthode ordinaire, la force en chevaux, et le travail développé par unité de poids de combustible brûlé.

Soit maintenant U_1 le volume d'eau vaporisée dans une seconde; le volume de vapeur produite sous la pression \mathcal{P}_0 sera

$$\frac{\alpha U_1}{\beta + \mathcal{P}_0}$$

Ce volume doit être égal au volume de vapeur dépensé, soit en nommant n le nombre de coups de piston dans l'unité de temps $\omega (h_0 + e) \cdot n$.

Mais si v est la vitesse du piston, on a

$$Hn = v; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{v}{H};$$

par conséquent il vient

$$\frac{\alpha U_1}{\beta + \mathcal{P}_0} \omega = (h_0 + e) \cdot \frac{v}{H}, \quad [11]$$

relation qui donnera \mathcal{P}_0 ou R , connaissant la vitesse v , ou cette vitesse connaissant la résistance R .

Si l'on élimine \mathcal{P}_0 entre les relations [10] et [11], on obtient

$$v = \frac{U_1}{\omega} \cdot \frac{\alpha}{\beta + R} \left[\frac{h_0}{h_0 + e} + \log' \frac{H + e}{h_0 + e} \right], \quad [12]$$

relation dans laquelle on peut remarquer que la quantité $\frac{\alpha}{\beta + R}$ n'est autre chose que la densité de

la vapeur saturée sous la pression R. La formule [12] donnerait U, connaissant v et R.

Soit r la résistance par unité de surface exercée sur le piston, indépendamment de la pression p provenant du condenseur ou de l'atmosphère; soit f le nombre de kilogrammes qui exprime la partie du frottement du piston indépendante de la résistance, et δ la quantité dont ce frottement s'accroît par kilogramme de résistance; le frottement total sera exprimé par f + δr, et l'on aura

$$R = r + p + f + \delta r,$$

$$\text{ou } R = (1 + \delta)r + p + f. \quad [13]$$

Soit E l'effet utile; on aura E = ωrv. Si dans cette expression on met pour ωv sa valeur tirée de [12], et pour r sa valeur tirée de [13], on en tire, en représentant par k l'expression entre parenthèses dans l'équation [12],

$$E = \frac{k\alpha Q}{1 + \delta} - \frac{\omega v}{1 + \delta} (\beta + p + f). \quad [14]$$

D'après cette équation, le maximum d'effet utile répond à la plus petite valeur de v, et par conséquent, en vertu de l'équation [1], à la plus grande valeur de Q₀. Cette plus grande valeur est la pression dans la chaudière; en la désignant par P, on a donc, pour le minimum de v,

$$v_1 = \frac{\alpha Q}{\omega(\beta + P) \cdot h_0 + e},$$

$$\text{d'où } E = \frac{\alpha Q}{1 + \delta} \left[k - \frac{H}{h_0 + e} \cdot \frac{\beta + p + f}{\beta + P} \right]. \quad [15]$$

On aurait la valeur de la résistance R répondant à ce maximum de E, en mettant v₁ à la place de v dans [11] et éliminant β + Q₀ entre cette équation et l'équation [10].

Si l'on fait varier la détente, on peut se proposer de trouver le maximum absolu de l'effet utile E. Pour cela, on égalera à zéro la dérivée du second membre de [15], par rapport à h₀, ce qui donne

$$\frac{h_0}{H} = \frac{\beta + p + f}{\beta + P}. \quad [16]$$

Dans ces formules, M. de Pambour prend $f = \frac{675}{d}$, $f = \frac{450}{d}$, ou $f = \frac{300}{d}$, d étant le diamètre du piston rapporté au mètre, suivant que la machine est à basse, à moyenne ou à haute pression, et il fait partout δ = 0,14. Pour les locomotives, il prend f = 2459^k par mètre carré, avec δ = 0,14. Il suppose e = 0,05H. Il a calculé pour k une table, d'où nous extrayons les valeurs suivantes :

$\frac{h_0}{H}$	k	$\frac{h_0}{H}$	k
0,1	2,613	0,6	1,402
0,2	2,235	0,7	1,269
0,3	1,955	0,8	1,152
0,4	1,735	0,9	1,047
0,5	1,555	1	1

La théorie de M. de Pambour est, comme on le voit, beaucoup plus complète que la théorie ordinaire. Ses formules ont été appliquées non-seulement par lui, mais par M. Morin lui-même; et elles ont fourni les résultats les plus satisfaisants. On s'explique difficilement l'indifférence que cette théorie ingénieuse a rencontrée.

IX. L'établissement d'une machine à vapeur se fonde à la fois sur des considérations théoriques et sur l'observation des proportions les plus avantageuses dans la pratique. Le choix du genre de machine à employer dépend de la nature du travail à effectuer, de l'emplacement dont on dispose, du plus ou moins d'abondance de l'eau, de considérations d'économie, etc., et de diverses questions sur lesquelles l'expérience peut seule apprendre à prononcer. Ce choix fait, on connaît la pression Q₀, à laquelle la vapeur doit se former dans la chaudière. Le travail à effectuer dans un temps donné fait connaître le nombre N de chevaux exprimant la force de la machine. On se donne le nombre n de coups de piston que la machine doit exécuter par minute; on reconnaît aujourd'hui l'avantage des grandes vitesses; il est rare, cependant, qu'on prenne n plus grand que 60. La formule [2] donne alors la valeur du travail E. On se donne le coefficient de la détente, ou le rapport $\frac{V_1}{V_0}$; par suite, dans l'équation [1], il n'y a plus que V₀ d'inconnu, et l'on peut en déterminer la valeur. On en déduit immédiatement le volume V₁, ou le volume engendré par le piston. La course est généralement comprise entre 2 et 4 fois le diamètre du piston, en sorte qu'en nommant D ce diamètre, la quantité V₁ est comprise entre $\frac{1}{2} \pi D^3$ et πD^3 , ou, ce qui revient au même, le diamètre D est compris entre les valeurs

$$D = \sqrt[3]{\frac{2V_1}{\pi}} \quad \text{et} \quad D = \sqrt[3]{\frac{V_1}{\pi}}.$$

On choisit la valeur de D entre ces limites; on a ensuite $H = \frac{V_1}{\pi D^2}$; on en déduit h₀, puisqu'on s'est donné le coefficient de la détente.

Connaissant le volume V₀ et la pression Q₀, on en conclut le poids de vapeur à produire par coup de piston; d'où il est facile de déduire le poids à produire dans une heure, puisque le nombre des coups de piston dans ce temps est 60 n. Ce poids de vapeur connu fait connaître l'étendue de la surface de chauffe, et, par suite, les dimensions du générateur (Voy. GÉNÉRATEURS). Les dimensions des diverses pièces du mécanisme se déduisent de la course du piston et de considérations tirées de la résistance des matériaux. On trouvera à l'article VOLANTS l'exposé des principes d'après lesquels on calcule les dimensions de cette pièce importante.

La quantité d'eau nécessaire à la condensation se déduit du volume de vapeur dépensé et de sa température (Voy. CONDENSATION). Cette quantité étant connue, on peut en déduire la section du piston de la pompe à air, puisque la course de ce piston est déterminée par les proportions des pièces mobiles du mécanisme. On en déduit aussi (Voy. POMPES) la pression que le piston doit supporter, et, par suite, le diamètre qu'il convient de donner à la tige. On opère d'une manière semblable pour les autres pompes.

Le diamètre de la pompe alimentaire se déduit de celui de la pompe à air, en considérant que le poids d'eau qui entre dans la chaudière doit être égal au poids de vapeur qui en sort, plus au poids de l'eau entraînée. Et le diamètre de la pompe à

eau se déduit de celui de la pompe alimentaire par la considération du poids d'eau froide nécessaire à la condensation. (Voy. POMPE À AIR, POMPE ALIMENTAIRE, POMPE À EAU.)

Quant à la section des passages par lesquels la vapeur se rend de la chaudière dans la boîte à vapeur, de cette boîte dans le cylindre, et du cylindre dans le condenseur ou dans l'atmosphère, beaucoup de constructeurs lui donnent $\frac{1}{36}$ de l'aire du piston. Cette proportion peut suffire dans les machines à haute pression ; mais dans les machines à basse pression, il est nécessaire d'adopter $\frac{1}{25}$ ou même $\frac{1}{20}$. En général, on donne à ces sections une

aire trop faible ; il en résulte de notables pertes de puissance vive au passage de la vapeur par les divers orifices (Voy. CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION), et une notable différence entre les pressions dans la chaudière et dans le cylindre. S'il était possible d'avoir des orifices spéciaux pour l'admission et d'autres pour l'émission, il faudrait que l'aire de ceux-ci fût aussi grande que possible.

Les lumières sont rectangulaires ; leur longueur est ordinairement égale à 5 fois leur largeur.

Voici, d'après Watt, quelques données relatives aux machines à basse pression :

Force en chevaux.	Diamètre du cylindre.	Course du piston.	Nombre de coups de piston par l'.	Force en chevaux	Diamètre du cylindre.	Course du piston.	Nombre de coups de piston par l'.
4	0,305	0,914	58	28	0,705	1,678	40
6	0,355	1,068	54	30	0,718	1,800	38
8	0,407	1,200	48	36	0,784	2,135	38
10	0,444	1,220	50	40	0,800	2,135	35
12	0,483	1,220	50	45	0,847	2,135	35
14	0,521	1,220	50	50	0,893	2,135	35
16	0,522	1,416	46	60	0,978	2,440	35
18	0,585	1,416	46	70	1,036	2,440	32
20	0,602	1,520	43	80	1,105	2,440	32
22	0,635	1,520	43	90	1,172	2,440	32
24	0,661	1,520	43	100	1,232	2,440	32
26	0,680	1,678	40	»	»	»	»

Le tableau suivant contient des données relatives aux machines de Woolff (d'après M. Morin).

Force en chevaux.	COURSES du		DIAMÈTRE DES PISTONS pour des pressions de						Nombre de coups de piston en l'.
			4 atm.		3 atm.		3 atm.		
			grand piston.	petit piston.	grand piston.	petit piston.	grand piston.	petit piston.	
4	0,900	0,675	0,146	0,282	0,158	0,268	0,174	0,196	60
6	0,900	0,675	0,177	0,342	0,192	0,350	0,211	0,358	60
8	1,000	0,750	0,192	0,371	0,209	0,381	0,229	0,389	60
10	1,000	0,750	0,214	0,414	0,232	0,423	0,254	0,432	60
12	1,100	0,825	0,232	0,448	0,251	0,458	0,276	0,469	54,6
14	1,100	0,825	0,248	0,480	0,269	0,491	0,295	0,502	54,6
16	1,200	0,900	0,263	0,509	0,285	0,520	0,313	0,531	55
18	1,200	0,900	0,265	0,513	0,286	0,521	0,314	0,535	55
20	1,300	0,975	0,276	0,534	0,299	0,545	0,328	0,558	50,8
22	1,300	0,975	0,287	0,555	0,311	0,567	0,342	0,581	50,8
24	1,300	0,975	0,297	0,575	0,322	0,587	0,354	0,601	50,8
26	1,450	1,090	0,300	0,580	0,325	0,593	0,357	0,607	51,6
28	1,450	1,090	0,309	0,599	0,335	0,611	0,368	0,625	51,6

Force en chevaux.	COURSES du		DIAMÈTRE DES PISTONS pour des pressions de						Nombre de coups de piston en l'.
			4 atm.		4 atm.		3 atm.		
			grand piston.	petit piston.	grand piston.	petit piston.	grand piston.	petit piston.	
30	1,600	1,200	0,318	0,615	0,345	0,630	0,378	0,642	43,2
36	1,600	1,200	0,342	0,661	0,369	0,674	0,405	0,688	43,2
40	1,700	1,275	0,340	0,658	0,368	0,673	0,404	0,686	44,2
45	1,700	1,275	0,360	0,696	0,390	0,711	0,428	0,727	44,2
50	1,800	1,350	0,380	0,735	0,411	0,750	0,452	0,769	41,6
60	1,800	1,350	0,416	0,805	0,450	0,821	0,494	0,840	41,6
70	2,000	1,500	0,440	0,850	0,477	0,870	0,524	0,890	39
80	2,000	1,500	0,470	0,910	0,510	0,930	0,560	0,953	39
90	2,100	1,575	0,500	0,968	0,541	0,987	0,594	1,010	37,2
100	2,100	1,575	0,526	1,032	0,570	1,040	0,626	1,065	37,2
110	2,100	1,575	0,532	1,070	0,598	1,090	0,656	1,113	37,2
120	2,100	1,575	0,577	1,115	0,624	1,140	0,685	1,163	37,2
130	2,100	1,575	0,600	1,160	0,650	1,185	0,713	1,210	37,2

Enfin le tableau suivant, extrait d'un tableau plus étendu dressé par M. Morin, renferme des données relatives aux machines à haute pression, avec détente, sans condensation. La pression est supposée de 5 atmosphères.

FORCE en chevaux.	COURSE du piston.	DIAMÈTRE DU PISTON pour des détentes de				NOMBRE de coups de piston en l'.
		2/3	1/2	2/5	1/3	
4	0,700	0,193	0,206	0,219	0,224	77
6	0,700	0,237	0,252	0,269	0,287	77
8	0,800	0,273	0,291	0,311	0,331	67,4
10	0,800	0,289	0,309	0,330	0,351	67,4
12	0,900	0,317	0,338	0,360	0,385	66,6
14	0,900	0,342	0,365	0,390	0,416	66,6
16	1,000	0,366	0,391	0,418	0,444	60
18	1,000	0,370	0,395	0,421	0,449	60
20	1,100	0,390	0,417	0,445	0,474	60
22	1,100	0,409	0,437	0,467	0,497	60
24	1,150	0,427	0,456	0,488	0,519	57,4
26	1,150	0,435	0,464	0,496	0,528	57,4
28	1,200	0,451	0,482	0,515	0,548	57,4
30	1,200	0,467	0,499	0,533	0,568	57,4
36	1,300	0,512	0,546	0,584	0,622	53,2
40	1,300	0,517	0,552	0,590	0,628	57,6
45	1,400	0,549	0,586	0,626	0,666	53,6
50	1,400	0,578	0,618	0,660	0,702	53,6
60	1,500	0,633	0,676	0,723	0,770	50
70	1,500	0,671	0,716	0,766	0,815	52
80	1,600	0,717	0,766	0,819	0,872	48,8
90	1,600	0,761	0,813	0,868	0,924	48,8
100	1,600	0,802	0,857	0,916	0,974	48,8

Si la pression est de plus de 5 atmosphères, le diamètre du piston, pour les mêmes détentes, est un peu plus petit.

On trouvera dans les Traités spéciaux, et particulièrement dans le *Traité des machines à vapeur* de M. Jullien, un grand nombre d'autres données pratiques que nous ne saurions reproduire ici.

X. Il nous reste à parler de quelques dispositions particulières que l'on donne aux machines à vapeur employées à la navigation, et de quelques systèmes exceptionnels dont l'emploi n'est pas encore généralisé.

On a employé primitivement, et l'on emploie encore quelquefois sur les bateaux à vapeur, des machines à balancier ; mais pour ménager l'emplacement dont on dispose, on place le balancier à la partie inférieure ; le parallélogramme de Watt est

alors au-dessus. On trouvera un exemple de ce dispositif à l'article NAVIGATION A VAPEUR.

Au lieu de faire sortir la tige du piston par la base supérieure du cylindre, supposé vertical, on peut la faire sortir par la base inférieure; on dit alors que le cylindre est *renversé*; et si la tige transmet le mouvement, par l'intermédiaire d'une bielle, à une manivelle placée au-dessous, on donne à la machine le nom de *machine à pilon*, par analogie avec le *marteau-pilon* ou MARTEAU A VAPEUR (Voy. ce mot). Le cylindre, au lieu d'être vertical, peut être incliné, ordinairement à 45°, et il est alors *droit* ou *renversé*, selon que la tige du piston sort par la base supérieure ou par la base inférieure. Les cylindres inclinés s'emploient surtout quand les machines sont accouplées de manière à agir sur un même arbre; on cale alors les manivelles de manière que le maximum d'action d'une des machines corresponde au minimum de l'autre, afin d'obtenir un mouvement de rotation plus régulier. L'angle des manivelles, qu'on appelle l'*angle de conjugaison*, est ordinairement de 90° quand il y a deux ou quatre machines conjuguées, et de 120° quand il y en a trois.

Le cylindre peut aussi être horizontal; et cette disposition est fréquemment employée dans la marine.

Une machine est dite à *bielle droite* quand le point d'articulation de la bielle avec la tige du piston est constamment placé entre le piston et la manivelle; c'est ce qui a lieu dans la plupart des machines fixes. La machine est dite à *bielle en retour* lorsqu'au contraire le point d'articulation de la bielle avec la tige du piston est situé au delà de l'axe de la manivelle par rapport au piston. Cette disposition, qui rapproche du piston l'axe de la manivelle, est fréquemment employée dans la marine, où il est toujours indispensable de ménager l'espace. On en trouvera un exemple à l'article NAVIGATION A VAPEUR déjà cité.

On obtient un effet analogue, mais plus marqué encore, avec les *machines à fourreau*, dont un modèle est représenté figure 8. La tige du piston

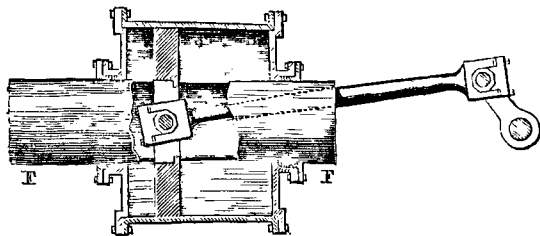


Fig. 8.

est complètement supprimée, et la bielle s'articule avec le piston même; mais alors la tige est remplacée par un cylindre creux ou fourreau FF, qui traverse à la manière ordinaire la base supérieure et le plus souvent même les deux bases du cylindre, et dans l'intérieur duquel la bielle peut osciller. Ce système offre une grande simplicité de mécanisme; mais il exige, à force égale, des cylindres d'un plus grand diamètre; il offre à la vapeur une plus grande surface refroidissante; il est exposé à

plus de fuites, et donne lieu à un plus grand frottement. Cependant il est toujours en faveur dans la marine anglaise.

Les dispositions que nous venons d'indiquer ont été combinées d'une infinité de manières; on en trouvera des exemples multipliés dans le *Traité élémentaire des appareils à vapeur de navigation*, de M. Ledieu.

Les machines à cylindre oscillant, dites *machines oscillantes*, sont encore un système qui, après avoir joui d'une certaine vogue, finit par être à peu près abandonné. La figure 9 en représente un modèle;

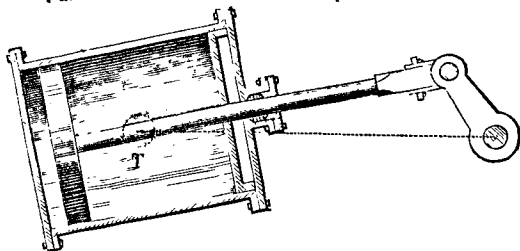


Fig. 9.

c'est la *machine oscillante horizontale*, ainsi nommée parce que le cylindre est horizontal dans sa position moyenne. Ici, c'est la bielle qui est supprimée, et la tige du piston s'articule directement avec la manivelle, parce que le cylindre oscille autour de deux tourillons T, analogues à ceux d'une pièce d'artillerie, sauf qu'ils sont creux.

L'échappement est toujours réglé, comme dans les autres machines, par un tiroir à coquilles mû par la machine elle-même. Mais, dans les premières machines oscillantes de M. Cavé, l'admission était réglée au moyen d'un disque tournant sur son centre, et analogue au papillon des locomotives; on trouvera ce mode d'admission décrit à l'article DÉTENTE. Dans ses dernières machines oscillantes, M. Cavé est revenu, pour l'admission, au système du tiroir, moins compliqué et moins sujet au dérangement. Cependant les lumières communiquent soit avec la chaudière, soit avec le condenseur, par l'intérieur des tourillons. Dans ces machines, la tige du piston éprouve des efforts de flexion considérables; les passages tortueux que la vapeur est obligée de suivre diminuent la pression motrice et augmentent au contraire la pression résistante; on a à craindre des rentrées d'air par les presse-étoupes des tourillons; enfin, ces tourillons eux-mêmes éprouvent une grande fatigue et s'usent rapidement, à cause des vibrations qui se produisent à chaque oscillation. Pour diminuer cet inconvénient, on limite les excursions de la tige à 15° ou 18° environ de part et d'autre de sa position moyenne.

Dans les machines oscillantes de M. Kientzy, la distribution se fait au moyen d'un tiroir et d'une glissoire pour faire varier la détente (Voy. DÉTENTE). Le tiroir se meut perpendiculairement à l'axe du cylindre, et il est guidé par une coulisse fixe dans laquelle roule un galet placé à l'extrémité de la tige. — Quand la course du piston est grande par rapport au diamètre du cylindre, on diminue la

flexion de la tige en faisant rouler le bouton de la manivelle entre deux guides ou montants fixés au cylindre parallèlement à son axe.

Les machines rotatives, dont nous dirons un mot en finissant, n'ont point encore réussi à se faire une place dans l'industrie, quoique Watt en ait indiqué le principe dès l'année 1782. Dans les plus anciennes, la vapeur venant de la chaudière est admise dans un cylindre fixe, dont l'axe O (fig. 10)

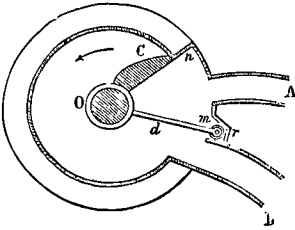


Fig. 10.

peut prendre un mouvement de rotation. A cet axe est adaptée une came C qui occupe toute la hauteur du cylindre et s'étend depuis l'axe jusqu'à la paroi; c'est cette came qui joue le rôle de piston; la vapeur, arrêtée par un clapet d, pousse la came et l'oblige à se mouvoir dans le sens de la flèche. Quand la came, en tournant, vient rencontrer le clapet d, elle l'oblige à venir se loger dans la retraite mn; mais aussitôt que la came est passée, le clapet est ramené à sa position primitive par un ressort r. La vapeur qui se trouve en avant de la came est chassée par l'orifice B dans le condenseur. — Le grand inconvénient de ce dispositif, d'ailleurs fort simple, consiste dans les chocs qui se produisent à chaque tour entre la came et le clapet.

On a imaginé plusieurs autres machines fondées sur un principe analogue. Dans la machine rotative de M. Pecqueur, la came est remplacée par une sorte de disque en forme de double cœur. Cette machine a été appliquée à des travaux de passementerie. Mais dans toutes les machines de ce genre il est bien difficile d'éviter les fuites de vapeur entre la came et les parois du cylindre, ou entre le piston, quelle que soit sa forme, et les parois du récipient dans lequel le mouvement s'opère.

Nous décrirons en terminant la machine à disque, qui est remarquable par la simplicité et l'originalité de sa disposition. Cette machine a été imaginée par Bishop et construite par Rennie; elle a été appliquée à quelques petits bateaux à bêche, et à quelques canonnières russes. Suivant Rennie, elle permet une économie de 15 à 18 pour 100 sur le combustible, et peut faire aisément jusqu'à 600 tours par minute.

La figure 11 est une projection horizontale de la machine à disque. Le récipient qui reçoit la vapeur est limité par une zone sphérique abcd et par deux fonds coniques amqd, bnpc, ayant leur sommet au centre de la sphère. Ces sommets sont entaillés pour recevoir une petite sphère solide, concentrique au récipient, et à laquelle est fixé un disque DD figurant un grand cercle de la zone. La partie inférieure du récipient est percée de deux orifices rectangulaires qu'on aperçoit en i et en h;

ce sont les lumières qui communiquent, la première avec la chaudière, la seconde avec le condenseur. Ces deux lumières sont séparées par un cloison verticale qui part du bas de la zone, s'ap-

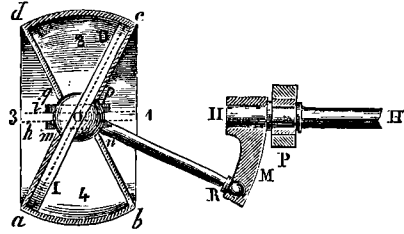


Fig. 11.

puie sur les deux cônes et se termine à la petite sphère. Le disque est à cheval sur cette cloison à l'aide d'une fente pratiquée dans ce disque, suivant la direction d'un rayon. Cette liaison de la cloison et du disque n'empêche pas celui-ci de pouvoir rouler sur les deux cônes. C'est ce qu'on reconnaîtra sur la figure 12, qui est une projection verticale de la machine. La cloison y est représentée en xyuv. Concevons qu'on donne à la fente du disque une direction quelconque OI; on pourra ensuite faire tourner le disque autour de OI jusqu'à ce qu'il vienne toucher le cône de droite; le contact se fera suivant une génératrice OG, puis le disque passe par le sommet du cône; en même temps, le disque touchera le cône de gauche suivant la

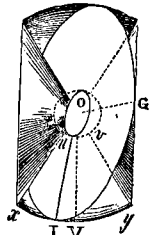


Fig. 12.

génératrice qui est le prolongement de OG. Si l'on donnait à la fente la position verticale OV, le contact se ferait suivant les génératrices horizontales des deux cônes; si, au contraire, on donnait à la fente l'une des positions ux ou vy, le contact se ferait suivant cette droite et suivant la génératrice opposée. Réciproquement, si l'on fait rouler le disque sans glissement sur les deux cônes, sa liaison avec la cloison xyuv n'empêchera pas ce roulement; seulement, la fente oscillera à chaque tour de la position ux à la position vy et de la position vy à la position ux. Dans le mouvement du disque, sa circonférence ne cessera pas de coïncider avec la zone. Pour comprendre la machine, il est indispensable de bien saisir cette disposition du disque et cette faculté de roulement malgré l'existence de la cloison, qui sont décrites d'une manière très-obscur dans les auteurs. Au centre du disque est fixée une tige OR (fig. 11), qui lui est perpendiculaire, et dont le bout, terminé par une petite sphère ou rotule, s'articule ainsi avec une manivelle M, qui fait tourner un axe horizontal HH dirigé vers le centre O de la zone.

Pour l'intelligence du mécanisme, il faut maintenant remarquer que, dans la position représentée sur la figure 11, le disque et la cloison (qui est cachée) divisent en quatre cellules la capacité du récipient. La première, marquée 1 sur la figure, est placée au-dessous du plan horizontal passant par le

centre de la zone; elle est limitée par le cône de droite, par le bas de la zone, par la cloison, et par la portion du disque située au-dessous du plan horizontal et en arrière de la cloison, c'est-à-dire par un quart de ce disque, attendu que dans la position considérée la fente du disque est verticale. La vapeur venant de la chaudière par l'orifice *i* exerce sur ce quart de disque la pression de la chaudière. La seconde cellule, marquée 2 sur la figure, est limitée par le cône de gauche, par la zone, par la partie inférieure et postérieure du disque déjà considérée ci dessus, et par toute sa partie supérieure, c'est-à-dire qu'elle est limitée par les $\frac{3}{4}$ du disque. La vapeur venant de la chaudière exerce sa pression sur ces $\frac{3}{4}$ du disque. Par conséquent, la pression de la vapeur sur le disque se réduit à celle qui s'exerce sur sa moitié supérieure au plan horizontal. La troisième et la quatrième cellule, marquées 3 et 4 sur la figure, ont les mêmes étendues respectives que les cellules 1 et 2, mais elles ne sont en communication qu'avec le condenseur, dont la pression se réduit par conséquent, comme pour 1 et 2, à celle qui s'exerce sur la moitié supérieure du disque. La pression de la chaudière sur cette même moitié étant plus grande que celle du condenseur, le disque est poussé dans le sens de la flèche, et constamment appuyé sur les deux cônes qui limitent son mouvement; il est donc obligé de rouler sur ces deux cônes. Pendant ce roulement, les cellules changent de forme et de capacité. Quand le disque est arrivé à la position dans laquelle le contact se fait suivant l'arête *xu* (fig. 12) de la cloison, et suivant la génératrice opposée, les cellules se trouvent réduites à trois; les cellules 1 et 4 sont alors égales et symétriques par rapport à la cloison; elles sont limitées chacune par la moitié du disque; mais l'une, la cellule 1, reçoit la vapeur de la chaudière, tandis que l'autre, la cellule 4, est en communication avec le condenseur; en vertu de cette différence, le mouvement tend donc à continuer dans le même sens. La troisième cellule, limitée alors par le cône de gauche et par le disque tout entier, n'est d'ailleurs en communication ni avec la chaudière ni avec le condenseur, et la pression qui s'y exerce, étant uniformément répartie sur tout le disque, ne peut changer le sens de son mouvement. Ce mouvement continue donc dans le sens où il a commencé. Puisque le disque roule sur les deux cônes, son mouvement dans l'espace est le même que s'il tournait autour de l'axe de ces cônes; à cela près d'une rotation dans son plan autour de son centre, puisque sa surface est plus grande que celle de chaque cône. La tige OR, qui lui est perpendiculaire, décrit donc dans l'espace un cône qui a le même axe que les deux premiers; il en résulte que la rotule décrit un cercle qui a son centre sur cet axe et qui lui est perpendiculaire: elle peut donc guider la manivelle M et produire la rotation autour de l'axe HH. Il est entendu que les précautions ordinaires sont prises pour empêcher les fuites de vapeur, soit entre le disque et la zone, soit entre les cônes et la petite sphère. Ce qu'il y a de remarquable dans cette machine, c'est qu'il n'y a aucun mécanisme de distribution; les lumières *i* et *h* restent constamment ouvertes.

Pour calculer le travail de la vapeur dans ces machines, on réduit par la pensée le disque au repos, et l'on imagine que ce soit le cylindre et sa cloison qui deviennent mobiles; le résultat demeure évidemment le même. Or, dans l'hypothèse que l'on fait, le travail pour chaque tour s'obtient évidemment en multipliant l'aire de la cloison par la pression de la vapeur sur un mètre carré, diminuée de celle du condenseur, et en multipliant le tout par la circonférence que décrit le centre de gravité de la cloison.

(Voy. le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Poncelet, les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, le *Traité de la Machine à vapeur* de M. de Pambour, le *Traité des Machines à vapeur* de M. Jullien, le *Traité élémentaire des appareils à vapeur de navigation* de M. Ledieu, etc.)

MACHINES À VAPEURS COMBINÉES, machines mises en mouvement à la fois par la vapeur d'eau et par la vapeur d'un liquide plus volatil, tel que l'éther, le sulfure ou le chlorure de carbone, et le chloroforme. On sait que, dans les machines à vapeur ordinaires, la vapeur qui sort du cylindre contient encore une grande quantité de chaleur, dont la principale partie est à l'état latent. Plusieurs physiciens ou ingénieurs ont eu l'idée d'employer cette chaleur latente à la vaporisation d'un liquide plus volatil, et de faire servir la vapeur de ce nouveau liquide à produire une quantité supplémentaire de travail. M. Dupré avait indiqué l'éther sulfurique, M. Du Tremblay a employé à Londres le chlorure de carbone; on a aussi essayé le sulfure de carbone. Enfin M. Lafond a appliqué au même usage le chloroforme. Dans les machines de ce système, la vapeur d'eau et la vapeur de chlorure de carbone ou de chloroforme fonctionnent dans deux cylindres séparés, sur des pistons qui agissent simultanément sur un même axe de rotation. La vapeur d'eau qui sort du premier cylindre, se rend dans un condenseur de Hall, formé d'une capacité fermée, traversée par une série de tubes contenant le liquide à vaporiser; la vapeur de celui-ci se rend dans le second cylindre. Après avoir agi sur le piston de ce second cylindre, elle passe dans une capacité où elle est condensée par l'eau froide, pour être volatilisée de nouveau, et ainsi de suite. Ce système serait évidemment économique s'il n'y avait pas des pertes inévitables du liquide volatil. Du reste, il ne faut pas s'exagérer ces pertes: une machine de 25 chevaux, travaillant 12 heures par jour pendant 18 mois, n'a donné lieu qu'à une perte de $\frac{3}{4}$ de litre de chlorure de carbone par jour; le prix de ce liquide n'est que de 2f,50 le litre.

Les conditions que doit remplir le liquide volatil employé sont d'entrer en ébullition au-dessous de 72°, de ne pas se décomposer au-dessous de 110 à 120 degrés, et de ne pas attaquer les métaux dont la machine est composée. On a renoncé à l'éther comme ne remplissant pas cette dernière condition.

Les machines à vapeurs combinées offrent des dangers d'explosion et d'incendie qui sont vraisemblablement la cause principale pour laquelle ce genre d'appareils ne s'est point propagé.

MACHINES DE COMPRESSION, machines desti-

nées à comprimer l'air dans une capacité donnée. Une machine de compression n'est autre chose qu'une pompe aspirante et foulante à double effet (Voy. POMPES). Soit \mathcal{P}_a la pression atmosphérique, et \mathcal{P} la pression définitive dans la capacité donnée, dont le volume est V ; d'après le théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz (Voy. ÉLASTICITÉ), le travail développé pour produire la compression sera exprimé par

$$\mathcal{P} V \log' \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_a}$$

A ce travail, il faut ajouter le travail du frottement du piston; il a pour valeur

$$n \cdot f \pi d e \mathcal{P} l,$$

n désignant le nombre de courses effectuées par le piston, f un coefficient que l'on peut prendre égal à 0,30, d le diamètre du piston, e la hauteur de la garniture, et l la course du piston. Le frottement de chaque boîte à étoupes sera exprimé par une formule analogue, dans laquelle on prendra

$$f = 0,20.$$

La somme de ces divers travaux donnera une limite inférieure du travail moteur à fournir. Mais il sera nécessaire de l'augmenter au moins d'un tiers à cause des fuites inévitables, et des autres pertes dont on n'a pu tenir compte.

Le nombre n peut être calculé, sauf l'influence des fuites, connaissant le volume v du corps de pompe. Puisqu'à chaque course du piston, il s'introduit dans la capacité donnée une quantité d'air qui occupait le volume v à la pression atmosphérique \mathcal{P}_a , on aura, en vertu de la loi de Mariotte,

$$n v \mathcal{P}_a = V \mathcal{P},$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{V}{v} \cdot \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_a}$$

La pression dans la capacité donnée est indiquée par un manomètre à air comprimé (Voy. MANOMÈTRE).

MACHINES-OUTILS, dénomination qui convient à toutes les machines destinées à remplacer la main de l'homme, mais que l'on applique plus particulièrement à celles qui ont pour fonction de dresser, de tourner, d'aléser, de mortaiser, de forer, de fileter, de tarauder, et de tailler les dents d'engrenage.

MACHINES PNEUMATIQUES (du grec $\piνεύμα$, $\alphaτοξ$, souffle), machines destinées à faire le vide dans une capacité donnée. Une machine pneumatique est une pompe aspirante et foulante, et elle ne diffère d'une MACHINE DE COMPRESSION (Voy. ce mot) qu'en ce que les soupapes y fonctionnent en sens inverse, c'est-à-dire que la soupape qui communique avec la capacité dans laquelle on veut faire le vide, s'ouvre dans le corps de pompe, et que celle qui communique avec l'atmosphère s'ouvre en dehors. Nous ne décrivons pas ici la machine pneumatique employée dans les cours de physique. Il ne sera question que des machines pneumatiques industrielles, telles que celles qui servaient au chemin de fer atmosphérique de Saint-Germain. (Ces machines pneumatiques étaient à double effet, et au nombre de quatre; chaque corps de pompe avait 2^m,40 de hauteur et 2^m,66 de diamètre.) On sait qu'on ne peut obtenir un vide absolu. Soit p la pression qui subsiste dans la capacité où l'on se proposait de faire le vide. Soit

v le volume de cet espace fermé, et V le volume qu'occuperait sous la pression p une masse d'air qui occupe le volume v à la pression atmosphérique \mathcal{P}_a . Le résultat est évidemment le même que si on avait fait passer de la pression p à la pression \mathcal{P}_a une masse d'air qui occupait primitivement le volume V . D'après le théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz (Voy. ÉLASTICITÉ), le travail développé pour réduire la pression dans la capacité donnée a donc pour expression

$$V p \cdot \log' \frac{\mathcal{P}_a}{p},$$

ou, attendu qu'en vertu de la loi de Mariotte $V p$ est égal à $v \mathcal{P}_a$,

$$v \mathcal{P}_a \log' \frac{\mathcal{P}_a}{p}.$$

A ce travail, il faut ajouter le travail consommé par le frottement du piston, et qui se calculera comme pour les MACHINES DE COMPRESSION et pour les MACHINES SOUFFLANTES (Voy. ces mots).

Le nombre n de courses de piston nécessaires pour réduire la pression à la valeur p dans la capacité donnée peut être calculé théoriquement, sauf l'influence des fuites. Soit q le volume décrit par le piston à chaque course. Chaque fois que l'air contenu dans la capacité donnée vient se répandre dans le corps de pompe, sa pression est réduite dans le rapport de v à $v+q$; par conséquent on doit avoir

$$p = \mathcal{P}_a \cdot \left(\frac{v}{v+q} \right)^n,$$

d'où

$$n = \frac{\log' \frac{\mathcal{P}_a}{p}}{\log' \frac{v+q}{v}}$$

MACHINES SIMPLES, machines formées d'un corps solide assujéti, soit à tourner autour d'un point fixe, soit à tourner autour d'un axe fixe, soit à glisser sur un plan fixe. Il n'y a donc, à proprement parler, que trois machines simples, répondant aux trois conditions particulières qu'on vient d'énoncer : le LEVIER, le TREUIL et le PLAN INCLINÉ. Mais on étend ordinairement le nom de machines simples à quelques autres machines qui s'y rattachent ou qui en dérivent, telles sont : les BALANCES d'espèces diverses, qui se rattachent au levier; les POULIES, simples ou mouflées, qui se rattachent au treuil; le CORN, qui dérive du plan incliné; la vis, qui tient à la fois du plan incliné et du treuil. Quelques auteurs y ajoutent le POLYgone FUNICULAIRE (Voy. les mots en petites capitales).

MACHINES SOUFFLANTES, machines destinées à lancer de l'air à l'intérieur des hauts fourneaux. Une machine soufflante n'est autre chose qu'une pompe aspirante et foulante à double effet (Voy. POMPES) qui aspire l'air de l'atmosphère et le refoule dans un réservoir, où il se trouve à une pression un peu supérieure à la pression atmosphérique, et d'où il s'écoule ensuite par une ou plusieurs buses pour se rendre dans l'intérieur du fourneau. Le plus souvent cette pompe est mise en mouvement par une machine à vapeur. Le corps de pompe est alors un cylindre vertical en fonte; et le piston qui s'y meut est articulé à l'extrémité du balancier de la machine à vapeur par l'intermédiaire d'un parallélogramme de Watt, comme le

piston à vapeur lui-même. Quelquefois cependant les cylindres sont horizontaux, comme dans la machine soufflante de M. Cadiat et dans celle de MM. Thomas et Laurens. Dans d'autres cas, la machine soufflante est mue par une roue hydraulique; le corps de pompe n'est alors, le plus souvent, qu'une caisse rectangulaire en bois, dans laquelle se meut un piston carré, dont la tige est mise en mouvement par l'intermédiaire d'une came. A cause des fuites inévitables et de l'espace nuisible (Voy. POMPES), le volume d'air qui arrive au réservoir n'est jamais égal au volume engendré

par le piston; il n'en est en général que les $\frac{3}{4}$; il peut aller jusqu'aux 0,81 quand les garnitures sont neuves; mais il s'abaisse au contraire jusqu'aux 0,55 quand les garnitures sont usées, et c'est également à ce chiffre qu'il s'abaisse dans les machines à piston carré. L'expérience montre qu'il faut de $0^m,050$ à $0^m,060$ d'air par seconde, évalué à la température zéro, et sous la pression normale de $0^m,76$ de mercure, pour alimenter un haut fourneau, par tonne de fonte produite en 24 heures. D'un autre côté, on a reconnu que la vitesse du piston ne devait pas dépasser $0^m,60$. Ces conditions servent à fixer les dimensions du cylindre. Connaissant le volume Q d'air à fournir par seconde au haut fourneau, on le divisera par 0,75 et l'on aura le volume que doit décrire le piston; divisant de nouveau ce volume par $0^m,60$ on obtiendra l'aire du piston, et par suite son diamètre. On lui donne ordinairement une course de $0^m,60$ à $0^m,65$. Pour les pistons carrés, la vitesse ne doit pas dépasser $0^m,30$; le calcul de l'aire du piston se ferait du reste de la même manière.

Dans les machines à cylindre, l'aire des soupapes d'admission ou d'aspiration varie de $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{15}$ de l'aire du piston, et l'aire des soupapes d'émission ou d'expiration varie de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{20}$ de celle du piston. Dans les machines à piston carré, on donne aux soupapes d'aspiration comme aux soupapes d'expiration une aire égale à $\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{20}$ de celle du piston.

Le volume Q est donné à zéro et sous la pression de $0^m,76$ de mercure que nous représenterons par \mathcal{P}_0 ; si Q désigne le volume du même gaz à la pression \mathcal{P}_1 , qui a lieu dans le réservoir, et à la température t , on aura

$$Q_1 = Q \cdot \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\mathcal{P}_1} \quad [1]$$

a désignant le coefficient de dilatation de l'air, que l'on peut prendre égal à 0,004 pour tenir compte de la vapeur d'eau. Mais, d'un autre côté, d'après les lois de l'ÉCOULEMENT DES GAZ (Voy. ce mot), on doit avoir

$$Q_1 = 0,94 \omega \sqrt{2g \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{1,3} \log' \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0}} \quad [2]$$

En égalant ces deux valeurs de Q_1 , on aura une relation entre la pression \mathcal{P}_1 du réservoir et l'aire ω de l'orifice de la buse qui permettra de calculer l'une de ces deux quantités quand on connaîtra ou quand on se donnera l'autre. La pression \mathcal{P}_1 ne dépasse pas ordinairement celle qui est exprimée

par $0^m,76$ de mercure augmenté de $0^m,15$ à $0^m,20$ (cette augmentation est la hauteur moyenne du manomètre qui fait connaître l'excès de la pression dans le réservoir sur la pression atmosphérique).

La machine puisant dans l'atmosphère, à chaque demi-course du piston, de l'air à la pression \mathcal{P}_0 pour le faire passer dans le réservoir à la pression \mathcal{P}_1 , si l'on appelle \mathcal{E}_0 le travail utile dépensé pour cet objet, on aura, d'après le théorème général sur le travail de l'élasticité des gaz (Voy. ELASTICITÉ),

$$\mathcal{E}_0 = Q \cdot \mathcal{P}_0 \log' \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0}$$

Pour avoir le travail moteur correspondant à cette demi-course, il faut ajouter à cette expression le travail des frottements. Le frottement du piston est exprimé par (Voy. POMPES)

$$\mathcal{E}_f = f n d e p l,$$

f désignant un coefficient de frottement qu'on peut prendre égal à 0,30, d le diamètre du piston, e la hauteur de la garniture, p la différence des pressions par mètre sur les deux faces du piston, quantité en réalité variable, mais qu'il convient de prendre égale à $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0$, enfin l la course du piston.

Le frottement de la boîte à étoupes se calcule de la même manière, en prenant $f = 0,20$. Enfin le frottement dans les tuyaux, s'il y a lieu d'y avoir égard, se calculera comme pour une conduite (Voy. ÉCOULEMENT DES GAZ.)

Ayant ainsi le travail moteur pour une course du piston, et connaissant le nombre de courses par minute puisqu'on connaît la vitesse du piston, on en déduira le travail moteur à fournir par minute, et conséquemment par seconde. Divisant par 75, on aura l'expression de la force de la machine en chevaux.

On dispose souvent le réservoir de manière à le faire servir de régulateur de la vitesse de sortie. Pour cela il suffit de lui donner une capacité égale à 20 ou 25 fois celle du corps de pompe, afin que l'air affluent et l'air qui s'écoule ne fassent varier la pression que d'une petite quantité. Le réservoir prend alors le nom de régulateur sec. Mais on peut aussi placer sur le trajet de l'air qui va du corps de pompe au réservoir un régulateur spécial. On en distingue deux espèces principales : le régulateur à eau et le régulateur à piston flottant.

Le régulateur à eau se compose d'une caisse rec-

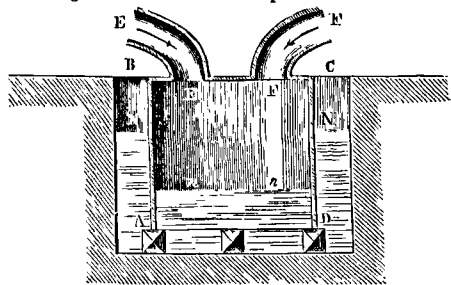


Fig. 1.

tangulaire en bois ABCD (fig. 1) ouverte par le bas, et plongeant dans l'eau. La base supérieure est fermée, mais munie de deux tuyaux dont l'un EE' communique avec le corps de pompe, et l'autre FF'

avec le réservoir. La pression dans le régulateur étant à peu près celle du réservoir, c'est-à-dire supérieure à la pression atmosphérique, le niveau nn de l'eau y est plus bas que le niveau extérieur NN , d'une quantité Nn qui équivaut, en eau, à la hauteur manométrique; c'est-à-dire que si h est cette hauteur manométrique, représentant l'excès $P_1 - P_a$, on a

$$Nn = h \times 13,6,$$

13,6 étant la densité du mercure. L'air qui afflue par le tuyau EE à chaque demi-course du piston, augmente la pression dans le régulateur, et tend à accélérer la vitesse de sortie; mais l'excès de pression fait baisser le niveau nn et élever le niveau NN , et la capacité du régulateur augmentant ainsi, la pression est ramenée à sa valeur primitive. Par contre, l'air qui s'écoule, tend à diminuer la pression dans le régulateur; et c'est ce qui arrive en effet aux instants où l'air afflue arrive avec moins d'abondance; mais alors le niveau NN s'abaisse, le niveau nn s'élève, et la capacité diminuant, la pression est encore ramenée à sa valeur première. — Pour que ce régulateur fonctionne d'une manière convenable, il faut que la capacité utile soit égale à 10 ou 12 fois celle du corps de pompe.

Le régulateur à piston flottant se compose d'un cylindre vertical en fonte $ABCD$ (fig. 2) dans lequel

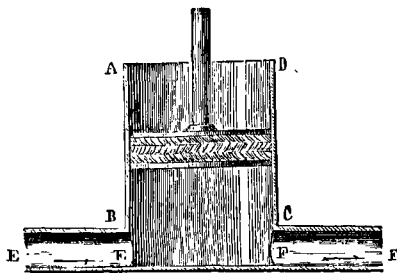


Fig. 2.

se meut un piston dont la base supérieure est chargée de poids, ou plus ordinairement de plomb fondu, et dont la tige est maintenue dans la position verticale par des guides. Le haut du cylindre est ouvert; le bas est fermé et communique avec deux tuyaux EE et FF , dont l'un amène l'air du corps de pompe, et l'autre le conduit au réservoir. Le jeu de ce régulateur est le même que le précédent: lorsque la pression tend à augmenter, le piston est poussé vers le haut, et la capacité augmentant, la pression est ramenée à sa valeur normale; lorsque la pression diminue, le piston descend par son poids, et la capacité diminuant, la pression est encore ramenée à sa valeur primitive. Le poids P du piston doit être réglé de manière à être égal à la différence entre les pressions qui s'exercent sur ses deux bases; c'est-à-dire qu'en nommant Ω l'aire du piston, on doit avoir

$$P = \Omega (P_1 - P_a).$$

La capacité utile doit être égale à 1 fois $\frac{1}{2}$ ou 2 fois celle du corps de pompe. Mais ce régulateur est le plus coûteux, et c'est celui qui régularise le moins.

Les machines soufflantes n'utilisent guère que les 0,30 du travail moteur. La faiblesse de ce rendement tient en grande partie au travail perdu pour

l'ouverture des clapets, et par l'échauffement de l'air résultant de sa compression. MM. Thomas et Laurens ont remédié au premier inconvénient en remplaçant les clapets par des tiroirs que la machine motrice fait agir; avec cette modification, le rendement des machines soufflantes s'élève de 20 pour 100.

Les machines soufflantes sont aussi employées à l'aéragé des mines; mais au lieu d'avoir à lancer un volume d'air médiocre avec une grande vitesse, elles ont à faire mouvoir avec une faible vitesse une masse d'air considérable.

(Voy. les articles CAGNARDELLE, MACHINE ASPIRANTE, TROMPE.)

MACHINES THERMIQUES, machines dans lesquelles la chaleur joue un rôle essentiel, comme dans les MACHINES À VAPEUR, les MACHINES À VAPEURS COMBINÉES, les MACHINES À AIR CHAUD ou MACHINES D'ERICSSON, le MOTEUR LENOIR (Voy. ces mots).

Les recherches récentes qui ont été faites sur la transformation du travail en chaleur et *vice-versa* (Voy. ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR), ont amené à considérer les machines thermiques sous un nouveau point de vue, et à donner une théorie nouvelle de leurs effets mécaniques. Mais, malgré le talent et le savoir des savants qui se sont occupés de cette question, elle n'est pas encore parvenue au degré de netteté et de simplicité nécessaire pour qu'elle puisse être adoptée dans la pratique.

La théorie nouvelle a fait voir, ce dont on se doutait bien un peu, que les machines à vapeur n'utilisent qu'une très-faible partie de la chaleur qu'elles emploient; ce qui n'empêche pas ces machines de rendre d'immenses services à l'industrie, aux chemins de fer et à la navigation.

MAGISTRALE, projection horizontale de l'arête supérieure de l'ESCARPE dans un ouvrage de FORTIFICATION (Voy. ces mots). C'est la magistrale qui, sur les plans, donne le contour de l'enceinte d'une place forte.

MAIN-COURANTE, partie de la rampe d'un escalier qui sert d'appui à la main lorsqu'on monte ou lorsqu'on descend. Les parties droites de la main-

Fig. 1.

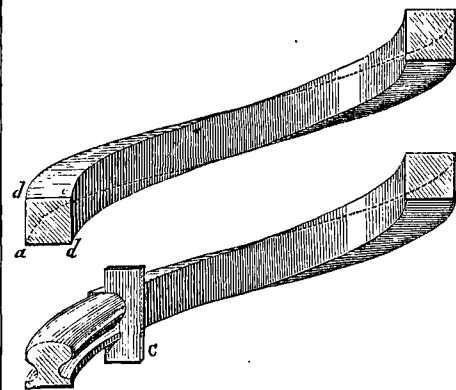


Fig. 2.

courante n'offrent aucune difficulté. Les parties courbes, comprises dans la dénomination générale de *courbe rampante*, se déduisent d'un solide de même forme que le LIMON (Voy. ce mot), et construit par

une méthode semblable. — La figure 1 représente cette courbe rampante analogue au limon; elle peut être considérée comme engendrée par un rectangle *abcd* qui se meut en restant normal à une *hélice moyenne* décrite par son centre, et de manière que ses sommets décrivent des hélices de même pas. La figure 2 montre comment, à l'aide d'un *calibre C* en fer ou en bois dur, on peut, de la courbe rampante, déduire la main-courante demandée. Le calibre doit être maintenu dans une direction normale à l'hélice moyenne; et on enlève le bois qui excède le contour intérieur.

Il faut remarquer que l'hélice moyenne peut avoir un pas variable, et un rayon variable; c'est ce qui arrive pour le limon lui-même, quand l'escalier n'est pas un escalier à vis. Mais il en est alors de même des hélices décrites par les sommets du rectangle *abcd*; et la condition indiquée ci-dessus est toujours remplie; c'est-à-dire que si l'on considère le solide élémentaire engendré par un très-petit déplacement du rectangle, auquel cas l'hélice moyenne peut être considérée comme tracée sur un cylindre à base circulaire, les hélices décrites, dans le même mouvement, par les sommets *a, b, c, d* sont des hélices de même pas.

MAÎTRE À DANSER, compas qui sert à prendre le diamètre intérieur des cylindres (*Voy. COMPAS D'ÉPAISSEUR*).

MAÎTRE-COUPLE, couple plus large que les autres, et qui est divisé en deux parties égales dans son épaisseur par le latitudinal (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE*).

MAÎTRESSE PARTIE, ensemble des *couples* qui forment la membrure d'un navire (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE*).

MANCHON, fourreau cylindrique qui peut glisser le long d'un arbre, et qui sert à guider un mouvement rectiligne suivant l'axe, indépendamment du mouvement de rotation dont celui-ci peut être animé. Tel est le manchon des *RÉGULATEURS À FORCE CENTRIFUGE* (*Voy. ce mot*). Quelquefois le manchon ne sert qu'à réunir les bouts de deux arbres ou de deux tuyaux. Tels sont les manchons qui servent dans certains cas à ajuster bout à bout les diverses parties d'une conduite d'eau ou de gaz, ou d'un tuyau de drainage.

MANDAT, lettre de change non soumise à l'acceptation (*Voy. LETTRE DE CHANGE*).

MANÈGE, nom donné aux divers dispositifs qu'on emploie pour appliquer le cheval à un travail industriel. — La partie essentielle de ce dispositif consiste toujours dans un arbre vertical *AA* reposant sur un pivot, et auquel sont fixés, à une certaine distance au-dessus du sol, un certain nombre de barres *BB*, à chacune desquelles peut être attelé un cheval. En un point différent de l'arbre est montée une roue qui transmet le mouvement aux autres organes. Dans la figure 1, la transmission s'opère à l'aide d'un engrenage conique; dans la figure 2, elle se fait avec une simple roue à chevilles engageant avec une roue à lanterne. — Quoique l'emploi de la vapeur tende à se substituer partout à celui des moteurs animés, on rencontre encore beaucoup de manèges, surtout pour les travaux qui n'exigent pas une continuité absolue. — Dans les manèges des

maratchers, employés à tirer l'eau d'un puits, la roue montée sur l'arbre vertical se compose de deux plateaux circulaires sur les bords desquels on a cloué

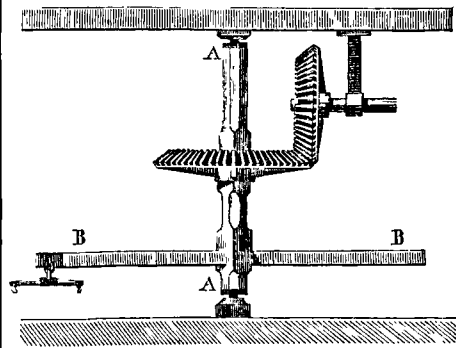


Fig. 1.

obliquement des lattes, de manière à figurer un hyperboloïde de révolution; c'est sur cette roue que s'enroule la corde dont les extrémités supportent

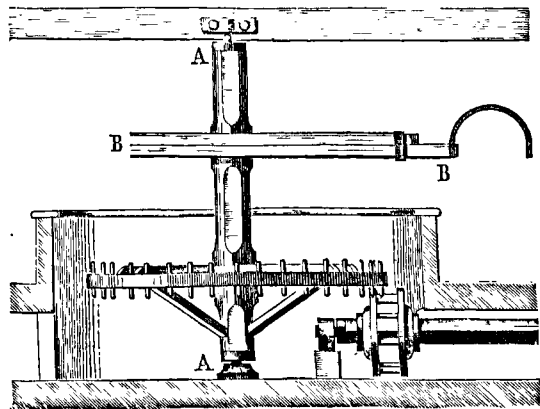


Fig. 2.

deux seaux; l'un de ces seaux est élevé plein d'eau et l'autre redescend à vide. Chaque fois qu'un seau est élevé, il faut arrêter le manège, vider le seau, et remettre le manège en mouvement en sens contraire. Pour faciliter cette manœuvre, on incline la barre du manège, de manière que le cheval puisse passer dessous, et que le palonnier puisse tourner autour de son point d'attache. On a proposé beaucoup de dispositions diverses pour éviter ce changement dans le sens de la marche; on en trouvera une indiquée dans l'ouvrage de M. Morin ayant pour titre : *Des machines et appareils destinés à l'élevation des eaux*. Mais tous ces mécanismes rendent l'installation du manège plus coûteuse, et hors de proportion avec les besoins de la culture maraichère.

On trouvera à l'article *MOTEURS ANIMÉS* les données expérimentales relatives au travail des animaux propres à être attelés à un manège.

MANIVELLE, bras perpendiculaire à un arbre tournant, et qui sert à déterminer le mouvement de rotation de cet arbre, quand on agit à l'extrémité de ce bras, soit avec la main (d'où le nom de *mani-*

velle), soit à l'aide d'une bielle articulée à cette extrémité (Voy. BIELLE).

La figure 1 représente une manivelle en fer : A est l'arbre tournant, MM forme le moyeu de la

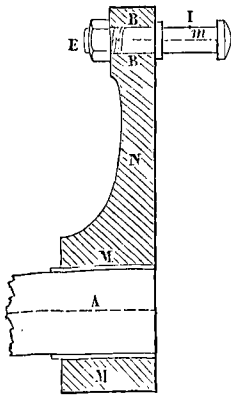


Fig. 1.

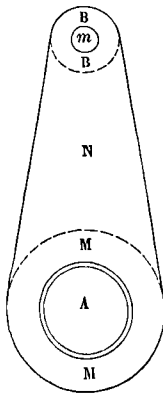


Fig. 2.

manivelle, N est le corps, BB représente la tête, m est le maneton ou bouton sur lequel s'exerce l'action de la main, ou avec lequel s'articule la bielle. Ce maneton s'engage dans une ouverture cylindrique ou légèrement conique, pratiquée dans la tête, et se termine par une vis et un écrou E qui permet de serrer le bouton contre la manivelle. Les ouvertures qui laissent passer le maneton et le corps de l'arbre tournant sont ce que l'on appelle les lumières. — Quelquefois la manivelle s'exécute en fonte, et le bouton seul est en fer forgé.

Voyez pour l'usage de la manivelle l'article TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS (rectiligne alternatif ou circulaire alternatif en circulaire continu). Nous ne nous occuperons ici que du calcul des dimensions à donner aux différentes parties de cet organe de transmission.

On considère le corps de la manivelle comme une pièce encastree à l'une de ses extrémités, celle qui correspond à l'arbre tournant, et sollicitée à l'autre extrémité par une force, variable d'intensité et de direction, mais dont le moment est ordinairement maximum à l'instant où cette force est perpendiculaire à la direction de la manivelle. En appelant F cette force, et L la longueur de la manivelle, comptée de l'axe de l'arbre à celui du maneton, et en appliquant la formule de la résistance (Voy. FLEXION PLANE), on aura donc

$$R = \frac{v}{I} \cdot FL. \quad [1]$$

Mais, si a est la dimension du moyeu de la manivelle parallèlement à l'axe de rotation, b son épaisseur dans le sens perpendiculaire, et d le diamètre de l'arbre, on a

$$v = \frac{1}{2} b, \quad I = \frac{1}{12} a (b^3 - d^3),$$

par conséquent,

$$R = \frac{6bFL}{a (b^3 - d^3)}; \quad [2]$$

d'où l'on tirera la valeur de b. Les constructeurs prennent $R = 4\,600\,000$ pour le fer, et $R = 2\,300\,000$ pour la fonte; et si la manivelle est exposée à des

chocs, il convient de réduire ces coefficients à moitié.

La section du maneton doit être déterminée en regardant cette pièce comme encastree à son point de jonction avec la tête de la manivelle, et soumise en son milieu à une force T égale à la tension de la bielle. Si l désigne la longueur de la partie extérieure du maneton, on aura donc

$$\mu = \frac{1}{2} Tl;$$

et par suite $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{I} \cdot Tl.$

Mais si x désigne le diamètre du maneton, on a

$$v = \frac{1}{2} x \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{64} \pi x^4$$

(Voy. MOMENTS D'INERTIE); il vient donc

$$R = \frac{16 Tl}{\pi x^3}, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{16 Tl}{\pi R}}. \quad [3]$$

On prend généralement pour le diamètre de la tête de la manivelle le double du diamètre du bouton. On donne à la dimension des lumières parallèle à leur axe de 1,2 à 2 fois leur diamètre.

Soit, par exemple, à transmettre, à l'aide d'une manivelle en fer de 0^m,25 de longueur, un travail de 30 chevaux; le nombre de tours de la manivelle étant de 50 par minute.

On aura $T \cdot \omega = 0^m,25 = 75^km,30$, en appelant ω la vitesse angulaire de l'arbre (Voy. VITESSE ANGULAIRE), ou

$$\frac{\pi \cdot 50}{30};$$

on pourra donc écrire

$$T \cdot \frac{\pi \cdot 50}{30} \cdot 0^m,25 = 75^km,30,$$

d'où $T = \frac{75 \cdot (30)^2}{\pi \cdot 50 \cdot 0,25} = 1744,3.$

La formule [3] donnera alors

$$R = \frac{6b \cdot 1744,3 \cdot 0,25}{a (b^3 - d^3)} = 4\,600\,000.$$

Si l'on suppose

$$d = 0^m,12 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{4} b,$$

il viendra $4\,600\,000 = \frac{24 \cdot 1744,3 \cdot 0,25}{(b^3 - 0,001728)}$,

d'où $b = \sqrt[3]{0,001728 + \frac{24 \cdot 1744,3 \cdot 0,25}{4\,600\,000}}$;

c'est-à-dire $b = 0^m,15875\dots$, ou environ 0^m,159.

L'équation [3] donnera ensuite, en supposant $l = 0^m,08$,

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1744,3 \cdot 0,08}{\pi \cdot 4\,600\,000}},$$

ou $x = 0^m,053659$, ou environ 0^m,054.

On prendra donc pour le diamètre de la tête 0^m,054 × 2 ou 0^m,108; et pour sa dimension parallèlement à l'axe 0^m,054 × 1,2 ou 0^m,0648, ou environ 0^m,065.

Une fois les diamètres du moyeu et de la tête obtenus, on trace les cercles qui représentent ce moyeu et cette tête, et on les raccorde par deux tangentes extérieures, pour avoir la forme du corps de la manivelle. Voy. la figure 2.

Une manivelle est dite à simple effet quand la force mouvante qui est appliquée au maneton, par l'intermédiaire d'une BIELLE (Voy. ce mot), n'agit que pendant une demi-révolution. Si, comme cela

arrive d'ordinaire, le mouvement est périodique, on obtient aisément la relation qui doit avoir lieu entre la force mouvante et la force résistante pour l'équilibre dynamique de la manivelle pendant chaque période, c'est-à-dire à chaque tour. — Soit F la force mouvante; on suppose qu'elle demeure parallèle à elle-même, ce qui a sensiblement lieu quand la bielle a 5 à 6 fois la longueur du rayon r de la manivelle. Le travail de cette force pour un tour est alors $F \cdot 2r$. Soit P la force résistante, supposée constante, et appliquée à une distance r' de l'axe de rotation; son travail pour un tour sera $P \cdot 2\pi r'$. On devra donc avoir, d'après le principe de la TRANSMISSION DU TRAVAIL (Voy. ce mot), et en négligeant le frottement,

$$F \cdot 2r = P \cdot 2\pi r' \quad \text{d'où} \quad F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \pi \quad [1]$$

et, si l'on suppose $r' = r$, $F = P \cdot \pi$. [2]
 Le moment de la force F varie depuis zéro jusqu'à $F \cdot r$; le rapport de ce moment à celui de la force résistante, qui est constant et égal à $P r'$, varie donc depuis zéro jusqu'à $\frac{F r}{P r'}$, ou, en mettant pour F sa valeur [1], depuis zéro jusqu'à π .

Une manivelle est dite à double effet quand la force mouvante F agit pendant toute la durée de la révolution, en changeant de sens à chaque demi-tour. Le travail de la force F pour un tour est alors $F \cdot 4r$; et l'on doit avoir, à chaque tour,

$$F \cdot 4r = P \cdot 2\pi r', \quad \text{d'où} \quad F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \frac{\pi}{2} \quad [3]$$

ou, si $r' = r$, $F = P \cdot \frac{\pi}{2}$ [4]

Le moment de la force F varie encore de zéro à $F r$, et son rapport au moment de P varie de zéro à $\frac{F r}{P r'}$, ou en mettant pour F sa valeur [3] depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$.

Le mouvement d'une manivelle à simple effet est ordinairement régularisé par un VOLANT (Voy. ce mot) monté sur l'axe de rotation de cette manivelle.

On remplace quelquefois le volant par un simple contre-poids appliqué à l'extrémité d'un bras perpendiculaire à l'axe de rotation; et l'on obtient ainsi le même degré de régularité que si la manivelle était à double effet. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que la force F n'agisse qu'en descendant; on placera le contre-poids en sens inverse de la manivelle; soit p son poids, et b la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation. Si l'on veut que l'équilibre dynamique ait lieu pour chaque demi-tour, on devra avoir : pour le premier demi-tour,

$$F \cdot 2r - p \cdot 2b = P \cdot \pi r' \quad [5]$$

et pour le second demi-tour,

$$p \cdot 2b = P \cdot \pi r', \quad [6]$$

attendu que la force F cesse alors d'agir et que le contre-poids devient force mouvante. De ces deux relations on déduit, comme ci-dessus

$$F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \pi \quad [7]$$

et $p b = \frac{1}{2} F r = \frac{\pi}{2} P r'$. [8]

Dans le premier demi-tour, la somme algébrique des moments des forces F et p se réduit à la moitié du

moment de F , et son rapport au moment de P varie en conséquence depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. Dans le second demi-tour, le moment de p est la moitié du moment de F dans le premier; son rapport au moment de P varie donc encore de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, dans chaque demi-tour, les moments comparés au moment de P varient entre les mêmes limites que si la manivelle était à double effet.

Si la force F agissait en montant, on dirigerait le bras du contre-poids dans le même sens que la manivelle, et les résultats seraient les mêmes.

Il est clair qu'on peut à l'action du contre poids joindre celle d'un volant pour rendre le mouvement plus régulier encore.

On a proposé d'ajouter un contre-poids aux manivelles à double effet. Il ne se place plus alors sur l'axe même de la manivelle, mais sur un axe parallèle, lié au premier par un engrenage, de manière à faire deux tours quand la manivelle en fait un. M. Bélanger a montré (Voy. son Cours de Mécanique appliquée à l'École centrale des arts et manufactures) qu'en faisant $p b = 0,219 F r$ environ on obtient la plus grande régularité possible. Nous n'insisterons pas sur ce dispositif plus ingénieux que pratique; la complication du mécanisme et l'accroissement de frottement dû à l'engrenage lui font perdre une grande partie de son avantage. Il est préférable d'augmenter d'une manière convenable le poids du volant.

Une manivelle peut être remplacée par un arbre coudé (Voy. MANIVELLES MULTIPLES).

MANIVELLE DYNAMOMÉTRIQUE, appareil imaginé par M. Morin pour évaluer le travail de l'homme appliqué à la manivelle (Voy. MANIVELLE). Cet appareil, représenté en élévation sur la figure 1, est monté à l'extrémité d'un manchon que l'on fixe, à l'aide de vis calantes, au bout de l'arbre à expérimenter. Il se compose de deux bâtis, l'un rectangulaire $AA'B'B$, voisin du manchon; l'autre triangulaire aMb , un peu plus éloigné, et qui peut tourner autour d'un axe O perpendiculaire à son plan et fixé au bâti principal. C'est à l'extrémité M du bâti triangulaire qu'est adapté le maneton auquel doit être appliqué l'effort de l'homme. Ce bâti comprend, outre ses branches aM et bM , une lame d'acier LL' fixée par l'une de ses extrémités au manchon dont il a été parlé. Quand on agit sur le maneton M , on fait tourner le bâti triangulaire, lequel fait fléchir la lame LL' d'une quantité proportionnelle à l'effort exercé; et quand la réaction de la lame est devenue suffisante, elle entraîne le manchon ainsi que l'arbre à l'extrémité duquel il est fixé. L'effort musculaire de l'homme se transmet donc par l'intermédiaire de la lame de ressort, dont les flexions représentent la force exercée, tandis que les arcs décrits par le maneton expriment les chemins parcourus par le point d'application de cette force.

L'instrument est disposé de manière à donner la loi des efforts en fonction des chemins, et par suite le travail développé. Voici la disposition adoptée pour cela. Autour du maneton est disposée une couronne RRR formant roue d'angle, que l'on peut rendre fixe dans l'espace; un pignon d'angle r , dont l'axe est fixé au bâti rectangulaire,

engrène avec cette couronne dentée; et lorsque tout le système tourne autour de l'axe de rotation, il est obligé de tourner autour de sien, d'une quantité proportionnelle. Son axe porte une vis sans fin,

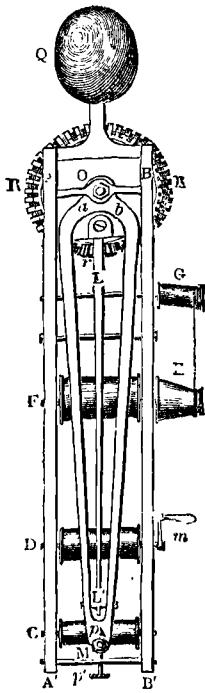


Fig. 1.

qui fait tourner une petite roue qu'on ne peut voir sur la figure, mais dont l'axe porte une bobine G. Sur cette bobine s'enroule un fil de soie qui fait tourner la fusée conique E, et par suite le cylindre F. Sur ce cylindre s'enroule une bande de papier qui passe sur le cylindre C, en se déroulant du cylindre D, où il avait été enroulé à l'aide d'une petite manivelle m. Il résulte de ces liaisons que la bande de papier prend un mouvement proportionnel à la rotation du maneton M. La fusée E, appelée fusée compensatrice, est nécessaire pour que le mouvement de la bande de papier n'aille pas en s'accéléralant à mesure que le papier s'enroule sur le cylindre F et augmente ainsi son diamètre. Les rayons des bases de la fusée sont calculés de manière que l'augmentation du rayon du cylindre F soit compensée par l'augmentation du rayon sur lequel agit le fil de soie tiré par la bobine G. A l'extrémité du ressort LL' est fixé au bâti triangulaire un pinceau p, qui trace sur le cylindre C la courbe donnant la loi des efforts. Un autre pinceau p', fixé au bâti rectangulaire, y trace une ligne droite appelée *ligne zéro*, parce que, d'après la position du pinceau p', elle répond à un effort nul. C'est l'axe à partir duquel sont comptées les ordonnées de la courbe tracée par le pinceau p, ordonnées égales aux flexions de l'extrémité de la lame, et par conséquent proportionnelles aux efforts exercés. Les abscisses de cette même courbe, parallèles à la ligne zéro, sont d'ailleurs proportionnelles aux chemins décrits par le maneton M. L'aire de la courbe tracée par le pinceau p' est donc proportionnelle au travail développé par l'homme, appliqué au maneton M. Cette aire peut être évaluée de plusieurs manières; la plus simple, qui est celle indiquée par M. Morin, consiste à découper le papier suivant la courbe et suivant la ligne zéro, et à peser la bande comprise entre les ordonnées extrêmes; connaissant le poids d'un mètre carré de ce papier, qui peut être déterminé à l'avance avec assez d'exactitude si l'on emploie du papier à la mécanique, généralement homogène, on obtient l'aire demandée à l'aide d'une simple proportion. (Voy. DYNAMOMÈTRES.)

Un contre-poids Q sert à équilibrer tout le système.

La figure 2 représente un spécimen de la courbe obtenue. La plus grande ordonnée répond à l'instant où, le maneton se trouvant placé vers la partie supérieure du cercle qu'il parcourt, l'effort exercé

par l'homme est le plus grand; la plus petite ordonnée répond, au contraire, à l'instant où, le maneton se trouvant placé vers le bas du cercle,

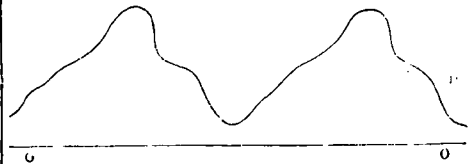


Fig. 2.

l'effort exercé est le plus faible. (Voy. MOTEURS ANIMÉS.)

MANIVELLES ANTIROTATIVES. Voy. PARALLÉLOGRAMME DE REULAUX.

MANIVELLES MULTIPLES, systèmes formés de plusieurs manivelles montées sur le même arbre. Il arrive presque toujours, dans les systèmes de ce genre, que l'une au moins des manivelles est remplacée par l'axe lui-même, qui est *coudé*, à cet effet, comme l'indique la figure 1. La partie aa du coude qui est parallèle à l'axe joue le rôle de maneton d'une manivelle ordinaire, et c'est à cette partie que s'articule la bielle BB qui transmet le mouvement à l'arbre, ou qui le reçoit de celui-ci.

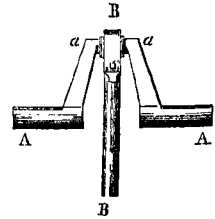


Fig. 1.

On appelle *manivelle double* un système de deux manivelles montées sur le même axe. Si les manivelles sont à simple effet, on les place dans le prolongement l'une de l'autre, de telle sorte qu'à l'instant où l'action d'une des forces mouvantes cesse, l'autre commence à agir, et qu'il n'y ait point d'interruption dans l'action motrice. Si F désigne l'une des forces mouvantes supposées égales, comme cela a lieu d'ordinaire, r le rayon de la manivelle, P la force résistante, supposée constante et agissant à la distance r' de l'axe, on devra avoir, en égalant le travail moteur au travail résistant pour chaque tour :

$$2.F.2r = P.2\pi r', \text{ d'où } F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \frac{\pi}{2}. [1]$$

La condition de l'équilibre dynamique pour une manivelle double à simple effet est donc la même que pour une manivelle simple à double effet (Voy. MANIVELLE).

Si les manivelles sont à double effet, ce qui arrive le plus souvent, on les place à angle droit, comme la figure 2 le montre en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe. On doit avoir

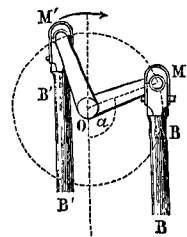


Fig. 2.

alors à chaque tour, en conservant les mêmes notations,

$$2.F.4r = P.2\pi r', \text{ d'où } F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \frac{\pi}{4}. [2]$$

Soit α l'angle que fait l'une des manivelles, OM

par exemple, avec la direction commune des bielles, supposées assez longues pour pouvoir être regardées comme demeurant parallèles à elles-mêmes, on voit aisément que, dans toutes les positions, la somme des moments des forces F est exprimée par

$$Fr(\sin\alpha + \cos\alpha) \text{ ou } 2Fr\sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha),$$

ou $Fr\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha).$

Le rapport de cette somme au moment de la force P est donc

$$\frac{Fr\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)}{Pr'}$$

ou, en mettant pour F sa valeur [2],

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \alpha),$$

quantité dont les valeurs extrêmes, répondant à $\alpha = 0$ et à $\alpha = 45^\circ$, sont

$$\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{4}\sqrt{2},$$

et sont par conséquent proportionnelles aux nombres 1 et 1,4142...

Les manivelles doubles sont employées dans le mécanisme des machines à vapeur accouplées, et particulièrement dans les locomotives.

On appelle *manivelle triple* un système de trois manivelles montées sur le même axe; l'une des manivelles est nécessairement remplacée par l'arbre coudé, comme le montrent les figures 3 et 4. Les

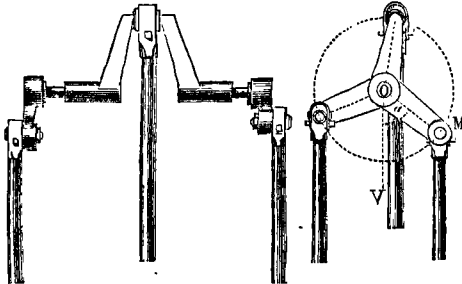


Fig. 3.

Fig. 4.

trois manivelles sont placées de manière à faire entre elles des angles égaux, par conséquent de 120° chacun.

Pour l'équilibre dynamique du système, on doit avoir à chaque tour, si les manivelles sont à simple effet :

$$3 \cdot F \cdot 2r = P \cdot 2\pi r', \text{ d'où } F = P \cdot \frac{r'}{r} \cdot \frac{\pi}{3} \quad [3]$$

Supposons, pour fixer les idées, que les forces F n'agissent que dans la demi-révolution ascendante; et soit toujours α l'angle VOM de l'une des manivelles avec la direction commune des bielles, que nous supposons verticales. De $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 60^\circ$, il y aura deux bielles ascendantes et une descendante; la somme des moments des forces appliquées aux deux premières sera

$$Fr \sin \alpha + Fr \sin(\alpha + 120^\circ);$$

or $\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) = 2 \cos 60^\circ \cdot \sin(\alpha + 60^\circ)$. La somme des deux moments considérés revient donc à

$$2Fr \cos 60^\circ \cdot \sin(\alpha + 60^\circ),$$

et le rapport de cette somme, au moment Pr' de la

résistance, est, en remplaçant F par sa valeur [3],

$$\frac{2}{3}\pi \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin(\alpha + 60^\circ) \text{ ou } \frac{\pi}{3} \sin(\alpha + 60^\circ),$$

quantité dont les valeurs extrêmes répondant à $\alpha = 0$ et à $\alpha = 30^\circ$, sont

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ et } \frac{\pi}{3},$$

ou

$$\frac{\pi}{3} \cdot 0,866 \text{ et } \frac{\pi}{3}.$$

De $\alpha = 60^\circ$ à $\alpha = 120^\circ$, il y aura au contraire deux bielles descendantes et une seule ascendante; le moment de la force motrice correspondante à cette dernière sera

$$Fr \sin \alpha,$$

et le rapport de ce moment à celui de la résistance sera

$$\frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha,$$

quantité dont les valeurs extrêmes, quand on fait varier α de 60° à 120° , répondent à $\alpha = 60^\circ$ et à $\alpha = 90^\circ$, et sont

$$\frac{\pi}{3} \cdot 0,866 \text{ et } \frac{\pi}{3},$$

c'est-à-dire les mêmes que lorsqu'il y a deux bielles ascendantes.

Au delà de $\alpha = 120^\circ$, les moments repassent par les valeurs déjà obtenues; ces moments restent donc toujours compris entre des valeurs qui sont entre elles comme 0,866 est à l'unité. De là une grande régularité dans la transmission du mouvement. Cette transmission est employée dans la manœuvre des POMPES (Voy. ce mot).

On pourrait croire que si les trois bielles étaient à double effet, on obtiendrait une régularité plus grande encore; mais il n'en est rien. Dans ce cas, les trois forces agissent dans chaque demi-révolution, et la somme de leurs moments est proportionnelle à la somme des trois perpendiculaires abaissées des centres des trois manetons sur la verticale OV, passant par l'axe de rotation. Or, d'après une propriété géométrique connue, celle de ces trois perpendiculaires qui est seule d'un côté de la verticale, est toujours égale à la somme des deux autres; en sorte que la somme des trois moments est donc proportionnelle à cette perpendiculaire isolée. Si l'on appelle α l'angle que la manivelle correspondante fait avec la verticale, cette somme de moments est donc proportionnelle à $\sin \alpha$. Mais pour que la perpendiculaire que l'on considère soit seule d'un côté de la verticale, il faut que α , ainsi que nous l'avons vu plus haut, soit compris entre 60° et 120° ; et nous avons reconnu que dans ce cas les valeurs extrêmes de α , répondant à $\alpha = 60^\circ$ et à $\alpha = 90^\circ$, sont 0,866 et 1; elles sont donc les mêmes que dans le cas où les manivelles sont à simple effet.

Pour obtenir une plus grande régularité, il faudrait employer plus de trois manivelles montées sur un même axe, cinq ou sept par exemple; mais la complication du mécanisme, et la difficulté d'exécution et surtout d'ajustage des arbres plusieurs fois coudés, ont fait renoncer à l'emploi des manivelles multiples au delà de trois.

On ajoute d'ailleurs à la régularité en montant un VOLANT (Voy. ce mot) sur l'axe des manivelles; c'est ce qu'on fait d'ordinaire pour les manivelles simples ou doubles, à simple effet ou à double effet

Les manivelles multiples sont le sujet d'un intéressant mémoire de M. Haton de la Goupillière, inséré dans les *Annales des mines* en 1863.

MANOEUVRE DES VAISSEAUX, branche de la science navale qui comprend tout ce qui a trait aux évolutions et à la marche d'un navire (*Voy. ÉVOLUTIONS, GOUVERNEMENT D'UN NAVIRE*). On peut consulter sur ce sujet le *Manœuvrier*, de M. Bourdé de Villehuet.

MANOMÈTRE (du grec *μανός*, rare, et *μέτρον* mesure), instrument destiné à mesurer la tension des gaz et particulièrement celle de la vapeur dans les chaudières. On en distingue trois espèces principales : les *manomètres à air libre*, les *manomètres à air comprimé*, et les *manomètres métalliques*.

I. Un manomètre à air libre est un siphon renversé AMB (fig. 1), dont une extrémité A s'ouvre dans la chaudière, et l'autre B dans l'air. La partie inférieure du tube est remplie de mercure, jusqu'à une hauteur C ou C' qui est la même dans les deux branches tant que la pression dans la chaudière équivaut à la pression atmosphérique. Mais si la pression de la vapeur dépasse une atmosphère, le niveau s'abaisse d'une certaine quantité CD dans la branche adjacente, et s'élève dans l'autre branche d'une quantité C'D', qui est égale à CD si les diamètres des deux branches sont égaux. L'excès de la pression de la vapeur sur la pression atmosphérique est mesuré par la différence de niveau des points D et D'; et si l'on désigne par \mathcal{P} la pression de la vapeur par mètre carré, par \mathcal{P}_0 celle de l'atmosphère, par H le poids du mètre cube de mercure, et par $2h$ la hauteur DD', on a (*Voy. PRESSION D'UN FLUIDE*)

$$\frac{\mathcal{P}}{H} = \frac{\mathcal{P}_0}{H} + 2h. \quad [1]$$

Les quotients $\frac{\mathcal{P}}{H}$ et $\frac{\mathcal{P}_0}{H}$ expriment les hauteurs des colonnes de mercure dont le poids serait équivalent aux pressions \mathcal{P} et \mathcal{P}_0 ; en les nommant H et H_0 , on peut donc écrire

$$H = H_0 + 2h. \quad [2]$$

L'emploi des manomètres à air libre a été prescrit par les règlements administratifs de 1843. Mais ces appareils ont l'inconvénient d'exiger un grand espace en hauteur lorsque la pression dans la chaudière est un peu considérable, car la distance DD' doit être égale à autant de fois 0^m,76 qu'il y a d'unités dans le nombre d'atmosphères qui exprime l'excès de la pression mesurée sur la pression atmosphérique. MM. Thomas et Laurent ont remédié à cet inconvénient, dès l'époque dont nous parlons, en donnant au tuyau d'ascension un diamètre plus grand qu'au reste du tube manométrique. La figure 2 représente cette disposition : ab et cd sont les deux branches du siphon en fer étiré de 5 à 6 millimètres de diamètre (elles sont brisées sur la figure). La branche ab qui communique avec la chaudière, est surmontée d'un cylindre en fonte AA, qui reçoit la vapeur condensée, et qui

est toujours rempli d'eau. La branche cd est surmontée d'un large tube en verre épais BB, dont la section intérieure est 5 ou 6 fois plus grande que celle du siphon ; il porte latéralement une échelle divisée ll. Il communique

par le haut avec un tuyau de fonte DD, fermé par le bas, et percé seulement d'un orifice O à sa partie supérieure. Ce tuyau est destiné à recevoir le mercure, dans le cas où l'excès de pression ferait élever le niveau n au delà de la limite ordinaire et ferait sortir le liquide du tube BB. On conçoit aisément l'effet de l'augmentation de section du siphon à sa partie supérieure. Si, par exemple, la section du tube BB est 5 fois plus grande que celle de la branche ab, lorsque l'accroissement de la pression fera descendre le mercure dans cette branche d'une quantité h, il ne s'élèvera dans le tube BB que de $\frac{1}{5}h$; et le manomètre ainsi modifié exigera un emplacement beaucoup moindre. Il serait facile de modifier la formule [2] de manière à la rendre applicable à ce dispositif; mais on préfère graduer l'échelle ll par comparaison avec un manomètre étalon.

M. Richard de Lyon a adopté, pour réduire la hauteur du manomètre à air libre, une autre disposition, fondée sur un principe longtemps connu, mais dont il a fait une heureuse application. Cette disposition consiste à replier plusieurs fois sur lui-même le tube manométrique, comme l'indique la figure 3. Dans l'état naturel, c'est-à-

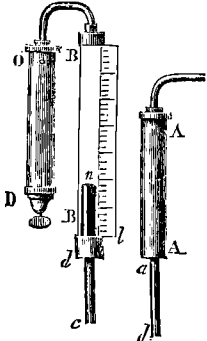


Fig. 2.

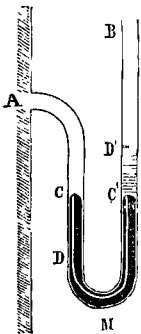


Fig. 1.

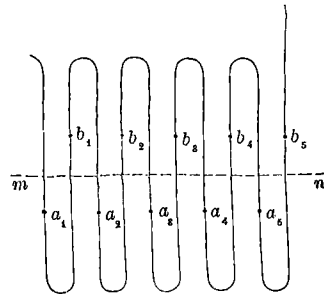


Fig. 3.

dire lorsque la pression dans la chaudière est égale à la pression atmosphérique, tous les tubes sont remplis de mercure dans leur partie inférieure jusqu'à un même niveau mn qui les divise à peu près en deux parties égales, et les courbures supérieures sont remplies d'eau. Si la pression vient à augmenter dans la chaudière, le niveau du mercure dans le tube adjacent à la chaudière s'abaisse d'une quantité h et vient en a₁; il s'élève par conséquent d'une quantité égale dans la branche suivante et vient en b₁; il s'abaisse de h dans la troisième

branche et vient en a_2 ; il s'élève de h dans la quatrième et vient en b_2 ; et ainsi de suite; enfin il s'élève de h dans la dernière et vient en b_n . Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots$, les valeurs de la pression par mètre aux points a_1, a_2, a_3, \dots ; p_1, p_2, p_3, \dots , les valeurs de la pression aux points b_1, b_2, b_3, \dots ; Π le poids du mètre cube de mercure, et Q le poids du mètre cube d'eau; on aura, en considérant les niveaux $a_1, b_1, a_2,$

$$\mathcal{P}_1 = p_1 + \Pi \cdot 2h \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 = p_1 + Q \cdot 2h,$$

d'où

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = (\Pi - Q) \cdot 2h.$$

On trouvera de même

$$\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 = (\Pi - Q) \cdot 2h,$$

$$\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4 = (\Pi - Q) \cdot 2h,$$

$$\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_5 = (\Pi - Q) \cdot 2h;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_5 = 4(\Pi - Q) \cdot 2h.$$

On aura d'ailleurs

$$\mathcal{P}_5 - p_5 = \Pi \cdot 2h,$$

et par conséquent

$$\mathcal{P}_1 - p_5 = 4(\Pi - Q) \cdot 2h + \Pi \cdot 2h,$$

ou

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\Pi} - \frac{p_5}{\Pi} = 2h \left[1 + 4 \left(1 - \frac{Q}{\Pi} \right) \right],$$

ou, en mettant pour $\frac{Q}{\Pi}$ sa valeur $\frac{1}{13,6}$,

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\Pi} - \frac{p_5}{\Pi} = 2h[1 + 4 \cdot 0,926], \quad [3]$$

formule qui servira à calculer la pression \mathcal{P}_1 de la vapeur connaissant la hauteur h , ou à déterminer au contraire cette hauteur connaissant la pression \mathcal{P}_1 . On peut remarquer que le nombre 4 qui multiplie $1 - \frac{Q}{\Pi}$ est égal au nombre des courbures inférieures du tube diminué d'une unité; en sorte qu'en nommant n ce nombre de courbures, H la hauteur de mercure mesurant la pression dans la chaudière et H_0 celle qui mesure la pression atmosphérique, on aura généralement

$$H = H_0 + 2h[1 + 0,926(n-1)]. \quad [4]$$

II. Un manomètre à air comprimé est encore un siphon renversé, mais dont une branche est fermée, tandis que l'autre communique avec la chaudière. La figure 4 représente l'une des dispositions les plus ordinaires de cet appareil. Lorsque la pression dans la chaudière est égale à la pression atmosphérique, le mercure est au même niveau mn dans les deux branches. Quand la pression augmente dans la chaudière, le niveau s'abaisse d'une quantité h dans la branche adjacente, et vient en B; il s'élève par conséquent d'une quantité égale dans l'autre branche, et vient en A, en comprimant l'air qui y est contenu. Si \mathcal{P} désigne la pression dans la chaudière, et \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique, on obtient d'abord pour la pression en A après la compression

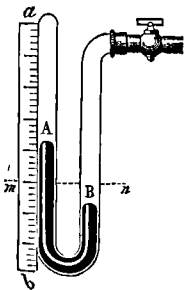


Fig. 4.

$$\mathcal{P}_0 \cdot \frac{Y}{Y-h},$$

en appelant Y la hauteur du tube fermé au-dessus du niveau mn . Par suite, il vient

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cdot \frac{Y}{Y-h} + 2\Pi h,$$

ou

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} \cdot \frac{Y}{Y-h} + 2h, \quad [5]$$

ou

$$H = H_0 \cdot \frac{Y}{Y-h} + 2h, \quad [6]$$

formule qui servira à calculer H ou h connaissant l'une de ces quantités.

La branche fermée porte une échelle ab que l'on peut graduer à l'aide de la formule [6] ou par comparaison avec un manomètre étalon.

On a aussi donné aux manomètres à air comprimé la disposition représentée par la figure 5.

MN est une boîte en fonte, qu'un conduit U met en communication avec la chaudière. Cette boîte se prolonge à sa partie inférieure sous la forme d'une cuvette profonde CCC. Elle est en partie remplie de mercure. Dans la cuvette CCC plonge le tube manométrique DD, fermé à sa partie supérieure. Sous l'influence de la pression de la vapeur le niveau du mercure s'abaisse dans la boîte et s'élève dans le tube,

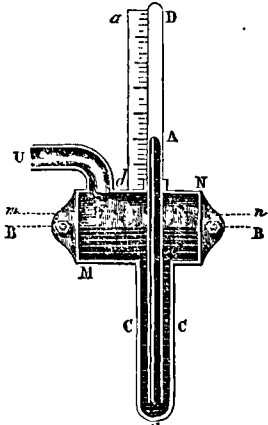


Fig. 5.

en parcourant une échelle divisée ab . Soit mn le niveau du mercure lorsque la pression dans la chaudière est égale à la pression atmosphérique. Si le niveau s'abaisse de x dans la boîte, il s'élèvera de $n x$ dans le tube, n désignant le rapport des sections Ω et ω de la boîte et du tube. On aura donc

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cdot \frac{Y}{Y-nx} + (n+1)x \cdot \Pi,$$

ou, en posant $n x = h$, divisant par Π , et remplaçant n par sa valeur $\frac{\Omega}{\omega}$,

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} \cdot \frac{Y}{Y-h} + \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right) h,$$

ou enfin

$$H = H_0 \cdot \frac{Y}{Y-h} + \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right) h. \quad [7]$$

Les indications du manomètre devraient, à la rigueur, subir une correction relative au changement de température. Mais une variation de 15° n'occasionnant pas une erreur de $\frac{1}{20}$, on néglige ordinairement cette cause d'erreur, attendu qu'une précision extrême dans l'évaluation de la pression n'est jamais nécessaire. Cependant, si l'on veut avoir égard à la température, on pourra procéder comme il suit. Nous prenons, pour fixer les idées, le dispositif de la figure 5.

Soit y le volume occupé par l'air comprimé au moment de l'expérience, ou le nombre de divisions qu'il occupe dans le tube, et p la pression de ce

gaz par mètre carré. On aura, en appelant t la température et a le coefficient de dilatation,

$$p = 10334^k \cdot \frac{Y}{y} (1 + at),$$

Y étant le volume du même gaz à zéro et sous la pression de 0^m,76 de mercure. Soit maintenant H la hauteur de la colonne de mercure au-dessus du niveau de la cuvette. Cette hauteur, observée à la température t , serait à zéro

$$\frac{H}{1 + \frac{t}{5550}} \text{ ou } \frac{H}{1 + 0,00018t}$$

Le poids d'une colonne de mercure ayant cette hauteur et 1^m de base serait

$$\frac{13598^k \cdot H}{1 + 0,00018t}$$

c'est la pression exercée sur un mètre carré par la colonne considérée. On a donc

$$P = 10334^k \cdot \frac{Y}{y} (1 + at) + \frac{13598^k \cdot H}{1 + 0,00018t}$$

et comme le nombre 10334 est le produit de 13598 par 0,76, on peut écrire

$$P = 10334^k \left[(1 + at) \frac{Y}{y} + \frac{H}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + 0,00018t} \right] \quad [8]$$

Si Y n'est pas connu, on peut le déterminer par expérience en se servant de la formule [8] elle-même. Pour cela, il suffit de mettre la cuvette en communication avec l'atmosphère et d'observer au même instant le baromètre. P est alors égal à la pression atmosphérique; on observe y , H et t ; tout est donc connu dans la formule, à l'exception de Y dont on peut ainsi déterminer la valeur une fois pour toutes. Si Z est la hauteur barométrique observée, on a $P = 10334 \cdot \frac{Z}{0,76}$; en substituant cette

valeur, le nombre 10334 disparaît de la formule, ce qui permet d'obtenir Y plus facilement.

Le manomètre à air comprimé est sujet à un inconvénient grave : l'oxygène de l'air contenu dans le tube manométrique est absorbé peu à peu par le mercure, qui s'oxyde; le volume d'air comprimé diminue, et l'instrument indique des pressions trop fortes. Il serait facile de remplacer l'air par un gaz qui n'eût pas d'action sur le mercure. Mais c'est surtout à cause de leur fragilité et de leur prix élevé que les manomètres à air libre ou à air comprimé ont été peu à peu bannis de l'industrie, et remplacés par un instrument moins précis, mais plus maniable et beaucoup moins cher; nous voulons parler du manomètre métallique.

III. Le manomètre métallique le plus généralement employé est le manomètre de Bourdon, représenté par la figure 6. La partie principale de l'appareil est un tube métallique ABC dont la section est elliptique. Il communique en C par l'une de ses extrémités avec la chaudière; il se replie en spirale, et porte à son autre extrémité A, qui est fermée, une aiguille qui parcourt une portion de cadran. Sous l'influence de la pression de la vapeur qui y pénètre, le tube tend à se redresser, sa courbure diminue, et l'aiguille marche sur le cadran. Tout l'appareil est renfermé dans une boîte elliptique qui ne laisse voir que le cadran sur lequel se meut l'aiguille. On gradue cet instrument par comparaison avec un manomètre à air libre.

On trouvera dans le *Traité de la Chaleur* de

M. Pécllet et dans le *Traité élémentaire des appareils de navigation* de M. Ledieu, la description de quelques autres dispositifs moins usités.

Les manomètres métalliques sont d'un emploi commode; mais ils s'altèrent notablement par l'usage, et il est nécessaire de vérifier fréquemment leur graduation par comparaison avec un autre manomètre. Cependant leur bon marché les a fait adopter presque partout.

IV. Indépendamment des trois principaux genres de manomètres que nous venons de décrire, il en existe quelques autres fondés sur des principes différents. Tels sont les *manomètres à ressort*, dans lesquels la pression est mesurée par la flexion d'un ressort; ces appareils sont généralement mauvais. Nous citerons encore le *manomètre à pistons* de M. Galy-Cazalat, qui a été recommandé par l'administration des mines. Il se compose de deux pistons solidaires, d'aire inégale, placés l'un au-dessus de l'autre; l'aire du piston supérieur vaut 10 fois celle du piston inférieur. Chacun de ces pistons se meut dans un cylindre vertical de même diamètre que lui. Le petit piston reçoit la pression de la vapeur, et le grand est chargé d'une colonne de mercure, dont on aperçoit le sommet au travers d'un tube en verre. La pression de la vapeur fait monter les deux pistons; mais chaque accroissement de pression de 1 atmosphère ne fait monter le grand piston que du dixième de 0^m,76, c'est-à-dire de 0^m,076. On voit que ce système est fondé sur le même principe que la presse hydraulique.

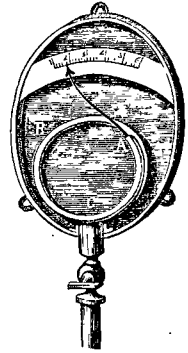


Fig. 6.

Nous citerons encore, pour mémoire, le *manomètre à contre-poids de Desbordes*, le *manomètre de Rivals* et le *manomètre Girond*, qui sont fondés sur le principe d'Archimède; et les manomètres *Meyer*, *Charlton*, *Dedieu*, *Clair*, *Johnson*, *Schraenferet*, *Pfitznerreiter*, *Schmitz*, *Bossuet*, qui, comme le manomètre Bourdon, sont fondés sur la déformation qu'un corps élastique éprouve sous l'influence de la pression, et sur la transmission de cette déformation à une aiguille indicatrice.

V. D'après son étymologie, le mot *manomètre* ne s'applique proprement qu'aux baromètres tronqués qui servent à évaluer la pression de l'air raréfié par les machines pneumatiques, et c'est par abus qu'on a étendu cette dénomination aux appareils destinés à mesurer des pressions supérieures à la pression atmosphérique. M. Bélanger a remarqué qu'il serait plus exact de leur donner le nom de *piézomètres*; mais il est difficile de changer l'usage établi, le mot piézomètre étant aujourd'hui appliqué d'une manière spéciale aux instruments servant à évaluer la pression de l'eau.

MAPPEMONDE CÉLESTE, projection plane des deux hémisphères de la sphère céleste (*Voy. CARTE CÉLESTE*). La mappemonde céleste donnée à cet article a été obtenue par projection STÉRÉOGRAPHIQUE (*Voy. ce mot*) sur le plan de l'équateur.

MARC, ancienne unité de poids usitée en France. Le marc était la moitié de la LIVRE. (Voy. POIDS ET MESURES.)

MARCHE D'UN CHRONOMÈTRE, quantité dont cet instrument avance ou retarde en 24 heures; la marche est *positive* s'il y a avance, et *negative* s'il y a retard. L'art de régler les horloges et les montres marines ne consiste pas à les mettre à l'heure, mais bien à déterminer la loi suivant laquelle ces instruments avancent ou retardent par rapport au temps moyen. On ne touche jamais aux aiguilles d'un chronomètre. On sait par des observations astronomiques déterminer l'heure vraie d'un lieu [Voy. HEURE (Détermination de l')], et en déduire l'heure moyenne (Voy. CONVERSION DES TEMPS); la différence entre l'heure que doit marquer un chronomètre et celle qu'il marque réellement constitue l'état *absolu* de cet instrument; il est positif ou négatif suivant qu'il y a avance ou retard. Si l'on constate de nouveau l'état du chronomètre après un certain intervalle de temps, il peut arriver qu'il soit exactement le même; dans ce cas le chronomètre a suivi exactement le temps moyen dans l'intervalle considéré. Il peut arriver que l'avance ait augmenté, ou que le retard ait diminué; dans l'un et l'autre cas le chronomètre a avancé sur le temps moyen, et son avance en 24 heures est la *marche* de l'instrument; elle est positive et on l'obtient par cette proportion :

Le temps écoulé entre les deux observations : l'avance totale = 24 heures : un *quatrième terme*, qui est la marche cherchée.

Il peut arriver au contraire que l'avance du chronomètre sur le temps moyen ait diminué, ou que son retard ait augmenté; dans l'un et l'autre cas le chronomètre a retardé par rapport au temps moyen; et sa marche, alors *négative*, est donnée par une proportion analogue à la proportion ci-dessus, mais dans laquelle l'avance totale est remplacée par le retard total. Supposons, par exemple, qu'un chronomètre marque, à midi moyen, 1^h 35^m 13^s,4; et que 10 jours après, à 2^h 45^m après midi (temps moyen), il marque 4^h 19^m 53^s,4. Si l'état du chronomètre était resté le même, il aurait dû marquer 2^h 45^m plus 1^h 35^m 13^s,4, c'est-à-dire 4^h 20^m 13^s,4; il marque 20 secondes de moins; il a donc retardé de 20 secondes sur le temps moyen en 10 jours 2^h 45^m ou en 14565 minutes; on aura donc son retard en 24 heures, c'est-à-dire en 1440 minutes, par la proportion

$$14565 : 20 = 1440 : x,$$

d'où

$$x = 1^s,97\dots;$$

c'est la *marche* de l'instrument.

Ceci suppose que le chronomètre a avancé ou retardé uniformément sur le temps moyen; autrement la proportion ne donnerait que sa marche moyenne.

Quand on connaît la *marche* d'un chronomètre et son état à un instant donné, il est facile de traduire ses indications. Si *e* désigne son état à un instant donné, *m* sa marche, et *x* le temps écoulé depuis cet instant, la quantité

$$e + mx$$

sera ce qu'il faut retrancher algébriquement de l'heure marquée par le chronomètre pour avoir l'heure exacte en temps moyen. Si, par exemple, l'état du chronomètre à un certain instant était

— 51^m 17^s, et que sa marche diurne soit + 3^s, 6, la quantité à retrancher algébriquement de l'heure marquée par l'instrument sera

$$- 51^m 17^s + 3^s,6 \cdot x \text{ ou } - 3077^s + 3^s,6 \cdot x.$$

Si donc 4 jours 7 heures 8 minutes après l'instant où l'état a été constaté, le chronomètre marque 2^h 21^m 14^s,5, on aura l'heure véritable en retranchant algébriquement

$$- 3077^s + 3^s,6 \cdot (4^j 7^h 8^m),$$

ou

$$- 3077^s + 3^s,6 \times 4,297, \text{ ou } - 3077^s + 15^s,47, \text{ c'est-à-dire, en effectuant, } 3061^s,53 \text{ ou } 51^m 1^s,53, \text{ ce qui donnera pour l'heure cherchée } 3^h 12^m 16^s,03.$$

Avant d'embarquer un chronomètre, on le compare pendant un mois ou un mois et demi à une horloge astronomique bien réglée. On fait une comparaison chaque jour, et on consigne le résultat sur un registre qui contient ordinairement neuf colonnes. La première donne la date du mois; la deuxième, l'heure de l'horloge au moment de la comparaison; la troisième, l'heure du chronomètre au même instant; la quatrième, la différence des heures observées; la cinquième, l'intervalle de temps écoulé depuis l'instant de la comparaison précédente; la sixième, la marche totale du chronomètre par rapport à l'horloge dans cet intervalle de temps; la septième, la marche du chronomètre en 24 heures par rapport à l'horloge (elle s'obtient par une simple proportion); la huitième, la marche de l'horloge sur le temps moyen, supposée déterminée astronomiquement; enfin la neuvième, qui donne la différence algébrique entre les nombres inscrits dans les deux colonnes précédentes, contient la marche du chronomètre par rapport au temps moyen. L'inspection de ce registre montre en général que la marche du chronomètre ne peut être regardée comme constante que pendant deux ou trois jours consécutifs.

On peut encore déterminer la marche diurne d'un chronomètre par l'observation des passages d'une étoile sous l'un des fils d'une lunette installée à poste fixe dans un azimut quelconque. Si l'intervalle entre deux passages consécutifs est exactement de 24 heures moins 3^m 56^s, le chronomètre suit exactement le temps moyen; dans le cas contraire, la différence exprime son état; et plusieurs observations faites à quelques jours d'intervalle font connaître sa *marche*.

On pourrait employer au même usage les passages d'un astre au méridien; mais cette méthode exigerait l'emploi d'une lunette méridienne portative.

En mer, c'est par la détermination astronomique de l'heure qu'on peut obtenir l'état et la marche d'un chronomètre. L'observation ne peut guère se faire qu'à 3 ou 4 secondes près; en sorte que si, dans une seconde observation faite après un certain intervalle du temps, les erreurs étaient de sens contraire, l'erreur définitive pourrait s'élever à 6 ou 8 secondes. On diminue l'erreur en faisant, à chacune des deux époques, des séries d'observations dont on prend la moyenne. La portion de l'erreur qui est due à la collimation individuelle, erreur toujours de même sens pour chaque observateur, et pouvant s'élever à 1^s $\frac{1}{2}$, peut être atténuée à l'aide de la remarque suivante. Son influence pro-

duit sur le calcul de l'angle horaire une erreur qui change de sens suivant que l'observation a été faite le matin ou le soir [Voy. HEURE (Détermination de l'), équation [5]]; on fera donc à chacune des deux époques une série d'observations le matin et une autre série le soir; et l'influence de l'erreur individuelle disparaîtra dans le résultat final. L'officier chargé du service des montres à bord d'un vaisseau de l'État ne se contente pas de consigner sur un registre le résultat de ses observations; il appelle à son secours le tracé graphique. Il trace avec le plus grand soin la courbe des marches et la courbe des températures, c'est-à-dire les courbes qui ont pour abscisse le temps, et pour ordonnée la marche de la montre ou la température. La comparaison des courbes qui se rapportent aux divers chronomètres embarqués, met sur la voie des anomalies que peut présenter tel ou tel de ces instruments.

Nous avons vu tout à l'heure que la marche d'un chronomètre ne peut être regardée comme uniforme; mais, entre deux époques qui ne sont pas trop éloignées, on peut, pour obtenir un peu plus d'exactitude, supposer cette marche uniformément variée, c'est-à-dire supposer que la variation de l'état de la montre se compose de deux termes, dont l'un est proportionnel au temps, et l'autre au carré du temps: en sorte que, si e_0 désigne l'état absolu du chronomètre un certain jour, et e l'état du même instrument x jours après, on a

$$e = e_0 + ax + bx^2, \quad [1]$$

a et b désignant deux constantes. Pour déterminer ces constantes, il suffit d'avoir déterminé la marche de la montre à l'origine du temps, et d'observer son état E au bout d'un nombre X de jours. En effet, la marche de la montre, au bout d'un temps x quelconque, n'est autre chose que la dérivée de l'état e par rapport au temps x ; en sorte qu'en désignant cette marche par m , on a généralement

$$m = a + 2bx. \quad [2]$$

À l'origine du temps on a donc $m_0 = a$, ce qui détermine la constante a . On a ensuite

$$E = e_0 + m_0 X + bX^2, \quad [3]$$

ce qui détermine la constante b . On peut alors, à l'aide de l'équation [1], trouver l'état absolu de la montre pour une époque quelconque intermédiaire entre les temps 0 et X .

EXEMPLE. L'état absolu d'un chronomètre, le 2 juin à midi, était représenté par $+10^m 25^s,4$, et sa marche diurne était alors $+16^s,5$. Le 29 juin à midi, son état absolu est $+16^m 45^s,8$. On demande quel était son état absolu le 21 du même mois, à midi; et sa marche diurne à cette époque.

On a ici
 $e_0 = 10^m 25^s,4$; $m_0 = +16^s,5$; $X = 27$,
 et $E = 16^m 45^s,8$.

L'équation [3] devient donc
 $16^m 45^s,8 = 10^m 25^s,4 + 16^s,5 \cdot 27 + b \cdot 27^2$,
 d'où l'on tire

$$b = -0^s,0893.$$

Par suite, l'équation [1] devient
 $e = 10^m 25^s,4 + 16^s,5 \cdot x - 0^s,0893 \cdot x^2$.

Pour $x = 21 - 2 = 19$, elle donne $e = 15^m 6^s,7$.

L'équation [2] devient à son tour
 $m = 16^s,5 - 2 \cdot 0^s,0893 \cdot x$,

et pour $x = 19$, elle donne $m = 13^s,1$. Ainsi, le 21, l'état absolu du chronomètre était $+15^m 6^s,7$; et sa marche diurne était $+13^s,1$. Les marins font les

calculs de ce genre par des considérations plus élémentaires, mais moins directes, et qui exigent l'emploi des logarithmes des nombres triangulaires. (Voy. le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier, 4^e édition, page 403.)

Tout ce qui précède suppose que, dans l'intervalle de temps considéré, la température est demeurée constante, ou que du moins la température moyenne a peu varié, ce qui a rarement lieu. Or il suffit de jeter les yeux sur les tableaux où les courbes des marches sont mises en regard de la courbe de température, pour se convaincre que celle-ci a une influence manifeste sur la marche des chronomètres. M. Lieussou, ingénieur hydrographe de la marine, a constaté à ce sujet deux faits remarquables: 1^o les points de la courbe des marches qui répondent à une même température sont sensiblement en ligne droite; 2^o les droites obtenues en joignant ainsi les points de la courbe qui répondent à des températures égales sont sensiblement parallèles entre elles. Il en résulte que l'accroissement que prend l'ordonnée en passant d'un point à un autre sur la même parallèle, donne la variation de la marche due au temps, c'est-à-dire à l'épaississement des huiles, et autres causes dans lesquelles le temps joue un rôle, et l'accroissement que prend l'ordonnée en passant d'une parallèle isotherme à une autre, donne la variation de la marche due au changement de température. Parmi toutes les parallèles isothermes, il y en a une qui est *maxima* et qui répond à une certaine température T ; et les parallèles qui répondent aux températures $T + \theta$ et $T - \theta$ coïncident sensiblement. M. Lieussou en a conclu que le terme relatif à la température dans l'expression de la marche m devait être de la forme $c(T - t)^2$. En désignant donc par a la valeur de la marche qui correspond à la température T , et par b une constante, il écrit

$$m = a + bx - c(T - t)^2, \quad [4]$$

t désigne la température moyenne depuis la dernière marche observée a . M. Lieussou applique cette formule à une série d'observations faites à des époques et à des températures diverses; et il détermine les coefficients par la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot). Il faut un calcul particulier pour déterminer les constantes relatives à chacun des chronomètres employés. Il a obtenu, par exemple, pour l'un des instruments qu'il étudiait, le chronomètre 200 *Winnerl*, l'équation

$$m = 1^s,47 + 0^s,0024x - 0^s,01(17^o - t)^2;$$

mais cette méthode est très-laborieuse; elle a été peu appliquée; et il faut dire qu'elle n'a pas donné des résultats aussi satisfaisants qu'on pouvait l'espérer. Cela n'a rien qui doive étonner: les variations de marche d'un chronomètre tiennent à des causes diverses et peu connues; et elles paraissent se refuser à une expression mathématique exacte. Tel chronomètre qui marchait d'une manière uniforme à terre, éprouve, lorsqu'il est embarqué depuis un certain temps, des dérangements si brusques parfois et si considérables, qu'ils échappent à toute méthode de calcul. Ces dérangements ne sont pas seulement dus à l'épaississement des huiles avec le temps, et aux dilatations ou contractions résultant des changements de température; ils tiennent certainement aux mouvements du vaisseau, et surtout aux trépidations qu'éprouvent les navires à

vapeur; la présence des grandes masses de fer exerce sur les chronomètres une action magnétique qui a été bien constatée par MM. Delamarche et Ploix, ingénieurs hydrographes de la marine, sans qu'ils aient réussi à la mesurer. A ces causes de dérangement s'ajoute très-probablement l'action des courants électriques dans les temps d'orage et même dans les temps calmes; il serait donc illusoire d'espérer parvenir à une évaluation rigoureuse de ces diverses influences. On ne devra donc faire usage des formules que pendant des intervalles de temps restreints; on aura soin de vérifier les chronomètres à chaque relâche, soit par des observations astronomiques, soit par comparaison avec une horloge bien réglée. A bord, on devra comparer constamment la marche des chronomètres embarqués; cette comparaison faite avec soin et d'une manière judicieuse permettra seule de distinguer les variations anormales de celles qui se lient d'une manière régulière au temps et à la température. Trois bons chronomètres, d'artistes différents autant qu'il sera possible, tenus loin des masses de fer du navire, dans un lieu dont la température varie peu, consultés chaque jour vers 9 heures du matin, époque qui répond à la température moyenne de la journée, indépendamment des indications qui leur sont demandées à chaque observation de hauteur ou autre, et vérifiés à chaque relâche, suffiront pour naviguer en toute sécurité. (*Voy. les Observations chronométriques faites à bord de la corvette la Capricieuse, par M. Mouchez, lieutenant de vaisseau, pendant le voyage de circumnavigation de mai 1850 à mars 1854; voy. le Cours de Navigation et d'Hydrographie de E. P. Dubois; et, dans ce dictionnaire, l'article CHRONOMÈTRE.*)

MARCHE PALIÈRE, dernière marche d'une portion d'escalier aboutissant à un PALIER (*Voy. ce mot*), ou première marche de la portion d'escalier suivante. Ces marches sont formées par l'une des solives mêmes du palier (*Voy. ESCALIERS*).

MARCHÉS À PRIMES ou **MARCHÉS LIBRES**, terme de Bourse; marché à terme que l'acheteur se réserve le droit d'annuler en payant au vendeur une indemnité fixée à l'avance et qui porte le nom de *prime*. Dire que Pierre achète à Paul, fin courant, 6000^f de rentes 3 pour 100, à 70,40, dont 1, c'est dire que Pierre se réserve le droit d'annuler le marché en payant à Paul une indemnité de 1 franc par chaque quotité de 3^f de rentes. Cette indemnité ou prime est déposée chez l'agent de change. Si Pierre maintient son marché, on dit qu'il lève la prime; s'il annule son marché, on dit qu'il abandonne la prime.

I. Si c désigne le cours d'achat de la rente 3 pour 100, et p la prime, on peut se demander quel est le cours le plus bas auquel l'acheteur ait intérêt à lever. Soit x le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation. L'acheteur, en tenant compte des courtages, a acheté à $c + 0,05$; s'il lève la prime, il revendra à $x - 0,125$; sa perte, pour chaque quotité de 3^f de rentes, sera donc

$c + 0,05 - (x - 0,125)$ ou $c + 0,175 - x$. S'il abandonne la prime, il perdra $p + 0,05$. Pour qu'il ait avantage à lever, il faut donc qu'on ait $c + 0,175 - x < p + 0,05$, d'où $x > c + 0,125 - p$. Ainsi, le cours demandé sera le multiple de 0,05 immédiatement supérieur à $c + 0,125 - p$, c'est-à-

dire $c + 0,15 - p$, attendu que c et p sont ordinairement des multiples de 0,05. Dans l'exemple donné ci-dessus, le cours cherché serait

$$x = 70,40 + 0,15 - 1 = 69,55.$$

On peut se demander quel est le cours le plus bas auquel l'acheteur pourra faire un bénéfice en revendant. L'acheteur a réellement acheté à $c + 0,05$; et, si x désigne toujours le cours de liquidation, il ne pourra revendre qu'à un prix marqué par $x - 0,125$. Pour qu'il y ait bénéfice, il faudra donc qu'on ait

$x - 0,125 > c + 0,05$, d'où $x > c + 0,175$. Le cours demandé sera donc le multiple de 0,05 immédiatement supérieur à $c + 0,175$, c'est-à-dire $c + 0,20$. Dans l'exemple ci-dessus, ce cours serait 70,60.

En général, on peut se demander quelles sont les chances de l'acheteur suivant le cours x du 3 pour 100 à l'époque de la liquidation. On a vu qu'au-dessous de $c + 0,125 - p$, l'acheteur devra abandonner la prime. Si donc on a

$$x = c + 0,10 - p,$$

ou si x est inférieur à cette valeur, la prime devra être abandonnée, et la perte sera exprimée par

$$(p + 0,05) \frac{a}{3},$$

en désignant par a la quotité totale de rentes négociées.

Si x est supérieur à $c + 0,125 - p$, et qu'on ait, par exemple,

$$x = c + 0,15 - p,$$

l'acheteur devra lever la prime; et sa perte sera exprimée par la différence entre le prix d'achat $c + 0,05$ et le prix de vente $x - 0,125$,

$$\text{ou } c + 0,15 - p - 0,125,$$

$$\text{ou enfin } c + 0,025 - p,$$

c'est-à-dire que la perte sera

$$(c + 0,05) - (c + 0,025 - p) \text{ ou } p + 0,025$$

par chaque quotité de 3 francs de rentes; en sorte que la perte totale sera

$$(p + 0,025) \frac{a}{3}.$$

La perte ira en diminuant à mesure que x augmentera, jusqu'à ce que x soit égal au multiple de 0,05 immédiatement inférieur à $c + 0,175$. Si donc on a $x = c + 0,15$, la perte se réduira à son minimum, qui sera

$$(c + 0,05) - (c + 0,15 - 0,125) \text{ ou } 0,025$$

par chaque quotité de 3^f de rentes; en sorte que la perte totale sera réduite à

$$0,025 \cdot \frac{a}{3}.$$

Si x est supérieur à $c + 0,175$, la perte se change en bénéfice. Si, par exemple, on a $x = c + 0,20$, le bénéfice par chaque quotité de 3^f de rentes est exprimé par $(c + 0,20 - 0,125) - (c + 0,05)$ ou 0,025, en sorte que le bénéfice total devient

$$0,025 \cdot \frac{a}{3}.$$

A mesure que x augmente, le bénéfice augmente lui-même, et l'on voit qu'il est illimité. Il est généralement exprimé par

$$(x - 0,125) - (c + 0,05) \text{ ou } x - c - 0,175$$

par chaque quotité de 3^f de rentes, et le bénéfice total est

$$(x - c - 0,175) \cdot \frac{a}{3}.$$

On voit, en résumé, que la chance de perte est limitée, tandis que la chance de gain est illimitée. Les spéculateurs qui achètent à prime sont donc des spéculateurs *à la hausse*, parce qu'ils ont intérêt à ce que le cours de la rente s'élève. Ceux qui vendent à prime sont des spéculateurs *à la baisse*.

II. Il se fait souvent sur parole, et sans le secours des agents de change, des marchés libres à des termes très-rapprochés, par exemple du jour au lendemain. Ils donnent lieu à des combinaisons du même genre; mais on n'a à tenir compte d'aucun courtage. Supposons, par exemple, qu'un spéculateur achète 1500^f de rentes 3 pour 100 pour le lendemain, à 70,80 *dont 2 sous*. Soit x le cours du lendemain. On voit sur-le-champ que si x est inférieur à 70,80 de plus de 0^f,10, le spéculateur aura intérêt à abandonner la prime; et il perdra, dans ce cas, 0^f,10 répétés autant de fois que 3 est contenu dans 1500, c'est-à-dire 500 fois, ce qui donne 50^f.

Si l'on a $x = 70,80 - 0,10$ ou $x = 70,70$, le spéculateur peut indifféremment abandonner ou lever la prime; sa perte, dans les deux cas, est toujours $0^f,10 \times 500$ ou 50^f.

Si x est supérieur à 70,70, le spéculateur a intérêt à lever la prime, et sa perte diminue à mesure que x augmente.

Si $x = 70,80$, il n'y a ni perte ni bénéfice.

Au-dessus de 70,80, il y a bénéfice; et le bénéfice est exprimé par $(x - 70,80) \cdot 500$. Il augmente avec x , et il est illimité. Si l'on suppose que dans l'intervalle du jour au lendemain le cours ne s'élève que de 0^f,50, le bénéfice est $0^f,50 \times 500$ ou 250^f. Dans ces conditions, les chances du spéculateur se trouveraient comprises entre 50^f de perte et 250^f de bénéfice.

III. Dans les marchés libres traités jusqu'ici, c'était l'acheteur qui se réservait le droit d'annuler l'opération en abandonnant au vendeur une indemnité ou prime fixée d'avance. Il se fait aussi des marchés dans lesquels c'est le vendeur qui, moyennant l'abandon d'une prime, se réserve le droit d'annuler l'opération. Ces marchés portent le nom de *marchés à prime pour recevoir*. Les chances du vendeur s'analyseraient comme ci-dessus.

IV. Les spéculateurs combinent fréquemment, dans leurs opérations, les marchés fermes avec les marchés libres. Pour en donner un exemple, supposons que Raymond vende ferme à Daniel 6000^f de rentes 3 pour 100, fin courant, à 70,30, et qu'il les lui rachète pour la même époque à 72,80 *dont 50* (centimes). C'est ce que l'on appelle une opération *ferme contre prime*. Proposons-nous d'analyser les chances de Raymond, dans l'hypothèse où il aurait vendu à découvert, c'est-à-dire sans avoir les titres, et dans l'espoir de se les procurer avantageusement avant la liquidation.

Si Raymond lève la prime, il achète à 72,80 + 0,05 ou à 72,85; il a vendu à 70,30 - 0,05 ou à 70,25; il perd donc la différence, ou 2^f,60 par chaque quotité de 3^f de rentes.

Si l'on abandonne la prime, il perd d'abord 0^f,50. Soit, de plus, c le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation; comme il a vendu à découvert, il est obligé, pour exécuter son marché ferme, d'acheter au comptant à $c + 0,125$; et, puisqu'il a vendu à 70,25; il perd

$$c + 0,125 - 70,25 + 0,50,$$

en ajoutant la prime; c'est-à-dire en tout :

$$c - 69,625.$$

Pour qu'il ait intérêt à lever, il faut donc que cette dernière perte soit plus grande que la première, et qu'on ait

$$c - 69,625 > 2,60, \text{ d'où } c > 72,225.$$

Cela posé, si le cours c du 3 pour 100, au moment de la liquidation, est égal ou supérieur à 72,26, Raymond lève la prime et perd 2^f,60 par chaque quotité de 3 francs de rentes; soit en tout :

$$2,60 \times \frac{6000}{3} \text{ ou } 5200^f.$$

Si le cours c est égal ou inférieur à 72,20, mais supérieur à 69,625, Raymond abandonne la prime et perd $c - 69,625$ par chaque quotité de 3 francs de rentes; soit en tout :

$$(c - 69,625) \cdot 2000.$$

Si, par exemple, $c = 69,65$, la perte se trouve réduite à

$$(69,65 - 69,625) \cdot 2000 \text{ ou à } 50^f.$$

Si c est inférieur à 69,625, la perte se change en bénéfice, et ce bénéfice est exprimé par $69,625 - c$ pour chaque quotité de 3^f de rentes; soit en tout :

$$(69,625 - c) \cdot 2000.$$

Il est illimité, puisqu'il augmente à mesure que c diminue.

On voit que dans cette hypothèse Raymond joue évidemment à la baisse; ses chances sont limitées à une perte de 5200^f, tandis que ses chances de gain sont illimitées.

Dans le problème que nous venons de traiter, Daniel vend à Raymond 6000^f de rentes 3 pour 100, fin courant, à 72,80 *dont 50* (centimes), et les lui rachète ferme, pour la même époque, à 70,30; c'est ce qu'on appelle une opération *prime contre ferme*. En analysant les chances de Daniel, on verrait que ses chances de bénéfice sont limitées à un gain de 4800^f, tandis que ses chances de perte sont illimitées. Daniel est là un spéculateur à la hausse.

V. Les spéculateurs combinent encore les marchés libres entre eux. Par exemple Pierre achète de Paul 6000^f de rentes 3 pour 100, fin courant, à 72,50 *dont 50* (centimes), et les lui revend, pour la même époque, à 71 *dont 1*. C'est ce qu'on appelle une opération *prime contre prime*. En analysant, comme ci-dessus, les chances des deux spéculateurs, on trouve que, pour Paul, les chances varient depuis une perte de 1000^f jusqu'à un bénéfice de 1550^f. Pour Pierre, elles varient au contraire depuis un bénéfice de 1000^f jusqu'à une perte de 3200^f. Paul joue à la hausse et Pierre à la baisse.

VI. Ordinairement les sommes achetées et vendues ainsi sont égales; cependant il n'en est pas toujours ainsi, et l'on fait souvent un marché à prime contre la moitié à prime de quotité double. Par exemple, Pierre achète de Paul 12000^f de rentes 3 pour 100, fin courant, à 72,50 *dont 50*, et lui revend 6000^f des mêmes rentes, pour la même époque, à 71 *dont 1*. On trouve que de 70,20 à 73,70 inclusivement, Paul fait un bénéfice dont le maximum est 3750^f; au delà il éprouve une perte illimitée. Pour Pierre, au contraire, de 70,20 à 74,20 inclusivement, il y a une perte dont le maximum est 4450^f; au delà il y a un bénéfice, et ce bénéfice est illimité. Paul joue à la hausse et Pierre à la baisse. On remarque, en outre, que de 73,75 à 74,20 inclusivement, les deux spéculateurs éprouvent une

perte, ce qui tient aux courtages. (Voy. nos *Problèmes et Exercices d'Arithmétique et d'Algèbre.*)

MARCHÉS À TERME, opérations de Bourse dans lesquels la livraison et le paiement ne s'effectuent pas le jour même de la transaction, mais au bout d'un délai convenu. Le terme fixé est ordinairement la fin du mois courant, ou la fin du mois qui suit; ce qu'on exprime par les mots *fin courant* ou par les mots *fin prochain*. La fin du mois est l'époque d'un règlement de comptes qu'on appelle *liquidation*.

Dans les marchés à terme, on n'opère que sur des quotités fixes de rentes :

Savoir : 2250 ^r de rentes	$4 \frac{1}{2}$	pour 100,
2000 —	4	—
1500 —	3	—

ou sur des multiples exacts de ces quotités.

S'il s'agit d'actions industrielles, on n'opère que sur des multiples de 25 actions.

Les marchés à terme comprennent les **MARCHÉS FERMES**, les **REPORTS**, et les **MARCHÉS LIBRES** ou à **PRIMES** (Voy. ces mots).

Le cours de la rente est toujours plus élevé quand il s'agit d'opérations à terme que lorsqu'il s'agit de marchés au comptant.

Pour les opérations à terme sur les rentes françaises, le minimum du droit de courtage est de $\frac{1}{16}$ pour 100, prélevé sur le capital nominal, c'est-à-dire sur le capital qu'il faudrait déboursier pour acquérir *au pair* (Voy. **RENTES**), le titre de rentes qu'on négocie. Mais, pour simplifier les calculs, on est convenu de réduire le courtage à 0,05 au lieu de 0,0625, c'est-à-dire à $\frac{1}{20}$ au lieu de $\frac{1}{16}$.

MARCHÉS AU COMPTANT, opérations de Bourse dans lesquelles la livraison et le paiement s'effectuent le jour même, ou dans un très-court délai. On fait à la Bourse des opérations au comptant : 1° sur certaines marchandises, telles que les blés, les huiles, les esprits, les savons, etc.; 2° sur les matières d'or et d'argent; 3° sur les effets publics. Les opérations sur les marchandises se font par l'intermédiaire des courtiers de commerce, auxquels la loi accorde un droit de courtage de $\frac{1}{2}$ pour 100, tant sur la vente que sur l'achat. Les opérations sur les matières d'or et d'argent se font par l'intermédiaire, soit des courtiers de commerce, soit des agents de change; et le droit de courtage est de $\frac{1}{8}$ pour 100. Les opérations sur les effets publics ne se font que par l'intermédiaire des agents de change, moyennant un droit qui, pour les rentes françaises, est de $\frac{1}{8}$ pour 100, prélevé sur le capital nominal, c'est-à-dire sur le capital qu'il faudrait déboursier pour acquérir *au pair* (Voy. **RENTES**) le titre de rentes qu'on négocie. Pour les autres valeurs donnant lieu à des opérations au comptant, il y a également un droit de courtage, qui est de $\frac{1}{8}$ pour 100 pour les unes, et de $\frac{1}{4}$ pour 100 pour les autres.

Les marchandises sur lesquelles portent les opé-

rations de Bourse sont ordinairement déposées hors barrières, pour éviter les droits d'entrée; mais elles y sont à la disposition du vendeur et de l'acheteur, d'où le nom de *disponibles* qui leur est donné. L'opération la plus simple sur les marchandises consiste dans l'achat ou la vente d'une certaine quantité de ces marchandises. L'opération la plus ordinaire consiste à acheter pour revendre plus tard avec bénéfice; dans ce cas, il faut tenir compte d'un double courtage.

Pour les opérations sur les matières d'or et d'argent, voyez **MÉTAUX PRÉCIEUX**.

Quand il s'agit des effets publics, les opérations au comptant les plus ordinaires consistent, soit dans l'achat d'un titre de rentes, comme placement de fonds, soit dans la vente d'un pareil titre, pour se procurer du numéraire (Voy. **RENTES**). La plus petite inscription est de 9^r de rentes; mais, lorsqu'on est déjà inscrit sur le grand-livre, on peut ajouter à son titre 1 franc de rentes, ou détacher 1 franc de rentes d'un titre plus fort.

Quelques minutes avant l'ouverture de la Bourse, il se fait quelquefois des affaires au comptant dans lesquelles on fixe d'avance pour prix le *cours moyen* du jour, c'est-à-dire un cours précisément intermédiaire entre le cours le plus bas et le cours le plus haut. Mais cela ne peut avoir lieu que pour des affaires de peu d'importance qui ne soient pas de nature à influencer elles-mêmes sur les cours.

Lorsque l'on vend un titre de rentes pour racheter immédiatement de la rente à un autre taux, l'agent de change ne prend ordinairement qu'un seul courtage. Afin de donner un exemple des calculs auxquels conduit cette opération, supposons qu'une personne possédant 495^r de rentes $4 \frac{1}{2}$ pour

100, les vende au cours de 96,40 pour racheter du 3 pour 100 au cours de 63,70. On reconnaîtra d'abord que les 495^r de rentes $4 \frac{1}{2}$ pour 100 au cours de 96,40 valent $\frac{96,40 \times 495}{4,50}$ ou 10604^r. D'après

ce qui a été dit plus haut, chaque somme de 63^r,70 de capital donnera lieu à un courtage de 0^r,125; le prix réel de 3^r de rentes 3 pour 100 sera donc 63^r,70 + 0^r,125 ou 63^r,825; et le prix de 1^r de rentes 3 pour 100 sera le tiers de cette somme ou 21^r,275. En divisant donc 10604^r par ce prix, on aura le nombre de francs de rentes 3 pour 100 que l'on peut acquérir. On trouve 498^r, et il reste une somme de 9^r,05 non employée.

Lorsqu'on a acheté de la rente à un cours élevé, et que les cours s'abaissent tout à coup sans cause bien connue, on a ordinairement lieu de croire qu'ils remonteront, sinon à la valeur primitive, du moins à une valeur intermédiaire. Pour ne pas éprouver de perte, on achète alors au cours le plus bas la même quotité de rentes qu'on a achetée au cours le plus haut; et l'on attend, pour revendre le tout, que la rente soit remontée à un cours intermédiaire convenable, c'est ce que l'on appelle *faire une commune*. Dans ce cas, on a intérêt à déterminer à l'avance le cours intermédiaire auquel on pourra revendre sans perte.

Supposons, par exemple, qu'on ait acheté 3000^r de rentes 3 pour 100 au cours de 70,20; les

cours ayant subitement baissé jusqu'à 64,40, on achète à ce cours 3000 autres francs de rentes; et l'on demande : 1° de déterminer, en tenant compte des courtages, le cours auquel on pourra revendre sans perte; 2° de calculer le gain ou la perte qu'on ferait si l'on revendait à 67,65.

1° En tenant compte des courtages, les deux cours d'achat sont réellement 70,325 et 64,525. La moyenne de ces deux cours est 67,425; c'est à ce cours qu'il faudrait revendre pour n'éprouver aucune perte.

2° Si l'on vend à 67,65, ce qui revient à 67,65 — 0,125 ou à 67,525, en tenant compte du courtage, on gagnera, pour chaque rente de 3^{fr}, la différence entre 67^{fr},525 et 67^{fr},425, c'est-à-dire 0^{fr},10. Le gain total s'obtiendra donc en répétant 0^{fr},10 autant de fois que 3^{fr} est contenu dans 6000^{fr}, c'est-à-dire 2000 fois, ce qui donne 200^{fr}.

On peut remarquer que, dans le cas où l'on veut faire une commune, le cours intermédiaire auquel il faut revendre pour ne pas éprouver de perte, s'obtient en prenant la moyenne des deux cours d'achat, et ajoutant 0,25 pour les courtages.

On pourrait se proposer sur ce sujet diverses questions inverses, qui offrent de l'intérêt, mais qui ne se rencontrent jamais dans la pratique. (Voy. nos Problèmes et Exercices d'Arithmétique et d'Algèbre).

MARCHÉS FERMES, marchés à terme, obligatoires pour les deux parties. Si, par exemple, une personne vend ferme 9000^{fr} de rentes $\frac{1}{2}$ pour 100 fin courant au cours de 94,50, l'acheteur aura à payer : 1° le prix des 9000^{fr} de rentes à ce taux; 2° un courtage égal à $\frac{1}{20}$ du capital nominal (Voy. MARCHÉS A TERME). Pour faire le calcul, il suffit d'ajouter 0,05 au cours, ce qui le porte à 94,55; puis de calculer le prix d'achat par la proportion

$$4^{\text{fr}}, 50 : 94, 55 = 9000 : x,$$

$$x = \frac{94^{\text{fr}}, 55 \times 9000}{4, 5},$$

d'où

$$x = 189100^{\text{fr}}.$$

ou

(Voy. RENTES.)

MARÉE, élévation et abaissement périodiques des eaux de la mer. Deux fois par jour, à 12^h 25^m d'intervalle, les eaux de la mer s'élèvent; c'est ce qu'on appelle le flux, le montant, le flot, ou la marée montante; quand la mer est parvenue à sa plus grande hauteur, on dit qu'il y a pleine mer ou haute mer. Après s'être ainsi élevées, les eaux de la mer s'abaissent : c'est ce qu'on appelle le reflux, l'êbe, le jasant ou perdant, ou la marée descendante; quand la mer est parvenue à son niveau le plus bas, on dit qu'il y a basse mer. On appelle marée totale la différence de niveau entre une pleine mer et la basse mer qui la suit, ou plus exactement entre la moyenne de deux hautes mers consécutives et la basse mer intermédiaire. On donne le nom de mer moyenne au niveau moyen entre la haute et la basse mer; il est à peu près constant, et c'est à ce niveau qu'on rapporte les ALTITUDES (Voy. ce mot) dans les opérations géodésiques. Il diffère très-peu de la surface d'équilibre que prendrait la mer s'il n'y avait pas de marées

Le phénomène des marées est intimement lié aux mouvements de la lune. La période de 12^h 25^m qui sépare deux marées consécutives est précisément la moitié du jour lunaire, ou du temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la lune au méridien (le jour lunaire est de 24^h 51^m de temps moyen). On remarque en outre que les marées sont plus grandes à l'époque des syzygies qu'à l'époque des quadratures. Les plus fortes marées ont lieu à l'équinoxe quand la lune est périégée au moment d'une syzygie; c'est-à-dire que la plus grande intensité du phénomène répond au cas où la lune et le soleil sont, en même temps, le plus près possible de l'équateur, à l'instant d'une syzygie. Ces circonstances ont conduit à penser que les marées étaient dues à l'attraction combinée de la lune et du soleil sur les eaux de la mer. Mais l'attraction de la lune est toujours prépondérante, comme on le verra plus loin.

Pour se rendre compte de l'action de la lune sur les eaux de la mer, on fait d'abord abstraction des continents, et l'on suppose le globe recouvert d'une couche uniforme de liquide. Soit L (fig. 1) le centre

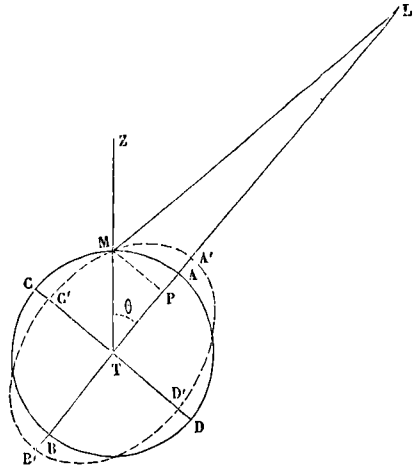


Fig. 1.

de la lune, T le centre de la terre, M un point quelconque de la surface du globe; par le point M et par la droite LT menons un plan, qui coupera la surface des eaux suivant un cercle ACBD. Menons le diamètre CD perpendiculaire à LT; et joignons TMZ, qui sera la verticale du point M. Soit m la masse de la lune; posons

$$MTA = \theta, \quad MT = r, \quad ML = \rho \quad \text{et} \quad TL = a.$$

L'attraction de la lune sur l'unité de masse au point M sera exprimée par $\frac{m}{\rho^2}$ (Voy. GRAVITATION UNIVERSELLE). Ses composantes parallèles à TA et à TC seront

$$\frac{m}{\rho^2} \cos MLT \quad \text{et} \quad \frac{m}{\rho^2} \sin MLT.$$

Or, en abaissant MP perpendiculaire sur TL, on obtient aisément

$$\cos MLT = \frac{TL - TP}{ML} = \frac{a - r \cos \theta}{\rho}$$

$$\sin MLT = \frac{MP}{ML} = \frac{r \sin \theta}{\rho}.$$

et

Les deux composantes deviennent donc :

$$\frac{m(a-r\cos\theta)}{\rho^3} \quad \text{et} \quad \frac{mr\sin\theta}{\rho^3}.$$

Mais

$$\rho = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta} \\ = a \left(1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a}\cos\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remplaçant ρ par cette valeur, développant par la formule du binôme, et négligeant les termes qui contiennent a^4 en dénominateur, on obtient pour la composante parallèle à TA

$$\frac{m}{a^2} + \frac{2mr\cos\theta}{a^3},$$

et, pour la composante parallèle à TC

$$\frac{mr\sin\theta}{a^3}.$$

Le terme constant $\frac{m}{a^2}$ ne peut produire aucun déplacement relatif; pour obtenir la force qui produit une élévation ou un abaissement relatif, il suffit donc de projeter sur la verticale MZ les deux composantes ci-dessus, en ayant soin de supprimer le terme constant dans la première, et de prendre la seconde avec le signe —, parce qu'elle tend à rapprocher la molécule d'eau du centre. On obtient ainsi

$$\frac{mr}{a^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad \text{ou} \quad \frac{mr}{a^3}(3\cos^2\theta - 1).$$

En A, c'est-à-dire pour $\theta=0$, cette force devient $\frac{2mr}{a^3}$; en C, c'est-à-dire pour $\theta=90^\circ$, elle se réduit à $-\frac{mr}{a^3}$; en B, c'est-à-dire pour $\theta=180^\circ$, elle donne de nouveau $\frac{2mr}{a^3}$. Il y aura donc élévation

des eaux en A et en B, et abaissement en C et en D. La masse liquide tendra donc à prendre une forme analogue à un ellipsoïde de révolution dont la section méridienne a son grand axe dirigé suivant la droite qui joint le centre de la terre au centre de la lune. Si l'on imagine, pour plus de simplicité, que la lune soit dans le plan de l'équateur, qui dans ce cas serait le cercle ACBD, il arrivera en vertu du mouvement diurne et du mouvement propre de notre satellite, que l'axe de révolution de l'ellipsoïde A'C'B'D' paraîtra décrire le plan de l'équateur d'occident en orient dans l'espace d'un jour lunaire, et que par conséquent en chacun des lieux situés sur ce cercle, il y aura par jour deux élévations et deux abaissements des eaux. Un phénomène semblable se produira sur chaque parallèle, mais avec une intensité allant en décroissant de l'équateur, où elle est la plus grande, jusqu'au pôle où elle est nulle. Si la lune n'est pas dans le plan de l'équateur, le phénomène sera encore analogue; mais l'axe de révolution de l'ellipsoïde, au lieu de décrire le plan de l'équateur, décrira, autour de la ligne des pôles, un cône de révolution dont le demi-angle sera le complément de la déclinaison de la lune. Il en résultera : 1° que les plus hautes mers n'auront plus lieu à l'équateur, mais sur les parallèles qui en sont distants d'une quantité égale à la déclinaison de la lune; 2° qu'en un même point du globe situé hors de l'équateur, deux hautes mers consécutives ne seront pas égales, ce dont on se rend aisément compte en traçant la courbe méridienne de l'ellip-

soïde dans deux positions symétriques par rapport à la ligne des pôles, comme on le voit sur la figure 2. L et L' représentent les positions apparentes de la lune à 12^h 25^m d'intervalle; l'ellip-

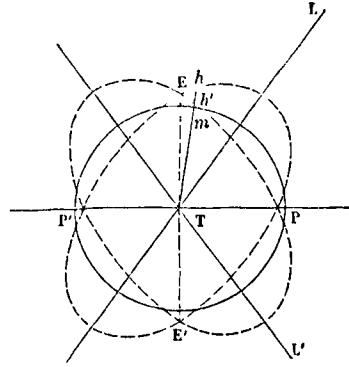


Fig. 2.

soïde, en tournant autour de la ligne des pôles PP' est venu prendre une position symétrique, et l'on voit que pour le point m par exemple les hauteurs mh et mh' qui mesurent l'élévation relative des eaux à 12^h 25^m d'intervalle, ne sont point les mêmes. (Pour des points du globe plus éloignés de l'équateur EE', il arriverait même que l'élévation serait changée en abaissement, et vice versa, en sorte que la période des marées ne serait pas partout la même, ce qui est contraire à l'observation, comme on le verra bientôt.)

Le soleil produit sur les eaux de la mer une action tout à fait analogue à celle de la lune, mais elle est moins intense. En effet, si l'on désigne par M la masse du soleil et par A sa distance à la terre, on trouverait que la force qui produit la marée a pour expression

$$\frac{Mr}{A^3}(3\cos^2\theta - 1).$$

Celle qui provient de l'action de la lune a pour valeur

$$\frac{mr}{a^3}(3\cos^2\theta - 1).$$

Le rapport de ces deux forces est donc

$$\frac{m}{M} \frac{A^3}{a^3}.$$

Si l'on remplace m par l'unité, M par 354936 (Voy. GRAVITATION UNIVERSELLE), A par 24000.r et a par 60.r, on trouve que ce rapport a pour valeur numérique 2,049... ou à très-peu près 2,05. L'action du soleil est donc à celle de la lune comme 1 est à 2,05. Néanmoins l'attraction solaire produit un effet sensible, et sous son influence les eaux de la mer tendent à prendre la forme d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est dirigé du centre de la terre au centre du soleil. Si l'action de la lune et celle du soleil s'exercent simultanément, comme ce'a a lieu en réalité, la forme que la surface des mers tend à prendre est celle qui résulte de la superposition des effets indiqués par l'ellipsoïde lunaire et par l'ellipsoïde solaire. Si, par exemple, le soleil et la lune sont tous deux dans le plan de l'équateur, on voit très-bien qu'à l'époque des syzygies les deux actions s'ajoutent, et que l'effet total produit est à celui que produirait la lune seule

dans le rapport de 2,05 + 1 à 2,05, ou de 3,05 à 2,05; tandis qu'à l'époque des quadratures, les deux actions sont opposées, la lune tend à produire une élévation, le soleil un abaissement, et l'effet final est à celui que produirait la lune seule dans le rapport de 2,05 — 1 à 2,05, ou de 1,05 à 2,05.

Mais cette théorie, très-propre à expliquer d'une manière générale le phénomène des marées, est loin de rendre exactement compte de ses principales circonstances. Contrairement à cette théorie, la période des marées est partout la même, et il n'y a jamais qu'une très-faible différence entre deux hautes mers consécutives. De plus, la haute mer qui à l'époque des syzygies devrait avoir lieu au moment du passage de la lune au méridien, n'a réellement lieu qu'un certain temps après. Ce retard, à l'époque de l'équinoxe et quand la lune est dans ses moyennes distances à la terre, est une quantité constante pour chaque port, mais variable d'un port à un autre, et que l'on a nommée l'établissement du port. En voici la valeur pour les principaux ports de l'Océan sur le littoral français :

Bayonne (embouchure de l'Adour).....	3 ^h 11 ^m
La Rochelle (entrée de la Charente).....	3 18
Cordouan.....	3 53
Lorient (Port-Louis).....	3 32
Brest.....	3 46
Saint-Malo.....	6 10
Granville.....	6 40
Cherbourg.....	7 58
Le Havre.....	9 53
Dieppe.....	11 8
Calais.....	11 49
Dunkerque.....	12 13

Enfin, dans tous les ports de l'Océan, la plus haute mer n'est pas celle qui a lieu le jour même de la syzygie, mais bien celle qui a lieu 36 heures après. Ainsi la haute mer qui arrive le jour de la syzygie est celle qui est due à l'action exercée par le soleil et la lune 36 heures avant; et c'est la troisième marée qui suit la syzygie qui est la plus grande.

Ce désaccord entre les faits et la théorie précédemment exposée tient à plusieurs causes. En premier lieu, cette théorie ne donne que la position d'équilibre que les mers tendent à prendre sous l'action combinée du soleil et de la lune; or cette action s'exerce sur un fluide en mouvement, et dont la vitesse acquise se compose avec celle que l'attraction lunaire et solaire tend à lui imprimer. En second lieu, on a fait abstraction des continents dont l'influence ne peut être négligée; à leur approche, la mer éprouve de la part du fond une résistance qui a pour effet de ralentir son mouvement. Enfin la configuration des côtes exerce évidemment une très-grande influence sur la manière dont se propage l'onde produite par l'action de la lune et du soleil.

Laplace a donné des formules empiriques pour calculer la hauteur et l'heure des marées. La formule qui donne la hauteur de la pleine mer au-dessus du niveau moyen à l'époque d'une syzygie, peut être mise sous la forme

$y = y_0 [0,80029 . k^2 \cos 2D + 0,31211 . k^2 . \cos 2D']$. [1] Dans cette formule, y est la hauteur cherchée; y_0 est ce que l'on appelle l'unité de hauteur pour le port que l'on considère; c'est la moitié d'une marée

totale à l'époque d'une syzygie équinoxiale, lorsque le soleil et la lune sont dans leurs moyennes distances; D et D' sont les déclinaisons du soleil et de la lune; k est le rapport entre la moyenne distance de la terre au soleil, et sa distance réelle au moment que l'on considère: k' est une quantité analogue pour la lune. La quantité entre parenthèses, à laquelle on donne le nom de centièmes, varie entre 1,17 et 0,68; elle atteint sa plus grande valeur lorsque D et D' sont nuls et que la lune est périgée; sa plus petite valeur répond au solstice d'été, lorsque D' atteint son maximum, c'est-à-dire 23° 27' 27", 4 + 5° 8' 43", 9, et que la lune est apogée. L'Annuaire du Bureau des longitudes donne chaque année une table toute calculée des valeurs de cette quantité entre parenthèses, pour toutes les syzygies de l'année; il suffit de les multiplier par l'unité de hauteur relative au port que l'on considère, pour avoir la hauteur de la pleine mer au-dessus du niveau moyen dans ce port aux mêmes époques.

Voici le tableau des valeurs de l'unité de hauteur pour les principaux ports de l'Océan sur le littoral français :

Ports.	Unité de hauteur.
Entrée de l'Adour.....	1,40
Cordouan.....	2,35
La Rochelle.....	2,67
Saint-Nazaire (Loire).....	2,68
Lorient.....	2,24
Brest.....	3,21
Saint-Malo.....	5,68
Granville.....	6,15
Cherbourg.....	2,82
Le Havre.....	3,57
Dieppe.....	4,40
Calais.....	3,12
Dunkerque.....	2,68

Dans les cartes marines, les sondes sont rapportées au niveau des plus basses mers, c'est-à-dire que si en un certain point la sonde est exprimée par un nombre h de mètres, ce nombre exprime la hauteur du niveau de la mer au-dessus de ce point à l'époque des plus basses mers. Si l'on veut avoir la hauteur du niveau moyen de la mer au-dessus du même point, il faut y ajouter la valeur maximum de y , ce qui donne

$$h + 1,17 y_0.$$

Si l'on veut avoir la hauteur du niveau de la pleine mer ou de la basse mer au-dessus de ce même point à une époque quelconque de l'année pour laquelle les centièmes sont exprimés par f , il faut ajouter ou retrancher $f y_0$, ce qui donne :

Pour la pleine mer

$$h + (1,17 + f) y_0,$$

Et pour la basse mer

$$h + (1,17 - f) y_0.$$

Si, par exemple, la sonde d'un point situé dans la rade de Brest est 4^m, 50, ce point est à 4^m, 50 au-dessous des plus basses mers. Sa distance au-dessous du niveau moyen de la mer est

$$4^m, 50 + 1,17 . 3^m, 21 \text{ ou } 8^m, 25.$$

Si l'on considère une autre époque de l'année, par exemple le 8 juin 1861, époque à laquelle le nombre de centièmes était 0,75 (Voy. l'Annuaire du Bureau des longitudes pour 1861, page 37), on aura,

pour la hauteur de la mer au-dessus du point considéré, savoir :

A la pleine mer
 $4^m,50 + (1,17 + 0,75).3^m,21$ ou $10^m,66$,
 et à la basse mer

$4^m,50 + (1,17 - 0,75).3^m,21$ ou $5^m,84$.

Pour trouver l'heure de la haute mer, on commence par déterminer la quantité A donnée par la formule

$$A = 3,06 \frac{\delta^3 \cos^2 D'}{\delta^3 \cos^2 D}, \quad [2]$$

dans laquelle δ et δ' sont les demi-diamètres apparents du soleil et de la lune, 36 heures avant le passage de la lune au méridien du port que l'on considère; D et D' des déclinaisons du soleil et de la lune, comme dans la formule [1]. L'Annuaire du Bureau des longitudes contient une table qui donne les valeurs de A (multipliées par 10 pour plus de commodité), de 5 jours en 5 jours pour toute l'année; comme ces valeurs diffèrent peu, il est facile de les obtenir pour les autres jours par voie d'interpolation.

Au moyen de la quantité A, on peut alors calculer la quantité C donnée par la formule

$$C = \frac{1}{30} \text{ arc tang } \frac{\sin 2\alpha}{A + \cos 2\alpha}, \quad [3]$$

dans laquelle α désigne la différence entre l'ascension droite du soleil vrai et celle de la lune.

L'Annuaire du Bureau des longitudes donne, pour toutes les valeurs entières de $A \times 10$, et pour toutes les différences d'ascension droite, de 10 minutes en 10 minutes, les valeurs correspondantes de la correction C (aussi multipliées par 10 pour plus de commodité.)

En représentant alors par p l'heure du passage de la lune au méridien du lieu, par E l'établissement du port, et par H l'heure de la haute mer, on a

$$H = p + E + C - 19^m. \quad [4]$$

On a dressé des cartes marines sur lesquelles sont tracées les courbes dites *cotidales* (de l'anglais *tide*, marée) passant par les points qui ont la haute mer à la même heure. Ces cartes permettent de suivre avec facilité la marche de l'onde immense qui constitue la marée.

Dans les mers ouvertes et vastes comme l'Océan, cette onde se propage d'une manière régulière et avec une vitesse qui est celle du mouvement diurne augmenté de la vitesse propre de la lune. A l'approche des continents ce mouvement se ralentit, comme l'indique le terme E qui figure dans la formule [4]. Cependant la vitesse de l'onde est encore considérable, puisque, dans un canal resserré comme la Manche, la marée ne met que 8 heures à se propager de Brest à Dunkerque, c'est-à-dire à une distance de plus de 700 kilomètres, ce qui répond à une vitesse de plus de 20 mètres par seconde. La configuration des côtes exerce une très-grande influence sur la hauteur de la marée; cette hauteur est d'autant plus considérable, toutes choses égales d'ailleurs, que la direction de la côte approche davantage d'être perpendiculaire à la direction du courant produit par la marée. Sur la côte occidentale du département de la Manche, qui présente à peu près cette direction, la haute mer s'élève beaucoup plus haut que sur les autres points du littoral français. A Granville, par exemple, la haute mer s'élève de plus de 12 mètres au-

dessus de la basse mer, tandis qu'à Cherbourg la différence n'est que de $5^m,60$ environ. Dans les mers intérieures ou fermées, les marées sont à peine sensibles; elles sont de 1 mètre au fond de l'Adriatique; mais à Marseille et à Alger elles ne s'élèvent pas à plus de $0^m,25$.

M. Chazallon, ingénieur hydrographe, a institué depuis quelques années, dans plusieurs de nos ports, des observations régulières faites à l'aide d'un instrument appelé *maréographe*, dans lequel un flotteur trace sur un papier animé d'un mouvement continu et uniforme la hauteur de la mer, réduite par un mécanisme particulier, dans une proportion convenable. Le Dépôt de la marine publie un *Annuaire des marées des côtes de France*, composé par cet habile observateur.

Dans tous les ports il existe des *échelles de marée* qui donnent la hauteur de la mer au-dessus du niveau moyen. Dans les opérations de sondage on a soin de noter l'heure, afin de connaître par l'échelle de marée quelle était, à l'instant de l'opération, la hauteur de la mer au-dessus des eaux moyennes, et par suite au-dessus des plus basses mers. (Voy. NIVELLEMENT SOUS-MARIN.)

MARS, l'une des planètes principales. Sa moyenne distance au soleil est 1,5236913, celle de la terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est de $686^d,9796458$, et son moyen mouvement diurne est de $31'26''5184$. Son orbite, dont l'excentricité est 0,09326113, fait un angle de $1^{\circ}51'6''$ avec le plan de l'écliptique. Le diamètre de Mars est 0,540, celui de la terre étant 1; il en résulte que son volume est les 0,157 de celui de la terre. Sa masse est les 0,119 de celle de notre globe, et sa densité est exprimée par 0,779, celle de la terre étant prise pour unité.

Mars tourne en $24^h 37^m$, d'occident en orient, autour d'un axe qui fait un angle de $61^{\circ} 12'$ avec le plan de son orbite. Il en résulte que cette planète doit offrir des saisons analogues aux nôtres, puisque l'inclinaison de son équateur sur le plan de son orbite est $28^{\circ} 48'$. (Densité 3,91, celle du corindon.)

Mars offre des phases assez sensibles; au moment de la quadrature, l'arc du fuseau non éclairé est de 41° environ, et l'échancrure du disque est à peu près le huitième du diamètre apparent. Au moment de l'opposition, le disque apparaissant dans toute son étendue, on a pu constater un aplatissement considérable qu'on évalue à plus de $\frac{1}{30}$.

Mars apparaît à l'œil nu comme une belle étoile rougeâtre. A l'aide d'une lunette, on aperçoit sur son disque, du côté du pôle boréal et du côté du pôle austral, deux taches blanches qui varient de grandeur en sens contraire l'une de l'autre, et que l'on croit être des amas de glaces analogues à ceux qui occupent les régions polaires sur le globe terrestre, ce qui implique l'existence d'une atmosphère.

On désigne cette planète par le signe ♂ . (Voy. L'Annuaire de 1865.)

MARTEAU À PILOTS, marteau à vapeur servant à enfoncer les pilots. Son bâti s'installe sur le pilot même, et descend ainsi avec lui à mesure que le marteau fonctionne; les tuyaux qui conduisent la vapeur de la chaudière sous le piston sont articulés de manière à permettre ce mouvement de descente. Un mouton du poids de 3000^k peut ainsi battre

60 coups par minute, et enfoncer en trois minutes, dans un sol de dureté moyenne, un pilot de 12^m de long. Dans une journée de 10 heures, et en ayant égard au temps nécessaire pour installer le marteau, on peut enfoncer de 16 à 20 pilots. Cet ingénieux appareil, dû à M. Nashmith, habile constructeur anglais, permet de réaliser une économie notable de temps et d'argent, en même temps qu'il apporte une grande perfection dans le travail. Il offre encore, entre autres avantages, celui de ne pas déformer la tête des pilots comme avec les sonnettes. (Voy. MARTEAU A VAPEUR.)

Le marteau à pilots est quelquefois désigné sous le nom de *mouton à vapeur*.

MARTEAU A VAPEUR, puissant appareil de percussion employé dans les forges et dans les ateliers de construction de machines. Son bâti, établi sur un massif en charpente, se compose d'un socle A (fig. 1), de deux montants B, B, et d'un entable-

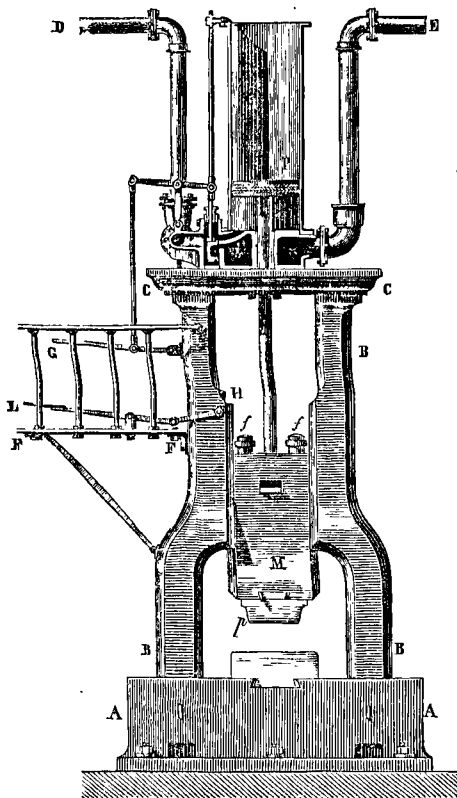


Fig. 1.

ment CC. Le marteau M est une masse de fonte dont le poids varie de 3000 à 5000 kilogrammes; il est mobile entre des coulisses verticales ménagées dans les montants BB. La pièce p, placée à la partie inférieure du marteau, et sur laquelle porte tout l'effort de la percussion, est une pièce rapportée; on lui donne le nom de *panne*. A la partie supérieure du marteau est adaptée la tige du piston P d'une machine à vapeur à haute pression, à simple effet, sans détente ni condensation. A la base du

cylindre est la boîte de distribution. Elle reçoit la vapeur venant de la chaudière par le tuyau D; suivant la position du tiroir, la vapeur peut trouver deux issues, l'une qui la conduit sous le piston et l'oblige à s'élever avec le marteau qu'il porte, l'autre qui communique avec le tuyau d'échappement E. La boîte de distribution est représentée à part, sur une plus grande échelle (fig. 2). Pour manœuvrer la

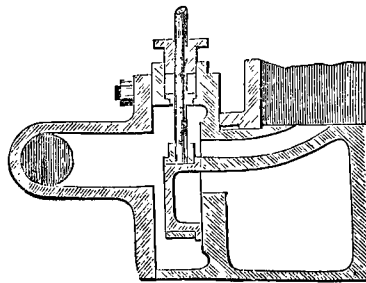


Fig. 2.

machine, on se place sur le parquet de manœuvre FF; en agissant de haut en bas sur le levier G, on démasque l'orifice d'admission de la vapeur sous le piston, et celui-ci s'élève; en agissant ensuite de bas en haut sur le même levier, on ferme l'orifice d'admission en même temps qu'on démasque l'orifice d'émission; la vapeur s'échappe par le tuyau E, et le marteau, abandonné à son poids, retombe. Quand on veut maintenir le marteau soulevé, on a deux moyens. On peut laisser affluer la vapeur sous le piston; elle y forme un coussin élastique qui l'empêche de redescendre. On peut encore, si le marteau a été suffisamment soulevé, le faire reposer sur le *toc* H que l'on fait saillir entre les montants en agissant sur la pédale L. Mais le premier de ces deux moyens est surtout précieux parce qu'il permet de maintenir pendant quelque temps le marteau soulevé à la hauteur qu'on veut. Le marteau à vapeur constitue un outil remarquable par sa puissance, par la rapidité de son action et par la facilité avec laquelle on le gouverne, en réglant à volonté la hauteur de chute. Il a été imaginé, en 1842, par M. Bourdon, alors ingénieur au Creusot, et reproduit peu de temps après, en Angleterre, par M. Nasmyth.

Il est quelquefois désigné sous le nom de *marteau-pilon*.

Les tampons f, f sont destinés à amortir le choc du marteau contre l'entablement lorsqu'il s'élève d'une manière trop brusque.

MARTEAU - PILON HYDRAULIQUE, marteau analogue au MARTEAU A VAPEUR (Voy. ce mot), mais dans lequel la vapeur est remplacée par un liquide. Dans le marteau-pilon de MM. Guillemain et Minary, c'est de l'huile qui est refoulée à l'aide d'une pompe sous le piston, à la tige verticale duquel est suspendu le marteau. Le piston en s'élevant comprime l'air qui est au-dessus. Lorsqu'on ouvre une issue à l'huile, le marteau retombe sous l'action de son poids et du ressort de l'air comprimé au-dessus de lui.

MARTEAUX, machines employées dans les forges et dans les autres usines métallurgiques pour agir

par choc sur le métal. Un marteau se compose d'une tête pesante qui forme le marteau proprement dit, et d'un manche mobile autour d'un axe horizontal. Une *bague à cames* soulève le manche à intervalles égaux et le laisse retomber, en sorte qu'à chaque passage d'une came répond un coup de la tête du marteau sur l'enclume placée au-dessous.

I. Les marteaux se distinguent entre eux par le point du manche qui est saisi par la came. Les *marteaux frontaux* sont ceux dans lesquels la came saisit le manche par son extrémité antérieure, en avant du marteau, et dans le plan vertical de symétrie de l'appareil. Ces machines sont en usage dans les forges où l'on fabrique le fer à la méthode anglaise. Le manche est en fonte, et le poids total du marteau et du manche varie de 2500^k à 4000^k. Ils frappent de 60 à 100 coups par minute. La longueur du manche, depuis l'axe de rotation jusqu'au point qui frappe l'enclume, varie de 2^m,30 à 2^m,80. La *levée*, c'est-à-dire la hauteur verticale à laquelle le point saisi par la came s'élève à chaque coup, varie de 0^m,35 à 0^m,40. Le nombre des cames est ordinairement de 5.— On peut ranger dans la même classe la plupart des marteaux ou pilons employés au feutrage des laines, et à la préparation des chiffons qui servent à la fabrication du papier.

Les *marteaux à soulèvement* sont ceux dans lesquels la came saisit le manche entre l'axe de rotation et le marteau. Ces marteaux, auxquels on donne aussi le nom de *marteaux à l'allemande*, sont particulièrement employés à l'affinage du fer par la méthode allemande. Le manche est en bois; le poids du marteau est de 300^k à 400^k. Ils frappent de 70 à 200 coups à la minute. La longueur du manche, comptée comme ci-dessus, varie de 2^m,10 à 2^m,60. La came le saisit à 0^m,40 ou 0^m,55 de l'axe du marteau. La *levée* est de 0,55 environ.

Les *marteaux à bascule* sont ceux dans lesquels la came agit sur l'extrémité du manche opposée à celle où est fixé le marteau. Ces marteaux, appelés aussi *martinets*, sont employés à l'étirage et au platinage des petits fers, au raffinage des aciers, à la fabrication des armes blanches et de divers outils. Le poids du marteau proprement dit varie de 80^k à 40^k et au-dessous. Ils frappent de 200 à 400 coups par minute. La longueur totale du manche, depuis l'axe du marteau jusqu'à l'extrémité opposée, varie de 2^m,50 à 3^m. L'axe de rotation est situé aux $\frac{2}{3}$ ou aux $\frac{3}{4}$, à partir du marteau. La *levée* varie de 0^m,25 à 0^m,27 si la vitesse est grande, de 0^m,30 à 0^m,40 si la vitesse est moyenne, de 0^m,50 à 0^m,55 si la vitesse est petite. Le nombre des cames varie ordinairement de 13 à 14.

II. Ces divers appareils peuvent être réunis dans une même théorie, dont l'objet est de déterminer le travail moteur consommé par chaque coup de marteau. On divise, pour cela, l'intervalle de deux coups de marteau en trois périodes distinctes : la première est la période du choc, à la fin de laquelle le marteau ne s'est pas encore déplacé d'une quantité sensible (*Voy. Choc*) ; la seconde est la période de *levée* : elle se termine à l'instant où la came abandonne le manche ; enfin, la troisième période est la période de chute. Nous désignerons par \mathfrak{E}_1 , \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 le travail moteur consommé dans chacune de ces trois périodes.

Le travail consommé dans la première période a pour mesure la perte de puissance vive due au choc de la came contre le manche du marteau. On a donc

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{2} mV^2 \frac{4M}{2m + M}, \quad [1]$$

V désignant la vitesse de régime du point de la bague à came qui rencontre le manche, m une masse qui, placée au même point, aurait le même moment d'inertie que la roue à cames, et M une autre masse fictive qui, placée au même point sur le manche, aurait le même moment d'inertie que le marteau (*Voy. Choc*).

Dans les marteaux frontaux, le rapport $\frac{m}{M}$ est au moins égal à 30, et dans les autres marteaux il n'est jamais inférieur à 12.

Calculons maintenant le travail correspondant à la *levée*. Soit P le poids du marteau, de son manche et de ses ferrures s'il est en bois. Soit N (fig. 1) la

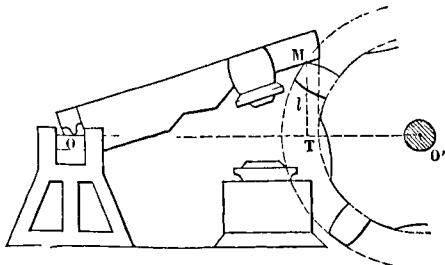


Fig. 1.

réaction de la came sur le manche, force verticale au commencement du choc et qui reste encore sensiblement verticale jusqu'à la fin de la *levée*. Soit l la *levée*, ou la hauteur du point de contact M au-dessus de la ligne des centres OO' , au moment où la came quitte le manche ; soit λ la quantité dont le centre de gravité du marteau et de son manche s'est élevé à ce moment au-dessus de la même droite OO' . Soit T le point de contact sur la ligne des centres ; faisons $OT = R$ et $O'T = r$. Enfin, soit ρ le rayon des tourillons de la *hurasse*, c'est-à-dire des tourillons adaptés à l'anneau en fer qui embrasse le manche lorsqu'il est en bois, ou le rayon de l'arête cylindrique formant couteau qui joue le rôle de tourillon dans les marteaux frontaux. La pression exercée sur ces tourillons sera $P - N$ s'il s'agit de marteaux frontaux ou de marteaux à soulèvement ; ce sera $P + N$ s'il s'agit d'un marteau à bascule. En représentant par f , le sinus de l'angle du frottement, ou $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, f désignant le coefficient de frottement, on aura, pour le moment de la pression,

$$f \rho (P \mp N).$$

L'arc décrit pendant la *levée* étant l à la distance R de l'axe, l'arc décrit à l'unité de distance est $\frac{l}{R}$; le travail du frottement du marteau pendant la *levée* est donc (*Voy. TRAVAIL, MOMENT*), en valeur absolue,

$$f \rho (P \mp N) \frac{l}{R}$$

D'ailleurs le travail du poids P est $P\lambda$, et le travail de la force N est Nl ; on a donc, en remarquant

que le mouvement varie très-peu pendant la levée, et peut par conséquent être regardé comme sensiblement uniforme,

$$Nl = P\lambda + f_1 \rho (P \mp N) \frac{l}{R};$$

d'où l'on tire

$$Nl = \frac{P(\lambda + f_1 \rho) \frac{l}{R}}{1 \pm f_1 \rho \frac{1}{R}}. \quad [2]$$

Il se produit un autre travail résistant pendant la levée; c'est celui du frottement de la came contre le manche. Ce travail, d'après la théorie du frottement des engrenages (*Voy. ENGRENAGES* [Frottement des]), a pour expression

$$\frac{1}{2} f N P \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right).$$

Enfin, un troisième travail résistant, développé pendant la levée est celui du frottement des tourillons de la roue à cames; en nommant Q le poids de celle-ci, qui diffère peu de la réaction exercée sur l'axe, on trouvera comme tout à l'heure pour l'expression de ce travail

$$Q f_1 \rho' \frac{l}{r},$$

ρ' désignant le rayon des tourillons de l'arbre à cames. En faisant la somme de ces trois travaux on aura pour le travail total développé pendant la levée

$$\mathfrak{C}_2 = Nl + \frac{1}{2} f N P \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) + Q f_1 \rho' \frac{l}{r}$$

ou

$$\mathfrak{C}_2 = P \frac{(\lambda + f_1 \rho \frac{l}{R})}{1 \pm f_1 \rho \frac{1}{R}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right] + Q f_1 \rho' \frac{l}{r}. \quad [3]$$

Pendant la période de chute, il n'y a d'autre travail résistant à considérer que le travail du frottement sur les tourillons de l'arbre à cames. Si c est le nombre des cames, l'intervalle de deux cames consécutives est $\frac{2\pi r}{c}$, et l'arc correspondant dans

le cercle dont le rayon est ρ' est $\frac{2\pi \rho'}{c}$; si l'on en retranche l'arc parcouru pendant la levée ou $\rho' \frac{l}{r}$,

il restera $\rho' \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{l}{r} \right)$ pour l'arc parcouru pendant la période de chute. Le travail du frottement pendant cette période sera donc exprimé par

$$\mathfrak{C}_3 = Q \cdot f_1 \rho' \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{l}{r} \right). \quad [4]$$

La somme $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3$ exprimera le travail résistant développé à chaque coup de marteau; en le multipliant par c on aura le travail que doit fournir le moteur à chaque tour de l'arbre à cames. Ou bien, connaissant le nombre de coups à frapper dans une minute, en multipliant par ce nombre le travail développé à chaque coup, on aura le travail développé en une minute; divisant par 60, on aura le travail par seconde; divisant enfin par 75, on aura la force en chevaux qu'il conviendra de donner au moteur.

III. La masse de l'arbre à cames est ordinairement assez grande pour que cette roue joue le rôle de VOLANT (*Voy. ce mot*); en sorte que, malgré les chocs réitérés qui se produisent, le mouvement de rotation demeure sensiblement régulier. Connaissant le nombre de coups frappés par minute, on connaît le temps qui doit s'écouler entre deux coups consécutifs; soit t ce temps. La durée du choc est insensible; celle de la levée est à très-peu près exprimée par le rapport de l à $\frac{2\pi r}{c}$; soit t' cette seconde du-

rée. La différence $t - t'$ sera le temps qui s'écoule entre l'instant où une came quitte le manche et l'instant où il est rencontré par la came suivante. Or il faut qu'avant cette rencontre, le marteau ait eu le temps de retomber, car autrement le marteau *camerait*, c'est-à-dire qu'il serait repris par la came avant d'avoir frappé sur l'enclume. Or, le temps de la chute est exprimée (*Voy. MOUVEMENT VERTICAL*

DES GRAVES) par $\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$; on devra donc avoir

$$t - t' > \sqrt{\frac{2\lambda}{g}}. \quad [5]$$

Cette condition est importante. On s'arrange ordinairement de manière que le premier membre surpasse le second de $\frac{1}{25}$ à $\frac{1}{6}$ de sa valeur, selon que la machine doit avoir une faible vitesse ou une vitesse considérable.

Lorsque la masse de la roue à cames est insuffisante pour assurer la régularité du mouvement, un volant devient nécessaire, et l'on peut appliquer au cas des marteaux la marche générale indiquée pour déterminer les dimensions de ce régulateur (*Voy. VOLANT*). D'après M. Morin, on peut calculer le poids du volant par la formule

$$P = \frac{K}{R^2}, \quad [6]$$

dans laquelle P est le poids du volant, R le rayon moyen de la jante, et K un coefficient donné par le tableau suivant:

Genre du marteau.	Poids du marteau.	Coefficient K
Marteaux frontaux.	3000 ^k à 3500 ^k	20000
—	4000 ^k à 4900 ^k	30000
Marteaux à l'allemande.....	600 ^k à 800 ^k	15000
Martinets.....	360 ^k	6000
—	500 ^k	9000

(*Voy. le Cours de M. Poncelet à l'École d'application de Metz, le Cours de Mécanique appliquée, de M. Bélanger, à l'École des ponts et chaussées, les leçons de Mécanique pratique de M. Morin, etc.*)

IV. La même théorie s'étend, avec de très-légères modifications, aux pilons qui sont employés soit dans la fabrication du papier, soit dans le feutrage des laines, soit dans la fabrication de la poudre, soit dans les usines métallurgiques pour pulvériser le minerai. Le pilon, avec son mentonnet horizontal que saisit la came, peut être assimilé à un marteau frontal. Le travail \mathfrak{C}_1 a la même expression que dans le cas des marteaux, avec cette seule différence que la masse désignée par M, au lieu d'être une masse fictive, représente la masse même du pilon (*Voy. Choc*).

Le travail du frottement des tourillons de la hu-

rasse se trouve ici remplacé par le frottement des prisons ou guides de la tige du pilon. Soit M (fig. 2) le point de contact du mentonnet avec la came, et soit a la distance de ce point à la tige du pilon; soit

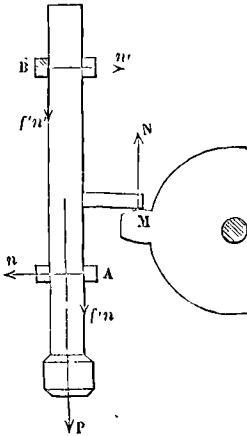


Fig. 2

$2e$ l'épaisseur de cette tige. Soient A et B les guides contre lesquels a lieu le contact de la tige; soit d la distance verticale de ces points. Soient n et $f'n$ les composantes horizontale et verticale de la réaction qui s'exerce au point B. Enfin, soit P le poids du pilon, agissant suivant l'axe de la tige. Si, comme on l'a fait pour les marteaux, on admet que le mouvement descendant du pilon soit sensiblement uniforme, on aura pour l'équilibre

$$n' = n, \quad N - P - 2f'n = 0, \\ N(a + 2e) - Pe - nd - f'n \cdot 2e = 0.$$

En éliminant n , on trouve

$$N = P \cdot \frac{d}{d - 2f'(a + e)}.$$

Ainsi le travail de N pendant la levée est

$$Nl = Pl \cdot \frac{d}{d - 2f'(a + e)}.$$

Le travail du frottement de la came se déduira de la formule trouvée plus haut, en y supposant $R = \infty$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} fNl \cdot \frac{1}{r}.$$

D'ailleurs, le travail du frottement des tourillons de l'arbre à cames s'obtiendra comme précédemment; on aura donc

$$\mathcal{E}_2 = Nl + \frac{1}{2} fNl \cdot \frac{1}{r} + Qf_1 \rho' \frac{l}{r},$$

ou

$$\mathcal{E}_2 = Pd \cdot \frac{d}{d - 2f'(a + e)} \left[1 + \frac{1}{2} f \frac{l}{r} \right] + Qf_1 \rho' \frac{l}{r}. \quad [19]$$

Quant au travail \mathcal{E}_3 , il restera exprimé par la formule [4]. On fera comme plus haut la somme des trois travaux $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$; et la question s'achèvera de la même manière.

(Voy. MARTEAU À VAPEUR.)

MASSE, quotient que l'on obtient en divisant le poids d'un corps par l'accélération due à la pesanteur, ce poids et cette accélération étant mesurés dans un même lieu. Plus généralement, la masse d'un corps est le quotient d'une force constante

quelconque appliquée à ce corps par l'accélération qu'elle lui imprime. En vertu de la proportionnalité des forces aux accélérations (Voy. MESURE DES FORCES), si F est une force quelconque appliquée à un corps dont le poids est p , et si j est l'accélération due à cette force, g étant l'accélération due à la pesanteur, on a

$$F : p = j : g \quad \text{ou} \quad \frac{F}{j} = \frac{p}{g},$$

c'est ce quotient, constant pour un même corps, que l'on appelle la *masse* de ce corps.

Dans la langue générale, on désigne sous le nom de *masse* la quantité de matière contenue dans un corps; et cette manière de s'exprimer a été longtemps usitée dans la science. Mais en y réfléchissant on reconnaît qu'il est difficile d'attacher un sens précis à ces mots. S'il n'y avait dans l'univers qu'une espèce de matière, toujours au même état, on concevrait aisément ce qu'il faut entendre par quantité de matière; cette quantité serait mesurée par le volume du corps. Mais le nombre des matières diverses étant considérable, le volume ne peut être pris pour la mesure de la quantité de matière; il faut donc recourir à la notion de poids, et convenir de prendre le poids d'un corps pour la mesure de la quantité de matière qu'il contient. Or, ce poids varie suivant le lieu où on l'évalue, tandis que la quantité de matière contenue dans le corps, quelque idée qu'on s'en fasse, ne saurait varier d'un lieu à l'autre; le poids ne peut donc pas être pris rigoureusement pour la mesure de la quantité de matière. Mais on observe que si le poids d'un corps varie en différents lieux, l'accélération due à la pesanteur varie aussi, et dans le même rapport, de telle sorte que le quotient du poids p d'un corps, estimé en un lieu quelconque, par l'accélération g due à la pesanteur dans ce lieu, est une quantité constante. On pourrait donc prendre le quotient $\frac{p}{g}$

pour la mesure de la quantité de matière contenue dans le corps que l'on considère; et l'on ferait ainsi coïncider la signification mécanique de la masse avec sa signification vulgaire. Il est préférable de n'attacher au mot *masse* d'autre sens que celui du quotient $\frac{p}{g}$; ce quotient revient sans cesse dans les formules de Mécanique; il est utile de lui conserver un nom qui abrège les énoncés.

On désigne généralement la masse d'un corps par la lettre m , et l'on écrit en conséquence

$$\frac{p}{g} = m, \quad \text{d'où} \quad p = mg,$$

c'est-à-dire que le poids d'un corps est le produit de sa masse par l'accélération due à la pesanteur dans le lieu que l'on considère.

On peut demander quelle est l'unité de masse; pour répondre à cette question, il suffit de faire $m = 1$ dans la formule ci-dessus, qui donne alors $p = g$; c'est-à-dire que le poids du corps qui a pour masse l'unité est exprimé en kilogrammes par le nombre qui exprime en mètres l'accélération due à la pesanteur dans le lieu où l'on évalue ce poids. Ainsi, à Paris, le poids qui répond à l'unité de masse serait de $9^h,81$ environ; ce serait, par exemple, le poids de 9 litres 81 centilitres d'eau pure au maximum de densité.

Dans les corps homogènes la masse est proportionnelle au volume; si V désigne le volume d'un corps exprimé en mètres cubes, Π le poids du mètre cube de la matière de ce corps, et g l'accélération due à la pesanteur, on a

$$m = \frac{\Pi V}{g}$$

S'il s'agit d'un gaz, le volume s'exprime en fonction de la hauteur h de mercure qui représente la pression, et en fonction de la température. Soit Π_0 le poids du mètre cube du gaz à la température zéro et sous la pression représentée par 0^m,76 de mercure, et soit V_0 le volume que la masse de gaz considérée occuperait dans les mêmes conditions physiques, on aura toujours pour l'expression de cette masse

$$\frac{\Pi_0 V_0}{g}$$

Mais si V est le volume que la masse considérée occupe à la température t et sous la pression représentée par une hauteur h de mercure, on aura, conformément à la loi de Mariotte et à la loi de dilatation des gaz (Voy. les Traités de physique),

$$\frac{V}{V_0} = \frac{0,76}{h} \cdot (1 + at), \text{ d'où } V_0 = V \cdot \frac{h}{0,76} \frac{1}{1 + at}$$

a désignant le coefficient de dilatation des gaz (pour l'air ce serait 0,00366). L'expression de la masse cherchée est donc

$$m = \frac{\Pi_0 V}{g} \cdot \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + at}$$

MASSIF ARRIÈRE, ensemble des pièces qui servent à combler l'espace compris entre l'ESTAIN et la CONTRE-QUILLE (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE).

MASSIF D'AMARRE, massif de maçonnerie lié à la culée d'un PONT SUSPENDU (Voy. ce mot) et servant à retenir les chaînes ou câbles qui y sont amarrés.

MÂTURE, partie d'un navire destinée à porter les voiles. La mâture se compose des mâts et des vergues. Les mâts sont au nombre de quatre dans les vaisseaux, les frégates et les corvettes, savoir : le *grand mât*, placé en arrière du milieu de la ligne de flottaison en charge, à une distance de ce milieu comprise entre les 0,11 et 0,12 de la demi-longueur; le *mât de misaine*, placé en avant du milieu entre les 0,78 et 0,79 de la demi-longueur; le *mât d'artimon*, placé en arrière du milieu entre les 0,65 et les 0,66 de la demi-longueur; le *mât de beaupré*, mât incliné placé à la proue. Dans les bricks, le mât d'artimon manque. Les mâts traversent les ponts par des ouvertures nommées *étambrais*, dans lesquelles ils sont *coincés* ou serrés fortement par des coins; leur partie inférieure, taillée à plusieurs faces, est solidement maintenue dans une sorte de caisse, où elle est serrée par des coins dits *coins d'emplanture*. Le grand mât et le mât de misaine s'appuient ainsi sur la carlingue (Voy. CONSTRUCTION NAVALE); le mât d'artimon repose sur l'un des baux du premier pont. Le beaupré ne traverse qu'un ou deux étambrais au plus; il est maintenu à sa partie inférieure par une disposition analogue. Les mâts sont composés de plusieurs pièces qui portent des noms distincts, savoir, en allant de bas en haut, pour le grand mât : grand mât; grand mât de hune, grand perroquet, grand cacatois

pour le mât de misaine : mât de misaine, petit mât de hune, petit perroquet, petit cacatois; pour le mât d'artimon : mât d'artimon, perroquet de fougue, mât de perruche, cacatois d'artimon; enfin, pour le beaupré : mât de beaupré, bout-dehors de beaupré, bout-dehors de clin-foc. A chacun de ces mâts partiels correspond une voile; nous ne nommerons que les voiles majeures, savoir : pour le grand mât, grande voile, grand hunier, grand perroquet; pour le mât de misaine : misaine, petit hunier, petit perroquet; pour le mât d'artimon : brigantine, perroquet de fougue, perruche; pour le beaupré : grand-foc et clin-foc. Ces voiles sont fixées ou plutôt articulées aux mâts correspondants par des *vergues* qui peuvent tourner autour de ces mâts. Les mâts et les vergues sont terminés par des surfaces de révolution dont on détermine la génératrice par la méthode du QUART DE NONANTE (Voy. ce mot) ou par quelque autre tracé analogue. Pour chaque mât, la longueur comprise entre l'emplanture et l'étambrai supérieur est le cinquième de la longueur totale, et le diamètre à l'emplanture est le même que celui de la section faite au quart de la partie extérieure, comptée à partir de l'étambrai. Un règlement du 27 avril 1854 a fixé les dimensions de la mâture pour les bâtiments de guerre; on en trouvera le détail dans l'ouvrage de M. Viel, ayant pour titre : *Construction des bâtiments de mer*.

Voici les dimensions principales de la mâture d'un vaisseau de 120 canons.

Mâts	Longueur.	Plus grand diamètre.
Grand mât.....	38,98	1,055
Grand mât de hune....	23,71	0,595
Mât de grand perroquet.	18,50	0,325
—	—	—
Mât de misaine.....	36,38	1,000
Petit mât de hune.....	21,76	0,595
Mât de petit perroquet..	16,65	0,295
—	—	—
Mât d'artimon.....	26,96	0,690
Mât de hune d'artimon ou perroquet de fougue...	16,56	0,357
Mât de perroquet d'artimon ou de perruche...	13,85	0,225
—	—	—
Mât de beaupré.....	22,74	1,030
Bout-dehors de beaupré..	19,49	0,432
Bout-dehors de clin-foc.	17,50	0,27

La grande vergue a 35^m,72 de longueur et 0^m,710 de diamètre; la vergue de grand hunier a 26^m,70 de longueur et 0^m,480 de diamètre; la vergue de grand perroquet a 16^m,40 de longueur et 0^m,255 de diamètre, etc., etc.

Le diamètre des mâts peut être déterminé d'après les règles de la RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (Voy. ce mot). Connaissant la surface des voiles qu'un mât doit porter, et la vitesse maximum du vent dans les circonstances normales, on peut calculer l'effort supporté par chaque voile (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES, VOILES), et prendre les moments de ces efforts par rapport à une section horizontale quelconque du mât. Si μ représente la somme de ces moments. R la plus grande résistance, par

unité de surface, que puisse supporter la fibre du bois employé, r le rayon de la section considérée, et I le moment d'inertie de cette section par rapport à l'un de ses diamètres, la formule

$$R = \frac{v\mu}{I}, \text{ qui devient } R = \frac{r\mu}{\frac{1}{4}\pi r^4},$$

donnera $r = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\pi R}}$ pour le rayon de cette section.

Mais indépendamment de l'effort régulier du vent, les mâts peuvent être soumis à une autre cause de rupture, résultant des variations subites de vitesse que le navire peut éprouver par l'action de la mer. Soit ω la vitesse angulaire du navire dans le mouvement de ROULIS ou de TANGAGE (Voy. ces mots); désignons par μ la somme algébrique des moments de toutes les forces qui agissent sur le mât, et par I' son moment d'inertie, par rapport à l'axe du mouvement, on aura pour l'expression de la vitesse angulaire,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{I'}, \text{ d'où } \mu = I' \frac{d\omega}{dt}. \quad [1]$$

Mais, en désignant par P la poussée de l'eau, par K la distance du centre de gravité du navire au premier métacentre latitudinal ou longitudinal, suivant qu'il s'agit du roulis ou du tangage, par i l'inclinaison du navire, et par I son moment d'inertie par rapport à l'axe du mouvement, on a (Voy. les deux articles cités)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{PK \sin i}{I};$$

substituant dans la valeur de μ , on a donc

$$\mu = \frac{I'PK \sin i}{I}. \quad [2]$$

Cette formule peut être mise sous une autre forme en y introduisant la durée de l'oscillation du navire, laquelle est

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{PK}}, \text{ d'où } I = \frac{T^2 PK}{\pi^2};$$

il vient alors

$$\mu = \frac{I' \cdot \pi^2 \sin i}{T^2}, \quad [3]$$

et l'on voit que le moment qui tend à produire la rupture du mât est d'autant plus grand, toutes choses égales d'ailleurs, que la durée de l'oscillation est plus petite; aussi le tangage fatigue-t-il beaucoup plus la mâture que ne fait le roulis. La formule [1] suffit pour faire voir que c'est à la fin de l'oscillation, au moment où le navire va se relever, que le danger de rupture est le plus grand, car c'est à ce moment que l'accélération angulaire est la plus grande. Si à la poussée du fluide vient s'ajouter l'effet d'un coup de mer, le numérateur de l'expression [2] doit être remplacé par une quantité plus grande, et le danger de rupture augmente. Il augmente également par les variations brusques de vitesse du vent; mais lorsque la violence du vent dépasse une certaine limite, il n'y a d'autre ressource que de diminuer la voilure, ou même de serrer complètement les voiles, et l'on sent que cette circonstance ne saurait être soumise au calcul.

Les mâts sont ordinairement verticaux. Cependant, on donne souvent au mât d'artimon une inclinaison de 7 à 8 degrés vers l'arrière. Cette dispo-

sition rend le navire plus ardent (Voy. ÉVOLUTION, STABILITÉ SOUS VOILES); en même temps elle favorise l'action du vent sur le grand hunier quand on court grand largue ou vent arrière. On a voulu généraliser cette idée et incliner tous les mâts vers l'arrière; cette question est même encore débattue. Mais, d'une part, l'inclinaison du mât de misaine rend plus difficile la manœuvre qui consiste à virer de bord vent devant (Voy. ÉVOLUTION); d'un autre côté, l'établissement des mâts offre bien plus de garanties au point de vue de la solidité lorsqu'ils sont verticaux. (Voy. les Séances nautiques de M. de Bonnefoux.)

MÉCANIQUE (du mot grec μηχανή, machine), science qui traite du mouvement et de ses causes. Elle se divise en deux branches: 1° la *Mécanique rationnelle* ou *idéale*, qui n'emprunte à l'expérience qu'un petit nombre de principes, et qui, ne tenant aucun compte des propriétés physiques de la matière, fonde sur des considérations analytiques les lois abstraites du mouvement; 2° la *Mécanique appliquée* ou *réelle*, qui, prenant les corps tels qu'ils sont dans la nature, s'élève, par des méthodes le plus souvent élémentaires, aux principes généraux du mouvement et à leur application aux besoins de l'homme.

La **MÉCANIQUE APPLIQUÉE**, la seule dont il soit question dans cet ouvrage, comprend plusieurs divisions principales: la **CINÉMATIQUE**, qui étudie le mouvement indépendamment de ses causes; la **MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES**, applicable aux constructions et aux machines; l'**HYDRAULIQUE**, qui étudie le mouvement des eaux dans les canaux et rivières, ainsi que les machines où l'eau joue un rôle important; enfin, la **MÉCANIQUE DES GAZ**, applicable aux machines mues par le vent ou par la vapeur. Chacune de ces divisions principales comprend elle-même plusieurs grandes subdivisions; ainsi, dans la Mécanique des corps solides est comprise la **STATIQUE**, qui traite de l'équilibre des systèmes solides et de la stabilité des constructions; la **théorie de la RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX** fait également partie de la Mécanique des corps solides. L'**HYDROSTATIQUE**, qui traite de l'équilibre des fluides, sert d'introduction à l'hydraulique et à la Mécanique des gaz, etc., etc.

La Mécanique appliquée est une science toute moderne, qui n'est réellement constituée que depuis les travaux de M. Poncelet, de Coriolis et de M. Bélanger. On peut consulter sur cette matière: les Leçons de M. Poncelet à l'École d'artillerie de Metz; ses Leçons aux ouvriers de la même ville; la Mécanique des corps solides, de Coriolis; les Leçons de M. Bélanger à l'École des ponts et chaussées, à l'École polytechnique et à l'École centrale des arts et manufactures; les Leçons de Mécanique pratique de M. Morin, au Conservatoire des arts et métiers; les Leçons de Navier, à l'École des ponts et chaussées, et plusieurs autres ouvrages spéciaux qui sont cités dans ce dictionnaire à l'occasion des matières auxquelles ils se rapportent.

MÉDIOCRER, terme employé en construction navale dans le sens d'interpoler par des valeurs moyennes. *Médiocrer les équerrages*, c'est placer le manche de la fausse équerre dans une direction intermédiaire entre deux directions voisines, et ouvrir la lame sous un angle égal à la moyenne de

ceux qui répondent à ces deux directions. (Voy. CONSTRUCTION NAVALE, ÉQUERRAGES.)

MERCURE, l'une des planètes principales. Sa moyenne distance au soleil est 0,3870987, celle de la terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est de 87^d,9692578, et son moyen mouvement diurne est de 4° 5' 32", 4. Son orbite, dont l'excentricité est 0,20560478, est inclinée de 7° 0' 8" sur le plan de l'écliptique. Le diamètre de Mercure est 0,378, celui de la terre étant 1; il en résulte que son volume est exprimé par 0,054, celui de la terre étant pris pour unité. Sa masse est les 0,081 de celle de la terre, et sa densité est 1,501, celle de la terre étant prise pour unité. Densité 7,54; à peu près celle de la galène.)

Mercury tourne en 24^h 5^m, d'occident en orient, autour d'un axe qui fait un très-petit angle avec le plan de son orbite. Cette planète s'éloigne peu du soleil; ses digressions restent comprises entre 16° $\frac{1}{4}$ et 28° $\frac{3}{4}$ environ. Mercure a des phases analogues à celles de la lune (Voy. PHASES.) Cette planète passe quelquefois sur le disque du soleil et s'y projette alors sous la forme d'une tache noire parfaitement circulaire.

Cette planète est rarement visible à l'œil nu, à cause de sa proximité du soleil. On lui suppose une atmosphère; on a reconnu à sa surface des montagnes dont la plus grande hauteur a été évaluée à $\frac{1}{126}$ de son rayon. (Voy. PLANÈTES.)

Mercury est une des planètes dites *inférieures*, parce que sa distance au soleil est moindre que celle de la terre.

On représente cette planète par le signe ☿.

(Voy. l'Annuaire du Bureau des longitudes pour 1865.)

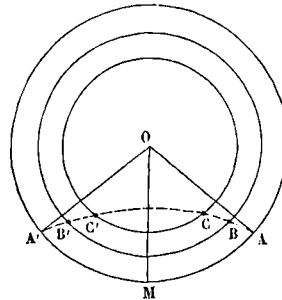
MÉRIDIEN CÉLESTE, grand cercle de la sphère céleste qui contient la verticale d'un lieu et l'axe du monde. Ce cercle est coupé par le plan de l'horizon en deux parties égales, dont l'une est le demi-méridien supérieur et l'autre le demi-méridien inférieur. C'est sur le méridien céleste que se comptent les DÉCLINAISONS (Voy. ce mot); et c'est dans le plan de ce cercle que se font les principales observations astronomiques

MÉRIDIEN TERRESTRE ou GÉOGRAPHIQUE, intersection de la surface du globe avec le plan du méridien céleste. Cette intersection est un cercle ou une ellipse, selon que l'on considère la terre comme une sphère ou comme un ellipsoïde de révolution. Dans ce dernier cas, le petit axe de l'ellipse méridienne est dirigé suivant la ligne des pôles et le grand axe est dans le plan de l'équateur (Voy. FIGURE DE LA TERRE). La terre n'étant pas rigoureusement une surface de révolution, il faut, si l'on a égard à cette circonstance, modifier la définition du méridien terrestre; c'est le lieu des points de la surface terrestre où la verticale est parallèle à un même méridien céleste, ou, si l'on veut, le lieu des points qui ont la même longitude géographique (Voy. LONGITUDE). Ce lieu est généralement une courbe à double courbure; mais, dans les applications à la géographie, il est permis de la regarder comme plane, attendu que l'erreur commise est insensible sur les cartes.

MÉRIDIENNE, trace du plan méridien sur le plan de l'horizon. Les astronomes déterminent le

plan du méridien au moyen de la LUNETTE MÉRIDienne (Voy. ce mot), lunette mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à son axe optique (Voy. AXE OPTIQUE). On observe avec cette lunette une étoile circumpolaire; et l'on fait varier au besoin la position de l'axe horizontal jusqu'à ce que le temps qui s'écoule entre le passage supérieur de l'étoile et son passage inférieur soit exactement le même qu'entre ce dernier passage et le passage supérieur suivant; quand cette condition est remplie, on peut être assuré que l'axe optique de la lunette se meut dans le plan du méridien, seul plan vertical qui jouisse de la propriété de couper en deux parties égales les parallèles décrits par les étoiles. Amenant ensuite l'axe optique dans une position horizontale, on peut faire planter des jalons dans sa direction; les pieds de ces jalons déterminent la méridienne.

On peut encore trouver la méridienne par le procédé suivant. On trace sur un plan horizontal plusieurs cercles concentriques; et au centre O de ces



cercles on plante un piquet vertical. On observe, avant midi, l'instant précis où l'extrémité de l'ombre OA du piquet vient rencontrer l'une des circonférences; et l'on observe, après midi, l'instant précis où l'ombre OA' vient de nouveau se terminer à la même circonférence. La déclinaison du soleil variant très-peu dans l'intervalle de quelques heures, on peut admettre que tout est symétrique par rapport au méridien, et que par conséquent la méridienne doit être la bissectrice de l'angle AOA' ou de l'arc AA'. Pour plus de sûreté, on opère de même à l'égard des diverses circonférences concentriques que l'on a tracées; une même droite OM doit être la bissectrice commune des arcs AA', BB', CC'; cette bissectrice est la méridienne cherchée.

La boussole de déclinaison fournit un moyen rapide et suffisamment approximatif de trouver la méridienne (Voy. ORIENTATION).

Dans les opérations faites en dehors des observations, et qui demandent cependant une certaine précision, on détermine la direction de la méridienne par la méthode des hauteurs correspondantes. On observe une étoile au théodolite quelque temps après son lever; et l'on marque par des jalons la trace du vertical de l'étoile au moment de l'observation. On observe la même étoile sans déplacer le théodolite, et en faisant simplement tourner le cercle vertical de l'instrument autour de son axe vertical, au moment où l'étoile, quelque temps avant son coucher, est revenue à la même hauteur au-dessus de l'horizon; et l'on marque de même

par des jaçons la trace du vertical de l'étoile au moment de cette seconde observation. La bissectrice de l'angle formé par les deux droites jalonnées est la direction de la méridienne. Ceci résulte évidemment de la symétrie du mouvement de l'étoile par rapport au plan du méridien.

Mais l'emploi de la LUNETTE MÉRIDIENNE fournit le moyen le plus précis de déterminer la direction du plan du méridien, et par conséquent la méridienne (Voy. AZIMUT).

MESSIDOR, le dixième mois du calendrier républicain. Il répondait à peu près à l'intervalle compris entre le 20 juin et le 20 juillet (Voy. CALENDRIER).

MESURE DE PRÉCISION D'UN RÉSULTAT MOYEN. Voy. POIDS.

MESURE DES FORCES. Pour mesurer les forces, on les compare aux poids, et l'unité de force est le kilogramme (Voy. FORCE). La comparaison peut souvent se faire directement au moyen des appareils appelés DYNAMOMÈTRES (Voy. ce mot); mais lorsque la nature des forces à mesurer rend cette comparaison directe impossible, on a recours à l'observation des mouvements produits par ces forces; et voici par quelle série de déductions on parvient à obtenir leur mesure.

On admet comme un principe expérimental que : si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, chacune d'elles obtient son effet comme si les autres n'existaient pas; c'est-à-dire que la vitesse initiale du mobile, et les vitesses que produiraient les forces si chacune d'elles était seule, coexistent, sans se modifier mutuellement. Il résulte de ce principe que si deux forces constantes, F et F' , agissent simultanément sur un même point matériel dans le sens de sa vitesse initiale, elles produiront une accélération résultante qui sera la somme de celles qu'elles eussent produites séparément. Car si sous l'action de la seule force F la vitesse se fût accrue de la quantité j dans l'unité de temps, et si sous l'action de la seule force F' elle se fût accrue de la quantité j' , sous l'action des deux forces réunies elle s'accroîtra de $j + j'$, en vertu du principe expérimental; l'accélération sera donc $j + j'$. Il en serait de même pour un nombre quelconque de forces.

On admet comme un axiome que deux forces de même direction et de même sens appliquées à un même point matériel s'ajoutent; c'est-à-dire qu'elles peuvent être remplacées par une force unique de même direction et de même sens que chacune d'elles, et ayant une intensité égale à la somme des intensités de ces deux forces. Cette vérité, qui peut d'ailleurs être vérifiée à l'aide du dynamomètre pour toutes les forces susceptibles d'être appliquées à cet instrument, et en particulier pour les poids, s'accorde, comme on voit, avec le principe expérimental ci-dessus énoncé, puisqu'en vertu de ce principe les effets des forces, c'est-à-dire les accélérations, s'ajoutent aussi. Généralement, autant de forces qu'on voudra, de même direction et de même sens, appliquées au même point matériel, s'ajoutent; c'est-à-dire qu'elles peuvent être remplacées par une force unique de même direction et de même sens que chacune d'elles, et ayant une intensité égale à la somme des intensités de toutes ces forces.

Cela posé, on démontre aisément que deux forces constantes quelconques sont entre elles comme les accélérations qu'elles imprimeraient à un même point matériel, si elles agissaient sur lui dans la direction de sa vitesse initiale. Soient, en effet, F et F' les deux forces dont il s'agit; soient j et j' les valeurs absolues des accélérations qu'elles feraient prendre à un même point matériel, en agissant sur lui d'une manière constante dans le sens de sa vitesse initiale ou en sens contraire. Supposons les deux forces F et F' commensurables; soit f une force égale à leur commune mesure, de telle sorte qu'on ait numériquement

$$F = nf \text{ et } F' = n'f, \quad [1]$$

n et n' étant des nombres entiers. Soit u l'accélération que la force f imprimerait au mobile si elle agissait seule d'une manière constante, dans la direction de la vitesse initiale. D'après ce qui a été dit plus haut, on pourra considérer l'accélération j comme la somme de n accélérations partielles égales à u et dues chacune à l'action d'une force égale à f . De même, on pourra regarder j' comme la somme de n' accélérations égales à u , et dues chacune à une force f . On aura donc

$$j = nu \text{ et } j' = n'u. \quad [2]$$

Des relations [1] et [2] on tire

$$F : F' = n : n' \text{ et } j : j' = n : n',$$

et, à cause du rapport commun,

$$F : F' = j : j'. \quad [3]$$

Le théorème se trouvant ainsi établi pour le cas où les deux forces F et F' ont une commune mesure f , que l'on peut supposer aussi petite qu'on voudra, il se trouve par cela même démontré pour le cas où les forces n'auraient qu'une commune mesure infiniment petite, c'est-à-dire où elles seraient incommensurables.

Si l'une des forces, F' par exemple, est le poids même du mobile, que nous désignerons par p , l'accélération j' devient l'accélération g due à la pesanteur (Voy. ACCELERATION) et l'on peut écrire

$$F : p = j : g, \text{ d'où } F = \frac{p}{g} j.$$

Le quotient $\frac{p}{g}$ du poids du mobile par l'accélération due à la pesanteur est ce qu'on nomme la MASSE du mobile (Voy. ce mot); en la désignant par m on a donc

$$F = m \cdot j, \quad [4]$$

c'est-à-dire que la mesure d'une force constante est le produit de la masse du point matériel sur lequel elle agit par l'accélération qu'elle lui imprime.

Cette formule permet de comparer entre elles des forces constantes qui agissent sur des points matériels différents; car si m et m' sont les masses des deux mobiles, F et F' les forces constantes qui agissent sur ces mobiles, et j et j' les accélérations qu'elles leur impriment, on aura

$$F = m \cdot j \text{ et } F' = m' \cdot j',$$

$$\text{d'où } \frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{j}{j'}, \quad [5]$$

c'est-à-dire que le rapport de deux forces constantes agissant sur des mobiles différents est égal au rapport des masses de ces mobiles multiplié par le rapport des accélérations qu'elles leur impriment.

Si les masses sont égales, on retombe, comme cela devait être, sur la relation [3].

Si les accélérations sont égales, les forces sont entre elles comme les masses.

Si deux forces égales agissent sur deux mobiles de masses m et m' et leur impriment des accélérations j et j' , on a

$$1 = \frac{m}{m'} \cdot \frac{j}{j'}, \text{ d'où } \frac{j}{j'} = \frac{m'}{m},$$

c'est-à-dire que les accélérations sont en raison inverse des masses.

On peut remarquer que, dans un même lieu du globe, la quantité g étant la même pour tous les corps, les masses sont proportionnelles aux poids, et que par conséquent, dans les énoncés ci-dessus, on pourrait substituer le rapport des poids à celui des masses.

Les relations qui précèdent n'ont été établies ci-dessus que pour des forces constantes. Mais, comme les raisonnements qui ont servi à les établir sont indépendants de la durée du mouvement, on peut toujours supposer cette durée assez petite pour que les forces puissent être regardées comme constantes en direction et en intensité. Dès lors les relations dont il s'agit sont applicables. Donc elles subsistent à chaque instant.

Toutefois il faut bien remarquer que dans le mouvement curviligne c'est l'accélération totale qu'il faut considérer, et non l'accélération tangentielle (Voy. ACCÉLÉRATION).

MÉTACENTRE, centre de courbure de la courbe décrite par le CENTRE DE CARÈNE (Voy. ce mot) lorsqu'un navire tourne autour d'un axe horizontal sans cesser de flotter. La considération du métacentre joue un rôle important dans l'étude de la stabilité de l'équilibre d'un navire, et en général d'un corps flottant quelconque. On donne le nom de *courbe métacentrique* à la projection, sur le latitudinal, du lieu des métacentres, c'est-à-dire à la développée du lieu des projections des centres de carène; et l'on nomme *premier métacentre* le sommet de cette développée, c'est-à-dire le métacentre correspondant au premier centre de carène, ou à la position normale du navire pour laquelle le longitudinal et le latitudinal (Voy. CONSTRUCTION NAVALE) sont tous deux verticaux. On appelle *premier métacentre latitudinal* celui qui répond au cas où le navire tend à tourner autour d'un axe horizontal tracé dans son plan de symétrie, et *premier métacentre longitudinal* celui qui répond au cas où le navire tend à tourner autour d'un axe perpendiculaire au longitudinal.

Nous considérerons d'abord le cas où le navire tourne autour d'une horizontale tracée dans le longitudinal, et perpendiculaire par conséquent au latitudinal; et nous admettons d'abord, pour simplifier, que, pendant le mouvement du navire, le centre de carène reste dans une même section perpendiculaire à la quille.

I. Soit ANB (fig. 1) cette section, et AB la ligne d'eau primitive. Supposons que le navire s'incline vers la droite par une cause quelconque; et, pour ne pas compliquer la figure, admettons que ce soit la ligne d'eau qui s'incline en sens contraire pour venir prendre la position A'B'. Le centre de carène, qui était primitivement en C, sera venu en un point C' plus rapproché de AB; car les volumes ANB et A'NB' ayant une partie commune A'NB, on passe de l'un à l'autre en supprimant le volume AOA' situé au-

dessous de AB, et en ajoutant le volume BOB' situé au-dessus de AB; le centre de gravité du volume déplacé a donc dû se rapprocher de AB. Si le navire continue à s'incliner vers la droite, ou si, ce qui

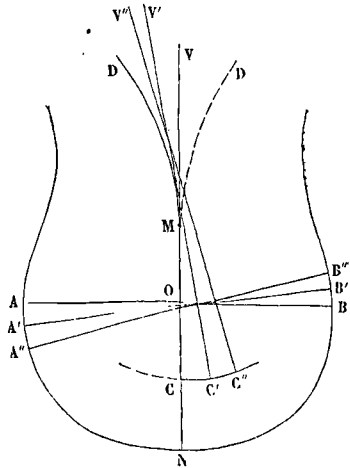


Fig. 1.

revient au même, la ligne d'eau continue à tourner en sens contraire pour venir prendre la position A''B'', le centre de carène vient en un point C'' plus rapproché de A'B'; on le démontrerait comme tout à l'heure. Il est facile de voir en même temps que C est aussi plus rapproché de A'B' que ne l'est C'; car si le navire revenait à sa position primitive, le volume A'NB' devrait être remplacé par ANB; et par conséquent, il faudrait substituer au volume BOB', situé au-dessous de A'B', le volume AOA', situé au-dessus; par conséquent, le centre de gravité se rapprocherait de A'B'. Il résulte de ce double raisonnement, qui peut être appliqué à tous les points de la courbe décrite par le centre de carène, que chaque point de cette courbe est le plus éloigné de la ligne d'eau qui lui correspond, et que par conséquent la tangente au point considéré est parallèle à cette ligne d'eau. Ainsi, la tangente en C, par exemple, serait parallèle à A'B'; la tangente en C'' serait parallèle à A''B'', et ainsi de suite. Si donc par les différents points de cette courbe on mène les droites qui deviennent successivement verticales, c'est-à-dire les droites CV, C'V', C''V'', etc., ces droites étant perpendiculaires aux lignes d'eau successives AB, A'B', A''B'', etc., seront normales au lieu des centres de carène, et détermineront par leurs intersections successives une courbe MD, symétrique par rapport à CV, qui sera la développée de CC'C''...; ce sera la courbe métacentrique; le point où chaque verticale touche cette courbe sera le métacentre correspondant au centre de carène par lequel a été menée cette verticale; le point M sera le premier métacentre.

En réalité, le centre de carène ne reste pas, pendant le mouvement de rotation du navire, dans une même section parallèle au latitudinal; cela tient à ce que les façons de la coque sont beaucoup plus déliées à l'arrière qu'à l'avant à partir de la flottaison; lors donc que le navire s'incline de plus

en plus vers un bord, les volumes qui s'immergent à l'avant sont sensiblement égaux à ceux qui émergent, tandis qu'à l'arrière les volumes qui s'immergent sont plus grands que ceux qui émergent; il en résulte que le centre de carène doit se rapprocher de l'arrière. Les verticales menées par ces points successifs ne sont donc plus dans un même plan. Mais ce que nous avons dit plus haut subsiste pour les projections de ces centres et des verticales correspondantes sur le latitudinal.

II. Supposons, en second lieu, que le navire tourne autour d'un axe perpendiculaire au longitudinal. En raison de la parfaite symétrie du navire par rapport à ce plan, le centre de carène y restera compris. On démontrera comme ci-dessus que la courbe, lieu de ces centres, jouit de la propriété que chacun de ses points est plus éloigné de la ligne d'eau correspondante que tous les autres points, et que par conséquent la tangente en un point quelconque de cette courbe est parallèle à la ligne d'eau qui correspond à ce point. Si donc on mène par ce point une verticale, ou du moins une droite qui doit devenir verticale quand ce point sera devenu centre de carène, cette droite, perpendiculaire à la ligne d'eau correspondante, sera normale à la courbe des centres de carène. L'intersection de ces normales successives déterminera la développée de cette courbe; ce sera la courbe métacentrique. Mais elle ne sera pas symétrique par rapport au latitudinal, attendu que les formes du navire diffèrent à l'avant et à l'arrière; à hauteur égale, les points de la branche avant s'éloignent plus rapidement de la verticale du sommet que les points de la branche arrière; et la courbe présente une forme analogue à celle de la figure 2.

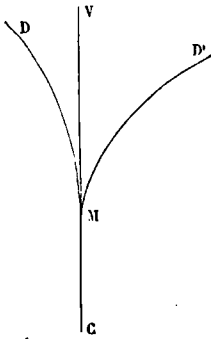


Fig. 2.

III. Il s'agit maintenant de déterminer la position du premier métacentre latitudinal. Pour y parvenir, on décompose le volume de la carène par des plans parallèles au latitudinal, en tranches très-minces, mais d'égal volume. Soit v ce volume commun, et e, e', e'', \dots , les épaisseurs des diverses tranches. Si n désigne leur nombre et V le volume immergé total, on aura $v = \frac{V}{n}$.

On suppose que le bâtiment s'incline d'un angle très-petit α . Soient AB et $A'B'$ (fig. 3) les positions successives de la ligne d'eau dans une des tranches considérées; c et c' les positions successives du centre de carène relatif à cette tranche; cV et $c'V'$

les verticales successivement menées par ces points, et qui se coupent en un point m . Ce point m sera le premier métacentre pour la tranche considérée. La méthode consiste à déterminer la distance cm

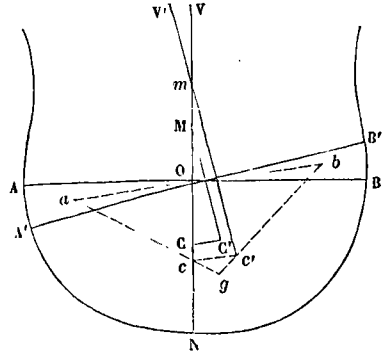


Fig. 3.

pour chaque tranche, et à démontrer ensuite que la moyenne de toutes les distances analogues est la distance du premier métacentre latitudinal cherché au-dessus du premier centre de la carène totale. Les volumes AOA' et BOB' , auxquels on donne le nom d'*onglets*, peuvent être considérés comme des prismes triangulaires égaux, dans lesquels on a sensiblement $OA' = OA$ et $OB' = OB$. Soient a et b leurs centres de gravité; si nous joignons Oa et Ob , ces deux droites se confondront avec la bissectrice des angles en O , et seront dans le prolongement l'une de l'autre. Soit g le centre de gravité de la partie commune $A'NB$; si l'on joint ga et gb , ces lignes devront passer respectivement par les points c et c' , et l'on aura

$$\frac{cg}{ac} = \frac{AOA'}{A'OB} \quad \text{et} \quad \frac{c'g}{bc'} = \frac{BOB'}{A'OB};$$

d'où résulte $\frac{cg}{ac} = \frac{c'g}{bc'}$.

Si donc on joint cc' , cette droite sera parallèle à ab ; et de ce parallélisme on conclut :

$$\frac{cc'}{ab} = \frac{cg}{ag} = \frac{AOA'}{ANB} = \frac{u}{v}, \quad [1]$$

en représentant par u le volume désigné par AOA' .

Or on a sensiblement $Oa = \frac{2}{3}OA$; d'où

$$ab = \frac{4}{3}OA;$$

on a ensuite $u = AOA'.e = \frac{1}{2}AO^2 \cdot \sin \alpha \cdot e$.

Substituant dans [1], on en tire

$$cc' = \frac{2}{3v} AO^2 \cdot \sin \alpha \cdot e,$$

ou $cc' = \frac{2}{3v} ey^2 \sin \alpha$, [2]

en désignant par y la demi-largeur de la ligne d'eau AB .

Si l'on prend la moyenne de toutes les quantités analogues, calculées pour les diverses tranches, on aura, en la désignant par δ ,

$$\delta = \frac{1}{n} \sum cc' = \frac{2 \sin \alpha}{3n} \sum ey^2. \quad [3]$$

Maintenant, remarquons que les poussées égales

exercées sur chaque tranche ont pour résultante la poussée totale. Soient C et C' les deux positions du centre de la carène totale; C'M la verticale menée par la seconde de ces positions, et qui rencontre CV au métacentre cherché M. Si l'on prend les moments des poussées partielles et de la poussée totale par rapport au longitudinal, les distances des points d'application de ces forces à ce plan seront CC' pour la résultante, et cc', et les quantités analogues, pour les composantes; car ces droites sont sensiblement perpendiculaires au longitudinal; on aura donc

$$nv \cdot CC' = v \Sigma cc', \text{ d'où } CC' = \frac{1}{n} \Sigma cc' = \delta.$$

Mais le triangle MCC' donne

$$MC = CC' \cdot \cot \alpha;$$

on a donc, en mettant pour CC' ou δ sa valeur,

$$MC = \frac{2 \cos \alpha}{3nv} \Sigma ey^2 = \frac{2 \cos \alpha \cdot \Sigma ey^2}{3V},$$

ou simplement $MC = \frac{2 \Sigma ey^2}{3V},$ [4]

attendu que, α étant très-petit, son cosinus peut être remplacé par l'unité.

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que l'expression [4] peut s'écrire

$$MC = \frac{\Sigma 2ey \cdot \frac{1}{3}y^2}{V}.$$

Sous cette forme, on voit que le numérateur représente le MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot) de l'aire de la ligne d'eau AB par rapport à son axe de symétrie projeté en O. En nommant I ce moment d'inertie, on a donc la relation très-simple

$$MC = \frac{I}{V}. \quad [4 \text{ bis}]$$

Cette relation, à laquelle nous sommes parvenus par une méthode élémentaire, se démontre d'une manière générale à l'aide du calcul infinitésimal, dans les traités de Mécanique rationnelle. (Voy. le Cours de Mécanique rationnelle de M. Duhamel, tome II.)

Pour exécuter le calcul, on remarquera que, lorsque les épaisseurs inégales e tendent toutes vers zéro, la quantité Σey^2 tend vers l'aire de la courbe qui aurait pour ordonnées les cubes des ordonnées de la ligne d'eau, aire dont l'expression exacte serait

$$\int_0^L y^3 dL,$$

en désignant par L la longueur de l'axe longitudinal de la ligne d'eau. On aura une valeur de cette aire, plus approchée que Σey^2 , en calculant l'intégrale ci-dessus par la formule de Th. Simpson. Pour cela on divisera la longueur L en un nombre pair $2n$ de parties égales; on mènera des ordonnées par les points de division; et, en les désignant par $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n+1}$, on aura pour la valeur de l'aire cherchée

$$\frac{L}{3n} [y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + \dots + y_{2n+1}^3].$$

On doublera et l'on divisera par $3V$; on aura ainsi la hauteur du premier métacentre latitudinal au-dessus du premier centre de carène.

IV. Le premier métacentre longitudinal se détermine par la même méthode, sauf les différences que nous allons signaler. En premier lieu, les deux lignes

d'eau consécutives AB et A'B' (fig. 4) se couperont plus mutuellement en deux parties égales; mais leur intersection passera par leur centre de gravité. Soient en effet I et H les centres de gra-

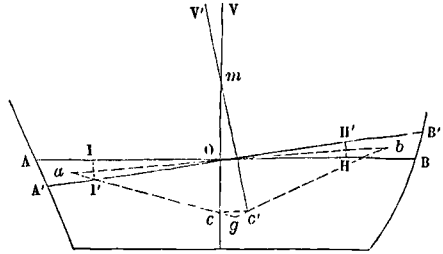


Fig. 4.

tivité des deux parties de la ligne d'eau AB. D'après le THÉOREME DE GULDIN (Voy. ce mot) le volume de l'onglet AOA' sera sensiblement égal au produit de la surface AO, que nous nommerons S, par l'arc II' qu'a décrit son centre de gravité; il en sera de même pour l'onglet BOB'; en nommant donc S' la surface BO, on aura

$$S \cdot 2\pi IO \cdot \frac{\alpha}{360} = S' \cdot 2\pi OH \cdot \frac{\alpha}{360},$$

puisque, le volume immergé total restant le même, les volumes des deux onglets doivent être les mêmes. Cette relation simplifiée peut s'écrire

$$S \cdot IO = S' \cdot OH,$$

et signifie que les moments des surfaces S et S' par rapport à l'axe O sont égaux; ce qui montre que le centre de gravité de la surface totale AB est sur l'axe horizontal projeté en O. — En second lieu, la décomposition en prismes élémentaires devra se faire par des plans parallèles au longitudinal. Nous nommerons y les lignes telles que OB, et x les lignes telles que AO. Les droites Oa et Ob ne seront plus les bissectrices des angles en O; ce seront les médianes des triangles AOA' et BCB'; mais l'angle α étant très-petit, on pourra admettre encore que ces lignes sont dans le prolongement l'une de l'autre. Seulement, il faudra écrire

$$ab = \frac{2}{3} (OB + OA) = \frac{2}{3} (y + x).$$

Si c'est l'avant qui plonge, comme la figure l'indique, l'expression $\frac{1}{2} OA^2 \cdot \sin \alpha \cdot e$ sera un peu plus grande que le volume du premier onglet; mais l'expression $\frac{1}{2} OB^2 \sin \alpha \cdot e$ serait un peu moindre que le volume du second; on compensera sensiblement les deux erreurs en prenant pour le volume u la moyenne

$$\frac{1}{4} e \sin \alpha (y^2 + x^2).$$

A l'aide de ces modifications, la formule [1] sera remplacée par

$$cc' = \frac{e \sin \alpha (y + x) (y^2 + x^2)}{2 \cdot 3 \cdot v}; \quad [5]$$

et, par suite, la valeur de MC sera donnée par l'expression

$$MC = \frac{\Sigma e (y + x) (y^2 + x^2)}{6V}, \quad [6]$$

que l'on calculera comme on l'a expliqué pour la formule [4].

V. Dans la THÉORIE DU NAVIRE (*Voy.* ce mot) on ne considère que le métacentre latitudinal et le métacentre longitudinal. Mais s'il s'agissait d'un corps flottant quelconque, on pourrait considérer autant de métacentres que d'axes horizontaux autour desquels le corps serait supposé tourner en s'inclinant sans cesser de flotter. Toutes les fois que le corps est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe horizontal de rotation, la courbe des centres de poussée est dans ce plan, sa développée est la courbe métacentrique relative à cet axe, et son sommet est le premier métacentre correspondant. Si cela a lieu pour tous les axes horizontaux autour desquels on peut supposer que l'inclinaison s'effectue, les courbes métacentriques forment une surface métacentrique; et le sommet de cette surface sera le seul premier métacentre à considérer. C'est ce qui arrive dans le cas où le corps flottant est terminé par une surface de révolution dont l'axe est vertical. — Il peut arriver qu'il n'y ait pas de métacentre correspondant à un axe horizontal déterminé; c'est ce qui a lieu pour un cylindre flottant dont l'axe est horizontal, qu'il soit homogène, ou lesté d'une manière uniforme parallèlement à une génératrice; quelque position que le cylindre prenne en tournant d'une petite quantité autour de son axe, le centre de poussée reste à la même place, et il n'y a ni courbe des centres de poussée ni courbe métacentrique. Il n'y en aurait que si le cylindre s'inclinait en tournant autour d'une horizontale perpendiculaire à son axe. Il peut même arriver qu'il n'y ait aucun métacentre; c'est ce qui a lieu pour une sphère flottante, homogène ou lestée; quelque position qu'elle prenne en tournant d'une petite quantité autour d'un axe horizontal quelconque, le centre de poussée reste immobile; et il n'y a ni courbes des centres de poussée, ni métacentre. (*Voy.* le *Traité du navire* de Bouguer, la *Théorie du navire* du marquis de Poterat, le *Cours de Mécanique* de M. Bélanger, le *cours de Construction navale* de l'école de Brest, etc.)

MÉTAUX PRÉCIEUX (COMMERCE DES). Les matières d'or et d'argent forment une espèce de marchandise, dont la valeur intrinsèque demeure invariable et peut toujours être réalisée, soit par un dépôt à la banque, soit par un transport à l'hôtel des monnaies. Néanmoins leur valeur commerciale est susceptible d'éprouver des variations, comme celle des autres marchandises, en raison de leur abondance ou de leur rareté; et ces variations donnent lieu à des opérations de CHANGE (*Voy.* ce mot) qui peuvent devenir une source de bénéfices pour les banquiers qui s'y livrent.

D'après le tarif du 1^{er} avril 1854, la valeur du kilogramme d'or en barres à 1000 millièmes a été fixé à 3437 fr., déduction faite des frais de fabrication. Mais celui qui change cet or contre une autre monnaie a droit à une prime variable, qui s'évalue à tant pour 1000 fr. Le prix du kilogramme d'argent à 1000 millièmes a été fixé à 220^{fr},555 d'après le même tarif; mais l'argent en barres se vend, comme l'or, moyennant une prime qui s'évalue à tant pour 1000 fr.; cette prime est beaucoup plus considérable pour l'argent que pour l'or.

Quant aux monnaies étrangères d'or et d'argent, quoique leur titre et leur valeur aient été fixés par le tarif cité plus haut, elles se payent plus ou moins

cher suivant leur rareté ou leur abondance, et sont sujettes, comme les autres marchandises, à un cours qui se publie à la Bourse et dans les journaux.

Quelques exemples feront comprendre le genre de questions auxquelles donne lieu le change des métaux précieux.

I. *Que vaut un lingot d'or à 900 millièmes, du poids de 2^{fr},531, la prime étant de 2 fr. pour 1000 fr.?*

La valeur du kilogramme d'or au titre des monnaies françaises est de 3093^{fr},30, déduction faite des frais de fabrication. La valeur du lingot dont il s'agit est donc, d'après le tarif, 3093^{fr},30 × 2,531, ou..... 7829^{fr},14
Ajoutant les 2 millièmes, ou..... 15,66

on obtient pour la valeur demandée..... 7844^{fr},80

II. *Que vaut un lingot d'argent du poids de 6^{fr},837, au titre des monnaies françaises, la prime étant de 19^{fr},50 par 1000 fr.?*

La valeur du kilogramme d'argent au titre des monnaies est de 198^{fr},50, réduction faite des frais de fabrication. La valeur du lingot est donc, d'après le tarif, de 198^{fr},50 × 6,837, ou..... 1357^{fr},14

Il faut y ajouter le produit du millième de cette somme, ou de 1^{fr},35714 par 19,5, c'est-à-dire..... 26 46

La valeur demandée est donc au total. 1383^{fr},60

III. *On vend, avec prime de 2 fr. par 1000 fr., un lingot d'or à 916 millièmes, du poids de 2^{fr},950; et, avec le produit de cette vente, on achète des ducats de Hollande au cours de 11^{fr},80; combien aura-t-on de ducats?*

Il faut d'abord calculer la valeur du lingot. La valeur du kilogramme d'or à 916 millièmes est $\frac{3093^{\text{fr}},3 \times 916}{900}$, ou 3437^{fr} × 0,916,

la valeur des 2^{fr},950 sera donc 3437^{fr} × 0,916 × 2,95, ou..... 9287^{fr},46
à quoi il faut ajouter les 2 millièmes de prime, ou..... 18 57

Total..... 9306^{fr},03

Pour obtenir le nombre de ducats demandé, il reste à diviser cette somme par 11^{fr},80, ce qui donne 788,1 ou, en nombre entier, 788 ducats.

IV. *On vend, à 19^{fr},75 de prime, un lingot d'argent au titre de 920 millièmes; et, avec le produit de la vente, on achète 500 piastres mexicaines à 5^{fr},55; on demande le poids total du lingot?*

Les 500 piastres à 5^{fr},55 valent..... 2775^{fr}

Mais ce prix est celui du lingot, augmenté de 19,75 par 1000, ou, ce qui revient au même, multiplié par 1,01975; il faut donc diviser 2775 fr. par 1,01975 pour avoir la valeur intrinsèque du lingot; on trouve 2721^{fr},255. Or, la valeur du kilogramme d'argent au titre de 0,920 est $\frac{198^{\text{fr}},50 \times 920}{900}$ ou

2029^{fr},11. On aura donc le poids total du lingot en divisant 2721^{fr},255 par 2029^{fr},11, ce qui donne 1^{fr},34110, ou à très-peu près 1^{fr},341.

V. *Un banquier vend (à 2 fr. par 1000 fr. de prime) un lingot d'or de 4 kilogrammes au titre des monnaies françaises, et achète 492 souverains d'Angleterre au cours de 25^{fr},20, en complétant la somme nécessaire.*

Un mois après, les souverains étant à 25^{fr},35 et

les quadruples d'Espagne à 84',90, il vend ses souverains et achète 147 quadruples, en complétant encore la somme nécessaire.

Un mois après, les quadruples étant à 85',60 et les ducats de Hollande à 11',70, il vend ses quadruples et achète 1076 ducats, en complétant toujours la somme nécessaire.

Enfin, un mois après, les ducats de Hollande étant à 11',85, il revend ses ducats et rachète son lingot (à 2 pour 1000 de prime).

On demande ce qu'il a gagné à ces opérations, et à quel taux il a placé son argent.

La valeur du lingot, au change des monnaies, est de 4 fois 3093',30, c'est-à-dire..... 12373',20
En y ajoutant 2 pour 1000, ou..... 24 75

on obtient pour le prix de vente de ce lingot..... 12397',95

Les 492 souverains à 25',20, valent... 12398 40
il a donc fallu ajouter..... 0 45

Les souverains ayant monté de 0',15, leur valeur totale a augmenté de 492 fois 0',15, ou de..... 73',80

Cette valeur totale est donc devenue... 12472 20
Les 147 quadruples à 84',90 valent.... 12480 30

il a donc fallu ajouter la différence..... 8 10

Les quadruples ayant monté de 0',70, leur valeur totale a augmenté de 147 fois 0',70 ou de 102',90

Cette valeur totale est donc devenue... 12583 20
Les 1076 ducats à 11',70 valent..... 12589 20

il a donc fallu ajouter..... 6 00

Les ducats ayant monté de 0',15, leur valeur totale s'est accrue de 1076 fois 0',15 ou de 161',40

Cette valeur totale est donc devenue... 12750',60
Si on retranche le prix de vente du lingot, y compris la prime de 2 pour 1000, soit..... 12397 95

on obtient le bénéfice total..... 352',65

Ce bénéfice doit être rapporté à la somme totale engagée, laquelle se compose de la valeur intrinsèque du lingot, ou 12 373',20 et des sommes successivement ajoutées pour parfaire les paiements à chaque opération, savoir, 0',45, puis 8',10, puis 6 fr.; en tout 12 387',75. On obtiendra donc le bénéfice pour 100 en multipliant 352',65 par 100 et divisant par 12 387',75, ce qui donne 2,8467. Mais ce résultat se rapporte à la durée de l'opération qui a été de 3 mois; pour l'année, il serait 4 fois plus considérable, c'est-à-dire de 11,3868, ou un peu moins de 11,4 pour 100.

A la rigueur, il faudrait tenir compte du temps que chacune des sommes de 0',45, de 8',10, ou de 6 fr. est restée engagée; mais ces sommes sont trop faibles, eu égard à la valeur totale engagée, pour qu'il soit nécessaire de tenir compte de la différence.

MÉTHODE DE DELAMBRE POUR LA RÉOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES PEU COURBES. Méthode employée par Delambre dans le calcul de la méridienne. et adoptée pendant quelque temps au Dépôt de la guerre. Elle consiste à substituer aux triangles sphériques les triangles rectilignes formés par les cordes qui sous-tendent les côtés.— Pour cela, il faut d'abord savoir passer des côtés à leurs cordes, et *vice versa*. Soit a la longueur d'un côté, a' sa corde, Δ la longueur moyenne du degré dans le lieu où l'on opère [Voy. DEGRÉ (Longueur du)];

l'expression du côté considéré en degrés sera $\frac{a}{\Delta}$.

Désignons ce quotient par α ; et soit R le rayon moyen de la terre, si on la considère comme sphérique, ou, dans le cas contraire, le rayon de la sphère osculatrice à l'ELLIPSOÏDE TERRESTRE (Voy. ce mot), à l'extrémité du côté considéré, c'est-à-dire la grande normale à l'ellipse méridienne en ce point, dont la latitude est supposée connue. On aura

$$a' = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Si, par exemple, on prend pour Δ la longueur moyenne du degré en France, c'est-à-dire 111134^m, et qu'on ait $a = 25930^m$, on trouvera d'abord $\alpha = 0^\circ 13' 59''$,95 ou à très-peu près 14'; et si l'on prend pour R le rayon moyen du globe, ou 6366198^m, on trouvera $a' = 2.6636198^m \cdot \sin 7'$ ou $a' = 25925^m$,92. Réciproquement, si a' et R étaient connus, on aurait d'abord $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{a'}{2R}$, ce qui ferait connaître α ; puis $a = \Delta \alpha$, ce qui donnerait la longueur du côté a .

Mais le côté considéré étant toujours très-petit par rapport à R , on fait ces calculs d'une manière plus expéditive en calculant la différence entre l'arc et sa corde. Si, au lieu de rapporter l'arc α au degré,

on le rapporte au rayon, son expression est $\frac{\alpha}{R}$, et

l'on a

$$a' = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2R} = 2R \left(\frac{\alpha}{2R} - \frac{\alpha^3}{48R^3} + \dots \right);$$

et, en négligeant les puissances de $\frac{\alpha}{R}$ supérieures à la quatrième, il vient

$$a' = a - \frac{a^3}{24R^2}, \text{ d'où } a - a' = \frac{a^3}{24R^2}.$$

Ainsi, la différence entre le côté a et sa corde a' pour expression

$$\frac{a^3}{24R^2},$$

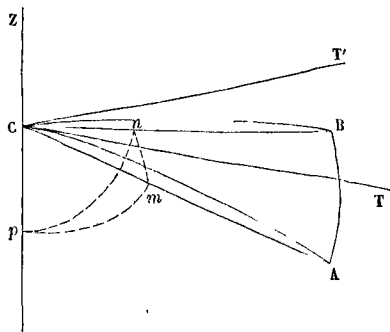
ce qui permet de calculer aisément la corde quand le côté a est connu. Si c'est a' qui est donné, on aura

$$a = a' + \frac{a'^3}{24R^2},$$

ou, en mettant pour a , dans le second membre, sa valeur approchée a' ,

$$a - a' = \frac{a'^3}{24R^2}.$$

Il faut, en second lieu, pouvoir de l'angle de deux



côtés du triangle sphérique déduire l'angle de leurs cordes, et *vice versa*. Soit ABC le triangle sphérique,

α, b, c ses côtés opposés aux angles A, B, C. Menons les cordes AB, AC, BC. Soient CT et CT' les tangentes à CA et à CB menées par le point C; soit CZ la verticale. Du point C comme centre, avec l'unité pour rayon, décrivons les arcs de cercle mn, mp et np ; ces arcs formeront un triangle sphérique dans lequel l'angle en p , mesuré par l'angle rectiligne TCT', n'est autre chose que l'angle C du triangle proposé; et mn est l'arc qui mesure l'angle ACB du triangle rectiligne. Il s'agit de déduire l'un de ces angles de l'autre. Or, CT' étant tangent à CB en C, l'angle T'CB est la moitié du nombre de degrés qui mesure le côté CB ou a ; si α désigne ce nombre de degrés, on a T'CB = $\frac{1}{2}\alpha$. De même, si β désigne le nombre de degrés du côté CA ou b , on a TCA = $\frac{1}{2}\beta$. Mais $np = 90^\circ - T'CB$, et $mp = 90^\circ - TCA$; donc $np = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, et $mp = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$.

Dans le triangle sphérique mnp , si on suppose l'angle en β connu, on connaîtra donc deux côtés et l'angle compris, et l'on pourra en déduire le troisième côté mn ; si, au contraire, ce troisième côté est connu, on pourra calculer l'angle en p . Ainsi, le problème est ramené à la résolution d'un triangle sphérique. Mais il est plus simple de remarquer qu'en appelant x ce qu'il faut ajouter à l'angle ACB pour obtenir l'angle TCT', cette correction sera donnée par la formule de la RÉDUCTION À L'HORIZON (Voy. ce mot), en y mettant pour T'CB et TCA leurs valeurs $\frac{1}{2}\alpha$ et $\frac{1}{2}\beta$. Par conséquent, si l'on appelle x ce qu'il faut ajouter algébriquement à l'angle T'CB pour obtenir l'angle ACB des cordes, on n'aura qu'à changer le signe de x dans la formule citée, qui devient ainsi :

$$x = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}C - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \operatorname{cot} \frac{1}{2}C \right]$$

Pour appliquer la méthode de Delambre, on substitue d'abord à la base mesurée (Voy. ce mot), et réduite au niveau de la mer, la longueur de la droite qui joint ses extrémités. Dans le premier triangle, on connaît alors un côté et les deux angles adjacents; on substitue à ce triangle le triangle des cordes; on calcule les éléments inconnus de ce triangle rectiligne, et l'on en conclut les éléments inconnus du triangle sphérique correspondant. On continue ainsi de proche en proche, en remplaçant toujours les triangles sphériques par les triangles rectilignes que forment les cordes, c'est-à-dire en substituant à la surface de la terre un polyèdre inscrit. — La somme des angles des triangles formés par les cordes devrait toujours être égale à 180° ; il n'en est jamais rigoureusement ainsi; la différence, que l'on appelle quelquefois l'excès sphérique de Delambre pour la distinguer de l'excès sphérique qui figure dans le THÉORÈME DE LEGENDRE (Voy. ces mots), se partage également entre les trois angles, conformément aux règles du calcul des probabilités, à moins qu'on n'ait des raisons pour accorder moins de confiance à la mesure ou au calcul de l'un des angles qu'aux autres, auquel cas on fait porter toute la différence sur l'angle douteux.

MÉTHODE DE ROBERVAL. On désigne particulièrement sous ce nom une méthode pour mener

les tangentes aux courbes, que Roberval a déduite de la considération des vitesses simultanées. Toutes les fois qu'une courbe peut être considérée comme décrite par un point animé de deux vitesses simultanées, ou, ce qui revient au même, d'une vitesse relative par rapport à un système animé lui-même d'une vitesse d'entraînement, la vitesse absolue résultant de ces deux vitesses a la direction que suit réellement le mobile dans l'espace, c'est-à-dire la direction de la tangente à la trajectoire. Il en résulte que la direction de la tangente peut se déduire de la COMPOSITION DES VITESSES (Voy. ce mot).

Considérons, par exemple, une spirale d'Archimède AMB (fig. 1). On peut la considérer comme

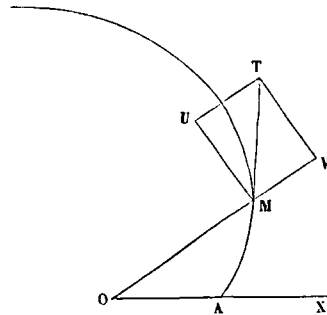


Fig. 1.

décrite par un point qui se meut d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur OM, tandis que ce rayon tourne lui-même uniformément autour du pôle O. Soit v la vitesse suivant le rayon vecteur, représentée par MV; soit ω la vitesse angulaire de ce rayon, la vitesse d'entraînement du mobile sera $\rho\omega$, en appelant ρ le rayon OM; représentons par MU cette vitesse. Sur MV et MU, construisons le rectangle MVTU; la direction MT sera celle de la tangente en M.

On en déduit, en effet, pour la tangente de l'angle TMV,

$$\operatorname{tang} TMV = \frac{\omega\rho}{v}.$$

Or, d'après la définition de la courbe, on a, en appelant α l'angle MOX et désignant par t un temps quelconque,

$$\rho = vt \text{ et } \alpha = \omega t, \text{ d'où } \rho = \frac{v}{\omega}\alpha;$$

et par conséquent $\rho' = \frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{v}{\omega}$;

et, d'après les propriétés connues de la tangente à une courbe en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tang} TMV = \frac{\rho}{\rho'} = \alpha = \frac{\omega\rho}{v},$$

comme ci-dessus, ce qui justifie la construction.

Considérons encore l'ellipse, dont les foyers sont F et F' (fig. 2). La courbe peut être considérée comme décrite par un mobile qui se déplace sur le rayon vecteur, tandis que ce rayon vecteur tourne autour du foyer. Considérons un point quelconque M de la courbe; joignons MF et MF'. Soit v la vitesse du mobile, à l'instant considéré, dans le sens du rayon F'M, et u sa vitesse d'entraînement qui est perpendiculaire à F'M. Si MV représente v , la vitesse

résultante sera représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont MV est un côté et dont l'angle droit est en V . Mais la courbe peut aussi être regardée comme décrite par un mobile qui parcourt

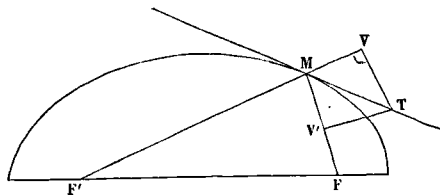


Fig. 2.

le rayon FM , tandis que celui-ci tourne autour du point F ; la vitesse suivant le rayon sera $MV' = v$, attendu que le mobile avance sur l'un des rayons vecteurs d'une quantité égale à celle dont il rétrograde sur l'autre; la vitesse résultante peut donc aussi être représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont MV est un des côtés de l'angle droit, et dont l'angle droit est en V . Ces deux manières de concevoir le mouvement qui décrit la courbe devant donner le même résultat, il faut que la vitesse résultante passe par le point d'intersection T des perpendiculaires élevées en V et V' sur les deux rayons vecteurs. La tangente en M est donc la droite MT . Or les deux triangles MVT , $MV'T$ ayant l'hypoténuse commune et un côté de l'angle droit égal, $MV = MV'$, ces triangles sont égaux, et par conséquent les angles en M sont égaux. Ainsi la tangente divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre, ce qui est bien la propriété connue de la tangente à l'ellipse.

Cette méthode est féconde; mais elle pourrait induire en erreur si l'on ne se rendait pas bien compte des vitesses simultanées. Nous ferons remarquer, à propos de l'ellipse, par exemple, que si l'on voulait composer les deux vitesses MV et MV' , on arriverait à un résultat exact, par un raisonnement inexact; le mobile, en effet, ne saurait être considéré comme animé des vitesses MV et MV' à la fois. Il est animé de l'une d'elles, combinée avec une vitesse d'entraînement due à la rotation du rayon vecteur que l'on considère. M. Duhamel a depuis longtemps signalé l'erreur commise à cet égard par quelques auteurs.

On trouvera la méthode de Roberval exposée dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* antérieures à 1699.

MÉTHODE DIRECTE. Voy. COMPTES COURANTS.

MÉTHODE HAMBOURGEOISE. Voy. COMPTES COURANTS.

MÉTHODE RÉTROGRADE. Voy. COMPTES COURANTS.

MÉTOPES, portions de la frise de l'ordre dorique comprises entre deux triglyphes. Cet espace est toujours carré, attendu que sa largeur est égale à la hauteur de la frise, c'est-à-dire à 1 module $\frac{1}{2}$. Les métopes sont ordinairement ornées de figures d'animaux, de trophées, etc.

MÈTRE (du grec μέτρον, mesure), unité de longueur qui sert de base, en France, au système légal des poids et mesures, et qui a été adoptée en Suisse,

en Piémont, en Belgique, dans le Luxembourg, en Espagne, en Sardaigne, en Grèce, etc. Un décret de l'Assemblée constituante, en date du 8 mai 1790, avait chargé l'Académie des sciences d'organiser un nouveau système de poids et mesures. La commission nommée par l'Académie résolut de rattacher l'unité de longueur aux dimensions du globe terrestre, et chargea Delambre et Méchain de mesurer l'arc de méridien qui va de Dunkerque à Barcelone. Ces astronomes trouvèrent pour la longueur du quart du méridien, déduite de leurs travaux et des mesures précédemment effectuées au Pérou et en Laponie (*Voy. FIGURE DE LA TERRE*), le nombre 5130740 toises, dont la dix-millionième partie, c'est-à-dire $0^{\text{T}}, 513074$ ou $3^{\text{P}} \text{eeds } 0^{\text{p}} \text{ouces } 11^{\text{Lignes}}, 296$, fut adoptée pour unité de longueur sous le nom de *mètre* par une loi du 18 germinal an III (7 avril 1795).

L'étalon prototype en platine, qui donne la longueur légale du mètre à la température *zéro*, a été déposé aux Archives le 4 messidor an VII (22 juin 1799).

Pour calculer la longueur du quart du méridien, il faut, dans la formule [4] exposée à l'article *FIGURE DE LA TERRE*, faire $l = 0$ et $V = 90^{\circ}$, ce qui donne, en nommant Q la longueur cherchée,

$$Q = a \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 - e^2 \right) \left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \dots \right),$$

formule où a représente le rayon équatorial et e l'excentricité de l'ellipse méridienne. — Le nombre

$\frac{1}{334}$, adopté par la commission des poids et mesures

pour la valeur de l'*aplatissement* (*Voy. ce mot*), et duquel on déduit la valeur de e^2 , est notablement trop faible. M. Puissant, en vérifiant les calculs de la méridienne, prolongée par MM. Biot et Arago jusqu'à l'île de Formentera, l'une des Baléares, reconnut que la valeur attribuée à l'arc compris entre Montjoux et Formentera était trop courte de 69^{T} , par suite d'une légère erreur commise par Méchain.

En 1841, M. Bessel, en discutant toutes les mesures effectuées, a été conduit à admettre pour la longueur du quart du méridien le nombre 5131180^{T} , avec une erreur possible de 256^{T} en plus ou en moins, ce qui donnerait, pour la valeur du mètre, $0^{\text{T}}, 513118$ ou $3^{\text{P}} - 0^{\text{p}} - 11^{\text{Lignes}}, 344$, c'est-à-dire $0^{\text{T}}, 038$ de plus que la longueur adoptée par la commission des poids et mesures. — Une si faible différence ne mérite pas qu'on revienne sur le grand travail accompli par les savants français. Il suffirait d'ailleurs, pour y avoir égard, de prendre l'étalon de platine déposé à l'Observatoire comme la longueur légale du mètre, non plus à la température de la glace fondante, mais à $+ 0^{\circ}, 1$. En effet, le coefficient de dilatation du platine étant, d'après Borda, $0,00085655$, l'étalon qui à zéro a une longueur de $0^{\text{T}}, 513074$, aurait à la température de $0^{\circ}, 1$ une longueur exprimée par

$$0^{\text{T}}, 513074 (1 + 0,1 \cdot 0,00085655).$$

En effectuant le calcul, on trouve $0^{\text{T}}, 513117947\dots$, valeur qui diffère à peine du nombre donné par M. Bessel.

Le mètre a des multiples et des sous-multiples. Ses multiples sont :

Le <i>décamètre</i>	qui vaut	10 mètres.
Le <i>hectomètre</i>	—	100 —
Le <i>kilomètre</i>	—	1000 —
Le <i>myriamètre</i>	—	10000 —

Les deux premiers sont employés dans l'arpentage et la topographie; les deux derniers s'appliquent aux mesures itinéraires.

Les sous-multiples du mètre sont :

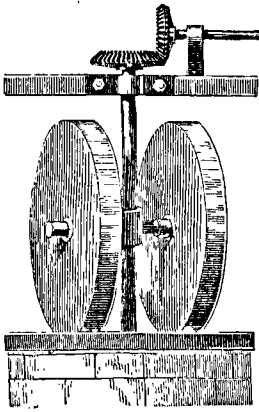
Le décimètre qui vaut un dixième de mètre.

Le centimètre — un centième —

Le millimètre — un millième —

Une longueur contenant des multiples ou des sous-multiples du mètre s'exprime immédiatement sous la forme d'un nombre décimal, puisque les diverses unités sont de 10 en 10 fois plus grandes ou plus petites. Ainsi, une longueur de 7 décimètres 3 mètres 4 décimètres et 5 centimètres, s'écrira $7^D, 345 - 73^m, 45 - 734^D, 5$ ou 7345^c , suivant que l'on prendra pour unité principale le décimètre, le mètre, le décimètre ou le centimètre (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE).

MEULES VERTICALES, appareil employé pour l'oyer soit les matières oléagineuses, soit les ma-



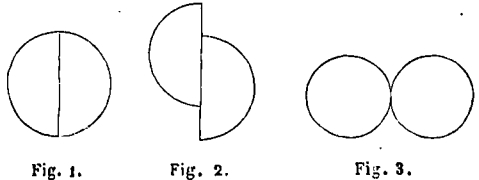
tières calcaires qui entrent dans la composition des ciments. Les meules roulent sur une aire plane en fonte ou en pierre. Leur axe commun est fixé perpendiculairement à un arbre vertical qui reçoit le mouvement du moteur. Mais la liaison de cet arbre avec l'axe des meules n'est pas rigide; elle se fait par une sorte de genou qui permet à la meule de se soulever quand elle rencontre un obstacle.

Quelquefois, notamment dans la fabrication des mortiers, on emploie pour moteur un cheval; on applique alors ce moteur non plus à l'axe vertical, mais à l'axe des meules, qui se prolonge à cet effet sous la forme d'une barre de manège.

MEZZANINE, fenêtre dont la hauteur est égale ou même inférieure à la largeur. Ce genre de baie se pratique dans les entre-sols et dans les étages en attique (Voy. FENÊTRE).

Le **MICROMÈTRE** (de μικρός, petit, et μέτρον, mesure), nom donné à divers appareils qui servent à mesurer de très-petites longueurs. Dans les lunettes destinées aux observations astronomiques, le micromètre se compose ordinairement de deux fils parallèles, dont l'un est fixe et l'autre porté sur un châssis qu'on fait mouvoir au moyen d'une vis micrométrique (Voy. ce mot); ce micromètre sert à mesurer les diamètres apparents des astres. On emploie aussi pour le même objet le **MICROMÈTRE À DOUBLE IMAGE** ou **HÉLIOMÈTRE**; c'est une lunette

spéciale dont l'objectif est formé de deux demi-lentilles qui, lorsqu'elles sont réunies (fig. 1), fonctionnent comme une lentille ordinaire; mais l'une des moitiés peut glisser dans le sens vertical, comme l'indique la figure 2; on obtient alors deux images distinctes de l'astre observé; et, en faisant varier



la position de la demi-lentille mobile au moyen d'une vis micrométrique, on amène les deux images à être tangentes comme le montre la figure 3. L'image mobile s'est alors déplacée d'une quantité égale à son diamètre; et l'on compte le nombre de tours et fraction de tour qu'il a fallu faire pour cela à la tête de la vis; on a déterminé par des expériences spéciales, faites à l'aide de disques placés à diverses distances, à quel diamètre apparent répond un nombre donné de tours de la vis; on a donc tout ce qu'il faut pour calculer le diamètre apparent que l'on cherche.

Bessel a employé, pour déterminer la parallaxe des étoiles, un héliomètre construit avec une grande perfection par Fraunhofer.

Il existe un autre micromètre à double image fondé sur la double réfraction; c'est la *lunette de Rochon* décrite dans tous les Traités de physique. Le dédoublement de l'image y est produit par un prisme de cristal placé à quelque distance en avant de l'oculaire, et qu'on peut éloigner ou rapprocher à l'aide d'une crémaillère pour séparer ou réunir les images. Ce micromètre a été employé par Arago dans un grand nombre d'observations délicates.

On donne aussi le nom de micromètre à une petite lunette fixe, munie d'un réticule à vis micrométrique, avec laquelle on observe les divisions

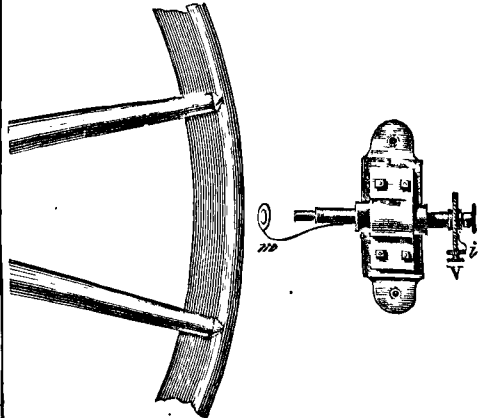


Fig. 4.

tracées sur le limbe mobile des grands cercles employés dans les instruments d'observatoires (Voy. CERCLE MURAL). La figure 4 représente un de ces micromètres.

Devant la tête de la vis micrométrique est un index fixe i qui sert à compter les tours et fraction de tour de la vis. A la lunette est attaché un petit miroir percé d'un trou central dans l'axe de la lunette, mais disposé de manière à renvoyer la lumière d'une lampe sur les divisions qu'il s'agit d'observer.

MICROSCOPE (de μικρός, petit, et de σκοπέω, je regarde), instrument d'optique qui sert à examiner de très-petits objets. On distingue le microscope simple, qui n'est autre chose qu'une LOUPE (Voy. ce mot), et le microscope composé. Cet instrument, réduit à sa plus simple expression, se compose d'un objectif et d'un oculaire tous deux convergents. L'objet à étudier se place en avant de l'objectif, un peu au delà du foyer principal; il se forme alors une image réelle et agrandie (Voy. LENTILLE) que l'on regarde avec l'oculaire, lequel fonctionne comme une loupe. L'objectif et l'oculaire sont le plus souvent montés aux extrémités de deux tubes cylindriques, dont l'un (celui qui porte l'oculaire) s'introduit à frottement doux dans l'autre, afin qu'on puisse amener l'image à la distance de la vue distincte (Voy. VISION). Souvent aussi l'objectif et l'oculaire sont adaptés à des tubes placés à angle droit; les rayons lumineux émanés de l'objet traversent alors l'objectif, puis un tuyau vertical; ils vont se réfléchir par réflexion totale sur la surface intérieure de la plus grande face d'un prisme, et ressortent horizontalement, ou à peu près, pour aller former une image près de l'oculaire. On donne ordinairement à l'oculaire une plus grande distance focale qu'à l'objectif. Quant au grossissement, il peut se calculer de la manière suivante. L'objectif étant une lentille convergente donnant une image réelle, on peut lui appliquer la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \text{ qui donne } \frac{p'}{p} = \frac{f}{p-f},$$

c'est le grossissement de l'objectif. D'un autre côté, si d est la distance de la vue distincte et F la distance focale de l'oculaire, son grossissement (Voy. LOUPE) est $\frac{d+F}{F}$.

Le grossissement du microscope est le produit des deux grossissements partiels, ou $\frac{f(d+F)}{(p-f)F}$.

Si, par exemple, on a $f = 5^{\text{mm}}$; $p = 5^{\text{mm}}, 1$; $F = 20^{\text{mm}}$; et $d = 275^{\text{mm}}$ (moyenne entre 250 et 300),

on trouvera pour le grossissement : $737 \frac{1}{2}$. Mais il ne faut considérer ce résultat que comme une valeur approximative.

Un microscope composé, tel que celui que nous venons de décrire, serait un instrument très-impairfait. L'objectif se compose réellement de plusieurs lentilles achromatiques, qui peuvent se placer l'une sur l'autre pour augmenter le grossissement à volonté. L'oculaire se compose aussi de plusieurs lentilles, les unes plan-convexes, la convexité tournée vers l'objet, les autres bi-convexes, à très-court foyer, fonctionnant comme des loupes. Entre les lentilles plan-convexes on dispose des diaphragmes qui interceptent les rayons trop obliques à l'axe.

L'objet qu'on doit observer est ordinairement éclairé par réflexion au moyen d'un miroir. Nous renverrons, pour plus de détails, aux traités spé-

ciaux d'optique; ce que nous avons dit suffit pour faire comprendre l'emploi des microscopes dans les appareils d'Astronomie ou de Géodésie.

MIDI, milieu du jour. Le *midi vrai* est l'instant précis où le centre du soleil passe au méridien. Le *midi moyen* ne correspond pas exactement au midi vrai; la différence, ou *équation du temps*, est indiquée dans la CONNAISSANCE DES TEMPS (Voy. ce mot) sous le titre de *temps moyen à midi vrai* (Voy. TEMPS MOYEN).

MIDI, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (Voy. ce mot). Dans notre hémisphère, l'observateur qui regarde le soleil au moment de son passage au méridien, a devant lui le midi. Le midi porte aussi le nom de *sud*.

MILLE MARIN, tiers de la lieue marine. Celle-ci étant contenue 20 fois dans un degré, le mille y est contenu 60 fois, c'est-à-dire qu'il représente une minute. Sa longueur en mètres est le tiers de $5555^{\text{m}}, 55\dots$, c'est-à-dire $1851^{\text{m}}, 85$ ou à très-peu près 1852 mètres.

MILLIGRAMME, millième partie du *gramme* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le milligramme est le poids d'un *millimètre cube* d'eau distillée, à $4^{\circ}, 1$.

MILLILITRE, millième partie du *litre* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le millilitre équivaut au *centimètre cube*; mais cette mesure est peu usitée.

MILLIMÈTRE, millième partie du *mètre* (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). Le *millimètre carré* est la millionième partie du *mètre carré*; le *millimètre cube* est la billionième partie du *mètre cube*.

MINCE PAROI (ORIFICE PERCÉ EN), se dit d'un orifice d'écoulement percé dans une paroi dont l'épaisseur ne dépasse pas une fois et demie le diamètre de cet orifice; de telle sorte que la veine jaillissante se détache complètement des bords de l'ouverture (Voy. THÉORÈME DE TORRICELLI). Si la paroi a une épaisseur plus grande, l'orifice devient un véritable AJUTAGE (Voy. ce mot) et les conditions de l'écoulement sont changées.

MINUTERIE, ensemble des roues placées entre le cadran et la platine d'une montre ou d'une pendule, et qui servent à faire mouvoir les aiguilles. Ces roues sont distinctes du rouage proprement dit, lequel est compris entre les deux platines ou entre la grande platine et les ponts qui remplacent aujourd'hui la petite.

MIRE, instrument vers lequel l'opérateur dirige les rayons visuels dans les nivellements (Voy. NIVELLEMENT, NIVEAU). Il se compose d'une règle en bois de deux mètres de haut, divisée sur l'une des arêtes de sa face postérieure en décimètres et centimètres; elle se termine à sa partie inférieure par un talon en fer que l'on pose sur le sol; ce talon porte, perpendiculairement à la direction de la règle, une pédale sur laquelle l'aide qui tient la mire appuie le pied pour la maintenir dans une direction verticale. Le long de cette règle peut glisser un collier rectangulaire, portant, du côté antérieur de la règle, une plaque peinte de deux couleurs que l'on appelle le *VOYANT*. Cette plaque est divisée par une ligne horizontale qui s'appelle sa *ligne de foi*. Le collier qui porte le voyant peut être arrêté en un point quelconque de la mire au moyen d'une vis de pression, et l'on peut lire, sur les divisions de la règle, la hauteur à laquelle répond alors la ligne de foi du voyant.

La mire que nous venons de décrire est la mire simple; mais il y a des *mires à coulisse* qui peuvent, en se développant, atteindre une hauteur de 4 mètres. La partie supérieure de la coulisse se termine par une tête qui a les dimensions transversales de la règle; tant que la hauteur à mesurer est moindre que 2 mètres, la mire fonctionne comme une mire simple; mais s'il faut mesurer plus de 2 mètres, on fixe le voyant à la tête de la coulisse, et on élève celle-ci en la faisant glisser; elle porte à sa partie inférieure un collier qui embrasse la règle et peut y être fixé par une vis de pression; on mesure la hauteur parcourue par l'extrémité inférieure de la coulisse, et l'on ajoute 2 mètres pour avoir la hauteur à laquelle se trouve alors la ligne de foi du voyant.

L'inconvénient principal des mires à voyant, quand on emploie un niveau à lunette, consiste en ce que, à une distance un peu considérable, le fil horizontal de la lunette couvre une partie notable de la surface du voyant, et que la coïncidence avec la ligne de foi laisse de l'incertitude. L'inconvénient particulier des mires à coulisse tient à ce que l'humidité fait gonfler le bois et empêche la coulisse de glisser. On emploie aujourd'hui des mires sans voyant que l'on appelle *mires parlantes*, parce que l'observateur peut lire lui-même la hauteur à laquelle correspond son rayon visuel.

A cet effet, la mire, qui a de 2 à 4 mètres, selon qu'elle est simple ou à coulisse, et de 12 à 15 centimètres de large, est divisée dans le sens longitudinal en trois colonnes; les deux premières sont divisées en intervalles de 4 centimètres, peints alternativement blanc et rouge, comme l'indique la figure; la troisième porte des chiffres qui indiquent ainsi des intervalles de 20 centimètres; ces chiffres sont renversés, parce qu'ils doivent être observés avec une lunette qui renverse les objets; avec un peu d'habitude on apprécie les résultats à 1 ou 2 centimètres près.

Pour des distances peu considérables, on emploie des mires parlantes dans lesquelles les divisions n'ont que 1 centimètre de longueur au lieu de 4.

Le maniement de ces mires est plus commode, leur construction moins coûteuse, et les lectures s'y font avec plus de sûreté que sur les mires ordinaires.

MIROIR PLAN, surface plane et polie, dans laquelle les objets peuvent être vus par réflexion. Les propriétés des miroirs plans utiles à connaître pour l'intelligence des instruments à réflexion sont les suivantes :

I. *Un point éclairé M (fig. 1) est vu dans un miroir plan AB comme s'il occupait la position M' symétrique de M par rapport à ce plan.* Soit O le centre de la pupille; joignons OM', qui rencontrera AB en un point I; élevons en I la normale IN. Les angles MIB et M'IB seront égaux, et on en peut conclure l'égalité des angles MIN et NIO; donc le rayon MI se réfléchira suivant IO. On verrait de même que

les divers rayons partis du point M, tels que Mm, Mn, se réfléchiront suivant les prolongements de M'm et de M'n; ainsi l'œil, recevant ces rayons sous forme de faisceau divergent, comme s'ils émanaient

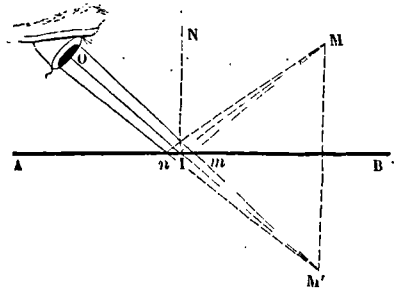


Fig. 1.

du point M', verra le point M comme s'il était en M' (*Voy. VISION*).

II. *Un objet éclairé PQ (fig. 2) est vu dans un mi-*

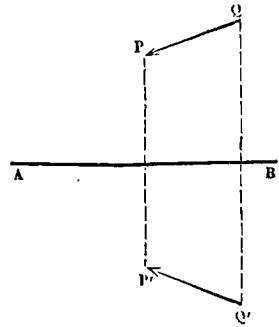


Fig. 2.

roir plan AB comme s'il occupait la position P'Q', symétrique de PQ par rapport à ce plan. Car, d'après ce qu'on vient de démontrer, le point P sera vu comme s'il occupait la position symétrique P'; le point Q comme s'il occupait la position symétrique Q'; et ainsi de tous les points de l'objet.

III. *Si l'on aperçoit dans une même direction un*

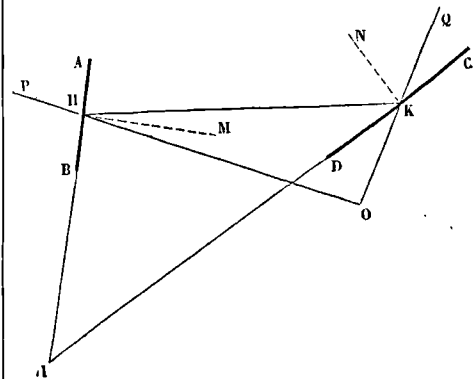


Fig. 4.

point P (fig. 3) et l'image d'un point Q après deux réflexions sur deux miroirs AB et CD perpendiculaires au plan des rayons visuels OP et OQ, l'an-

gle POQ de ces rayons visuels est le double de l'angle AIC des deux miroirs.

Menons, en effet, les normales HM et KN; appelons α l'angle MHK, et β l'angle HKN. L'angle AHK, extérieur au triangle IHK, équivaut à la somme des angles HIK et IKH; on a donc

$$90^\circ - \alpha = I + 90^\circ - \beta; \text{ d'où } I = \beta - \alpha.$$

L'angle HKQ, extérieur au triangle HOK, équivaut à la somme des angles KHO et HOK; on a donc

$$2\beta = 2\alpha + O, \text{ d'où } O = 2(\beta - \alpha).$$

Donc $O = 2I$, ce qu'il s'agissait de démontrer.

La propriété subsisterait encore si l'objet Q (fig. 4)

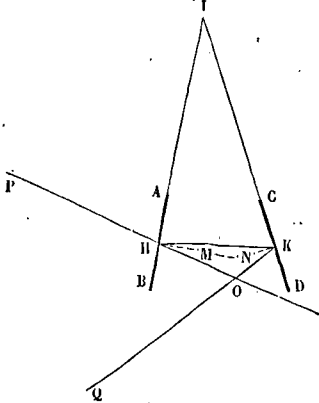


Fig. 4.

vu par réflexion se trouvait à gauche de OP, au lieu d'être à droite. Car on aurait, en conservant les mêmes notations,

$$HIK + IHK + IKH = 180^\circ$$

ou $I + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 180^\circ$,
d'où

$I = \alpha + \beta$ et $QOP = OHK + OKH = 2\alpha + 2\beta$;
par conséquent $O = 2I$, comme ci-dessus.

IV. On déduit aisément de ce théorème que, si, l'un des miroirs restant fixe, l'autre tourne d'un certain angle ω , le rayon deux fois réfléchi tournera, dans le même sens, d'un angle double 2ω .

MISAINÉ (MÂT DE), mât vertical placé en avant du grand-mât (Voy. MÂTURE). On donne aussi le nom de misainé à la voile basse qui correspond au mât de misainé (Voy. VOILES).

MODÉRATEURS, organes ou mécanismes dont la fonction est d'empêcher la vitesse d'une machine de s'accroître indéfiniment. C'est généralement en faisant agir une résistance auxiliaire, la résistance de l'air ou le frottement, qu'on atteint le but proposé; et les modérateurs proprement dits ne se présentent guère que sous deux formes : les VOLANTS à AILETTES et les FREINS (Voy. ces mots). On peut remarquer que le frottement des diverses pièces d'une machine agit toujours comme modérateur.

On range quelquefois parmi les modérateurs les organes ou mécanismes généralement désignés sous le nom de régulateurs; mais ces derniers se distinguent des modérateurs proprement dits en ce qu'ils ont pour fonction de maintenir la vitesse entre des limites assignées, en agissant sur le moteur lui-même (ou quelquefois sur la résistance principale), pour modifier son action (Voy. RÉGULATEURS).

MODIFICATEURS INSTANTANÉS, organes ou dispositifs qui, dans les machines, servent à changer instantanément soit le sens, soit la grandeur de la vitesse, soit l'un et l'autre à la fois. On distingue quatre espèces de modificateurs : la première espèce comprend ceux qui servent à suspendre le mouvement ou à le rétablir à volonté; ils constituent les différents modes d'embrayage et de désembrayage (Voy. EMBRAYAGE). La seconde espèce comprend les moyens de changer le mouvement par intervalles à l'aide du jeu de la machine elle-même : tels sont les DÉCLICS et les DÉTENTES (Voy. ces mots). Les modificateurs de troisième espèce sont ceux qui servent à changer à volonté le sens du mouvement. La quatrième espèce comprend ceux à l'aide desquels on change la grandeur de la vitesse. Ces deux dernières espèces de modificateurs sont celles qui font l'objet de cet article.

I. Pour changer le sens de la rotation d'un arbre, on emploie généralement un second arbre, qui peut être soit parallèle, soit perpendiculaire au premier. Soit AA (fig. 1) l'arbre auquel il s'agit de donner le mouvement, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. Sur cet arbre sont montées deux roues R et r. La roue R engrène avec une roue R', folle sur l'axe BB parallèle à AA; et sur le même axe BB est montée une seconde roue folle r', dont le rayon est au rayon de r dans le même rapport que le rayon de R' est au rayon de R. Les deux roues r et r' engrènent toutes deux avec une roue intermédiaire r'' dont l'axe CC est parallèle aux deux autres. Enfin, sur l'axe BB, entre les roues R' et r', peut glisser, à l'aide d'une rainure et d'une languette, un manchon d'embrayage M, que l'on fait mou-

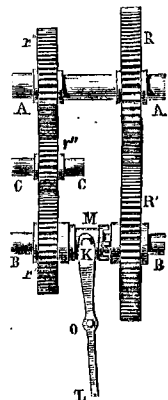


Fig. 1.

voir à l'aide de la fourche de KL, mobile autour de l'axe fixe O, et embrassant par l'extrémité K la gorge du manchon. Si l'on fait mouvoir l'extrémité L de la fourche vers la gauche, de telle sorte que les saillies du manchon s'engagent dans les creux correspondants de la roue R', le mouvement de l'arbre BB est transmis à l'arbre AA par l'engrenage R', R; et l'arbre AA tourne en sens contraire de BB. Si, au contraire, on engage le manchon avec la roue r', le mouvement de l'arbre BB est transmis à l'arbre AA par l'intermédiaire des roues r', r'' et r; la roue r' tourne en sens contraire de r; et r tourne en sens contraire de r'', par conséquent dans le même sens que r; ainsi AA et BB tournent dans le même sens. Le rapport des vitesses est d'ailleurs le même dans les deux cas, puisque le rapport des rayons des roues r et r' est le même que celui des roues R et R'.

Considérons maintenant le cas où l'arbre à conduire est perpendiculaire à l'arbre moteur. Sur l'arbre A (fig. 2) est calée une roue conique it, qui engrène avec deux roues coniques r et r' folles sur l'arbre BB perpendiculaire à A. Entre ces deux roues folles glisse un manchon d'embrayage M. Si l'on engage les saillies du manchon dans les creux

correspondants de la roue r , le mouvement de l'arbre BB est transmis dans un certain sens à l'arbre A; mais si l'on embraye avec la roue r' , le

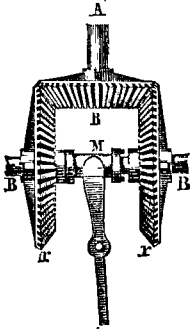


Fig. 2.

mouvement de l'arbre BB est encore transmis à l'arbre A, mais dans un sens contraire.

II. Nous passons aux modificateurs de la quatrième espèce. Il est souvent nécessaire, notamment dans les machines-outils, qu'un même arbre puisse prendre successivement plusieurs vitesses distinctes; c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'à l'aide d'un même tour on a à tourner successivement du bois, du cuivre, du fer, etc.; il faut dans chaque cas une vitesse différente. Le moyen le plus généralement employé consiste à monter sur l'arbre moteur et sur l'arbre à conduire plusieurs systèmes de poulies, et à faire passer une courroie sans fin d'un système à l'autre suivant le rapport de vitesse que l'on veut obtenir. Soient p, p', p'', p''' (fig. 3) une série de

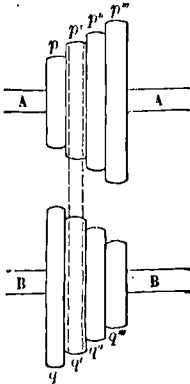


Fig. 3.

poulies montées sur l'arbre moteur AA, et q, q', q'', q''' une seconde série de poulies montées sur l'arbre parallèle BB qu'il s'agit de conduire. Il est clair que suivant que la courroie sans fin passera sur le système p, q , sur le système p', q' , sur le système p'', q'' , ou sur le système p''', q''' , on obtiendra des rapports de vitesse différents. La seule condition à remplir est que les rayons qui se correspondent soient tels que la courroie reste toujours tendue. Cette condition s'exprime très-simplement quand la courroie est croisée; il suffit alors que la somme des

rayons des poulies qui se correspondent soit toujours la même. En effet, soit α (fig. 4) l'angle que le rayon allant au point de contact fait avec la ligne

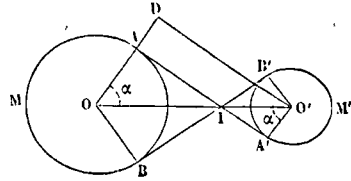


Fig. 4.

des centres OO' ; posons $OA = R, OA' = R', OO' = d$. Menons $O'D$ parallèle à AA' . Nous aurons, en nommant L la longueur de la courroie,

$$L = 2\pi R - 2\alpha R + 2\pi R' - 2\alpha R' + 2AA'.$$

Mais, dans le triangle ODO' où $DO' = AA'$, on a

$$DO' = OO' \sin \alpha = d \sin \alpha$$

$$\text{et } OD = R + R' = OO' \cos \alpha = d \cos \alpha.$$

On peut donc écrire

$$L = 2(\pi - \alpha)(R + R') + 2d \sin \alpha \quad [1]$$

$$\text{avec } d \cos \alpha = R + R'. \quad [2]$$

On voit que si $R + R'$ est constant, il en est de même de $\cos \alpha$, en vertu de la dernière équation; par suite α est constant lui-même, puisque c'est toujours un angle aigu; donc la valeur de L reste constante.

Si la courroie n'est pas croisée (fig. 5), la relation

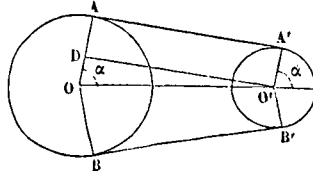


Fig. 5.

entre R et R' n'est pas aussi simple. On a alors, en faisant la même construction et conservant les mêmes notations :

$$L = 2\pi R - 2\alpha R + 2\alpha R' + 2AA',$$

$$AA' = DO' = d \sin \alpha, \quad OD = R - R' = d \cos \alpha.$$

Il reste donc

$$L = 2(\pi - \alpha)R + 2\alpha R' + 2d \sin \alpha, \quad [3]$$

$$\text{avec } d \cos \alpha = R - R'. \quad [4]$$

et l'on a deux équations pour déterminer α et R' , si l'on se donne d, R et L (*Voy. le Traité de Cinématique* de M. Bélanger).

Lorsqu'on veut se réserver le moyen de faire varier le rapport des vitesses d'une manière continue entre deux limites données, on remplace les deux séries de poulies étagées par deux tambours coniques C et C' (fig. 6). Mais il est nécessaire alors de maintenir la courroie dans la position qu'on lui assigne, au moyen d'une fourche f nommée *guide-courroie* analogue à la fourche d'embrayage, car sans cela la courroie tendrait à se rapprocher du gros bout de chaque tambour, et se placerait obliquement en se tendant de plus en plus. — Si la courroie est croisée, il faudra que la somme des rayons des parallèles sur lesquels elle est enroulée soit constante, condition que l'on remplira en faisant en sorte que les génératrices mn et pq situées en regard l'une de l'autre dans le plan des deux

axes soient parallèles. Si la courroie n'est pas croisée, les rayons des parallèles correspondants devront satisfaire aux relations [3] et [4]; et les génératrices rectilignes devnt être remplacées par des généra-

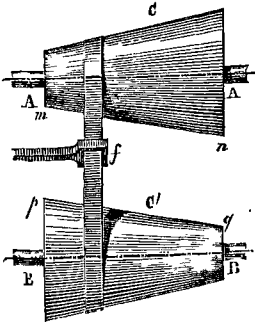


Fig. 6.

trices curvilignes, au moins sur l'un des deux tambours. Au reste, comme la distance des axes est ordinairement assez grande par rapport aux rayons des tambours, et que la tension de la courroie peut varier entre certaines limites sans que la transmission cesse de se faire, on peut se contenter dans tous les cas de deux troncs de cônes ordinaires à génératrices rectilignes.

On peut aussi faire varier la vitesse par le déplacement d'une courroie sans fin sur des poulies de même diamètre. Cet effet est obtenu à l'aide du dispositif représenté fig. 7. Sur l'axe moteur AA

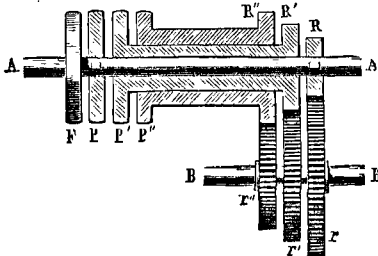


Fig. 7.

tourne une poulie folle F; sur le même axe est montée une poulie égale P; et plus loin une roue dentée R, qui engrène avec une autre roue dentée r calée sur l'arbre parallèle BB. Une troisième poulie P', de même diamètre que la précédente, est montée sur un arbre creux qui entoure l'axe AA; il porte à son extrémité une roue dentée R' qui engrène avec une roue dentée r' montée sur l'axe BB. Enfin une quatrième poulie P'', de même diamètre, est montée sur un second axe creux qui entoure le précédent; il porte à son extrémité une roue dentée R'' qui engrène avec une roue r'' montée sur l'axe BB. Une courroie sans fin, qui reçoit le mouvement d'un tambour non représenté sur la figure, peut s'enrouler à volonté sur l'une des quatre poulies F, P, P', P''. Si elle passe sur la poulie folle F, aucun mouvement n'est transmis à l'axe BB. Si elle passe sur la poulie P, le mouvement de rotation est transmis à l'arbre BB par l'intermédiaire de l'engrenage R, r; si elle passe sur la poulie P', le

mouvement est transmis par l'engrenage R', r'; enfin, si elle passe sur la poulie P'', le mouvement est transmis par l'engrenage R'', r''. Dans les trois derniers cas, l'arbre AA ayant la même vitesse, l'arbre BB prend trois vitesses différentes dépendant du rapport des rayons de l'engrenage qui transmet le mouvement. Il faut bien remarquer que lorsque la courroie passe sur l'une des trois poulies P, P', ou P'', les deux autres tournent avec des vitesses différentes, entraînées par les roues montées sur l'axe BB.

III. On peut avoir besoin de faire varier à la fois le sens et la grandeur de la vitesse; on emploie pour cela des dispositifs qui participent de ceux qui viennent d'être décrits. Dans celui de la figure 1, par exemple, il suffit de changer le rapport des rayons des roues r et r'. Celui de la figure 2 n'a besoin que d'une légère modification représentée par la figure 8. Les roues d'angles r et r', folles sur

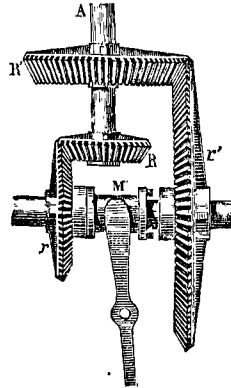


Fig. 8.

l'arbre BB, sont de diamètres inégaux, et engrèment respectivement avec deux roues R et R' calées sur l'arbre A. Si l'on fait communiquer le manchon d'embrayage M avec la roue R, la roue R et l'axe A tournent dans un certain sens; mais si l'on embraye avec la roue r', la roue R' et l'axe A tournent en sens contraire avec une vitesse différente, si le rapport des rayons des roues r' et R' diffère du rapport des rayons des roues r et R.

Le dispositif de la figure 7 peut être également

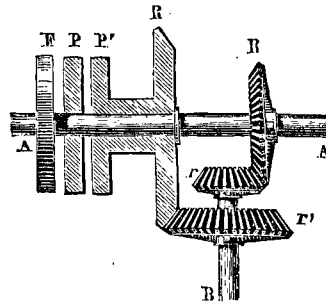
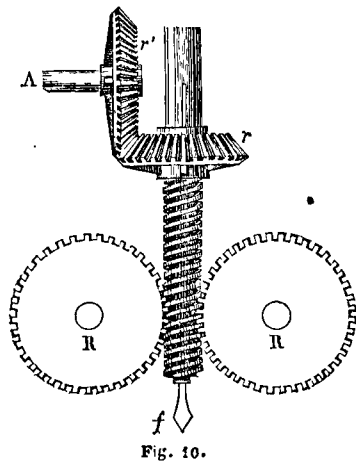


Fig. 9.

modifié pour produire un changement de sens en même temps qu'un changement de vitesse. La poulie F (fig. 9) est folle sur l'arbre AA. La poulie P, de

même diamètre, est calée sur cet arbre, qui porte à son extrémité une roue d'angle R engrenant avec une roue r montée sur l'axe perpendiculaire BB. La poulie P', de même diamètre que P, est calée sur un arbre creux qui entoure l'arbre AA, et qui porte à son extrémité une roue d'angle R' engrenant avec une seconde roue r' montée sur l'arbre BB. Une courroie sans fin, mue par un tambour dont l'axe est parallèle à AA, peut passer à volonté sur l'une des trois poulies F, P, P'. Si elle passe sur la première, il n'y a aucun mouvement transmis; si elle passe sur la seconde P, la vitesse de l'arbre AA est transmise à l'arbre BB dans un certain rapport par l'intermédiaire de l'engrenage conique R, r ; si la courroie passe sur la poulie P', la vitesse de l'arbre AA est transmise à l'arbre BB dans un autre rapport par l'intermédiaire de l'engrenage conique R', r' ; et de plus l'arbre BB tourne en sens contraire dans les deux cas.

L'emploi de la VIS SANS FIN (Voy. ce mot) fournit un autre moyen de faire varier le mouvement, qui est mis à profit dans les machines à percer. Le foret f (fig. 10) est placé dans l'axe d'une vis sans fin



qui engène avec deux roues folles égales R, R placées symétriquement par rapport à cet axe. Sur ce même axe est montée une roue conique r qui y est assemblée à l'aide d'une rainure et d'une languette, de manière à pouvoir glisser le long de l'axe; mais elle est maintenue par un support qui l'empêche de céder à l'action de la pesanteur. Elle engène avec une roue r' calée sur l'arbre moteur A. Lorsque ce dernier est en mouvement, l'arbre B tourne, et le foret pénètre dans la pièce de bois ou de métal qu'il doit percer; cet arbre descend en même temps verticalement, à mesure que le trou se creuse, en glissant par rapport à la roue r , que le support dont il a été question plus haut empêche de descendre avec lui. Quand l'ouvrier veut retirer le foret, il arrête avec la main l'une des deux roues R; elles deviennent aussitôt immobiles toutes les deux, et forment un véritable écrou fixe dans lequel la vis est engagée; il en résulte que, celle-ci continuant à tourner dans le même sens, l'arbre B s'élève verticalement en

glissant de nouveau dans la roue r , que son contact avec la roue r' empêche de monter avec lui.

IV. Il nous reste à parler de deux dispositifs employés dans des appareils délicats, tels que le DYNAMOMÈTRE COMPTEUR de MM. Poncelet et Morin, ou le PLANIMÈTRE de Ernst (Voy. ces mots). Le premier de ces dispositifs se compose d'un plateau horizontal P (fig. 11), qui tourne autour d'un axe vertical A

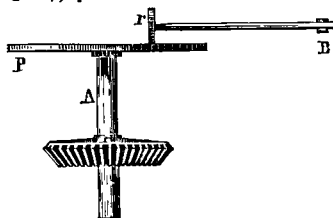


Fig. 11.

passant par son centre; sur ce plateau repose une roulette r mobile autour d'un axe horizontal B qui peut glisser entre des guides. Le simple contact suffit pour communiquer à la roulette le mouvement de rotation du plateau; mais suivant la distance à laquelle la roulette se trouve du centre de celui-ci, elle prend une vitesse plus ou moins grande; en sorte que pour accélérer son mouvement, il suffit de l'éloigner du centre, tandis que pour le ralentir, il suffit de l'en rapprocher. Soit ω la vitesse angulaire du plateau, ω' celle de la roulette, r le rayon de celle-ci, x sa distance au centre du plateau. Les éléments de chemin décrits par le point de contact sur le plateau et sur la roulette devant être égaux, on doit avoir

$$\omega x dt = \omega' r dt.$$

d'où l'on tire

$$\omega' = \frac{\omega}{r} x,$$

relation qui montre que la vitesse angulaire de la roulette est proportionnelle à sa distance au centre du plateau.

Le second dispositif ne diffère du premier qu'en ce que le plateau est remplacé par un tronc de cône dont l'arête supérieure est horizontale (fig. 12). L'axe de la roulette r est parallèle à cette génératrice. Soit ω la vitesse angulaire du tronc de cône, ω' celle de la roulette, r le rayon de celle-ci, et x la distance MS de la roulette au sommet S du cône. Abaissons du point de contact M la perpendiculaire

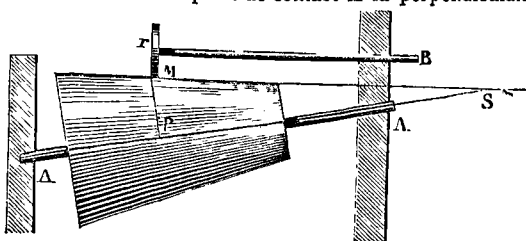


Fig. 12.

MP sur l'axe du cône; et soit α l'angle des génératrices du cône avec cet axe. On aura

$$MP = MS \sin MSP = x \sin \alpha.$$

Mais les chemins élémentaires décrits par le point de contact sur le cône et sur la roulette devant être égaux, on aura

$$\omega' r dt = \omega \cdot MP dt = \omega x \sin \alpha \cdot dt,$$

d'où
$$\omega = \frac{\omega \sin \alpha}{r} \cdot x,$$

relation qui montre que la vitesse angulaire de la roulette est proportionnelle à sa distance au sommet du cône.

Cette seconde relation redonne la première quand on y fait $\alpha = 90^\circ$; et, en effet, le cône devient alors un plan horizontal mobile autour d'un axe vertical mené par le point S.

MODILLONS, petites consoles horizontales qui supportent le larmier dans l'entablement corinthien. La hauteur de chaque modillon est d'un tiers de module, et sa saillie sur le nu de la frise est de 1 mod. 11 parties. Il y a un modillon dans l'axe de chaque colonne, et 4 autres également espacés dans l'entre-colonnement.

MODULE, unité servant en Architecture à évaluer les dimensions des diverses parties d'un édifice. Elle est égale au demi-diamètre de la colonne pris à la partie inférieure. Elle se subdivise en 12 parties ou *minutes* dans l'ordre toscan et dans l'ordre dorique, en 18 parties ou *minutes* dans les trois autres ordres. Cependant divers auteurs divisent le module en 30 parties pour tous les ordres indistinctement; d'autres divisent le module en 24 parties pour les trois premiers ordres, et en 36 pour les deux derniers; mais la subdivision indiquée ci-dessus, et adoptée par Vignole, est le plus généralement suivie.

Le module se déduit, dans chaque ordre, de la hauteur totale qu'on veut donner à la construction, depuis le haut de l'entablement jusqu'à la partie inférieure du piédestal. (Voy. ORDRES.)

MODULE D'EAU, unité employée par les fontainiers pour évaluer le produit des pompes ou des fontaines : elle équivaut à 10 m. cubes en 24 heures. Le *double module*, qui représente 20 m. cubes dans le même temps, équivaut donc au pouce d'EAU (Voy. ce mot). Le *dixième de module* équivaut à 1 m. cube ou 1000 litres en 24 heures.

MODULE DE CONVERGENCE, nombre qui mesure la rapidité avec laquelle les moyennes résultant de séries d'épreuves successives convergent vers la moyenne absolue. Cette quantité est celle que quelques auteurs appellent *coefficient de régularité*. Si l'on appelle g ce module, e la valeur d'un écart particulier, et n le nombre des épreuves, on a

$$g = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma e^2}}$$

(Voy. MOYENNES.)

MOINDRES CARRÉS (MÉTHODE DES), méthode proposée par Legendre pour corriger les erreurs des observations (Voy. ERREURS), ou pour résoudre cette autre question du même ordre : Déterminer les constantes qui entrent dans les relations par lesquelles les grandeurs observées sont liées les unes aux autres. Cette méthode consiste à faire en sorte que la somme des carrés des erreurs soit un minimum, d'où la dénomination abrégée de méthode des *moindres carrés*. Elle n'a d'abord été indiquée par Legendre que comme une règle commode à cause de sa symétrie, puisque les erreurs en moins y figurent avec le même signe que les erreurs en plus. Mais Gauss a démontré que c'est la méthode la plus avantageuse, au point de vue des chances, quand la loi de probabilité des erreurs peut être

représentée par une expression de la forme

$$p = Ae^{-g^2x^2},$$

où x désigne l'erreur et p la probabilité.

On peut, en effet, s'en rendre compte comme il suit. Soient x, x', x'', \dots , les erreurs respectives commises sur la mesure de diverses grandeurs liées entre elles, et soient p, p', p'', \dots , leurs probabilités respectives; nous aurons, d'après l'hypothèse admise,

$$p = Ae^{-g^2x^2}, p' = Ae^{-g^2x'^2}, p'' = Ae^{-g^2x''^2}, \text{ etc.},$$

le module de précision ou de convergence g (Voy. ERREURS) étant le même pour toutes les mesures d'une même espèce, ainsi que la probabilité A d'une erreur nulle. Or, la probabilité P que toutes ces erreurs auront lieu simultanément, est une probabilité composée (Voy. PROBABILITÉ) qui s'obtiendra en faisant le produit de toutes les probabilités simples; on aura donc, en nommant n le nombre des erreurs ou des observations,

$$P = A^n e^{-g^2(x^2+x'^2+x''^2+\dots)}$$

Pour que la probabilité P soit la plus grande possible, il faut que l'exposant de e soit le plus petit possible en valeur absolue, c'est-à-dire que la somme $x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots$, ou Σx^2 , doit être un minimum.

Laplace a fait voir ensuite que la méthode des moindres carrés est encore la plus avantageuse au point de vue des chances, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs, pourvu 1° que cette loi soit la même pour toutes les observations, et pour les erreurs négatives comme pour les erreurs positives; 2° que le nombre des observations soit assez grand pour qu'on puisse se servir des formules d'approximation usitées dans le calcul des probabilités. Dans ces derniers temps (il y a une dizaine d'années), la méthode des moindres carrés a été tout à coup l'objet d'une controverse très-vive entre divers géomètres; M. Cauchy avait proposé, pour la remplacer, une méthode d'interpolation particulière. Mais les travaux de M. Bienaymé sur ce sujet ont mis fin à la discussion, et démontré la supériorité de la méthode des moindres carrés. (Voy. les *Mémoires* de M. Bienaymé, publiés chez Mallet-Bachelier.) Le seul défaut de cette méthode est la longueur, souvent rebutante, des calculs auxquels elle donne lieu; mais ce défaut est bien compensé par ses avantages, et en Allemagne elle est aujourd'hui appliquée à tous les travaux de Géodésie.

Il s'agit maintenant d'en développer les règles; et, pour cela, nous supposons d'abord que la relation qui lie les grandeurs mesurées est une relation linéaire; nous ferons voir ensuite comment la méthode peut s'étendre à des relations de forme quelconque.

I. Pour plus de simplicité, commençons par le cas où l'on n'aurait qu'une seule grandeur à mesurer. Soit a la vraie mesure de cette grandeur, et x, x', x'', \dots , les mesures en nombre n qui ont été effectuées. Les erreurs commises sont $a - x, a - x', a - x'', \dots$; et si l'on désigne par u la somme de leurs carrés, on a

$$u = (a - x)^2 + (a - x')^2 + (a - x'')^2 + \dots;$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$u = \Sigma (a - x)^2.$$

(Gauss emploie au même usage la notation [] enveloppant l'un des carrés.)

Pour que cette quantité soit un minimum, il faut

que sa dérivée par rapport à a soit nulle; on doit donc avoir

$$\Sigma 2(a-x) = 0, \text{ ou } \Sigma a - \Sigma x = 0;$$

mais Σa est égal à na ; il vient donc

$$na - \Sigma x = 0;$$

d'où
$$a = \frac{\Sigma x}{n}, \quad [1]$$

c'est-à-dire que la valeur de a la plus probable n'est autre, dans ce cas, que la moyenne arithmétique entre toutes les mesures effectuées.

II. Supposons maintenant deux grandeurs x et y , liées entre elles par la relation linéaire

$$y = ax + b;$$

l'erreur commise sur chaque observation sera

$$y - ax - b;$$

ainsi l'on aura

$$u = (y - ax - b)^2 + (y' - ax' - b)^2 + (y'' - ax'' - b)^2 + \dots,$$

en nommant x et y , x' et y' , x'' et y'' , etc., les couples de valeurs correspondantes qui ont été données par l'observation. En abrégant l'écriture, on aura

$$u = \Sigma (y - ax - b)^2.$$

Pour que cette quantité soit un minimum, il faut que ses dérivées, par rapport à a et à b , soient séparément nulles, ce qui donne

$$-\Sigma 2(y - ax - b)x = 0 \text{ et } -\Sigma 2(y - ax - b) = 0,$$

ou $a\Sigma x^2 + b\Sigma x = \Sigma xy$ et $a\Sigma x + nb = \Sigma y$.

Ces deux équations, résolues par rapport à a et b , donnent

$$a = \frac{\Sigma x\Sigma y - n\Sigma xy}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2} \text{ et } b = \frac{\Sigma x\Sigma xy - \Sigma y\Sigma x^2}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2}. \quad [2]$$

Pour appliquer ces formules, on aura donc à calculer d'abord les quatre sommes Σx , Σy , Σx^2 , Σxy : c'est la partie pénible du calcul; le reste s'exécute sans difficulté.

III. On déterminerait de la même manière les coefficients d'une relation linéaire entre trois variables dont on a un nombre suffisant de systèmes de valeurs données par l'observation. Nous indiquerons sur-le-champ la marche générale des calculs de ce genre, en supposant, pour fixer les idées, quatre coefficients à déterminer. Soient donc

$$\begin{aligned} t &= ax + by + cz + d, \\ t' &= ax' + by' + cz' + d, \\ t'' &= ax'' + by'' + cz'' + d, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

les relations en nombre n , entre les coefficients a, b, c, d à déterminer, et les systèmes $x, y, z, t; x', y', z', t'; x'', y'', z'', t''$, etc., de valeurs simultanées observées pour les variables. Les erreurs seront

$$\begin{aligned} t - ax - by - cz - d, \\ t' - ax' - by' - cz' - d, \\ t'' - ax'' - by'' - cz'' - d, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et, en nommant u la somme de leurs carrés, on aura

$$u = \Sigma (t - ax - by - cz - d)^2.$$

La condition du minimum exige que les dérivées, par rapport aux quatre inconnues a, b, c, d , soient séparément nulles, ce qui donne, en changeant les signes,

$$\left. \begin{aligned} a\Sigma x^2 + b\Sigma xy + c\Sigma xz - \Sigma xt + d\Sigma x &= 0, \\ a\Sigma xy + b\Sigma y^2 + c\Sigma yz - \Sigma yt + d\Sigma y &= 0, \\ a\Sigma xz + b\Sigma yz + c\Sigma z^2 - \Sigma zt + d\Sigma z &= 0, \\ a\Sigma x + b\Sigma y + c\Sigma z - \Sigma t + nd &= 0. \end{aligned} \right\} [3]$$

Ces équations sont ce que Gauss appelle les équations normales.

On en tirera les valeurs des coefficients inconnus a, b, c, d quand on aura calculé les sommes telles que $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma z, \Sigma t, \Sigma xy, \Sigma xz, \Sigma xt, \Sigma yz, \Sigma yt, \Sigma zt, \Sigma x^2, \Sigma y^2, \Sigma z^2$, qui forment ce que quelques auteurs appellent les coefficients sommatoires des équations normales.

L'élimination des inconnues a, b, c, d se fait par les règles ordinaires de l'algèbre; Gauss a présenté les résultats successifs sous des formes élégantes, mais qui, malheureusement, n'abrègent pas les calculs.

IV. Nous avons supposé que la relation entre les variables était une relation linéaire. Lorsque cela n'a pas lieu, on peut ramener ce second cas au premier, pourvu que l'on connaisse à l'avance des valeurs approchées des coefficients inconnus, ce qui a généralement lieu dans les applications. Soit $F(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) = 0$ la relation qui lie les variables x, y, z, \dots mesurées simultanément un nombre n de fois, et les coefficients a, b, c, \dots qu'il s'agit de déterminer. Soient a_0, b_0, c_0, \dots un système de valeurs approchées de ces coefficients, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ l'erreur dont chacune d'elles est affectée, en sorte qu'on ait

$$a = a_0 + \alpha, \quad b = b_0 + \beta, \quad c = c_0 + \gamma, \dots$$

Si l'on met pour a, b, c, \dots , ces valeurs dans l'équation $F = 0$, et qu'on développe le premier membre par la formule de Taylor, en négligeant les produits et les puissances supérieures des erreurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, supposées très-petites, on aura

$$\alpha \frac{dF}{da} + \beta \frac{dF}{db} + \gamma \frac{dF}{dc} + \dots = 0,$$

équation dans laquelle on mettra pour x, y, z, \dots , les différents systèmes de valeurs données par l'observation. Cette équation étant linéaire par rapport aux inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, qu'il s'agit de déterminer, on se trouve ainsi ramené au cas qui a été traité plus haut, à cette différence près qu'au lieu des premières puissances des variables x, y, z, \dots , on a dans l'équation des fonctions plus ou moins compliquées, $\frac{dF}{da}, \frac{dF}{db}, \frac{dF}{dc}, \dots$, de ces mêmes variables.

V. Après avoir déterminé les valeurs les plus probables des constantes a, b, c, \dots , il resterait à calculer le poids de ces valeurs (*Voy. Poids*). Gauss a donné pour cela une méthode qui conduit à la règle suivante: Remplacer dans l'équation normale relative à a le terme tout connu par -1 , et dans toutes les autres remplacer ce terme tout connu par zéro. Mettre $\frac{1}{\pi}$ à la place de a , éliminer toutes les autres inconnues b, c, \dots , et tirer la valeur de π , qui sera le poids de la valeur moyenne a , en entendant ce mot dans l'acception des auteurs allemands. Opérer d'une manière analogue pour trouver les poids π', π'', \dots , des autres valeurs moyennes b, c, \dots .

Pour la démonstration de cette règle, nous renverrons à l'ouvrage original de Gauss. (*Theoria motus corporum caelestium*.)

VI. Afin de donner un exemple de l'application de la méthode des moindres carrés, nous supposons qu'on ait mesuré les coordonnées de 10 points qui doivent être en ligne droite, et qu'on ait trouvé les valeurs suivantes:

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
^m 0	^m 3,6	^m 5	^m 1,8
1	3,2	6	1,4
2	2,8	7	1,1
3	2,5	8	0,7
4	2,2	9	0,3

On trouvera $\Sigma x = 45$, $\Sigma y = 19,6$, $\Sigma xy = 58,5$, $\Sigma x^2 = 285$. Par conséquent, l'équation de la droite étant $y = ax + b$, on trouvera les deux relations de condition

$$285a + 45b = 58,5 \quad \text{et} \quad 45a + 10b = 19,6 ;$$

d'où l'on tirera

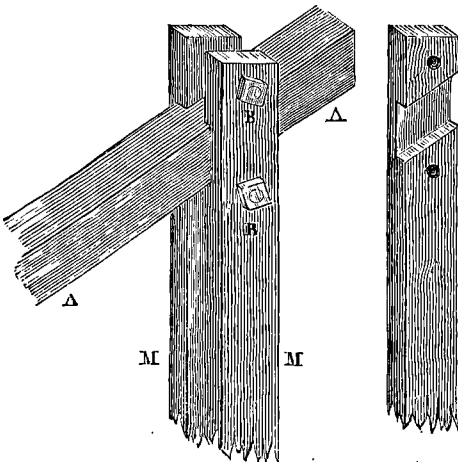
$$a = -0,36 \quad \text{et} \quad b = +3^m, 58.$$

Ainsi, l'équation probable de la droite est

$$y = -0,36x + 3^m, 58.$$

En appliquant la règle de Gauss, on trouve pour le poids de *a* le nombre 82,5, et pour le poids de *b* le nombre beaucoup moindre 2,89. Ainsi, l'inclinaison de la droite est déterminée avec une précision beaucoup plus grande que son ordonnée à l'origine. [Voy. ERREURS (Théorie des).]

MOISES, pièces de bois jumelles qui saisissent entre elles une autre pièce pour former un assemblage. La figure représente deux moises M, M, qui



embrassent ainsi une pièce intermédiaire AA. Les moises sont entaillées de quelques centimètres dans la direction de la pièce AA; l'une d'elles est représentée à part. Elles sont reliées entre elles par deux boulons dont l'un passe au-dessus de la pièce AA et l'autre au-dessous. Ce système forme un assemblage très-solide; qui peut être employé pour relier entre elles deux pièces principales; ainsi, l'arbalétrier et le tirant d'une ferme peuvent être reliés ainsi par des moises verticales.

Quelques constructeurs entaillent la pièce principale dans la direction des moises, et n'emploient qu'un boulon qui traverse les trois pièces; mais cette disposition affaiblit la pièce principale. On pourrait n'employer qu'une seule moise; mais, dans ce cas, elle prend le nom de *décharge*, *d'écharpe* ou de *lierne*, suivant la position qu'elle occupe.

Moiser une pièce, c'est la saisir entre deux

moises. Ce mot moise s'appliquait autrefois à la moitié d'une poutre fendue suivant sa longueur; ainsi, moiser une pièce, c'est, à proprement parler, la saisir entre les deux moitiés d'une poutre ainsi divisée.

Les moises verticales ou inclinées portent quelquefois le nom de *moises pendantes*. (Voy. PONTS, PONTS BIAIS.)

MOISSONNEUSE. Voy. MACHINES AGRICOLES.

MOLETTES, poulies d'un grand diamètre employées dans les mines pour élever les tonnes de minerai (Voy. MACHINE A MOLETTES).

MOMENT, nom donné en Mécanique à diverses quantités, qui offrent ce caractère commun d'être constituées du produit d'une force par une distance.

I. On nomme *moment d'une force par rapport à un point* le produit de cette force par sa distance à ce point. On convient de regarder ce produit comme positif quand la force tend à faire tourner dans un certain sens déterminé la perpendiculaire abaissée du point sur la force; et on le regarde comme négatif quand la force tend à faire tourner cette perpendiculaire en sens contraire.

A l'aide de cette convention on démontre (Voy. THÉORÈME DE VARIGNON) que la somme algébrique des moments de deux forces appliquées en un même point matériel, par rapport à un point quelconque situé dans le plan de ces forces, est égale au moment de leur résultante. On étend ensuite la proposition à un nombre quelconque de forces concourantes situées dans un même plan. On l'étend enfin aux projections, sur un même plan, d'un système quelconque de forces concourantes situées comme on voudra dans l'espace.

Le point par rapport auquel on prend les moments d'un système de forces se nomme le *centre des moments*. Le moment d'une force par rapport à un point peut être nul de deux manières, ou parce que la force est nulle, ou parce qu'elle passe par le centre des moments, attendu que dans ce cas la perpendiculaire par laquelle il faudrait multiplier la force est égale à zéro.

II. On nomme *moment d'une force par rapport à un axe* le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la plus courte distance de cette projection à l'axe. On convient de regarder ce produit comme positif quand la force tend à faire tourner la perpendiculaire qui mesure cette plus courte distance dans un sens déterminé; et on le regarde comme négatif quand la rotation tend à avoir lieu en sens contraire.

A l'aide de cette convention on démontre encore que la somme algébrique des moments, par rapport à un axe quelconque, d'un système de forces concourantes, situées comme on voudra dans l'espace, est égale au moment de la résultante. Cette proposition est une conséquence du théorème de Varignon. En effet, si l'on projette toutes les forces concourantes sur un plan perpendiculaire à l'axe, et que l'on considère les moments de leurs projections par rapport au point où le plan perpendiculaire rencontre l'axe, la somme algébrique des moments des projections des composantes sera égale au moment de la projection de la résultante. Or, le moment de l'une quelconque de ces projections par rapport au point considéré, n'est autre chose, d'après la définition,

que le moment de la force elle-même par rapport à l'axe; la proposition se trouve donc démontrée.

On adopte ordinairement pour le sens positif du moment d'une force par rapport à un axe le sens positif du moment de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au point où cet axe rencontre le plan.

Le moment d'une force par rapport à un axe peut être nul de trois manières : ou parce que la force est nulle; ou parce qu'elle est parallèle à l'axe, car alors sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est nulle; ou parce qu'elle rencontre l'axe, car alors sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe passe par le point où cet axe perce le plan perpendiculaire, et la plus courte distance de la projection à l'axe est égale à zéro. On peut résumer ces trois cas en disant que : le moment d'une force par rapport à un axe est nul lorsque la force est nulle, ou lorsqu'elle est dans un même plan avec l'axe (soit qu'elle lui soit parallèle, soit qu'elle le rencontre).

Le théorème qu'on vient de démontrer s'étend à un système de forces parallèles.

En effet, remarquons d'abord que si l'on projette sur un même plan deux forces parallèles quelconques et leur résultante, la projection de la résultante sera la résultante des projections des composantes; car, d'une part, les projections des forces parallèles seront proportionnelles à ces forces; et, d'autre part, les distances entre les projections sont aussi proportionnelles aux distances entre les forces elles-mêmes. Cela posé :

Considérons d'abord deux forces parallèles et de même sens. Soit O (fig. 1) le point où l'axe, supposé

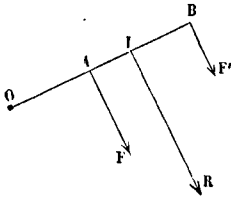


Fig. 1.

perpendiculaire au plan de la figure, rencontre ce plan. Soient F, F' et R les projections, sur le plan de la figure, des deux forces et de leur résultante. Du point O abaissons sur la direction de ces forces une perpendiculaire commune; et soient A, B, I les points où cette perpendiculaire rencontre les trois forces : points que nous supposerons liés invariablement au corps solide qui reçoit l'action des forces considérées, et que par conséquent nous pourrions prendre pour les points d'application de F, de F' et de R. D'après la règle de la composition des forces parallèles et de même sens (Voy. COMPOSITION DES FORCES), on aura

$$F : F' = IB : IA, \text{ d'où } F \cdot IA = F' \cdot IB,$$

$$\text{ou } F(OI - OA) = F'(OB - OI),$$

relation qu'on peut mettre sous la forme

$$F \cdot OA + F' \cdot OB = (F + F') \cdot OI = R \cdot OI.$$

Or les produits $F \cdot OA$, $F' \cdot OB$, et $R \cdot OI$ ne sont autre chose, d'après la définition, que les moments des deux forces considérées dans l'espace et de leur résultante par rapport à l'axe projeté en O; on voit

donc que la somme des moments des composantes est égale au moment de la résultante. On vérifie aisément que la proposition a lieu quelle que soit la position du point O par rapport aux projections F, F' et R, pourvu que par le mot somme on entende une somme algébrique.

Si les forces proposées, et par suite les forces F et F', étaient de sens contraire (fig. 2), en abaissant

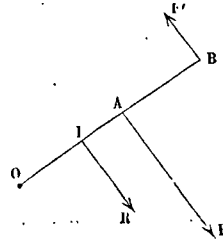


Fig. 2.

comme plus haut une perpendiculaire OB sur la direction de ces forces, on aurait

$$F \cdot IA = F' \cdot IB,$$

$$\text{ou } F(OA - OI) = F'(OB - OI),$$

relation qu'on peut écrire

$$F \cdot OA - F' \cdot OB = (F - F') \cdot OI = R \cdot OI,$$

et qui exprime encore que la somme algébrique des composantes est égale au moment de la résultante. Le résultat serait le même quelle que soit la position du point O.

Pour étendre la proposition à un système de forces parallèles et de même sens, on les projettera, comme dans les deux exemples ci-dessus, sur un plan perpendiculaire à l'axe. Soient F, F', F'', F''', F'''' les projections, lesquelles seront parallèles entre elles. Soit r la résultante de F et de F'; r' la résultante de r et de F''; r'' la résultante de r' et de F'''; enfin R la résultante de r'' et de F''''; laquelle sera la résultante totale. On aura successivement :

$$\text{mom. } r = \text{mom. } F + \text{mom. } F';$$

$$\text{mom. } r' = \text{mom. } r + \text{mom. } F'';$$

$$\text{mom. } r'' = \text{mom. } r' + \text{mom. } F''';$$

$$\text{mom. } R = \text{mom. } r'' + \text{mom. } F''''.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et supprimant les termes devenus communs aux deux membres, on obtiendra

$$\text{mom. } R = \text{mom. } F + \text{mom. } F' + \text{mom. } F'' + \text{mom. } F''' + \text{mom. } F'''';$$

ce qui revient à dire que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Enfin, si l'on a un système quelconque de forces parallèles; soit R la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, de toutes les forces qui tirent dans un sens; le moment de R sera égal à la somme algébrique des moments de ce premier groupe de forces. Soit R' la projection, sur le même plan, de toutes les forces qui tirent en sens contraire; le moment de R' sera égal à la somme algébrique des moments de ce groupe de forces. Soit R'' la résultante de R et de R'; on aura

$$\text{mom. } R'' = \text{mom. } R + \text{mom. } R',$$

et, en remplaçant mom. R et mom. R' par leurs valeurs, on aura une relation exprimant que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Si les forces R et R' formaient un couple, elles n'auraient pas de résultante, et la proposition ne subsisterait plus.

Mais le *moment du couple*, ou la somme des moments des forces R et R' , serait égal à l'une d'elles, multipliée par la distance de ces deux forces. Car si, par exemple, on suppose que les forces F et F' (fig. 2) soient égales, auquel cas il n'y a plus de résultante, on a, en prenant le sens de F' pour le sens positif des moments :

$$F'.OB - F.OA = F.(OB - OA) = F.AB,$$

quelle que soit la position du point O .

On représente souvent le moment d'une force par rapport à un axe par la caractéristique \mathcal{M} placée devant la lettre qui représente la force; ainsi $\mathcal{M}F$ signifie moment de la force F . Si dans une même question on a à prendre les moments par rapport à plusieurs axes, on distingue ces moments par un indice placé au bas de la caractéristique. Si, par exemple, on a à prendre les moments d'une même force par rapport à trois axes rectangulaires des x , des y , et des z , on écrit

$$\mathcal{M}_x F, \mathcal{M}_y F, \mathcal{M}_z F,$$

et ces notations signifient respectivement : moment de la force F par rapport à l'axe des x , moment de la force F par rapport à l'axe des y , moment de la force F par rapport à l'axe des z . Dans ce cas on adopte généralement les conventions suivantes relativement au sens positif des moments :

Par rapport à l'axe des x , le sens positif est celui qui va de la partie positive de l'axe des y vers la partie positive de l'axe des z . Par rapport à l'axe des y , le sens positif est celui qui va de la partie positive de l'axe des x vers la partie positive de l'axe des z . Par rapport à l'axe des z , le sens positif est celui qui va de la partie positive de l'axe des x vers la partie positive de l'axe des y .

III. On appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de cette force par la distance de son point d'application à ce plan. Le plan lui-même est le *plan des moments*. Pour généraliser les énoncés, on convient de regarder le produit comme positif lorsque la force tend à faire tourner dans un certain sens déterminé la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan des moments, et on le regarde comme négatif lorsque la rotation tend à se faire en sens contraire. Moyennant cette convention, on démontre que la *somme algébrique des moments d'un système de forces parallèles par rapport à un même plan est égale au moment de leur résultante par rapport à ce plan*.

Considérons d'abord deux forces parallèles et de même sens F et F' (fig. 3) et leur résultante R ; soient A, B, C les points d'application de ces forces, que l'on peut toujours supposer en ligne droite. Soit PQ le plan des moments. Abaissons sur ce plan les perpendiculaires AA', BB', CC' , dont les pieds A', B', C' seront également en ligne droite. Par le point d'application C de la résultante, menons HK parallèle à $A'B'$. D'après les règles de la composition des forces parallèles, on aura

$$F : F' = BC : AC,$$

ou, attendu que les triangles ACH et BCK sont semblables,

$$F : F' = BK : AH, \text{ d'où } F.AH = F'.BK,$$

ou bien $F(A'H - AA') = F'(BB' - KB')$,

ou encore $F(CC' - AA') = F'(BB' - CC')$, relation que l'on peut écrire

$$(F + F').CC' = F.AA' + F'.BB',$$

ou $R.CC' = F.AA' + F'.BB'$, [1]

c'est-à-dire que le moment de la résultante R est

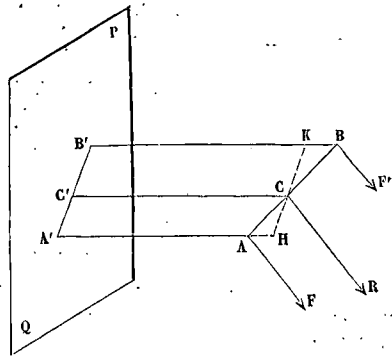


Fig. 3.

égal à la somme des moments des composantes F et F' .

Si l'on transportait le plan des moments parallèlement à lui-même d'une quantité quelconque d , le théorème subsisterait encore. Car on a, identiquement

$$R.d = F.d + F'.d. \quad [2]$$

Si l'on ajoute terme à terme les relations [1] et [2], on obtient

$$R(CC' + d) = F.(AA' + d) + F'(BB' + d). \quad [3]$$

Or, les quantités $CC' + d, AA' + d, BB' + d$, sont les nouvelles distances des points C, A, B au plan des moments; donc la relation [3] exprime encore que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes. Et cette relation subsiste, soit que d soit positif ou négatif, et quelle que soit par conséquent la position du plan des moments par rapport aux points A, B, C . On pourrait d'ailleurs s'en assurer en traitant la question directement dans tous les cas, et en ayant égard aux signes des moments.

Considérons maintenant deux forces parallèles et de sens contraire F et F' (fig. 4) et leur résultante

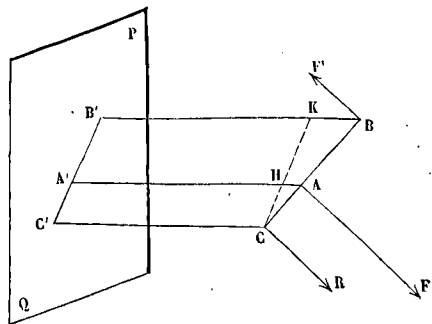


Fig. 4.

R , appliquées aux points A, B, C , supposés en ligne droite. Soit PQ le plan des moments. Abaissons sur ce plan les perpendiculaires AA', BB' et CC' , dont les

pieds seront en ligne droite, et menons par le point C une droite CHK parallèle à C'B'. Nous aurons

$$F : F' = BC : AC,$$

ou, à cause de la similitude des triangles ACH et BCK,

$$F : F' = BK : AH, \text{ d'où } F \cdot AH = F' \cdot BK,$$

ou encore $F(AA' - A'H) = F'(BB' - B'K)$,

ou encore $F(AA' - CC') = F'(BB' - CC')$, relation que l'on peut écrire

$$F \cdot AA' - F' \cdot BB' = (F - F') \cdot CC' = R \cdot CC', \quad [4]$$

et qui exprime que la somme algébrique des moments des composantes est égale au moment de la résultante. On fait voir, comme dans le premier cas, que la relation subsiste quand on transporte le plan des moments parallèlement à lui-même d'une quantité d de manière à lui faire prendre telle position qu'on voudra par rapport aux points A, B, C. On a, en effet, identiquement

$$F \cdot d - F' \cdot d = R \cdot d, \quad [5]$$

et si l'on ajoute terme à terme les relations [4] et [5], on obtient

$$F(AA' + d) - F'(BB' + d) = R(CC' + d), \quad [6]$$

ce qui revient encore à l'énoncé du théorème, puisque les distances des points A, B, C au plan des moments sont devenues $AA' + d$, $BB' + d$, et $CC' + d$. Et la relation [6] a lieu quels que soient le signe et la valeur absolue de d , c'est-à-dire quelle que soit la position du plan des moments par rapport aux points A, B, C; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en traitant la question directement dans chaque cas.

On peut remarquer que lorsque le plan des moments passe par le point d'application de la résultante, le moment de cette résultante est nul; en sorte que la somme algébrique des moments des deux composantes est égale à zéro, c'est-à-dire que les moments des composantes sont alors égaux et de signe contraire; ce qu'on pourrait aussi vérifier directement.

Le théorème des moments se trouvant établi pour deux forces parallèles quelconques, on l'étend sans difficulté à un nombre quelconque de forces parallèles. Supposons d'abord que toutes les forces soient de même sens. Désignons par F, F', F'', F''', F'''' ces composantes; soit r la résultante de F et de F' , r' la résultante de r et de F'' , r'' la résultante de r' et de F''' , enfin R la résultante de r'' et de F'''' , c'est-à-dire la résultante totale. On aura successivement

$$\begin{aligned} \text{mom. } r &= \text{mom. } F + \text{mom. } F'; \\ \text{mom. } r' &= \text{mom. } r + \text{mom. } F''; \\ \text{mom. } r'' &= \text{mom. } r' + \text{mom. } F'''; \\ \text{mom. } R &= \text{mom. } r'' + \text{mom. } F'''. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, et supprimant ensuite les termes communs aux deux membres, on obtient

$$\text{mom. } R = \text{mom. } F + \text{mom. } F' + \text{mom. } F'' + \text{mom. } F''' + \text{mom. } F''''$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Supposons enfin qu'un certain nombre de forces tirent dans un sens, et les autres en sens contraire; soit R la résultante des premières, R' la résultante des dernières, et R'' la résultante totale. On aura

$$\text{mom. } R'' = \text{mom. } R + \text{mom. } R',$$

le signe + désignant toujours une somme algébrique; et si l'on remet pour $\text{mom. } R$ et $\text{mom. } R'$ leurs valeurs, l'équation exprimera que le moment

de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Si les forces R et R' formaient un couple, la proposition n'aurait plus lieu, puisqu'il n'y aurait plus de résultante.

IV. La considération des moments par rapport à un plan peut servir à déterminer la résultante d'un système de forces parallèles et de même sens, ainsi que le CENTRE DES FORCES PARALLÈLES (Voy. ce mot).

Soient F, F', F'', \dots les forces considérées, $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \dots$ les coordonnées de leurs points d'application par rapport à trois plans rectangulaires deux à deux, coordonnées que l'on pourra toujours rendre positives en choisissant convenablement les plans coordonnés; R la résultante de ces forces, et X, Y, Z les coordonnées du centre des forces parallèles. On pourra supposer la résultante R appliquée à ce point, et en prenant successivement les moments par rapport aux trois plans coordonnés des yx , des xz et des xy , on aura

$$RX = Fx + F'x' + F''x'' + \dots = \Sigma Fx, \text{ d'où } X = \frac{\Sigma Fx}{R},$$

$$RY = Fy + F'y' + F''y'' + \dots = \Sigma Fy, \text{ d'où } Y = \frac{\Sigma Fy}{R},$$

$$RZ = Fz + F'z' + F''z'' + \dots = \Sigma Fz, \text{ d'où } Z = \frac{\Sigma Fz}{R}.$$

avec $R = F + F' + F'' + \dots = \Sigma F$.

Dans le cas où toutes les forces sont égales, et en nombre n , on a $R = nF$, et les formules ci-dessus se réduisent à

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n}, \quad Z = \frac{\Sigma z}{n},$$

c'est-à-dire que le centre des forces parallèles n'est autre chose dans ce cas que le centre des moyennes distances des points d'application des composantes.

On pourrait suivre une marche analogue dans le cas où toutes les forces parallèles ne seraient pas de même sens, en ayant égard au signe des moments.

Si le système se réduisait à un couple, on aurait $R = 0$, et les coordonnées X, Y, Z deviendraient infinies; ce qui doit être, puisque dans ce cas il n'y a pas de résultante.

MOMENT DE STABILITÉ, produit du poids d'un corps posé suivant une face plane sur un plan horizontal, par la distance entre la verticale de son centre de gravité et l'arête de la base qui en est la plus voisine. La somme des moments des forces extérieures autres que le poids du corps, par rapport à cette arête, peut varier depuis zéro jusqu'à une valeur égale et contraire au moment de stabilité, sans que l'équilibre du corps cesse de subsister (Voy. STABILITÉ).

MOMENT D'INERTIE, somme des produits qu'on obtient en multipliant la masse de chacun des points matériels qui composent un système, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, par le carré de sa distance à cet axe. Si m désigne la masse de l'un de ces points, et r sa distance à l'axe considéré, le moment d'inertie, qu'on représente ordinairement par la lettre I , a pour expression

$$I = \Sigma mr^2.$$

I. Quand on a le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe, on obtient aisément son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au

premier. Prenons, en effet, pour axe des x le premier axe, nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

et par conséquent

$$I = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Faisons passer le plan des xz par le second axe, que nous supposons distant du premier de la quantité d ; la distance du point qui a pour coordonnées x et y à ce nouvel axe, sera exprimée par

$$(x - d)^2 + y^2;$$

ainsi, en nommant I' le moment d'inertie par rapport au second axe, on aura

$$I' = \Sigma m [(x - d)^2 + y^2],$$

ou $I' = \Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma md^2 - 2\Sigma mdx,$

ou $I' = I + Md^2 - 2d\Sigma mx,$ [1]

en appelant M la masse totale.

Si le premier axe passe par le centre de gravité du système, on aura, en prenant les moments des masses partielles par rapport au plan des xy (Voy. MOMENT, CENTRE DE GRAVITÉ),

$$\Sigma mx = 0;$$

il restera donc

$$I' = I + Md^2, \quad [A]$$

c'est-à-dire que le moment d'inertie, par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant au centre de gravité du système, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux axes.

On en conclut que de tous les axes parallèles à une direction donnée, celui pour lequel le moment d'inertie d'un système est le plus petit, est celui qui passe par le centre de gravité.

II. Cherchons le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe quelconque passant par l'origine et faisant les angles α, β, γ avec trois axes de coordonnées rectangulaires passant par ce centre. Soit OI l'axe considéré (fig. 1); soit M un point du

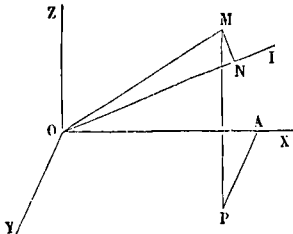


Fig. 1.

système dont les coordonnées sont x, y, z ; abaissons de ce point sur l'axe OI la perpendiculaire MN ; nous aurons

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OM}^2 \cdot \cos^2 \text{MOI}.$$

Mais $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$

et si OA, AP et MP sont les coordonnées du point M , on a, par le théorème fondamental des projections,

$$\begin{aligned} \overline{OM} \cos \text{MOI} &= OA \cos \alpha + AP \cos \beta + MP \cos \gamma \\ &= x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma; \end{aligned}$$

par conséquent

$\overline{MN}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$. On peut mettre cette relation sous la forme

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= x^2(1 - \cos^2 \alpha) + y^2(1 - \cos^2 \beta) + z^2(1 - \cos^2 \gamma) \\ &- 2(xy \cos \alpha \cos \beta + xz \cos \alpha \cos \gamma + yz \cos \beta \cos \gamma), \end{aligned}$$

ou, à cause de la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= x^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \\ &+ z^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \\ &- 2(xy \cos \alpha \cos \beta + xz \cos \alpha \cos \gamma + yz \cos \beta \cos \gamma). \end{aligned}$$

On aurait une relation analogue pour les autres points du système. Multipliant chacune d'elles par la masse du point matériel correspondant, et faisant la somme, on aura, pour l'expression du moment d'inertie,

$$\begin{aligned} I &= (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \Sigma mx^2 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \Sigma my^2 \\ &+ (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \Sigma mz^2 \\ &- 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma mxy - 2 \cos \alpha \cos \gamma \Sigma mxz \\ &- 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma myz. \end{aligned} \quad [2]$$

Prenons sur OI une longueur OK exprimée par la relation

$$OK = \frac{\lambda}{\sqrt{I}}, \quad [3]$$

les coordonnées du point K seront

$$\xi = OK \cos \alpha, \quad \eta = OK \cos \beta, \quad \zeta = OK \cos \gamma;$$

d'où l'on tire

$$\cos \alpha = \frac{\xi \sqrt{I}}{\lambda}, \quad \cos \beta = \frac{\eta \sqrt{I}}{\lambda}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta \sqrt{I}}{\lambda}. \quad [4]$$

Si l'on substitue dans [2] ces valeurs, on aura une relation entre ξ, η et ζ qui sera l'équation de la surface, lieu des points K . On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\lambda}(\eta^2 + \zeta^2) \Sigma mx^2 + \frac{1}{\lambda}(\xi^2 + \zeta^2) \Sigma my^2 + \frac{1}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2) \Sigma mz^2 \\ &- 2 \frac{1}{\lambda} \eta \zeta \Sigma mxy - 2 \frac{1}{\lambda} \xi \zeta \Sigma mxz - 2 \frac{1}{\lambda} \xi \eta \Sigma mxy, \end{aligned}$$

ou, en simplifiant, et posant pour abréger :

$$\Sigma mx^2 = a, \quad \Sigma my^2 = b, \quad \Sigma mz^2 = c,$$

$$\Sigma mxy = d, \quad \Sigma mxz = e, \quad \Sigma mxy = f,$$

$$(b+c)\xi^2 + (a+c)\eta^2 + (a+b)\zeta^2 - 2d\xi\zeta - 2e\xi\eta - 2f\eta\zeta = \lambda, \quad [5]$$

équation d'un ellipsoïde qui a son centre à l'origine, c'est-à-dire au centre de gravité du système. C'est l'ellipsoïde considéré dans la rotation des corps, et que M . Poincaré a appelé l'ELLIPSOÏDE CENTRAL (Voy. ce mot; voy. aussi MOUVEMENT INSTANTANÉ). Il jouit de cette propriété que si ρ désigne l'un de ses rayons, et I le moment d'inertie du système par rapport à ce rayon, on aura toujours, en vertu de la relation [3],

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{I}}, \quad \text{d'où } I = \frac{\lambda^2}{\rho^2}.$$

La quantité λ reste arbitraire; afin de simplifier, on la prend ordinairement égale à l'unité.

Par un choix convenable des axes, on peut toujours, dans l'équation [5] de l'ellipsoïde, faire disparaître les termes affectés des doubles produits des variables; il suffit, pour cela, de prendre pour axes les axes mêmes de l'ellipsoïde. Son équation se réduit alors à

$$(b+c)\xi^2 + (a+c)\eta^2 + (a+b)\zeta^2 = \lambda$$

ou

$$\xi^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \eta^2 \Sigma m(x^2 + z^2) + \zeta^2 \Sigma m(x^2 + y^2) = \lambda.$$

Mais les coefficients de ξ^2 , de η^2 et de ζ^2 ne sont autre chose alors que les moments d'inertie du système, par rapport aux trois axes de l'ellipsoïde; si on les désigne respectivement par I_x, I_y, I_z , on peut donc écrire, pour l'équation de l'ellipsoïde,

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 + I_z \zeta^2 = \lambda. \quad [6]$$

Les quantités I_x, I_y, I_z sont ce que l'on appelle les

moments d'inertie principaux du système, et l'on appelle axes principaux les directions des axes de l'ellipsoïde central (Voy. AXES PRINCIPAUX).

Le moment d'inertie, par rapport à un axe quelconque passant par l'origine et faisant les angles α, β, γ avec les axes de l'ellipsoïde central, s'exprime aisément en fonction de ces angles et des moments d'inertie principaux. En effet, le moment d'inertie I et le rayon ρ de l'ellipsoïde correspondant aux angles α, β, γ , restent liés par la relation

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{I}}$$

On a d'ailleurs, entre les angles α, β, γ , le rayon ρ et les coordonnées ξ, η, ζ de l'extrémité de ce rayon, les relations

$$\xi = \rho \cos \alpha, \quad \eta = \rho \cos \beta, \quad \zeta = \rho \cos \gamma.$$

Si, dans l'équation [6] de l'ellipsoïde central, on met pour ξ, η, ζ ces valeurs, et qu'on remplace λ par sa valeur $\rho \sqrt{I}$, on obtient, après avoir divisé par ρ^2 ,

$$I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma = I. \quad [7]$$

Pour calculer le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par un point donné quelconque, il suffit donc de connaître les angles que cet axe fait avec les axes principaux relatifs à ce point, et les moments d'inertie du système par rapport à ces axes.

En vertu de la relation [3], le plus grand moment d'inertie est celui qui répond au petit axe de l'ellipsoïde central, et le plus petit est celui qui répond au grand axe. Si deux des moments d'inertie principaux sont égaux entre eux, l'ellipsoïde a aussi deux axes égaux, et devient un ellipsoïde de révolution; le moment d'inertie est donc le même pour tous les axes qui font un angle égal avec l'axe de révolution. Si les trois moments d'inertie principaux sont égaux, il en est de même des trois axes de l'ellipsoïde qui devient alors une sphère; et dès lors tous les moments d'inertie, par rapport à des axes quelconques menés par le point considéré, deviennent égaux. Lorsque l'axe par rapport auquel on prend le moment d'inertie est dans le plan de deux des axes principaux, le moment d'inertie devient indépendant du moment d'inertie principal relatif au troisième axe; si, par exemple, l'axe que l'on considère est situé dans le plan des axes principaux, pris pour axes des x et des y , on a $\cos \gamma = 0$, et l'équation [7] de l'ellipsoïde central devient indépendante de I_z . On trouvera dans les traités de Mécanique rationnelle quelques autres propriétés des moments d'inertie qui sont d'une moindre utilité dans les applications. (Voy. le Cours de Mécanique de l'École polytechnique, par M. Duhamel.)

On remarquera que si le corps considéré a un plan de symétrie passant par le centre de l'ellipsoïde central, cet ellipsoïde est lui-même symétrique par rapport à ce plan; car si le plan de symétrie est pris pour plan des xy , les sommes Σmxz et Σmyz sont nulles comme composées de termes qui sont deux à deux égaux et de signe contraire; il ne reste donc, dans l'équation de l'ellipsoïde, que les termes affectés des carrés ξ^2, η^2, ζ^2 , le terme en $\xi\eta$ et le terme constant; cet ellipsoïde est donc lui-même symétrique par rapport au plan des xy . Il en résulte que si le corps a un plan de symétrie passant par un point donné, deux des axes principaux relatifs à

ce point sont dans ce plan de symétrie, et le troisième lui est perpendiculaire. Si le corps a deux plans de symétrie perpendiculaires entre eux, passant par un point donné, leur intersection est un axe principal relatif à ce point, et les deux autres sont situés respectivement dans les deux plans de symétrie.

On voit, par exemple, que dans un parallélépipède rectangle les trois axes principaux, relatifs au centre de gravité, sont les trois médianes. Dans un cône droit à base elliptique, l'axe de figure est un axe principal relatif au centre de gravité, et les deux autres sont parallèles aux axes de l'ellipse qui sert de base au cône. Dans un ellipsoïde, les axes principaux, relatifs aux centres de gravité, sont les trois axes de l'ellipsoïde lui-même.

III. On nomme bras de l'inertie ou rayon de gyration la distance à laquelle il faudrait concentrer la masse d'un corps tournant, pour que son moment d'inertie restât le même. D'après cette définition, en nommant R le rayon de gyration et M la masse totale, on a

$$MR^2 = \Sigma mr^2, \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{\Sigma mr^2}{M}, \quad [8]$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est égal au moment d'inertie divisé par la masse totale, et que réciproquement le moment d'inertie est égal à la masse totale multipliée par le carré du rayon de gyration. La considération du rayon de gyration est souvent utile dans la recherche des moments d'inertie, et elle simplifie les énoncés dans beaucoup de cas.

On peut remarquer que si l'on nomme R le rayon de gyration relatif à un axe passant par le centre de gravité, R' le rayon de gyration par rapport à un axe parallèle, et a la distance des deux axes, la relation [A] peut s'écrire

$$MR'^2 = MR^2 + Md^2,$$

$$\text{d'où} \quad R'^2 = R^2 + d^2, \quad [B]$$

c'est-à-dire que le rayon de gyration R' est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les deux côtés de l'angle droit seraient le rayon de gyration R relatif au centre de gravité, et la distance d des deux axes.

IV. On fait quelquefois usage, dans la recherche du moment d'inertie, du principe suivant: Si un corps peut se décomposer en parties ayant toutes le même rayon de gyration, ce rayon de gyration est celui du corps lui-même. Car si M', M'', M''', \dots , désignent les masses de ces différentes parties, R le rayon de gyration commun, et M la somme des masses, on aura, pour l'expression du moment d'inertie,

$$I = \Sigma Mr^2 = M'R^2 + M''R^2 + M'''R^2 + \dots,$$

attendu que le moment d'inertie total est la somme des moments d'inertie des différentes parties. Or cette équation peut s'écrire

$$\Sigma mr^2 = (M' + M'' + M''' + \dots)R^2 = MR^2.$$

Donc R est le rayon de gyration du corps entier.

V. Quand le corps considéré est homogène, la recherche de son rayon de gyration devient une question de Géométrie. En effet, soit Π le poids du mètre cube de la matière du corps, v le volume de l'élément dont la masse est m , et V le volume total, on aura

$$m = \frac{\Pi v}{g} \quad \text{et} \quad M = \frac{\Pi V}{g}.$$

Par conséquent la relation [8] devient

$$R^2 = \frac{\Sigma \Pi v r^2}{\Pi V} \text{ ou } R^2 = \frac{\Sigma v r^2}{V}, \quad [9]$$

relation analogue à la relation [8], mais dans laquelle les masses sont remplacées par les volumes ; le rayon de gyration devient donc indépendant de la nature du corps ; il ne dépend plus que de sa forme. C'est l'hypothèse que nous adopterons dans tout ce qui va suivre ; si le corps se composait de parties formées de matériaux différents, il faudrait opérer séparément pour chacune de ces parties, et faire la somme des moments d'inertie obtenus.

La quantité $\Sigma v r^2$ se nomme, par analogie, le *moment d'inertie du volume* ; nous aurons quelquefois recours à cette dénomination ; mais il nous arrivera aussi de dire simplement *moment d'inertie* lorsqu'il ne pourra y avoir lieu à aucune ambiguïté.

Nous considérerons successivement : le cas où deux dimensions du corps sont négligeables vis-à-vis de la troisième, et où, par conséquent, le corps se réduit à une tige mince, droite ou courbe ; le cas où une dimension seulement est négligeable par rapport aux deux autres, et où le corps se réduit à une feuille mince, plane ou courbe, ou même à une simple surface plane ; enfin, le cas où les trois dimensions sont comparables. Pour éviter toute confusion, nous désignerons l'axe de révolution par les lettres OX quand il sera dans le plan de la figure, et par la lettre Ω quand il sera perpendiculaire au plan de la figure.

VI. TIGE RECTILIGNE. Supposons d'abord que la tige tourne autour d'un axe OX (fig. 2) passant par l'une

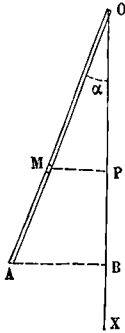


Fig. 2.

de ses extrémités, en faisant un angle constant α avec cet axe. Soit L la longueur OA de la tige, a sa section transversale, l la distance d'un de ses éléments M au point O. Le volume de cet élément sera adl ; sa distance MP à l'axe de rotation sera $l \sin \alpha$; on aura donc, pour le moment d'inertie du volume,

$$\Sigma v r^2 = \int_0^L adl \cdot l^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} aL^3 \sin^2 \alpha.$$

D'ailleurs le volume total de la tige est

$$V = aL ;$$

il en résulte que le carré du rayon de gyration a pour valeur

$$R^2 = \frac{\frac{1}{3} aL^3 \sin^2 \alpha}{aL} \text{ ou } R^2 = \frac{1}{3} (L \sin \alpha)^2. \quad [10]$$

Or, si AB est la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe, on a $L \sin \alpha = AB$;

donc $R^2 = \frac{1}{3} AB^2$,

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est le tiers du carré de la distance de l'extrémité libre de la tige à l'axe de révolution.

Supposons la tige perpendiculaire à l'axe, comme

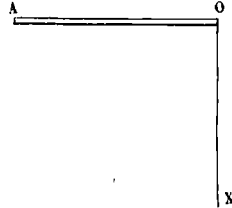


Fig. 3.

OA (fig. 3) ; nous n'aurons qu'à faire $\alpha = 90^\circ$ dans l'expression [10], ce qui donnera

$$R^2 = \frac{1}{3} L^2.$$

Le carré du rayon de gyration est donc égal, dans ce cas, au tiers du carré de la longueur de la tige.

Supposons qu'une tige de longueur L, telle que AB (fig. 4), tourne autour d'un axe perpendicu-

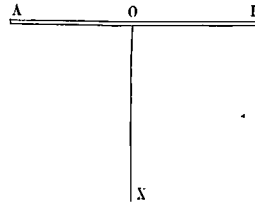


Fig. 4.

laire mené par son milieu, les deux parties OA et OB étant symétriques par rapport à l'axe de rotation, auront le même rayon de gyration ; ce rayon de gyration est donc celui de la tige entière, et l'on a

$$R^2 = \frac{1}{3} (AO)^2 = \frac{1}{12} L^2.$$

Supposons, enfin, que la tige AB (fig. 5) tourne

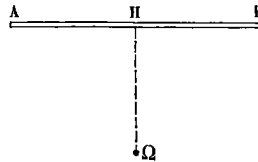


Fig. 5.

autour d'un axe Ω perpendiculaire au plan de la figure, et situé dans le plan mené perpendiculairement à la tige par son milieu H. Si nous appelons I le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle

à Ω , mais mené par le centre de gravité H de la tige, I' le moment d'inertie demandé, et d la distance ΩH qui est la plus courte distance de la tige à l'axe de révolution, nous aurons

$$I' = I + Md^2;$$

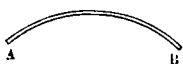
ou, en divisant par la masse totale M, et appelant R' et R les rayons de gyration correspondants à I' et à I (Voy. l'équation [B]),

$$R'^2 = R^2 + d^2.$$

Or on vient de voir que $R^2 = \frac{1}{12} L^2$, en appelant toujours L la longueur de la tige; donc enfin

$$R'^2 = \frac{1}{12} L^2 + d^2. \quad [11]$$

TRIANGLE EN ARC DE CERCLE (fig. 6). Si l'axe de ré-



• Ω
Fig. 6.

volution est un axe mené par le centre de l'arc perpendiculairement à son plan, tous les éléments de la tige sont à la même distance ρ de l'axe; on a donc

$$I = \Sigma m\rho^2 = \rho^2 M,$$

et par conséquent le rayon de gyration est le rayon ρ de l'arc lui-même.

Supposons que l'arc tourne autour du rayon OA (fig. 7) qui passe par son milieu. Soit a la section

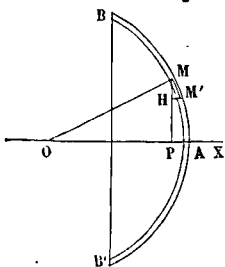


Fig. 7.

de la tige et ds l'élément MM' ; $x = OP$ et $y = MP$ les coordonnées du point M par rapport à OX et à une perpendiculaire OY. On aura $v = ads$, $r = y$, à un infiniment petit près d'un ordre supérieur au premier; par conséquent

$$I = \int ads \cdot y^2.$$

Mais si l'on mène $M'H$ parallèle à OX, les triangles OMP et $MM'H$ sont semblables; on a donc

$$MM' : OM = M'H : MP,$$

ou $ds : \rho = dx : y$;

d'où

$$y ds = \rho dx.$$

Par suite il vient

$$\int ads \cdot y^2 = \int a \cdot \rho dx \cdot y = a\rho \int y dx.$$

Or, l'intégrale $\int y dx$, étendue à l'arc entier, est l'aire du segment BAB' ; il vient donc

$$\Sigma vr^2 = a\rho \cdot \text{segm.} BAB'.$$

Le volume de la tringle est d'ailleurs $a \cdot \text{arc.} BB'$, il vient donc

$$R^2 = \frac{\Sigma vr^2}{V} = \frac{a\rho \cdot \text{seg.} BAB'}{a \cdot \text{arc.} BB'} = \rho \cdot \frac{\text{seg.} BAB'}{\text{arc.} BB'}.$$

Si l'arc est une demi-circonférence, le segment a pour valeur $\frac{1}{2} \pi \rho^2$, et l'arc a pour valeur $\pi \rho$; il vient donc, dans ce cas,

$$R^2 = \frac{\rho \cdot \frac{1}{2} \pi \rho^2}{\pi \rho} = \frac{1}{2} \rho^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est alors la moitié du carré du rayon de la demi-circonférence.

VII. TRIANGLE ISOCELE. Soit $\Omega A'$ (fig. 8) un trian-

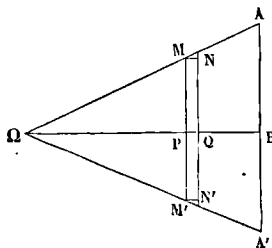


Fig. 8.

gle isocèle tournant autour d'un axe Ω mené par son sommet perpendiculairement à son plan. Divisons sa surface, par des parallèles à la base, en tranches infiniment minces, telles que $MNN'M'$; chacune d'elles pourra être assimilée à une tige rectiligne. Si donc on nomme x la distance ΩP de l'axe à cette tige, $2y$ la longueur de la tige, et e l'épaisseur perpendiculaire à la figure, on aura, pour le moment d'inertie de cette tige élémentaire, en vertu de l'équation [11],

$$2y dx \cdot e \left(x^2 + \frac{1}{3} y^2 \right),$$

ou, en remplaçant y par sa valeur en fonction de x qui est de la forme ax ,

$$2ae \left(1 + \frac{1}{3} a^2 \right) \cdot x^3 dx.$$

Le moment d'inertie total aura donc pour expression

$$2ae \left(1 + \frac{1}{3} a^2 \right) \int_0^X x^3 dx = \frac{1}{2} ae \left(1 + \frac{1}{3} a^2 \right) X^4,$$

en appelant X la distance ΩB du sommet à la base du triangle. Désignons par Y la longueur AB, et remplaçons a par sa valeur $\frac{Y}{X}$, il viendra

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Y}{X} e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Y^2}{X^2} \right) X^4 \text{ ou } \frac{1}{2} XY \cdot e \left(X^2 + \frac{1}{3} Y^2 \right).$$

D'ailleurs le volume du triangle a pour expression $XY \cdot e$,

on aura donc pour l'expressior. du rayon de gyration

$$R^2 = \frac{1}{2} \left(X^2 + \frac{1}{3} Y^2 \right). \quad [12]$$

L'épaisseur e a disparu; et, comme il en est toujours ainsi, on se dispense d'y avoir égard dans la recherche du rayon de gyration.

TRIANGLE RECTANGLE. Soit ΩAB (fig. 8) un triangle rectangle tournant autour d'un axe Ω mené

par le sommet d'un de ses angles aigus perpendiculairement à son plan. Construisons le triangle A'BΩ symétrique du premier par rapport à ΩB, le rayon de gyration du triangle isocèle AΩA' a pour valeur l'expression [12] ci-dessus. Mais les deux triangles ABΩ et A'BΩ étant égaux et placés de la même manière par rapport à l'axe de rotation, ils ont le même rayon de gyration; ce rayon de gyration est donc celui de leur ensemble, c'est-à-dire qu'il est exprimé par l'équation [12].

Considérons un triangle rectangle OAB (fig. 9)

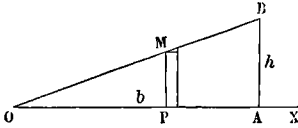


Fig. 9.

tournant autour d'un des côtés de l'angle droit. Si on le décompose par des parallèles à AB, en éléments rectangulaires très-minces; chacun d'eux aura pour expression ydx , et par conséquent le moment d'inertie de son aire sera $ydx.e.\frac{1}{3}y^2$, ou en remplaçant y par ax , $\frac{1}{3}a^2x^3dx$. La somme de ces moments d'inertie partiels, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=OA$, que nous désignerons b , est $\frac{1}{12}a^2b^4$. Mais on a $a^2b^2 = \overline{AB}^2 = h^2$; il viendra donc enfin pour le moment d'inertie total $\frac{1}{12}bh^3$.

Si le triangle tourne autour de son hypoténuse, on le divise en deux rectangles partiels, en abaissant une perpendiculaire BC (fig. 10) du sommet de

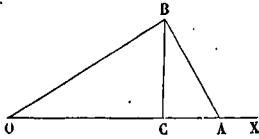


Fig. 10.

l'angle droit. Le moment d'inertie total est égal à la somme des moments d'inertie des deux triangles partiels, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{12}OC.\overline{BC}^3 + \frac{1}{12}CA.\overline{BC}^3, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{12}OA.\overline{BC}^3.$$

RECTANGLE. Considérons d'abord un rectangle ABCΩ (fig. 11) tournant autour d'un axe Ω mené

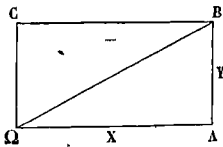


Fig. 11.

par l'un de ses sommets perpendiculairement à son plan. Menons la diagonale ΩB qui divisera le rectangle en deux triangles. Faisons ΩA=X et AB=Y.

Le moment d'inertie total sera la somme des moments d'inertie partiels; on aura donc, en dési-

gnant par I le moment d'inertie du volume du rectangle, et par e l'épaisseur qu'on lui attribue,

$$I = \frac{1}{2}XY.\frac{1}{2}\left(X^2 + \frac{1}{3}Y^2\right)e + \frac{1}{2}XY.\frac{1}{2}\left(Y^2 + \frac{1}{3}X^2\right)e$$

ou

$$I = \frac{1}{4}XY\left(\frac{4}{3}X^2 + \frac{4}{3}Y^2\right)e = \frac{1}{3}XY(X^2 + Y^2)e.$$

D'ailleurs le volume total a pour valeur

$$V = XY.e;$$

on aura donc

$$R^2 = \frac{I}{V} = \frac{1}{3}(X^2 + Y^2) = \frac{1}{3}\overline{OB}^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est le tiers du carré de la diagonale.

Considérons en second lieu un rectangle tournant autour d'un axe Ω (fig. 12) mené par le mi-

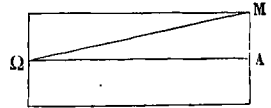


Fig. 12.

lieu d'un de ses côtés perpendiculairement à son plan. Par le point Ω menons la médiane ΩA qui divisera le rectangle proposé en deux rectangles égaux, ayant le même rayon de gyration; ce rayon de gyration sera celui du rectangle total, et l'on aura, d'après ce qu'on vient de voir,

$$R^2 = \frac{1}{3}\overline{\Omega M}^2.$$

Considérons encore un rectangle ABCD (fig. 13)

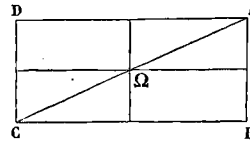


Fig. 13.

tournant autour d'un axe Ω mené par son centre de figure perpendiculairement à son plan. Si nous menons les deux médianes, elles diviseront le rectangle total en quatre rectangles partiels égaux et ayant le même rayon de gyration. Ce rayon de gyration sera donc celui du rectangle total, et l'on aura

$$R^2 = \frac{1}{3}\overline{\Omega A}^2 \text{ ou } R^2 = \frac{1}{12}\overline{AC}^2.$$

Si l'axe de rotation, toujours perpendiculaire au plan du rectangle, rencontre la médiane en dehors du rectangle, comme le montre la figure 14, en

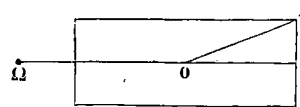


Fig. 14.

nommant R' le rayon de gyration relatif à l'axe Ω, et R le rayon de gyration relatif à un axe parallèle mené par le centre de figure O du rectangle, on aurait, en vertu de l'équation [B],

$$R'^2 = R^2 + \overline{\Omega O}^2 \text{ ou } R'^2 = \overline{\Omega O}^2 + \frac{1}{3}\overline{OA}^2.$$

Considérons maintenant un rectangle $ABB'A'$ (fig. 15) tournant autour de sa médiane OX . Son rayon de gyration sera le même que celui du demi-rectangle $ABKI$. Soit a la base AB , et b la hauteur

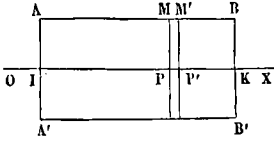


Fig. 15.

BB' . Divisons le rectangle $ABKI$ par des parallèles à BK en bandes infiniment minces, telles que $MM'P'P$; le volume d'une de ces bandes sera exprimé par

$$\frac{1}{2} b \cdot da \cdot e,$$

en nommant e l'épaisseur du rectangle. Le moment d'inertie du volume de cette bande sera donc

$$\frac{1}{2} b \cdot da \cdot e \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} b\right)^2 \text{ ou } \frac{1}{24} b^3 da \cdot e;$$

et le moment d'inertie du volume total du rectangle $ABKI$ sera la somme de tous les produits analogues, étendue à la base entière a , c'est-à-dire $\frac{1}{24} b^3 a e$.

D'ailleurs le volume de ce rectangle a pour valeur $\frac{1}{2} bae$; on aura donc pour le rayon de gyration l'expression

$$R^2 = \frac{\frac{1}{24} b^3 a e}{\frac{1}{2} b a e} = \frac{1}{12} b^2 \text{ ou } R^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} b\right)^2,$$

ce qu'on aurait pu voir encore en remarquant que chacune des bandes ayant un rayon de gyration exprimé par cette formule, le rayon de gyration de l'ensemble doit être exprimé par la même formule. On peut se dispenser d'avoir égard à l'épaisseur du rectangle.

Si le rectangle tourne autour de sa diagonale OA (fig. 16), son rayon de gyration est celui d'un des

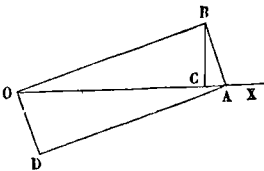


Fig. 16.

deux triangles rectangles partiels dont il se compose. Or, le moment d'inertie du triangle OAB est, comme on l'a vu plus haut

$$\frac{1}{12} \cdot OA \cdot \overline{BC}^3;$$

divisant par l'aire du triangle, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{2} AB \cdot OB,$$

on obtient

$$R^2 = \frac{1}{6} \frac{OA \cdot \overline{BC}^3}{AB \cdot OB^2};$$

mais $OA \cdot BC = AB \cdot OB$;

il vient donc

$$R^2 = \frac{1}{6} \overline{BC}^2.$$

Par suite, le moment d'inertie du rectangle est

$$\frac{1}{6} \cdot \overline{BC}^2 \cdot AB \cdot OB.$$

Si le rectangle tourne autour d'un axe OX (fig. 17)

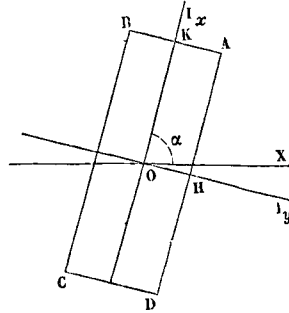


Fig. 17.

mené comme on voudra par son centre, soit α l'angle que fait cet axe avec l'une des médianes OK . Les deux médianes étant des axes principaux, on aura, en vertu de l'équation (7), dans laquelle on fera

$$\beta = 90^\circ - \alpha \text{ et } \gamma = 0,$$

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

Or, en nommant a le côté AD et b le côté AB , on a

$$I_x = \frac{1}{12} ab^3 \text{ et } I_y = \frac{1}{12} ba^3,$$

il vient donc

$$I = \frac{1}{12} ab (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha).$$

Si le rectangle était un carré, on aurait $b = a$, et par suite

$$I = \frac{1}{12} a^4.$$

Dans ce cas, le moment d'inertie devient indépendant de l'angle α .

RECTANGLE ÉVIDÉ. Dans la résistance des matériaux (Voy. FLEXION PLANE) on a à considérer le moment d'inertie d'un rectangle évidé, tel que celui de la figure 18, tournant autour d'une de ses

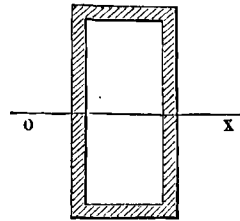


Fig. 18.

médianes, supposée horizontale. Ce moment d'inertie est la différence entre le moment d'inertie du rectangle extérieur et celui du rectangle intérieur; si a et b désignent les dimensions horizontale et

verticale du premier, a' et b' celles du second, on a donc

$$\Sigma vr^2 = abe \cdot \frac{1}{12} b^2 - a'b'e \cdot \frac{1}{12} b'^2 = \frac{e}{12} (ab^3 - a'b'^3).$$

Le volume total étant d'ailleurs exprimé par

$$V = e(ab - a'b'),$$

on a pour le rayon de gyration l'expression

$$R^2 = \frac{1}{12} \frac{ab^3 - a'b'^3}{ab - a'b'}.$$

DOUBLE TÉ. Dans la même théorie on a à considérer le moment d'inertie d'un double té analogue à celui de la figure 19, tournant autour de sa mé-

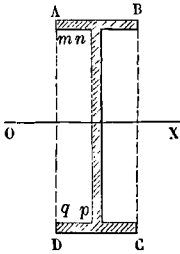


Fig. 19.

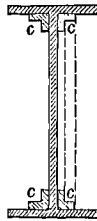


Fig. 20.

diane horizontale. On peut considérer cette figure comme la différence entre un rectangle extérieur ABCD, et deux rectangles intérieurs tels que mnpq.

Si l'on pose

$$AB = a, \quad BC = b, \quad mn = \frac{1}{2} a' \quad \text{et} \quad np = b',$$

on aura donc pour le moment d'inertie du volume, l'épaisseur étant toujours désignée par e ,

$$\begin{aligned} \Sigma vr^2 &= abe \cdot \frac{1}{12} b^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} a'b'e \cdot \frac{1}{12} b'^2 \\ &= \frac{e}{12} (ab^3 - a'b'^3), \end{aligned}$$

d'où l'on déduirait comme ci-dessus le rayon de gyration.

Les figures de ce genre peuvent être compliquées par des cornières c, c, c, c (fig. 20); dans ce cas on a à retrancher du moment d'inertie du rectangle extérieur les moments d'inertie de trois couples de rectangles, qui sont indiqués sur l'un des côtés de la figure. Les dimensions du double té et des cornières étant connues, on en déduira aisément celles du rectangle extérieur et des trois couples de rectangles soustractifs. Le calcul n'offre aucune difficulté.

POLYGONE RÉGULIER. Considérons un polygone régulier qui tourne autour d'un axe Ω (fig. 21),

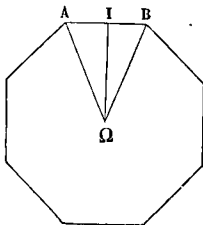


Fig. 21.

passant par son centre et perpendiculaire à son plan. Divisons ce polygone par des rayons, en

triangles isocèles tels que ΩAB ; et menons l'apothème ΩI . Tous ces triangles isocèles auront le même rayon de gyration; ce rayon de gyration sera donc celui du polygone. D'après ce qui a été dit plus haut, on aura donc

$$R^2 = \frac{1}{2} \left(\overline{\Omega I}^2 + \frac{1}{3} \overline{AI}^2 \right).$$

DISQUE CIRCULAIRE. Supposons d'abord que le disque (fig. 22) tourne autour d'un axe perpendi-

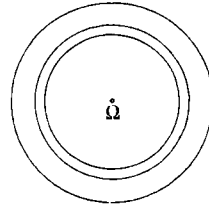


Fig. 22.

culaire à son plan et passant par son centre. Divisons le cercle, par des circonférences concentriques, en couronnes circulaires infiniment minces; soit ρ le rayon intérieur de l'une d'elles, son volume sera

$$2\pi\rho d\rho \cdot e,$$

et comme tous ses éléments sont à la distance ρ de l'axe, le moment d'inertie de son volume sera

$$2\pi\rho d\rho \cdot e \cdot \rho^2.$$

Le moment d'inertie du volume total aura donc pour expression

$$\int_0^r 2\pi\rho d\rho e \rho^2, \quad \text{ou} \quad 2\pi e \int_0^r \rho^3 d\rho, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \pi e r^4.$$

D'ailleurs le volume du disque est $\pi r^2 \cdot e$; le rayon de gyration a donc pour valeur

$$R^2 = \frac{\frac{1}{2} \pi e r^4}{\pi e r^2} \quad \text{ou} \quad R^2 = \frac{1}{2} r^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est la moitié du carré du rayon du disque.

L'épaisseur e disparaît; et l'on peut se dispenser d'y avoir égard.

Supposons en second lieu que le disque tourne autour d'un de ses diamètres OX (fig. 23). Dési-

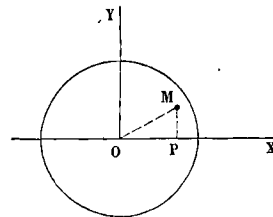


Fig. 23.

gnons par $d\omega$ un élément quelconque M du cercle, dont nous représenterons les coordonnées rectangulaires par x et y . On remarque que le moment d'inertie du cercle doit être le même par rapport à un diamètre quelconque. On a donc, en le désignant par I , et prenant pour axes de révolution les axes coordonnés,

$$I = \Sigma d\omega \cdot x^2 \quad \text{et} \quad I = \Sigma d\omega \cdot y^2,$$

d'où $2I = \Sigma d\omega (x^2 + y^2) = \Sigma d\omega \cdot \rho^2,$

en désignant par ρ la distance OM. Pour faire cette somme, on peut d'abord grouper ensemble tous les termes dans lesquels ρ est le même; les éléments situés ainsi à une même distance ρ du centre forment une couronne circulaire dont l'aire est $2\pi\rho d\rho$. Il viendra donc, en désignant par r le rayon du cercle,

$$2I = \int_0^r 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi r^4,$$

d'où
$$I = \frac{1}{4} \pi r^4,$$

et par suite

$$R^2 = \frac{\frac{1}{4} \pi r^4}{\pi r^2} = \frac{1}{4} r^2 = \left(\frac{1}{2} r\right)^2,$$

c'est-à-dire que le rayon de gyration est la moitié du rayon du cercle.

COURONNE CIRCULAIRE. Soient r_0 et r les rayons intérieur et extérieur de la couronne.

Si elle tourne autour d'un axe mené par son centre perpendiculairement à son plan, son moment d'inertie, qui est évidemment la différence entre les moments d'inertie du cercle entier et du cercle intérieur enlevé, aura pour expression

$$I = \frac{1}{2} \pi r^4 - \frac{1}{2} \pi r_0^4 = \frac{1}{2} \pi (r^4 - r_0^4),$$

d'ailleurs l'aire de la couronne est $\pi (r^2 - r_0^2)$; on aura donc

$$R^2 = \frac{\frac{1}{2} \pi (r^4 - r_0^4)}{\pi (r^2 - r_0^2)} = \frac{1}{2} (r^2 + r_0^2),$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est une moyenne arithmétique entre les carrés des rayons extérieur et intérieur.

Si la couronne tourne autour d'un diamètre, on aura

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 - \frac{1}{4} \pi r_0^4 = \frac{1}{4} \pi (r^4 - r_0^4),$$

et par conséquent

$$R^2 = \frac{1}{4} (r^2 + r_0^2).$$

DISQUE ELLIPTIQUE. On suppose que l'ellipse tourne autour de son grand axe. Soit I le moment d'inertie du quart d'ellipse AOB (fig. 24). On peut partager

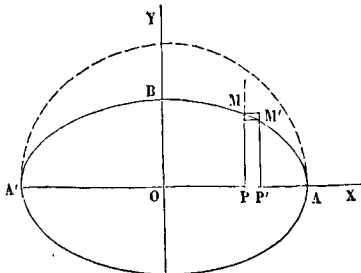


Fig. 24.

cette figure par des parallèles au petit axe, en rectangles élémentaires tels que MPP'M', ayant pour

mesure ydx , et pour rayon de gyration $\frac{1}{3}y^2$ puisque la portion du disque répondant à ce rectangle peut être assimilée à une tige rectiligne. On aurait donc

$$I = \int_0^a ydx \frac{1}{3}y^2,$$

et on pourrait faire le calcul en mettant pour y sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse. Mais on peut éviter l'intégration de la manière suivante. Soit Y l'ordonnée du cercle décrit sur AA' comme diamètre qui répond à la même abscisse x , on aura

$$y = \frac{b}{a} Y,$$

et par conséquent

$$I = \frac{b^3}{a^3} \int_0^a Ydx \frac{1}{3}Y^2.$$

Or, cette nouvelle intégrale exprime le moment d'inertie du quart de cercle, qui, d'après ce qui a été démontré ci dessus, a pour valeur

$$\frac{1}{4} \pi a^2 \cdot \frac{1}{4} a^2.$$

Il vient donc

$$I = \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{1}{16} \pi a^4 = \frac{1}{16} \pi ab^3,$$

et, puisque l'aire du quart d'ellipse est $\frac{1}{4} \pi ab$,

$$R^2 = \frac{\frac{1}{16} \pi ab^3}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{1}{4} b^2.$$

D'ailleurs les quatre quadrans d'ellipse ont évidemment le même rayon de gyration; le moment d'inertie de l'ellipse entière est donc

$$\pi ba \cdot \frac{1}{4} b^2 \text{ ou } \frac{1}{4} \pi ab^3.$$

Pour une COURONNE ELLIPTIQUE, terminée intérieurement par une ellipse semblable à l'ellipse extérieure, et ayant pour demi-axes δa et δb , on trouvera aisément

$$R^2 = \frac{1}{4} b^2 (1 + \delta^2).$$

SEGMENT PARABOLIQUE. Dans le calcul des machines à balancier, on a à déterminer le moment d'inertie d'un segment parabolique qui tourne autour d'un axe Ω perpendiculaire à son plan et passant par un point de son axe (fig. 25). Désignons la

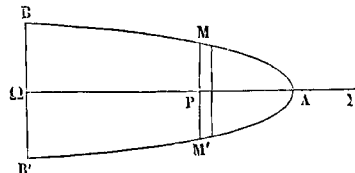


Fig. 25.

distance ΩA par a , et la distance perpendiculaire ΩB par b . L'équation de la parabole rapportée à ces lignes sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a} (a - x).$$

Décomposons le segment, par des perpendiculaires

à son axe, en tranches infiniment minces, l'une d'elles aura pour expression $2y \cdot dx$; son rayon de gyration sera d'ailleurs $x^2 + \frac{1}{3}y^2$. (Voy. l'équation [11] et la figure 5.) Le moment d'inertie total aura donc pour expression

$$I = \int_0^a 2y dx \left(x^2 + \frac{1}{3}y^2 \right).$$

Pour faire ce calcul, il est commode d'exprimer x en y . On a

$$x = a - \frac{ay^2}{b^2}, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{2aydy}{b^2}.$$

Substituant et remplaçant les limites relatives à x par les limites correspondantes à y , on obtient

$$I = \int_b^0 2y \cdot \frac{-2aydy}{b^2} \left[\left(a - \frac{ay^2}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{3}y^2 \right]$$

ou

$$I = \int_0^b \frac{4ay^2 dy}{b^2} \left[\left(a - \frac{ay^2}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{3}y^2 \right].$$

En effectuant les intégrations on trouve

$$I = \frac{4}{15} ab \left(\frac{8}{7} a^2 + b^2 \right).$$

D'ailleurs l'aire du segment a pour valeur $\frac{4}{3}ab$; on a donc

$$R^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{8}{7} a^2 + b^2 \right).$$

VIII. SURFACE D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION. On suppose que l'axe de figure est l'axe de révolution. Tous les éléments étant à la distance r de l'axe, c'est ce rayon qui est le rayon de gyration.

SURFACE CONIQUE. On suppose encore que l'axe de révolution est l'axe de figure. Soit OX (fig. 26)

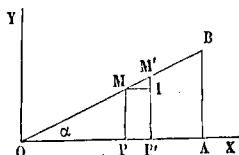


Fig. 26.

cet axe que nous prendrons par axe des x ; soit OB la génératrice, α l'angle qu'elle fait avec l'axe; soit $OA = a$, et $AB = b$. Si l'on décompose la surface par des plans perpendiculaires à l'axe, en zones très-minces, telles que celle qui serait engendrée par MM' , l'expression d'une de ces zones sera $2\pi y ds$, à un infiniment petit près d'un ordre supérieur au premier; et son moment d'inertie sera exprimé par $2\pi y ds \cdot y^2$, puisque tous les éléments peuvent être considérés comme étant à la distance y de l'axe. On aura donc

$$I = \int_0^b 2\pi y^3 ds = \int_0^b 2\pi y^3 \cdot \frac{dy}{\sin \alpha} = \frac{2\pi b^4}{4 \sin \alpha}.$$

Or, l'aire A de la surface conique est exprimée par

$$A = \int_0^b 2\pi y ds = \int_0^b 2\pi \frac{y dy}{\sin \alpha} = \frac{\pi b^2}{\sin \alpha}.$$

il viendra donc

$$R^2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{\pi b^4}{\sin \alpha}}{\frac{\pi b^2}{\sin \alpha}} = \frac{1}{2} b^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est la moitié du carré du rayon de la base.

SURFACE D'UN TRONC DE CÔNE. On suppose toujours que l'axe de figure est l'axe de révolution. Soient b et b' les rayons de la plus grande et de la plus petite base. Le moment d'inertie demandé sera la différence entre les moments d'inertie du cône entier et du petit cône enlevé; on aura donc

$$I = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} (b^4 - b'^4);$$

d'ailleurs

$$A = \frac{\pi}{\sin \alpha} (b^2 - b'^2).$$

Donc

$$R^2 = \frac{1}{A} = \frac{1}{2} (b^2 + b'^2),$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est la moyenne arithmétique entre les carrés des rayons des deux bases.

SURFACE DE LA SPHÈRE. On suppose que la sphère tourne autour d'un diamètre. Rapportons-la à trois axes rectangulaires passant par son centre; soit $d\omega$ un élément de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z ; soit r le rayon de la sphère. On remarque que le moment d'inertie doit être le même par rapport à un diamètre quelconque; si donc on prend successivement pour axes de révolution les trois axes coordonnés des x, y et des z , on aura

$$I = \Sigma d\omega \cdot (x^2 + y^2), \quad I = \Sigma d\omega (y^2 + z^2), \\ I = \Sigma d\omega (x^2 + z^2),$$

d'où en ajoutant

$3I = 2 \Sigma d\omega (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma d\omega \cdot r^2 = 2r^2 \Sigma d\omega$; mais $\Sigma d\omega$ est l'aire de la sphère entière, ou $4\pi r^2$, il vient donc

$$3I = 8\pi r^4, \quad \text{d'où} \quad I = \frac{8}{3} \pi r^4.$$

Par suite

$$R^2 = \frac{2}{3} r^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est les $\frac{2}{3}$ du carré du rayon de la sphère.

IX. PRISMES DROITS, CYLINDRES. Si l'on considère un prisme droit ou un cylindre droit tournant autour d'un axe parallèle à ses arêtes latérales ou à ses génératrices, on peut le décomposer, par des plans perpendiculaires à l'axe, en tranches infiniment minces, qui rentreront dans le cas où une dimension est négligeable par rapport aux deux autres, et qui auront toutes le même rayon de gyration; ce rayon de gyration sera donc celui du corps lui-même. Ainsi le rayon de gyration d'un prisme droit ou d'un cylindre droit, tournant autour d'un axe parallèle à ses arêtes latérales ou à sa génératrice, est le même que celui de sa section perpendiculaire à l'axe. Cette proposition dispense de revenir sur le rayon de gyration des corps dont la section droite est représentée par l'une des figures 8, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 24.

CÔNE DE RÉVOLUTION. On suppose que ce cône tourne autour de son axe de figure. Si on le décompose, par des plans perpendiculaires à son axe, en tranches infiniment minces, telles que celle qui serait engendrée par $MPP'M'$ (fig. 25), on pourra,

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, assimiler chacune d'elles à un cylindre infiniment mince, tel que celui qu'engendrerait le rectangle MPP'I; elle aura donc pour expression $\pi y^2 dx$; et son rayon de gyration étant $\frac{1}{2} y^2$, son moment d'inertie sera $\frac{1}{2} \pi y^4 dx$. Le moment d'inertie total aura donc pour expression, en employant les mêmes notations qu'à l'occasion de la surface conique,

$$I = \int_0^b \frac{1}{2} \pi y^4 dx = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \int_0^b y^4 dy = \frac{\pi b^5}{10 \sin \alpha};$$

mais le volume V du cône est exprimé par

$$V = \int_0^b \pi y^2 dx = \frac{\pi}{\sin \alpha} \int_0^b y^2 dy = \frac{\pi b^3}{3 \sin \alpha};$$

il viendra donc

$$R^2 = \frac{3}{10} b^2.$$

Ainsi, le carré du rayon de gyration est les $\frac{3}{10}$ du carré du rayon de la base.

TRONC DE CÔNE. L'axe de révolution étant toujours l'axe de figure, soient b et b' les rayons des deux bases. Le moment d'inertie du tronc du cône sera la différence entre les moments d'inertie du cône entier et du petit cône enlevé; on aura donc

$$I = \frac{\pi}{10 \sin \alpha} (b^5 - b'^5) \text{ et } V = \frac{\pi}{3 \sin \alpha} (b^3 - b'^3).$$

Par conséquent

$$R^2 = \frac{3}{10} \frac{b^5 - b'^5}{b^3 - b'^3}.$$

SPHÈRE. On suppose qu'elle tourne autour d'un diamètre. Rapportons-la à trois axes rectangulaires passant par son centre. Soit dv un élément de volume dont les coordonnées sont x, y, z . Le moment d'inertie étant le même par rapport à un diamètre quelconque, si l'on prend successivement pour axes les axes coordonnés des x , des y et des z , on aura

$I = \Sigma dv (x^2 + y^2)$, $I = \Sigma dv (y^2 + z^2)$, $I = \Sigma dv (x^2 + z^2)$ d'où, en ajoutant, et nommant ρ la distance de l'élément dv au centre,

$$3I = 2 \Sigma dv (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma dv \cdot \rho^2.$$

Pour faire cette somme, on peut d'abord grouper tous les éléments de volume qui sont à la même distance ρ du centre; ces éléments de volume forment une couche sphérique exprimée par $4 \pi \rho^2 d\rho$. On aura donc, en appelant r le rayon de la sphère,

$$3I = 2 \cdot \int_0^r 4 \pi \rho^2 d\rho, \rho^2 = 8 \pi \int_0^r \rho^4 d\rho = \frac{8 \pi r^5}{5},$$

d'où

$$I = \frac{8}{15} \pi r^5.$$

D'ailleurs, en nommant V le volume de la sphère, on a

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Il viendra donc

$$R^2 = \frac{I}{V} = \frac{2}{5} r^2,$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est les $\frac{2}{5}$ du carré du rayon de la sphère.

MOMENT FLÉCHISSANT, pour *moment des forces fléchissantes*, somme des moments, par rapport à un axe mené dans une section normale déterminée perpendiculairement au plan de flexion, de toutes les forces extérieures qui sollicitent un solide prismatique, depuis cette section jusqu'à l'extrémité du prisme (*Voy. FLEXION PLANE*). Cette somme est égale et contraire à la somme des moments, par rapport au même axe, des forces élastiques qui s'exercent dans la section considérée, de la part de la portion du prisme située en deçà sur la portion située au delà.

Le moment fléchissant porte aussi le nom de *moment de flexion*.

MOMENT VIRTUEL. *Voy. TRAVAIL VIRTUEL*.

MONNAIES DE COMPTE. On appelle *monnaie de compte* une monnaie réelle ou fictive, à laquelle, dans chaque pays, on rapporte toutes les autres, et qui est seule exprimée dans les actes officiels ou dans les transactions particulières. Les monnaies de compte usitées sont les suivantes :

FRANCE. Le *franc*, monnaie réelle, qui se divise en 100 *centimes*.

ANGLETERRE. La *livre sterling*, monnaie fictive, mais qui a son équivalent réel, le *souverain*. La livre sterling vaut au pair 25^l, 21 Elle se subdivise en 28 *shillings*, le shilling en 12 *pences* (au singulier *penny*); le penny en 4 *farthings*.

AUTRICHE. Le *florin*, monnaie réelle, valant au pair 2^l, 60. Il se divise en 60 *kreutzers*.

LOMBARDIE ET VÉNÉTIE. La *lira*, monnaie réelle, valant 0^l, 86. Elle se divise en 100 *centesimi*.

BAVIÈRE. La *risdale courante*, monnaie fictive, valant 3^l, 24, ou le *florin*, valant 2^l, 16. La *risdale* se divise en 90 *kreutzers*, et le florin en 60 *kreutzers*.

DANEMARK. La *risdale courante*, monnaie réelle, valant 4^l, 96. Elle se divise en 96 *schillings*.

ESPAGNE. Le *réal*, monnaie réelle, valant 0^l, 26. Il se divise en 3^l *maravédís*. Dans les opérations de change, on fait usage de deux autres monnaies de compte : la *piastre*, monnaie réelle, de 20 *réaux de vellon* (billon), valant 5^l, 25; et la *pistole de change*, monnaie fictive, de 32 *réaux de plata* (argent), valant 3 piastres réelles ou 15^l, 75 (quoiqu'elle se divise en 4 piastres de change).

CONFÉDÉRATION GERMANIQUE. Le *florin*, monnaie réelle, valant 2^l, 12. Il se divise en 60 *kreutzers*, et le kreutzer en 4 *pfennigs*.

Dans les opérations de change, on fait usage de trois autres monnaies : le *florin d'Empire*, dont 297 font 640 fr.; le *thaler d'Empire*, dont 92 font 165 florins d'Empire; et le *florin de change*, qui

est les $\frac{2}{3}$ du thaler de change. Le florin de change se divise en 60 *kreutzers*, et le thaler de change en 90 *kreutzers*.

HAMBOURG. Le *marc banco*, monnaie fictive, valant 1^l, 88. Il se divise en 16 *schillings*, et le schilling en 12 *pfennigs*.

GRÈCE. La *drachme*, valant 0^l, 896.

HANOVRE. Le *florin*, monnaie réelle, valant 2^f,90. Il se divise en 24 *marien-groschen*.

PARME. La *lira*, monnaie fictive, valant 1^f. Elle se divise en 100 centimes.

TOSCANE. La *lira*, monnaie fictive, valant 0^f,84. Elle se divise en 20 *soldi* de 12 *denari*, quelquefois aussi en 100 centimes.

PAYS-BAS. Le *florin*, monnaie réelle, valant 2^f,14. Il se divise en 100 *cents*.

PORTUGAL. *Mille reis*, monnaie fictive, valant 7^f,07. *Mille reis*, monnaie réelle, valant 6^f,12. *Mille reis*, monnaie de change, valant 5^f,10; c'est le double du *teston* de 500 *reis*, monnaie réelle.

PRUSSE. Le *thaler*, monnaie réelle, valant 3^f,71. Il se divise en 30 *silbergroschen*.

ROME. L'*écu* ou *scudo*, monnaie réelle, valant 5^f,36. Il se divise en 100 *batocchi*.

RUSSIE. Le *rouble argent*, monnaie réelle, valant 4^f, et quelquefois le *rouble papier*, qui vaut également les $\frac{2}{7}$ du rouble argent, soit 1^f,14. L'un et l'autre se divisent en 100 *kopecks*.

SARDAIGNE. La *lira*, monnaie réelle, valant 1^f; elle se divise en 100 *centesimi*.

SAXE. Le *thaler*, monnaie fictive, valant 3^f,90. Il se divise en 24 *gute-groschen*.

NAPLES ET SICILE. Le *ducat*, monnaie réelle, valant 4^f,24. Il se divise en 5 *tarins*, et le *tarin* en 20 *grains*.

SUISSE. Le *franc*, monnaie réelle, valant 1^f; il se divise en 100 *rappes* ou centimes.

SUEDE. Le *risdale d'espèce*, monnaie ancienne, valant au pair 5^f,75. Elle se divise en 48 *schillings*.

TURQUIE. La *piastre*, monnaie fictive, valant 0^f,22.

WURTEMBERG. Le *florin*, valant 2^f,12, de 60 *kreutzers*.

EMPIRE INDO-BRITANNIQUE. La *roupie*, monnaie réelle, valant 2^f,37. Elle se divise en 16 *annas*.

ÉGYPTE. La *piastre*, monnaie réelle, valant 0^f,30. Elle se divise en 40 *paras*.

ÉTATS-UNIS. Le *dollar*, monnaie réelle, valant 5^f,18. Il se divise en 100 *cents*.

MEXIQUE. La *piastre*, monnaie réelle, valant 5,41. Elle se divise en 8 *réaux*.

BRÉSIL. *Mille reis*, monnaie réelle, valant 2,60.

Il est facile, à l'aide de ce tableau, d'exprimer les unes au moyen des autres les monnaies de compte des divers pays. Si, par exemple, on demandait combien 1500 réaux d'Espagne font de livres sterling d'Angleterre, on réduirait d'abord les 1500 réaux en francs et centimes en multipliant 0^f,26 par 1500, ce qui donne 390^f, puis on diviserait le produit par la valeur en francs de la livre sterling, c'est-à-dire par 25^f,21, ce qui donne 15 *livres sterling* et pour reste 11,85. Multipliant ce reste par 20 et divisant de nouveau par 25,21, on obtient 9 *shillings* et pour reste 10,11. Multipliant ce second reste par 12 et divisant encore par 25,21, on obtient 4 *pence*, et pour reste 20,52. Multipliant enfin ce dernier reste par 4 et divisant toujours par 25,21, on obtient 3 farthings, et une fraction négligeable. Les 1500 réaux valent donc 15 livres sterling 9 shillings 4 pence et 3 farthings, à moins d'un farthing près.

MONNAIES ÉTRANGÈRES. Toute monnaie étran-

gère a une valeur *au pair* qui résulte de son poids et de son titre légal. Mais elle n'est pas admise au change des monnaies avec ce titre. Pour que les entrepreneurs des monnaies françaises ne fussent pas exposés à des pertes plus ou moins considérables, il a été nécessaire de tenir compte des tolérances accordées dans la fabrication des pièces des divers pays, ainsi que de l'affaiblissement qui a pu être constaté par des essais multipliés. Les pièces étrangères ne sont donc admises au change des monnaies qu'avec un titre réduit, qui a été fixé par le tarif du 1^{er} avril 1854.

La valeur *au pair* d'une monnaie est le rapport entre le poids d'or ou d'argent fins contenus dans cette monnaie, et le poids du même métal contenu dans un franc.

I. Connaissant le poids et le titre légal d'une pièce, il est facile d'en déduire sa valeur au pair. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une monnaie d'or. Soit *p* son poids exprimé en grammes, et *t* son titre légal, exprimé en millièmes. Le poids d'or fin qui entre dans une pièce de 20^f, pesant 6^{sr},45161 (*Voy. MONNAIES FRANÇAISES*), est

$$6^{sr},45161 \times 0,900;$$

le poids d'or fin qui entre pour chaque franc dans les monnaies françaises est donc

$$\frac{6^{sr},45161 \times 0,900}{20}$$

Le poids d'or fin qui entre dans la monnaie étrangère proposée est

$$\frac{p \cdot t}{1000}$$

La valeur au pair de cette pièce est donc le quotient de cette dernière expression par la première, c'est-à-dire

$$\frac{p \cdot t \cdot 20}{6,45161 \cdot 900}$$

[1]

On sait, par exemple, que le souverain d'Angleterre pèse 7^{sr},980855 et que son titre légal est 917 millièmes; on en conclura pour sa valeur au pair

$$\frac{7,980855 \cdot 917 \cdot 20}{6,45161 \cdot 900} \text{ ou } 25^f,2079$$

ou à très-peu près 25^f,21.

Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'une monnaie d'argent. Le poids d'argent fin contenu dans un franc, qui pèse 5 grammes, est

$$5^{sr} \times 0,900 \text{ ou } 4^{sr},5.$$

Soient toujours *p* le poids en grammes, et *t* le titre en millièmes de la pièce étrangère proposée; le poids d'argent fin contenu dans cette pièce est

$$\frac{p \cdot t}{1000}$$

La valeur au pair de cette pièce est le quotient de cette expression par 4,5, c'est-à-dire

$$\frac{p \cdot t}{4500}$$

[2]

On sait, par exemple, que l'écu de Hanovre ou risdale de constitution pèse 29^{sr},213 et que son titre est 878 millièmes. On en conclut pour la valeur au pair

$$\frac{29,213 \cdot 878}{4500} \text{ ou } 5^f,6999,$$

ou, à très-peu près, 5^f,70.

II. La valeur du kilogramme d'une monnaie étrangère au change des monnaies se déduit de sa valeur au pair, en tenant compte du prix de fabrication, fixé, d'après le tarif du 1^{er} avril 1854, à 6^f,70 par kilogramme d'or au titre de 0,900, et à 1^f,50 par kilogramme d'argent.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une monnaie d'or. Puisqu'une pièce de 20^f pèse 6^{sr},45161, on peut dire que 1^{sr} d'or monnayé, au titre de 0,900, vaut

$$\frac{20^f}{6,45161}$$

et par conséquent 1000^{sr} du même or vaudront

$$\frac{20\,000^f}{6,45161} \text{ ou } 3100^f.$$

Mais la retenue, au change des monnaies, étant de 6^f,70 par kilogramme, ce poids ne serait payé que 3100^f — 6^f,70, c'est-à-dire 3093^f,30.

Or, toutes choses égales d'ailleurs, la valeur d'une monnaie est proportionnelle à son titre (réduit). En désignant donc par x la valeur, avec retenue au change des monnaies, d'un kilogramme d'or monnayé au titre de t millièmes, on devra avoir la proportion

$$x : 3093^f,30 = \frac{t}{1000} : 0,900;$$

d'où $x = \frac{3093^f,30 \cdot t}{900}$. [3]

S'il s'agit, par exemple, du souverain anglais, dont le titre est 916 millièmes, on trouvera

$$x = \frac{3093^f,30 \cdot 916}{900} = 3148^f,29.$$

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse d'une monnaie d'argent. Puisque 1 franc pèse 5 grammes, on peut dire que 1^{sr} d'argent monnayé au titre de 0,900 vaut

$$\frac{1^f}{5}$$

et par conséquent 1000 grammes du même argent vaudront

$$\frac{1000^f}{5} \text{ ou } 200^f.$$

Mais la retenue, au change des monnaies, étant de 1^f,50 par kilogramme, ce poids d'argent ne serait payé que 200^f — 1^f,50, c'est-à-dire 198^f,50.

Or, la valeur d'une monnaie étant proportionnelle à son titre réduit, si l'on désigne par y la valeur, avec retenue au change des monnaies, d'un kilogramme d'argent monnayé au titre de t millièmes, on devra avoir

$$y : 198^f,50 = \frac{t}{1000} : 0,900;$$

d'où $y = 198^f,50 \cdot \frac{t}{900}$. [4]

S'il s'agit, par exemple, de l'écu de Hanovre, dont le titre réduit est 879 (ce titre est plus élevé que le titre légal), on aura

$$y = 198^f,50 \cdot \frac{879}{900} = 193^f,87.$$

III. C'est d'après les formules [1], [2], [3], [4], et d'après le tarif de 1854, qu'a été dressé le tableau suivant, que nous empruntons à l'Annuaire du bureau des longitudes :

DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG. au change.
AUTRICHE.					
<i>Or.</i>					
Ducat ancien.....	3,490	986	11,85	985	2385,44
Ducat impérial.....	3,490	984	11,81	980	3368,26
Souverain.....	11,112	919	35,17	915	3144,85
Krone, ou couronne..	11,120	900	34,47	899,5	3091,58
<i>Argent.</i>					
Risdale de constitution	28,735	878	5,61	879	193,87
Florin d'Autriche, ou					
$\frac{2}{5}$ de florin courant.	»	»	1,03	876	193,21
Risdale de convention.	28,074	833	5,19	837	184,60
Florin (gulden) ou					
demi-risdale.....	14,032	id.	2,60	id.	id.
20 kreutzers anciens,					
ou kopf-tück.....	6,639	583	0,86	586	129,25
10 kreutzers anciens.	3,898	500	0,43	498	109,84
20 kreutzers nouveaux	4,330	900	0,86	898	198,06
LOMBARDIE, VENÉTIÉ.					
<i>Or.</i>					
Écu (scudo).....	41,908	1000	144,35	996	3423,25
Osele (ozella d'oro)..	13,969	id.	48,11	id.	id.
Sequin (zecchino)....	3,452	id.	11,89	id.	id.
Ducat (ducatò d'oro).	2,178	id.	7,50	id.	id.
Pistole.....	6,320	908	19,76	906	3113,92
40 francs.....	12,903	900	40,00	900	3093,30
20 francs.....	6,451	id.	20,00	id.	id.
Souverain.....	11,332	id.	35,13	id.	id.
Demi-souverain, ou					
20 livres d'Autriche.	5,666	id.	17,56	id.	id.
<i>Argent</i>					
Pièce de 10 livres....	28,682	826	5,26	817	180,19
Écu de 6 livres.....	25,986	900	5,20	900	198,50
Livre (lira).....	4,331	id.	0,86	id.	id.
BAVIÈRE.					
<i>Or.</i>					
Ducat ancien.....	3,490	986	11,85	980	3368,26
Carolin de Bavière...	9,744	771	25,66	767	2636,17
id. du Palatinat..	id.	id.	id.	id.	id.
Maximilien.....	6,496	771	17,18	767	id.
Ducat de 1855.....	3,500	986	11,85	985	3385,44
<i>Argent.</i>					
Écu ancien.....	28,064	833	5,19	830	183,06
Écu nouveau (1838)...	37,120	900	7,42	900	198,50
Florin de 60 kreutzers	10,606	id.	2,12	id.	id.
2 florins.....	21,212	id.	4,24	id.	id.
6 kreutzers.....	2,598	333	0,19	»	73,44
BELGIQUE.					
<i>Or.</i>					
Double souverain....	11,141	919	35,26	915	3144,85
Lion d'or.....	8,286	917	26,17	id.	id.
40 francs.....	12,903	900	40,00	»	»
20 francs.....	6,451	900	20,00	»	»
<i>Argent.</i>					
Couronne de Brabant.	29,532	873	5,73	876	193,21
Lion d'argent.....	32,929	id.	6,38	874	192,77
5 francs.....	25,000	900	5,00	900	198,50
2 fr. 50.....	12,500	id.	2,50	id.	id.
2 ^f , 1 ^f , 50, 0 ^f , 50 et					
0 ^f , 25 à proportion.					
1 franc.....	5,000	id.	1,00	id.	id.
GRANDE-BRETAGNE.					
<i>Or.</i>					
Guinée.....	8,380	916 $\frac{2}{3}$	26,45	916	3148,29
Souverain.....	7,981	id.	23,20	id.	id.
<i>Argent.</i>					
Crown ancien.....	30,074	925	6,16	923	203,57
Crown nouveau (1818)	28,251	id.	5,81	id.	id.
One florin (1849)....	11,300	id.	2,32	id.	id.
Shilling ancien.....	6,015	id.	1,24	id.	id.
Shilling nouveau....	5,650	id.	1,16	id.	id.
Écu de banque, ou					
dollar.....	26,717	893	5,12	896	197,62

DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.	DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.
DANEMARK.						<i>Grand-duché de Hesse-Cassel (suite).</i>					
<i>Or.</i>	gr		f		f	<i>Or.</i>			f		f
Ducat fin, ou species.	3,519	979	11,86	980	3368,26	Pièce de 20 ^f de Westphalie.....	gr		20,00	900	3093,30
Ducat courant.....	3,143	875	9,47	871	2993,62	Pistole de 5 thalers...	6,451	900	20,50	898	3086,42
Christian d'or, 1847...	6,735	903	20,95	»	»	<i>Argent.</i>					
Frédéric de 1848.....	6,600	896	20,32	895	3076,11	Écu de convention...	37,120	id.	7,42	900	198,50
<i>Argent.</i>						Thaler de 30 groschen.	18,560	id.	3,71	id.	id.
Risdale d'espèce....	29,126	875	5,66	879	193,87	Simple thaler commun aux Etats du Nord...	22,271	750	3,71	»	165,42
Risdale courante....	26,800	833	4,96	827	182,40	<i>Grand-duché de Hesse-Darmstadt.</i>					
ESPAGNE.						<i>Or.</i>					
Quadruple, av n ^o 1772.	»	917	85,42	909	3124,23	Double pistole, ou 10 gulden.....	6,700	900	20,72	898	3086,42
— de 1772 à 1786.....	27,045	901	83,93	893	3069,24	<i>Argent.</i>					
Quadruple depuis 1786	»	875	81,51	872	2997,66	Écu de convention...	37,120	id.	7,42	900	198,50
2 pistoles, 1, $\frac{1}{2}$, à proportion.						Gulden ou florin de 60 kreutzers.....	10,606	id.	2,12	id.	id.
Petit écu d'or, ou ventecin.....	1,753	902	5,46	902	3100,17	2 florins.....	21,212	id.	4,24	id.	id.
Dublon d'Isabelle, de 100 réaux.....	8,336	900	25,84	»	3093,30	<i>Duché de Nassau.</i>					
<i>Argent.</i>						<i>Argent.</i>					
Piastre, avant 1772...	27,045	917	5,49	910	200,71	Écu de convention...	37,120	900	7,42	900	198,50
— après 1772... id.	903	903	5,43	900	198,50	Gulden ou florin....	10,606	id.	2,12	id.	id.
Duro de 20 réaux....	26,200	900	5,25	id.	198,50	GRÈCE.					
Medio duro, de 10 réaux.....	13,145	id.	2,63	id.	id.	<i>Or.</i>					
Peseta, de 4 réaux....	5,258	id.	1,05	id.	id.	Tessaracenta-drachme ou 40 drachmes....	11,520	900	35,64	900	3093,30
Medio-peseta, de 2 réaux.....	2,629	id.	0,52	id.	id.	Icosi-drachme, ou 20 drachmes.....	5,760	id.	17,82	d.	id.
Real.....	1,314	id.	0,26	id.	id.	<i>Argent.</i>					
CONFÉDÉRATION GERMANIQUE.						Phénix (Capo d'Istria).	4,476	id.	0,90	id.	198,58
<i>Grand-duché de Bade.</i>						5 drachmes (Othon)...	22,385	id.	4,48	id.	id.
<i>Or.</i>						1 drachme, $\frac{1}{2}$ drachme, à proportion.					
Ducat.....	3,490	986	11,85	980	3368,26	HANOVRE.					
Pièce de 10 florins (depuis 1819).....	6,878	902	21,37	900	3093,30	<i>Or.</i>					
Pièce de 5 florins....	3,439	id.	10,68	id.	id.	Ducat (ad legem imperii).....	3,491	986	11,85	980	3368,26
<i>Argent.</i>						Ducat de 10 thalers...	13,300	896	40,95	895	3076,11
Écu de convention...	37,120	900	7,42	900	198,50	Krone.....	11,120	900	34,47	899,5	3091,58
Gulden, ou florin de 60 kreutzers.....	10,606	id.	2,12	id.	id.	<i>Argent.</i>					
Deux florins (1845)...	21,212	id.	4,24	id.	id.	Écu ou florin de 24 marrien-groschen....	13,066	1000	2,90	993	219,67
6 kreutzers (1840)...	2,550	325	0,18	»	»	$\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ à proportion					
<i>Duché de Brunswick.</i>						Risdale de constitution	29,213	878	5,70	879	193,87
<i>Or.</i>						Thaler (1838).....	22,271	750	3,71	»	198,50
Ducat de Brunswick..	3,490	986	11,85	980	3368,26	ITALIE.					
Florin de 10 thalers..	13,210	896	40,70	»	»	<i>Duché de Parme.</i>					
Krone.....	11,120	900	34,47	899,5	3091,58	<i>Or.</i>					
<i>Argent.</i>						40 lire (1815).....	12,903	900	40,00	900	3093,30
Risdale de convention	28,064	833	5,19	»	»	20 lire.....	6,451	id.	20,00	id.	id.
2 thalers.....	37,120	900	7,42	900	198,50	<i>Argent.</i>					
1 thaler.....	22,271	750	3,71	»	165,42	Pièce de 5 lire.....	25,000	id.	5,00	904	199,28
<i>Francfort.</i>						1 lira.....	5,000	id.	1,00	id.	id.
<i>Or.</i>						2 lire, 10 soldi, 5 soldi, à proportion					
Ducat.....	3,490	986	11,85	980	3368,26	<i>Toscane.</i>					
<i>Argent.</i>						<i>Or.</i>					
Écu de convention (1838).....	37,120	960	7,42	900	198,50	Triple sequin, ou ruspone au lis.....	10,464	1000	36,04	993	3412,94
Gulden ou florin....	10,606	id.	2,12	id.	id.	Sequin et demi-sequin, à proportion.					
6 kreutzers.....	2,550	325	0,18	»	»	Sequin à l'effigie....	3,488	id.	12,01	d.	id.
<i>Hambourg.</i>						Pistole de Florence, ou doppia.....	6,692	915	21,09	913	3137,98
<i>Or.</i>						Rosine, ou pièce à la Rose... ..	6,976	886	21,54	892	3065,80
Ducat ancien.....	3,490	986	11,85	980	3368,26						
Ducat nouveau (1858).	3,488	979	11,76	978	3361,38						
<i>Argent.</i>											
Écu de constitution...	29,233	889	5,78	879	193,87						
Marc, ou 16 schillings.	9,164	750	1,53	»	»						
<i>Grand-duché de Hesse-Cassel.</i>											
<i>Or.</i>											
Pistole à l'étoile....	»	»	»	892	3065,80						

DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.	DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.
<i>Toscane (suite).</i>						<i>ROME (suite).</i>					
<i>Argent.</i>						<i>Or.</i>					
Francescone, livour- nine, piastre à la rose, tularo, léopol- dine, écu de 10 pauls, 8 pauls, 5 pauls, 2 pauls, 1 paul, à proportion.	gr 27,507	917	f 5,61	910	f 200,71	Sequin de Clément XIV Scudo de Pie IX.....	gr 3,426 1,734	1000 900	f 11,80 5,36	994 899	f 3416,17 3089,86
Vieux ducaton (Cosme III)..... 10 livres ou dena..... Lira.....	21,231 39,443 id.	958 id. »	6,65 8,40 0,84	957 id. »	211,07 id. »	2 $\frac{1}{2}$ scudi.....	4,335	id.	13,40	id.	id
<i>HOLLANDE.</i>						<i>Argent.</i>					
5 ducat de Hollande.... — de Guillaume.... Kydens..... Willem III.....	3,482 3,490 9,940 13,458	982 986 917 900	11,78 11,85 31,40 41,71	978 980 916 899	3361,38 3368,26 3148,29 3089,86	Teston de Rome, ou 100 baiocques..... Teston de 30 bajoques Scudo de 100 baiocchi. 50 baiocchi, 20 baioc- chi, à proportion.	26,437 8,050 26,835	917 id. 900	5,41 1,62 5,36	910 id. 900	200,71 id. 198,50
<i>Or.</i>						<i>RUSSIE.</i>					
1 ducat de Guillaume.... Kydens..... Willem III.....	3,490 9,940 13,458	986 917 900	11,85 31,40 41,71	980 916 899	3368,26 3148,29 3089,86	<i>Or.</i> Demi-impériale de 5 roubles.....	6,545	916	20,66	916	3118,29
<i>Argent.</i>						<i>Argent.</i>					
florins (drye gulden) ancien..... 3 florins (depuis 1818). 1 florin, $\frac{1}{2}$ florin, à proportion. 1 florin ou 25 cents... 10 cents, 5 cents, à proportion. $\frac{1}{2}$ gulden ou florins (1848)..... 1 florin, ou gulden de 100 cents..... 25 cents.....	31,55 32,298 4,230 25,000 10,000 3,575	910 898 569 945 id. 640	6,38 6,41 0,21 5,26 2,10 0,52	911 897 574 944 id. 640	200,92 197,84 126,60 208,20 id. 141,16	Rouble argent..... Demi-rouble.....	20,724 10,362	878 id.	4,00 2,00	874 id.	192,77 id
<i>PORTUGAL.</i>						<i>SARDAIGNE.</i>					
Dobrao de 20000 reis. $\frac{1}{2}$ dob., $\frac{1}{5}$ dob., $\frac{1}{10}$ dob., $\frac{1}{20}$ dob., à prop. Portugaise ou lisbo- naine de 4000 reis... $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, à proportion. Drobra de 12800 reis. Couronne d'or de 10000 reis.....	53,699 10,752 28,629 17,733	917 id. id. id.	169,61 33,96 90,43 56,00	914 id. id. id.	3141,41 id. id. id.	<i>Or.</i> Pièce de 20f, ou Ma- rengo..... Quadruple de 80 livres Pistoles de 40 li- vres et 20 livres, à proportion. <i>Argent.</i> Écu de 5 livres..... 2 livres, 1 livre, à proportion.	6,451 25,806 25,00	900 id. id.	20,00 80,00 5,00	» » 904	» » 196,38
<i>Or.</i>						<i>SAXE.</i>					
Dobrao de 20000 reis. $\frac{1}{2}$ dob., $\frac{1}{5}$ dob., $\frac{1}{10}$ dob., $\frac{1}{20}$ dob., à prop. Portugaise ou lisbo- naine de 4000 reis... $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, à proportion. Drobra de 12800 reis. Couronne d'or de 10000 reis.....	53,699 10,752 28,629 17,733	917 id. id. id.	169,61 33,96 90,43 56,00	914 id. id. id.	3141,41 id. id. id.	<i>Or.</i> Ducat..... Auguste, ou 5 thalers. 10 thalers, et 2 $\frac{1}{2}$ thalers, à proportion Krone..... <i>Argent.</i> 2 thalers..... Simple thaler, commun aux États du Nord...	3,490 6,670 11,120 37,120 22,271	986 900 900 id. 750	11,85 20,75 34,47 7,42 3,71	980 » 899,5 900 »	3368,26 » 3091,58 198,50 165,42
<i>Or.</i>						<i>DEUX-SICILES.</i>					
Dobrao de 20000 reis. $\frac{1}{2}$ dob., $\frac{1}{5}$ dob., $\frac{1}{10}$ dob., $\frac{1}{20}$ dob., à prop. Portugaise ou lisbo- naine de 4000 reis... $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, à proportion. Drobra de 12800 reis. Couronne d'or de 10000 reis.....	53,699 10,752 28,629 17,733	917 id. id. id.	169,61 33,96 90,43 56,00	914 id. id. id.	3141,41 id. id. id.	<i>Or.</i> Décuple, de 30 ducats. Quintuple, de 15 ducats 3 ducats..... <i>Argent.</i> 12 carlini, ou 120 grani 60 grani, 20 grani, 10 grani, à propor- tion.	37,867 18,933 3,787 27,500	996 id. id. 833	129,91 64,95 12,99 5,10	995 id. id. »	3419,81 id. id. »
<i>Argent.</i>						<i>SUISSE.</i>					
Cruzado neuve de 480 reis..... 5 testons, de 500 reis 2 testons, 1 teston. $\frac{1}{2}$ teston, à proport.	14,633 12,500	900 917	2,94 2,35	900 915	198,50 201,81	<i>Argent.</i> Pièce de 5 francs.... — 2 — — 1 franc..... 50 centimes.....	25,000 10,000 5,000 2,500	900 id. id. id.	5,00 2,00 1,00 0,50	900 id. id. id.	198,50 id. id. id.
<i>PRUSSE.</i>						<i>SUÈDE.</i>					
Ducat fin..... Frédéric..... Double, et demi, à proportion. <i>Argent.</i> Thaler de 30 silber- groschen..... 5 silbergroschen..... 2 thalers.....	3,490 6,682 22,271 5,341 37,120	986 903 750 516 900	11,85 20,78 3,71 0,61 7,42	978 895 » 514 900	3361,38 3076,11 113,37 198,50	<i>Or.</i> Ducat..... <i>Argent.</i> Risdale d'espèce de 48 schillings..... Species riksdaler, ou écu nouveau.....	3,482 29,508 23,925	976 878 750	11,70 5,75 5,66	975 882 »	3351,07 194,53 165,42
<i>ROME.</i>						<i>ROME.</i>					
Pistole de Pie VI... .	5,471	917	17,28	909	3224,23						

DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.
NORWÈGE.					
<i>Argent.</i>	gr		f		f
Spécies.....	28,949	875	5,63	"	192,99
Mark, ou $\frac{1}{5}$ de spécies.	5,790	id.	1,12	"	id.
8 skilling.....	1,930	id.	0,37	"	id.
TURQUIE.					
<i>Or.</i>					
Pièce de 100 piastres.	7,191	916	22,68	915	3144,85
— 50 —	3,595	id.	11,34	id.	id.
<i>Argent.</i>					
Altinblec de 60 paras	28,882	550	3,53	533	117,56
Piastre de Constanti-					
nople.....	1,203	830	0,22	820	180,86
Pièce de 20 piastres.	24,068	id.	4,45	829	182,84
— 10 —	12,034	id.	2,22	826	182,18
— 5 —	6,017	id.	1,11	824	181,74
WURTEMBERG.					
<i>Or.</i>					
Ducat.....	3,490	986	11,85	980	3368,26
<i>Argent.</i>					
Risdale ou écu de					
convention.....	28,064	833	5,19	837	184,60
Kronen thaler, ou gros					
écu.....	29,500	870	5,70	"	"
Ecu de convention					
(1838).....	37,120	900	7,42	900	198,50
2 gulden.....	21,212	id.	4,24	id.	id.
6 kreutzers.....	2,598	383	0,19	"	73,44
ÉGYPTE.					
<i>Or.</i>					
Doublesequin nouveau	8,600	875	25,80	874	3003,93
Sequin nouveau.....	4,300	id.	12,90	id.	id.
<i>Argent.</i>					
Piastre neuve.....	24,000	830	4,40	829	182,84
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ à prop.					
ÉTATS-UNIS.					
<i>Or.</i>					
Pièce de 20 dollars...	33,435	900	103,64	900	3093,30
Pièce de 10 dol-					
lars, 5 dollars, 2 $\frac{1}{2}$,					
1 dollar, à proportion					
<i>Argent.</i>					
Dollar ou 100 cents...	26,729	900	5,34	900	198,50
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ à proportion.					
One dime, ou 10 cents.	2,672	id.	0,53	id.	id.
Half dime, ou 5 cents.	1,336	id.	0,26	id.	id.
MEXIQUE.					
<i>Or.</i>					
Quadruple de 8 escu-					
dos d'oro.....	26,950	875	81,20	868	2983,31
<i>Argent.</i>					
Piastre de 8 réaux...	27,000	903	5,41	900	198,50
PÉROU, BOLIVIE, GUA-					
TÉMALA.					
<i>Or.</i>					
Quadruple de 8 escu-					
dos d'oro.....	27,000	875	81,35	868	2983,31
<i>Argent.</i>					
Piastre ou dollar de					
8 réaux.....	27,000	903	5,41	900	198,50
NOUVELLE-GRENADE.					
<i>Or.</i>					
Quadruple de 16 pesos	25,806	900	80,00	894	3072,67
Condor.....	16,400		50,35	892	3065,80

DÉNOMINATION.	POIDS LÉGAL en grammes.	TITRE LÉGAL en millièmes.	VALEUR AU PAIR en francs.	TITRE AU TARIF en millièmes.	VALEUR DU KILOG au change.
NOUVELLE-GRENADE (suite).					
<i>Argent.</i>					
Piastre de 10 réaux ou	gr		f		f
100 cents.....	25,000	900	5,00	"	"
50 cents, 20 cents,					
à proportion.					
Decimo.....	2,500	id.	0,50	"	"
$\frac{1}{2}$ decimo.....	1,250	id.	0,25	"	"
CHILI, ÉQUATEUR.					
<i>Argent.</i>					
Piastre de 100 cents...	25,000	900	5,00	900	198,50
RÉPUBLIQUE ARGEN-					
TINE.					
<i>Or.</i>					
Quadruple de 8 scudos					
d'oro.....	27,100	868	81,00	"	"
URUGUAY.					
<i>Argent.</i>					
Piastre forte, peso					
duro.....	27,000	875	5,25	"	"
BRÉSIL.					
<i>Or.</i>					
20 000 reis.....	17,926	916 $\frac{2}{3}$	56,60	914	3141,41
10 000 reis.....	8,963	id.	28,30	id.	id.
<i>Argent.</i>					
2000 reis.....	25,495	id.	5,19	"	"
1000 reis, 500 reis,					
à proportion.					
INDE.					
<i>Or.</i>					
One mohur.....	11,664	916 $\frac{2}{3}$	36,82	"	"
Two pagodas.....	5,832	id.	18,41	"	"
One pagoda.....	2,916	id.	9,20	"	"
<i>Argent.</i>					
One rupee.....	11,664	id.	2,37	"	"
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ à proport.					
MOGOL.					
<i>Or.</i>					
Roupie aux signes du					
zodiaque.....	10,889	1000	37,51	998	3430,12
Roupie de Schah-Alem	12,340	980	41,65	979	3364,82
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ à proportion.					

MONNAIES FRANÇAISES. On fait usage en France de monnaies d'or, de monnaies d'argent et de monnaies de bronze. En vertu de la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795), l'unité monétaire est le franc; et, d'après la loi du 17 germinal an XI (28 mars 1803), le franc est une pièce d'argent à 9 dixièmes de fin et du poids de 5 grammes. Le franc se subdivise en 10 décimes ou 100 centimes. Il n'a pas de multiples. Conformément aux règles établies pour les unités du SYSTÈME DÉCIMAL (Voy. ce mot), et qui admettent, indépendamment de chaque unité, la moitié et le double de cette unité, on a, en fait de monnaies d'or, les pièces de 100^f, de 50^f, de 10^f et de 5^f; en fait de monnaies d'argent, les pièces de 5^f, de 2^f, de 1^f, de 50 centimes

et de 20 centimes; et, en fait de monnaies de bronze, les pièces de 10 centimes, de 5 centimes, de 2 centimes et de 1 centime.

Les pièces d'or et d'argent (sauf celles de 50 et de 20 centimes) sont au titre de 900 millièmes. c'est-à-dire qu'elles doivent contenir les 9 dixièmes de leur poids d'or ou d'argent fin, et 1 dixième d'alliage. L'alliage au douzième est le plus résistant; mais l'alliage au dixième s'en éloigne peu et se trouve mieux en harmonie avec notre système de numération décimale.

Une loi du 25 mai 1864 a fixé à 835 millièmes de fin le titre des pièces d'argent de 50 centimes et de 20 centimes.

Une loi du 27 juin 1866 autorise la fabrication, au même titre de 835 millièmes, des pièces de 1 franc et de 2 francs.

Les anciennes pièces doivent être retirées de la circulation avant le 1^{er} janvier 1869.

La loi du 7 germinal an xi admet, sur le titre des monnaies d'or, une tolérance de 2 millièmes, c'est-à-dire qu'une pièce d'or peut être au titre de 902 millièmes ou de 898 millièmes sans être considérée comme n'ayant pas le titre légal. Le décret du 22 mai 1849 étend la même tolérance aux monnaies d'argent. La loi du 25 mai 1864 fixe à 3 millièmes, en plus ou en moins, la tolérance du titre pour les pièces de 50 centimes et de 20 centimes; et la loi du 27 juin 1866 étend la même tolérance aux pièces de 1 franc et de 2 francs.

La loi ayant fixé à 5^{fr} le poids de la pièce de 1 franc, il en résulte que le poids de la pièce de 2^{fr} est de 10^{fr}, celui de la pièce de 5^{fr} de 25^{fr}; le poids de la pièce de 50 centimes est de 2^{fr}, 5, et le poids de la pièce de 20 centimes est de 1^{fr}.

Dans notre système monétaire, la valeur de l'or est de 15 fois $\frac{1}{2}$ celle de l'argent, à poids égal. Il en résulte que la pièce de 20^{fr}, qui en argent pèserait 100 grammes, ne pèse en or que $\frac{100^{\text{gr}}}{15\frac{1}{2}}$ ou $\frac{200^{\text{gr}}}{31}$, c'est-à-dire 6^{gr}, 45161. Il est facile d'en déduire le poids des autres pièces d'or.

D'après la loi du 6 mai 1852, le poids de la pièce de 5 centimes a été fixé à 5 grammes; il en résulte que la pièce de 10 centimes pèse 10^{gr}, et la pièce de 2 centimes 2^{gr}. Il en résulte aussi qu'à poids égal la valeur de l'argent est estimée à 20 fois celle du bronze.

La loi admet une tolérance sur le poids des monnaies comme elle en admet une sur leur titre. Cette tolérance est de 1 millième du poids total pour les pièces d'or de 100^{fr}, de 2 millièmes pour les pièces de 50^{fr}, de 20^{fr} (et de 40^{fr}), de 2 millièmes $\frac{1}{2}$ pour les pièces de 10^{fr}, et de 3 millièmes pour les pièces d'or de 5^{fr}. La tolérance est de 3 millièmes pour les pièces d'argent de 5^{fr} et de 2^{fr}, de 5 millièmes pour les pièces de 1^{fr}, de 7 millièmes pour les pièces de 50 centimes, et de 10 millièmes pour les pièces de 20 centimes. La tolérance en poids est de 10 millièmes pour les pièces de 10 centimes et de 5 centimes; elle est de 15 millièmes pour les pièces de 2 centimes et de 1 centime.

Le diamètre des monnaies françaises a aussi été fixé par la loi, de manière non-seulement à ce que deux monnaies du même métal aient un diamètre différent, mais même à ce que deux monnaies de métaux différents ne puissent pas être confondues.

Ce diamètre est réglé conformément au tableau suivant, qui donne, pour chaque pièce, son poids exact ou droit, la tolérance, le poids avec la tolérance en plus ou en moins, et enfin le diamètre.

DÉNOMINATION des pièces.	POIDS droit.	TOLÉRANCE de poids.	POIDS AVEC TOLÉRANCE		DIAMÈTRE.
			en plus.	en moins.	
Or.					
100 fr	32,258	1 mill.	32,29026	32,22574	35 millimètres
50	16,129	2	16,16126	16,09674	28
40 ^{fr}	12,90322	2	12,92903	12,8774	26
20	6,45161	2	6,46451	6,43871	21
10	3,22580	2,5	3,23380	3,21774	19
5	1,61290	3	1,61774	1,60806	17
Argent.					
5 fr	25	3	25,075	24,925	37
2	10	3	10,05	9,950	27
1	5	5	5,025	4,975	23
0,50	2,50	7	2,5175	2,4825	18
0,20	1	10	1,01	0,99	15
Bronze.					
0,10 fr	10	10	10,100	9,900	30
0,05	5	10	5,050	4,950	25
0,02	2	15	2,030	1,970	20
0,01	1	15	1,015	0,985	15

On peut remarquer que 155 pièces de 20 francs pèsent 1 kilogramme, et que 20 000^{fr} en or pèsent 6^{kg}, 451.

On peut remarquer encore qu'on obtient une longueur d'un mètre en plaçant, à côté les unes des autres, 19 pièces d'argent de 5^{fr} et 11 de 2^{fr}, ou 20 pièces de 2^{fr} et 20 de 1^{fr}.

On peut encore faire une longueur de 1 mètre avec 6 pièces de 20^{fr} et 46 pièces de 10^{fr}.

Le kilogramme d'or monnayé, à 900 millièmes de fin, vaut, au change des monnaies, 3093 fr. 30. Le kilogramme d'argent monnayé au même titre, vaut 198 fr. 50; mais le kilogramme d'argent monnayé au titre de 835 millièmes ne vaut que 184 fr. 16 (Voy. MONNAIES ÉTRANGÈRES).

MONTE-CHARGE, appareil dont on se sert dans les gares de chemins de fer pour faire monter ou descendre les bagages et les marchandises. Nous en donnerons une idée en décrivant sommairement le monte-charge établi à Bercy par MM. Leconte et Delpech, ingénieurs du chemin de fer de Lyon, pour le service de l'entrepôt des vins. L'appareil se compose, comme toujours, de deux plateaux équilibrés, dont l'un descend quand l'autre monte. Ici la distance verticale à parcourir était de 6^m, 30. Chaque plateau a 7^m, 40 de long, 3^m, 94 de large et 1^m, 05 de hauteur, et peut contenir un wagon chargé de pièces de vin. Le poids du wagon vide étant de 5000^{kg}, et celui des pièces de vin de 1000^{kg}, c'est une charge totale de 6000^{kg}. Le plateau est guidé par 4 demi-colonnes creuses en fonte, dans lesquelles descendent des chaînes attachées aux 4 angles du plateau. Ces chaînes passent sur des poulies de renvoi logées dans l'épaisseur du plancher supérieur, et vont se relier deux à deux, à chaque extrémité du pla-

1. Cette pièce ne se fabrique plus.

teau, avec une chaîne plus forte qui, passant sur une poulie de renvoi établie dans une fosse, au-dessous du plancher inférieur, va s'attacher à un tambour placé au milieu de la largeur du plateau. Les deux plateaux sont à 12 mètres l'un de l'autre, d'axe en axe. Les deux tambours, qui ont le même axe de rotation, sont mis en mouvement par une machine à vapeur installée entre les plateaux. Les deux tambours tournent dans le même sens; mais la disposition des chaînes qui s'y enroulent est inverse, en sorte que l'un des plateaux monte quand l'autre descend. Un mode particulier d'embrayage (*Voy. EMBRAYAGE*) permet de soumettre ou de soustraire à volonté les tambours à l'action de la machine, et de les faire tourner dans un sens déterminé ou en sens contraire.

Les deux plateaux étant à l'extrémité de leur course, c'est-à-dire l'un au niveau du plancher inférieur, l'autre au niveau du plancher supérieur, on amène, par exemple, un wagon plein sur le plateau inférieur et un wagon vide sur le plateau supérieur. Au signal donné par le chef d'équipe, on embraye, et la machine faisant tourner les cylindres, le plateau chargé du wagon plein monte, tandis que le plateau chargé du wagon vide redescend. Quand ils sont arrivés à l'extrémité de leur course, un second signal est donné, et l'on débraye, jusqu'à ce qu'un nouveau signal fasse embrayer en sens contraire; alors le plateau qui était monté redescend, et celui qui était descendu remonte.

Voyez la description détaillée de cet appareil dans le tome XIII de la *Publication industrielle de M. Armengaud*.

MONTÉE d'une voute. *Voy. HAUTEUR SOUS CLEF.*

MONTRE, instrument qui sert à la mesure du temps dans l'usage civil. Une montre ne diffère pas essentiellement d'un **CHRONOMÈTRE** (*Voy. ce mot*); le *moteur* et le *rouage* sont les mêmes; le *remontage* s'opère de la même manière; les principales différences consistent dans le *régulateur* et dans l'*échappement*.

Comme un ressort en hélice occuperait trop de place dans le sens perpendiculaire au cadran, on donne au régulateur la forme d'une spirale, ce qui a fait nommer ce ressort la *spiral*. Il n'y a point de balancier compensateur; le balancier se réduit à un simple anneau.

L'échappement le plus généralement employé est l'échappement à *cylindre*, d'où le nom de *montres à cylindre* donné aux montres qui en sont pourvues. Cet échappement est représenté en plan dans la figure 1. *aa''bb''* représente la section, perpendiculaire à l'axe, d'un cylindre creux, en acier, mobile autour de son axe projeté en *O*, qui est celui du balancier, et qui partage le mouvement vibratoire de ce dernier. *RR* représente une partie de la roue d'échappement; ses dents, dont l'une est figurée dans trois positions successives, ne sont pas dans le même plan que la roue; la partie ombrée est fixée à la roue par un support perpendiculaire à son plan, et que la figure ne peut laisser voir. La roue tendant à se mouvoir dans le sens de la flèche, la dent est d'abord arrêtée par la surface extérieure du cylindre, comme on le voit en *mn*; le cylindre a dans ce moment la position *ab*. La dent conserve cette position, et le *repos* continue, jusqu'à ce que, dans son mouvement oscillatoire, le cylindre soit

venu prendre la position *a'b'*. La dent, en appuyant par son plan incliné *mn* sur la *lèvre a'* du cylindre, suit le mouvement du cylindre, et vient prendre la position *m'n'*, où elle se trouve de nouveau arrêtée

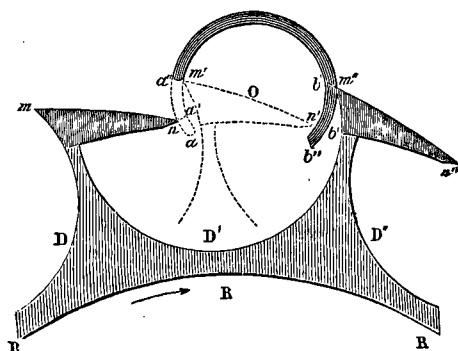


Fig. 1.

par la surface interne du cylindre, qui a dans ce moment la position *a''b''*. Ce second *repos* continue jusqu'à ce que, dans la demi-oscillation contraire, le cylindre soit revenu à la position *a'b'*; la dent agit alors par son plan incliné sur la *lèvre b'*, accélère le mouvement du cylindre, ce qui produit la *levée*, et arrive à la position *m'n'* où elle échappe complètement. Le cylindre a repris alors la position *ab*; une nouvelle dent est venue faire son repos sur sa surface extérieure; et le même jeu recommence. — Il faut que, dans la position *m'n'*, le plan incliné de la dent passe par l'axe *O* du cylindre; et la longueur *m'n'* doit être, sauf le jeu nécessaire, égale au diamètre intérieur de ce cylindre. La distance de deux dents doit être, sauf également le jeu indispensable, égale au diamètre extérieur de ce même cylindre. On remarque sur la figure que la surface du cylindre n'est pas complète; sa section droite n'embrasse qu'une demi-circonférence, plus un certain nombre de degrés, 20° environ, déterminés par la différence de distance des points *m* et *n* au centre de la roue, différence qui produit la *levée*. Le cylindre est en outre échancré à la hauteur de la roue, afin que l'amplitude de ses oscillations puisse être accrue sans qu'il vienne frapper contre la roue. On reconnaît enfin que dans cet échappement, comme dans les échappements libres décrits à l'article **CHRONOMÈTRE**, il échappe une dent à chaque oscillation complète, aller et retour, du régulateur.

L'échappement à cylindre a été imaginé en 1720 par Graham, horloger anglais; il est aujourd'hui presque universellement adopté pour l'usage civil, parce qu'il est susceptible d'assez de précision, qu'il tient peu de place et que son exécution n'offre pas de grandes difficultés.

Avant que la mode eût répandu l'usage des montres plates, on employait beaucoup, et l'on emploie encore dans l'horlogerie commune, l'échappement à *roue de rencontre* ou à *verge*, représenté en perspective dans la figure 2. La roue de secondes *A* a ses dents disposées parallèlement à son axe, et forme ce qu'on appelle une *roue de champ*; elle engrène avec le pignon *B* de la *roue de rencontre C*, dont les dents sont inclinées d'une petite quantité par rapport à

l'axe, dans le sens du mouvement de la roue. La verge VV' qui sert d'axe au balancier, porte deux palettes p, p' , faisant entre elles un angle d'environ 100°. Lorsqu'une dent de la roue C vient rencontrer

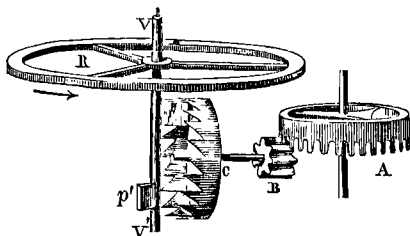


Fig. 2.

la palette supérieure p , elle fait tourner cette palette, et par conséquent le balancier, dans le sens de la flèche, jusqu'à ce que, par suite de ce mouvement, la palette inférieure p' soit à son tour rencontrée par la dent de la roue C qui se trouve alors à la partie inférieure; la dent supérieure ayant échappé, c'est-à-dire n'étant plus en contact avec la palette p , la dent inférieure pousse la palette p' , la fait tourner, ainsi que le balancier, en sens inverse de la flèche, jusqu'à ce que, par suite de ce mouvement, la palette supérieure se trouve en contact avec la dent qui occupe alors la partie supérieure; la dent inférieure ayant échappé, la dent supérieure pousse la palette p ; le balancier tourne dans le sens de la flèche; et le même jeu recommence, le balancier tournant ainsi alternativement dans un sens ou dans l'autre par suite de l'action d'une dent supérieure sur la palette p , puis d'une dent inférieure sur la palette p' , et ainsi de suite.

Cet échappement est dit à recul, parce que chaque fois qu'une dent de la roue C rencontre une des palettes, la force vive acquise par le balancier ne pouvant être instantanément détruite, la roue C éprouve non-seulement un temps d'arrêt, mais un petit mouvement en sens contraire de celui que tend à lui imprimer le moteur. Le choc des palettes contre les dents de la roue de rencontre et le mouvement de recul qui en résulte pour celle-ci, constituent le principal défaut de cet échappement, qui est néanmoins fréquemment employé à cause de sa simplicité, et de la facilité avec laquelle il peut être construit ou réparé par les horlogers les moins habiles.

Dans les montres très-soignées, on emploie au contraire un genre d'échappement plus perfectionné que l'échappement à cylindre, et se rapprochant davantage par ses propriétés des échappements libres décrits à l'article CHRONOMÈTRE. Nous voulons parler de l'échappement dit *duplex*; il tire son nom de ce que la roue d'échappement est réellement double, c'est-à-dire composée de deux roues solidaires, dont l'une A (fig. 3) a pour fonction de produire le repos et l'échappement, après quoi l'autre B produit la levée. La première est munie de dents longues et aiguës qui viennent s'appuyer sur un cylindre C monté sur l'axe du balancier; celui-ci étant supposé d'abord se mouvoir dans le sens de la flèche, il arrive bientôt qu'une encoche e pratiquée sur la surface du cylindre vient se présenter devant la dent a ; son extrémité tombe dans cette

encoche; mais comme la roue A tend à tourner en sens contraire de la flèche, l'encoche pousse la dent a sans que celle-ci puisse échapper, la dépasse, et le repos continue après un léger mouve-

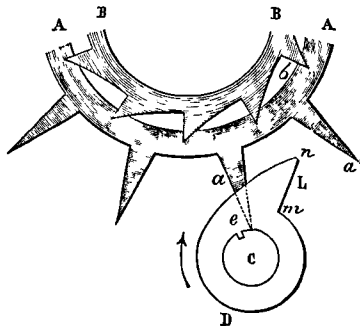


Fig. 3.

ment de recul. Mais lorsqu'au retour du balancier l'encoche e se présente de nouveau devant l'extrémité de la dent a , celle-ci s'y engage, et les deux mouvements étant alors de même sens, la dent suit l'encoche et échappe. Au-dessus du rouleau C est montée sur l'axe du balancier une pièce D en forme de virgule; l'extrémité L de cette pièce se trouve, aussitôt après que l'échappement a eu lieu, avoir dépassé la dent b de la roue B solidaire avec A; ces deux roues étant poussées par le rouage qui reçoit l'action du moteur, la dent b vient tomber sur la partie mn de la pièce D, et produit ainsi la levée; c'est-à-dire qu'elle donne au balancier une impulsion qui lui restitue la force vive qu'il avait perdue par suite du choc de la roue A sur le cylindre C. La tension du ressort spiral ramène bientôt le balancier dans le sens de la flèche; une nouvelle dent a' de la roue A vient faire son repos sur le cylindre, et le même jeu recommence.

Le diamètre du rouleau C doit être le tiers de la distance entre les extrémités de deux dents consécutives a et a' de la roue A; et l'extrémité de la dent a doit parcourir un arc de 20° depuis l'instant où elle s'engage dans l'encoche pour échapper jusqu'au moment où elle s'en dégage. Les roues A et B doivent parcourir un arc de 10° depuis l'instant de l'échappement jusqu'au repos suivant; et la levée produite par la dent b sur la partie mn de la pièce D doit être de 30°. La roue A est ordinairement en acier, la roue B en cuivre; le rouleau C est en pierre précieuse; la paroi mn est également garnie d'une palette en rubis ou en saphir. — Cet échappement demande plus de soins que les deux précédents; mais le frottement n'y joue presque aucun rôle, et lorsqu'il est bien exécuté, il peut, à peu de chose près, rivaliser avec les échappements libres.

Comme les montres n'ont pas de balancier compensateur, il faut une disposition particulière qui permette de remédier à l'avance ou au retard produits par les variations de température ou par d'autres causes. On emploie pour cela une pièce nommée *raquette*, qui est vue en dessous dans la figure 4. Cette pièce est mobile autour de l'axe du balancier, mais elle est indépendante de celui-ci. Sa tête R porte en dessous une saillie percée d'une fente

verticale f dans laquelle s'engage le ressort spiral, fixé en F au pont qui reçoit le pivot supérieur du balancier, et à son autre extrémité à l'axe du balancier lui-même. Le ressort spiral étant serré en f , ce

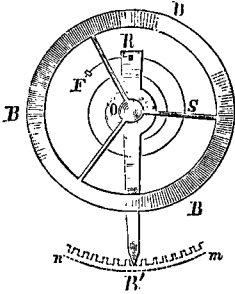


Fig. 4.

n'est qu'à partir de ce point qu'il peut être regardé comme libre, et l'on peut à volonté ou le raccourcir en faisant marcher la tête R de la raquette de R vers S , ou l'allonger en faisant tourner la raquette en sens contraire; dans le premier cas, le spiral fera des vibrations plus rapides, et la montre avancera; dans le second cas, le spiral fera des vibrations plus lentes, et la montre retardera. On produit ces mouvements en agissant sur l'extrémité R' de la raquette, laquelle parcourt un arc divisé qui a été indiqué sur la figure, bien qu'il ne puisse être vu dans la position où elle montre la raquette.

Les fabricants de montres se contentent ordinairement de copier les modèles établis par les horlogers du premier ordre, et qui sont le fruit de leurs patientes recherches et d'une longue expérience. Mais lorsqu'on veut modifier les dimensions de la montre, celles du rouage, le nombre de vibrations que le balancier doit faire par seconde, leur amplitude ou bien encore le temps employé par le ressort moteur à faire faire un tour au barillet ou à la fusée, il faut déterminer la force du ressort en conséquence. On emploie pour cela la règle suivante, donnée par Ferdinand Berthoud sous une forme moins mathématique : « Si l'on considère la force exercée par le ressort sur l'axe de la fusée (ou sur celui du barillet s'il n'y a pas de fusée), le MOMENT (*Voy. ce mot*) de cette force par rapport à cet axe doit être proportionnel à la FORCE VIVE (*Voy. ce mot*) du balancier (calculée d'après sa vitesse moyenne), et en raison inverse du temps employé par le ressort à faire faire un tour au barillet (ou à la fusée). » Or, ce moment peut être déterminé par expérience; Berthoud employait pour cela une sorte de petite romaine (*Voy. BALANCE*) qu'il adaptait sur le carré de la fusée placé dans une position horizontale; et il faisait varier la position du curseur jusqu'à ce que le fléau ou levier se tint horizontalement sous l'action du poids de ce curseur et de la force exercée en sens contraire par le ressort; le moment de ce poids donnait la mesure du moment cherché. On peut de la sorte ou se donner les dimensions et le poids du balancier et en déduire, au moins approximativement, la force du ressort, ou se donner le ressort et en déduire soit les dimensions, soit le poids du balancier.

Les montres sont aujourd'hui réglées sur le *temps moyen*. Berthoud recommande de remonter une

montre chaque jour à la même heure, et de la remettre à l'heure exactement, tous les huit ou dix jours, sur un bon chronomètre ou sur une bonne horloge, en ayant soin de corriger la tendance à l'avance ou au retard en faisant mouvoir la raquette dans le sens convenable. Pour arriver à plus de précision, on fait avancer ou reculer la raquette jusqu'à ce que la montre avance en 24 heures précisément de la même quantité dont elle retardait dans le même temps, ou vice-versa; puis on ramène l'aiguille au milieu de l'intervalle qu'on avait été obligé de lui faire parcourir.

MONTRE À ÉQUATION, montre qui donne à la fois le temps moyen et le temps vrai. Voici la disposition adoptée par Berthoud pour obtenir ce résultat.

AAA (fig. 1) est une grande roue dite *roue annuelle*,

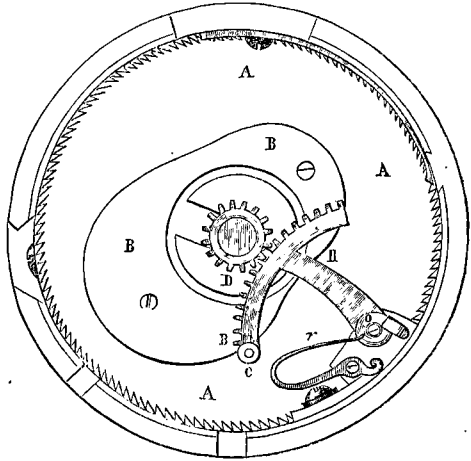


Fig. 1.

fendue à rochet, de 146 dents, et mobile autour de son centre; elle engrène avec deux palettes portées sur un axe qui fait un tour en 5 jours, de telle sorte que la roue fait le sien en $\frac{146 \times 5}{2}$ ou 365 jours.

Ce mouvement peut être produit d'une manière continue par un engrenage; mais, dans ses montres à équation, Berthoud se contentait de faire sauter la roue annuelle de deux dents en cinq jours,

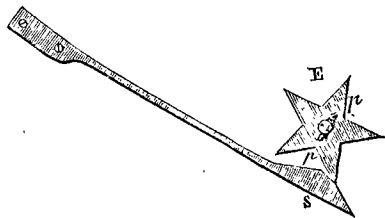


Fig. 2.

en adaptant à l'axe qui porte les deux palettes une étoile à cinq points E (fig. 2), retenue par un ressort s dit *sautoir*. Le mécanisme du remontage faisait sauter une pointe chaque jour; l'étoile faisait

ainsi un tour en cinq jours ; et dans le même intervalle de temps, les deux palettes *p, p* faisaient sauter chacune la roue annuelle d'une dent, soit de deux dents en cinq jours. Cette roue était d'ailleurs retenue dans sa position par un ressort sautoir analogue au ressort *s*.

Sur la roue annuelle est adaptée une plaque BBB de forme courbe, dont le tracé sera indiqué tout à l'heure. Dans le mouvement de la roue annuelle, cette courbe appuie contre une cheville C fixée à l'extrémité du *râteau* R, portion de roue centée, mobile autour d'un centre O, et l'oblige à tourner autour de ce centre. Un ressort *r* l'empêche de céder plus qu'il n'est nécessaire à cette pression. Le *râteau* engrène avec un pignon D, dont l'axe passe dans l'intérieur du canon qui porte la roue annuelle ; à cet axe est fixé un petit cadran mobile, concentrique au cadran fixe ordinaire ; ce cadran mobile est destiné à indiquer le temps vrai pendant que le cadran fixe donne le temps moyen avec les mêmes aiguilles.

Pour déterminer la courbe qui doit pousser le *râteau*, on enlève d'abord la cheville C. On met les aiguilles sur le midi du cadran fixe ; et l'on fait tourner le cadran mobile jusqu'à ce que la position de l'aiguille des minutes par rapport à ce cadran mobile indique le nombre des minutes et secondes qui représentent l'équation du temps (Voy. ce mot) pour le jour que l'on considère. Dans ce mouvement, le pignon D a fait marcher le *râteau* ; on marque, à l'aide d'un poinçon passé dans le trou qu'occupait la cheville, la position où le *râteau* s'est arrêté. On recommence la même opération pour les jours suivants, ou pour une série de jours équidistants, de cinq jours en cinq jours par exemple ; et par toutes les marques faites avec le poinçon, on fait passer une courbe qui sera la courbe demandée. Car si, après avoir donné au plateau la forme indiquée par cette courbe, on remet la cheville C, il est clair que la roue annuelle, en tournant, fera prendre au *râteau* les positions qu'il doit avoir aux différentes époques de l'année ; et que, par conséquent, la différence entre les indications du cadran mobile et celles du cadran fixe exprimera l'équation du temps pour ces différentes époques. La montre donnera donc le temps moyen par les indications du cadran fixe, et le temps vrai par celles du cadran mobile.

Dans les montres à équation modernes, on supprime le cadran mobile ; et l'on remplace le *râteau* par un simple bras portant une cheville qui est poussée par la courbe ; sur l'axe de ce bras est montée une fine aiguille dont l'extrémité parcourt un arc de cercle tracé sur le cadran fixe ; cet arc de cercle est divisé en minutes, de 0 à 16 de part et d'autre de son milieu ; et l'aiguille donne ainsi l'équation du temps, qu'il faut ajouter au temps moyen, ou en retrancher, pour avoir le temps vrai.

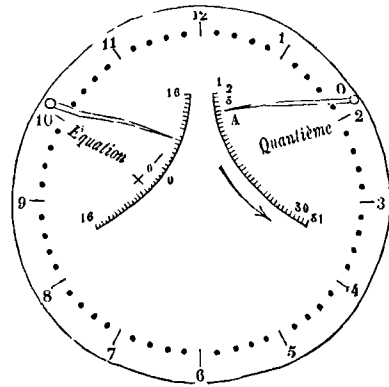
Les montres à équation que nous venons de décrire sont simplement annuelles ; et, quand l'année est bissextile, il faut, le 28 février, faire sauter une dent à la roue annuelle, en sens contraire de son mouvement ordinaire, afin qu'elle se retrouve, après le 29, dans la position où elle aurait été si l'année eût été de 365 jours seulement. On a fait des montres à équation dont la roue annuelle avait 366 dents, engrenant avec une palette qui faisait sauter une dent chaque jour ; mais dans les années non bissextiles, une disposition spéciale permettait d'en faire

sauter deux le 28 février. On compliquait ainsi la construction de la montre sans en tirer aucun avantage réel.

Aujourd'hui on renonce aux montres à équation, dont les indications peuvent être avantageusement remplacées par une petite table d'équation que l'on porte sur soi.

MONTRE À QUANTIÈME, montre qui donne le mois dans lequel on se trouve et le quantième où l'on est arrivé. Les MONTRES À ÉQUATION (Voy. ce mot) sont ordinairement à quantième, parce que la roue annuelle, nécessaire pour obtenir le temps vrai, peut servir en même temps à faire connaître le mois et le quantième. Il suffit, en effet, pour cela de diviser la roue annuelle en 12 mois, subdivisés eux-mêmes en 30, 31 ou 28 jours, conformément à la division connue de l'année, et de faire paraître ces indications au travers d'une ouverture pratiquée dans le cadran.

Dans les montres modernes on a imaginé, pour arriver au même but, plusieurs dispositions plus ou moins compliquées, qu'on trouvera décrites dans les traités spéciaux d'horlogerie, et particulièrement dans le traité de L. Moïnet. Nous ne décrivons que la suivante, qui est la plus usitée. L'aiguille chargée d'indiquer le quantième a son centre O près du bord du cadran, et son extrémité A par-



court un arc de cercle tracé sur ce cadran et divisé en 31 parties égales. Sur l'axe de cette aiguille est monté un *râteau*, fendu en rochet, de 31 dents. Une des roues du rouage, faisant un tour en 24 heures, porte une cheville qui, à minuit, vient saisir une dent du *râteau* et le faire mouvoir d'une division en sens contraire de la flèche ; un ressort qui appuie sur une goupille voisine du centre du *râteau* tend à le ramener en sens contraire quand la cheville échappe ; mais il est retenu par un cliquet. La roue annuelle porte 12 chevilles dont les positions correspondent au dernier jour de chaque mois ; à la fin de ce dernier jour, la cheville dégage le cliquet, et le *râteau*, mû par le ressort, rétrograde de toute la quantité dont il s'était avancé pendant le mois ; en sorte que l'aiguille se retrouve sur la division 1 pour commencer le mois suivant. Dans les années bissextiles, l'aiguille se trouve en avance d'un jour le 1^{er} mars ; mais on a soin de la faire reculer à l'aide de la clef, ce qui est possible, attendu qu'elle n'est maintenue qu'à frottement sur son axe.

Lorsqu'il y a une aiguille d'équation (Voy. MONTRES À ÉQUATION) et une aiguille de quantième, elles sont placées symétriquement sur le cadran.

MONTRE À RÉPÉTITION, montre qui sonne les heures et les quarts toutes les fois qu'on fait agir un poussoir qui tient à l'anneau de la montre. Les montres à répétition présentent toutes les parties qui se trouvent dans une montre ordinaire; seulement elles y sont un peu plus gênées et ordinairement de dimensions moindres, afin de réserver la place nécessaire aux organes spéciaux de répétition. Ces organes sont de trois catégories : les uns constituent le *rouage de sonnerie*, placé sur le bord de la grande platine, entre le barillet et la roue de champ; les autres constituent ce qu'on nomme la *cadature*, parce qu'elles sont placées sous le cadran; une troisième catégorie se compose des *marteaux* et des *ressorts-timbres*.

I. Le rouage de sonnerie se compose de cinq roues. La première, ou grande roue de sonnerie, est montée sur l'axe du barillet contenant le petit ressort qui anime ce rouage; elle a ordinairement 42 dents, et engrène avec le pignon de la seconde roue, laquelle a 36 dents; celle-ci engrène avec le pignon de la troisième qui a 33 dents; cette troisième roue engrène avec le pignon de la quatrième, laquelle a 30 dents; enfin celle-ci engrène avec le pignon de la cinquième, laquelle a 25 dents. Cette dernière engrène avec un pignon sans roue, qu'on nomme *pignon de délai*, et qui sert de volant, quoiqu'il n'ait point d'ailettes. Tous les pignons de ce rouage ont 6 dents. Il est facile de conclure de ces nombres que lorsque la grande roue fait un tour, le pignon de délai en fait $4812 \frac{1}{2}$; il tourne par conséquent avec une très-grande vitesse. — L'axe de la grande roue porte un rochet d'encliquetage et un second rochet qui sert à faire mouvoir la levée du grand marteau, dont il sera question plus loin.

II. La cadature comprend : 1° la *crémaillère*; 2° la chaîne, la poulie et le barillet de sonnerie; 3° le *tout-ou-rien*, avec le *limaçon des heures* et l'*étoile*; 4° la *pièce des quarts*; 5° *limaçon des quarts* avec sa *surprise*. On y voit en outre un grand nombre de pièces accessoires, mais indispensables, qui seront décrites en leur lieu. La figure 1 représente la cadature de Berthoud. PP est le poussoir, formé d'un cylindre d'acier, dont la portion inférieure est entaillée, en arrière, par un plan mené suivant son axe, et glisse contre le bord d'une plaque d'acier, qui l'empêche ainsi de tourner sur lui-même. ABCD est la *crémaillère*, mobile autour d'un axe situé en A; ce nom est impropre; on verra tout à l'heure d'où il vient. A son extrémité C est fixé l'un des bouts d'une chaîne, qui, après s'être enroulée sur la poulie de renvoi E, vient s'attacher, par son autre extrémité, à la circonférence du barillet de sonnerie F. La pièce GHI est le *tout-ou-rien*; la fonction de cette pièce indiquera l'origine de cette dénomination. Cette pièce est susceptible d'un petit

mouvement de rotation autour du point G, par l'effet du jeu laissé à l'axe situé en H, et à cause des dimensions données au trou K dans lequel est engagée une tige fixée à la platine. Sur l'axe H sont



Fig. 1.

placés le *limaçon des heures*, formé de 12 arcs de cercle concentriques d'un même nombre de degrés, c'est-à-dire de 30 degrés, mais dont les rayons sont en progression arithmétique; et l'*étoile* de 12 dents, maintenue par un ressort sautoir. Le limaçon des heures et l'étoile sont représentés avec plus de détails dans la figure 2. LOMN est la *pièce des quarts* mobile autour d'un axe placé en O. — Q est le *limaçon des quarts*, formé de trois quarts de cercle, dont les rayons sont aussi en progression arithmétique. Cette pièce est montée sur la roue de chaussee (Voy. CHRONOMÈTRE). A ce limaçon est adaptée une pièce appelée *surprise*, dont il sera question plus loin.



Fig. 2.

Quand le poussoir n'est point enfoncé, la partie B de la crémaillère qu'on appelle son talon, vient buter contre le bout du canon dans lequel le poussoir se meut; l'extrémité C est très-voisine de la poulie E, et le ressort de sonnerie n'est point armé; le côté MN de la pièce des quarts, maintenu par le doigt d qui agit sur la cheville 2, est alors plus voisin du bord de la platine qu'il ne l'est dans la figure 1; et le doigt a repose sur l'extrémité 1 du tout-ou-rien. Nous avons dit plus haut que la première roue de sonnerie, montée sur le même axe que le barillet F, était munie de deux rochets, dont l'un fonctionne comme encliquetage; l'autre rochet est armé de 12 dents sur une moitié seule-

ment de sa circonférence; et ces dents peuvent engrener avec une levée du grand marteau, placée au-dessous de la platine. Mais, lorsque le poussoir n'est pas enfoncé, la cheville 1 fixée au grand marteau, et traversant une rainure circulaire pratiquée dans la platine, est maintenue par le bras courbe *b* de la pièce des quarts dans une position telle, que la levée du marteau n'engrène pas avec le rochet de 12 dents.

Supposons maintenant qu'on enfonce le poussoir; son extrémité P agissant sur le talon B de la crémaillère, la force à tourner autour du point A; son extrémité C agit sur la chaîne, fait tourner le barillet et arme le petit ressort de sonnerie; en même temps le doigt *d* quitte la cheville 2; la pièce des quarts pressée par le ressort *ee* qui agit sur la cheville 3, tend à tourner autour du point O pour se rapprocher du limaçon des quarts; mais elle est encore retenue par le doigt *a* sur l'extrémité I du tout-ou-rien. Pendant ce temps, le bras D de la crémaillère est venu tomber sur le limaçon des heures, mais sans produire de sonnerie; pour que l'heure sonne, il faut que le poussoir soit assez enfoncé pour que le bras D en appuyant sur le limaçon fasse reculer le tout-ou-rien en le faisant tourner un peu autour du point G. Alors le doigt *a* se dégage de l'extrémité I, et la pièce des quarts vient tomber sur le limaçon des quarts; le bras courbe *b* abandonne la cheville 1, et le grand marteau, poussé par un ressort, vient se placer de manière que sa levée intérieure engrène avec une des dents du rochet, laquelle sera d'autant plus avancée dans la série des 12 dents que le bras D de la crémaillère s'appuiera sur un arc de plus petit rayon parmi ceux dont se compose le limaçon des heures. C'est une cheville fixée à la roue de chaussée qui, en faisant sauter une dent de l'étoile à chaque heure, place le limaçon des heures dans la position convenable pour le nombre de coups à sonner. On conçoit donc que la première roue de sonnerie tournant avec le barillet sous l'action du petit ressort qui vient d'être armé, les dents du rochet comprises entre celle qui engrène avec la levée du grand marteau et l'extrémité, viennent successivement agir sur cette levée; à chaque fois, le marteau, écarté ainsi de sa position de repos, y est vivement ramené par l'action du ressort R agissant sur la cheville 4, qui traverse une rainure de la platine, et vient frapper un ressort-timbre disposé sur le contour de la boîte, et est aussitôt ramené d'une petite quantité en arrière par un contre-ressort, afin que le coup soit plus net. Tandis que ce mécanisme agit pour sonner les heures, le doigt *d* vient saisir la cheville 2 et ramène peu à peu la pièce des quarts vers sa position de repos; dans ce mouvement les dents placées en L viennent agir sur une levée *m* du petit marteau, lequel est mis en mouvement par le ressort *r* agissant sur la cheville 5; et les dents placées en M viennent agir de même sur une levée extérieure *n* du grand marteau, et le petit bras *n'* de cette levée agit sur la cheville 6 fixée au marteau. Après le passage de chaque dent M, cette double levée est ramenée à sa position par un petit ressort *t*. Le nombre de coups ainsi sonnés par les deux marteaux dépend de la position du limaçon des quarts, et par conséquent du nombre de dents qui, dans la chute de la pièce

des quarts sur le limaçon, ont dépassé les levées *m* et *n*. Celles-ci, en effet, ne font point mouvoir les marteaux quand elles sont rencontrées par les dents L et M pendant la chute de la pièce des quarts; elles ne les font mouvoir qu'au retour. C'est d'abord le petit marteau qui frappe un coup, aussitôt suivi d'un coup du grand marteau, coup moins fort que pour les heures, parce que la cheville 6 est plus voisine du centre de rotation du marteau que la cheville 1, et poussée d'ailleurs par un ressort plus faible. La pièce des quarts fait frapper ainsi autant de doubles coups qu'il y a de quarts à sonner.

On voit que ces effets recommenceront toutes les fois que l'on enfoncera le poussoir, le nombre d'heures et de quarts étant réglé par la position des limaçons. D'un quart d'heure au suivant le mécanisme répétera la même sonnerie, puisque le bras D de la crémaillère et le bras N de la pièce des quarts continueront à s'appuyer sur les mêmes arcs de leurs limaçons respectifs.

III. Il y a une disposition spéciale pour empêcher les quarts de sonner au renouvellement de l'heure, ou à 60 minutes. Il s'agit de faire en sorte que, si l'on enfonce le poussoir précisément au renouvellement de l'heure, le bras de la pièce des quarts ne continue pas à tomber sur l'arc *ef* (fig. 3) du limaçon correspondant aux trois quarts. Pour y parvenir, on établit sur l'axe du limaçon, une pièce *Ogh* appelée la *surprise*, de même forme que le plus grand des quatre quadrants de ce limaçon se compose, mais qui est susceptible d'un petit mouvement indépendant de celui-ci, ce qu'on obtient en pratiquant dans la surprise une rainure circulaire, dans laquelle s'engage une petite cheville *m* fixée au limaçon. A la surprise est adaptée une cheville plus grosse M; c'est celle qui, à chaque renouvellement de l'heure, fait sauter une des pointes de l'étoile. Le mouvement du limaçon entraîne la surprise, parce que la cheville *m* presse sur le bord antérieur de la rainure; la cheville M vient donc, à l'heure, rencontrer une des pointes de l'étoile; la pointe opposée fait fléchir le ressort sautoir, et cette dent passe; mais aussitôt qu'elle a passé, le ressort revenant sur lui-même la chasse en avant, et la cheville M fait ainsi un petit mouvement en avant, indépendant de celui du limaçon, jusqu'à ce que la petite cheville, qui occupait dans la rainure la position *m*, vienne prendre la position *m'*. Il en résulte que la surprise se présente pour recevoir le bras de la pièce des quarts dès que l'aiguille des minutes arrive à la division 60, et qu'elle empêche ainsi ce bras de tomber sur l'arc *ef*.

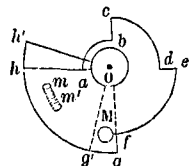


Fig. 3.

IV. La description que nous venons de donner se rapporte à la cadrature de répétition de F. Berthoud; mais ses dispositions les plus ingénieuses, telles que le tout-ou-rien, la surprise, avaient été imaginées par Julien Leroy.

Dans les cadratures modernes on retrouve, sauf quelques différences de forme, toutes les pièces de la cadrature de Berthoud. La modification la plus importante est celle qui consiste à supprimer la chaîne et la poulie, et à faire de la crémaillère un véritable *rotteau* (ou portion de roue dentée) qui

engrène avec un pignon placé sur l'axe du barillet. Cette modification n'est au reste que le retour à la disposition primitive qui avait fait donner le nom impropre de crémaillère à la pièce qui reçoit l'action du poussoir et la transmet au barillet. A l'époque où cette disposition fut imaginée, les propriétés des engrenages étaient encore mal connues, et les dents de la crémaillère et du pignon laissaient tant à désirer dans l'exécution qu'on avait été contraint d'y renoncer. Aujourd'hui que les engrenages s'exécutent avec une grande perfection, on a repris la crémaillère dentée, qui a sur la chaîne et la poulie plusieurs avantages; le plus important consiste à éviter l'allongement de la chaîne, qui était une cause de dérangement notable dans la marche du mécanisme de répétition. C'est Bréguet qui a eu l'idée de reprendre la crémaillère dentée, en lui donnant toute la précision désirable.

MONTRE À SECONDES, montre munie d'une aiguille spéciale pour marquer les secondes. L'aiguille des secondes peut être simplement montée sur l'axe de la roue de secondes; elle se meut alors sur un petit cadran à part; c'est la disposition adoptée dans les montres marines (Voy. CHRONOMÈTRE). On dit alors que la montre est à *petites secondes*, par allusion à la dimension du cadran des secondes; on lui donne aussi le nom de *trotteuse*, parce que l'aiguille des secondes battant le cinquième de la seconde, ou faisant 5 battements ou pas distincts dans une seconde, elle paraît trotter sur son cadran.

Mais les exigences du public ont amené une autre disposition dans laquelle l'aiguille des secondes a son axe au centre du cadran, comme l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes; on dit alors que la montre est à *secondes concentriques*. Cette disposition peut être obtenue par une modification convenable dans le rouage et la minuterie. Mais ordinairement les montres à *secondes concentriques* sont en même temps à *secondes indépendantes*, c'est-à-dire que l'aiguille des secondes est mue par un rouage spécial, indépendant, et qui n'emprunte point le secours du moteur principal. Au contraire, le rouage de secondes se termine par un bras de levier appelé *volant*, qui, à chaque tour, dans son mouvement rapide, vient faire un court repos sur l'une des ailes du pignon de la roue d'échappement, et tend ainsi à ajouter quelque chose à l'action du moteur principal.

Dans les montres à *secondes indépendantes*, l'aiguille des secondes ne fait qu'un seul mouvement par seconde pour sauter brusquement d'une division à la division suivante; en d'autres termes, elle ne fractionne pas la seconde, et se prêterait mal aux observations délicates. Au point de vue de la précision, ces montres, malgré leur prix élevé et la vogue dont elles jouissent, sont inférieures aux montres à *petites secondes*.

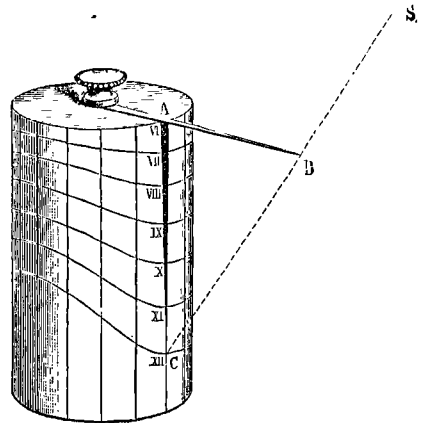
MONTRE À STOP. Voy. COMPTEUR A POINTAGE.

MONTRE DE COMPARAISON. Voy. COMPARAISON.

MONTRE DES PASTEURS, instrument portatif qui donne l'heure par la hauteur du soleil. Il se compose d'un petit cylindre en bois sur la surface duquel on a tracé des génératrices correspondant à différentes dates de l'année, de 8 jours en 8 jours, par exemple. La base supérieure du cylindre porte une aiguille mobile perpendiculairement à l'axe, et

qu'on peut amener au-dessus d'une génératrice quelconque au moyen d'un bouton. Quand on veut avoir l'heure, on amène l'aiguille en dessus de la génératrice qui correspond à la date de l'année où l'on se trouve; on place le cylindre de manière que son axe soit vertical et que l'aiguille soit tournée du côté du soleil. L'aiguille joue alors le rôle du style d'un CADRAN SOLAIRE (Voy. ce mot), et le point où l'extrémité de l'ombre est placée sur la génératrice indique l'heure du jour à laquelle on se trouve.

Pour construire cet appareil, on calcule la hauteur du soleil, d'heure en heure, pour les jours de l'année qui correspondent aux génératrices tracées sur le cylindre; et, connaissant la longueur du style, on en déduit la longueur de l'ombre verticale qu'il projette à chaque heure; c'est le côté vertical AC



d'un triangle rectangle ABC dont le côté horizontal AB est le style, et dont l'angle ayant pour sommet l'extrémité B de ce style, est la hauteur du soleil à l'heure dont il s'agit. C'est ainsi qu'on gradue chaque génératrice. On fait ensuite passer une courbe par les points de toutes les génératrices qui correspondent à une même heure, et l'on opère de même pour toutes les heures. Ces courbes permettent d'apprécier l'heure pour les jours qui correspondent non plus à des génératrices tracées sur le cylindre, mais à des génératrices intermédiaires.

Il y a lieu de remarquer, en outre, qu'à un même intervalle de temps, avant et après le passage du soleil au méridien, la hauteur et par suite la longueur de l'ombre sont les mêmes, et que par conséquent il faut savoir si l'on est avant ou après midi, afin de ne pas confondre par exemple XI heures du matin avec I heure après midi, ou X heures avec II heures, etc.

La montre des pasteurs ne peut servir rigoureusement qu'à la latitude pour laquelle elle a été construite; mais, à l'aide d'une table de correction, on l'utilise pour des latitudes un peu inférieures ou un peu supérieures.

MORTAISE, cavité prismatique creusée dans une pièce de charpente pour recevoir la saillie appelée *tenon*, ménagée à l'extrémité d'une autre pièce qu'on veut assembler avec la première (Voy. ASSEMBLAGE).

MORTALITÉ (TABLES DE). Tables qui, sur un nombre déterminé d'enfants nés le même jour,

donnent le nombre des survivants de chaque âge. Si l'on conçoit, par exemple, qu'un million d'enfants naissent le même jour, que l'on note, à chaque anniversaire de leur naissance, le nombre de ceux qui sont morts dans l'année, et par suite le nombre de ceux qui survivent, jusqu'à ce qu'enfin ils aient entièrement disparu; puis, que l'on dresse un tableau dans lequel, en regard de chacun des âges qu'ils ont successivement atteints, on inscrive le nombre des survivants de cet âge, on aura ce que l'on appelle une *table de mortalité*.

I. Il existe plusieurs tables de ce genre qui diffèrent assez notablement, en raison des documents divers qui ont été consultés pour les construire. La plus ancienne de ces tables est celle que Deparcieux avait construite, vers 1746, pour des têtes choisies, et qu'il a publiée dans son *Essai sur les probabilités de la vie humaine*. Elle a été complétée depuis pour les premiers âges. Cette table suppose 1286 naissances simultanées. Vient ensuite la table que Duvillard a donnée, en 1806, dans son *Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité*. Elle suppose 1 000 000 de naissances simultanées. Elle a été construite d'après un grand nombre de faits recueillis, avant la Révolution, en divers lieux de la France; et elle exprimait assez bien la loi de la mortalité à l'époque où elle a été publiée. Mais, depuis lors, les conditions sociales s'étant notablement modifiées, elle donne une mortalité trop rapide. On doit à M. de Montferrand une table couronnée par l'Académie des sciences en 1838, et construite d'après 12 millions de décès connus. Elle suppose 10 000 naissances simultanées, et indique une mortalité intermédiaire entre les deux précédentes, et qui doit se rapprocher beaucoup de la vérité. Les Compagnies qui s'occupent de RENTES VIAGÈRES (*Voy. ce mot*) font usage de diverses autres tables, et en particulier d'une table connue sous le nom de *Table de Hubbard*. Voici ces tables.

LOI DE LA MORTALITÉ EN FRANCE
D'APRÈS DEPARCIEUX.

AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS
0	1286	24	782	48	599	72	271
1	1071	25	774	49	590	73	251
2	1006	26	766	50	581	74	231
3	970	27	758	51	571	75	211
4	947	28	750	52	560	76	192
5	930	29	742	53	549	77	173
6	917	30	734	54	538	78	154
7	906	31	726	55	526	79	136
8	896	32	718	56	514	80	118
9	887	33	710	57	502	81	101
10	879	34	702	58	489	82	85
11	872	35	694	59	476	83	71
12	866	36	686	60	463	84	59
13	860	37	678	61	450	85	48
14	854	38	671	62	437	86	38
15	848	39	664	63	423	87	29
16	842	40	657	64	409	88	22
17	835	41	650	65	395	89	16
18	828	42	643	66	380	90	11
19	821	43	636	67	364	91	7
20	814	44	629	68	347	92	4
21	806	45	622	69	329	93	2
22	798	46	615	70	310	94	1
23	790	47	607	71	291	95	0

Il est bon de remarquer que la table de Deparcieux a été complétée de plusieurs manières pour les premiers âges. Plusieurs Compagnies d'assurances sur

la vie se servent de la table de Deparcieux, complétée d'après la mortalité de Kerseboom; cette table présente comme il suit les 10 premiers nombres.

AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS
0	1359	3	1000	6	930	9	890
1	1092	4	970	7	915	10	880
2	1043	5	948	8	902	11	872

A partir de 11 ans, la table dont il s'agit coïncide avec la précédente, extraite de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

LOI DE LA MORTALITÉ EN FRANCE
D'APRÈS DUVILLARD.

AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS
0	1000000	28	451635	56	248782	84	15175
1	767525	29	444932	57	240214	85	14886
2	671834	30	438183	58	231488	86	9224
3	624668	31	431398	59	222605	87	7165
4	598713	32	424583	60	213567	88	5670
5	583151	33	417744	61	204389	89	4686
6	573025	34	410886	62	195054	90	3830
7	565838	35	404012	63	185600	91	3093
8	560245	36	397123	64	176035	92	2466
9	555486	37	390219	65	166377	93	1938
10	551122	38	383300	66	156651	94	1499
11	546888	39	376363	67	146882	95	1140
12	542630	40	369404	68	137102	96	855
13	538255	41	362419	69	127347	97	621
14	533711	42	355400	70	117656	98	442
15	529069	43	348342	71	108070	99	307
16	524204	44	341235	72	98637	100	207
17	518863	45	334072	73	89404	101	135
18	513024	46	326843	74	80423	102	84
19	507949	47	319539	75	71745	103	51
20	502216	48	312148	76	63424	104	29
21	496317	49	304662	77	55511	105	16
22	490267	50	297070	78	48057	106	8
23	484083	51	289361	79	41107	107	4
24	477777	52	281527	80	34705	108	2
25	471366	53	273560	81	28886	109	1
26	464863	54	265450	82	23680	110	0
27	458282	55	257193	83	19106	»	»

LOI DE LA MORTALITÉ
D'APRÈS M. DE MONTFERRAND.

AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS
0	10000	27	6287	54	4780	81	872
1	8471	28	6253	55	4693	82	751
2	8059	29	6207	56	4605	83	632
3	7808	30	6152	57	4513	84	523
4	7643	31	6106	58	4416	85	427
5	7524	32	6061	59	4317	86	354
6	7432	33	6017	60	4215	87	280
7	7352	34	5972	61	4104	88	225
8	7285	35	5926	62	3976	89	179
9	7229	36	5881	63	3825	90	139
10	7182	37	5835	64	3678	91	109
11	7141	38	5788	65	3540	92	92
12	7109	39	5743	66	3389	93	64
13	7078	40	5698	67	3236	94	48
14	7043	41	5657	68	3080	95	36
15	7006	42	5601	69	2925	96	25
16	6965	43	5548	70	2770	97	18
17	6925	44	5493	71	2602	98	12
18	6881	45	5436	72	2423	99	9
19	6833	46	5376	73	2224	100	5
20	6785	47	5318	74	2017	101	4
21	6735	48	5204	75	1811	102	3
22	6672	49	5151	76	1616	103	2
23	6604	50	5086	77	1431	104	1
24	6516	51	5017	78	1275	»	0
25	6451	52	4943	79	1121	»	»
26	6385	53	4862	80	995	»	»

TABLE DE HUBBART.

AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS	AGES	VIVANTS
21	10000	39	8591	57	6770	75	2898
22	9910	40	8531	58	6656	76	2637
23	9827	41	8473	59	6536	77	2376
24	9748	42	8412	60	6395	78	2115
25	9672	43	8346	61	6240	79	1868
26	9598	44	8271	62	6077	80	1621
27	9524	45	8177	63	5907	81	1388
28	9447	46	8069	64	5730	82	1168
29	9371	47	7952	65	5535	83	976
30	9290	48	7830	66	5323	84	811
31	9207	49	7705	67	5094	85	660
32	9124	50	7580	68	4847	86	523
33	9041	51	7456	69	4580	87	399
34	8960	52	7335	70	4280	88	303
35	8881	53	7217	71	3997	89	220
36	8805	54	7102	72	3722	90	151
37	8731	55	6991	73	3447	»	»
38	8660	56	6881	74	3173	»	»

On trouvera, dans la *Théorie des annuités viagères* de Francis-Baily, une collection de 18 tables de mortalité employées par diverses administrations dans différentes contrées de l'Europe.

Quelques-unes de ces tables sont spécialement applicables aux hommes, d'autres le sont spécialement aux personnes du sexe féminin; mais la plupart sont communes aux deux sexes. En général, la mortalité est plus rapide pour les hommes que pour les femmes. Ainsi, à Stockholm, 166 hommes sur 1000 atteignent l'âge de 38 ans tandis que 236 femmes sur 1000 atteignent ce même âge. Pour la Suède entière, la mortalité est beaucoup moins rapide, et les deux nombres ci-dessus doivent être remplacés par 437 et 485.

Les Compagnies d'assurances sur la vie se servent des tables indiquant une mortalité rapide lorsqu'elles calculent les sommes à payer au décès des assurés; mais, pour les rentes viagères, elles emploient des tables exprimant une mortalité plus lente.

Le plus souvent, lorsqu'elles ont quelque durée, elles construisent elles-mêmes leurs tables de mortalité d'après leurs propres observations sur la partie de la population qui forme leur clientèle; et cette méthode est évidemment la meilleure lorsque le nombre des observations est suffisant.

II. Les usages des tables de mortalité sont très-divers.

On peut d'abord se demander combien sur N personnes d'un âge donné n , il y en a qui atteindront vraisemblablement l'âge $n + p$. Ce problème se résout par une simple proportion. Soit v_n le nombre des survivants de l'âge n , et v_{n+p} le nombre des survivants de l'âge $n + p$ fournis par la table; en appelant x le nombre cherché, on devra avoir

$$v_n : v_{n+p} = N : x, \text{ d'où } x = N \cdot \frac{v_{n+p}}{v_n}. \quad [1]$$

Si l'on demande, par exemple, combien sur les 1 005 078 individus nés en France en 1861 il y en aura qui atteindront vraisemblablement l'âge de 60 ans, on aura, en se servant de la table de Departement, $v_0 = 1286$, $v_{60} = 463$; par conséquent

$$x = 1005\,078 \cdot \frac{463}{1286}, \text{ ou } x = 361\,859,3$$

ou 361 859, à une unité près.

Si l'on demande de même combien, sur 1000 per-

sonnes âgées de 40 ans, il y en a qui atteindront probablement 75 ans, on aura, en se servant de la même table,

$$v_{40} = 657, \quad v_{75} = 211;$$

par conséquent,

$$x = 1000 \cdot \frac{211}{657} = 321,1 \text{ ou } 321, \text{ à une unité près.}$$

On peut aussi se proposer un problème inverse; par exemple : 800 personnes sont âgées de 40 ans; quel âge auront les survivants quand leur nombre sera réduit à 500? Pour résoudre cette question, il faut d'abord prendre dans la table le nombre des survivants de 40 ans; on trouve 657. Il faut ensuite chercher à quel chiffre ce nombre sera réduit quand le nombre 800 sera réduit à 500, ce qu'on obtient par la proportion

$$800 : 500 = 657 : x, \text{ d'où } x = 410,6.$$

Si l'on cherche ce nombre dans la colonne des vivants, on trouve qu'il répond à peu près à 64 ans. C'est donc à cet âge que le nombre des personnes dont il s'agit sera réduit à 500.

III. La probabilité, pour une personne d'un âge donné, d'atteindre un second âge déterminé, est le rapport entre le nombre des vivants de ce second âge et le nombre des vivants du premier, puisque le plus petit nombre exprime le nombre des chances favorables, et le plus grand le nombre total des chances (*Voy. PROBABILITÉ*). Ainsi, la probabilité, pour une personne de l'âge n , d'atteindre l'âge

$n + p$ est la fraction $\frac{v_{n+p}}{v_n}$. On voit que la formule [1]

peut s'énoncer en disant que le nombre x de personnes qui, sur N individus de l'âge n , atteindront vraisemblablement l'âge $n + p$, s'obtient en multipliant N par la probabilité, pour une personne de l'âge n , d'atteindre l'âge $n + p$.

IV. On appelle *vie probable* ou *durée probable de la vie*, pour un individu d'un certain âge, le nombre d'années qu'il peut espérer vivre encore selon les lois de la probabilité. L'âge que l'on cherche dans ce cas est celui qui, pour la personne considérée, répond à la probabilité $\frac{1}{2}$, puisqu'alors il y a autant

à parier que la personne atteindra cet âge qu'il y aurait à parier contre. On obtiendra donc l'âge demandé en prenant dans la table le nombre des vivants de l'âge de la personne considérée, et en cherchant à quel âge répond la moitié de ce nombre. Si, par exemple, on veut connaître la durée probable de la vie d'une personne de 40 ans, on prendra dans la table le nombre des vivants de 40 ans, soit 657; on prendra la moitié de ce nombre, soit 328,5, et l'on cherchera à quel âge correspond ce nombre de vivants. On trouve 69 ans environ. La personne dont il s'agit peut donc espérer atteindre l'âge de 69 ans.

De 6 ans à 64 ans, la vie probable à chaque âge est exprimée, avec une approximation suffisante, par la relation

$$y = 59 - \frac{3}{4}x, \quad [2]$$

dans laquelle x représente l'âge et y la vie probable. Il est d'autant plus permis de se servir de cette formule, dans l'intervalle que nous venons d'indiquer, que l'incertitude des résultats inscrits dans les tables de mortalité elles-mêmes montre que les

questions qui ont pour base l'emploi de ces tables ne sauraient comporter la rigueur mathématique.

On résout aisément, à l'aide de l'équation [2], les questions du genre de celle-ci : *A quel âge est-on parvenu à la moitié, aux deux tiers, aux trois quarts de son existence probable?* Dans le premier cas, le nombre y d'années qu'on a à vivre est égal à l'âge cherché x ; on a donc, en faisant $y = x$,

$$x = 59 - \frac{3}{4}x, \text{ d'où } x = 33,7 \text{ ou près de } 34 \text{ ans.}$$

Dans le second cas, y est la moitié de x , et l'on a $\frac{1}{2}x = 59 - \frac{3}{4}x$, d'où $x = 47,2$ ou environ 47 ans.

Dans le troisième cas, y est le tiers de x , et l'on a $\frac{1}{3}x = 59 - \frac{3}{4}x$, d'où $x = 54,46$ ou environ 54 ans $\frac{1}{2}$.

V. D'après les règles du calcul des probabilités, lorsqu'un événement résulte de la coïncidence de deux événements simples, indépendants l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit des probabilités des deux événements simples. Cette considération sert à résoudre les questions du genre des deux suivantes :

1. *Deux industriels, âgés l'un de 31 ans, l'autre de 45, se sont associés pour une entreprise qui doit avoir 18 ans de durée; quelle est la probabilité qu'ils seront encore vivants l'un et l'autre à cette époque?*

D'après la table de Deparcieux, à 31 ans le nombre des survivants est 726, et à 31 + 18 ou 49 ans, ce nombre est réduit à 590. La probabilité, pour le premier associé, de vivre encore 18 ans est donc $\frac{590}{726}$. A 45 ans le nombre des vivants est 622, et à 45 + 18 ou 63 ans, le nombre est réduit à 423. La probabilité, pour le second associé, de vivre encore 18 ans est donc $\frac{423}{622}$.

D'après la règle ci-dessus énoncée, la probabilité que les deux associés vivront encore au bout de 18 ans est donc

$$\frac{590}{726} \times \frac{423}{622} \text{ ou } \frac{249570}{451572}, \text{ ou à peu près } \frac{5}{9}.$$

2. *Un jeune homme de 33 ans épouse une jeune fille de 22 ans; quelle est la probabilité 1° que lorsque la femme aura atteint 60 ans, elle ait encore son mari, 2° qu'elle soit veuve à cette époque, 3° que les deux époux soient morts avant les 38 ans considérés?* 1° A 22 ans, le nombre des vivants est 798; à 60 ans, c'est-à-dire 38 ans après, ce nombre est réduit à 463; la probabilité que la femme atteindra 60 ans est donc $\frac{463}{798}$. A 33 ans, le nombre des vivants est 710; à 33 + 38 ou 71 ans, ce nombre est réduit à 291; la probabilité que le mari atteindra 71 ans est donc $\frac{291}{710}$. La probabilité que les deux époux seront encore vivants au bout des 38 ans a donc pour expression

$$\frac{463}{798} \times \frac{291}{710} = \frac{134733}{566580}, \text{ ou à très-peu près } \frac{5}{21}.$$

2° La probabilité que le mari atteigne 71 ans étant $\frac{291}{710}$, la probabilité qu'il soit mort avant cet

âge est $1 - \frac{291}{710}$ ou $\frac{419}{710}$. La probabilité que la

femme soit veuve à 60 ans est donc exprimée par $\frac{463}{798} \times \frac{419}{710} = \frac{193997}{566580}$, ou à très-peu près $\frac{1}{3}$.

3° La probabilité que le mari meure avant les 38 ans est $\frac{419}{710}$; la probabilité que la femme meure avant

ce temps est $1 - \frac{463}{798}$ ou $\frac{335}{798}$. La probabilité que les deux époux soient morts avant l'époque considérée a donc pour expression

$$\frac{335}{798} \times \frac{419}{710} = \frac{140365}{566580}, \text{ ou à peu près } \frac{1}{4}.$$

VI. On peut appeler *quantité d'existence*, pour un groupe d'individus d'un âge déterminé, la somme totale des années que chacun d'eux a vécu, au moment de leur extinction totale. Lorsqu'on fait le calcul de cette quantité d'existence, on suppose ordinairement les décès uniformément répartis dans le cours de l'année, et, pour plus de simplicité, on les rapporte tous au milieu de l'année correspondante. On voit, par exemple, dans la table de Deparcieux, que sur 11 individus parvenus à l'âge de 90 ans, 7 seulement atteignent l'âge de 91 ans, 4 l'âge de 92 ans, 2 l'âge de 93 ans, 1 l'âge de 94 ans, et aucun l'âge de 95 ans (sauf, bien entendu, des exceptions très-rare). Puisqu'on suppose les décès rapportés au milieu de l'année, il y aura donc :

11 - 7, ou 4 individus ayant vécu. $\frac{1}{2}$ année,
7 - 4, ou 3. $1\frac{1}{2}$
4 - 2, ou 2. $2\frac{1}{2}$
2 - 1, ou 1. $3\frac{1}{2}$
1 - 0, ou 1. $4\frac{1}{2}$

La quantité d'existence dans ce cas sera donc la somme des produits

$$(11-7) \cdot \frac{1}{2} + (7-4) \cdot \frac{3}{2} + (4-2) \cdot \frac{5}{2} + (2-1) \cdot \frac{7}{2} + (1-0) \cdot \frac{9}{2},$$

ce qu'on peut écrire :

$$11 \cdot \frac{1}{2} + 7 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) + 2 \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) + 1 \left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2} \right)$$

ou $11 \cdot \frac{1}{2} + (7 + 4 + 2 + 1),$

c'est-à-dire que la quantité d'existence est la somme des survivants de chaque âge à partir de 91 ans jusqu'à la limite de la table, augmentée de la moitié des vivants de 90 ans; ce qui donne $19\frac{1}{2}$ pour la quantité d'existence cherchée.

D'une manière plus générale, soient $V_n, V_{n+1}, V_{n+2},$ etc., les nombres de survivants depuis l'âge n jusqu'à l'âge qui forme la limite de la table. La quantité d'existence pour le groupe V_n d'individus de l'âge n sera exprimée par

$$(v_n - v_{n+1}) \frac{1}{2} + (v_{n+1} - v_{n+2}) \frac{3}{2} + (v_{n+2} - v_{n+3}) \frac{5}{2} + \dots,$$

ou

$$v_n \frac{1}{2} + v_{n+1} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + v_{n+2} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) + v_{n+3} \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) + \dots,$$

ou encore

$$v_n \cdot \frac{1}{2} + (v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} \dots + \dots),$$

c'est-à-dire la somme des nombres de survivants à partir de l'âge $n+1$ jusqu'à la limite de la table, augmentée de la moitié de la somme des vivants de l'âge n .

La somme des nombres de survivants à partir d'un âge donné $n+1$ jusqu'à la limite de la table figure quelquefois dans la table même sous le nom de *somme des vivants*. On forme aisément cette somme en partant du dernier nombre de vivants inscrit dans la table, et ajoutant successivement les nombres de vivants qui précèdent. Ainsi, dans la table de Deparcieux on trouvera successivement :

Pour 95 ans la somme 0 ou 0

— 94	0 + 1	1
— 93	1 + 2	3
— 92	3 + 4	7
— 91	7 + 7	14
— 90	14 + 11	25

et ainsi de suite.

A l'âge 0 correspond ainsi pour la somme des vivants le nombre 51467.

TABLE DE LA SOMME DES VIVANTS
SUIVANT DEPARCIEUX.

AGES	SOMME des vivants.	AGES	SOMME des vivants.	AGES	SOMME des vivants.	AGES	SOMME des vivants.
0	51467	24	29938	48	13324	72	2231
1	50181	25	29136	49	12725	73	1960
2	49110	26	28382	50	12135	74	1709
3	48104	27	27616	51	11554	75	1478
4	47134	28	26838	52	10983	76	1267
5	46187	29	26108	53	10423	77	1075
6	45257	30	25366	54	9874	78	902
7	44340	31	24632	55	9336	79	748
8	43434	32	23906	56	8810	80	612
9	42538	33	23188	57	8296	81	494
10	41651	34	22478	58	7794	82	393
11	40772	35	21776	59	7305	83	308
12	39900	36	21082	60	6829	84	237
13	39034	37	20396	61	6366	85	178
14	38174	38	19718	62	5916	86	130
15	37320	39	19047	63	5479	87	92
16	36472	40	18383	64	5056	88	63
17	35630	41	17726	65	4647	89	41
18	34795	42	17076	66	4252	90	25
19	33967	43	16433	67	3872	91	14
20	33146	44	15597	68	3508	92	7
21	32332	45	15168	69	3161	93	3
22	31526	46	14546	70	2832	94	1
23	30728	47	13931	71	2522	95	0

La différence entre deux nombres consécutifs de cette table est le nombre des vivants pour l'âge correspondant au plus grand de ces deux nombres.

Si l'on veut, comme exemple, calculer la quantité d'existence pour les 463 survivants de 60 ans, on prendra, conformément à la règle énoncée plus haut, la somme des vivants à partir de 61 ans, c'est-à-dire 6366, et l'on y ajoutera la moitié du nombre des vivants de 60 ans, ou $231\frac{1}{2}$, ce qui donnera pour la quantité d'existence demandée 6597 $\frac{1}{2}$.

VII. On nomme *vie moyenne* ou *durée moyenne de la vie*, pour un groupe d'individus d'un âge donné, le quotient de la quantité d'existence relative à ce groupe par le nombre des individus dont il se compose. Ainsi, la vie moyenne pour les 463 survivants de 60 ans est le quotient de $6597\frac{1}{2}$ par 463, ce qui donne 12,09 ou à très-peu près 12 ans.

Mais le calcul peut être fait d'une autre manière.

En effet, on a vu que la quantité d'existence pour le groupe de l'âge n a pour expression

$$v_n \cdot \frac{1}{2} + (v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots).$$

Si l'on divise cette expression par v_n , on obtient

$$\frac{1}{2} + \frac{v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots}{v_n},$$

c'est-à-dire qu'on obtient la *vie moyenne* pour l'âge n en divisant la somme des vivants à partir de l'âge $n+1$ par le nombre des vivants de l'âge n , et en ajoutant $\frac{1}{2}$ au résultat.

Si, par exemple, on demande la vie moyenne au moment de la naissance, on divisera la somme des vivants à partir de l'âge 1, c'est-à-dire 50181 par le nombre des vivants de l'âge 0, ou 1286, ce qui donne 39,02; et ajoutant 0,5 au résultat, ce qui donne 39,52.

Le calcul peut encore se faire d'une autre manière; car l'expression de la vie moyenne peut s'écrire

$$\frac{v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots}{v_n} - \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire qu'on peut diviser la somme des vivants à partir de l'âge n par le nombre des vivants de cet âge, et retrancher $\frac{1}{2}$ du résultat.

De 7 ans à 65 ans, la vie moyenne est représentée avec une approximation suffisante par la relation

$$y = 53,30 - 0,65x, \quad [3]$$

dans laquelle x désigne l'âge que l'on considère et y la vie moyenne correspondante.

En comparant cette formule avec la formule [2], on peut trouver à quel âge la vie probable est égale à la vie moyenne. Il suffit pour cela d'égaliser les deux seconds membres de ces deux relations, ce qui donne

$$59 - 0,75x = 53,30 - 0,65x, \text{ d'où } x = 57,$$

c'est donc à 57 ans que la vie probable est égale à la vie moyenne. Leur valeur commune est

$$y = 50 - 0,75 \times 57 = 16,25, \text{ ou } 16 \text{ ans } \frac{1}{4}.$$

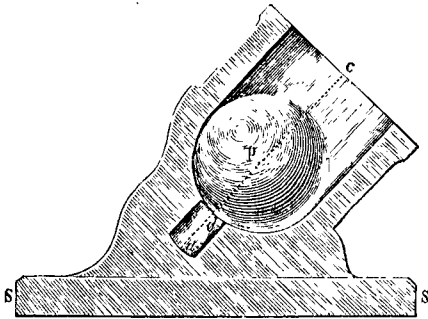
VIII. Les tables de mortalité servent à résoudre diverses questions relatives à la POPULATION (Voy. ce mot). Mais leur emploi principal est de servir dans les calculs auxquels donnent lieu les RENTES VIAGÈRES, les ASSURANCES SUR LA VIE, les TONTINES, les CAISSES DE RETRAITE, etc. (Voy. ces mots.)

MORTIER-ÉPROUVETTE, appareil employé dans l'artillerie pour mesurer la force de la poudre. C'est un mortier d'abord en bronze, et depuis 1842 en fonte de fer, dont le calibre est de 7 pouces 9 points, soit 0^m,1912; la longueur de l'âme est de 9 pouces, soit 0^m,2436; son axe ac est incliné à 45 degrés. Sa chambre, ab , peut contenir 3 onces de poudre, soit 92 grammes.

L'appareil est établi à demeure sur une semelle SS logée dans un plateau en chêne du poids de 60^k; le mortier lui-même pèse 120 kilogrammes. Le projectile P qu'il doit lancer est un globe de 7 pouces de diamètre, soit 0^m,1895, en sorte que le vent, ou jeu laissé entre le globe et l'âme est exactement de 9 points, ou 1^{mm},7. Ce globe était autrefois en bronze; depuis 1842 il est en fonte comme le mortier. Son poids est réglé à 60 livres, soit 29^k,37.

Le globe doit être lancé à 225^m au moins avec de la poudre neuve. Les dégradations qu'éprouve le mor-

tier par l'effet du tir diminuent graduellement les portées; on mesure ces diminutions à l'aide d'une poudre-type dont la portée est connue dans le cas d'un mortier et d'un globe neufs. On évalue la di-



minution de portée à 4^m,13 environ pour 100 coups si le bronze du mortier est de bonne qualité, ou à 7^m,56 pour un bronze d'une dureté moindre. On a substitué la fonte de fer au bronze pour remédier aux dégradations dont il vient d'être parlé.

MOTEUR LENOIR, machine motrice dans laquelle le mouvement est produit par l'expansion de l'air, résultant de l'inflammation d'une petite quantité de gaz d'éclairage. Cette machine, pour laquelle M. Lenoir a pris un brevet en 1858, est arrivée pour ainsi dire sans tâtonnements et du premier saut à un état extrêmement satisfaisant. Elle n'est point appelée, comme on a pu le croire, à détrôner les machines à vapeur, mais elle peut leur être substituée avec avantage dans diverses circonstances, comme nous le verrons plus loin.

Le principe du moteur Lenoir n'est autre que celui de l'eudiomètre. On sait que si l'on introduit dans cet appareil une certaine quantité d'hydrogène mêlée à l'air, et qu'on provoque l'étincelle électrique au travers du mélange, l'hydrogène se combine avec une partie de l'oxygène de l'air, pour former de l'eau, et que la chaleur qui résulte de cette combinaison dilate subitement le gaz qui reste. C'est cette expansion du gaz restant qui est utilisée dans la machine de M. Lenoir pour faire marcher un piston, mobile dans un cylindre, et obtenir ainsi un mouvement de va-et-vient, que l'on transforme ensuite, par les moyens ordinaires, en un mouvement circulaire continu. Mais, au lieu d'employer de l'hydrogène pur, on emploie l'hydrogène carboné qui sert à l'éclairage, parce qu'on peut se le procurer à peu de frais en quantités considérables.

Le moteur Lenoir est représenté par les figures 1, 2 et 3. La figure 1 est une élévation de la machine, abstraction faite toutefois du mécanisme de transformation de mouvement, qui est le même que dans une machine à vapeur à cylindre horizontal; la figure 2 montre en plan le jeu du tiroir d'admission, et la figure 3 représente le tiroir lui-même coupé par un plan vertical et longitudinal.

Le cylindre CC (fig. 1 et 2) est placé horizontalement, et solidement établi sur un bâti en fonte BB; on voit sur la figure 1 la tige du piston, en partie cachée par une autre tige dont il sera question tout à l'heure, et la boîte à étoupes dans laquelle passe la première tige. R et R' (fig. 1 et 2) sont deux

réservoirs où le gaz d'éclairage se rend par le tuyau T, lorsqu'on ouvre un robinet placé au-dessous du point de bifurcation. Ces réservoirs, solidement reliés au cylindre CC, communiquent avec lui par deux orifices verticaux, dont *ab* et *a'b'* (fig. 2) représentent la projection horizontale. De l'autre côté du cylindre, sont percés deux orifices semblables, par lesquels les gaz qui ont agi sur le piston s'échappent, en se réunissant dans le tuyau T'. Le mouvement alternatif du piston est transmis, par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle, à un arbre horizontal muni d'un volant. Sur l'arbre de la manivelle sont calés, de part et d'autre de la tige du piston, deux excentriques qui font mouvoir deux tiroirs distincts, dont l'un règle l'admission du gaz hydrogène carboné, c'est celui qui est antérieur, et l'autre l'échappement des gaz dilatés, c'est celui qui est postérieur et qui ne peut se voir sur la figure 1.

Le tiroir d'admission exige une description spéciale. Il est représenté en plan en XX' sur la figure 2, au moment où il ferme les deux orifices *ab* et *a'b'*. Sa section verticale est représentée fig. 3. Il se compose de deux plaques verticales; celle qui est postérieure est percée de deux orifices rectangulaires AA et A'A' qui, dans le mouvement du tiroir, viennent se placer en regard de l'un ou de l'autre des orifices *ab* et *a'b'*. Devant les orifices AA et A'A', les deux plaques formant le tiroir sont réunies par de petites cloisons horizontales qu'on voit sur la figure 3. Les intervalles de ces cloisons sont remplis de deux en deux, sauf un tube central *f*, *f*, etc., ménagé au milieu. La plaque antérieure n'est percée qu'en regard de ces tubes. Il en résulte que lorsque l'orifice AA est en regard de l'orifice *ab*, le gaz d'éclairage passe du réservoir R dans le cylindre en traversant les tubes *f*; tandis que l'air extérieur s'introduit dans ce même cylindre en passant par l'intervalle des deux plaques et par les orifices rectangulaires *e*, *e* que présente la plaque postérieure. Des cloisons horizontales correspondantes à celles du tiroir se prolongent dans toute l'épaisseur des orifices *ab* et *a'b'*; en sorte que les couches alternatives de gaz d'éclairage et d'air arrivant par les tubes *f* et par les orifices *e* restent séparées jusqu'au moment de leur entrée définitive dans le cylindre.

Cet ordre de superposition alternative se continue évidemment encore dans l'intérieur du cylindre même, au moins au premier instant; il en résulte que lorsque l'étincelle jaillit de l'inflammeur, l'inflammation des gaz a lieu d'une manière successive; l'expansion qui en résulte est moins brusque, le mouvement plus régulier; et en même temps tout danger d'explosion est évité.

A la base de gauche du cylindre CC est adapté un bouton métallique traversé par un petit cylindre de porcelaine; ce petit cylindre est traversé lui-même dans sa longueur par un fil métallique communiquant avec le pôle positif d'un appareil d'induction de Ruhmkorff; un second fil, isolé du premier, communique avec le pôle négatif par l'intermédiaire des parties métalliques de la machine. Ces deux fils sont recourbés en pointes l'un vers l'autre dans l'intérieur du cylindre; en sorte que lorsque le courant électrique s'établit, une étincelle part entre les deux pointes. Ce petit appareil porte le nom d'*inflammateur*. Un second inflammateur est établi

dans la base de droite du cylindre; on voit les deux inflammateurs en I et I' sur la figure 1.

Sur le bâti de la machine, est établi un support métallique S, au milieu duquel communique le pôle négatif de l'appareil de Ruhmkorff. Le même support porte, par l'intermédiaire d'une forte plaque de caoutchouc, trois barrettes métalliques horizontales. L'inférieure n communique avec le pôle positif de l'appareil; les deux autres m, m', placées au-dessus, communiquent respectivement avec les deux inflammateurs. Un curseur métallique M, fixé à la tête de la tige du piston, reste,

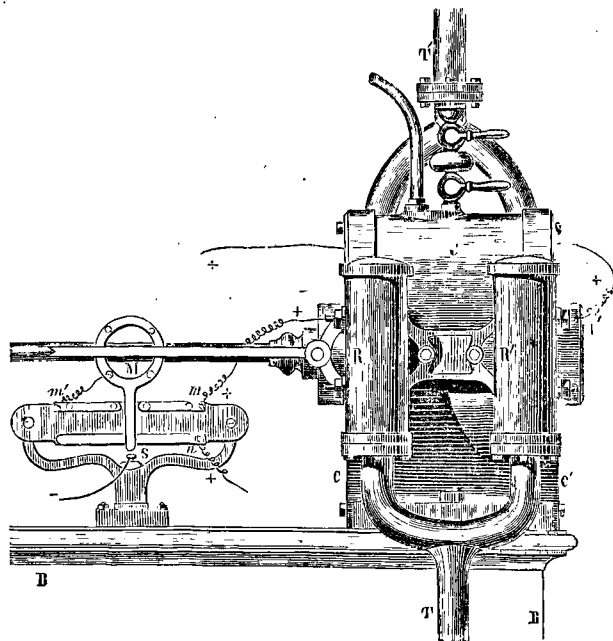


Fig. 1.

pendant le mouvement alternatif de celui-ci, en communication avec la barrette inférieure; et vient, à chaque alternative, communiquer avec l'une ou l'autre des barrettes supérieures. Il en résulte que le courant, venant de l'appareil d'induction à la barrette inférieure, passe alternativement par chacune des deux barrettes supérieures, et se rend ainsi alternativement aux deux inflammateurs. Le pôle négatif correspond avec le second fil de chaque inflammateur par l'intermédiaire du support S et des parties métalliques de la machine.

Le tiroir qui règle l'échappement n'offre rien de particulier; il ouvre ou ferme alternativement les lumières par lesquelles le cylindre communique avec le tuyau T'.

On peut maintenant se rendre compte du jeu de la machine. Supposons que, le piston étant à l'extrémité gauche de sa course, on fasse tourner le volant d'une petite quantité, de manière à faire avancer un peu le piston vers la droite. Le tiroir étant réglé de manière qu'à ce

moment les tubes f communiquent avec l'orifice ab, le piston tendant à faire le vide derrière lui, aspirera le gaz du réservoir R qui passera à travers ces tubes, et l'air extérieur qui passera par l'intervalle des plaques du tiroir et par les orifices e dont la plaque postérieure est percée. Le curseur M venant toucher la barrette supérieure m, le courant se rendra à l'inflammateur I, l'étincelle jaillira, l'hydrogène du gaz d'éclairage se combinera avec l'oxygène de l'air en donnant lieu à un grand dégagement de chaleur; les gaz contenus à gauche du piston augmenteront rapidement de volume, et pousseront le piston jusqu'au bout de sa course; la manivelle dépassera le point mort en vertu de la vitesse acquise par le volant, et le piston commencera à revenir vers la gauche. Les gaz contenus à gauche s'échapperont du cylindre et passeront dans le tuyau T'. Le piston aspirera le gaz du réservoir R' et l'air extérieur. Le curseur M venant toucher la barrette m', le courant se rendra à l'inflammateur I'; l'étincelle se produira, et le piston continuera à être poussé vers la gauche par l'expansion des gaz

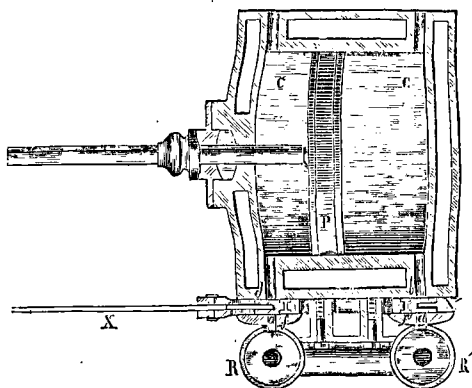


Fig. 2.

placés à droite. La manivelle dépassera le second point mort, et le piston retournera vers la droite, le même jeu recommencera; la machine continuera à se mouvoir ainsi d'elle-même, tant qu'on lui fournira le gaz hydrogène carboné, et que le courant sera entretenu. Deux forts éléments de Bunsen sont suffisants pour entretenir en activité l'appareil d'induction.

Sur l'arbre de la manivelle est ordinairement montée une grande poulie sur laquelle on peut faire passer une courroie sans fin

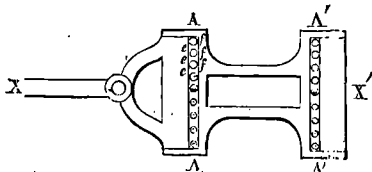


Fig. 3.

pour transmettre le mouvement de la machine à un agent mécanique quelconque.

Le cylindre CC a une double enveloppe que l'on aperçoit sur la figure 2. Elle sert à établir autour du cylindre une circulation d'eau qui empêche les pièces métalliques de se détériorer par l'élévation de la température. Cette circulation d'eau se fait par la seule différence de température entre l'eau froide affluente et l'eau échauffée par son passage autour du cylindre ; c'est par le tuyau t (fig. 1) que l'eau chaude s'élève pour retourner au réservoir d'eau froide.

M. Lenoir ajoute à l'air un peu de vapeur d'eau pour accroître l'expansion des gaz. Cette vapeur est fournie, à l'aide d'une soupape, par un petit réservoir d'eau chaude placé au-dessus du cylindre.

Enfin, pour la symétrie de l'appareil, on a placé de l'autre côté du cylindre deux réservoirs pareils aux réservoirs R et R' ; mais ils ne servent qu'à la circulation d'eau ; et sont traversés par les parois des orifices par lesquels les gaz qui ont agi sur le piston se rendent dans le tuyau T'.

Les tubes f n'ont que 2 millimètres de diamètre ; les orifices rectangulaires e ont 12 millimètres de haut sur 6^{mm}, 5 de large. La quantité de gaz d'éclairage aspirée n'est guère ainsi que les 5 ou 6 pour 100 du volume total de gaz et d'air. On compte un mètre cube de gaz d'éclairage consommé par force de cheval et par heure.

Le moteur Lenoir a des avantages spéciaux qui rendent son emploi précieux dans beaucoup de circonstances. À force égale, il ne coûte que les $\frac{3}{5}$ environ de ce que coûterait une machine à vapeur. Il s'installe aisément partout, même à un étage supérieur. Il tient peu de place. Il ne produit pas de fumée. Il n'exige ni chaudière ni fourneau, et ne présente aucun danger d'explosion. Sa mise en marche est immédiate ; il suffit de faire tourner un peu le volant pour déterminer le mouvement de la machine. On conçoit donc que cet appareil soit appelé à rendre de grands services à la petite industrie ; et il en a déjà rendu (*Voy. le tome XIII de la Publication industrielle de M. Armengaud*).

On commence à l'employer avec succès pour l'élévation des fardeaux dans les travaux de construction.

Voyez dans la *Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger* (n° du 18 mai 1867) la description de la *machine à gaz* de M. Hugon, par M. Haton de la Goupillière. Cette machine a une grande analogie avec le moteur Lenoir, mais l'inflammation s'y fait par une disposition spéciale sans le secours de l'électricité. Quoiqu'elle ait été construite plus tard que la machine de M. Lenoir, M. Hugon paraît avoir des droits à la priorité.

MOTEURS, agents du mouvement. Les moteurs appliqués aux machines sont les *moteurs animés*, l'eau, le vent, la vapeur, les gaz en général, et l'électricité. (*Voy. MOTEURS ANIMÉS, RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES, MOULINS À VENT, MACHINES À VAPEUR, MACHINES À VAPEUR COMBINÉES, MOTEUR LENOIR, MACHINE ÉLECTRO-MOTRICE.*)

MOTEURS ANIMÉS. Ce qui caractérise ces moteurs, c'est la fatigue qu'ils éprouvent au bout d'un certain temps de travail, et l'obligation où ils sont de réparer leurs forces par le repos. La quantité de

travail qu'ils peuvent fournir par jour varie suivant le mode de leur emploi ; mais elle est, dans chaque cas, susceptible d'un maximum, c'est-à-dire qu'à égale fatigue journalière, il y a une valeur de l'effort exercé par le moteur, une valeur de la vitesse imprimée au point d'application de cet effort, et une valeur de la durée du travail par jour, qui donnent le maximum d'effet utile. Si F désigne l'effort du moteur, exprimé en kilogrammes, V la vitesse que prend le point d'application, exprimée en mètres, et T la durée du travail journalier exprimée en secondes, l'expression de ce travail journalier est FVT, en kilogrammètres. Si F, V et T ont les valeurs qui conviennent au maximum d'effet utile, et que l'on vienne à faire varier l'un de ces facteurs, non-seulement l'un au moins des deux autres facteurs devra varier en sens contraire, mais en outre le produit diminuera. On peut bien, par exemple, et c'est un des avantages des moteurs animés, exiger de lui pendant quelque temps un plus grand effort ou une plus grande vitesse, mais l'effet utile journalier diminue ; il y a plus, c'est que si l'on voulait maintenir pendant longtemps l'homme ou l'animal à ce régime exceptionnel, sa santé ne tarderait pas à s'altérer. Les valeurs de F, V, T qui donnent le maximum de travail journalier, sont celles que le moteur peut supporter indéfiniment sans que sa santé en souffre ; ce sont par conséquent celles qui s'accordent le mieux avec les véritables intérêts des entrepreneurs qui emploient les moteurs dont il s'agit. — Coulomb, Navier, M. Poncelet, M. Morin et plusieurs autres savants ont recueilli, ou fait eux-mêmes, un grand nombre d'observations sur le travail des moteurs animés. Nous donnons ici, d'après M. Poncelet, le tableau des valeurs de F, de V et de T, qui fournissent, suivant le mode d'emploi du moteur, le maximum de travail journalier.

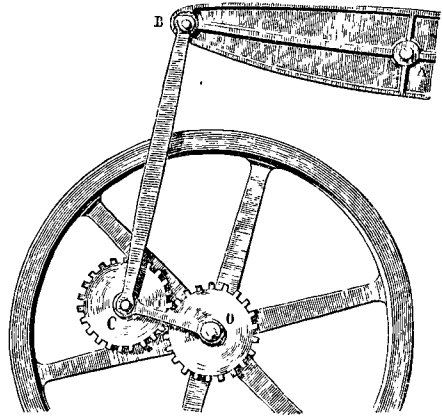
NATURE DU TRAVAIL.	F ou effort.	V ou vitesse.	FV travail par seconde.	T durée du travail en heures.	TRAVAIL journalier.
1° <i>Élévation verticale des poids.</i>					journa-lier.
Un homme montant une rampe douce ou un escaler, sans fardeau, son travail consistant dans l'élévation du poids de son corps...	65 k	0,15 m	9,75 km	8 h	230800 km
Un manœuvre élevant des poids avec une poulie (la corde descendant à vide)...	18	0,20	3,6	6	7760
Un manœuvre élevant des poids en les soulevant avec la main...	20	0,17	3,4	6	73440
Un manœuvre élevant des poids sur son dos, au haut d'une rampe douce ou d'un escalier, et descendant à vide...	65	0,04	2,6	6	56160
Un manœuvre élevant des matériaux avec une broquette sur une rampe au douzième, et revenant à vide...	60	0,02	1,2	10	12000
Un manœuvre élevant des terres à la pelle, à une hauteur moyenne de 1 ^m ,60...	2,7	0,40	1,08	10	33880

NATURE DU TRAVAIL.	F ou effort.	V ou vitesse.	FV travail par seconde.	T durée du travail en heures.	TRAVAIL journa- lier.
2° Action sur les machines.					
Un manoeuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour :					
1° au niveau de l'axe...	60	0,15	9	8	259200
2° vers le bas de la roue	12	0,70	8,4	8	251120
Un manoeuvre marchant et poussant ou tirant horizontalement d'une manière continue...	12	0,60	7,2	8	207360
Un manoeuvre agissant sur une manivelle...	8	0,75	6	8	172800
Un manoeuvre exercé poussant et tirant alternativement dans le sens vertical.....	6	0,75	4,5	10	162000
Un cheval attelé à une voiture au pas.....	70	0,90	63	10	2168000
Id. au trot.....	44	2,20	96,8	4,5	1568160
Un cheval attelé à un manège, au pas....	45	0,90	40,5	8	1166400
Id. au trot....	30	2,00	60	4,5	972400
Un bœuf attelé à un manège, au pas.....	60	0,60	36	8	1036800
Un mulet, id.....	30	0,90	27	8	777600
Un âne, id.....	14	0,80	11,2	8	322560

On voit par ce tableau que le mode d'emploi le plus avantageux, en ce qui regarde le travail de l'homme, est celui où il n'agit que par son poids. Dans les grands travaux de terrassements, on a souvent employé l'homme de cette manière. Une grande poulie recevait une corde portant deux plateaux; sur l'un de ces plateaux on mettait le poids à élever; sur l'autre se plaçait un manoeuvre, qui, en descendant sous l'action de la pesanteur, faisait élever le fardeau; ce manoeuvre remontait ensuite à l'aide d'une échelle. — Après ce mode d'emploi, le plus avantageux est celui des roues à chevilles ou à tambour, dans lesquelles le manoeuvre agit à la hauteur de l'axe. Telles sont les roues de carriers (*Voy. TREUIL*); telles sont aussi les roues pénitencières fort employées en Angleterre pour le travail des prisons. Ces roues sont de grands cylindres horizontaux, garnis de marches à l'extérieur; un certain nombre d'hommes, placés sur un plancher qui affleure la roue à la hauteur de son axe, agissent simultanément sur les marches et font tourner l'appareil. On a pu obtenir ainsi de chaque prisonnier un travail journalier de 273 000^{km}, et même davantage. En France, ce mode de travail n'est point employé; on préfère, avec raison, utiliser l'intelligence des prisonniers, et leur créer un état qui les mette à l'abri du besoin, et puisse les détourner de leurs habitudes criminelles. Pour le cheval et les autres animaux qui figurent dans le tableau ci-dessus, le mode presque exclusivement employé est le manège; et l'on voit que, s'il est possible d'y faire travailler le cheval au trot, c'est néanmoins en le maintenant au pas qu'on obtient en définitive le maximum de travail journalier; ce qui s'accorde avec les considérations générales développées plus haut (*Voy. l'Introduction à la Mécanique industrielle*, de M. Poncelet).

Pour la comparaison du travail effectif du cheval avec celui qu'on désigne sous le nom de CHEVAL-VAPEUR, voyez ce mot.

MOUCHE, nom qui rappelle un dispositif employé pour transformer le mouvement circulaire alternatif d'un balancier en un mouvement circulaire continu. — A l'extrémité B du balancier s'arti-



cule une bielle BC; à l'extrémité C de cette bielle est fixée à demeure une roue dentée, qui porte le nom de mouche. Cette roue engrène avec une roue O mobile autour de son axe, lequel est ordinairement celui qui porte le VOLANT (*Voy. ce mot*) destiné à régulariser le mouvement de la machine. Une bride CO, mobile autour de l'axe O, mais non solidaire avec cet axe, s'articule en même temps au centre C de la mouche, et oblige celle-ci à engrèner constamment avec la roue O. Par suite du mouvement alternatif du balancier, la roue C fait, à chaque oscillation entière, le tour de la roue O; et comme la roue C ne peut pas tourner autour de son axe, elle oblige la roue O à tourner autour du sien, avec le volant qui y est fixé. Il faut bien remarquer que la vitesse angulaire de la bride CO n'est pas la même que celle de la roue O et du volant, et c'est pour cela que cette bride n'est pas fixée sur l'axe O, mais a seulement la faculté de tourner autour de lui.

Dans le cas général, soit l la longueur de la bride, r le rayon de la roue O; soit ω la vitesse angulaire de la bride et ω' celle de la roue O et du volant. La vitesse du point C sera ωl ; mais cette vitesse est commune à tous les points de la mouche fixée au point C; on peut du moins le supposer sans erreur sensible si la bielle BC est assez longue pour pouvoir être considérée comme restant parallèle à elle-même, et n'étant animée que d'un mouvement de translation. La vitesse ωl est donc celle du point de contact I des deux roues; et, comme la vitesse du point I, considéré comme appartenant à la roue O, est exprimée par $\omega' r$, on doit avoir

$$\omega l = \omega' r, \text{ d'où } \frac{\omega'}{\omega} = \frac{l}{r}.$$

Si, par exemple, on a $l = 2r$, il en résulte $\omega' = 2\omega$, c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la roue O est le double de celle de la bride CO; et que par conséquent lorsque la mouche fait un tour autour de la roue O, celle-ci et le volant en font deux.

Le système que nous venons de décrire, et qui est aussi connu sous le nom de *roue planétaire*, a été employé par Watt dans ses premières machines à vapeur, en attendant, dit-on, l'expiration d'un brevet qui assurait à un autre constructeur l'emploi exclusif du système BALANCIER, BIELLE ET MANIVELLE (*Voy.* ce mot) que Watt a substitué depuis à sa mouche.

La mouche est un système vicieux, qui donne lieu à un frottement notable et offre peu de solidité; on y a renoncé depuis longtemps.

MOUFLE, assemblage de plusieurs poulies dans une même chape. Le plus souvent, les poulies sont égales et tournent sur un même axe faisant corps avec la chape; cette disposition est représentée par la figure 1. Quelquefois au contraire, mais plus ra-

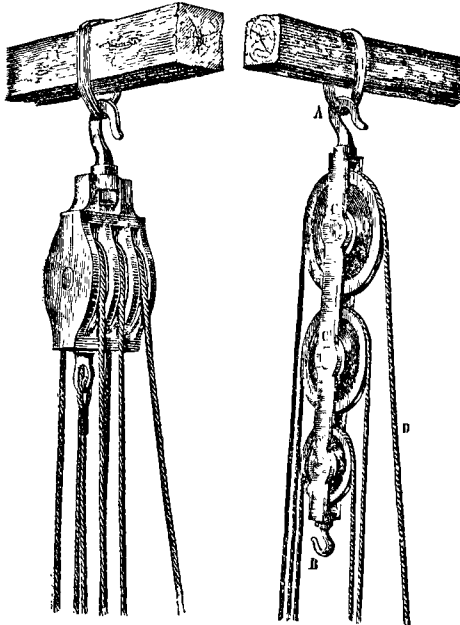


Fig. 1.

Fig. 2.

rement, les poulies sont inégales, et chacune a son axe particulier; cette disposition est représentée par la figure 2. La moufle porte alors le nom de *moufle plate* ou de *mouffette*.

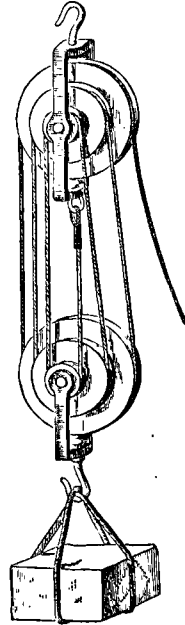
Les poulies assemblées dans une même moufle sont dites *poulies mouflées*; et un **PALAN** (*Voy.* ce mot) se compose de deux systèmes de poulies mouflées, égaux et opposés, mis en mouvement par une même corde, qui passe alternativement sur une poulie de chaque moufle (*Voy.* MOUFLE DE WHITE).

MOUFLE DE WHITE, sorte de palan, composé d'une poulie fixe et d'une poulie mobile ayant chacune plusieurs gorges. On sait que dans le **PALAN** (*Voy.* ce mot) chaque poulie a une vitesse proportionnelle au nombre des courants, ou brins, compris entre cette poulie et le point d'attache de la corde. Admettons que la moufle supérieure réunisse 3 poulies dont nous désignerons les rayons par r_1, r_2, r_3 , et auxquelles nous supposerons une vitesse angulaire commune w . Admettons de même que la mou-

fle inférieure réunisse 3 autres poulies dont nous désignerons les rayons par ρ_1, ρ_2, ρ_3 , et auxquelles nous supposerons aussi une vitesse angulaire commune ω . On devra avoir

$$r_1 w = 2 \rho_1 \omega, \quad \rho_2 \omega = 3 \rho_1 \omega, \quad r_2 w = 4 \rho_1 \omega, \\ \rho_3 \omega = 5 \rho_1 \omega, \quad r_3 w = 6 \rho_1 \omega,$$

ce qui montre que les rayons r_1, r_2, r_3 doivent



être proportionnels aux nombres 2, 4, 6, et les rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3 proportionnels aux nombres 1, 3, 5.

On peut s'imposer en outre une autre condition. On peut faire, par exemple $r_2 = \rho_2$, ce qui exige qu'on ait

$$\omega = \frac{3}{4} w.$$

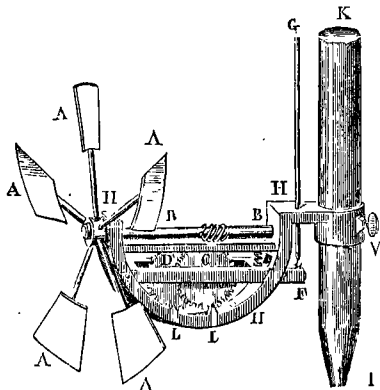
On peut, au contraire, supposer $w = \omega$; et alors les rayons $\rho_1, r_1, \rho_2, r_2, \rho_3, r_3$ doivent être proportionnels aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La moufle de White est peu employée.

MOUFLETTES, sorte de palan à poulies inégales. (*Voy.* PALAN.)

MOULINET DE WOLTMANN, appareil qui sert à mesurer la vitesse d'un courant à une profondeur quelconque. Il se compose d'une roue à ailettes inclinées AAA, montées sur un axe horizontal BB que l'on place dans le sens du courant, les ailettes en amont. Cet axe porte une vis sans fin qui engrène avec une roue dentée. Celle-ci porte sur son axe un pignon qui engrène avec une seconde roue dentée D. Les axes de ces deux roues sont fixés à une traverse EF, mobile autour du point F. Une tringle verticale FG articulée en F permet d'élever ou d'abaisser la traverse EF en la faisant tourner autour du point E. L'axe BB tourne dans des collets ménagés aux extrémités d'un demi-anneau HHH, fixé, à l'aide de la vis de pression V, à une forte tige en fer IK. Dans l'état de repos, la traverse EF est abaissée, la roue C n'engrène pas avec la vis sans

fin, et les roues C et D sont rendues immobiles par l'introduction entre leurs dents des saillies L, L adaptées au demi-anneau HHH. Lorsqu'on veut mettre l'appareil en expérience, on fixe le mou-



linet à la tige IK en un point tel qu'en plongeant cette tige dans le courant, de manière que sa pointe inférieure I touche le fond, l'axe BB soit à la hauteur du filet dont on veut mesurer la vitesse. Le courant agissant sur les ailettes fait tourner l'appareil, qui ne tarde pas à prendre un mouvement uniforme.

Quand on l'a laissé tourner ainsi quelques instants, on soulève la tringle FG; la traverse EF tournant autour du point E, la roue C vient engrener avec la vis sans fin, et les deux roues C et D se mettent en marche. On a eu soin de déterminer exactement leur position avant l'expérience. Lorsqu'on a maintenu ainsi le système en mouvement pendant un certain temps, une ou deux minutes par exemple, que l'on détermine exactement à l'aide d'un compteur, on abaisse la tringle FG, la roue C cesse d'engrener avec la vis sans fin, et en même temps les deux roues C et D sont rendues immobiles par les saillies LL qui pénètrent entre leurs dents. On retire l'appareil, et l'on observe la position des roues. On détermine le nombre de tours et la fraction de tour exécutés par la roue C; on en conclut le nombre de tours faits par la roue à ailettes. Ce nombre de tours est sensiblement proportionnel à la vitesse du courant. Il suffit donc pour être en état de calculer cette vitesse de connaître le nombre de tours que fait l'appareil plongé dans un courant dont la vitesse est connue.

Si, par exemple, on sait par une expérience préalable que l'appareil fait 10 tours par seconde lorsqu'il est plongé dans un courant animé d'une vitesse de 0^m,90, et qu'on veuille connaître la vitesse d'un courant dans lequel le moulinet fait 16 tours par seconde, on posera la proportion

$$10 : 16 = 0^m,90 : x,$$

x désignant la vitesse inconnue. De cette proportion on tire

$$x = 1^m,44.$$

Le constructeur de l'appareil a soin d'y marquer le nombre de tours qui correspond ainsi à une vitesse connue.

On détermine ce nombre de tours, soit en plongeant le moulinet dans un courant dont la vitesse

a été déterminée directement par une autre voie, soit en le faisant mouvoir dans une eau tranquille avec une vitesse déterminée.

L'inconvénient du moulinet de Woltmann, inconvénient qui lui est du reste commun avec tous les appareils du même genre, est d'altérer la vitesse du courant au point même où l'on se propose de la mesurer. C'est d'ailleurs un instrument délicat, susceptible de se déranger aisément; et il est nécessaire de vérifier fréquemment ses indications par des expériences comparatives faites dans des courants dont la vitesse soit connue.

La théorie de cet appareil est analogue à celle de l'ANÉMOMÈTRE et des MOULINS A VENT (Voy. ces mots). En appelant v la vitesse du courant, n le nombre de tours que le moulinet fait par seconde, et a et b des constantes, on a

$$v = a + bn,$$

et, comme a est ordinairement très-petit, on peut regarder v comme proportionnel à n .

M. Baumgarten a donné pour calculer la vitesse v une autre formule qui revient à

$$v = 0,3505 n + \sqrt{n^2 A + B},$$

A et B étant des constantes propres à chaque appareil, et qu'il faut déterminer préalablement en faisant mouvoir le moulinet dans une eau tranquille avec des vitesses données.

Pour mesurer les faibles vitesses, M. Baumgarten substitue aux ailettes planes des ailettes hélicoïdes, qui obéissent mieux à l'action du courant.

MOULINS, machines employées à la mouture du blé. Pour obtenir la farine, on fait subir au blé trois opérations principales : le nettoyage, la mouture et le blutage. Il n'est question ici que de la mouture. Le moteur de la machine peut être une chute d'eau, le vent ou une machine à vapeur; il n'y a de différence que dans les transmissions du mouvement.

Le blé, préalablement nettoyé, à l'aide d'une série de cribles et de ventilateurs placés les uns au-dessous des autres, et qui en ont séparé, les uns les petites pierres, la terre ou les mauvaises graines, les autres les pailles et la poussière, se rend entre deux meules, ou cylindres en pierre dure, formés généralement de plusieurs secteurs réunis et serrés par des cercles en fer. La meule inférieure est fixe : on la nomme la *meule dormante*; la meule supérieure, placée à une très-petite distance au-dessus de la première, est mobile, et se nomme la *meule courante*. Celle-ci est suspendue à un axe qui tra-

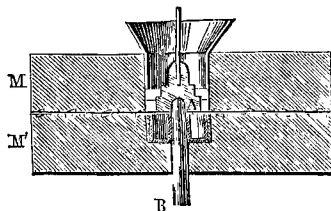


Fig. 1.

verse le centre de la meule dormante, comme le montre la figure 1; et repose sur le sommet de cet axe par l'intermédiaire d'une pièce de fer A, nommée *anille*, laquelle n'intercepte qu'en partie l'ou-

verture centrale de la meule. L'intervalle compris entre l'axe vertical B et l'ouverture centrale de la meule dormante est rempli par des morceaux de drap. Le blé introduit par le centre de la meule courante, ne pouvant passer entre la meule fixe et l'axe, est obligé de passer entre les meules. Les faces en regard de ces deux meules ne sont pas planes; elles sont creusées de rainures peu profondes dirigées du centre à la circonférence comme le montre la figure 2. Ces rainures, étant de même

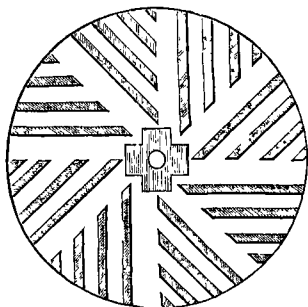


Fig. 2.

sens sur les deux meules, font un angle plus ou moins grand quand les meules sont en place; et, quand la meule courante tourne, elles agissent sur les grains de blé comme les deux lames d'une paire de ciseaux. Le grain est ainsi broyé, moulu, et en même temps entraîné vers la circonférence. Il tombe dans un espace annulaire qui entoure la meule courante, et, entraîné par elle, va sortir par un orifice ménagé sur son pourtour. Le mélange de son et de farine qui sort ainsi des meules passe ensuite au blutoir, formé de tissus diversement serrés, qui séparent les farines d'espèces diverses, depuis la farine de première qualité jusqu'au gros son. Lorsque le blé ne passe qu'une fois sur la meule, on donne à cette opération le nom de *mouture à la grosse*. Dans la *mouture à l'anglaise*, le blé passe à la meule plusieurs fois, à chacune desquelles on blute pour séparer le son.

Dans les anciens moulins on donnait aux meules 1^m,80 et jusqu'à 2^m,30 de diamètre; aujourd'hui on ne leur donne pas plus de 1^m,30. Pour que la farine obtenue soit de bonne qualité, il faut que la vitesse de la meule ne dépasse pas 80 tours par minute, si elle est de grand diamètre; mais en réduisant le diamètre comme on le fait aujourd'hui, on peut aller jusqu'à 120 tours. Suivant la qualité de la mouture, on peut moudre depuis 16 hectolitres ou 1200 kilogrammes de blé, jusqu'à 60 hectolitres, ou 4500 kilogrammes par paire de meules et par jour.

On peut admettre, comme terme moyen, que pour obtenir 1 kilogramme de farine par la mouture à la grosse, il faut développer sur l'axe de la meule un travail de 5500 kilogrammes; et s'il s'agit de la mouture à l'anglaise, un travail de 8500 kilogrammes. Les meuniers de Paris comptent généralement 4 chevaux-vapeur par paire de meules avec les accessoires.

Au moulin de Saint-Maur, construit et dirigé par M. Darblay, et qui peut servir de modèle, il

y a quatre jeux de dix paires de meules chacun, mis en mouvement par des TURBINES FOURNEYRON (*Voy. ce mot*). Le mouvement, au lieu d'être transmis à la partie inférieure de l'axe, comme dans la plupart des autres moulins, est transmis par le haut, au moyen de courroies disposées d'une manière simple et ingénieuse. Les meules font 120 tours par minute: on calcule que la quantité de blé moulu chaque année dans cet établissement s'élève à 19800 hectolitres, soit 14850 quintaux métriques.

L'avantage de la commande par le haut est de pouvoir aborder plus aisément à la partie inférieure de l'axe, pour régler la distance des deux meules, en modifiant au besoin le support.

MOULINS À VENT, nom générique donné à toutes les machines dans lesquelles le vent sert de moteur, bien que beaucoup d'entre elles ne soient pas destinées à faire mouvoir des meules. On partage les moulins à vent en deux classes: les moulins à axe horizontal, ou sensiblement horizontal, et les moulins à axe vertical. Les premiers, qui sont les plus anciens, sont aussi ceux qui donnent les meilleurs résultats.

La figure 1 représente une coupe d'un de ces

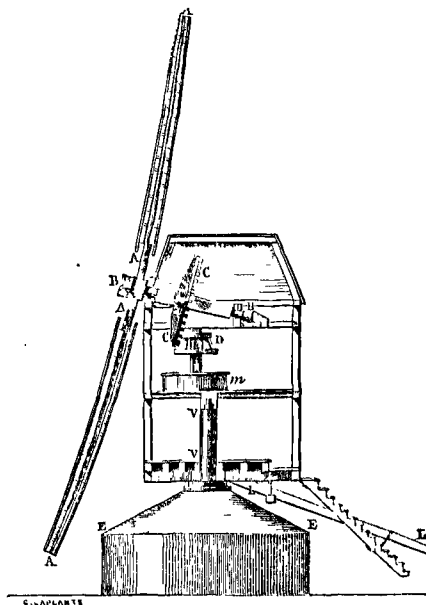


Fig. 1.

moulins à vent, à axe sensiblement horizontal, répandus de temps immémorial dans nos campagnes et qui sont employés à la mouture du blé. Le récepteur se compose d'une roue, appelée *volant*, qui est elle-même formée de quatre *ailes* AA, montées sur un axe BB faisant avec l'horizon un angle de 10 à 15 degrés. Une roue à cheville CC montée sur le même axe, engrène avec une *lanterne* D, cylindrique ou légèrement conique, montée sur l'axe de la meule courante m. L'action du vent sur les ailes fait tourner le volant et la roue CC, qui transmet le mouvement à la lanterne D, et par suite à la meule. Toute la charpente du moulin repose sur

son support EE par l'intermédiaire d'un arbre vertical VV, autour duquel elle peut tourner. Un levier LL sert à effectuer ce mouvement afin de placer l'axe BB dans la direction du vent, ce qui s'appelle orienter le moulin.

Les ailes, qui forment le récepteur, sont composées chacune d'un bras perpendiculaire à l'axe BB; des traverses en bois, implantées dans ce bras de distance en distance, sont reliées latéralement par des montants parallèles au bras, et c'est sur l'espèce d'échelle ainsi formée qu'on étend les toiles destinées à recevoir l'action du vent. Les bras ont une longueur de 10 à 12 mètres; les traverses ont de 1^m,80 à 2 mètres; elles ne commencent qu'à 2 mètres de l'axe de rotation BB; elles sont distantes de 0^m,40 environ. Elles ne sont point parallèles entre elles. D'après Smeaton (*Recherches expérimentales sur l'eau et le vent*), la meilleure disposition est la suivante, qui est adoptée dans les moulins à la hollandaise. Concevons l'aile décomposée, par des plans perpendiculaires au bras, en éléments infiniment minces; si l'on divise la longueur du bras en 6 parties égales, et que l'on numérote de 1 à 6, à partir de l'axe, les éléments correspondants aux points de division, les angles que ces éléments doivent faire avec l'axe de rotation seront donnés par le tableau suivant :

Numéros des éléments.	1	2	3	4	5	6
Angles avec l'axe.....	70°	71°	72°	74°	77°	83°

En appelant i l'angle que fait avec l'axe l'élément situé à la distance x de cet axe, et h le sixième de la longueur du bras, on peut remplacer le tableau précédent par la formule

$$i = 70^\circ + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{h} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{h} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{h} \right)^3, \quad [1]$$

le premier élément correspondant à $x = h$. L'aile forme ainsi une surface gauche, et l'on donne au bras lui-même une légère concavité du côté du vent. La largeur de l'aile ne doit pas dépasser le quart de sa longueur; elle n'en est le plus souvent que le cinquième ou le sixième.

Une théorie complète et rigoureuse de ce récepteur serait fort difficile à établir; on peut la simplifier de la manière suivante. Le vent souffle dans une direction qui diffère peu d'une horizontale, et qui, dans les plaines, fait avec l'horizon un angle de 10 à 15 degrés; c'est pour cela qu'on donne cette inclinaison à l'axe du récepteur; quand le moulin est orienté, le récepteur reçoit donc le vent parallèlement à son axe. Soit v la vitesse du vent et soit ω la vitesse angulaire des ailes. Considérons un élément de l'aile situé à la distance x de l'axe, et faisant avec cet axe l'angle i donné par le tableau ci-dessus ou par la formule [1]. Si λ est la largeur de l'aile, l'aire de l'élément sera λdx , et sa vitesse de rotation sera ωx . La composante de la vitesse du vent perpendiculairement à l'élément considéré est $v \sin i$; et la composante de la vitesse de l'élément perpendiculairement à ce même élément est

$$\omega x \cos i;$$

la vitesse relative avec laquelle le vent choque normalement la surface de l'élément est donc

$$v \sin i - \omega x \cos i.$$

D'après les hypothèses admises sur la résistance des fluides (*Voy. ce mot*), en nommant Π le poids du mètre cube d'air et K un coefficient donné par

l'expérience, on aura donc pour la pression exercée par le vent sur l'élément que l'on considère

$$K \Pi \lambda dx \frac{(v \sin i - \omega x \cos i)^2}{2g}.$$

Pour avoir le travail de cette pression élémentaire pendant l'unité de temps, il faut la projeter sur un plan perpendiculaire à l'axe, ce qu'on fera en affectant du facteur $\cos i$, et multiplier cette projection par le chemin que décrit l'aile dans l'unité de temps, c'est-à-dire par ωx ; le travail de la pression élémentaire en question sera donc exprimé par

$$\frac{K \Pi \lambda}{2g} (v \sin i - \omega x \cos i)^2 \omega x \cos i dx.$$

Par conséquent, si T désigne le travail total du vent sur tous les éléments de l'aile pendant une seconde, et x_0 et Z les distances des deux extrémités de l'aile à l'axe de rotation, on aura

$$T = \frac{2 \Pi \lambda}{2g} \int_{x_0}^Z (v \sin i - \omega x \cos i)^2 \omega x \cos i dx. \quad [2]$$

Pour déterminer la vitesse angulaire ω qui donne le maximum de travail, il faut égaler à zéro la dérivée de cette expression par rapport à ω , ce qui donne

$$0 = \int_{x_0}^Z (v \sin i - \omega x \cos i) (v \sin i - 3 \omega x \cos i) x \cos i dx, \quad [3]$$

équation qui est du second degré par rapport à ω ; car elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= v^2 \int_{x_0}^Z \sin^2 i x \cos i dx \\ &\quad - 4 \omega v \int_{x_0}^Z \sin i x^2 \cos^2 i dx \\ &\quad + 3 \omega^2 \int_{x_0}^Z x^3 \cos^3 i dx. \end{aligned} \quad [4]$$

Les valeurs numériques des intégrales qui forment les coefficients de cette équation s'obtiendront par la formule approximative de Th. Simpon (*Voy. QUADRATURES*). On en tirera pour ω une valeur de la forme

$$\omega = \alpha v;$$

et en la substituant dans [2] on obtiendra, après l'intégration, une expression de la forme

$$T = \frac{K \Pi \lambda}{2g} \beta v^3, \quad [5]$$

c'est-à-dire que le travail transmis est proportionnel au cube de la vitesse du vent, ce qui est confirmé par l'expérience.

Smeaton a trouvé par l'observation que, lorsque le moulin marche à vide, la vitesse de l'extrémité de l'aile est le quadruple de la vitesse du vent, et que, pour obtenir le maximum d'effet utile, il convient de régler la résistance de manière que la vitesse de l'extrémité de l'aile soit les $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle serait si

le moulin marchait à vide, c'est-à-dire $\frac{2}{3} \cdot 4v$ ou $2,66 \cdot v$ environ. Ces règles ont été sensiblement confirmées par les expériences de Coulomb sur les moulins de la Belgique.

Pour évaluer le travail transmis on se sert habituellement de la formule

$$T = 0,13.A.v^3, \quad [6]$$

dans laquelle A désigne la surface d'une des ailes.

La vitesse du vent ne doit pas dépasser 10 mètres pour que le moulin puisse marcher sans inconvénients. Une vitesse de 7 mètres est très-avantageuse.

Supposons que l'aile ait 12 mètres de long, à partir de l'axe, que sa surface soit de 20 mètres carrés, ce qui est le cas le plus ordinaire, et qu'elle fasse 18 tours par minute; on calculera comme il suit le travail transmis par le récepteur. Une vitesse de 16 tours par minute répond à une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{\pi.16}{30} = \frac{8}{15} \pi;$$

la vitesse de l'extrémité de l'aile est donc

$$\frac{8}{15} \pi.12;$$

celle du vent est en conséquence

$$v = \frac{8\pi.12}{15.2,66} = 7^m,3.$$

Par suite, on aura

$$T = 0,13.20^{m,4}(7^m,3)^3 = 1011^k,44,$$

soit $13^{ch,8}$ environ.

Au lieu de faire les ailes rectangulaires, on leur donne quelquefois la forme d'un trapèze ABCD (fig. 2) dont la plus grande base AB, située à l'extrémité du bras, est à la plus petite CD comme le nombre 3 est au nombre 2. On observe d'ailleurs pour l'inclinaison des traverses les règles exprimées par le tableau donné ci-dessus, ou par la formule [1].

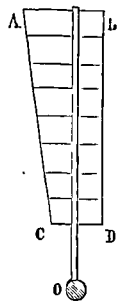


Fig. 2.

Dans les moulins à vent d'une construction soignée, l'axe du récepteur est fixé à la toiture; celle-ci repose par des roulettes, ou galets, sur une galerie circulaire, et peut ainsi tourner pour orienter les ailes, sans que la charpente du moulin soit obligée de se déplacer.

Quelquefois même, la toiture mobile porte à l'arrière une voile à l'aide de laquelle l'appareil s'orienté de lui-même sous l'action du vent, comme le fait une girouette.

Indépendamment des difficultés d'orientation, les moulins à vent à axe horizontal présentent deux autres inconvénients.

L'un d'eux consiste dans la difficulté de faire varier la surface des voiles. On conçoit que lorsque le vent a une vitesse considérable, il soit utile de diminuer cette surface pour que la vitesse ne dépasse pas une limite donnée; l'équation [6] montre en effet que, pour que le travail T reste le même, il faut, lorsque la vitesse V augmente, pouvoir diminuer le facteur A. Dans les moulins ordinaires cette opération ne peut s'exécuter qu'en arrêtant le mouvement à l'aide d'un frein, en amenant successivement les ailes au bas de leur course, et se servant des traverses comme des barreaux d'une échelle pour monter sur l'aile et diminuer ou même serrer complètement la voilure. Mais l'opération est longue,

et pourrait même devenir impossible, si le vent s'élevait d'une manière subite. On a proposé divers moyens pour diminuer à volonté la voilure. L'un des plus ingénieux est celui qui a été imaginé par M. Berton. Dans ce système, l'aile gauche en toile, est remplacée par une aile plane, formée de lattes qui se superposent en partie, d'une quantité qu'on peut faire varier à volonté. Cette disposition est représentée sur la figure 3. Les lattes sont attachées à l'aide de brides, comme celles qui forment une jalousie, à des traverses aa, mobiles autour de leur point d'articulation avec le bras. Les brides sont d'ailleurs mobiles elles-mêmes autour de leur point d'attache avec les traverses; et, comme celles-ci sont rendues solitaires par leur liaison avec les lattes, il suffit, pour faire varier la position de ces dernières, et étendre ou restreindre la surface de l'aile, de faire mouvoir l'une des traverses. Pour cela, une tringle à crémaillère, articulée avec la première traverse, engrène avec un pignon, dont l'axe traverse toute la longueur de l'arbre sur lequel sont montés les bras, et peut être manœuvré du dedans du moulin, à l'aide d'une manivelle. En agissant sur cette manivelle, on fait tourner le pignon, qui fait marcher la crémaillère; celle-ci fait avancer ou reculer l'extrémité de la première traverse; toutes les autres suivent le mouvement; et les lattes se recouvrant davantage, ou se recouvrant moins, la surface de l'aile se trouve diminuée ou augmentée. Cette opération peut s'exécuter instantanément, comme on voit, et sans arrêter le mouvement des ailes. Le défaut de ce système est la répartition très-inégaie des pressions exercées par le vent sur les différents éléments de l'aile; car l'inclinaison i restant la même, on voit que la quantité $(v \sin i - \omega x \cos i)^2$ est d'autant moindre que x est plus grand; cette inégalité, dans les ailes ordinaires, est à très-peu de chose près compensée par l'augmentation de l'angle i avec x ; dans les ailes planes l'inégalité peut devenir assez grande pour que l'extrémité de l'aile n'éprouve qu'une pression insensible. Aussi le système Berton fournit-il, avec une même étendue d'ailes, un travail inférieur à celui des moulins ordinaires.

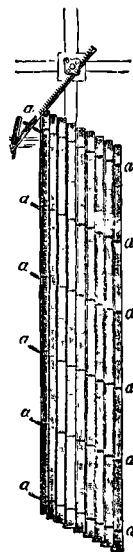


Fig. 3.

Le second inconvénient des moulins à vent à axe horizontal consiste dans la variation de vitesse du système tournant quand la vitesse du vent varie. On y remédie à l'aide d'un mode de transmission variable. Si, par exemple, on sépare l'axe de la lanterne et l'axe de la meule courante, on pourra monter une poulie P sur le premier de ces deux axes, et plusieurs poulies p, p', p'' de diamètres différents, sur le second. Une même courroie sans fin, passant sur la poulie P et sur l'une des poulies p, p' ou p'' , transmettra à la meule une vitesse sensiblement constante, malgré les variations de vitesse du vent, pourvu qu'on fasse passer la courroie sur une poulie d'un plus petit diamètre si la vi-

tesse du vent diminue, ou sur une plus grande si cette vitesse augmente.

Nous avons dit que les moulins à vent ne sont pas toujours employés à faire mouvoir des meules. En Hollande, on les emploie pour transmettre, par l'intermédiaire d'un JOINT DE CARDAN (Voy. ce mot), le mouvement à une vis d'Archimède servant aux épuisements si fréquents dans cette contrée. On en fait aussi usage pour faire mouvoir des pompes. — M. Amédée Durand, qui s'est beaucoup occupé de cette question, a obtenu de bons résultats de la disposition suivante. L'axe OB (fig. 4) de la roue

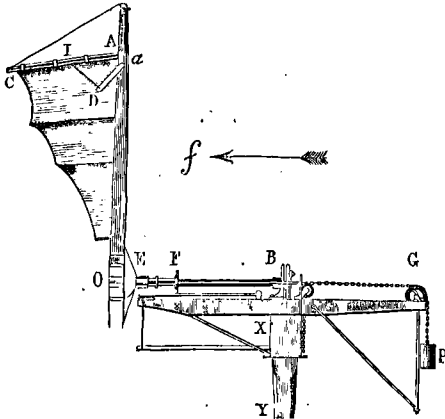


Fig. 4.

est horizontal; il est mobile autour d'un axe vertical XY. La roue compte 6 ailes, dont une seulement est représentée en perspective sur la figure. Elle est fixée à une vergue AC, perpendiculaire au bras OA, mais pouvant tourner autour de son point d'articulation A. Une pièce aD est fixée à demeure, perpendiculairement au bras, et dans le plan du mouvement de celui-ci. Une chaîne, partant du milieu I de la vergue, va passer sur une poulie adaptée à l'extrémité D de la pièce aD, court le long de cette pièce, passe sur une seconde poulie, en a, suit le bras aE, passe sur une troisième poulie en E, et vient enfin se fixer à un manchon F qui embrasse l'axe OB. Ce manchon est sollicité, à l'aide d'une chaîne passant sur une poulie G, par un contre-poids P. Le manchon F peut glisser le long de l'axe OB et tourne avec lui, sans faire tourner la chaîne qui l'unit au contre-poids, parce qu'il est réuni à cette chaîne par une sorte de boulon pouvant tourner dans la pièce qui forme la tête de la chaîne. L'action du contre-poids P a pour effet d'appliquer la vergue AC contre la pièce aD, et de placer ainsi toutes les ailes dans le plan du mouvement des bras. Le vent ayant la direction indiquée par la flèche f, fait tourner tout l'appareil autour de l'axe XY, jusqu'à ce que le plan de la roue, c'est-à-dire celui des bras, soit venu prendre la position perpendiculaire à la direction du vent; en sorte que l'appareil s'oriente de lui-même. Mais, en même temps, les ailes sont poussées en avant en soulevant le contre-poids P; les vergues, telles que AC, se séparent des pièces aD, les voiles tournent autour des bras correspondants, et prennent une position d'autant plus inclinée sur le plan de la roue, que la pression du

vent est plus grande; en outre, par l'effet de cette pression elles font tourner l'axe OB, comme dans les moulins ordinaires. Si le vent augmente, les ailes s'inclinent davantage, en soulevant davantage le contre-poids P, et présentent ainsi perpendiculairement au vent une surface moindre; si le vent diminue, l'inclinaison des voiles diminue au contraire, le contre-poids P s'abaisse, et les ailes présentent perpendiculairement au vent une surface plus grande. L'appareil se règle donc lui-même, sans qu'il soit nécessaire de s'en occuper autrement que pour graisser de temps à autre les articulations. Une manivelle montée à l'extrémité de l'axe OB, fait mouvoir la pompe par l'intermédiaire d'une bielle.

Les moulins à vent à axe vertical offrent également des dispositions très-variées. Dans les uns, les ailes sont des espèces de volets mobiles sur des axes verticaux, qui présentent leur largeur au vent quand ils doivent recevoir son action, et leur épaisseur quand ils doivent s'y soustraire. Dans d'autres, les ailes sont fixes, mais protégées, dans leur retour contre le vent, par une enveloppe cylindrique; ils ont besoin d'être orientés comme les moulins à axe horizontal. Dans d'autres enfin, auxquels on donne le nom de *panémores*, les ailes sont des voiles triangulaires, soit verticales, soit inclinées, ou des espèces de conoïdes présentant alternativement au vent leur concavité ou leur convexité; le mouvement du moulin se trouvant déterminé par la différence d'action du vent sur les deux faces de l'aile. — Tous ces moulins donnent, à égalité de surface de voiles, un travail moteur incomparablement moindre que les bons moulins à vent à axe horizontal. Nous ne croyons donc pas devoir en entreprendre la description détaillée.

(Voy. l'ouvrage de Smeaton cité plus haut, traduction de M. Gérard, les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1781, le *Calcul de l'effet des machines* par Coriolis, etc.)

MOULURES, ornements d'architecture placés en saillie sur la surface d'un mur, d'un piédroit, d'une arcade, d'une colonne, etc. On applique aussi ce nom aux figures planes qui représentent le profil des moulures. Une moulure peut s'étendre en ligne droite comme un corps prismatique, ou affecter une direction circulaire comme un corps terminé par une surface de révolution; dans le premier cas, le profil de la moulure est une section droite; dans le second, c'est une section méridienne; suivant qu'un même profil est une section droite ou une section méridienne, il peut arriver que la moulure prenne un nom différent. Les moulures sont dites droites, circulaires ou composées, suivant que le profil est formé de la ligne droite, du cercle ou de l'un et l'autre à la fois.

Le *filet* (fig. 1) est une moulure droite dont la saillie égale l'épaisseur. La *plate-bande* (fig. 2) est une moulure droite dont l'épaisseur est un multiple de la saillie. Pour construire l'un ou l'autre, il suffit d'élever sur le profil du mur, et à une distance égale à l'épaisseur donnée, deux perpendiculaires que l'on prend égales à la saillie; on joint ensuite les extrémités de ces perpendiculaires par une droite qui est parallèle au mur.

On nomme *baguette* (fig. 3) une moulure circulaire dont le profil est un demi-cercle, et qui s'étend

en ligne droite sur une surface plane. On nomme *astragale* une moulure qui a le même profil que la baguette, mais qui forme une surface de révolution autour d'une colonne; dans le cas de la baguette,

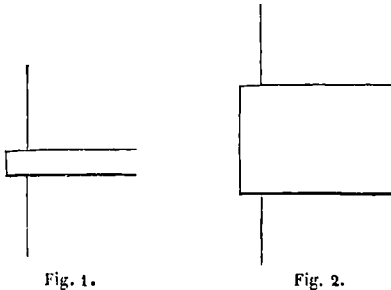


Fig. 1.

Fig. 2.



Fig. 3.

le profil est une section droite; dans le cas de l'astragale, c'est une section méridienne. L'astragale porte ordinairement sur un filet que l'on comprend quelquefois dans l'astragale même.

Le *tore* (fig. 4) est une moulure analogue à l'astragale, mais de dimensions beaucoup plus grandes, et placée à la partie inférieure d'une colonne.



Fig. 4.

Fig. 5.

La figure 5 représente une *gorge*, moulure circulaire creuse, formée d'une demi-circonférence se raccordant avec deux droites horizontales.

Les figures 6, 7, 8, 9 représentent respectivement un *quart de rond*, un *quart de rond renversé*, un

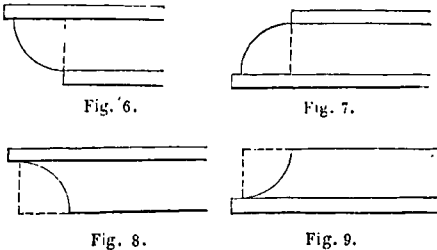


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

cavet et un *cavet renversé*. Ces moulures sont formées chacune d'un quart de cercle, et l'inspection des figures suffit pour faire comprendre comment elles sont tracées. On donne le nom de *congé* à un petit cavet qui se trace comme lui et se renverse de la même manière. La moulure droite placée au-dessus du cavet, ou au-dessous du cavet renversé, s'appelle *listel* quand la moulure s'étend en ligne droite; elle prend le nom de *ceinture* ou *orte* quand la moulure tourne autour d'une colonne.

Les figures 10, 11, 12, 13 représentent respectivement un *talon droit*, un *talon renversé*, une *dou-*

cine et une *doucine renversée*. Ces moulures sont formées chacune de deux quarts de cercle qui se raccordent; les figures montrent suffisamment comme ces quarts de cercle sont tracés.

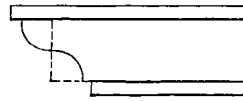


Fig. 10.

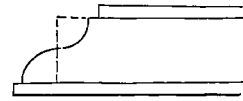


Fig. 11.

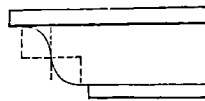


Fig. 12.

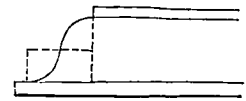


Fig. 13.

La figure 14 représente une *scotie*; la figure 15 une *scotie renversée*. Chacune de ces moulures est formée de deux quarts de cercle qui se raccordent par contact intérieur, mais qui sont de rayons dif-

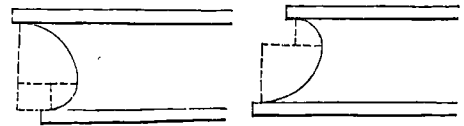


Fig. 14.

Fig. 15.

férents. Ordinairement le grand rayon est double du petit. Mais nous devons dire que beaucoup d'architectes tracent les moulures sans le secours du compas, particulièrement les talons, les doucines, les scoties, et préfèrent se laisser guider par leur goût plutôt que par les règles géométriques.

La figure 16 offre un exemple de moulure composée; on reconnaît dans ses diverses parties, sa-

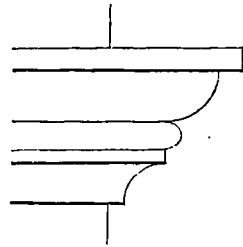


Fig. 16.

voir : 1 un filet, 2 un quart de rond, 3 une baguette, 4 un listel, 5 un congé. Ces parties sont ce que l'on appelle les *membres* de la moulure composée.

Une moulure est *lisse* quand elle est sans ornements; elle est *ornée* quand on y a taillé, soit en creux, soit en relief, des ornements qui peuvent être de divers genres. Une moulure est *couronnée*

lorsque, comme dans l'exemple de la figure 16, elle est surmontée d'un filet.

Les moulures qui suivent une ligne droite inclinée, comme dans les frontons, prennent le nom de *moulures rampantes*.

Lorsque deux moulures rectilignes égales, et placées à la même hauteur sur deux faces contiguës d'un édifice, viennent à se rencontrer, il peut être nécessaire de déterminer la section oblique suivant laquelle se fait la rencontre. Voici comment on peut opérer pour cela. Soient OA et OA' (fig. 17) les

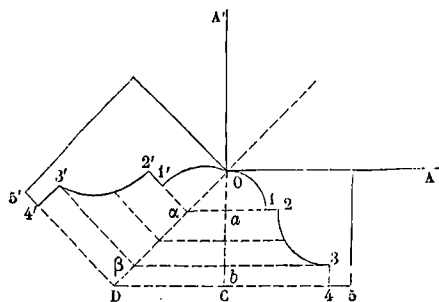


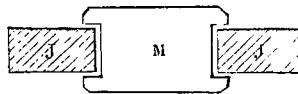
Fig. 17.

traces horizontales des deux plans verticaux formant les deux faces contiguës de l'édifice, le plan horizontal étant pris à la hauteur du point le plus bas de la moulure. Soit O 12345 le rabattement, autour de OA' prolongé, de la section droite de la première moulure. L'intersection des deux moulures égales se fera dans le plan vertical dont la trace OD est la bissectrice de l'angle AOA'. Il s'agit de se procurer le rabattement, autour de OD, de la section oblique suivant laquelle se fait la rencontre. On observera que les points correspondants de la section droite et de la section oblique sont à la même hauteur au-dessus du plan horizontal passant par le point O. Si donc par le point 1 on mène 1.a parallèle à OA, que l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en α avec OD, et qu'au point α on élève sur OD une perpendiculaire $\alpha 1'$, égale à $\alpha 1$, le point 1' ainsi obtenu sera le point de la section oblique qui correspond au point 1 de la section droite. En prenant $\alpha 2'$ égal à $\alpha 2$, on aura le point correspondant à 2. Si de même, par le point 3 de la section droite, on mène 3b β parallèle à OA, et que, sur une perpendiculaire à OD élevée par le point β , on prenne $\beta 3'$ égal à $b.3$, on aura en 3' le point correspondant à 3. On se procurera ainsi autant de points qu'on le voudra de la section oblique, et on pourra tracer cette section.

On emploie un procédé analogue pour construire l'intersection des deux moulures rampantes d'un fronton, avec cette seule différence que les hauteurs au-dessus d'un plan horizontal se trouvent remplacées par des distances à un même plan vertical.

MOUTON, masse en bois ou en fonte qui sert au battage des pilots (Voy. PILOTS, SONNETTES). Le poids d'un mouton varie depuis 300^k jusqu'à 600^k et au-dessus. Les moutons en bois portent sur la face postérieure des saillies auxquelles on donne le nom d'oreilles et qui, s'engageant entre les jumelles de la sonnette, servent à empêcher le mouton de dévier pendant sa chute. La même disposition peut

être employée pour les moutons en fonte; mais le plus souvent on leur donne une section horizontale tracée de manière à embrasser les jumelles elles-mêmes, comme l'indique la figure.



MOUTON À VAPEUR. Voy. MARTEAU À PILOTS.

MOUVEMENT, état d'un corps qui change de position dans l'espace.

Le mouvement est *absolu* lorsqu'il est rapporté à des objets réellement fixes; il est *relatif* lorsqu'on le rapporte à des objets considérés comme fixes par l'observateur, mais entraînés avec lui dans un mouvement commun qu'on appelle le mouvement d'*entraînement*. Si, par exemple, le globe terrestre était immobile, le mouvement d'une bille roulant sur le pont d'un bateau qui suit le cours d'un fleuve, serait relatif, rapporté au bateau; le mouvement commun au bateau et à la bille serait le mouvement d'entraînement; le mouvement de la bille, par rapport au globe supposé fixé, serait un mouvement absolu. La considération du mouvement absolu est indispensable pour établir les premières notions de la Mécanique; mais c'est une abstraction, attendu qu'il n'existe peut-être pas un point dans l'univers qui soit réellement fixe, et auquel on puisse rapporter la position des autres points pour se faire une idée de leur mouvement réel.

Le mouvement est essentiellement *continu*, c'est-à-dire que si un POINT MATÉRIEL (Voy. ce mot) se transporte d'une position à une autre, il passe nécessairement par tous les points d'une ligne droite ou courbe joignant les deux positions considérées, et que l'on nomme sa *trajectoire*.

L'étude du mouvement exige la considération de deux éléments: l'ESPACE et le TEMPS (Voy. ces mots).

Le mouvement d'un point matériel est *rectiligne* ou *curviligne*, suivant que la ligne qu'il parcourt est droite ou courbe. Il est *UNIFORME* ou *VARIÉ* (Voy. ces mots), suivant que la VITESSE est constante ou variable; il peut être *UNIFORMÉMENT VARIÉ* (Voy. ces mots), si l'ACCÉLÉRATION est constante. Il est *accélééré* quand la vitesse va en augmentant; il est *retardé* lorsqu'elle va en diminuant. Le mouvement est dit *progressif* lorsqu'il se fait d'un côté déterminé, *rétrograde* lorsqu'il a lieu en sens contraire.

Le mouvement est *périodique* lorsqu'à des intervalles de temps égaux la vitesse repasse par les mêmes séries de valeurs.

Le mouvement d'un corps solide peut être un mouvement de TRANSLATION, un mouvement de ROTATION autour d'un axe (Voy. ces mots), ou une combinaison de ces deux espèces de mouvement. On appelle mouvement INSTANTANÉ (Voy. ce mot) un mouvement considéré pendant un temps infiniment court. Le mouvement instantané le plus général que puisse prendre un corps solide est analogue à celui d'une vis dans son écrou, c'est-à-dire qu'il se compose d'un mouvement de rotation autour d'un axe et d'un mouvement de translation suivant cet axe.

Un corps peut quelquefois être considéré comme

animé de plusieurs mouvements simultanés (Voy. COMPOSITION DES VITESSES).

La CLASSIFICATION DES MOUVEMENTS a pour objet de distinguer les divers mouvements que l'on peut donner aux organes des machines. La TRANSFORMATION DES MOUVEMENTS est la partie de la CINÉMATIQUE qui apprend les dispositions à adopter pour produire un mouvement déterminé à l'aide d'un autre mouvement également déterminé (Voy. ces mots).

On donne ordinairement le nom de *mobile* au corps dont on considère le mouvement.

MOUVEMENT ABSOLU, mouvement rapporté à des axes fixes dans l'espace.

MOUVEMENT CURVILIGNE, mouvement d'un point matériel suivant une ligne courbe. En vertu de l'INERTIE (Voy. ce mot) un pareil mouvement ne peut se produire sans l'intervention d'une force. Si cette force est constante d'intensité et de direction, la trajectoire est une parabole (Voy. MOUVEMENT PARABOLIQUE). Si la force est variable, on peut toujours considérer le mouvement pendant un temps assez court pour qu'elle puisse être regardée comme constante, et l'arc de trajectoire correspondant peut être regardé comme un petit arc de parabole. En vertu des propriétés du mouvement parabolique, la projection de ce mouvement sur un axe quelconque est un mouvement uniformément varié, et l'on en conclut que l'accélération dans le mouvement projeté est celle qui serait produite par une force constante égale à la projection de celle qui agit réellement sur le mobile dans l'espace. Si donc on rapporte le mouvement à trois axes rectangulaires, et qu'on le projette sur ces trois axes, on aura, en appelant j_x, j_y, j_z les accélérations des trois mouvements projetés, m la masse du mobile et F_x, F_y, F_z les projections sur les mêmes axes, de la force F qui agit sur le mobile dans l'espace,

$$j_x = \frac{F_x}{m}, \quad j_y = \frac{F_y}{m}, \quad j_z = \frac{F_z}{m}. \quad [1]$$

On peut regarder le mobile comme animé de ces trois accélérations simultanées; et si l'on appelle j l'accélération résultante, on aura (V. COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS)

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}$$

ou, en vertu des relations (1),

$$j = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{m} = \frac{F}{m};$$

ainsi l'accélération totale j dont le mobile est animé est bien celle qui est produite par la force F , comme on pouvait s'y attendre.

On peut, à l'aide des relations [1], résoudre deux problèmes généraux.

1° Si la force F est donnée, en grandeur et en direction pour chaque instant ou pour chaque valeur du temps t , ses projections, et, par suite, les composantes j_x, j_y, j_z de l'accélération, seront données en fonction du temps. Par une première intégration, on en déduira les valeurs v_x, v_y, v_z des composantes de la vitesse, aussi en fonction du temps; les constantes introduites par l'intégration se détermineront à l'aide des valeurs initiales des composantes de la vitesse; on en déduira, par la relation

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

la valeur de la vitesse v elle-même; et les angles

qu'elle fait avec les axes seront donnés par les relations

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Une seconde intégration permettra de déduire des valeurs de v_x, v_y, v_z en fonction du temps, celle des coordonnées x, y, z du mobile au bout du temps t ; les constantes introduites par l'intégration se détermineront à l'aide des coordonnées initiales du mobile. Le problème se trouvera ainsi complètement résolu.

2° Si c'est le mouvement qui est connu à l'avance, on connaît, en fonction du temps, les coordonnées du mobile; en les différentiant par rapport au temps, on en déduira les valeurs v_x, v_y, v_z des composantes, suivant les axes, de la vitesse du mobile au bout du temps t , et par suite, comme ci-dessus, la valeur de cette vitesse elle-même. Différentiant de nouveau par rapport au temps les expressions de v_x, v_y, v_z , on en déduira les valeurs, en fonction du temps, des composantes j_x, j_y, j_z de l'accélération totale. En les multipliant par m , on aura les composantes F_x, F_y, F_z de la force qui produit le mouvement, et par suite cette force elle-même.

Quoique ces deux problèmes, ou plutôt ces deux méthodes de solution, appartiennent plus particulièrement à la Mécanique abstraite, on les rencontre quelquefois cependant dans les applications; on en trouvera un exemple dans la BALISTIQUE (V. ce mot).

Si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires du mobile; on a

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

par suite

$$j_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad j_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad j_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

en sorte que les équations [1] peuvent s'écrire

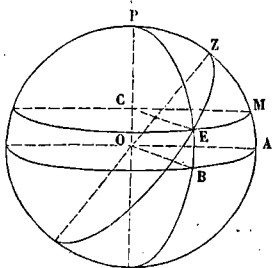
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z, \quad [2]$$

c'est sous cette forme qu'on les emploie dans la Mécanique rationnelle; elle est utile dans plusieurs questions de Mécanique appliquée.

MOUVEMENT D'ENTRAÎNEMENT, mouvement commun à tout un système. Si un point matériel se déplace par rapport à ce système mobile, son mouvement rapporté à ce système est un *mouvement relatif*, et le mouvement *absolu* de ce point dans l'espace résulte de la composition du mouvement relatif avec le mouvement d'entraînement (Voy. COMPOSITION DES VITESSES).

MOUVEMENT DIURNE, mouvement apparent de la SPHÈRE CÉLESTE (Voy. ce mot) en vertu duquel les étoiles semblent décrire uniformément, et de l'est à l'ouest, des cercles ayant leurs centres sur l'axe de la Terre, et dont les plans sont perpendiculaires à cet axe. Cette apparence est due au mouvement uniforme de la Terre autour de son axe, en sens contraire du mouvement apparent de la sphère céleste, c'est-à-dire de l'ouest à l'est. La rotation complète de la sphère céleste s'exécute dans une durée à laquelle on a donné le nom de *jour sidéral*, et qui est un peu moindre que le jour solaire ou vrai (Voy. TEMPS SIDÉRAL). Le sens de la rotation de la Terre autour de son axe est celui qu'on regarde comme le sens *direct*; le sens de la rotation apparente de la sphère céleste est le sens *rétrograde*.

Les lois du mouvement diurne se démontrent de la manière suivante : Soit O le centre de la sphère céleste, P le pôle, Z le zénith du lieu où se font les observations, E la position d'une étoile à un instant



donné, PZA le méridien du lieu, PEB le cercle horaire qui passe par la position actuelle de l'étoile, AB l'arc de l'équateur compris entre les deux cercles PZA et PEB, ME l'arc du parallèle sur lequel se trouve l'étoile, compris entre ces mêmes cercles. Soit enfin ZE l'arc de grand cercle qui joint les points Z et E. Le triangle sphérique PEZ donne la relation :

$$\cos PE = \cos PZ \cos EZ + \sin PZ \sin EZ \cdot \cos PZE, \quad [1]$$

dans laquelle PE est la distance polaire de l'étoile, EZ est sa distance zénithale, PZ est la distance zénithale du pôle, et l'angle PZE est l'angle que fait le plan vertical de l'étoile avec le méridien, c'est-à-dire l'azimut de l'étoile. Tous ces éléments, à l'exception du premier, peuvent être déterminés par l'observation; la formule [1] donnera donc la distance polaire de l'étoile pour toutes les positions observées. Or, on trouve pour PE une valeur constante. Donc 1° la distance polaire de l'étoile reste constante pendant son mouvement apparent; ce qui exige que ce mouvement s'effectue sur un même parallèle. Ainsi le mouvement apparent diurne des étoiles est un mouvement circulaire.

Le même triangle PEZ donne aussi la relation : $\cos ZE = \cos PZ \cos PE + \sin PZ \sin PE \cdot \cos ZPE$ [2] dans laquelle tous les éléments sont connus, à l'exception de l'angle ZPE, puisque PE a été déterminé par la formule [1]. On peut donc de la formule [2] déduire la valeur de ZPE pour toutes les positions de l'étoile. On trouve que cet angle est proportionnel au temps t écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien jusqu'à l'instant que l'on considère. Or, cet angle a pour mesure l'arc d'équateur AB, ou l'arc de parallèle ME; ce dernier est donc proportionnel au temps t. Par conséquent, chaque étoile se meut d'un mouvement uniforme sur le parallèle qu'elle parcourt.

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL, mouvement analogue à celui d'une vis dans son écrou, et qui se compose d'une rotation autour d'un axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe. Le mouvement instantané le plus général d'un corps solide est un mouvement hélicoïdal (*Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ*). Si la rotation et la translation sont uniformes, tous les points du corps décrivent des hélices de même pas, mais dont les éléments font avec l'axe un angle d'autant plus grand qu'ils sont plus éloignés de cet axe.

MOUVEMENT INSTANTANÉ, mouvement que

prend un corps solide pendant un temps infiniment petit. Ce mouvement se réduit, dans le cas le plus général, à un mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire à une rotation autour d'un axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe; c'est-à-dire que le mouvement instantané le plus général est celui d'une vis dans son écrou. On peut établir cette proposition de plusieurs manières; nous adopterons ici la suivante, qui a l'avantage de fixer l'attention sur divers cas particuliers intéressants.

I. Avant d'étudier le mouvement d'un corps solide dans l'espace, on étudie d'abord le mouvement d'une figure plane dans son plan. Soit AB (fig. 1) une droite

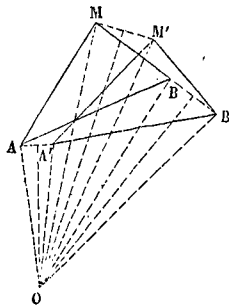


Fig. 1.

qui se déplace infiniment peu dans un plan, celui de la figure, pour venir occuper la position A'B'. Joignons AA' et BB'; et sur le milieu de chacune des deux lignes de jonction élevons une perpendiculaire; ces deux perpendiculaires se rencontreront en général en un certain point O. Les distances OA et OA' seront égales, ainsi que les distances OB et OB'; les deux triangles AOB et A'OB' sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; et si l'on faisait tourner le premier, AOB, autour du point O, il viendrait, après une rotation élémentaire, se placer en A'OB'. Le mouvement instantané de la droite AB est donc une rotation autour du point O, déterminé comme nous venons de le dire. Considérons maintenant, dans le même plan, un point quelconque M lié invariablement aux points A et B. Après le déplacement de la droite AB, il sera venu se placer en M'; et le triangle A'M'B' sera égal au triangle AMB en vertu de la liaison invariable dont nous parlons. Joignons OM et OM'. Les triangles OAM et OA'M' seront égaux, car on a OA = OA', AM = A'M'; et l'angle OAM, somme des angles OAB et BAM, est égal à l'angle OA'M', somme des angles OA'B' et B'A'M' respectivement égaux aux deux premiers; donc OM = OM'; et le point M peut être considéré comme étant venu en M' par une rotation autour du point O. On en pourrait dire autant de tout autre point du plan lié invariablement aux points A et B. Il en résulte que si une figure quelconque, invariable de forme, et dont les points A et B font partie, se déplace dans son plan de manière que AB vienne en A'B', tous les points de la figure pourront être regardés comme ayant tourné autour du même point O. On peut donc dire que le mouvement instantané le plus général d'une figure plane dans son plan est une rotation autour d'un point de ce plan. Ce point est ce que l'on appelle le centre instantané de rotation.

Cette proposition est connue sous le nom de *Théorème de M. Chasles*, bien qu'il l'ait énoncée d'une manière différente, et en considérant un déplacement fini. Elle donne sur-le-champ les vitesses de tous les points de la figure quand on connaît celle de l'un de ces points et la direction de la vitesse d'un autre point. Soit, en effet, Aa (fig. 2) la droite

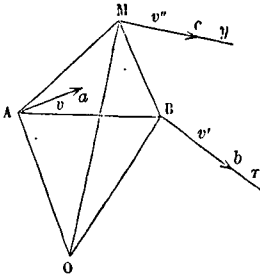


Fig. 2.

qui représente en grandeur et en direction la vitesse v du point A , et Bx la direction de la vitesse v' du point B ; si l'on remarque que lorsque AA' et BB' (fig. 1) sont infiniment petits, OA peut être regardé comme perpendiculaire à AA' , et OB comme perpendiculaire à BB' , on obtiendra le centre instantané de rotation (fig. 2) en élevant en A et en B des perpendiculaires à Aa et à Bx ; ces perpendiculaires se couperont en un point O qui sera le centre demandé. Divisant v par la distance OA , on aura la vitesse angulaire ω ; par suite on aura $v' = \omega \cdot BO$. Si l'on joint ensuite le point O à un point quelconque M de la figure mobile, la vitesse v'' de ce point sera dirigée suivant une perpendiculaire à OM , et elle aura pour valeur $v'' = \omega \cdot OM$.

La rotation instantanée d'une figure plane dans son plan pourrait se changer en une translation. Si les déplacements élémentaires de deux des points de la figure étaient égaux et parallèles, les perpendiculaires élevées sur les milieux de ces déplacements seraient elles-mêmes parallèles, et le centre instantané serait situé à une distance infinie. Les déplacements de tous les autres points de la figure seraient égaux et parallèles aux deux premiers, et le mouvement instantané de la figure serait un mouvement de translation.

La considération du centre instantané de rotation d'une figure dans son plan conduit à une image sensible du mouvement fini de cette figure. Dans le premier instant infiniment petit, la rotation se fait autour d'un point O , commun au plan fixe et à la figure mobile. Au bout de ce premier instant, la rotation se fait autour d'un second centre instantané, que nous nommerons O_1 si nous le considérons comme appartenant au plan fixe, et O_1' si nous le considérons comme appartenant à la figure mobile. Au bout de ce second instant, la rotation se fait autour d'un troisième centre instantané, que nous nommerons O_2 comme appartenant au plan fixe, et O_2' comme appartenant à la figure mobile. Au bout de ce troisième instant, nous aurons un quatrième centre instantané O_3 ou O_3' ; et ainsi de suite. La série des points O, O_1, O_2, O_3, \dots , s'ils sont infiniment rapprochés, forme sur le plan fixe une courbe que nous nommerons C ; et la série des

points $O, O_1', O_2', O_3', \dots$, forme dans la figure mobile une seconde courbe C' . Supposons la figure mobile dans sa position initiale; on lui fera prendre le mouvement qu'elle doit réellement avoir, en la faisant tourner d'abord autour du point O jusqu'à ce que le point O_1' de la courbe C' vienne coïncider avec le point O_1 de la courbe C ; puis, en la faisant tourner autour du point O_1 , jusqu'à ce que le point O_2' vienne coïncider avec le point O_2 ; puis, en la faisant tourner autour de O_2 jusqu'à ce que le point O_3' vienne coïncider avec le point O_3 ; et ainsi de suite. Or, cette série de rotations successives revient à faire rouler la courbe C' sans glissement sur la courbe C . On peut donc dire que le mouvement d'une figure plane dans son plan peut toujours être obtenu en faisant rouler une certaine courbe tracée dans cette figure, sur une autre courbe tracée dans le plan fixe; ce qui donne une image géométrique très-simple du mouvement considéré, quelque compliqué qu'il soit d'ailleurs.

Les considérations qui précèdent sont applicables à un corps solide dont une section plane resterait constamment dans un même plan fixe. Le mouvement instantané de ce corps serait un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe et passant par le centre instantané de rotation de la section plane dont il s'agit. Au lieu d'une série de centres instantanés, on aurait donc une série d'axes instantanés; et au lieu des courbes C et C' , deux cylindres droits ayant ces courbes pour bases. Ainsi, dans ce cas, on aurait une image du mouvement en concevant qu'un cylindre tracé dans le corps, ou lié invariablement avec lui, roule sans glissement sur un cylindre fixe dans l'espace (ces deux cylindres ayant leurs génératrices parallèles).

II. Les mêmes considérations sont applicables à une figure sphérique qui se meut sur sa sphère; et l'on peut dire que le mouvement instantané le plus général d'une figure sphérique sur sa sphère est un mouvement de rotation autour d'un certain point de la surface de cette sphère, qu'on peut appeler le pôle instantané de rotation, ou, ce qui revient au même, autour du diamètre qui passe par ce pôle, et qui prend le nom d'axe instantané. Cette extension du théorème de M. Chasles se démontre d'une manière identique; et l'on peut même se servir de la figure 1, en y regardant les lignes droites comme des arcs de grands cercles d'une même sphère. Il n'y a de différence entre les deux théorèmes qu'en ce que, dans le cas d'une figure sphérique, la rotation ne peut jamais se changer en une translation.

La série des pôles instantanés formera sur la sphère une certaine courbe γ , et sur la figure sphérique considérée une autre courbe γ' . Si l'on fait mouvoir la figure sur la sphère, de manière que la courbe γ' roule sans glissement sur la courbe γ , on reproduira le mouvement de la figure considérée.

Ces considérations conduisent immédiatement à la détermination du mouvement d'un corps solide assujéti à se mouvoir autour d'un point fixe auquel il serait lié invariablement. On peut, en effet, décrire de ce point fixe comme centre, et avec un rayon arbitraire, une sphère qui coupera le corps suivant une certaine figure; le mouvement de cette figure sur sa sphère fera connaître le mouvement du corps solide dans l'espace. Le mouvement instantané de la figure sphérique étant une rotation autour d'un

certain pôle; le mouvement instantané du corps solide sera aussi une rotation autour du diamètre de la sphère qui passe par ce pôle. Le mouvement fini de la figure sphérique étant déterminé par une courbe sphérique γ' invariablement liée à cette figure, et qui roulerait sans glissement sur une courbe sphérique fixe γ , le mouvement fini du corps solide sera déterminé par un cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la courbe γ' , lequel roulerait sans glissement sur un cône fixe ayant le même sommet et pour directrice la courbe γ . Telle est l'image sensible du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe auquel il est invariablement lié. Les génératrices de ces deux cônes, qui dans le roulement viennent successivement coïncider, sont les positions successives de l'axe instantané de rotation, dans l'espace et dans le corps mobile.

M. Poinsoot a démontré dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps* qu'un corps solide dans lequel il y a ainsi un point fixe, et qui a reçu l'impulsion initiale d'un couple, continue à se mouvoir comme si l'ellipsoïde central obtenu en menant par le point fixe une série de droites, et prenant sur chacune d'elles une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie du corps par rapport à cette droite, roulait sans glissement sur un plan fixe parallèle au plan du couple. Il a nommé *polhodie* la courbe formée sur l'ellipsoïde par la série des points de contact; et *herpolhodie* la courbe formée par ces mêmes points sur le plan fixe.

Cette ingénieuse conception n'a pas encore trouvé son utilité dans les applications; nous nous contenterons donc de renvoyer au mémoire de M. Poinsoot.

III. Nous pouvons maintenant nous occuper du mouvement instantané d'un corps libre dans l'espace. Mais il est nécessaire de considérer d'abord le mouvement d'un triangle. Désignons par A, B, C les sommets de ce triangle, et supposons que les déplacements simultanés de ces trois sommets soient donnés. Par un point quelconque l (fig. 3) de l'espace,

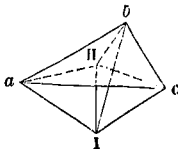


Fig. 3.

menons les droites, Ia, Ib, Ic respectivement égales et parallèles à ces trois déplacements; et du point I abaissons sur le plan abc la perpendiculaire IH. Projétons les trois points A, B, C sur un plan quelconque P parallèle à abc, et soient A', B', C' les trois projections. Le chemin Ia peut être décomposé en deux autres, l'un IH perpendiculaire à abc et l'autre aH situé dans ce plan; les chemins Ib et Ic peuvent de même être décomposés en deux, l'un égal à IH, et les autres respectivement à bH et à cH. Ainsi les déplacements des trois points A, B, C peuvent être remplacés 1° par trois déplacements égaux et parallèles à IH, 2° par trois déplacements respectivement égaux et parallèles à aH, bH et cH; et ces trois derniers seront les déplacements des projections A', B', C', puisqu'ils sont parallèles au plan P sur le-

quel on a effectué la projection. Or, le triangle A'B'C' (fig. 4) se déplace dans le plan P en tournant instantanément autour d'un certain centre O. Les droites AA', BB', CC' qui projettent les points A, B, C

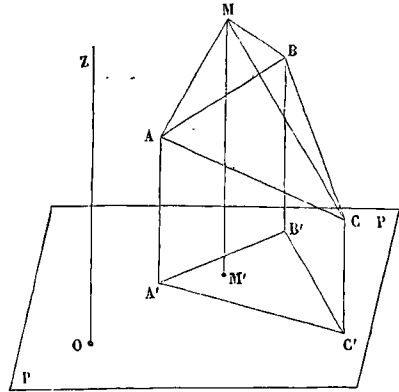


Fig. 4.

sur le plan P, tournent donc autour d'un axe instantané OZ perpendiculaire au plan P. D'un autre côté, les trois déplacements égaux et parallèles à IH de la figure 3 représentent une translation parallèle à IH, ou perpendiculaire au plan P, ou enfin parallèle à OZ. Le mouvement instantané du triangle ABC dans l'espace se compose donc d'une rotation autour de l'axe OZ et d'une translation parallèle à cet axe.

Soit maintenant un point quelconque M du corps solide en mouvement; nous pouvons regarder comme invariable le tétraèdre MABC qui lie le point M aux points A, B, C. Si du point M on abaisse sur le plan P la perpendiculaire MM', le point M' occupera toujours une position fixe par rapport au triangle A'B'C', puisque le solide MABCA'B'C' peut être considéré comme invariable. Le point M' participe donc à la rotation instantanée autour du point O, et par conséquent la droite MM' participe à la rotation instantanée autour de l'axe OZ. Donc le point M participe au mouvement du triangle ABC autour de cet axe. D'un autre côté, les trois points A, B, C ayant un second déplacement parallèle à OZ, ces trois points s'élèvent ou s'abaissent d'une même quantité sur les droites AA', BB' et CC'; donc le point M s'élève ou s'abaisse d'une quantité égale sur MM'; car le résultat est le même que si le plan P s'était abaissé ou élevé parallèlement à lui-même de la même quantité. Donc le point M participe au mouvement de translation du triangle ABC. Et, comme on en pourrait dire autant de tout autre point du corps, on peut dire que le mouvement instantané le plus général d'un corps solide est un mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire un mouvement de rotation autour d'un axe, accompagné d'une translation parallèle à cet axe.

Cette démonstration est due à M. Poncelet. On peut établir la proposition d'une autre manière, en apparence plus simple, mais qui suppose connue la COMPOSITION DES ROTATIONS (Voy. ce mot). Considérons dans le corps un point quelconque O; et soit O' la position du point O après le déplacement instantané. On peut toujours remplacer le mouve-

ment réel du corps, 1° par une translation égale et parallèle à OO' , et en vertu de laquelle le point O serait transporté en O' ; 2° par un mouvement instantané convenable autour du point O' . Or, le mouvement instantané d'un corps solide autour d'un point fixe est, comme on l'a vu, une rotation autour d'un axe passant par ce point fixe; on voit donc que le mouvement réel se trouvera remplacé par une translation et une rotation. Mais on sait que ces deux mouvements peuvent toujours être remplacés par deux autres mouvements du même genre, dans lesquels la translation est parallèle à l'axe de rotation (*Voy. l'art. cité ci-dessus*). Donc, en définitive, le mouvement instantané du corps se compose d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire que ce mouvement instantané est celui d'une vis dans son écrou. Cette démonstration est due à M. Poinso, qui a nommé *axe spontané glissant* l'axe suivant lequel a lieu la translation et autour duquel s'effectue la rotation. M. Bélanger donne au même axe le nom plus simple mais moins expressif d'*axe central*.

Cette proposition établie, on peut donner une image sensible du mouvement fini d'un corps solide dans l'espace, quel que soit d'ailleurs ce mouvement. Dans le premier instant infiniment petit, le corps tourne autour d'un certain axe A , en glissant en même temps le long de cet axe d'une certaine quantité infiniment petite que nous désignerons par α . Au bout de ce premier instant, la rotation se fait autour d'un axe que nous appellerons A_1 , si nous le considérons comme fixe dans l'espace, et A'_1 , si nous le considérons comme appartenant au corps mobile; en même temps il y aura un glissement α_1 autour de cet axe. Au bout de ce second instant, la rotation se fera autour d'un nouvel axe que nous nommerons A_2 , en le considérant comme fixe dans l'espace, et A'_2 , en le regardant comme appartenant au corps mobile; il y aura sur ce nouvel axe un glissement α_2 . Au bout de ce troisième instant, la rotation se fera autour d'un quatrième axe que nous désignerons par A_3 , en le considérant comme fixe dans l'espace, et par A'_3 , en le considérant comme appartenant au corps; il y aura sur cet axe un glissement α_3 ; et ainsi de suite. La série des axes A, A_1, A_2, A_3 , etc., formera, s'ils sont infiniment peu éloignés, une surface réglée S , fixe dans l'espace, et la série des axes A, A'_1, A'_2, A'_3 , etc., formera dans le corps mobile une seconde surface réglée S' . En faisant rouler d'une certaine façon la surface S' sur la surface S , on reproduira le mouvement du corps solide. En effet, les deux surfaces étant placées dans leur position initiale, ayant l'axe A commun, on fera tourner la surface S' autour de cette génératrice commune jusqu'à ce que l'axe A'_1 vienne coïncider avec l'axe A_1 , et de manière que, pendant cette rotation, la surface S' ait en même temps glissé de la quantité α le long de l'axe commun A . On fera ensuite tourner la surface S' autour de l'axe A_1 , devenu commun, jusqu'à ce que l'axe A'_2 soit venu coïncider avec l'axe A_2 , et de manière que, pendant cette seconde rotation, la surface S' ait en même temps glissé de la quantité α_1 le long de l'axe commun A_1 . On fera de nouveau tourner la surface S' autour de l'axe A_2 , devenu commun, jusqu'à ce que l'axe A'_3 soit venu coïncider avec l'axe A_3 , et de manière que, pendant cette

troisième rotation, la surface S' ait en même temps glissé de la quantité α_2 le long de l'axe commun A_2 . En continuant ainsi, on reproduira tout le mouvement du corps solide considéré. Le glissement peut être réglé d'une manière très-simple. Soit O un point commun aux deux surfaces à l'instant initial et situé sur l'axe A . On pourra tracer sur la surface S une courbe quelconque D , passant par le point O et coupant toutes les génératrices successives de cette surface. Concevons qu'on fasse exécuter à la surface S' la première rotation et le premier glissement; le point de la courbe D situé sur l'axe A , répondra, sur l'axe A'_1 , à un certain point de la surface S' . Faisons exécuter à S' la seconde rotation et le second glissement; le point de la courbe D situé sur l'axe A_2 répondra, sur l'axe A'_2 , à un nouveau point de la surface S' . Au bout de la troisième rotation et du troisième glissement, le point de la courbe D situé sur l'axe A_3 répondra, sur l'axe A'_3 , à un nouveau point de la surface S' , et ainsi de suite. La série de tous les points ainsi obtenus sur les axes A'_1, A'_2, A'_3 , etc., formera sur la surface S' une courbe D' . Les deux courbes D et D' , l'une fixe dans l'espace et l'autre mobile avec le corps en mouvement, serviront de directrices au glissement; c'est-à-dire qu'on reproduira le mouvement du corps solide en faisant rouler la surface S' sur la surface S , de manière que les génératrices A'_1, A'_2, A'_3 , etc., viennent successivement coïncider avec les génératrices A_1, A_2, A_3 , etc., et qu'en même temps les points de la directrice D' situés sur A'_1, A'_2, A'_3 , etc., viennent successivement coïncider avec les points de la directrice D situés sur A_1, A_2, A_3 , etc., ce qui reproduira en effet le double mouvement de rotation, autour de ces axes successifs, et de translation parallèle à ces axes, qui constitue le mouvement du corps solide étudié.

IV. Toutes ces questions peuvent être traitées par l'analyse. Dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences en 1849, j'ai indiqué la marche à suivre pour trouver les équations des surfaces S et S' , et j'en ai fait l'application au mouvement du globe terrestre. Je ne puis reproduire ici ce calcul; mais j'indiquerai, pour le cas d'une figure plane dans son plan, la méthode à employer pour obtenir les équations des courbes C et C' , parce que cette question peut offrir de l'intérêt dans diverses applications.

On peut toujours se représenter le mouvement de la figure plane considérée en imaginant qu'un quelconque de ses points décrive une trajectoire

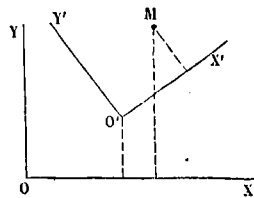


Fig. 5

déterminée, pendant que la figure entière tourne autour de ce point. Soit O' (fig. 5) le point dont il s'agit et que nous appellerons le *point principal*; rapportons la figure mobile à deux axes rectangu-

tares OX et OY tracés dans le plan fixe, et à deux axes rectangulaires O'X' et O'Y' liés à la figure mobile et qui se transportent avec elle. Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la figure mobile par rapport aux axes fixes, x' et y' les coordonnées du même point par rapport aux axes mobiles, et ξ et η les coordonnées de l'origine mobile O' par rapport aux axes fixes. Soit α l'angle de O'X' avec OX ; on aura entre ces quantités les relations :

$$\begin{aligned} x &= \xi + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= \eta + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{aligned} \quad [1]$$

dans lesquelles ξ , η et α sont supposées être des fonctions données du temps t .

Différentions ces équations par rapport au temps, en remarquant que x' et y' doivent être considérés comme des constantes, et posons

$$\frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = v, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

en appelant u et v les composantes suivant OX et OY de la vitesse V du point O', et ω la vitesse angulaire avec laquelle la figure mobile tourne autour de ce point. Nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u - \omega x' \sin \alpha - \omega y' \cos \alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= v + \omega x' \cos \alpha - \omega y' \sin \alpha. \end{aligned}$$

Si l'on cherche les valeurs de x' et de y' qui annulent ces dérivées, on trouve facilement

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u}{\omega} \sin \alpha - \frac{v}{\omega} \cos \alpha, \\ y' &= \frac{u}{\omega} \cos \alpha + \frac{v}{\omega} \sin \alpha, \end{aligned} \quad [2]$$

et si l'on reporte ces valeurs dans les équations [1], on obtient, après réductions,

$$x = \xi - \frac{v}{\omega} \quad \text{et} \quad y = \eta + \frac{u}{\omega}. \quad [3]$$

Les expressions [2] sont les coordonnées du centre instantané de rotation par rapport aux axes mobiles, c'est-à-dire par rapport à la figure en mouvement ; et les expressions [3] sont les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes.

On tire des équations [3]

$$x - \xi = -\frac{v}{\omega} \quad \text{et} \quad y - \eta = \frac{u}{\omega};$$

d'où
$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{v^2 + u^2}{\omega^2} = \frac{V^2}{\omega^2}.$$

Cette relation montre que le centre instantané de rotation est à une distance du point principal égale au quotient $\frac{V}{\omega}$ de la vitesse du point principal sur sa trajectoire par la vitesse angulaire du système autour de ce point.

Les relations [3] donnent aussi

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = -\frac{u}{v};$$

ce qui montre que la droite qui va du point principal au centre instantané de rotation est perpendiculaire à la direction de la vitesse du point principal, c'est-à-dire normale à la trajectoire de ce point. Quant au sens dans lequel il faut porter la distance $\frac{V}{\omega}$ sur la normale à cette trajectoire, à partir du point O', il n'y aura jamais d'ambiguïté, puisque les formules [3] ne donnent pour x et y qu'une valeur. Mais on peut remarquer que les vi-

teses de rotation des points de la normale situés d'un côté de la trajectoire, sont de même sens que la vitesse V, tandis que les vitesses de rotation des points de la normale situés de l'autre côté de la trajectoire sont nécessairement de sens contraire à V. C'est de ce dernier côté que devra être le centre instantané de rotation ; car, pour qu'il demeure instantanément immobile, il faut que sa vitesse de rotation soit égale et contraire à sa vitesse de translation, laquelle lui est commune avec le point principal O'.

Pour avoir la vitesse angulaire de rotation de la figure mobile autour du centre instantané, il faut diviser la vitesse absolue d'un point quelconque de cette figure par la distance de ce point au centre instantané ; par exemple, la vitesse V du point principal par sa distance $\frac{V}{\omega}$ au centre instantané, ce qui donne ω : c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la figure autour du centre instantané est la même qu'autour du point principal.

Pour obtenir l'équation de la courbe C, lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe, il faut éliminer le temps t entre les deux relations [3] ; et pour obtenir l'équation de la courbe C', lieu de ces mêmes centres sur la figure mobile, il faut éliminer le temps t entre les deux relations [2]. Sans faire ces éliminations, on vérifie aisément par l'analyse que les deux courbes passent par le centre instantané, qu'elles sont tangentes en ce point, et que l'élément de la courbe C compris entre deux positions consécutives du centre instantané sur le plan fixe est égal à l'élément de la courbe C' compris entre les deux positions correspondantes de ce même centre sur la figure mobile ; d'où il résulte que la courbe C' roule sans glissement sur la courbe C.

J'ai donné dans mon mémoire un grand nombre d'applications de cette théorie. Je me bornerai ici aux deux suivantes :

1. Une droite de longueur constante O'A = m (fig. 6).

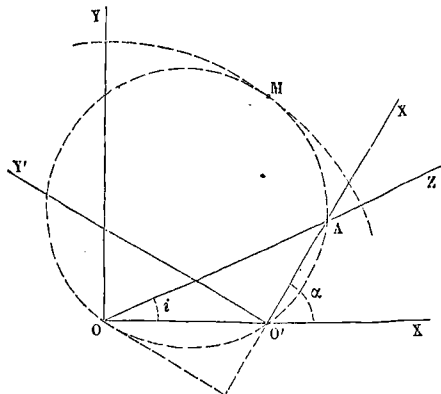


Fig. 6.

se meut en appuyant ses extrémités sur les côtés OX. et OZ d'un angle constant ZO'X = i, et en tournant uniformément autour de l'extrémité O' : trouver les courbes C et C' dont le roulement reproduira le mouvement de la droite O'A. — Prenons le sommet O de l'angle donné pour origine des axes fixes,

et le point O' pour origine des axes mobiles; soit OO' l'axe des x , et $O'A$ l'axe des x' . Nous aurons

$$\xi = \frac{m \sin(\alpha - i)}{\sin i}, \quad \eta = 0, \quad \alpha = \omega t,$$

ω étant ici une constante. On tire de ces relations

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{m \cos(\alpha - i)}{\sin i}; \quad v = \frac{d\eta}{dt} = 0;$$

par suite, en vertu des équations [3],

$$x = \frac{m \sin(\alpha - i)}{\sin i} - 0; \quad y = 0 + \frac{m \cos(\alpha - i)}{\sin i};$$

d'où, en éliminant $\alpha - i$,

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2}{\sin^2 i},$$

équation d'un cercle dont le centre est au sommet O de l'angle fixe, et qui a pour rayon $\frac{m}{\sin i}$.

En vertu des équations [2], on aura ensuite

$$x' = \frac{m \cos(\alpha - i)}{\sin i} \sin \alpha - 0;$$

$$y' = \frac{m \cos(\alpha - i)}{\sin i} \cos \alpha - 0;$$

d'où

$$\text{tang } \alpha = \frac{x'}{y'},$$

par suite

$$\sin \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

et

$$\cos(\alpha - i) = \frac{y' \cos i + x' \sin i}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Or on a

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{m \cos(\alpha - i)}{\sin i} = \frac{y' \cos i + x' \sin i}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \cdot \frac{m}{\sin i},$$

ce qui revient à

$$x^2 + y'^2 - \frac{m}{\sin i} (y' \cos i + x' \sin i) = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon est $\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sin i}$. Il

passé par le point O' , car son équation est satisfaite par $x' = 0$ et $y' = 0$; il passe par le point A , car son équation est satisfaite par $y' = 0$ et $x' = m$; enfin, il passe par le sommet O de l'angle fixe, car les coordonnées de ce sommet, par rapport aux axes mobiles, sont

$$x' = - \frac{m \sin(\alpha - i) \cos \alpha}{\sin i}$$

et

$$y' = + \frac{m \sin(\alpha - i) \sin \alpha}{\sin i},$$

et ces coordonnées satisfont à l'équation du cercle. Le mouvement de la droite $O'A$ peut donc être considéré comme produit par un cercle qui roule sans glissement dans un cercle de rayon double.

On peut remarquer que la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile est le lieu du troisième sommet M d'un triangle dont les deux autres sommets, O' et A , décrivent respectivement les droites OX et OZ ; et l'on sait que ce lieu est une ellipse qui a pour centre le point O . Si, dans le triangle $O'AM$, l'angle en M est égal à i , le point M est sur le cercle mobile, et l'ellipse décrite se change en une ligne droite passant par le point O . On retombe ainsi sur une propriété géométrique démontrée par Lahire et qui fournit un mode de transformation du mouvement circulaire continu en

rectiligne alternatif. (Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS, ENGRENAGE DE LAHIRE.)

2. Le point principal décrit une droite d'un mouvement uniformément accéléré, et la figure tourne uniformément autour de ce point; trouver les courbes C et C' , l'une fixe et l'autre mobile, dont le roulement reproduirait le mouvement de la figure considérée. — Prenons pour axe fixe des x la droite OX (fig. 7) que décrit le point principal O'

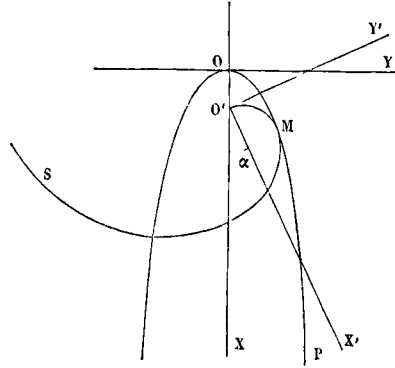


Fig. 7.

et pour origine fixe la position initiale de ce point principal. Nous aurons

$$\xi = at^2, \quad \eta = 0, \quad \alpha = \omega t,$$

a et ω étant des constantes. De là

$$u = 2at, \quad v = 0;$$

par suite, en vertu des équations [3],

$$x = at^2 - 0, \quad y = 0 + 2at;$$

et, en éliminant t ,

$$y^2 = 4ax.$$

La courbe fixe est donc une parabole OMP qui a pour axe la droite OX , et pour sommet le point O .

Nous aurons ensuite, en vertu des équations [2],

$$x' = \frac{2at}{\omega} \sin \omega t - 0, \quad y' = \frac{2at}{\omega} \cos \omega t.$$

On pourrait éliminer le temps t entre ces équations; mais il est plus simple de recourir aux coordonnées polaires. Soient ρ et θ les coordonnées polaires correspondantes aux coordonnées rectangulaires x' et y' , on aura

$$x' = \rho \cos \theta, \quad y' = \rho \sin \theta.$$

On a d'ailleurs $\omega t = \alpha$, d'où $t = \frac{\alpha}{\omega}$.

Substituant ces valeurs, on obtient

$$\rho \cos \theta = \frac{2a\alpha}{\omega^2} \sin \alpha \quad \text{et} \quad \rho \sin \theta = \frac{2a\alpha}{\omega^2} \cos \alpha;$$

d'où $\rho^2 = \frac{4a^2\alpha^2}{\omega^4}$ ou $\rho = \frac{2a\alpha}{\omega^2}$; α ;

par suite $\cos \theta = \sin \alpha$ et $\sin \theta = \cos \alpha$,

ce qui exige $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Il vient donc enfin

$$\rho = \frac{2a}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right),$$

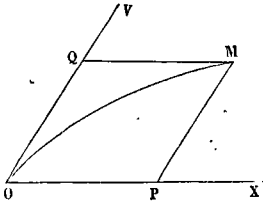
équation d'une spirale d'Archimède $O'MS$ dont l'axe est perpendiculaire à $O'X'$. Pour $t = 0$, on a $\alpha = 0$

et $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où $\rho = 0$; ainsi, l'œil de cette spirale est la position initiale du point O' , c'est-à-dire le

point O. Le mouvement considéré peut donc être produit par une spirale d'Archimède qui roule intérieurement à une parabole. Pour $a = \frac{1}{2}g$, ce roulement reproduirait le mouvement d'un corps pesant tombant librement dans le vide en tournant uniformément autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure. La parabole fixe aurait pour équation $y^2 = 2gx$, et la spirale $\rho = \frac{g}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$. On reproduirait toutes les circonstances du mouvement vertical des graves en faisant rouler dans la parabole les deux spirales conjuguées $\rho = \pm \frac{g}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$, dont l'une répondrait au mouvement ascendant et l'autre au mouvement descendant.

(Voy. la *Théorie de la rotation des corps*, par M. Poinsot; le *Mémoire* de M. Chasles, inséré dans le *Bulletin de Férussac*, en 1831, tome XIV; la *Mécanique* d'Euler.)

MOUVEMENT PARABOLIQUE, mouvement d'un point matériel suivant une parabole. On donne particulièrement ce nom au mouvement produit par une force constante qui agit dans une direction différente de celle de la vitesse initiale du mobile. Soit OV la direction de la vitesse initiale; et OF



celle de la force constante. Si cette force n'existait pas, le mobile, animé d'une vitesse initiale v_0 dans le sens OV, parcourrait cette droite d'un mouvement uniforme (*Voy. INERTIE*); et au bout du temps t il aurait parcouru un espace OQ donné par la relation

$$OQ = v_0 t. \quad [1]$$

Si, au contraire, le mobile était soumis, sans vitesse initiale, à l'action de la force constante F, il parcourrait la droite OF d'un mouvement uniformément accéléré; et au bout du temps t , il aurait parcouru un espace OP donné par la relation

$$OP = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2, \quad [2]$$

en désignant par m la masse du mobile (*Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ*). En réalité, ces deux effets ont lieu simultanément, en vertu du principe de l'indépendance des forces et des mouvements acquis (*Voy. FORCE CONSTANTE*), et les choses se passent comme si, pendant que le mobile parcourt la droite OF d'un mouvement uniformément accéléré, cette droite se transportait parallèlement à elle-même d'un mouvement uniforme, le point O décrivant la droite OV. Par conséquent, au bout du temps t , le mobile ne sera ni au point Q ni au point P; il sera au sommet M du parallélogramme construit sur OP et OQ, en sorte qu'en nommant

y et x les coordonnées du point M parallèles à OV et à OF, on aura

$$y = v_0 t \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2. \quad [3]$$

A chaque valeur de t correspondront pour y et pour x des valeurs qui seront les coordonnées de la position du mobile au bout de ce temps. Pour avoir l'équation de la trajectoire, il suffira donc d'éliminer le temps t entre les relations [3], ce qui donne

$$x = \frac{1}{2m} \frac{y^2}{v_0^2}, \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{2mv_0^2}{F} x, \quad [4]$$

équation d'une parabole rapportée à une tangente et au diamètre qui passe par le point de contact. La trajectoire est donc une parabole tangente à la direction OV de la vitesse initiale, et dont les diamètres ont une direction parallèle à celle de la force constante F.

La réciproque n'est pas nécessairement vraie; un mobile peut parcourir une parabole sans être soumis à l'action d'une force constante.

Le mouvement des projectiles dans le vide offre un exemple remarquable du mouvement parabolique (*Voy. BALISTIQUE*).

MOUVEMENT PERMANENT, mouvement particulier des fluides défini par cette condition qu'en un point donné quelconque du courant passent incessamment des molécules fluides identiques et animées de vitesses égales en grandeur et en direction; en sorte qu'à un instant quelconque le courant présente toujours les mêmes phénomènes, et que toute portion de ce courant comprise entre deux sections transversales déterminées constitue sans cesse un système identique, bien que composé de molécules différentes.

Il résulte d'abord de cette définition que la masse fluide qui traverse dans un temps donné une section transversale déterminée reste constante pendant toute la durée du mouvement; car tous les points de cette section sont constamment traversés par des molécules identiques et animées des mêmes vitesses.

Il en résulte en outre que cette masse est la même pour deux sections quelconques; car si la masse qui passe par la section d'aval était plus grande que celle qui passe par la section d'amont, la partie du canal comprise entre ces deux sections finirait par se vider entièrement. Si au contraire la masse qui passe par la section d'amont était plus grande que celle qui passe par la section d'aval, cette portion du canal se remplirait d'une masse indéfinie de fluide, ce qui est également incompatible avec la notion de mouvement permanent.

Ainsi la masse fluide qui traverse dans un temps donné, dans l'unité de temps par exemple, une section transversale quelconque, est partout la même et demeure constante pendant toute la durée du mouvement.

Si le fluide est incompressible, à cette masse constante correspond un volume constant, et l'on peut dire que le volume de liquide qui passe dans l'unité de temps par une section transversale quelconque est constant pour une même section et le même pour toutes les sections. Ce volume est ce que l'on appelle la *dépense*.

On donne aussi le nom de *dépense* au volume qui s'écoule par une section transversale quelconque d'un courant permanent gazeux; mais il faut alors

que ce volume soit rapporté à une température et à une pression déterminées.

MOUVEMENT PERPÉTUEL, problème chimérique, dans lequel on se propose de disposer une machine qui, une fois mise en mouvement, non-seulement continue à se mouvoir sans le secours d'aucun moteur, mais produise même un travail utile, comme par exemple d'élever de l'eau à une certaine hauteur.

Les principes généraux montrent aisément l'absurdité de ce problème. Toute machine en mouvement repose sur des appuis qui exercent sur elle un frottement, dont le travail est toujours négatif. En supposant donc que la machine n'eût aucun travail utile à produire, on n'en aurait pas moins, d'après le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot),

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mathcal{E}_f,$$

le dernier terme désignant le travail des frottements. On peut mettre cette équation sous la forme

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 - \mathcal{E}_f.$$

Comme le terme \mathcal{E}_f croît toujours en valeur absolue avec le temps, il finirait inévitablement par devenir égal au terme constant $\Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$. A ce moment le second membre de l'équation serait nul, et l'on aurait par conséquent

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m'v'^2 + \frac{1}{2} m''v''^2 + \dots = 0.$$

Or, pour qu'une somme de quantités essentiellement positives devienne nulle, il faut que chacune d'elles devienne nulle séparément, ce qui exige qu'on ait à la fois

$$v = 0, v' = 0, v'' = 0, \dots,$$

c'est-à-dire que tous les points de la machine seraient réduits au repos, ou, en d'autres termes, que la machine finirait par s'arrêter.

Malgré l'évidence de ce résultat, beaucoup d'ouvriers intelligents, mais peu instruits, ou mal instruits, ce qui est pire, sacrifient encore à la recherche d'une chimère leur temps, leur argent, et souvent même leur santé.

L'étude exclusive de la Statique a souvent conduit dans cette fausse voie.

MOUVEMENT PROPRE (d'un astre), mouvement dont il paraît animé sur la sphère céleste, indépendamment du mouvement diurne de cette sphère auquel il participe. Le mouvement propre d'un astre se manifeste par le changement de ses coordonnées uranographiques, et particulièrement par la variation de son ascension droite et de sa déclinaison. (Voy. ÉCLIPTIQUE, ORBITE APPARENTE DU SOLEIL, LUNE, PLANÈTES, COMÈTES.)

MOUVEMENT RELATIF, mouvement rapporté à un système qui est lui-même mobile. Si, par exemple, on considère le mouvement d'un point matériel à la surface de la Terre, et qu'on le rapporte à des axes tracés dans l'intérieur du globe terrestre et conservant par rapport à la Terre une position fixe, le mouvement observé sera un mouvement relatif, puisque le globe terrestre est mobile. Le mouvement du système mobile est ce qu'on appelle

alors le *mouvement d'entraînement*; et c'est de la combinaison du mouvement d'entraînement avec le mouvement relatif que résulte le *mouvement absolu* qui a réellement lieu dans l'espace (Voy. COMPOSITION DES VITESSES).

Si deux corps A et B sont en mouvement, on peut toujours, pour apprécier leur mouvement relatif, réduire le second à l'état de repos; il suffit pour cela de donner à tout le système un mouvement commun égal et contraire à celui du corps B; ce mouvement commun n'altère pas le mouvement relatif; celui-ci s'obtient, par conséquent, en composant le mouvement du corps A avec un mouvement égal et contraire à celui de B. Or, le mouvement instantané d'un corps se réduit toujours à une translation et à une rotation; pour obtenir le mouvement relatif on a donc, dans le cas le plus général, à composer deux translations et deux rotations (Voy. COMPOSITION DES TRANSLATIONS, COMPOSITION DES ROTATIONS).

Lorsqu'on veut traiter le mouvement relatif comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, il est nécessaire d'introduire dans le calcul des forces fictives ou *apparentes* (Voy. THEOREME DE CORIOLIS).

MOUVEMENT UNIFORME, mouvement dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir (Voy. ESPACE, TEMPS). Dans ce genre de mouvement, on nomme *vitesse* l'espace parcouru dans l'unité de temps, qui est ordinairement la seconde sexagésimale. Si l'on nomme e l'espace parcouru dans le temps t , et v la vitesse, on a donc par définition

$$e : v = t : 1, \text{ d'où } e = vt, \quad [1]$$

c'est-à-dire que, dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru est le produit de la vitesse par le temps. On tire de la relation [1] les relations

$$[2] \quad v = \frac{e}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{e}{v} \quad [3]$$

la première montre que, dans le mouvement dont il s'agit, la vitesse s'obtient en divisant l'espace par le temps; et il résulte de la seconde que pour avoir la durée du mouvement il faut diviser l'espace par la vitesse.

Pour l'homogénéité de ces formules, on voit que le temps doit être considéré comme un nombre abstrait.

Si, par exemple, un mobile a parcouru d'un mouvement uniforme un espace de 1000^m en 250 secondes, sa vitesse, en vertu de la relation [2], est le quotient de 1000^m par le nombre abstrait 250; c'est-à-dire que la vitesse cherchée est de 4^m, ou que le mobile a parcouru 4^m par seconde.

Nous avons supposé implicitement que les espaces étaient comptés à partir de la position initiale du mobile. On peut avoir intérêt à choisir pour les espaces une origine différente; de telle sorte qu'à l'instant initial le mobile ne soit pas à l'origine, mais bien à une distance de cette origine que nous représenterons par e_0 . Dans ce cas, e étant la distance du mobile à l'origine, au bout du temps t , comptée sur sa trajectoire, l'espace parcouru dans le temps t n'est plus e , mais bien $e - e_0$; et, par la définition du mouvement uniforme, on a, en appelant toujours v la vitesse,

$$e - e_0 : v = t : 1, \text{ d'où } e = e_0 + vt. \quad [4]$$

Cette équation, dans laquelle e , e_0 et v doivent être

considérés comme des quantités algébriques, c'est-à-dire susceptibles du signe + ou du signe - suivant le sens dans lequel elles sont comptées, est l'équation générale du mouvement uniforme sur une ligne donnée, dont e désigne l'arc compté à partir d'une origine fixe prise sur cette ligne.

Cette équation renferme deux constantes e_0 et v , et deux variables e et t . Pour déterminer les deux constantes, il suffit d'observer deux positions du mobile correspondantes à deux instants déterminés; en appliquant l'équation [4] à ces deux instants, on obtient deux relations pour déterminer e_0 et v . Supposons, par exemple, que 2 secondes après l'instant initial on ait trouvé pour la distance du mobile à l'origine des espaces $1^m, 40$, du côté adopté pour le sens positif; et que 5 secondes après l'instant initial on ait trouvé par la distance du mobile à l'origine $0^m, 80$, du même côté de cette origine; en appliquant l'équation [4] à ces deux observations, on aura les deux relations

$1^m, 40 = e_0 + 2v$ et $0^m, 80 = e_0 + 5v$,
d'où l'on tire aisément $e_0 = 1^m, 80$ et $v = -0^m, 20$; c'est-à-dire qu'à l'instant initial le mobile était à $1^m, 80$ de l'origine, du côté des e positifs, et qu'il se dirigeait vers les e négatifs avec une vitesse de $0^m, 20$ en valeur absolue.

Pour avoir l'instant où le mobile a passé à l'origine des espaces, il faut faire $e = 0$ dans l'équation [4], et en tirer la valeur de t , qui est

$$t = -\frac{e_0}{v}$$

Dans l'exemple traité ci-dessus on aurait donc

$$t = -\frac{1^m, 80}{-0^m, 20} \text{ ou } t = +9,$$

c'est-à-dire que c'est 9 secondes après l'instant initial que le mobile a passé à l'origine des espaces.

Le mouvement uniforme est celui qui possède un point matériel qui n'est soumis à aucune force (Voy. INERTIE, FORCE).

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ, mouvement VARIÉ (Voy. ce mot) dans lequel la vitesse croît ou décroît de quantités proportionnelles aux temps. Si v_0 désigne la vitesse à l'instant initial, v la vitesse au bout du temps t , et j une constante, positive ou négative, on aura donc par définition

$$v = v_0 + jt, \quad [1]$$

le signe + indiquant une addition algébrique. Si l'on fait croître t d'une unité, v varie de la quantité j ; cette constante est donc la quantité dont la vitesse varie dans l'unité de temps; on lui donne le nom d'ACCÉLÉRATION. C'est une quantité algébrique susceptible d'être positive ou négative, et dont la valeur absolue est de même espèce que la VITESSE (Voy. ce mot), c'est-à-dire une longueur, un nombre de mètres.

Si la vitesse initiale et l'accélération sont de même signe, la valeur absolue de la vitesse v va sans cesse en augmentant avec le temps, et le mouvement est dit *uniformément accéléré*. Si la vitesse initiale et l'accélération sont de signes contraires, la valeur absolue de la vitesse commence toujours par décroître, et le mouvement est dit *uniformément retardé*. Mais si le mouvement se prolonge suffisamment, il finit toujours par devenir accéléré. Pour le faire comprendre, supposons que v_0 soit positif et j négatif; et écrivons, en mettant les signes en évidence.

$$v = v_0 - jt.$$

Le terme jt croissant indéfiniment avec le temps, finira par atteindre la valeur v_0 ; et à cet instant la vitesse v , qui aura été en décroissant jusque-là, sera devenue nulle. Mais si le mouvement se prolonge, le terme jt l'emportant sur v_0 , la vitesse v change de signe, et sa valeur absolue augmente indéfiniment. Le mouvement change donc de sens au bout du temps marqué par la relation

$$jt = v_0, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_0}{j},$$

et il devient uniformément accéléré d'uniformément retardé qu'il était.

De l'équation [1] qui donne la loi de la vitesse, on peut déduire la relation qui donne la loi des espaces. Il faut se rappeler en effet que la vitesse est la dérivée de l'espace considérée comme fonction du temps (Voy. MOUVEMENT VARIÉ); l'espace est donc la fonction du temps dont le second membre de [1] est la dérivée. Sous une autre forme on peut dire que v ayant pour valeur le coefficient différentiel $\frac{de}{dt}$,

on a

$$\frac{de}{dt} = v_0 + jt.$$

Multipliant par dt et intégrant, on trouve

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 + \text{const.}$$

La constante introduite par l'intégration est la valeur de e répondant à $t = 0$; en la désignant par e_0 , on peut donc écrire

$$e = e_0 + vt + \frac{1}{2} jt^2. \quad [2]$$

Les équations [1] et [2] sont ce que l'on appelle les *équations du mouvement uniformément varié*. Comme on a déduit l'équation [2] de l'équation [1], on pourrait aussi déduire l'équation [1] de l'équation [2]; il suffirait pour cela de différentier l'équation [2] par rapport au temps, et de prendre ainsi la dérivée de e par rapport à t .

L'équation [2] renfermant trois constantes, on voit que trois observations du mobile suffiront pour les déterminer. Si, par exemple, aux trois valeurs

$$t = 6, \quad t = 7, \quad t = 8$$

correspondent les valeurs

$$e = 4^m, \quad e = 11^m, \quad e = 20^m,$$

on aura les trois relations :

$$4 = e_0 + 6v_0 + \frac{1}{2} j \cdot 36,$$

$$11 = e_0 + 7v_0 + \frac{1}{2} j \cdot 49,$$

$$20 = e_0 + 8v_0 + \frac{1}{2} j \cdot 64,$$

d'où l'on tire

$$e_0 = 4^m, \quad v_0 = -6^m, \quad j = 2^m.$$

Par suite, l'équation qui donne l'espace est

$$e = 4^m - 6^m \cdot t + 1^m \cdot t^2, \quad [3]$$

et celle qui donne la vitesse est

$$v = -6^m + 2^m \cdot t. \quad [4]$$

La discussion de cette équation, ou la construction de la COURBE DES ESPACES (Voy. ce mot), montrent que le mouvement est d'abord rétrograde et uniformément retardé. Au bout du temps $t = 3$, la vitesse devient nulle; le mobile est alors à 5^m de l'origine des espaces, du côté négatif. A partir de cet instant, le mouvement devient direct, et la vitesse va sans cesse en augmentant. Le mobile passe deux fois à

l'origine des espaces, la première au bout du temps $t = 3 - \sqrt{5}$, pendant la période rétrograde, la seconde au bout du temps $t = 3 + \sqrt{5}$, pendant la période directe.

Dans le mouvement uniformément varié, la VITESSE MOYENNE (*Voy. ce mot*) entre deux instants quelconques est précisément la moyenne arithmétique des vitesses correspondantes à ces deux instants. Soient, en effet, e et e' les espaces parcourus au bout du temps t et t' , on aura

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$$

et
$$e' = e_0 + v_0 t' + \frac{1}{2} j t'^2.$$

L'espace parcouru entre les instants répondant à t et t' est la différence $e' - e$ ou

$$v_0 (t' - t) + \frac{1}{2} j (t'^2 - t^2).$$

Pour avoir la vitesse moyenne, il faut diviser cet espace $e' - e$ par le temps $t' - t$ employé à le parcourir, ce qui donne

$$v_0 + \frac{1}{2} j (t' + t).$$

Mais on a aussi, en appelant v et v' les vitesses aux instants t et t' ,

$$v = v_0 + j t$$

$$v' = v_0 + j t'.$$

La moyenne arithmétique de ces vitesses est

$$\frac{1}{2} (v + v'), \quad \text{ou} \quad v_0 + \frac{1}{2} j (t + t'),$$

même résultat que ci-dessus; ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque l'on prend pour origine des espaces la position initiale du mobile, on a $e_0 = 0$ et l'équation [2] se réduit à

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2. \quad [5]$$

Lorsque la vitesse initiale est nulle en même temps, les équations [1] et [2] se simplifient et se réduisent à

$$v = j t \quad [6]$$

et
$$e = \frac{1}{2} j t^2. \quad [7]$$

La première exprime que *les vitesses sont proportionnelles aux temps*; la seconde que *les espaces sont proportionnels aux carrés des temps*.

Si dans l'équation [7] on fait $t = 1$, on en déduit

$$e_1 = \frac{1}{2} j \quad \text{ou} \quad j = 2e_1,$$

c'est-à-dire que, lorsque la vitesse initiale est nulle et que l'origine des espaces est la position initiale du mobile, *l'accélération est le double de l'espace parcouru dans la première seconde*. Cette propriété subsisterait encore en prenant pour les espaces une origine quelconque pourvu qu'on eût $v_0 = 0$; car on aurait alors

$$e = e_0 + \frac{1}{2} j t^2,$$

et, en faisant $t = 1$,

$$e = e_0 + \frac{1}{2} j;$$

d'où
$$j = 2(e - e_0);$$

or $e - e_0$ est alors l'espace parcouru dans la première unité de temps.

Quand le mouvement est uniformément retardé il est facile de calculer l'abscisse du mobile corres-

pondante à l'instant où le mouvement change de sens et devient uniformément accéléré. Prenons, en effet, pour origine des espaces la position initiale du mobile; les équations du mouvement seront

$$v = v_0 - j t \quad [8]$$

et
$$e = v_0 t - \frac{1}{2} j t^2. \quad [9]$$

A l'instant que l'on a en vue, la vitesse v est nulle;

on a donc $v_0 = j t$ d'où $t = \frac{v_0}{j}$. Substituant pour t cette valeur dans l'expression de l'espace, on obtient, après réductions,

$$e = \frac{v_0^2}{2j}. \quad [10]$$

Le mouvement vertical des corps pesants dans le vide offre un exemple remarquable de mouvement uniformément varié (*Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES.*)

Le mouvement rectiligne et uniformément varié est celui que prend un mobile sous l'action d'une FORCE CONSTANTE (*Voy. ce mot*). D'un autre côté on démontre (*Voy. MESURE DES FORCES*) que l'accélération due à une force constante a pour expression le quotient de cette force par la masse du mobile; en sorte qu'en nommant F cette force et m cette masse, on a

$$j = \frac{F}{m}.$$

Si l'on remplace j par cette valeur dans les équations [1] et [2] qui définissent le mouvement uniformément varié, ces équations deviennent

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t, \quad [11]$$

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} t^2, \quad [12]$$

la force F devant être prise avec le signe + quand elle est de même sens que la vitesse initiale, et avec le signe - quand elle est de sens contraire. Quand on prend pour origine des espaces la position initiale du mobile, on a $e_0 = 0$ et l'équation [12] se réduit à

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} t^2; \quad [13]$$

c'est sous cette forme qu'elle est le plus fréquemment employée.

MOUVEMENT VARIÉ, mouvement qui n'est ni uniforme, ni composé de mouvements uniformes successifs. Dans un pareil mouvement on peut toujours considérer l'abscisse e du mobile, comptée sur sa trajectoire à partir d'une origine fixe, comme une fonction du temps t , compté à partir d'un instant initial arbitraire. Si l'on donne au temps t un accroissement quelconque θ , l'espace e prendra un accroissement correspondant ε , qui pourra être positif ou négatif; et le quotient $\frac{\varepsilon}{\theta}$ sera la VITESSE

MOYENNE (*Voy. ce mot*) du mobile pendant le temps considéré θ . Si l'on fait tendre θ vers zéro, ε tendra aussi vers zéro mais le rapport $\frac{\varepsilon}{\theta}$ tendra vers

une limite déterminée qui sera la vitesse moyenne du mobile pendant le temps infiniment court qui succède au temps t ; c'est cette vitesse moyenne pendant un temps infiniment petit après le temps t que l'on appelle la *vitesse du mobile au bout du temps t*. D'après la manière dont elle a été obtenue,

on voit que ce n'est autre chose que la dérivée de l'espace considéré comme une fonction du temps. Si donc on a en général

$$e = f(t),$$

f représentant une fonction quelconque, on aura, en désignant par v la vitesse au bout du temps t ,

$$v = f'(t).$$

Par exemple, de

$$e = a + bt + ct^2$$

on tire

$$v = b + 2ct,$$

c'est-à-dire que si l'espace est une fonction du second degré du temps, la vitesse au bout du temps t est une fonction du premier degré; elle varie donc de quantités proportionnelles au temps. Ce genre de mouvement est connu sous le nom de MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ (Voy. ce mot).

De même, si l'on a

$$e = a \cos mt, \quad [1]$$

on en déduira

$$v = -am \sin mt. \quad [2]$$

En discutant ces formules, on reconnaît qu'à l'instant initial, ou pour $t = 0$, le mobile est en A,



à une distance de l'origine O égale à a , et sa vitesse à cet instant est nulle. Le temps augmentant, l'abscisse e diminue, et le mobile se rapproche du point O; sa vitesse est négative et va en croissant. Au bout du temps exprimé par

$$t = \frac{\pi}{2m},$$

on a

$$e = 0;$$

le mobile est alors à l'origine, et sa vitesse est $-am$. Le temps continuant à croître, e devient négatif; le mobile passe à gauche de l'origine; sa vitesse est encore négative, mais elle décroît en valeur absolue. Au bout du temps, exprimé par

$$t = \frac{\pi}{m},$$

on a

$$e = -a;$$

et le mobile se trouve à gauche du point O, à une distance OA' de ce point égale à a ; sa vitesse à cet instant est nulle. Le temps croissant toujours, e reste d'abord négatif, mais diminue en valeur absolue, c'est-à-dire que le mobile se rapproche du point O; sa vitesse a est devenue positive et augmente en valeur absolue. Au bout du temps exprimé par

$$t = \frac{3\pi}{2m},$$

on a de nouveau $e = 0$, le mobile est au point O; et sa vitesse est $+am$.

Le temps croissant encore, e redevient positif; le mobile passe à droite du point O; sa vitesse reste positive, mais décroît en valeur absolue. Enfin, au bout du temps marqué par

$$t = \frac{2\pi}{m},$$

on a de nouveau $e = a$, c'est-à-dire que le mobile est revenu en A, et sa vitesse est redevenue nulle. A partir de cet instant, e et v repassent par les mêmes valeurs; et le mouvement est un mouvement indéfini de va-et-vient entre les points A et

A'. La vitesse est nulle en ces points; elle est à son maximum au point O.

On a à considérer un mouvement de ce genre dans plusieurs circonstances. Les oscillations d'un poids suspendu à l'extrémité d'un fil vertical élastique sont un mouvement de cette espèce.

La vitesse du mobile au bout du temps t peut être déterminée par des considérations géométriques, en construisant ce qu'on appelle la COURBE DES ESPACES (Voy. ce mot).

Dans un mouvement varié quelconque, la vitesse ne varie pas de quantités égales dans des temps égaux; cette propriété n'appartient qu'au MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ (Voy. ce mot). Dans ce genre de mouvement la quantité dont la vitesse varie pendant l'unité de temps porte le nom d'ACCELERATION. Dans un mouvement varié quelconque, si v et v' sont les vitesses correspondantes à deux instants t et t' , la variation de vitesse est $v' - v$; en la divisant par le temps $t' - t$, on obtient la variation moyenne de la vitesse pendant le temps considéré; c'est l'accélération que devrait avoir un mouvement uniformément varié pour que la vitesse variât de la même quantité totale $v' - v$ dans le même temps $t' - t$; c'est en un mot l'ACCÉLÉRATION MOYENNE qui correspond à ce temps. Au lieu de considérer l'accélération moyenne qui correspond à un temps fini, on peut considérer celle qui correspond à un temps infiniment petit. Soit toujours v la vitesse au bout du temps t ; au bout du temps $t + dt$, elle sera devenue $v + dv$; et l'accélération moyenne correspondante au temps dt sera le quotient $\frac{dv}{dt}$. C'est cette accélération moyenne

que l'on appelle l'ACCÉLÉRATION AU BOUT DU TEMPS t dans un mouvement varié quelconque. On voit que c'est la dérivée de la vitesse, considérée comme une fonction du temps. Ainsi, l'espace e étant représenté par la relation

$$e = f(t),$$

la vitesse v est représentée par

$$v = f'(t),$$

et l'accélération j par

$$j = f''(t),$$

c'est-à-dire par la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.

Si l'espace est donné en fonction du temps, on obtient la vitesse en différentiant une première fois, et l'accélération en différentiant une seconde fois. Si c'est la vitesse qui soit donnée en fonction du temps, en différentiant on aura l'accélération, et en intégrant au contraire on obtiendra la valeur de l'espace. Si c'était l'accélération qui fût donné en fonction du temps, il faudrait intégrer une première fois pour avoir la vitesse, et une seconde fois pour obtenir l'espace. Dans tous les cas d'intégration, la constante se détermine par les conditions initiales auxquelles la vitesse ou l'espace doivent satisfaire. Si, par exemple, l'accélération est exprimée par la relation

$$j = at,$$

on remplacera j par $\frac{dv}{dt}$; puis, multipliant par dt et intégrant, on obtiendra, en nommant v_0 la vitesse initiale

$$v = v_0 + \frac{1}{2} at^2,$$

On remplacera ensuite v par $\frac{de}{dt}$; puis, multipliant par dt et intégrant de nouveau, on obtiendra, en supposant que l'origine des espaces soit la position initiale du mobile,

$$e = v_0 t + \frac{1}{6} at^3.$$

Au contraire, de l'équation [2] donnée plus haut, on tirerait en différenciant par rapport au temps

$$j = -am^2 \cos mt, \quad [3]$$

l'où

$$j = -m^2.e,$$

c'est-à-dire que dans le mouvement oscillatoire dont il s'agit, l'accélération est proportionnelle à l'abscisse du mobile, mais constamment de signe contraire. L'accélération peut être déterminée par des considérations géométriques en construisant la courbe qu'on appelle COURBE DES VITESSES (Voy. ce mot).

MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES, ou mouvement vertical des corps pesants dans le vide. On démontre expérimentalement à l'aide de la MACHINE D'ATWOOD ou de l'APPAREIL à indications continues DE M. MORIN (Voy. ces mots) que le mouvement vertical des corps pesants dans l'air est un mouvement uniformément varié, sauf une légère différence qui peut être attribuée à la résistance de l'air; et l'on admet que, dans le vide, la loi du mouvement serait rigoureusement celle du mouvement uniformément varié. Cette hypothèse revient d'ailleurs à admettre que, dans les limites de l'expérience, la pesanteur peut être considérée comme une force constante, car on démontre qu'une force constante, agissant sur un mobile dans le sens de sa vitesse initiale ou en sens contraire, lui imprime un MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ, et réciproquement (Voy. ce mot. Voyez aussi FORCE CONSTANTE). L'accélération due à la pesanteur pourrait être évaluée approximativement avec les deux appareils que nous venons de nommer; mais elle a été déterminée avec beaucoup plus de précision à l'aide des oscillations du PENDULE (Voy. ce mot); et elle a été trouvée de 9^m,8088 à la latitude de Paris. On la représente habituellement par la lettre g , initiale du mot *gravité*. Cela posé, il y a deux cas à distinguer dans le mouvement vertical des graves, le cas où le mobile tombe librement sans vitesse initiale, et celui où il est lancé verticalement de bas en haut avec une certaine vitesse.

I. Dans le premier cas, si v désigne la vitesse acquise par le mobile au bout du temps t , et h la hauteur de laquelle il est tombé dans le même temps, on aura pour les équations du mouvement applicables à ce cas (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ, équations [6] et [7])

$$[1] \quad v = gt \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2}gt^2. \quad [2]$$

On voit que le mouvement est uniformément accéléré, que la vitesse acquise est proportionnelle au temps, et que l'espace parcouru est proportionnelle au carré du temps. C'est en cela que consistent les lois de la chute des corps dans le vide.

Le nombre g est le double de l'espace parcouru dans la première seconde de chute; car si l'on suppose $t = 1$, on a

$$h = \frac{1}{2}g, \quad \text{d'où} \quad g = 2h.$$

Si l'on élimine le temps t entre les équations [1] et [2], on en tire

$$v = \sqrt{2gh}. \quad [3]$$

Cette valeur de v est ce que l'on appelle la vitesse due à la hauteur h ; elle est, comme on voit, proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de chute. Cette quantité joue un rôle important dans la Mécanique appliquée, et l'on a calculé des tables de ses valeurs; nous les donnerons à l'article VITESSE DUE à une hauteur.

Les équations [1], [2] et [3] peuvent servir à résoudre divers problèmes. Nous prendrons pour exemple le suivant, qui est très-connu :

Un observateur laisse tomber une pierre dans un puits, et perçoit le bruit de la chute t secondes après. Sachant que le son parcourt a mètres par seconde, on demande la profondeur du puits.

Soit x la profondeur cherchée. En vertu de l'équation [2] la durée de la chute sera exprimée par

$\sqrt{\frac{2x}{g}}$. Le temps employé par le son à parcourir la distance x comprise entre le fond du puits et l'orifice sera d'ailleurs $\frac{x}{a}$. La somme de ces deux temps doit faire l'intervalle observé t ; on aura donc

$$\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t,$$

équation qui donnera la profondeur cherchée. On peut pour la résoudre commodément poser

$$\sqrt{x} = y, \quad \text{d'où} \quad x = y^2.$$

Il vient alors

$$\frac{y^2}{a} + \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot y = t,$$

d'où l'on tire

$$y = -\sqrt{\frac{a^2}{2g}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2g}} + at,$$

et par suite

$$x = \left[-\sqrt{\frac{a^2}{2g}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2g}} + at \right]^2.$$

Comme on doit avoir

$$\frac{x}{a} < t \quad \text{ou} \quad x < at,$$

on voit qu'il faut prendre le second radical avec le signe +. Pour $a = 340^m$ et $t = 5$ par exemple, on trouvera

$$x = 107^m, 58.$$

II. Dans le cas où le mobile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 , le mouvement est uniformément retardé; l'accélération est la même en valeur absolue, mais elle doit être affectée du signe —. Les équations de ce mouvement sont donc, en prenant pour origine des espaces la position initiale du mobile (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ, équations [8] et [9]),

$$[4] \quad v = v_0 - gt \quad \text{et} \quad h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad [5]$$

Le problème le plus intéressant à résoudre consiste à déterminer la hauteur à laquelle le mobile parviendra avant de retomber. Pour l'obtenir on remarquera que lorsque le mobile est arrivé à la plus grande hauteur, sa vitesse est nulle; on a donc

$$0 = v_0 - gt, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_0}{g}. \quad [6]$$

Mettant pour t cette valeur dans l'expression de h on trouve, toutes réductions faites,

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad [7]$$

Cette hauteur s'appelle la hauteur due à la vitesse v_0 ; elle joue aussi un rôle important dans la Mécanique appliquée.

La table des vitesses dues à des hauteurs données peut servir à trouver les hauteurs dues à des vitesses données.

On peut remarquer que la vitesse v due à la hauteur h , et la hauteur h due à la vitesse v , sont liées par la même relation

$$v^2 = 2gh.$$

Ceci n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale; et qui consiste en ce que la vitesse possédée par le mobile en arrivant à un point déterminé quelconque de sa course est la même, au sens près, dans la descente et dans la montée. Si, en effet, on tire de l'équation [5] la valeur de t , on obtient

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Ces deux valeurs sont les temps employés par le mobile pour arriver à la hauteur h , d'abord en montant, et ensuite en redescendant. Si l'on remplace t par ces valeurs dans l'équation [4] on trouve

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$

valeurs égales, mais de signe contraire; ce qui démontre la propriété énoncée.

Pour $h=0$ on a

$$v = \pm v_0;$$

ainsi le mobile revient au point de départ avec la vitesse qu'il avait en partant; mais cette vitesse a changé de signe. On comprend donc pourquoi la hauteur due à la vitesse initiale v_0 est celle d'où il faudrait que le mobile tombât pour acquérir au bas de sa chute la vitesse v_0 .

III. Une autre propriété du mouvement vertical que nous étudions consiste en ce que le mobile met le même temps pour s'élever du point de départ à une hauteur quelconque h que pour revenir de cette hauteur au point de départ.

En effet, l'équation [5] peut se mettre sous la forme

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{2h}{g} = 0, \quad [9]$$

elle a pour racines les temps t' et t'' employés par le mobile pour s'élever du point de départ à la hauteur h , et pour revenir à la même hauteur dans la descente. Soit T le temps employé par le mobile à revenir au point de départ; on aura évidemment pour le temps employé par ce mobile à descendre de la hauteur h jusqu'au point de départ, la valeur $T - t''$. Or on obtient T en faisant $h=0$ dans l'équation [9], ce qui donne les deux valeurs

$$0 \text{ et } \frac{2v_0}{g}.$$

Donc

$$T = \frac{2v_0}{g}.$$

Mais, en vertu des propriétés des équations du second degré, on a aussi

$$t' + t'' = \frac{2v_0}{g}.$$

Par conséquent

$$t' + t'' = T, \text{ d'où } T - t'' = t',$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Ce qui précède fournit le moyen de résoudre aisément le problème suivant :

Un mobile lancé verticalement de bas en haut dans le vide, revient au point de départ au bout de T secondes; quelle était sa vitesse initiale, et à quelle hauteur s'est-il élevé?

La durée T a pour valeur

$$T = \frac{2v_0}{g},$$

on en tire

$$v_0 = \frac{1}{2}gT.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de la hauteur due à la vitesse v_0 , c'est-à-dire

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

on trouve

$$h = \frac{1}{8}gT^2.$$

Par exemple, pour $T = 6$, on trouvera

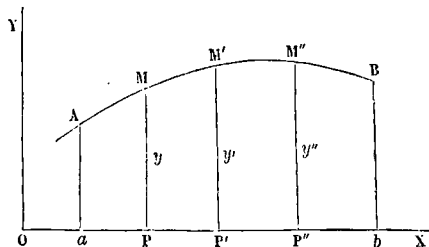
$$v_0 = 29^m, 426 \text{ et } h = 44^m, 139.$$

MOUVEMENT VIRTUEL, mouvement élémentaire qu'on imprime par la pensée à un système matériel (Voy. TRAVAIL VIRTUEL).

MOYEN ÉCART, nom donné par M. Didion, dans les questions de PROBABILITÉ DU TIR (Voy. ce mot), à la racine carrée de la moyenne entre les carrés des écarts. C'est la quantité appelée par les auteurs allemands ERREUR MOYENNE; elle est inversement proportionnelle à ce que les auteurs français appellent mesure de précision, module de convergence.

MOYENNE. On entend ici par ce mot la moyenne d'un très-grand nombre de mesures, en ayant égard à la probabilité de chaque observation.

Si toutes les observations avaient des probabilités égales, leur moyenne serait la moyenne arithmétique, ou le quotient de leur somme par leur nombre. Mais, hors ce cas exceptionnel, il est nécessaire d'avoir égard à la probabilité de chaque valeur obtenue. Concevons qu'une grandeur mesurable x puisse prendre toutes les valeurs possibles, depuis la valeur a jusqu'à la valeur b ; mais que ces valeurs soient inégalement probables. Et soit AMB la courbe



de probabilité (Voy. PROBABILITÉ), ou la courbe qui a pour abscisses les valeurs de la grandeur x , et pour ordonnées les probabilités de ces valeurs; de telle sorte que l'ordonnée MP ou y représente la probabilité de la valeur OP ou x . Dans un très-grand nombre d'observations donnant toutes la mesure de la grandeur cherchée, les valeurs obtenues se répartiront suivant la loi de leur probabilité (Voy.

THÉOREME DE J^o BERNOULLI. Le nombre des valeurs gales à OP ou x pourra donc être représenté par Ky ; le nombre des valeurs égales à OP' ou x' sera représenté par Ky' ; le nombre des valeurs égales à OP'' ou x'' sera représenté par Ky'' , et ainsi de suite. La moyenne des observations sera donc exprimée par

$$\frac{Ky \cdot x + Ky' \cdot x' + Ky'' \cdot x'' + \dots}{Ky + Ky' + Ky'' + \dots},$$

ou, en supprimant le facteur K, par

$$\frac{yx + y'x' + y''x'' + \dots}{y + y' + y'' + \dots} \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma yx}{\Sigma y}.$$

Mais toutes les valeurs de x , depuis a jusqu'à b , étant également possibles (mais non également probables), il faudra, dans cette expression, faire varier x d'une manière continue depuis a jusqu'à b , y variant d'une manière correspondante suivant la loi exprimée par la courbe AMB. Si donc on multiplie les deux termes par dx , et qu'on remplace le signe Σ par le signe d'une intégrale définie entre les limites a et b , on aura, en nommant M la moyenne cherchée,

$$M = \frac{\int_a^b yx \, dx}{\int_a^b y \, dx}.$$

Le dénominateur de cette formule exprime l'aire comprise entre la courbe AMB, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes Aa et Bb (Voy. QUADRATRES). Le numérateur exprime la somme des moments (Voy. MOMENTS) des éléments de cette aire par rapport à l'axe des y , c'est-à-dire par rapport à un plan mené suivant cet axe perpendiculairement au plan de la figure. L'expression de M est donc l'abscisse du CENTRE DE GRAVITÉ (Voy. ce mot) de l'aire considérée.

Si la loi qui lie y à x est connue, on pourra calculer la valeur de M, soit exactement si les intégrations peuvent s'effectuer, soit par approximation dans le cas contraire, soit au moyen de tables calculées à l'avance.

MUID, ancienne mesure de capacité. Elle variait suivant les contrées. Le muid de Paris valait 268 litres pour les liquides, 187^{lit},3 pour le blé, 247^{lit},8 pour le sel. Le muid se divisait en 12 *setiers*. (Voy. POIDS ET MESURES.)

MULL-JENNY (ou suivant quelques-uns MULE-JENNY), métier à filer, antérieur au BANC À BROCHES (Voy. ce mot), mais employé encore dans beaucoup de filatures. Cette machine, inventée en 1775 par Samuel Crompton, n'a été introduite en France que sous le ministère de Chaptal, bien qu'on la trouve décrite dans un brevet de 1792, délivré par le gouvernement français à MM. J. Browne et Pickfort pour l'établissement d'une filature. Elle se compose de deux parties, l'une fixe et l'autre mobile. La partie fixe est formée d'un bâti qui porte les cylindres étireurs [Voy. OPÉRATEURS (étirage)] et les bobines sur lesquelles s'enroulent les *rubans* de matière à filer; ces bobines sont établies sur deux ou trois rangs dans toute la longueur du bâti fixe.

La partie mobile, ou le chariot, occupe la même

longueur que le bâti; il est porté sur rails et peut s'éloigner ou se rapprocher du bâti fixe. Il porte plusieurs rangées de BROCHES parallèles (Voy. BROCHES), en acier poli, placées un peu plus bas que les bobines, inclinées vers la partie fixe du métier, et recevant un mouvement de rotation rapide.

Le fil sortant des bobines fixes se rend sur ces broches pendant que le chariot s'éloigne. A chaque tour, le fil tendu s'échappe par le haut de l'axe incliné de la broche, et il en résulte que le fil se tord pendant toute la durée de ce mouvement du chariot qu'on appelle la *sortie*. En même temps l'étirage continue, parce que le chariot s'éloigne plus vite que les cylindres étireurs ne produisent la mèche. Quand le chariot a achevé sa sortie, les cylindres étireurs s'arrêtent; l'ouvrier qui conduit le chariot agit alors sur une manivelle pour faire tourner un instant les broches en sens contraire, afin de dévider la portion de fil enroulée sur l'axe de la broche, au-dessus de la place que doit occuper le fil renvidé. Il abat sur les fils une baguette qui les empêche d'échapper, et il rend ensuite aux broches leur mouvement primitif, en poussant le chariot vers le bâti fixe pour opérer la *rentrée*, pendant laquelle le fil se renvide entièrement sur les broches. Les cylindres étireurs se remettent à tourner, et le même jeu recommence. Tout le mécanisme est commandé par un appareil moteur placé à côté du bâti fixe, et qu'on appelle *tête de métier*. Quelquefois cet appareil moteur commande à la fois deux métiers, et alors il est placé entre les deux. C'est lui qui fait mouvoir les cylindres étireurs, les bobines fixes, les broches; qui opère la sortie du chariot et qui débraye ensuite les cylindres. On a vu comment s'opère la rentrée; aussitôt que le chariot vient toucher le bâti fixe, les cylindres étireurs embrayent d'eux-mêmes.

Les mull-jennys ont reçu divers perfectionnements, dont le principal consiste à supprimer l'intervention de l'ouvrier fileur, comme dans les métiers de MM. Ferrin et Arnould, et dans les *mull-jennys self-acting* de M. Weild.

(Voy. le tome IX de la *Publication industrielle* de M. Armengaud.)

MURS, ouvrages de maçonnerie qui forment la clôture des édifices et de leurs principales divisions. Il ne sera question ici que des murs en pierre de taille, les seuls qu'il y ait intérêt à considérer dans la COUPE DES PIERRES (Voy. ce mot). On distingue plusieurs espèces de murs : les murs *droits*, les murs *biais*, les murs en *talus*, les murs à la fois *biais* et en *talus*, les murs *rampants*, les murs *circulaires* ou *elliptiques* désignés d'une manière générale par la dénomination de murs *ronds*.

I. MUR DROIT, mur compris entre deux plans verticaux parallèles. L'appareil d'un mur droit se compose de pierres de mêmes dimensions, ayant la forme de parallélépipèdes rectangles; elles sont disposées par couches horizontales ou *assises*, et l'on fait en sorte que les joints d'une assise correspondent au milieu des pierres de l'assise inférieure. S'il y a plusieurs rangées de pierres dans l'épaisseur du mur, on dispose les pierres de chaque rangée de manière que les joints de l'une correspondent au milieu des pierres de l'autre rangée. La figure 1 montre en perspective cette disposition.

MUR BIAIS, mur compris entre deux plans verti-

caux qui ne sont pas parallèles. Il se compose encore d'assises horizontales; mais pour éviter les angles aigus, qui n'offrent pas une résistance suffisante, on donne aux faces horizontales la forme

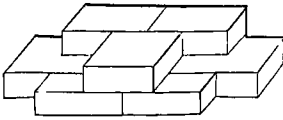


Fig. 1.

indiquée par la figure 2, c'est-à-dire que, AB et HD étant les traces horizontales des murs verticaux, on fait partir les joints perpendiculairement à l'une des faces AB; mais au lieu de les prolonger ainsi

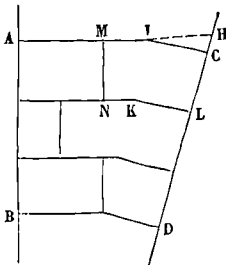


Fig. 2.

jusqu'à la face HD, ce qui donnerait des angles aigus, tels que H, on les brise à une certaine distance, comme on le voit en I, K, pour les terminer perpendiculairement à la face CD. Il en résulte que certaines pierres sont des prismes droits ayant une base irrégulière, telle que MICKLN. Pour tailler une semblable pierre, on inscrit sa base dans un rectangle MOPQ (fig. 3); ayant choisi un parallélé-

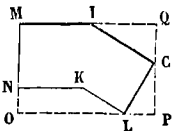


Fig. 3.

pipède de pierre ayant des bases au moins égales à ce rectangle, et une hauteur suffisante, on rend la base inférieure, ou lit de pose, bien plane, et l'on élève suivant MO une face plane verticale, de forme rectangulaire, ayant pour base MO, et pour hauteur celle que la pierre doit avoir; par la base supérieure du rectangle on fait passer un plan parallèle à la base inférieure du parallélépipède; sur les deux bases horizontales ainsi préparées, on trace le panneau MICKLN; puis on fait sauter toute la pierre excédante en s'assurant, à l'aide d'une règle, que les faces élevées suivant MI, IC, CL, LK, KM, sont planes.

MUR EN TALUS, mur compris entre deux plans dont l'un est vertical et l'autre incliné, mais ayant des traces horizontales parallèles. Vu par les faces latérales du mur, l'appareil présente l'aspect d'une série d'assises horizontales; mais le lit de pose des pierres n'est pas partout horizontal: il n'a cette disposition que du côté de la face verticale; à une

certaine distance de la face inclinée, le lit de pose se brise pour devenir normal à cette face, comme l'indique la figure 4, qui est une projection verticale perpendiculaire à la longueur du mur. Le but

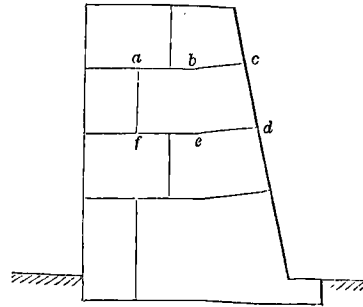


Fig. 4.

de cette disposition est d'éviter les angles aigus. Pour tailler une des pierres de cet appareil, abcdef par exemple, on opérera comme dans le cas précédent, avec cette différence que les faces sur lesquelles devra être appliqué le panneau abcdef ne seront plus horizontales, mais verticales et perpendiculaires à la direction longitudinale du mur.

MUR BIAIS ET EN TALUS, mur compris entre un plan vertical et un plan incliné à l'horizon, dont la trace horizontale n'est pas parallèle à celle de la face verticale. La figure 5 représente cette disposi-

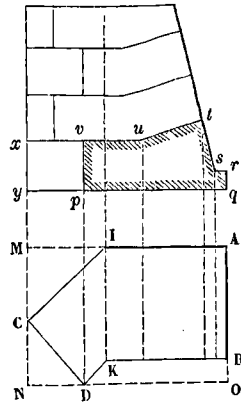


Fig. 5.

tion. Les lignes AB et CD représentent les traces horizontales de la face inclinée et de la face verticale. Le plan vertical de projection a été pris perpendiculaire à AB. Les lits de pose sont en partie horizontaux et en partie inclinés à l'horizon comme dans un mur en talus; la projection horizontale des joints est en partie normale à AB et en partie normale à CD, comme dans un mur biais. Pour tailler une pierre de cet appareil, par exemple celle qui se projette horizontalement suivant ABKDCI, et verticalement suivant pqrstuvxy, on inscrira la projection horizontale dans un rectangle MNOA, et l'on opérera comme si ce rectangle devait être le lit de pose d'une pierre, dont la hauteur sera dé-

terminée par la distance du point t au-dessus de pq ; on tracera sur la face inférieure la projection AICDKB, et l'on élèvera des faces verticales suivant IA, KB; sur ces faces on appliquera le panneau $pqrstuv$, et l'on fera sauter l'excédant de pierre. Le reste de l'opération s'exécutera sans difficulté; la pierre taillée aura la forme indiquée par la figure 6.

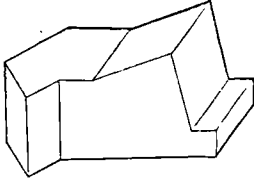


Fig. 6.

MUR RAMPANT, mur qui sert de rampe à un escalier droit ou à un plan incliné. C'est un cas particulier des murs en talus, dans lequel l'inclinaison est plus considérable. La figure 7 montre l'appareil

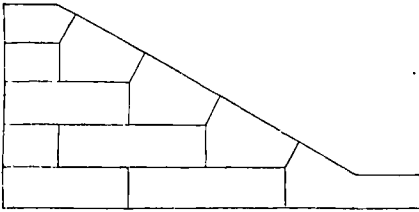


Fig. 7.

d'un mur rampant. La taille des pierres s'exécutera comme pour un mur en talus.

MUR CIRCULAIRE droit, mur compris entre deux surfaces cylindriques à génératrices verticales et à bases circulaires concentriques. La figure 8 repré-

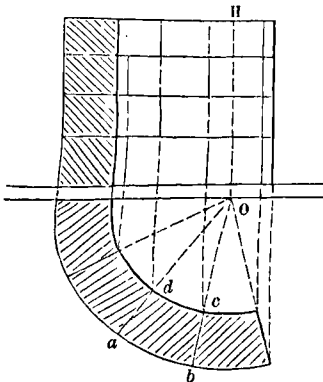


Fig. 8.

sente les projections d'un mur circulaire droit. On suit pour l'appareil d'un mur circulaire les mêmes règles que pour un mur plan, mais les joints doivent être dirigés vers l'axe OH des deux surfaces cylindriques. Pour tailler une des pierres de ce mur, $abcd$ par exemple, on prend un bloc qui soit capable de cette pierre, c'est-à-dire qui puisse la

contenir; ayant donné au bloc la forme d'un parallélépipède rectangle, qui ait pour hauteur la hauteur connue de l'assise, on applique sur ses deux bases le panneau $abcd$ (fig. 9) taillé sur la projection

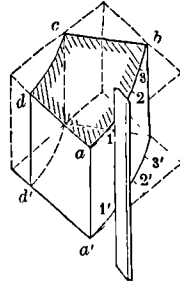


Fig. 9.

horizontale $abcd$ de la figure 8; on conduit suivant ad et $a'd'$ une face perpendiculaire aux deux bases; on en conduit une autre suivant bc et $b'c'$. Il reste à faire passer une surface cylindrique par les arcs ab et $a'b'$ d'une part, cd et $c'd'$ de l'autre. Pour cela, on divise les arcs ab et $a'b'$ en un même nombre de parties égales; puis on fait sauter l'excédant de manière qu'une règle appliquée sur deux points de division correspondants, tels que 1 et 1', 2 et 2', etc., coïncide avec la surface obtenue. On opère de même pour la surface $cd'c'd'$.

Les murs circulaires servent à raccorder deux murs droits. Lorsque la construction principale est circulaire, on la désigne plus habituellement dans la coupe des pierres (*Voy.* ce mot) par la dénomination de **TOUR RONDE**.

Un mur peut être *elliptique*, c'est-à-dire qu'il peut être compris entre deux surfaces cylindriques à génératrices verticales et à bases elliptiques. Les bases peuvent être des ellipses semblables; dans ce cas, les joints doivent être dirigés suivant les plans verticaux menés par les normales communes aux deux ellipses. Quelquefois la courbe intérieure, au lieu d'être une ellipse, satisfait à la condition que le mur ait partout la même épaisseur dans le sens normal à l'ellipse extérieure; les joints verticaux doivent encore passer par des normales à cette el-

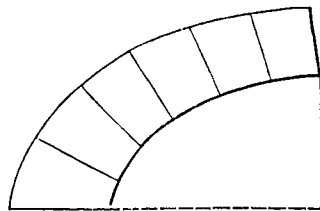


Fig. 10.

lipse. Les figures 10 et 11 montrent ces deux dispositions.

Un mur peut être *circulaire et en talus*, c'est-à-dire qu'il peut être compris entre une surface cylindrique à génératrices verticales et à base circulaire, et la surface d'un cône droit ayant le même axe. La figure 12 montre cette disposition. Chacune

des pierres qui entrent dans l'appareil est terminée par deux plans horizontaux, par deux plans verticaux, tels que ceux qui ont pour traces ad et bc , et qui forment les surfaces de joint, par une surface

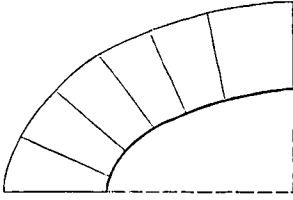


Fig. 11.

cylindrique droite projetée en cd , et par une surface conique qui se projette en $amnb$, et dont l'inclinaison, par rapport à l'axe OO' , est indiquée par l'a-

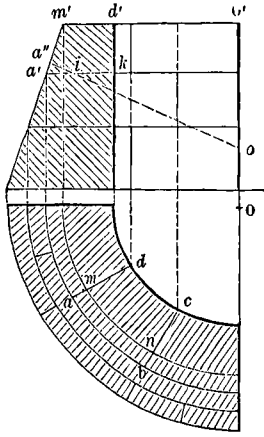


Fig. 12.

rête $a'm'$ sur la projection verticale. Pour tailler l'une de ces pierres, par exemple celle qui a pour projection horizontale $abcd$ et pour coupe suivant

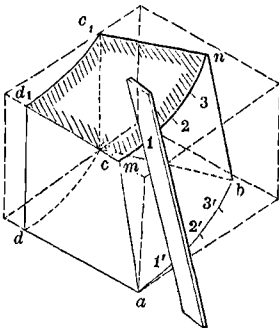


Fig. 13.

l'axe $a'm'd'h$, on dresse deux faces horizontales à la distance $d'h$ l'une de l'autre, et on les coupe par une face perpendiculaire sur laquelle on trace le trapèze amd_1d (fig. 13) égal au trapèze $a'm'd'h$ de

la figure 12; puis, sur les faces horizontales, on applique les panneaux $abcd$ et mnc_1d_1 , respectivement égaux aux projections $abcd$ et $mncd$ de la figure 12. Cela fait, on peut réunir les droites parallèles bc et nc_1 par une face plane, et les arcs cd et c_1d_1 par une surface cylindrique, comme on l'a expliqué ci-dessus. Il reste à conduire suivant les arcs ab et mn une surface conique; pour cela, on divisera ces deux arcs en un même nombre de parties égales, et l'on fera sauter l'excédant de pierre, de manière qu'une règle posée sur deux points de division correspondants s'applique sur la surface obtenue.

Si l'on voulait éviter les angles aigus que les faces horizontales font avec la surface conique, il faudrait briser le joint, comme le montre la coupe $a''ik$ de la figure 12; le joint, au lieu d'être un plan horizontal comme précédemment, se composerait d'une partie plane ik et d'une partie conique $a''i$, dont le sommet o serait sur l'axe OO' des surfaces cylindrique et conique qui limitent le mur. Mais il est rare que le talus soit assez prononcé pour qu'il y ait lieu de recourir à ce moyen; il n'est pas d'ailleurs sans inconvénients. En effet, lorsqu'on brise ainsi un joint, il devient plus difficile d'obtenir une coïncidence parfaite entre les surfaces par lesquelles une pierre de chaque assise repose sur l'assise inférieure; et lorsque cette coïncidence n'a pas lieu, il en résulte des *porte-à-faux* qui peuvent occasionner la rupture de la pierre si elle supporte une charge un peu considérable.

Un mur circulaire et en talus peut être employé pour raccorder deux murs rectilignes en talus. — S'il s'agissait de raccorder un mur droit avec un mur en talus, on pourrait faire usage d'un cône oblique; mais cette disposition n'est point usitée.

II. L'épaisseur à donner à un mur dépend de sa hauteur, du poids de la pierre dont il est formé et des efforts auxquels il peut être soumis.

Considérons d'abord un mur de clôture qui n'a à supporter que son poids et l'effort latéral du vent. Soit ABCD (fig. 14) la section, $AB = e$ son épaisseur, $AD = h$ sa hauteur, H le poids du mètre cube de la pierre employée, P le poids du mur et Q l'effort du vent. Il faudra, pour l'équilibre strict, que le moment de P par rapport à l'arête projetée en A soit égal au moment de Q par rapport à cette même arête. Mais si l'on a égard à la répartition de la pression sur la base AB, il convient, pour que cette pression s'exerce sur la base entière, que la résultante des forces P et Q ne passe pas plus près de l'arête A que le tiers de l'épaisseur AB (*Voy. COMPRESSION*). Soit K le point où la résultante rencontrera AB dans cette hypothèse, et soit I le milieu de AB, on aura

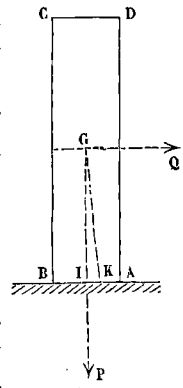


Fig. 14.

$$KI = \frac{1}{6} e;$$

mais l'équilibre donnera

$$P : Q = IK : IG,$$

ou, en ne considérant qu'un mètre de longueur de mur, et appelant q l'effort du vent par mètre carré,

$$\Pi eh \frac{1}{6} e = hq \cdot \frac{1}{2} h, \text{ d'où } e = \sqrt{\frac{3qh}{\Pi}}. \quad [1]$$

Si, par exemple, on a

$h = 10^m$, $\Pi = 2400^k$, et $q = 80^k$,
ce qui répond à un vent violent, on trouvera
 $e = 1^m$.

Les constructeurs, considérant qu'un mur est presque toujours soutenu à ses extrémités par des murs en retour, se contentent ordinairement de satisfaire à l'équilibre strict, et ils posent en conséquence

$$P:Q=AI:IG, \text{ ce qui donne } e = \sqrt{\frac{qh}{\Pi}}. \quad [2]$$

Ils se fondent en outre sur ce que l'action du vent est accidentelle, et que la pierre pouvant supporter momentanément une charge supérieure à celle qu'il convient de ne pas dépasser quand elle doit être permanente, il n'est pas nécessaire de s'imposer la condition que la charge porte sur toute l'étendue de la base AB. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait ainsi $e = 0^m,577$. Mais pour les murs élevés, la première formule se rapproche davantage de la règle empirique de Rondelet, suivant laquelle l'épaisseur d'un mur doit être comprise entre le 8° et le 12° de sa hauteur.

(La règle de Rondelet est exprimée par la formule

$$e = \frac{1}{8} h \cos \alpha.$$

α désignant l'angle que la diagonale du rectangle formé par la hauteur et par la longueur du mur fait avec l'horizon.)

Il convient de s'assurer que la pierre n'éprouve pas une pression par mètre superficiel supérieure à celle qu'elle peut supporter d'une manière permanente, c'est-à-dire le 10° de la charge qui produit l'écrasement, s'il s'agit de pierre de taille, et le 20° s'il s'agit de moellons. Cette condition est ordinairement remplie. Dans l'exemple ci-dessus, on a pour le poids total du mur $2400^k \cdot 10 \cdot e$; la charge par mètre carré est donc $2400^k \cdot 10$, et par centimètre carré $2^k,4$; si, comme nous l'avons admis, la résultante passe au tiers de AB, l'arête A la plus chargée éprouvera une pression double, soit $4^k,8$

par centimètre carré, pression bien inférieure à celle que la plupart des pierres peuvent supporter.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un mur d'édifice, et admettons d'abord qu'il se réduise à un rez-de-chaussée. Soit P' le poids du comble par mètre de longueur du mur qui agit sur sa face supérieure; on aura, en raisonnant comme ci-dessus, mais en se bornant à l'équilibre strict, attendu que les liaisons du bâtiment ajoutent beaucoup à la stabilité des murs,

$$(P' + \Pi eh) \cdot \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} qh^2, \quad [3]$$

équation du second degré qui n'a qu'une racine positive; c'est celle qui répond à la question. Si, par exemple, on a

$P' = 2000^k$, $h = 3^m$, $\Pi = 2400^k$ et $q = 80^k$,
on trouvera

$$e = 0^m,246.$$

Supposons, en second lieu, que le bâtiment que nous venons de considérer, soit un premier étage. Pour calculer l'épaisseur du rez-de-chaussée, il faudra ajouter à P' le poids du mur du premier étage, et le poids, par mètre courant de mur, provenant du plancher de cet étage; puis appliquer la formule [3] en y remplaçant h par la hauteur des deux étages réunis. Soit, par exemple, $3^m,50$ la hauteur du rez-de-chaussée, et 3000^k le poids par mètre provenant du plancher. On aura d'abord pour le poids du mur du premier étage $2400^k \cdot 3 \cdot 0,246$ ou $1771^k,200$. On remplacera donc P' par $2000^k + 1771^k,2 + 3000^k$ ou par $6771^k,2$; et h par $3^m + 3^m,50$ ou $6^m,50$; et en appliquant l'équation [3], on trouvera

$$e = 0^m,296.$$

S'il y avait un étage au-dessous de ceux que l'on vient de considérer, on opérerait d'une manière analogue, en prenant pour P' le poids du comble et des murs et planchers des deux étages supérieurs, et pour h la hauteur totale des trois étages, et ainsi de suite.

L'épaisseur des murs de refend se calcule de la même manière; mais on remplace l'effort q du vent par une force horizontale de 50^k par mètre carré, afin de tenir compte des pressions latérales accidentelles.

Voici les épaisseurs généralement adoptées dans les maisons d'habitation :

DÉSIGNATION DES PARTIES DE MURS.	MURS DE FACE		MURS DE REFEND.		HAUTEUR DES ÉTAGES.
	de	à	de	à	
Aux fondations.....	0,75	1,00	0,70	0,85	"
Au niveau du sol des caves.....	0,55	0,80	0,50	0,65	"
Au niveau du sol du rez-de-chaussée.....	0,50	0,65	0,35	0,40	"
Au-dessus du plancher du 1 ^{er} étage.....	0,45	0,55	0,30	0,35	de 3,25 à 5,00
— — 2 ^e —.....	0,40	0,50	0,30	0,35	3,00 4,25
— — 3 ^e —.....	0,32	0,40	0,25	0,30	2,80 3,50

Pour les édifices d'une plus grande importance, on adopte au rez-de-chaussée les épaisseurs de murs suivantes :

Murs de face. Murs mitoyens. Murs de refend.

De 0^m,65 à 1^m,00 De 0^m,55 à 0^m,65 De 0^m,40 à 0^m,55

Pour les palais ou édifices avec voûtes au rez-de-chaussée, les épaisseurs de murs au rez-de-

chaussée sont comprises entre les limites suivantes :

Murs de face. Murs mitoyens. Murs de refend.

De 1^m,20 à 2^m,50 De 1^m,00 à 1^m,50 De 0^m,70 à 1^m,20

Pour les murs en talus, voyez les articles REVÊTEMENTS et MURS DE SOUTÈNEMENT.

(Voy. le Cours de construction professé à l'École

centrale par M. Mary, et l'Aide-Mémoire des ingénieurs par M. Claudel.)

MURS DE SOUTÈNEMENT, murs généralement destinés à soutenir des terres. Le problème à résoudre dans la construction de ces murs consiste à déterminer l'épaisseur qu'il faut donner à la base pour que le mur résiste à la poussée des terres (Voy. ce mot), c'est-à-dire qu'il ne puisse ni se renverser en dehors en tournant autour de son arête extérieure, ni glisser horizontalement sur sa base; et qu'en même temps les matériaux dont il est formé ne risquent pas d'être écrasés par leur propre poids, augmenté de la composante verticale des autres forces qui peuvent agir sur le mur.

I. Le cas le plus simple est celui d'un mur à paroi interne verticale soutenant un terre-plein horizontal AX (fig. 1). Soit P le poids du mur dont la

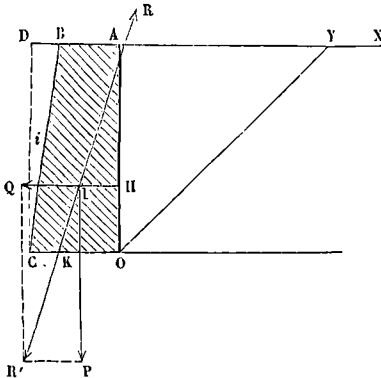


Fig. 1.

section droite est le trapèze rectangulaire OABC. Soit F la poussée des terres, ou la force horizontale exercée sur le mur par le prisme de plus grande poussée AOY. Soit R la réaction exercée par les fondations sur la base du mur. Il faut pour l'équilibre du mur que ces trois forces se fassent équilibre, ce qui exige qu'elles soient dans un même plan, qui sera, si l'on veut, celui de la figure, et qu'elles concourent en un même point I (Voy. ÉQUILIBRE), ce qui revient à dire que la résultante des forces P et F est égale et opposée à la réaction R, condition qui fera connaître cette réaction. Pour la stabilité du mur, il faut que le point d'application K de cette réaction rencontre la base du mur entre les points O et C, à une distance du point C au moins égale au tiers de OC pour qu'il n'y ait point de pression négative en O [Voy. COMPRESSION (Résistance à la)]; il faut que la composante verticale de R (prise en sens contraire), c'est-à-dire la force P, divisée par la base du mur, donne un quotient au plus égal au poids par mètre carré que les matériaux employés peuvent supporter sans risquer de s'écraser, c'est-à-dire 50 000 kilogrammes en moyenne pour la pierre de taille, ou 10 000 kilogrammes pour le moellon. Il faudra enfin que l'angle de la réaction R avec la verticale soit inférieur à l'angle de frottement du mur sur les fondations. Cet angle a pour tangente 0,76. Quelques constructeurs prennent cette tangente égale à l'u-

nité quand le mortier a fait prise; et à 0,57 lorsqu'il est encore frais. On peut se dispenser d'avoir égard à la cohésion qui peut se manifester entre la base du mur et les fondations, attendu qu'elle ne fait qu'ajouter à la stabilité de la construction.

Si l'on appelle h la hauteur du mur, e l'épaisseur OC à la base, i l'inclinaison de la paroi BC par rapport à la verticale, l la longueur du mur, et W' le poids du mètre cube de maçonnerie, on trouvera aisément

$$P = W'lh \left(e - \frac{1}{2} h \tan i \right). \quad [1]$$

Cette force est appliquée au centre de gravité du trapèze OABC, que l'on sait déterminer.

La force F a pour expression (Voy. POUSSÉE DES TERRES).

$$F = \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha, \quad [2]$$

en désignant par Π le poids du mètre cube de terre, et par α l'angle que fait avec la verticale le TALUS NATUREL DES TERRES (Voy. ce mot). Ces expressions permettront de calculer P et F, et de faire la construction que nous venons d'indiquer; si les conditions énoncées n'étaient pas remplies, il faudrait augmenter l'épaisseur du mur.

La question peut aussi être traitée par le calcul. On démontre dans la théorie de la Poussée des terres que le bras de levier de la force F est le tiers de OA, si l'on prend pour axe de rotation l'axe horizontal qui se projette au point C. Quant au bras du levier du poids P, c'est la distance de la verticale du centre de gravité du trapèze au point C; on l'obtiendra de la manière suivante. Soit G (fig. 2) le centre de gravité du trapèze; il est situé sur la médiane mn et la divise

de telle sorte qu'on a

$$\frac{mG}{Gn} = \frac{2AB + CO}{AB + 2CO},$$

d'où

$$\frac{mG}{mn} = \frac{2AB + CO}{3(AB + CO)}.$$

Abaissons des points G et n sur la base les perpendiculaires Gt et ns, nous aurons

$$\frac{mt}{ms} = \frac{mG}{mn},$$

d'où

$$mt = ms \cdot \frac{mG}{mn},$$

et, en nommant p le bras de levier cherché Ct,

$$p = Cm + mt.$$

Or

$$CO = e, \quad AB = e - h \tan i,$$

$$ms = mO - nA = \frac{1}{2}(CO - AB),$$

ou

$$ms = \frac{1}{2} h \tan i,$$

donc

$$mt = \frac{1}{2} h \tan i \cdot \frac{3e - 2h \tan i}{3(2e - h \tan i)},$$

et

$$p = \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} h \tan i \cdot \frac{3e - h \tan i}{3(2e - h \tan i)},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme

$$p = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{2} h \tan i \right) - \frac{1}{24} \frac{h^2 \tan^2 i}{e - \frac{1}{2} h \tan i}. \quad [3]$$

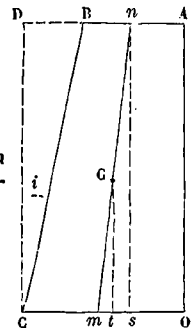


Fig. 2.

Le moment de la force P par rapport à l'axe projeté en C a donc pour expression

$$Pp = \frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{4} h^2 \tan^2 i \right) - \frac{1}{24} \Pi' l h \cdot h^2 \tan^2 i$$

$$\text{ou } Pp = \frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i \right). \quad [4]$$

On aurait une condition d'équilibre en égalant ce moment à celui de la force F; mais cette condition se rapporterait à l'équilibre strict, supposant que la réaction du sol passe au point C et que les matériaux soient infiniment résistants. Pour se rapprocher de la vérité, on est dans l'usage de multiplier le moment de la force F par un coefficient δ plus grand que l'unité; et l'on écrit en conséquence

$$\frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i \right) = \delta \cdot \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{1}{3} h$$

$$\text{ou } e^2 - \frac{1}{2} h^2 \tan^2 i = \frac{1}{3} \delta \frac{\Pi}{\Pi'} h^2 \tan^2 \frac{1}{2} \alpha, \quad [5]$$

équation qui fera connaître l'épaisseur e ; on aura ainsi

$$e = \frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{\tan^2 i + \delta \cdot \frac{\Pi}{\Pi'} \tan^2 \frac{1}{2} \alpha}. \quad [6]$$

Quand le talus extérieur est très-faible, on peut négliger $\tan^2 i$, et il reste

$$e = h \tan \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{\delta \Pi}{3 \Pi'}}. \quad [7]$$

Pour les cas ordinaires, des terres et maçonneries moyennes, on a

$$\alpha = 45^\circ, \text{ et } \Pi = \frac{2}{3} \Pi';$$

on prend $\delta = 1,9$, et l'on obtient, en faisant le calcul,

$$e = 0,269 \dots h, \text{ ou } e = 0,27 h.$$

On aurait une seconde équation relative à l'équilibre strict en égalant la poussée des terres au frottement du mur sur sa base, ou au produit du poids P par le coefficient f du frottement. Mais pour assurer davantage la stabilité, on est également dans l'usage de multiplier la poussée par un coefficient δ' plus grand que l'unité; et l'on écrit en conséquence

$$f \Pi' l h \left(e - \frac{1}{2} h \tan i \right) = \delta' \cdot \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

f désignant le coefficient du frottement du mur sur le sol. On tire de cette équation une nouvelle valeur de e , savoir

$$e = \frac{1}{2} h \tan i + \frac{\delta'}{2f} \cdot \frac{\Pi}{\Pi'} \cdot h \tan^2 \frac{1}{2} \alpha. \quad [8]$$

La plus grande des deux valeurs données pour e par les formules [6] ou [8] est celle qui devra être adoptée. Si l'on suppose

$$\tan i = \frac{1}{8} = 0,125, \quad f = 0,57, \quad \Pi = \frac{2}{3} \Pi', \quad \alpha = 45^\circ,$$

et qu'on prenne $\delta' = 1,86$ comme on le fait généralement, on trouvera

$$e = 0,248 h.$$

Ce serait donc la valeur $e = 0,27 h$ qu'il conviendrait d'adopter dans le cas actuel.

La méthode géométrique répond, comme on voit, plus directement et plus complètement à la question, et elle fournit une approximation qui est toujours suffisante, vu l'incertitude qui affecte les données elles-mêmes.

Elle est applicable au cas où la paroi intérieure

du mur présenterait un talus; en effet, si par l'arête inférieure interne du mur on élève un plan vertical, le prisme de terre compris entre ce plan et la paroi interne du mur pourra toujours être négligé, car si le talus est peu considérable, ce prisme ajoute peu à la poussée, et si le talus a une grandeur notable, la paroi interne du mur est ordinairement disposée par assises en retraite, en sorte que le prisme considéré ajoute à la stabilité.

II. Il peut arriver que le mur de soutènement, s'enfonçant d'une certaine quantité dans le sol, comme le représente la figure 3, et comme cela a lieu le

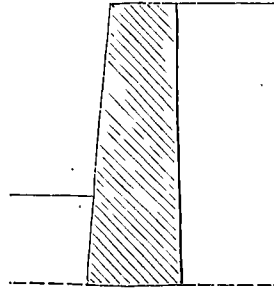


Fig. 3.

plus souvent, reçoive la poussée des terres sur ses deux faces. Il est clair que dans ce cas il faudra, dans l'équation d'équilibre relative à la rotation, tenir compte du moment de la poussée extérieure, et dans l'équation relative au glissement introduire avec son signe cette poussée elle-même. Dans les deux cas cette seconde poussée est favorable à la stabilité du mur.

On donne une grande stabilité à un mur de soutènement, sans augmenter la dépense en proportion, en établissant de distance en distance des *contre*

forts, ou saillies en maçonnerie, qui sont représentées en élévation et en plan sur la figure 4. Ils ont pour premier effet de transporter le centre de gravité en arrière et d'augmenter ainsi la stabilité; ils ont pour second effet de rompre le prisme de poussée, et de diminuer ainsi son action. On calcule l'épaisseur du mur en considérant le centre de gravité d'une portion de ce mur comprenant un contre-fort et la moitié de chacun des intervalles qui précèdent et qui suivent. Lorsque le mur est très-élevé, on relie quelquefois les contre-forts par plusieurs étages de voûtes en décharge; c'est ainsi que sont disposés les murs de quais sur plusieurs points de Paris. Les contre-forts sont reliés au *masque*, c'est-à-dire au mur principal, par des ti-

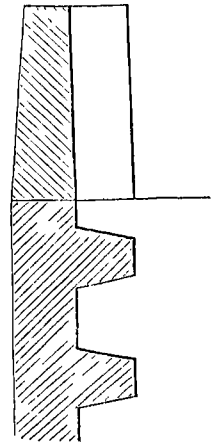


Fig. 4.

rants en fer; la condition essentielle pour que les contre-forts remplissent l'objet pour lequel ils sont construits est, en effet, qu'ils fassent corps avec le mur. — On emploie cependant quelquefois des contre-forts isolés, que l'on construit alors en pierres sèches; ils n'ont pour but que de rompre le prisme de poussée; et l'épaisseur du mur se calcule sans avoir égard aux contre-forts; seulement on fait entrer dans le poids du mur toute la longueur de ce mur, tandis qu'on ne calcule la poussée que pour les intervalles entre les contre-forts.

III. Au lieu d'avoir à résister à la poussée des terres, un mur de soutènement peut avoir à supporter la pression d'une certaine hauteur d'eau.

Dans ce cas, la poussée est exprimée par $\frac{1}{2} \Pi h^2 l$,

et son bras de levier est encore $\frac{1}{3} h$ (Voy. CENTRE DE PRESSION); on a d'ailleurs $\Pi = 1000^k$; la formule [5] devient donc

$$e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i = \frac{1}{3} \delta \cdot \frac{1000}{\Pi'} h^2,$$

$$\text{d'où} \quad e = \frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{\tan^2 i + \frac{1000 \delta}{\Pi'}}. \quad [9]$$

Si $\tan^2 i$ est négligeable, il reste

$$e = h \sqrt{\frac{1000 \delta}{3 \Pi'}}.$$

En prenant $\Pi' = 2500^k$ et faisant toujours $\delta = 1,9$, on trouve

$$e = 0,50 h.$$

La formule [8] subsiste en y remplaçant $\tan \frac{1}{2} \alpha$ par l'unité, et faisant $\Pi = 1000$; elle devient ainsi

$$e = \frac{1}{2} h \tan i + \frac{1000 \delta'}{2 \Pi'} h. \quad [10]$$

Si l'on suppose $\tan i = 0,125$, $\Pi' = 2500$,

$f = 0,76$ et qu'on prenne toujours $\delta' = 1,8$ on obtient

$$e = 0,536 h;$$

ce serait donc cette valeur qu'il conviendrait de prendre dans le cas qui nous occupe.

IV. Le mur de soutènement peut dépasser d'une petite quantité le niveau des terres ou de l'eau qu'il soutient, et former au-dessus un parapet; dans ce cas, on prendra pour h la hauteur du niveau des terres ou de l'eau, sauf à diminuer un peu les coefficients δ ou δ' , afin de tenir compte de l'excès de poids dû à la partie du mur qui surpasse le niveau.

(Voy. le *Cours de Routes et Ponts* professé par M. Mary à l'École centrale des arts et manufactures, et le *Mémoire* de M. Poncelet sur la stabilité des revêtements.)

Pour les murs de soutènement appliqués à la fortification, voyez l'article REVÊTEMENTS.

MUTULES, ornements qui, dans l'ordre dorique, sont placés au-dessous du larmier. Ce sont des pièces à section rectangulaire, de même largeur que les triglyphes auxquels elles correspondent; elles figurent l'extrémité des chevrons d'une construction en charpente. Elles sont ornées en dessous de saillies circulaires appelées *gouttes*, au nombre de 36, disposées sur 6 rangs, de manière à former un carré.

Les mutules sont quelquefois remplacées par des **DENTICULES** (Voy. ce mot). L'ordre dorique est dit *mutulaire* lorsqu'il a des mutules, et *denticulaire* lorsqu'il a des denticules (Voy. ORDRES).

MYRIAGRAMME, unité de poids qui vaut 10000 grammes ou 10 kilogrammes (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE). C'est le poids de 10 litres d'eau distillée à 4°, 1.

MYRIAMÈTRE (du grec *μύρια*, dix mille, et *μέτρον*, mesure), mesure équivalente à 10000 mètres ou à 10 kilomètres (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE).

N

NADIR (mot arabe), point de la sphère céleste opposé au **ZÉNITH**; c'est le point où la verticale du lieu, prolongée au travers du globe, irait rencontrer la sphère céleste.

NAISSANCES, points où une arche vient s'appuyer sur ses piédroits. Le plan horizontal dans lequel ces points se trouvent est appelé le *plan des naissances*.

NAVIGATION, science qui a pour objet de conduire un navire d'un point du globe à un autre en traversant les mers. On distingue deux genres de navigation : le *cabotage*, et la *navigation hauturière* ou *long cours*. Dans le cabotage, on se dirige de cap en cap (d'où le nom de cabotage) sans perdre la terre de vue; ce genre de navigation n'exige que la connaissance exacte de toutes les particularités relatives aux côtes que l'on doit parcourir. La navigation hauturière est ainsi nommée parce qu'elle est fondée sur l'observation de la hauteur des astres. Cependant elle peut souvent s'effectuer par **ESTIME**, c'est-à-dire en estimant à l'aide du **LOCH** et de la **BOUSSOLE** le chemin qu'on a fait depuis que l'on a quitté un point déterminé. On a à résoudre dans la navigation deux problèmes

principaux : 1° déterminer à un instant donné la position du navire, c'est-à-dire ses coordonnées géographiques : **LATITUDE** et **LONGITUDE**; 2° déterminer à un instant donné la route que suit le navire, ou celle qu'il doit suivre pour atteindre un point donné, problème qui donne lui-même naissance à plusieurs autres, connus sous le nom de **PROBLÈMES DES ROUTES**.

La navigation comprend en outre plusieurs autres questions importantes, telles que le tracé et l'usage des **CARTES MARINES**, la détermination de la déclinaison de l'aiguille aimantée, ou **VARIATION DU COMPAS**, l'étude de la **MARCHE DES CHRONOMÈTRES**, etc. Elle exige la connaissance des éléments de l'astronomie, et l'emploi des instruments à réflexion connus sous les noms de **SEXTANT**, **OCTANT**, **CERCLE À RÉFLEXION**; quelquefois même, dans les relâches, celui de la **LUNETTE MÉRIDIENNE PORTATIVE**. Beaucoup d'auteurs rattachent à la navigation l'**HYDROGRAPHIE**. (Voy. les divers mots en petites capitales.) Les principaux ouvrages à consulter sur la partie mathématique de la navigation sont : le *Traité de Navigation* de Bouguer, celui de Bezout; l'*Astronomie nautique* de M. de Rossel, l'*Astronomie*

physique de M. Biot, le *Traité de Navigation* de Dubourguet, l'*Abrégé de la Navigation* de Lalande, le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier, le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois; le *Recueil de tables utiles à la navigation*, traduit de l'anglais par M. Violaine, les *Tables nautiques* de Callet, celles de M. Caillet, celles de M. Guépratte, etc.

NAVIGATION À VAPEUR. L'idée d'appliquer la vapeur à la propulsion des navires est déjà ancienne. Denis Papin avait décrit, dès 1695, un bateau recevant l'impulsion de roues mises en mouvement par la vapeur. En 1707, il s'embarqua sur la Fulda à Cassel, dans un bateau à aubes mues par la vapeur, arriva ainsi à Münden, dans le Hanovre; il se proposait de descendre le Weser jusqu'à la mer et d'aborder en Angleterre, mais les bateliers du Weser lui refusèrent le passage et mirent son bateau en pièces. En 1775, Périer construisit à Paris un bateau à vapeur; mais le piston de la machine, qui n'avait que 8 pouces de diamètre (0^m,216) était insuffisant, et la tentative avorta. Le marquis de Jouffroy fit en 1778 sur le Doubs, et en 1781 sur la Saône, des essais du même genre qui fixèrent l'attention de l'autorité. En 1788, Patrick Miller, propriétaire anglais, James Taylor, précepteur de ses enfants, et William Symington, ingénieur des mines, construisirent un petit bateau à vapeur qui fut essayé avec succès sur le lac de Dalwinston. Un an après ils construisirent un autre bateau, de la force de 12 chevaux environ, et, dans une expérience faite le 26 décembre 1789 sur la Clyde, ils obtinrent une vitesse de 3 lieues à l'heure. Fulton, habile mécanicien, né à Little Britain en Pensylvanie, passe habituellement pour l'inventeur de la navigation à vapeur; mais une lettre de lui au citoyen Molard, déposée aux archives du Conservatoire des arts et métiers, prouve qu'à la date du 4 pluviôse an XI (24 janvier 1805) il n'avait encore fait aucun essai en grand; et cette circonstance justifie le Premier Consul d'avoir, en 1803, repoussé des idées qui n'étaient point appuyées alors par des expériences pratiques. Quoi qu'il en soit, Fulton porta son invention en Amérique, où elle fut accueillie; et, en 1807, il lança sur l'Hudson le *Clermont*, le premier bateau à vapeur destiné à un service régulier (entre Albany et New-York). Ce mode de navigation fut introduit en Angleterre en 1812 et en France en 1816. Les puissances maritimes firent longtemps des efforts infructueux pour l'appliquer à la marine militaire. L'emploi exclusif de la vapeur exigeait des provisions de combustible hors de toute proportion avec l'espace dont peut disposer un navire de guerre. L'emploi des bâtiments à vapeur se trouvait donc forcément limité à de courtes missions ou à un service de transport. D'un autre côté, en disposant le navire pour marcher à la vapeur ou à la voile, à volonté, on perdait par l'emplacement considérable réservé aux roues et à la machine, vers le milieu du navire, la plus grande partie des moyens d'attaque ou de défense; en même temps que, le propulseur restant exposé aux boulets ennemis, il suffisait d'un coup bien dirigé pour mettre le vaisseau hors de combat. L'armement des bâtiments à vapeur paraissait donc un problème insoluble, lorsque l'application de l'hélice à la propul-

sion est venue le résoudre de la manière la plus heureuse. Le premier bâtiment à hélice a été construit en Angleterre en 1835 par F. P. Smith; peu de temps après, en 1838, le capitaine Ericsson en construisait un autre en Amérique d'un système un peu différent (*Voy. PROPULSEURS HÉLIÇOÏDES*). Dans ce mode de propulsion, introduit en France en 1842, l'organe de locomotion au lieu d'être placé de côté et au-dessus de l'eau, comme dans les PROPULSEURS À AUBES (*Voy. ce mot*), est installé à l'arrière du navire, et complètement immergé, hors d'atteinte par conséquent des coups de l'ennemi; la machine repose sur la carlingue (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE*), et se trouve ainsi elle-même à l'abri de tout danger. En même temps, la voilure conserve la disposition ordinaire; et l'on peut donner au navire toutes les qualités nautiques des meilleurs bâtiments à voiles. Dans les essais auxquels a été soumis en 1852 le *Napoléon*, vaisseau à hélice de 90 canons, et d'une force nominale de 950 chevaux, il a pu atteindre des vitesses de 13 nœuds 1/2 à l'heure (6^m,94 par seconde), et il a montré que les vaisseaux à hélice pouvaient évoluer avec la plus grande facilité, point sur lequel les bâtiments à roues, sauf quelques rares exceptions, laissent beaucoup à désirer. L'introduction de l'hélice propulsive dans la marine militaire devait donc y opérer une véritable révolution; et cette révolution est aujourd'hui presque complètement accomplie.

Il ne faudrait pas conclure de ce que nous venons de dire que l'emploi de l'hélice doive faire proscrire les bâtiments à roues; ceux-ci ont leurs qualités propres; ils résistent mieux à un vent contraire; car le propulseur hélicoïde perd de sa puissance dès que le vaisseau marche à une vitesse notablement moindre que celle pour laquelle l'hélice a été établie. Le commerce continue, et continuera longtemps sans doute à faire usage du propulseur à aubes, surtout sur les rivières où l'on ne peut disposer que d'un faible tirant d'eau.

I. On sait que les MACHINES À VAPEUR (*Voy. ce mot*) se classent, au point de vue du mode de travail de la vapeur, en machines à basse pression avec condensation mais sans détente, en machines à moyenne pression avec détente et condensation, en machines à haute pression avec condensation et détente, enfin en machines à haute pression sans détente ni condensation. Ces dernières sont les moins encombrantes et les moins lourdes; mais leurs chaudières sont exposées à des incrustations salines auxquelles il est difficile de remédier. Ces machines ne sont employées que pour les canonnières et les batteries flottantes, pour les remorqueurs à l'entrée des ports, et en général pour les bâtiments qui ne font que de courts trajets et doivent fonctionner d'une manière rapide.

Les machines à haute pression, à condensation et à détente sont les plus économiques. En opérant la condensation à sec, c'est-à-dire par l'introduction de la vapeur dans une capacité refroidie par l'extérieur, on peut les rendre propres aux longues traversées, parce que ce mode de condensation a pour effet de prévenir les incrustations. Ces machines ont été appliquées aux grandes canonnières armées pour des expéditions lointaines. Elles fonctionnent ordinairement à 4^{atm},8 avec une introduction égale à la moitié de la course du piston.

Les machines à moyenne pression, à détente et à condensation offrent l'avantage d'un encombrement limité, d'un bon emploi du combustible, d'une sécurité relative et d'une commodité suffisante dans le service, sans présenter trop d'inconvénients au point de vue des incrustations. Ces machines réunissent donc, dans une juste proportion, les qualités qu'on recherche dans les appareils marins; elles sont le type le plus généralement employé pour les machines destinées à la navigation.

Les machines à basse pression exigent un emplacement considérable, et ce motif a suffi pour les faire abandonner, sauf pour le transport des voyageurs à de courtes distances.

En général on fait usage de machines qui fonctionnent à une pression de 2 atmosphères $1/2$, avec détente après une introduction égale aux $0,65$ de la course du piston, et avec condensation.

II. Les machines à vapeur peuvent encore être classées, d'après le mode de transmission de mouvement du piston à l'arbre de couche, en cinq systèmes principaux : les machines à balancier, les machines à cylindre oscillant, les machines à bielles directes, les machines à bielles en retour, les machines à fourreau. Et chacun de ces systèmes se subdivise à son tour, pour le premier, d'après la position du balancier; pour les autres, d'après la position du cylindre. Ainsi le balancier, s'il y en a un, peut être supérieur ou inférieur, le cylindre peut être vertical, oblique ou horizontal; s'il est vertical ou oblique, il peut être droit ou renversé, c'est-à-dire que la tige du piston peut sortir par la partie supérieure ou par la partie inférieure. — Tous ces systèmes ont été employés dans la navigation; ils ont leurs avantages et leurs inconvénients spéciaux.

Les machines à balancier sont, en général, bien équilibrées; elles fonctionnent régulièrement et sont d'un accès facile dans toutes leurs parties; mais elles sont lourdes et exigent un grand emplacement, particulièrement en hauteur, ce qui les rend impropres à la marine militaire.

Dans les machines à cylindre oscillant, la transmission de mouvement s'opère de la manière la plus simple; le volume et le poids de la machine sont peu considérables; mais les passages tortueux que la vapeur est obligée de suivre occasionnent une perte de pression dans le cylindre; et les rentrées d'air par les presse-étoupes des tourillons sont difficiles à éviter.

Dans les machines à bielle directe, la transmission est encore très-simple; le poids et le volume sont médiocres; mais la machine est exposée à se déranger par suite des déformations que peut éprouver la coque du navire.

Les machines à bielle en retour ont les mêmes avantages sans présenter le même inconvénient. Aussi ce système tend-il à se généraliser, surtout pour les navires à hélice.

Les machines à fourreau offrent encore une grande simplicité dans les renvois de mouvement; elles occupent peu d'espace et se prêtent bien aux rotations rapides. Mais elles exigent des cylindres énormes; elles sont exposées à des fuites de vapeur et donnent lieu à des refroidissements notables dans l'intérieur du cylindre, par suite de l'accroissement de la surface extérieure.

Les machines à cylindre vertical occupent une

grande hauteur, mais peu de surface horizontale, elles conviennent aux navires à roues et aux navires à hélice du commerce, où l'on préfère souvent élever le mécanisme en hauteur, afin de se réserver plus de place latéralement pour la cargaison ou le combustible. Mais leur inconvénient principal est de faire porter toute la charge du mécanisme sur un même point, ce qui contribue à déformer le navire.

Les machines à cylindre horizontal sont favorables à la stabilité; on les emploie de préférence à la plupart des autres dans la marine militaire. Mais elles occupent une grande surface horizontale; de plus, le poids des pistons et de leurs tiges s'exerçant sans cesse sur les mêmes points, finit par ovaliser les cylindres et les presse-étoupes, ce qui occasionne des fuites de vapeur et des rentrées d'air.

Les machines inclinées participent des avantages et des inconvénients des deux autres systèmes. Leur emploi est indispensable dans les navires à roues qui n'ont pas beaucoup de creux, lorsque l'on veut employer un appareil à bielle directe.

Dans les bâtiments à roues, le cylindre est presque toujours vertical ou incliné (mais droit et non renversé); on rencontre cependant quelquefois des cylindres horizontaux, mais uniquement dans les bateaux de rivière.

Dans les bâtiments à hélice, si la machine agit sur l'arbre de couche par l'intermédiaire d'un engrenage, on peut faire usage d'une machine quelconque, sauf une machine à balancier inférieur, parce que son arbre de couche serait trop haut, ou une machine à bielle verticale droite, pour la même raison, ou enfin une machine à cylindre renversé, parce que son arbre de couche serait au contraire trop bas. Quand la machine agit directement sur l'arbre de l'hélice, tous les systèmes de machines peuvent être adoptés, sauf les machines à balancier inférieur ou les machines à cylindre vertical droit.

Dans les bâtiments à roues, la vitesse de rotation est ordinairement comprise entre 13 et 25 tours par minute, 40 exceptionnellement, et la vitesse du piston entre $0^m,8$ et $1^m,5$ par seconde. Dans les bâtiments à hélice avec engrenage, la vitesse de rotation de la machine est en général de 25 à 30 tours par minute, 50 exceptionnellement; le rapport des vitesses résultant de l'engrenage est ordinairement compris entre 2 et 4; la vitesse de rotation de l'hélice est de 50 à 120 tours par minute, 200 exceptionnellement; la vitesse du piston varie entre 1^m et $1^m,50$ par seconde. Dans les navires à hélice sans engrenage ou à *connexion directe*, la vitesse de rotation varie depuis 40 tours par minute pour les grands bâtiments, jusqu'à 200 pour les petits, à faible tirant d'eau; la vitesse du piston est ordinairement comprise entre $1^m,2$ et $2^m,1$ par seconde.

III. On trouvera dans le *Traité élémentaire des appareils à vapeur de navigation* de M. A. Lédieu, dans le *Cours de machines à vapeur* de l'École du génie maritime, par M. Fréminville, et dans le *Traité de l'hélice propulsive* de M. E. Paris, la description détaillée de tous les types de machines à vapeur employés dans la navigation. Nous n'en décrivons ici que deux : 1° la machine à balancier ordinaire, employée pendant longtemps en France et en Angleterre pour les bateaux à roues, et qui a été reprise

il y a peu de temps avec de très-légères modifications, par la Compagnie transatlantique, pour les grands paquebots; 2° la machine à bielle en retour de M. Du-

puy de Lôme, ingénieur de la marine, appliquée pour la première fois, en 1855, sur le paquebot à hélice *le Danube*, installée peu de temps après à bord

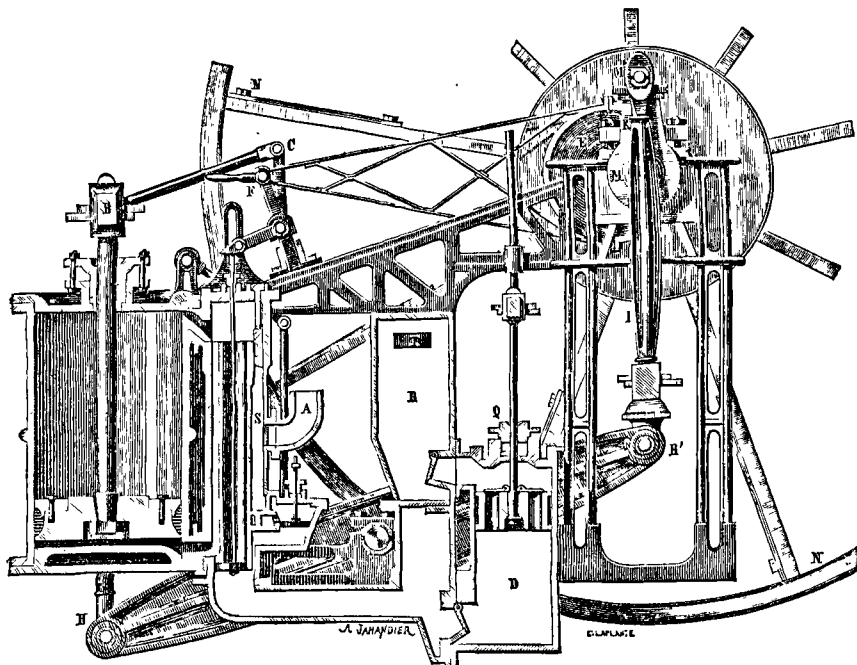


Fig. 1.

de l'*Algésiras*, vaisseau à hélice de premier rang, et dont l'emploi tend aujourd'hui à se généraliser.

La machine à balancier ordinaire (fig. 1) est une machine à moyenne pression, à détente et à con-

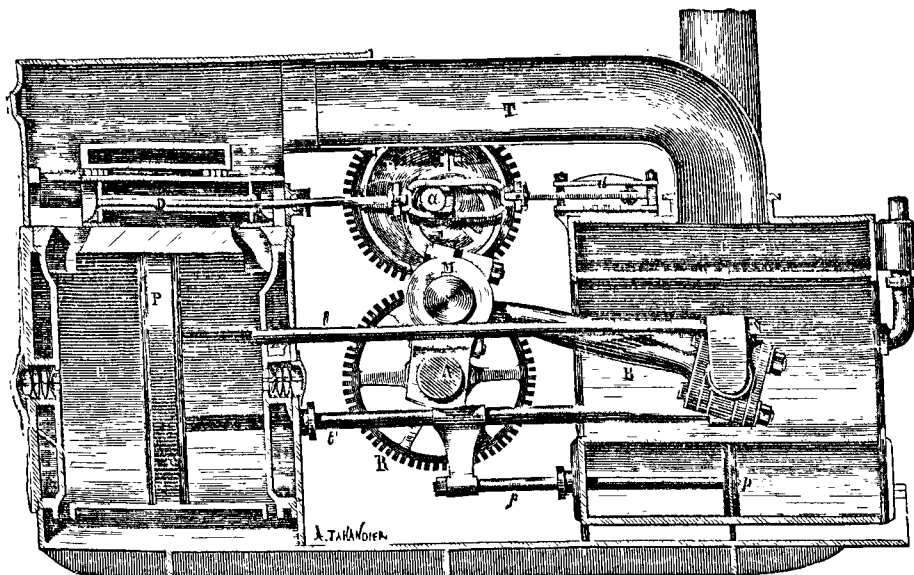


Fig. 2.

densation. La vapeur arrive de la chaudière par le tuyau A, et se rend au cylindre en traversant la boîte de distribution, qui est analogue à celle des

machines à basse pression de Watt. Du cylindre la vapeur se rend dans le condenseur D, où elle passe à l'état liquide. Elle en est extraite, ainsi

que l'air dégagé par l'eau, au moyen de la pompe Q, liée au balancier, et qui la refoule dans la bêche R, d'où elle s'écoule par le canal T, dont on ne voit que l'orifice sur la figure. Le mouvement du piston est transmis, par l'intermédiaire d'un parallélogramme *abcd*, au balancier *HH'*, dont l'extrémité *H'* s'articule avec une bielle *I* qui transmet le mouvement à la manivelle *K*, et par conséquent à l'arbre horizontal *M* qui porte la roue à aubes *N*. Un excentrique *E*, monté sur l'arbre même, s'articule par son extrémité *F* avec un levier coudé qui fait mouvoir le tiroir de distribution *S*. Il y a ordinairement deux cylindres agissant ainsi sur le même arbre; cet arbre est coudé pour recevoir l'action des bielles, et les coudes sont à angle droit, afin que les points morts des manivelles ne se correspondent pas. — Les machines de ce type, sorties d'ateliers très-divers, ne diffèrent entre elles que par des détails sans importance. Les paquebots mus par ces machines peuvent prendre, dans une eau tranquille, des vitesses de 10 nœuds ou environ 5 lieues par heure.

La machine de M. Dupuy de Lôme est représentée par la figure 2, qui en est une coupe perpendiculaire à la quille et vue par l'avant du navire. La machine a deux cylindres, dont un seul *C* se voit sur la figure. Ces deux cylindres horizontaux sont installés à tribord; les condenseurs *C₂* sont au contraire établis à bâbord et communiquent avec les cylindres par le moyen des conduits *T*. Chaque piston *P* communique son mouvement à l'extérieur au moyen de 4 tiges *t*, *t'*, traversant autant de boîtes à étoupes; deux d'entre elles passent au-dessus de l'arbre de couche *A*, les deux autres passent au-dessous. Entre les deux tiges d'avant *t* et les deux tiges d'arrière *t'* (une seule tige de chaque groupe est indiquée sur la figure), passe la bielle *B*, articulée par l'une de ses extrémités à une traverse liée aux quatre tiges, et par l'autre extrémité à la manivelle *M*, qui fait tourner l'arbre de couche. Les deux manivelles ne sont autre chose que l'arbre lui-même, qui a été coudé; les deux coudes sont à angle droit pour que les points morts ne se correspondent pas. Sur l'arbre *A* est clavetée une roue dentée *R*, qui engrène avec une roue de même diamètre *R'*, montée folle sur un petit arbre *a* parallèle à l'arbre de couche. Nous verrons plus loin comment, malgré la liberté laissée à la roue *R'*, le mouvement de rotation se transmet d'un arbre à l'autre. Sur le petit arbre *a* est monté un excentrique *E* dont la barre, cachée sur la figure, fait mouvoir la tige horizontale *dd* qui manœuvre le tiroir de distribution *D*. (Cette tige *dd* embrasse l'arbre *a* sans le toucher.) Un second excentrique, également monté sur l'arbre *a*, fait mouvoir un second tiroir qui ouvre ou ferme l'orifice d'admission de la vapeur pour produire la détente. La pompe à air *pp* est mise en mouvement par l'une des tiges inférieures *t'* du grand piston à laquelle elle est invariablement liée. La pompe alimentaire est mise en mouvement de la même manière par une des tiges supérieures du grand piston; ce détail n'est point indiqué sur la figure. Les pompes de cale sont mises en mouvement par une petite manivelle fixée à l'extrémité de l'arbre de couche.

Il reste à montrer comment le mouvement se communique de l'arbre *A* à l'arbre *a*, et comment il

peut être renversé au besoin. Pour cela, nous décrivons le mécanisme spécial qui porte le nom de *mise en train* (fig. 3). On a vu que la roue *R'*, qui engrène avec la roue *R*, est montée folle sur l'axe *a*,

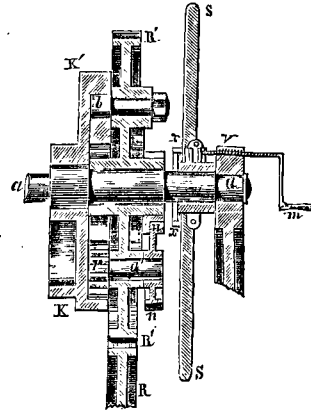


Fig. 3.

et que par conséquent elle ne peut l'entraîner directement. Mais sur ce même axe *a* est clavetée une autre roue *kk'* (fig. 3 et 4), qui porte vers l'un de ses bords un arc *cc'* denté intérieurement, et vers

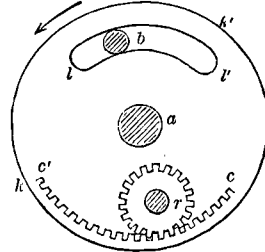


Fig. 4.

le bord opposé une rainure *ll'*. A la roue *R'* est adapté, à une certaine distance de son centre, un axe *a'* sur lequel est monté un pignon *r* qui engrène avec l'arc denté *cc'* de la roue *kk'*. A cette même roue *R'* est adapté, à l'opposé du pignon *r*, un bras ou *butoir* *b* qui s'engage dans la rainure *ll'*. Sur l'axe *a'* est monté un autre pignon *nn*, qui peut engrener avec une petite roue *xx*, solidaire avec une roue plus grande *ss*, montée folle sur l'axe *a*. Sur la figure, les roues *xx* et *ss* sont représentées avant l'embrayage; en agissant sur la vis *v* au moyen de la manivelle *m*, on peut faire glisser le système de ces deux roues le long de l'axe *a*, jusqu'à ce que la roue *xx* engrène avec le pignon *nn*. Il est facile de se rendre compte du jeu de ce mécanisme. Supposons d'abord la roue *R* enlevée; en agissant à la main sur la roue *ss*, on fait tourner la roue *xx*, par suite le pignon *nn* et par conséquent le pignon *r*, qui parcourt l'arc divisé *cc'*, jusqu'à ce que le butoir *b* qui lui est opposé rencontre le fond de la rainure *ll'*; la roue *kk'*, qui dans ce mouvement aura tourné d'une certaine quantité, ne pourra continuer à se mouvoir dans le même sens sans entraîner la roue *kk'* et par suite

l'arbre *a*. Il est évident qu'en faisant tourner la roue *ss* dans le sens contraire, on déterminerait d'une manière analogue la rotation inverse de l'arbre *a*. Rétablissons maintenant la roue *R*; cette roue, en tournant, entraînera la roue *R'*, par suite la roue *kk'* et l'arbre *a*; la roue *ss* sera entraînée elle-même par le contact des pignons *nn* et *xx*. Pour changer le calage des excentriques par rapport à l'arbre *A*, il suffit de mettre obstacle au mouvement de la roue *ss*, ce qui lui donne, par le fait, un mouvement relatif en sens contraire; on obtient cet effet au moyen d'un frein à frottement que l'on manœuvre à l'aide d'un petit levier, dont l'emploi n'exige qu'un très-petit effort. Le résultat de ce mouvement relatif de la roue *ss* est de faire marcher le pignon *r* sur l'arc denté *cc'*, et de déplacer, par conséquent, la roue *kk'* et l'arbre *a* par rapport à la roue *R'*.

En modifiant ainsi le jeu des tiroirs, on peut arrêter la machine ou même renverser le mouvement général. Et il est bon de remarquer que, pour produire ce dernier effet, on n'a jamais qu'à faire agir le frein sur la roue *ss*, quel que soit le sens du mouvement primitif, ce qui donne aux manœuvres le plus haut degré de simplicité.

La machine de M. Dupuy de Lôme offre dans son ensemble un système compacte, n'exigeant qu'un emplacement médiocre; celle de l'*Algésiras* n'a que 7^m de long sur 5^m,84 de large. Les condenseurs étant éloignés des cylindres, la cause principale de perte de chaleur se trouve évitée; les pompes principales sont mues par le piston même sans renvoi de mouvement; le mécanisme est simple; la machine se prête à toutes les exigences du service. Aussi a-t-elle donné, à bord de l'*Algésiras*, les résultats les plus remarquables, et paraît-elle destinée à devenir, jusqu'à nouvel ordre, le type des machines à vapeur appliquées aux navires à hélice. La machine de l'*Algésiras* marche à une pression de 2 atm. $\frac{3}{4}$, et la détente ne commence

que lorsque le piston a parcouru les 0,65 de sa course. Les cylindres ont 2^m,13 de diamètre, leur course est de 1^m,30; la force nominale de la machine est de 900 chevaux.

Nous renvoyons au *Traité de l'hélice propulsive*, de M. E. Paris, et au *Traité élémentaire des appareils à vapeur de navigation*, de M. A. Ledieu, pour les détails qui n'ont pu trouver place ici.

Pour l'évaluation de la force des machines à vapeur employées dans la navigation, voyez l'article FORCE NOMINALE.

NAVIGATION À VOILES. Voy. les articles NAVIRE (Théorie du), ÉVOLUTION, VOILES, GOUVERNAIL, GOUVERNEMENT D'UN NAVIRE, etc.

NAVIGATION INTÉRIEURE. navigation sur les lacs, les rivières et les canaux. La navigation sur les grands lacs est soumise aux mêmes lois que la navigation maritime. Sur les lacs de peu d'étendue et sur les rivières, elle peut s'effectuer à la voile ou à l'aide d'un propulseur à aubes ou à hélice, et donne encore lieu aux mêmes considérations théoriques, avec cette différence, dans le cas des rivières, que la vitesse qui doit figurer dans les calculs est la vitesse relative de l'embarcation par rapport au fluide en mouvement, c'est-à-dire la différence entre la vitesse absolue du bateau et

celle du courant s'il s'agit de la descente, la somme de ces deux vitesses s'il s'agit de la remonte. (Voy. NAVIGATION, NAVIGATION À VAPEUR, NAVIRE (Théorie du), PROPULSEURS À AUBES, PROPULSEURS À HÉLICE, VOILES, GOUVERNAIL, etc.) Sur les rivières, les transports se font le plus généralement au moyen du halage, et c'est le seul mode employé sur les canaux. Il consiste à tirer le bateau à l'aide d'une corde; cette corde est fixée à une espèce de mât placé à l'avant du bateau; et des hommes ou des chevaux agissent à l'autre extrémité en suivant une voie spéciale qui porte le nom de *chemin de halage*. Comme la corde, quelque longue qu'elle soit, est toujours oblique au courant, il est nécessaire de donner au gouvernail une certaine inclinaison qui tend à éloigner l'avant du bateau de la rive sur laquelle s'opère la traction. Les chevaux employés au halage ont une vitesse qui varie de 0^m,50 à 1 mètre; ils peuvent traîner depuis 25 jusqu'à 100 tonnes; l'effort à exercer est proportionnel au carré de la vitesse relative du bateau, et à la surface de sa section transversale immergée, mesurée au *maitre-couple*, c'est-à-dire vers le milieu de la longueur du bateau. Ce mode de transport est très-lent, et ne s'emploie guère que pour la houille et pour les matériaux de construction. Le halage par des hommes est plus lent encore; en appliquant à la corde un nombre d'hommes suffisant, on peut leur faire traîner des fardeaux considérables; mais il est rare qu'ils puissent faire plus de 3 lieues par jour (12 à 13 kilomètres).

On a employé en Écosse un système de halage à grande vitesse, qui a permis de transporter des voyageurs. Le bateau était tiré par des chevaux marchant constamment au galop et faisant ainsi 12 kilomètres par heure. A cette vitesse, le bateau, légèrement soulevé, présente une résistance moindre (Voy. RÉSTANCE DES FLUIDES). Cependant l'effort imposé à chaque cheval était encore de 70 à 80 kilogrammes; et quoiqu'on eût soin de relayer de demi-heure en demi-heure, ces animaux étaient promptement ruinés. Le transport par les *bateaux-rapides* avait été appliqué en France, sur le canal de l'Ourcq, entre Paris et Meaux. Les chemins de fer ont fait abandonner ce système.

On emploie aussi sur les rivières le *touage à chaîne fixe*; une chaîne longitudinale repose sur le fond du lit, et est fixée à ses extrémités; on la fait passer sur des cylindres horizontaux, perpendiculaires au courant, et portés par un bateau spécial nommé *toueur*; ces cylindres, mis en mouvement par une machine à vapeur installée sur le toueur, engrenent avec la chaîne fixe, et forcent ainsi le toueur à s'avancer. Ce système a été établi à Paris entre Bercy et le pont des Tournelles. La fonction du bateau toueur est de remorquer les bateaux chargés de marchandises, et de former la tête d'un convoi plus ou moins étendu. Le touage à chaîne fixe n'est praticable que pour de courtes distances; mais il est beaucoup plus économique que l'emploi d'un remorqueur. Pour en donner une idée, voici, d'après M. Tourasse, la puissance consommée par mètre carré de section transversale, par les bateaux à vapeur à aubes, et par les toueurs à chaîne fixe pour remonter le Rhône, dont la vitesse moyenne est 2^m,50 :

Vitesse ascendante.	Puissance motrice consommée.	
	par les bateaux à aubes.	par les toueurs.
1 ^m , 50	12 ^{chev} , 80	4 ^{chev} , 90
2 00	21 60	6 75
2 50	33 33	10 41
3 00	48 40	15 12
3 50	67 20	20 00
4 00	90 13	28 17

Lorsqu'une rivière n'est pas navigable à l'époque des basses eaux, on remédie à cet état de choses en retenant les eaux de distance en distance par des BARRAGES (Voy. ce mot) qui ont pour effet de diminuer la pente et d'accroître la profondeur, et de rendre par conséquent la navigation possible à une époque de l'année où elle ne le serait pas sans cela. Mais il faut faire franchir aux bateaux les barrages eux-mêmes, ce qui se fait à l'aide de PERTUIS, de BARRAGES à FERMETTES, ou d'ÉCLUSES à SAS (Voy. ces mots). Ce dernier mode de passage est le seul en usage dans les rivières étroites et dans les canaux.

Lorsque la navigation intérieure se fait par un canal, elle prend le nom de *navigation artificielle*. (Voy. CANAUX.)

NAVIRE (THÉORIE DU), ensemble des principes mathématiques qui se rapportent à l'équilibre et au mouvement des vaisseaux. Cette théorie comprend : les règles de l'ARRIMAGE, le calcul du DÉPLACEMENT ; la construction de l'ÉCHELLE DE SOLIDITÉ ; la détermination du CENTRE DE CARÈNE, du MÉTACENTRE, et du centre de gravité du navire ou CENTRE DE SYSTÈME ; le calcul du MOMENT D'INERTIE du navire par rapport aux trois droites intersections du longitudinal, du latitudinal et du plan horizontal passant par le centre de gravité ; les conditions de STABILITÉ HYDROSTATIQUE ; l'étude de l'action du vent sur les VOILES et de la marche du navire ; celle de la RÉSISTANCE DU FLUIDE sur lequel le navire flotte ; celle de l'action du GOUVERNAIL ; l'étude de la STABILITÉ SOUS VOILES, et des mouvements de ROULIS, de TANGAGE et d'ÉVOLUTION (Voy. tous les mots en petites capitales), et en général tout ce qui se rapporte au gouvernement du vaisseau. Quelques géomètres y ont joint des recherches accessoires telles que celle de la *courbure des voiles*, ou celle de la *proue de moindre résistance*, questions dont les expériences modernes sur la résistance de l'air et de l'eau ont montré l'inutilité, et qui sont aujourd'hui abandonnées comme oiseuses. Les principaux auteurs qui se sont occupés de la Théorie du navire sont : Euler (*Scientia navalis, Théorie complète de la manœuvre des vaisseaux*) ; Jacques Bernoulli (mémoires) ; Jean Bernoulli (nouvelle *Théorie de la manœuvre des vaisseaux*) ; Romme (*Art de la marine*) ; Bouguer (*Traité du navire*) ; Jorge Juan (*Examen político y marítimo*, etc.). On a une *Théorie du navire* du marquis de Poterat, qui n'est en beaucoup de parties qu'une traduction du livre de Jorge Juan, mais qui renferme des documents et des observations intéressantes. On peut aussi consulter sur ce sujet le *Cours de construction navale* de l'école de Brest, par M. Salicis.

Malgré les efforts des analystes, la théorie du navire est encore très imparfaite. La plupart des

auteurs ont regardé la vitesse du vent comme infinie à l'égard de celle du navire, ce qui revient à supposer le navire en repos initial, et ne s'applique plus au cas où le vaisseau est en marche. Le marquis de Poterat a tenu compte de la vitesse du navire, mais il suppose la résistance des fluides proportionnelle à la simple vitesse, ce qui est difficile à admettre. Presque tous les géomètres qui se sont occupés de la théorie du vaisseau ont voulu déduire *a priori* l'expression de la résistance totale d'une hypothèse faite sur la résistance d'un élément de surface, et ils n'ont tenu aucun compte du frottement exercé par le fluide le long de la paroi. Les formules établies aux articles VOILES et STABILITÉ SOUS VOILES, sont fondées sur les données expérimentales dont la science s'est enrichie ; elles tiennent compte de la vitesse du navire, et s'accordent assez bien avec l'observation.

NÉBULEUSES, taches blanchâtres, d'un éclat très-faible, que l'on aperçoit çà et là dans le ciel étoilé, et dont l'aspect est analogue à un nuage. Il peut arriver qu'une nébuleuse, observée avec une lunette d'un grossissement suffisant, ne présente à l'œil qu'un amas d'étoiles en nombre considérable, on lui donne alors le nom de nébuleuse *résoluble* ; et l'on donne le nom de nébuleuses *non résolubles* à celles qui, même avec le secours des instruments les plus puissants, ne peuvent ainsi se résoudre à l'œil en un amas d'étoiles. Beaucoup d'astronomes pensent que cette classification n'est relative qu'à nos moyens optiques et n'a rien d'absolu, c'est-à-dire que pour eux toutes les nébuleuses sont des amas d'étoiles qui, suivant leur distance, sont résolubles ou non résolubles pour nous. Dans l'opinion de beaucoup d'autres, au contraire, la plus grande partie des nébuleuses non résolubles seraient d'espèce tout à fait différente ; ce seraient des amas d'une matière vaporeuse, analogue à celle qui constitue les COMÈTES (Voy. ce mot), lesquelles, dans leur position la plus rapprochée de nous, conservent toujours l'aspect nébuleux. Herschel a émis l'opinion que cette matière nébuleuse va en se condensant peu à peu et donne naissance à des étoiles. Ce qui paraît confirmer cette hypothèse, c'est que parmi les nébuleuses non résolubles, dont la forme est souvent très-bizarre, on en rencontre qui offrent en différents points une certaine supériorité d'éclat évidemment due à la concentration de la matière nébuleuse autour de différents centres d'attraction. Dans les nébuleuses à forme arrondie, la partie centrale est presque toujours plus lumineuse que les bords. Cette différence d'éclat est plus ou moins sensible ; en sorte qu'on peut suivre, non pas sur une nébuleuse en particulier, mais par la comparaison des nébuleuses entre elles, le travail de condensation lente qui transforme peu à peu une nébuleuse en étoile simple, double ou triple, etc.

La nébuleuse la plus anciennement connue est celle qui a été observée en 1612 par Simon Marius dans la constellation d'Andromède. On en connaît aujourd'hui plusieurs milliers. Herschel en a découvert à lui seul plus de 2500.

La VOIE LACTÉE (Voy. ce mot) paraît être une nébuleuse résoluble dont notre système solaire fait partie.

NÉOMÉNIE (du grec νέος, nouveau et μήνη, lune),

époque où la lune est en conjonction avec le soleil.

NEPTUNE, l'une des planètes principales, aperçue pour la première fois en septembre 1846 par M. Galle, astronome de Berlin, sur les indications de M. Le Verrier. C'est en étudiant les PERTURBATIONS (*Voy. ce mot*) d'Uranus que l'astronome français avait été conduit à la découverte de Neptune. La moyenne distance de Neptune au soleil est 30,03697, celle de la terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est de 60 126,72 ou près de 165 ans, et son moyen mouvement diurne est de $21''$,5545. L'orbite de Neptune, dont l'excentricité est 0,0087195, fait un angle de $1^{\circ}46'59''$ avec le plan de l'écliptique. Le diamètre de Neptune est 4,407, celui de la terre étant 1; il en résulte que son volume est exprimé par 85,605, celui de la terre étant pris pour unité. Sa masse est exprimée par 20,231, celle de la terre étant 1; et sa densité est les 0,236 de celle de notre globe, densité 1,18; à peu près celle du chêne.

Neptune est invisible à l'œil nu; il apparaît, dans une bonne lunette, comme une étoile de 8° grandeur.

Neptune est accompagné d'un SATELLITE (*Voy. ce mot*), découvert par M. Lassell.

Les astronomes représentent Neptune par le signe ♆ .

(*Voy. l'Annuaire du Bureau des longitudes pour l'année 1867.*)

NERVURES, saillies longitudinales destinées à renforcer une pièce exposée à des efforts de flexion. Les bielles, les balanciers, les bras des volants, les supports oscillants des ponts suspendus, etc., etc., présentent ainsi des nervures qui en augmentent la solidité. On donne ordinairement à ces saillies la forme parabolique, qui est celle du SOLIDE D'EGALE RÉSISTANCE (*Voy. ce mot*).

NICHE SPHÉRIQUE, demi-cylindre surmonté d'un quart de sphère, qui sert d'ornement en architecture, et qui est ordinairement destiné à recevoir une statue, un vase, etc. Pour l'appareil des niches, voyez VOÛTES SPHÉRIQUES.

NID DE PIE, retranchement en gabions pleins de terre que l'assiégeant, maître de la brèche faite au saillant de la demi-lune, élève à la hâte pour se mettre à l'abri des feux du corps de place (*Voy. ATTAQUE DES PLACES*).

NIVEAU, hauteur d'un plan horizontal, d'une droite horizontale, ou d'un point, au-dessus d'un plan horizontal de comparaison. Un plan est dit de niveau lorsqu'il est horizontal; il en est de même d'une droite. Par extension on appelle *surface de niveau* la surface libre d'un liquide; le caractère d'une surface de niveau est qu'en chacun de ses points elle est perpendiculaire à la direction de la résultante des forces qui sollicitent la molécule liquide placée en ce point. La surface des mers est une surface de niveau; pour un liquide pesant de peu d'étendue la surface de niveau est un plan horizontal.

On fait venir le mot niveau du mot latin *libella* qui désignait le fléau d'une balance (?).

NIVEAU, nom donné à divers instruments ayant pour objet ou de vérifier si un plan est horizontal, ou de mesurer l'inclinaison de ce plan par rapport à l'horizon, ou enfin d'obtenir des rayons visuels horizontaux. Nous décrirons les plus répandus.

I. NIVEAU À PERPENDICULE, ou niveau de maçon. Il se compose essentiellement d'un fil à plomb suspendu à un châssis triangulaire ou rectangulaire (fig. 1 et 2). La ligne que suit le fil lorsque les pieds

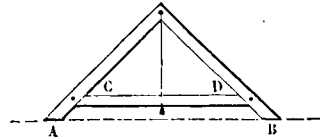


Fig. 1.

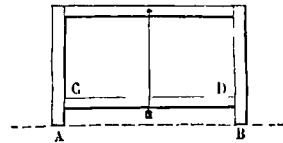


Fig. 2.

A et B du châssis reposent sur une ligne horizontale, s'appelle la *ligne de foi*. Pour la déterminer, on pose les pieds A et B sur une droite à peu près horizontale, puis on retourne l'instrument bout pour bout; dans ces deux positions on a eu soin de marquer le point de la traverse CD auquel vient correspondre le fil; on obtient ainsi deux marques; on prend le milieu de leur intervalle; c'est un point de la ligne de foi; en le joignant au point de suspension du fil, on a la ligne de foi elle-même. Ce procédé est, comme on le voit, fondé sur la symétrie. La ligne de foi étant déterminée, si l'on veut s'assurer qu'une droite est horizontale, il suffit d'y poser les pieds de l'instrument, et de voir si, lorsque, après avoir incliné un peu le châssis en avant, on le ramène en arrière, le fil vient battre la ligne de foi.

Pour vérifier si un plan est horizontal, il suffit de vérifier que deux droites tracées dans ce plan, et se coupant sous un angle peu différent d'un angle droit, sont horizontales l'une et l'autre.

Le niveau à perpendicule peut servir à donner l'inclinaison d'une droite par rapport à l'horizon. Il suffit de marquer sur la traverse les points où le fil doit venir battre quand on pose l'instrument sur diverses droites dont l'inclinaison est connue.

Ainsi, dans les travaux de terrassement relatifs à la fortification, la traverse CD porte des repères qui correspondent à des inclinaisons de 1, 2 ou 6 de base pour 1 de hauteur, inclinaisons qui sont le plus fréquemment employées dans ces sortes de travaux.

Delambre, dans la mesure de la méridienne, employait pour évaluer l'inclinaison des règles dont il faisait usage (*Voy. BASE*), un appareil qui n'est qu'un perfectionnement du niveau à perpendicule. Le fil à plomb est remplacé par une petite règle OP (fig. 3) très-librement suspendue en un point O pris sur l'axe de symétrie du châssis, et munie à son extrémité d'un VERNIER (*Voy. ce mot*) qui parcourt un arc de cercle \widehat{OP} décrit du point O comme centre, fixé au châssis, et divisé en degrés à partir de la ligne médiane OR. Si l'on pose l'instrument par ses pieds sur la ligne AB, la règle OP, en vertu de son poids, prend une direction verticale; et l'on peut

lire sur le limbe la mesure de l'arc PR compris entre le zéro du vernier et l'extrémité de la ligne de foi. Cette mesure est celle de l'angle BAH que fait la ligne AB avec l'horizontale AH menée dans

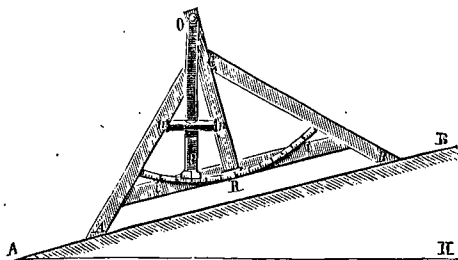


Fig. 3.

le plan de l'instrument; car les angles POR et BAH sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. Un petit niveau à bulle d'air (Voy. plus loin) fixé en mn perpendiculairement à la règle doit conserver une position horizontale, et sert de vérification.

II NIVEAU À BULLE D'AIR. Il se compose d'un tube de verre (fig. 4) légèrement courbé vers le haut,

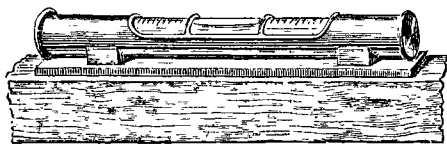


Fig. 4.

enchâssé dans une monture métallique, et reposant sur une platine en métal. Le tube est rempli d'eau, sauf la place d'une bulle d'air qui vient se placer d'elle-même vers le haut de la courbure du tube, c'est-à-dire au milieu, quand la platine est horizontale, mais qui marche vers l'une des extrémités aussitôt qu'on vient à soulever un peu celle-ci.

Quand la platine est horizontale, la bulle est comprise entre deux traits marqués sur le verre même et que l'on appelle ses *repères*. Pour les déterminer, on place l'instrument sur une ligne à peu près horizontale et l'on marque les positions occupées par les extrémités de la bulle, puis on retourne le niveau bout pour bout, et l'on marque de nouveau les positions occupées par les extrémités de la bulle. Les milieux des intervalles entre les marques correspondantes faites dans les deux cas sont les vrais repères de la bulle; attendu que, par une raison de symétrie, elle a dû s'en écarter de la même quantité dans les deux sens.

Pour vérifier avec cet instrument si une ligne est horizontale, il suffit donc de poser la platine sur cette ligne et de s'assurer que la bulle est entre ses repères. Pour plus de sûreté, on doit retourner l'instrument bout pour bout, et faire la même vérification. Pour vérifier qu'un plan est horizontal, on vérifie l'horizontalité de deux droites à peu près rectangulaires tracées dans ce plan, comme pour le niveau à perpendiculaire.

Il n'est pas indispensable que les repères correspondent aux extrémités mêmes de la bulle; le plus

souvent les repères sont deux traits arbitraires à égale distance du milieu du tube; ils sont suivis de traits équidistants tracés dans les deux sens en allant vers les bouts de ce tube; et la bulle est dite entre ses repères quand ses extrémités les dépassent du même nombre de divisions de chaque côté.

Dans les niveaux à bulle d'air très-soignés, on donne au tube une courbure exactement circulaire; il en résulte que la quantité dont la bulle se déplace quand la platine cesse d'être horizontale est proportionnelle à l'angle que fait alors la platine avec l'horizon. En effet, soit $emnf$ (fig. 5) la cour-

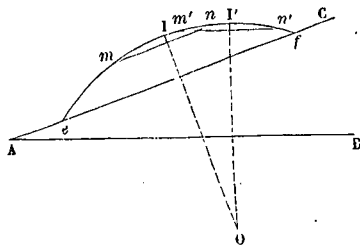


Fig. 5.

bure du tube; mn le niveau du liquide quand la platine AC est horizontale, et $m'n'$ le niveau quand cette platine a pris la position indiquée sur la figure. Pour passer de la première position à la seconde, le sommet de la bulle aura parcouru un arc II' , qui est la mesure de l'angle IOI' formé par les rayons IO et $I'O$ respectivement perpendiculaires à mn et à $m'n'$, ou, ce qui revient au même, à AC et à AB; c'est-à-dire que la bulle aura fait un chemin proportionnel à l'angle BAC, puisque BAC et IOI' sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. On conçoit alors que des divisions marquées sur le tube puissent faire connaître l'angle que la platine fait avec l'horizon.

Voy. à l'article THÉODOLITE un moyen de déterminer par expérience l'inclinaison correspondante à une division du tube.

(La plupart des niveaux à bulle d'air portent de ces divisions; mais dans les instruments communs, où la courbure du tube n'est pas circulaire, où même le tube est souvent sans courbure, ces divisions ne peuvent être d'aucun usage.)

Le niveau à bulle d'air étant un instrument très-délicat, que les influences extérieures peuvent déranger facilement, il est nécessaire de le vérifier et de le *rectifier* chaque fois qu'on en fait usage. A cet effet, il porte une vis de réglage qui permet d'élever ou d'abaisser un peu l'une des extrémités du tube par rapport à la platine, comme on le voit en V (fig. 6). En agissant sur cette vis on peut faire varier à volonté dans un sens ou dans l'autre la position de la bulle d'air.

Pour rectifier le niveau, on conçoit que l'on pourrait, si l'on avait à sa disposition une droite parfaitement horizontale, poser la platine sur cette droite, et ramener la bulle entre ses repères en agissant sur la vis de réglage. Mais, comme on ne dispose pas généralement d'une droite horizontale, on opère de la manière suivante. Supposons que l'on pose le niveau sur une règle munie de deux vis CALANTES (Voy. ce mot); si la bulle ne se tient pas

entre ses repères, on l'y ramène en agissant sur la vis de réglage. On retourne alors le niveau bout pour bout, et l'on observe le nombre de divisions dont la bulle s'est déplacée. D'après ce qui a été dit plus haut, ce déplacement mesure le double de l'inclinaison de la règle. On agit donc sur les vis calantes de manière à faire rétrograder la bulle de la moitié du nombre de divisions dont elle s'était déplacée; on rend ainsi la règle horizontale. Pour régler le niveau, il n'y a plus qu'à ramener la bulle entre ses repères.

Comme on voit, cette opération sert à la fois à régler le niveau et à *rectifier une droite horizontale*.

Pour rectifier un axe vertical il y a une opération de plus. Le niveau est posé sur une droite mobile autour de l'axe, et celui-ci repose par un pied à trois vis calantes. On fait tourner l'instrument de manière à amener le niveau parallèlement à la droite qui joint deux des vis calantes; en agissant sur ces vis on amène la bulle entre ses repères. On fait alors tourner l'instrument de 180° pour opérer le retournement du niveau, et si la bulle s'est déplacée, on opère la moitié de la correction en agissant sur la vis de réglage du niveau. C'est l'opération indiquée ci-dessus; le niveau se trouve réglé, et la droite qui joint les deux vis calantes est horizontale. On fait enfin tourner l'instrument de 90° , de manière à amener le niveau dans une direction perpendiculaire; et en agissant sur la troisième vis calante, on ramène la bulle entre ses repères. Le plan des trois vis est alors horizontal; et l'axe, qui lui est perpendiculaire, est vertical par conséquent.

La graduation du tube peut servir à déterminer l'inclinaison de la droite suivant laquelle la platine est dirigée, puisque, d'après ce qu'on a vu plus haut, quand la courbure du tube est exactement circulaire, le déplacement de la bulle est proportionnel à l'inclinaison. Dans les niveaux les mieux établis, un déplacement d'un millimètre répond à un angle d'une seconde, ce qui revient à dire que le rayon de courbure du tube a $206\,265$. Pour apprécier l'inclinaison, on observe les divisions auxquelles correspondent les extrémités de la bulle avant le retournement; leur demi-somme est la division à laquelle correspond le milieu; on obtient de même la division correspondant au milieu de la bulle après le retournement; la demi-différence entre ces résultats est le nombre de divisions correspondant à l'inclinaison cherchée. On en déduit cette inclinaison, connaissant l'angle qui répond à une division du tube.

Une autre disposition peut permettre d'apprécier

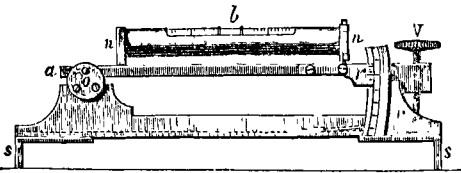


Fig. 6.

les inclinaisons. La commission de la carte d'Espagne a adopté, pour déterminer l'inclinaison par rapport à l'horizon de la règle employée à la mesure des bases, un niveau à bulle d'air *nn* (fig. 6)

monté sur une platine *aa* mobile autour d'un axe *O* placé à l'une de ses extrémités, et guidée à l'autre extrémité par une vis *V* qui s'appuie sur le support *ss*. Pour observer avec cet instrument l'inclinaison de la règle, on le pose sur cette règle par son support; et l'on fait mouvoir la vis jusqu'à ce que la bulle *b* vienne se placer au milieu du tube entre ses repères; un vernier *v* monté sur la platine *aa* permet de lire, à $10''$ près, sur un arc divisé *ii*, l'inclinaison de la règle. Pour plus de sûreté, on a soin de lire en même temps à quels traits de la division du tube correspondent les extrémités de la bulle.

Quand un niveau est disposé de manière à donner la mesure de l'inclinaison d'une droite par rapport à l'horizon, on lui donne le nom de *niveau de pente*; c'est le cas des niveaux représentés par les figures 3 et 6.

III. Les niveaux que nous avons à décrire maintenant sont des instruments de NIVELLEMENT (*Voy. ce mot*), servant à mener des rayons visuels horizontaux.

NIVEAU D'EAU. Cet instrument est fondé sur la propriété fondamentale des liquides dans les vases communicants, laquelle consiste en ce que les surfaces libres du liquide dans ces vases sont toujours dans un même plan horizontal. Il se compose d'un tube en fer-blanc ou en cuivre, d'environ $1^m,40$ de long sur 5 centimètres de diamètre (fig. 7), recourbé à angle droit à ses extrémités, qui se terminent

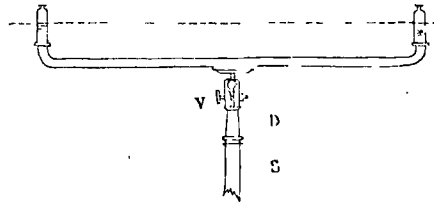


Fig. 7.

par des fioles de verre très-rétrécies à leur ouverture supérieure. Ce tube est porté par un pied à trois branches auquel il est lié par un GENOU à COQUILLES (*Voy. ce mot*), de manière cependant à faire pouvoir tourner autour d'un axe vertical et faire un *tour d'horizon*. L'appareil est rempli d'eau jusqu'aux trois quarts de la hauteur des tubes de verre. Pour se servir de l'instrument, on place verticalement la partie *S* du support qui entre dans la douille *D*; et, à l'aide de la vis *V*, on dispose le tube horizontalement et ses extrémités dans la position verticale. Les surfaces de l'eau dans les deux tubes de verre sont alors dans un même plan horizontal; et si l'on mène un rayon visuel qui rase ces deux surfaces, c'est-à-dire une tangente commune *intérieure* aux cercles qui les limitent, on a une ligne horizontale nettement déterminée. Il pourrait y avoir indécision si l'on menait une tangente *extérieure*, ou si l'on visait au travers des tubes de verre, parce que le premier cacherait en grande partie le second. Si les tubes de verre sont de même calibre, on peut faire mouvoir l'instrument autour du support *S* sans que le plan des surfaces de l'eau dans ces tubes change; et cela,

lors même que le tube en métal n'aurait pas une horizontalité parfaite. Il n'en serait plus de même si les branches du tube étaient inégales, ou si les fioles étaient d'inégal diamètre. Ce mouvement est souvent nécessaire; on verra à l'article NIVELLEMENT l'emploi qu'on peut faire du niveau d'eau.

NIVEAU D'ÉGAULT. Cet instrument est destiné au même usage que le précédent. Il se compose d'un niveau à bulle d'air *nn* (fig. 8), et d'une lu-

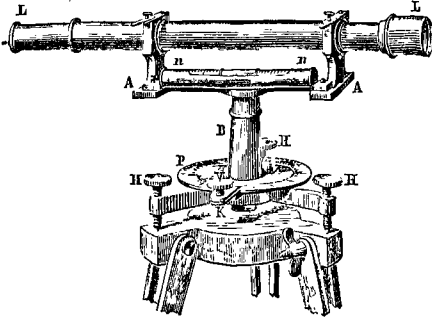


Fig. 8.

nette LL reposant l'un et l'autre, le premier directement, la seconde par l'intermédiaire de coussinets, sur une platine AA qui fait corps avec une colonne B et un plateau P, mobiles autour d'un axe central. Cet axe est perpendiculaire au plan de la platine et au plan du plateau, et on peut lui donner la position verticale en faisant jouer les vis calantes H, H, H, dont sont munies les branches du trépied par lequel l'instrument repose sur un support à trois pieds semblable à celui du CERCLE RÉGULATEUR (Voy. ce mot) et qui n'est point indiqué sur la figure. On reconnaît que l'axe est vertical, lorsque, en faisant tourner tout le système, A, A, B, P, la bulle du niveau reste entre ses repères. L'axe optique de la lunette est alors horizontal, et peut servir à mener des rayons visuels horizontaux. Lorsqu'on a donné à la lunette la direction qu'elle doit avoir, on arrête le mouvement de rotation à l'aide d'une pince K fixée au trépied, et qui vient saisir le plateau P; il suffit pour cela de serrer la vis de pression V. Pour amener le plateau P à être horizontal, on fait tourner l'instrument autour de son axe, de manière à amener le niveau à bulle d'air parallèlement à la droite qui joint deux des vis calantes, et l'on se sert de ces vis pour amener la bulle entre ses repères; puis on fait tourner de nouveau l'instrument de manière à amener le niveau dans une direction à peu près perpendiculaire à la première, et l'on se sert de la troisième vis calante pour ramener la bulle entre ses repères si elle s'en est écartée; le plateau étant ainsi parallèle à deux droites horizontales, est lui-même horizontal. Par suite, l'axe de rotation de l'instrument, supposé bien construit, est vertical. Il reste à s'assurer que l'axe optique de la lunette coïncide avec son axe de figure, et qu'il est horizontal. Pour faire la première vérification, on vise une droite horizontale très-éloignée, l'arête supérieure d'un toit ou d'un mur par exemple, et l'on amène le fil horizontal du réticule à couvrir cette droite (Voy. LUNETTE, VIS MICROMÉTRIQUE); puis

on fait faire à la lunette un demi-tour complet autour de son axe; le même fil doit venir recouvrir la droite visée. Pour faire la seconde vérification, on découvre les collets de la lunette et on la retourne bout pour bout; et, comme l'objectif est venu prendre alors la place de l'oculaire, et *vice versa*, on fait faire à tout l'instrument un demi-tour complet autour de son axe vertical; le point de croisement des fils du réticule doit encore venir coïncider avec la ligne visée.

NIVEAU BOURDALOUE ou niveau à plateau. Cet instrument est fondé sur les mêmes principes que le précédent; il n'en diffère que par la disposition. Le niveau (fig. 9) repose par sa platine sur les col-

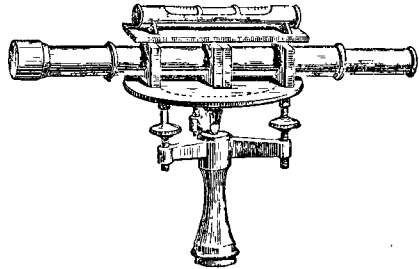


Fig. 9.

lets rectangulaires de la lunette, celle-ci repose par les mêmes collets sur un plateau que l'on peut rendre horizontal au moyen de trois vis calantes sur lesquelles il s'appuie. Ces vis sont liées à un trépied qui s'adapte à un support à trois branches. L'usage de l'instrument et les vérifications sont les mêmes que pour le niveau d'Égault.

Les niveaux que nous venons de décrire sont ceux dont on fait le plus généralement usage; mais il en existe une foule d'autres. On emploie quelquefois le NIVEAU À PINNULES (fig. 10). Aux

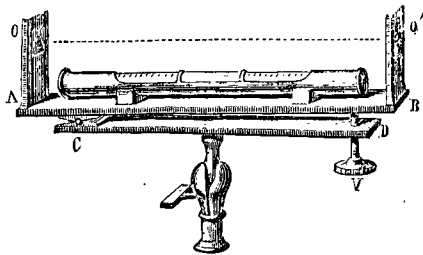


Fig. 10.

extrémités A et B de la platine sur laquelle repose le niveau, se dressent verticalement deux PINNULES (Voy. ce mot) dans lesquelles les fenêtres longitudinales sont remplacées par un trou circulaire au centre duquel se croisent deux fils très-fins, l'un horizontal et l'autre vertical. L'un de ces trous est pratiqué dans un châssis qu'on peut élever ou abaisser d'un mouvement doux. Les points de croisement des fils déterminent très-nettement la ligne de visée. La platine AB est articulée à charnière à une seconde platine CD, par rapport à laquelle elle peut être élevée ou abaissée au moyen d'une vis V. Enfin cette seconde platine peut tourner, avec tout le système, autour d'un axe qui lui est perpendicu-

laire; l'extrémité de cet axe est une sphère que l'on peut serrer entre les deux coquilles d'un genou que l'on adapte à un pied à trois branches, ou simplement à un bâton d'équerre. Pour se servir de l'appareil, on dispose l'axe de rotation aussi verticalement que possible, et par conséquent la platine inférieure CD aussi près de la position horizontale qu'on le peut; puis à l'aide de la vis V on fait basculer la platine AB autour de la charnière de manière à amener la bulle du niveau entre ses repères; la platine AB est alors horizontale. On règle la position du châssis mobile de manière que la distance AO soit exactement égale à la distance BO; la ligne de visée est alors parallèle à la platine AB et par conséquent horizontale aussi. — Si l'axe de rotation est bien vertical, on peut alors faire tourner la platine CD et tout le système autour de cet axe, sans que la ligne de visée cesse d'être contenue dans le plan horizontal où elle était primitivement. Mais il faut bien remarquer qu'il n'en est plus de même si l'axe de rotation est incliné. Supposons, par exemple, que l'axe de rotation soit dans le plan vertical de la ligne OO', mais soit incliné par rapport à la verticale; en faisant faire à l'instrument un demi-tour complet on obtiendra une seconde ligne de visée qui fera avec la première un angle précisément égal à celui que l'axe de rotation fait avec la verticale; par conséquent elle ne sera plus horizontale. On pourra bien lui rendre l'horizontalité en faisant jouer la vis V; mais elle ne coïncidera pas exactement avec la première ligne de visée; elle sera un peu plus haut ou un peu plus bas suivant que l'axe penche en arrière ou en avant. De là la nécessité de rendre l'axe aussi vertical que possible, ce qui entraîne de longs tâtonnements. A ce point de vue le niveau à pinnules est très-inférieur au niveau d'eau dont l'installation n'offre aucune difficulté.

On emploie quelquefois le NIVEAU SPHÉRIQUE, niveau à bulle d'air, dans lequel le tube est remplacé par une boîte circulaire terminée à sa partie supérieure par une calotte sphérique en verre. Cette boîte est enclâssée dans un plateau, et lorsque ce plateau est horizontal, la bulle d'air occupe le pôle de la calotte. Un pareil niveau sert par conséquent à vérifier l'horizontalité dans tous les sens; on l'adapte aux appareils dans lesquels il doit y avoir un plan constamment horizontal.

Le NIVEAU DE BUREL est fondé sur un principe tout différent. Ce n'est point un instrument de précision; mais il rend d'utiles services dans les

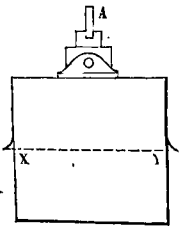


Fig. 11.

études rapides et notamment dans les reconnaissances militaires. Il se compose d'une boîte cubique en cuivre de 2 centimètres de côté, suspendue par un anneau A (fig. 11) de manière que ses faces latérales soient verticales. L'une de ces faces est recouverte d'un miroir sur lequel on a tracé une droite horizontale XY correspondant à deux points qui dépassent un peu la face dont il s'agit. On tient l'instrument par l'anneau A, de manière que la ligne XY soit à la hauteur du centre de la pupille, ce dont on est

certain quand l'image de ce centre se trouve sur XY; regardant alors un peu obliquement dans le sens de l'une des pointes X ou Y, de manière que le rayon visuel rase le bord inférieur de la pointe, on obtient un rayon visuel horizontal; et l'on peut en même temps apercevoir par réflexion un signal placé dans la campagne. Cet instrument porte aussi le nom de NIVEAU À RÉFLEXION. L'anneau A n'est pas fixé à la boîte même, mais à l'érou d'une vis horizontale tournant dans des collets fixés à la face supérieure de la boîte; cette disposition permet de faire varier le point de suspension de manière que la surface du miroir soit verticale.

IV. On donne aussi le nom de NIVEAUX à des instruments destinés à mesurer l'inclinaison d'un rayon visuel par rapport à l'horizon. Il en existe de diverses espèces. L'un des plus employés est le CLISIMÈTRE DE CHEZY. C'est un niveau à pinnules dans lequel le châssis qui porte le trou servant d'objectif a une course assez grande; sur les bords de la rainure où se meut ce châssis sont tracées des divisions qui mesurent l'angle de la ligne de visée avec la platine qui porte le niveau à bulle d'air. Ces divisions donnent en même temps la distance de l'instrument à une MIRE PARLANTE (Voy. ce mot).

L'ÉCLIMÈTRE est une BOUSSOLE D'ARPENTEUR ordinaire (Voy. BOUSSOLE), dans laquelle la lunette est munie à ses extrémités de verniers qui parcourent des arcs divisés, ou même un cercle vertical entier fixé au côté de la boîte.

Le CLISIMÈTRE DE BURNIER est fondé sur un principe différent. C'est encore un de ces instruments qui ne sont pas susceptibles d'une grande précision, mais qui sont utiles dans les opérations qui demandent une certaine célérité. Il se compose d'une aiguille PR (fig. 12) suspendue par son

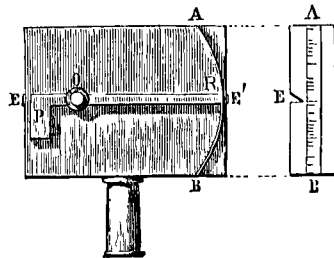


Fig. 12.

centre de gravité à un axe O fixé aux parois d'une boîte rectangulaire dans laquelle peut se mouvoir l'aiguille. Son extrémité R parcourt un arc divisé AB. Deux encoches E, E' pratiquées sur les côtés opposés de la boîte servent de ligne de visée. L'instrument peut être fixé sur un pied; mais le plus souvent on le tient à la main. Pour mesurer l'inclinaison d'une droite sur l'horizon, on incline la ligne de visée EE' suivant cette direction; l'aiguille reste horizontale, et on lit sur l'arc AB la division à laquelle correspond son extrémité R, laquelle se recourbe de manière à être facilement aperçue. On aurait pu disposer l'aiguille de manière qu'elle fût suspendue en son milieu; mais alors, pour donner la même course à l'extrémité R, il aurait fallu faire la boîte plus grande.

Il est clair que le CERCLE RÉPÉTITEUR et le THÉODOLITE (Voy. ces mots) pourraient servir à mener un rayon visuel horizontal ou à mesurer son inclinaison à l'horizon.

V. On a construit des NIVEAUX-CERCLE, dont les uns ne diffèrent du NIVEAU À PLATEAU qu'en ce que ce plateau est remplacé par un cercle divisé qui permet de mesurer les azimuts. D'autres sont munis en même temps d'une lunette mobile autour d'un axe horizontal et peuvent fonctionner comme théodolites, au moins dans certaines limites d'inclinaison.

On trouvera dans le *Cours de Topographie et de Géodésie* de M. A. Salneuve divers détails sur les niveaux qui n'auraient pu trouver place dans cet article, et en particulier la description du NIVEAU DE PORRO, instrument ingénieux, mais à peu près inusité aujourd'hui.

NIVEAU DE CÔTÉ, nom impropre donné à un instrument qui sert à vérifier les verticales, et par suite les plans verticaux. Il se compose d'un FIL À PLOMB (Voy. ce mot) fixé à l'extrémité de la plus grande médiane d'une règle rectangulaire. Lorsque l'un des grands côtés de la règle coïncide avec une verticale, le fil à plomb coïncide avec la médiane qu'on appelle la *ligne de foi*; et réciproquement, si le fil à plomb coïncide avec la ligne de foi, quel que soit celui des deux grands côtés de la règle que l'on fasse coïncider avec une ligne donnée, on peut affirmer que cette ligne est verticale.

NIVEAU DE PENTE, niveau à perpendiculaire disposé de manière à donner l'inclinaison d'une droite par rapport à l'horizon (Voy. NIVEAU).

NIVELLEMENT, opération qui a pour but de déterminer la distance des différents points d'une contrée à une même surface de niveau. Cette surface, qui sert de terme de comparaison, est ordinairement celle de la mer lorsqu'il s'agit d'un pays étendu; mais dans les *nivellements topographiques* qui n'embrassent qu'une étendue médiocre, on remplace la surface des mers par le plan tangent à cette surface au point qui répond à la verticale du point principal de ce pays ou d'un point choisi arbitrairement vers le centre; ce plan est ce qu'on appelle le *plan de comparaison*; mais on peut prendre pour plan de comparaison un plan horizontal quelconque, pourvu qu'il soit déterminé; dans les travaux hydrographiques on le prend supérieur à tous les points dont on a à s'occuper; dans les nivellements topographiques, on le prend ordinairement au-dessous de tous les points du terrain; mais il n'y a pas de règle absolue à cet égard. Dans les ponts et chaussées, le plan de comparaison est pris au-dessus du terrain; à Paris, le plan de comparaison est à 50^m au-dessus du niveau du bassin de la Villette.

I. Quand l'opération s'étend sur une contrée assez vaste pour qu'il y ait lieu d'avoir égard à la rondeur de la terre, il y a à distinguer le niveau *vrai* du niveau *apparent*. Soient S et P (fig. 1) deux points du terrain; ST et FQ les verticales de ces points, qui rencontrent en A et en B la surface de la mer prolongée au-dessous des continents. Le niveau *vrai* du point S est SA; le niveau vrai du point P est PB; et la différence de niveau est PB—SA. Mais si l'on substitue à la surface de la mer le plan tangent à cette surface au point A, lequel rencontre en A' la verticale du point P, la

distance PA', très-peu différente de la perpendiculaire abaissée du point P sur le plan AA', sera ce qu'on appelle le niveau *apparent*; et la différence de niveau apparente sera PA'—SA. Cette quantité est inférieure à la première de A'B; et il est facile de calculer cette différence, car si on la désigne par *h* et que l'on considère le triangle rectangle dont les sommets sont A, A' et le centre du globe, on aura, en appelant R son rayon,

$$(R + h)^2 = R^2 + AA'^2,$$

ou, en réduisant et négligeant le carré de *h*,

$$2Rh = AA'^2, \text{ d'où } h = \frac{AA'^2}{2R}.$$

Cette quantité, qui est, comme on le voit, proportionnelle au carré de la distance AA', est ordinairement négligeable, ce qui permet de prendre, comme on le fait dans la topographie, pour surface de niveau le plan horizontal AA'.

La distance d'un point du terrain au plan horizontal de comparaison s'appelle la *cote* de ce point; et le nivellement a pour but de déterminer la cote de chacun des points importants du terrain, ou au moins la différence entre les cotes de ces divers points et celle de l'un d'eux, qu'on suppose déjà trouvée.

II. Un nivellement peut être *simple* ou *composé*. Il est simple lorsqu'il s'agit de trouver la différence de niveau de deux points A et B peu éloignés l'un de l'autre, de telle sorte qu'on puisse obtenir le résultat par une seule station.

Nous supposons, pour fixer les idées, qu'on opère avec le NIVEAU D'EAU (Voy. ce mot). On établit l'instrument en un point C (fig. 2), qui ne soit

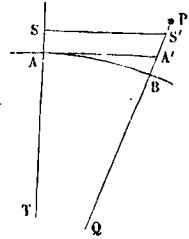


Fig. 1.

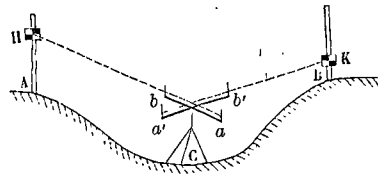


Fig. 2.

pas éloigné de plus de 40 à 50 mètres de chacun des deux points A et B. On fait dresser une MIRE (Voy. ce mot) au point A; on dirige, à l'aide de l'instrument, un rayon visuel horizontal vers cette mire, et l'on fait élever ou abaisser le *voyant* jusqu'à ce que le rayon visuel passe au centre, ou du moins sur la ligne horizontale qui coupe ce voyant en deux parties; l'aide fixe le voyant à la mire, et lit sur la division latérale qu'elle porte, la hauteur du centre du voyant au-dessus du talon de l'instrument qui est posé sur le sol. L'aide transporte alors la mire au point B; l'opérateur, sans déplacer le niveau, fait tourner le tube autour de son axe vertical, mène un rayon visuel horizontal vers la mire, et fait fixer le voyant comme il a été dit; l'aide lit la hauteur du centre du voyant au-dessus du talon. La différence entre les hauteurs lues sur la mire exprime la différence de cote des

points A et B, puisque les deux rayons visuels qui ont été menés sont dans le même plan horizontal. Cette différence de cote est donc AH — KB; si elle est positive, le point B est au-dessus du point A, comme dans la figure; si elle était nulle, les deux points seraient dans un même plan horizontal; si elle était négative, c'est le point A qui serait au-dessus du point B. L'opération serait la même avec tout autre instrument propre à mener un rayon visuel horizontal; elle s'applique à des points plus éloignés si l'on se sert d'un instrument à lunette; et, dans tous les cas, l'exactitude du résultat dépend de la précision de l'instrument lui-même.

Dans les instruments pourvus d'une lunette, comme le niveau d'Égault, qui est d'ailleurs susceptible d'une grande précision, il faut se tenir en garde contre les erreurs provenant du défaut de centrage de la lunette; on se met à l'abri de ces erreurs en opérant de la manière suivante. On observe une première fois la mire, et on la règle de manière que la ligne horizontale qui la partage soit couverte par le fil horizontal de la lunette. On fait faire à celle-ci un demi-tour complet dans le plan horizontal; on la retourne bout à bout sur ses cousins; puis on lui fait faire une demi-révolution sur son axe de figure, de manière que le fil qui était horizontal soit redevenu horizontal; puis on observe de nouveau. Si les deux hauteurs ainsi obtenues ne sont pas identiques, on prend la moyenne.

III. Le nivellement est composé lorsque la différence de cote ne peut être obtenue que par plusieurs stations intermédiaires. C'est ce qui arrive quand la distance des deux points est considérable. car on ne peut plus trouver de point d'où l'on aperçoit nettement les deux mires, ou quand la différence de hauteur des deux points est elle-même très-grande, car il peut arriver alors que le rayon visuel horizontal mené à l'aide du niveau passe au-dessus d'une des mires, ou au-dessous du talon de l'autre. Dans l'un et l'autre cas, il faut choisir entre les points A et B (il n'est pas nécessaire que ce soit dans le même plan vertical) un certain nombre de points M, N, P, tels que la différence de cote de deux points consécutifs puisse être obtenue par un nivellement simple. On placera le niveau entre A et M; soient h_0 et h_1 les hauteurs lues sur les mires; on transportera le niveau entre M et N; soient h_2 et h_3 les hauteurs obtenues; on transportera le niveau entre N et P; soient h_4 et h_5 les nouvelles hauteurs; enfin on placera le niveau entre P et B; soient h_6 et h_7 les dernières hauteurs lues sur les mires. Les différences successives entre les cotes seront $h_0 - h_1, h_2 - h_3, h_4 - h_5, h_6 - h_7$; la différence totale sera donc

$(h_0 + h_2 + h_4 + h_6) - (h_1 + h_3 + h_5 + h_7)$, c'est-à-dire la somme des coups arrière diminuée de la somme des coups avant, en entendant, comme le font les praticiens, par coup de niveau la hauteur lue sur la mire. Le point B sera au-dessus de A, à la même hauteur ou au-dessous, suivant que cette différence sera positive, nulle ou négative.

Lorsque le nombre des points intermédiaires est considérable, comme cela a lieu dans les nivellements faits en vue de la construction d'un canal ou d'un chemin de fer, il est nécessaire de tenir note exacte de toutes les opérations partielles, ce qui se

fait sous une certaine forme (Voy. REGISTRE DE NIVELLEMENT). — Après avoir parcouru la ligne dans un certain sens, on reprend ordinairement les opérations en sens contraire; on doit obtenir deux résultats identiques au signe près, sauf les erreurs tenant à l'imperfection des instruments et des sens, erreurs qui ne doivent pas s'élever à 15 millimètres par kilomètre si l'on a bien opéré.

IV. Quand on a pour but de connaître le RELIEF d'un terrain (Voy. ce mot), on a à déterminer la cote d'un très-grand nombre de points; on suit pour cela plusieurs méthodes. Connaissant, ou s'étant donné arbitrairement, la cote d'un premier point, on parcourt le terrain en passant par les points les plus importants, et en déterminant par un nivellement simple ou composé la différence de cote de chaque point par rapport au précédent, d'où il est facile de déduire la cote de ces points eux-mêmes: c'est la méthode par cheminement; elle sert à déterminer les divers PROFILS (Voy. ce mot) dont on a besoin pour rendre le relief sensible aux yeux. On peut encore, en se plaçant à une station d'où l'on puisse apercevoir un grand nombre des points utiles du terrain, déterminer la cote de chacun d'eux connaissant celle d'un seul d'entre eux: c'est la méthode par rayonnement; elle sert à trouver la cote de tous les points d'une importance secondaire, et à déterminer les COURBES DE NIVEAU employées dans le FIGURÉ DU RELIEF (Voy. ces mots). — Quand on opère par cheminement, on a soin de revenir au point de départ et d'en déterminer la cote comme si elle n'était pas connue; on se procure ainsi une vérification essentielle. Quand on opère par rayonnement, on doit aussi, en changeant de station, s'arranger de manière qu'un des points du groupe précédent appartienne au groupe nouveau, pour avoir un moyen de vérification.

V. Nous avons supposé jusqu'ici que l'étendue du terrain sur lequel on opère était assez limitée pour pouvoir négliger la courbure du globe. Si cette condition n'est pas remplie, la surface de comparaison est celle des mers, qu'on peut regarder comme sphérique, et le nivellement prend le nom de nivellement géodésique; il s'opère de la manière suivante:

Soit A (fig. 3) le point où l'on opère, et P le point dont on veut obtenir la hauteur PB au-dessus de la sphère ayant pour centre C celui de la terre et passant par le point A. On observe la distance zénithale PAZ du point P; soit α cet angle corrigé de la RÉFRACTION (Voy. ce mot). Joignons AB, menons-lui la perpendiculaire CI; enfin appelons R le rayon AC, α la hauteur cherchée PB, et γ la longueur de l'arc qui mesure l'angle ACB dans le cercle dont le rayon est l'unité.

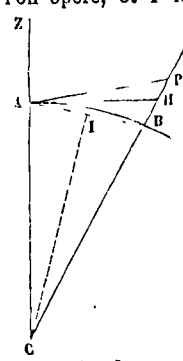


Fig. 3.

Le triangle ABP donne
 $\alpha = \text{arc AB} = \sin \text{PAB} : \sin \text{P}$

Or on trouve aisément

$$\text{arc AB} = R\gamma;$$

$$\text{PAB} = \text{PAH} + \text{HAB} = 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}\gamma,$$

$$P = AHB - HAP = (90^\circ - C) - (90^\circ - x) = x - C.$$

Donc
$$x = \frac{R\gamma \cos(x - \frac{1}{2}C)}{\sin(x - C)}.$$

Si A est au niveau de la mer, cette formule donnera l'altitude du point P, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus du niveau de la mer (*Voy. ALTITUDE*). Si A n'est pas au niveau de la mer, R désigne dans la formule le rayon du globe augmenté de la hauteur du point B au-dessus du niveau de la mer, hauteur qui est supposée connue, et qu'il faut ajouter à x pour avoir l'altitude du point P.

Si l'angle C est assez petit pour pouvoir être négligé par rapport à x, ce qui arrive fréquemment, il vient : $x = R\gamma \cot x.$

On voit donc comment en partant d'une première station placée au niveau de la mer, on peut calculer l'altitude d'un premier point, et en conclure celle d'un second; et ainsi de suite.

On peut rendre les résultats d'un nivellement géodésique indépendants de la réfraction en employant la méthode des *observations combinées*. Soient A et P (fig. 4) les deux stations dont il s'agit

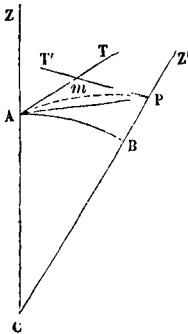


Fig. 4.

d'obtenir la différence de niveau; soient CZ et CZ' les verticales de ces deux points; soit C le centre du globe, et AB l'arc de cercle décrit de ce centre avec CA pour rayon jusqu'à la rencontre de la verticale CZ'; la hauteur PB, que nous appellerons toujours x, sera la différence d'altitude des points A et P qu'il s'agit d'obtenir. Soit AmP la trajectoire du rayon lumineux qui va du point A au point P, ou *vice versa*; l'inclinaison des éléments de cette trajectoire sur l'horizon

étant toujours très-faible pour les distances considérées en Géodésie, on admet que cet arc est un arc de cercle; il en résulte que les tangentes AT et PT' à cette trajectoire aux points A et P font avec la corde AP des angles égaux, dont nous représenterons la valeur commune par γ . Désignons par ζ et ζ' les distances zénithales des points P et A observées respectivement de A et de P, c'est-à-dire les angles TAZ et T'PZ'; et soient x et x' les distances zénithales vraies, c'est-à-dire les angles PAZ et APZ'; on aura

$$x = \zeta + \gamma \quad \text{et} \quad x' = \zeta' + \gamma;$$

d'où

$$x - x' = \zeta - \zeta'.$$

D'ailleurs, en écrivant que la somme des trois angles du triangle ACP vaut 180° , on trouve aisément

$$x + x' = 180^\circ + C.$$

Cela posé, en appelant R le rayon AC, on a dans le même triangle

$$\frac{R}{R+x} = \frac{\sin x'}{\sin x},$$

d'où

$$\frac{x}{2R+x} = \frac{\tan \frac{1}{2}(x-x')}{\tan \frac{1}{2}(x+x')} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\zeta - \zeta')}{-\cot \frac{1}{2}C}.$$

On tire de là

$$x = \frac{2R \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta)}{\cot \frac{1}{2}C - \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta)} = \frac{2R \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) \tan \frac{1}{2}C}{1 - \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) \tan \frac{1}{2}C}.$$

L'angle C étant toujours très-petit, on peut développer $\tan \frac{1}{2}C$ en fonction de C en s'arrêtant aux troisièmes puissances; le second terme du dénominateur étant lui-même très-petit, on peut, au lieu de diviser par l'unité moins ce terme, multiplier par l'unité plus ce même terme, ce qui donne :

$$x = 2R \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) \left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{24}C^3 \right) \times \left[1 + \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) \left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{24}C^3 \right) \right].$$

VI. L'opération du nivellement géodésique s'effectue d'ordinaire en même temps que la TRIANGULATION d'un pays (*Voy. ce mot*); le côté géodésique AB ou RC peut être considéré comme donné par le calcul; nous le désignerons par k. Alors, en posant

$$y = k \cdot \tan \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta),$$

l'expression ci-dessus pourra se mettre sous la forme

$$x = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{R} + \frac{1}{12} \cdot \frac{k^2 y^3}{R^2} + \dots \quad [1]$$

On ne conserve que les termes écrits; le dernier même peut être négligé la plupart du temps; on ne l'évalue que dans les pays de hautes montagnes. Telle est la formule que l'on emploie pour le nivellement des points de premier ordre. Dans cette formule, R désigne le rayon de courbure de la sphère osculatrice à l'ellipsoïde terrestre au point A, si ce point est au niveau de la mer, ou ce même rayon augmenté de l'altitude du point A, si ce point n'est pas au niveau de la mer.

VII. Lorsqu'on ne peut pas employer la méthode des observations combinées, il faut, pour obtenir une formule analogue à la précédente, où x soit donné en fonction de k et de R, exprimer ζ' en fonction de ζ ; et pour cela, il faut faire une hypothèse sur la loi suivant laquelle varie la réfraction. On admet qu'elle est proportionnelle à l'angle compris entre les verticales de ses extrémités. On pose, en conséquence,

$$\gamma = nC,$$

n étant une constante, supposée connue, et que l'on nomme le *coefficient de la réfraction géodésique*. On a trouvé plus haut

$$x + x' = 180^\circ + C,$$

ce qu'on peut écrire

$$\zeta + \zeta' + 2\gamma = 180^\circ + C,$$

ou $\zeta + \zeta' + 2nC = 180^\circ + C;$

d'où $\zeta' = 180^\circ - \zeta + (1 - 2n)C,$

puis $\zeta' - \zeta = 180^\circ - 2\zeta + (1 - 2n)C,$

et enfin $\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = 90^\circ - \zeta + \frac{1 - 2n}{2}C,$

ou, en posant $S = \frac{1 - 2n}{2}$, et remarquant que

$$C = \frac{k}{R},$$

$$\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = 90^\circ - \zeta + \frac{kS}{R}.$$

Prenant les tangentes des deux membres, on obtient

$$\text{tang } \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \frac{\cot \zeta + \text{tang } \frac{kS}{R}}{1 - \cot \zeta \cdot \text{tang } \frac{kS}{R}}$$

ou, par une transformation déjà employée plus haut,

$$\text{tang } \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = \left(\cot \zeta + \text{tang } \frac{kS}{R} \right) \left(1 + \cot \zeta \cdot \text{tang } \frac{kS}{R} \right)$$

Multipliant par k , remplaçant $\text{tang } \frac{kS}{R}$ par l'arc $\frac{kS}{R}$, et posant

$$y' = k \cot \zeta,$$

il vient $k \text{tang } \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = y' + \frac{Sk^2}{R} + \frac{Sy'^2}{R} \dots$

en négligeant le dernier terme. Cette expression, mise dans la valeur de x , donne

$$x = y' + \frac{Sk^2}{R} + (1 - n) \frac{y'^2}{R} + \dots$$

On ne conserve ordinairement que les deux premiers termes, et l'on écrit

$$x = k \cot \zeta + \frac{Sk^2}{R}; \quad [2]$$

c'est la formule employée pour le nivellement des points de second ordre.

L'analyse que nous venons de faire connaître est extraite du cours de Géodésie de l'École polytechnique. M. Puissant, dans son traité, arrive par une marche peu différente à des formules presque identiques, qu'on trouvera exposées à l'art. 218, tome I. La formule marquée [8'] n'est en particulier que la formule [2] ci-dessus, dans laquelle la lettre k désigne, non plus l'arc formé par le côté géodésique que l'on considère, mais la corde de cet arc dont l'emploi est nécessité par l'application de la MÉTHODE DE DELAMBRE (Voy. ce mot).

La formule [2] permet de calculer le coefficient n quand la différence d'altitude x a été déterminée par la formule [1]; on en tire, en effet,

$$S = \frac{Rx - Rk \cot \zeta}{k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - 2n}{2} = \frac{Rx - Rk \cot \zeta}{k^2};$$

$$\text{d'où} \quad n = \frac{1}{2} - R \cdot \frac{x - k \cot \zeta}{k^2}. \quad [3]$$

On peut encore tirer ce coefficient de la relation trouvée ci-dessus :

$$\zeta' = 180^\circ - \zeta + (1 - 2n)C,$$

qui donne

$$1 - 2n = \frac{\zeta + \zeta' - 180^\circ}{C} = \frac{\zeta + \zeta' - 180^\circ}{k} \cdot R;$$

$$\text{d'où} \quad n = \frac{1}{2} - \left(\zeta + \zeta' - 180^\circ \right) \cdot \frac{R}{2k}. \quad [4]$$

L'une ou l'autre des formules [3] ou [4] montre que n est d'autant plus exactement déterminé, que le côté géodésique k est plus grand. Les variations continuelles de l'atmosphère jettent de l'incertitude sur la détermination du coefficient n . Delambre le regardait comme égal à 0,08; la moyenne des observations faites pour la carte de France a donné 0,065; les observations faites à l'étranger ont donné des nombres qui ont varié de 0,082 à 0,088.

On dirige ordinairement un nivellement géodésique de manière à partir d'un repère fixe bien déterminé, et à revenir soit au même repère, soit à un autre repère bien établi. Le niveau moyen de

la mer a été fixé de cette manière par des repères établis dans les principaux ports. Lorsqu'en arrivant au repère qui doit servir de vérification, on trouve une différence, on la répartit sur toutes les stations intermédiaires, soit par des considérations tirées du calcul des probabilités, soit, plus ordinairement, proportionnellement à la longueur des côtés géodésiques qui séparent ces stations.

Dans les opérations de la carte de France, on a trouvé une différence de 1",67 entre le niveau de l'Océan et celui de la Méditerranée. Cette différence pouvant être attribuée aux erreurs d'observations, elle a été répartie sur toutes les stations intermédiaires, et l'on a admis que le niveau de la Méditerranée était le même que celui de l'Océan. Des considérations analogues ont conduit à admettre l'identité du niveau de la mer d'Allemagne et de l'Adriatique, de la mer Méditerranée et de la mer Rouge, etc.

VIII. L'altitude des points voisins de la mer peut être déterminée approximativement d'une manière rapide, en observant de ces points la distance zénithale de l'horizon. Soit A (fig. 5) un pareil point; AT le rayon visuel tangent en T à la surface BT de la mer. Soit x l'altitude cherchée AB; R le rayon BC du globe; ZAT = x la distance zénithale vraie de l'horizon, et ZAI = ζ la distance zénithale observée; on aura, conformément à l'hypothèse admise plus haut,

$$x = \zeta + nC.$$

Mais le triangle ACT, rectangle en T, donne

$$(R + x) \cos C = R;$$

d'où

$$x = \frac{R(1 - \cos C)}{\cos C} = 2R \frac{\sin^2 \frac{1}{2}C}{\cos C} = 2R \text{ tang } \frac{1}{2}C \cdot \text{tang } C$$

ou, à très-peu près, vu que C est très-petit,

$$x = \frac{1}{2}R \text{ tang}^2 C.$$

Mais cette méthode ne peut être qu'approchée, à cause des incertitudes que présente l'observation.

NIVELLEMENT (PROBLÈMES DE). Nous plaçons sous ce titre plusieurs problèmes qui sont d'une application usuelle.

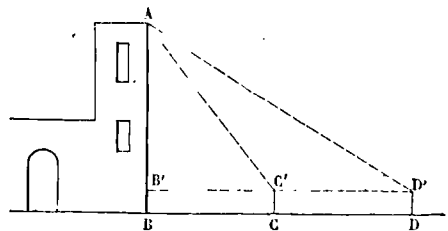


Fig. 1.

I. Trouver la hauteur AB (fig. 1) d'un édifice dont le pied B est accessible par un chemin rectiligne et horizontal BCD.

Etablissez au point C un GRAPHOMÈTRE (Voy. ce

mot); menez le rayon visuel C'A et le rayon visuel horizontal C'B'; mesurez l'angle AC'B' que nous appellerons α , et mesurez à la chaîne (Voy. ce mot) la distance BC. Le triangle AB'C' donnera

$$AB' = B'C' \operatorname{tang} \alpha = BC \operatorname{tang} \alpha;$$

en ajoutant la hauteur BB' ou CC' de l'instrument, qui est connue, on aura la hauteur demandée AB.

II. Si la partie BC du chemin BCD était momentanément obstruée, et qu'il fût impossible de la mesurer directement, on transporterait le graphomètre en un second point D de la ligne BCD; on mènerait le rayon visuel D'A et le rayon horizontal D'B'; puis on mesurerait à la chaîne la longueur CD, que nous appellerions l ; soit $BC = x$, $AB' = y$ et $AD'B' = \beta$, on aura

$$y = x \operatorname{tang} \alpha = (x + l) \operatorname{tang} \beta;$$

et, en éliminant x entre ces deux relations,

$$y = l \cdot \frac{\operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta} = l \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)};$$

d'où il serait facile de déduire x si l'on voulait l'obtenir.

III. Trouver la hauteur d'un édifice dont le pied est invisible, mais situé dans un plan horizontal sur lequel on peut opérer.

Mesurez sur le plan horizontal une base quelconque CD (fig. 2). Au point C, avec un CERCLE à

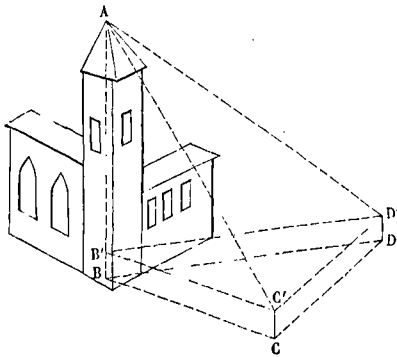


Fig. 2.

lunette plongeante ou avec un THÉODOLITE (Voy. ces mots), mesurez l'angle AC'B' que fait avec l'horizon le rayon visuel C'A mené du centre de l'instrument au sommet A, et l'angle BCD qui n'est autre que l'angle AC'D' réduit à l'horizon; au point D, mesurez de même l'angle BDC, projection horizontale de AD'C'. Dans le triangle BCD, déterminé par les points C et D et par le pied B de la verticale AB, on connaîtra le côté CD et les deux angles adjacents; on pourra donc calculer BC égal à B'C'. Dans le triangle rectangle AB'C', on connaîtra alors un côté et un angle aigu; on pourra donc calculer AB'; en ajoutant la hauteur BB' de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AB.

Si l'on fait $CD = l$, $BB' = h$, $BCD = \delta$, $BDC = \gamma$, $AC'B' = \alpha$, on trouvera

$$AB = h + \frac{l \operatorname{tang} \alpha \sin \delta}{\sin(\delta + \gamma)}.$$

Si l'on n'avait pas de cercle à lunette plongeante ni de théodolite, on pourrait résoudre la question

avec le graphomètre. Pour cela, on mesurerait à la station C les angles AC'B' et AC'D', et à la station D l'angle AD'C'. Dans le triangle AC'D', on connaîtrait alors un côté C'D' et les deux angles adjacents; on pourrait donc calculer AC'. Dans le triangle AC'B', on connaîtrait alors l'hypoténuse et un angle aigu; on pourrait donc calculer AB' et par suite AB. En posant $AC'D' = \gamma'$ et $AD'C' = \delta'$, on trouvera

$$AB = h + \frac{l \sin \alpha \sin \delta'}{\sin(\delta' + \gamma')}.$$

IV. Trouver la hauteur du sommet A (fig. 3) d'une montagne au-dessus d'un point C situé dans la plaine.

On choisira dans la campagne un second point D, tel qu'on puisse mesurer la distance CD. Si l'on doit

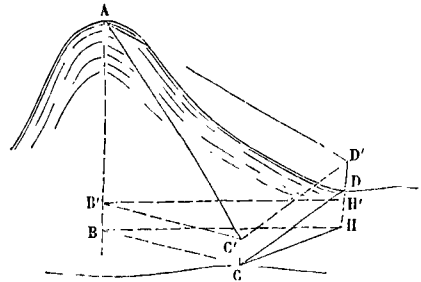


Fig. 3.

opérer avec un cercle à lunette plongeante ou avec un théodolite, on mesurera non pas CD lui-même, mais sa projection horizontale CH. A la station C, on mesurera l'angle AC'B' que fait avec l'horizon le rayon visuel C'A mené du centre de l'instrument au point A, et l'angle BCH, projection horizontale de AC'D'. A la station D, on mesurera l'angle BDC, projection horizontale de AD'C'. Dans le triangle BCH, on connaîtra ainsi un côté CH et les deux angles adjacents; on pourra donc calculer BC. Dans le triangle rectangle AB'C', on connaîtra alors le côté B'C' égal à BC, et l'angle AC'B'; on pourra donc calculer AB'; et en ajoutant BB' ou CC', hauteur de l'instrument employé, on aura AB qui sera la hauteur demandée.

Si l'on doit opérer avec le graphomètre, on mesurera CD en vraie grandeur. A la station C, on mesurera les angles AC'B' et AC'D'; à la station D, on mesurera l'angle AD'C'. Dans le triangle AC'D', on connaîtra ainsi le côté C'D' et les angles adjacents; on pourra donc calculer AC'; dans le triangle AB'C', on connaîtra alors l'hypoténuse et un angle aigu; on pourra donc calculer AB', d'où l'on déduira AB. Les formules seront, dans les deux cas, de même forme que dans le problème précédent.

V. Une route AB (fig. 4) étant tracée sur un plan topographique où l'on a figuré les courbes de niveau, déterminer le profil en long de cette route.

Sur une droite indéfinie A'X, on portera des longueurs successives A'C', C'D', D'E', E'F', etc., respectivement égales aux longueurs de route AC, CD, DE, EF, etc., comprises entre les courbes de niveau; et aux points C', D', E', etc., on élèvera des perpendiculaires respectivement égales aux longueurs d'é-

chelle qui représentent 10^m, 20^m, 30^m, etc.; on aura en A'K le profil demandé (Voy. FIGURÉ DU RELIEF).

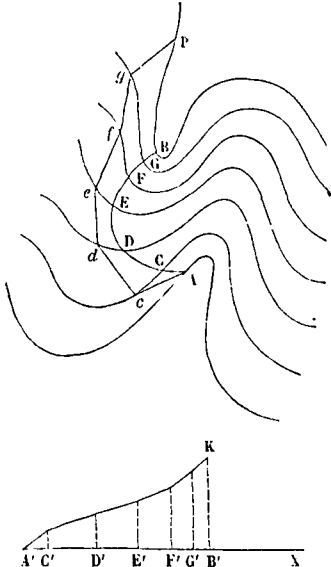


Fig. 4.

VI. Mener par le point A (fig. 4) une route dont la pente soit uniforme et égale à une pente donnée.

On commencera par mener une droite mn (fig. 5) représentant à l'échelle la distance de deux courbes

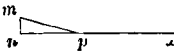


Fig. 5.

de niveau consécutives; on mènera la perpendiculaire nx, et par le point n on mènera une droite mp faisant avec nx l'angle qui exprime la pente donnée; le côté np exprimera alors la longueur constante des portions de la route demandée comprises entre deux courbes de niveau consécutives quelconques. Pour tracer cette route, on prendra donc une ouverture de compas égale à np, et avec cette ouverture de compas, on tracera successivement, du point A comme centre, un arc qui coupera la courbe de niveau suivante en un point c; du point c comme centre, un arc qui coupera la courbe suivante en un point d; du point d comme centre, un arc qui coupera la courbe suivante en un point e; et ainsi de suite. La ligne Acdefhp, obtenue en joignant ces points successifs, sera la route demandée (Voy. FIGURÉ DU RELIEF).

Ce problème trouve son application dans le tracé des routes, des rigoles d'irrigation, etc.

NIVELLEMENT SOUS-MARIN, opération qui complète les cartes hydrographiques en donnant le relief du fond de la mer dans le voisinage des côtes. Elle s'exécute par voie de sondages. Une sonde se compose d'une corde mince et résistante nommée *ligne de sonde*, à laquelle est suspendue une petite masse de plomb de forme conique creusée en dessous pour recevoir du suif. La ligne de sonde est

divisée en *brasses*, et en *pieds*; la *brasse* est de 5 pieds, ou 1^m,624. Lorsqu'on jette la sonde en un point déterminé, la portion de ligne plongée fait connaître la profondeur du fond au-dessous du niveau de la mer; et les fragments qui adhèrent au suif font connaître si le fond est rocheux, vaseux ou sablonneux. Quand le fond est vaseux ou sablonneux, on peut avoir intérêt à connaître la nature du véritable fond situé au-dessous; on se sert pour cela d'une *lance de sonde*; c'est une barre de fer terminée en pointe et embottée, vers sa partie moyenne, dans une masse de plomb. Son poids lui permet de traverser le fond meuble pour arriver au fond résistant; elle porte latéralement des encoches, garnies de suif, dans lesquelles s'engagent des fragments du premier sol qu'elle traverse; si le second est rocheux, elle revient rayée et émoussée. A chaque sonde, on a soin de noter l'heure; en même temps on mesure avec un sextant ou un cercle à réflexion les angles formés par les rayons visuels menés à 3 points de la côte marqués sur la carte. La connaissance de ces angles détermine la position du canot à l'instant du sondage (Voy. PROBLÈMES DE TOPOGRAPHIE, XI). Les sondages se font ordinairement en suivant un système de lignes, dont les unes partent en divergeant d'un point central vers les différents points de la côte, et les autres sont au contraire plus ou moins parallèles au rivage. On multiplie les sondes à l'approche de la côte, et surtout dans le voisinage des *dangers*; la détermination exacte des points dangereux et de toutes les circonstances qui s'y rapportent est, on le sent, de la plus haute importance.

Les sondes une fois marquées sur un plan provisoire, il s'agit de les réduire au niveau des plus basses mers. Soit Z la profondeur indiquée par la sonde en un certain point à une certaine heure; si h est le nombre indiqué par l'échelle de marée pour la hauteur de la mer à la même heure au-dessus des eaux moyennes, Z - h sera la profondeur du point considéré au-dessous des eaux moyennes. Si maintenant y₀ est l'unité de hauteur (Voy. MAREES) pour le port où l'on se trouve, 1,17.y₀ est l'élévation de la mer moyenne au-dessus de la plus basse mer; par conséquent

$$Z - h - 1,17y_0 = x \quad [1]$$

est la profondeur du point considéré au-dessous de la plus basse mer. C'est ce nombre, réduit en brasses et pieds, que l'on inscrit sur la carte à côté du point dont il s'agit. Néanmoins, dans les cartes modernes, on exprime ce nombre en décimètres.

La quantité Z - h - 1,17.y₀ peut être négative; c'est ce qui arrive lorsqu'un point, habituellement couvert d'eau, émerge d'une certaine quantité x à l'instant de la plus basse mer; on inscrit encore le nombre x sur la carte; mais, pour le distinguer de ceux qui indiquent des profondeurs au-dessous des plus basses mers, on le souligne. Ainsi un point marqué 15 émerge de 15 décimètres à l'époque des plus basses mers, tandis qu'un point marqué 15 simplement est de 15 décimètres au-dessous des plus basses mers.

De la relation [1] on tire

$$Z = x + h + 1,17.y_0 \quad [2]$$

Par conséquent, si l'on connaît le nombre x, positif ou négatif, c'est-à-dire non souligné, qui se rapporte à un point donné, si h est la hauteur indi-

quée par l'échelle de marée pour le niveau actuel de la mer au-dessus du niveau moyen, et si η_0 est l'unité de hauteur pour le port où l'on se trouve, la distance Z donnée par la relation [2] sera la profondeur du point considéré au-dessous du niveau actuel.

NIVÔSE, le quatrième mois du calendrier républicain. Il répondait à peu près à l'intervalle compris entre le 21 décembre et le 21 janvier (*Voy. CALENDRIER.*)

NOEUD, unité de longueur employée dans la marine pour évaluer la vitesse des navires. Le noeud est la 120^e partie du mille marin de 60 au degré; il vaut par conséquent 15^m,432 (*Voy. LOCH.*)

NOEUDS, points d'intersection de l'orbite d'une planète avec l'écliptique. On appelle *noeud ascendant* celui qui répond à l'instant où la planète passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal, et *noeud descendant* celui qui répond à l'instant où la planète passe au contraire de l'hémisphère boréal dans l'hémisphère austral. La longitude du noeud ascendant est un des ÉLÉMENTS (*Voy. ce mot*) qui déterminent la position de l'orbite.

La dénomination de *noeuds* s'applique également aux intersections de l'écliptique avec l'orbite d'une comète ou avec l'orbite de la lune.

Les astronomes désignent le noeud ascendant par le signe Ω et le noeud descendant par le signe ζ .

NOMBRE D'OR, rang qu'une année occupe dans le CYCLE LUNAIRE (*Voy. ce mot*).

Pour obtenir ce nombre, il suffit d'ajouter une unité au millésime, et de diviser la somme par 19; le reste de la division est le nombre d'or. Si, par exemple, au millésime 1860 on ajoute 1, on obtient 1861, qui, divisé par 19, donne pour reste 18; le nombre d'or pour 1860 était donc 18. Quand le reste de la division est zéro, on ajoute 19; ainsi en 1861, le nombre d'or était 19.

NOMBRES ROUGES. *Voy. COMPTES COURANTS.*

NONAGÉSIME, point de l'écliptique qui est à 90° de chacun de ceux où l'écliptique est coupé par l'horizon. La détermination de ce point sert d'auxiliaire dans le calcul des longitudes par l'observation des éclipses de soleil. (*Voy. la Géodésie de France, n° 427 et suiv.*) Cette méthode, quelquefois employée par les astronomes, mais qui exige de laborieux calculs, n'est usitée ni en géodésie, ni dans la navigation. L'observation de l'instant précis d'une phase déterminée de l'éclipse laisse toujours quelque incertitude.

NONIUS, nom primitif du **VERNIER** (*Voy. ce mot*), et dérivé du nom de Pedro Nuñez, savant portugais, auquel on en attribue l'invention.

NON-PRESSION, nom donné par Dubuat à la diminution de pression qui se manifeste sur la face d'aval d'une plaque plongée perpendiculairement dans un courant; c'est la différence entre la pression hydrostatique et la pression effective observée. D'après ses expériences, en nommant Π le poids du mètre cube du fluide, v sa vitesse, et k' un coefficient numérique, la non-pression, rapportée à l'unité de surface, est exprimée par

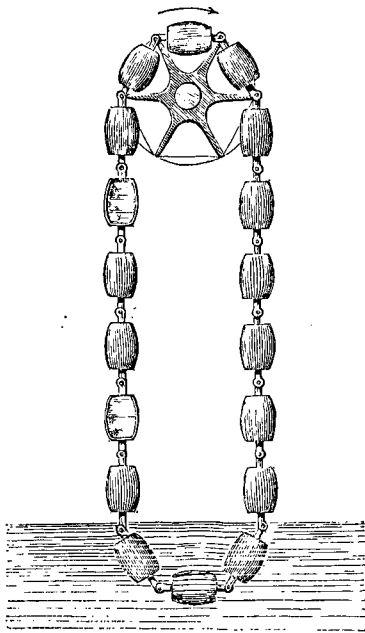
$$k' \Pi \frac{v^2}{2g},$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la densité du fluide et à la hauteur due à sa vitesse. Le coefficient k' a pour valeur moyenne 0,67, quand il

s'agit d'une plaque mince. Mais il diminue à mesure que l'épaisseur de la plaque augmente. Si la plaque est remplacée par un cube, on a $k' = 0,27$; et si le cube est remplacé par un prisme allongé ayant une longueur triple du côté de sa section transversale, on a $k' = 0,15$.

NORD, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (*Voy. ce mot*). L'observateur qui, dans notre hémisphère, regarde le soleil à midi, a derrière lui le nord. Le nord est aussi appelé *septentrion*.

NORIA, machine destinée à élever l'eau, employée en Orient de temps immémorial, et connue dans quelques pays sous le nom de *chaîne-à-pots*. Une noria a la plus grande analogie avec la machine nommée **CHAPELET** (*Voy. ce mot*); elle n'en diffère essentiellement qu'en ce que les palettes du chapelet inclinées ou les disques du chapelet vertical sont remplacés par des vases dont l'orifice est tourné vers le bas dans la descente, et vers le haut par conséquent dans la montée. Réduite à sa plus grande simplicité, une chaîne-à-pots se compose de deux cordes sans fin, parallèles, s'enroulant sur un tambour, quelquefois sur deux, et auxquelles sont suspendus de distance en distance des pots qui s'empressent en plongeant dans le puisard, et qui versent l'eau dans un canal disposé à cet effet lorsqu'ils sont parvenus au haut de l'appareil. On trouve encore en Algérie des norias de ce genre, importées par les colons mahonnais. — On substitue avec avantages à ces vases en terre, nécessairement fragiles, des caisses prismatiques ou augets en bois, de forme allongée; ou mieux encore, des augets en tôle. — M. Gâteau a donné à ces augets des couvercles à charnières qui s'ouvrent lorsque l'auget est parvenu



au sommet de l'appareil. Ces couvercles évitent en partie le déversement de l'eau, dû au balancement latéral, déversement auquel on a donné le nom de *baquetage*; mais ils ne le font pas disparaître en-

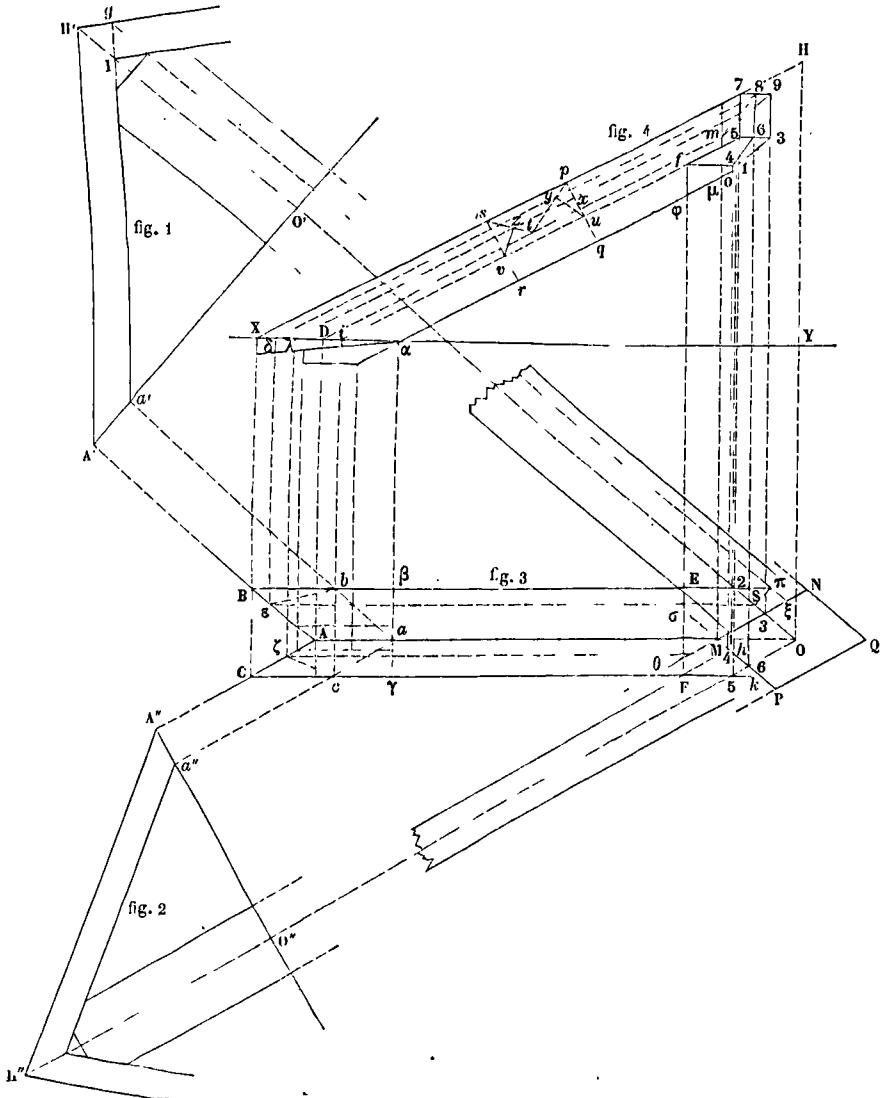
tièrement. On ne donne aux augets qu'une vitesse de 0^m,60. Pour tenir compte du baquetage, des frottements et de diverses autres causes de perte, Navier a proposé de représenter le rendement des norias par la formul :

$$0,80 \cdot \frac{h}{h + 0^m,75}$$

dans laquelle *h* désigne la différence de niveau entre le puisard et la bêche ou le canal dans lesquels l'eau est déversée; le terme 0^m,75 qui entre au dénominateur *y* a été introduit pour tenir compte de la nécessité où l'on est d'élever l'eau à une hauteur plus grande que celle à laquelle elle doit réellement parvenir. La figure ci-contre représente une noria.

Les norias ne sont pas exclusivement employées à élever l'eau; on s'en sert dans les moulins pour élever le mélange de son et de farine qui sort des meules, et dans plusieurs autres industries pour élever diverses matières pulvérulentes. On retrouve les norias dans les machines à draguer; mais les godets qui puisent le sable au fond de l'eau ne devant point élever de liquide, on les perce d'une multitude de petits trous qui permettent à l'eau de s'écouler.

NOUE, pièce de charpente placée à l'angle rentrant formé par la rencontre de deux combles de même hauteur (Voy. COMBLES); cette pièce est creusée à sa partie supérieure, de manière à présenter



elle-même un angle dièdre rentrant, dont les faces appartiennent respectivement aux plans de lattis supérieurs des deux combles.

Soient (fig. 1 et 2) les profils des deux combles

rabattus sur le plan horizontal formé par les lignes d'about. On fait abstraction des arbalétriers, et l'on suppose, comme dans le tracé de la **CROUPE DROITE** ou **HAISE** (Voy. ces mots), que les chevrons repo-

sont directement sur le faitage. Soient AA' et AA'' ces lignes d'about. Soient $O'O$ et $O''O$ les projections horizontales des lignes de couronnement. La ligne AO sera la projection de l'arête de l'angle rentrant, et donnera la direction de la noue. Soit aa' la ligne de gorge du premier comble; en prenant aa'' parallèle à OO'' , on aura la ligne de gorge du second comble; et le point a'' déterminera l'écartement des chevrons de ce second comble.

De même les arêtes latérales des faitages devront se rencontrer sur OA , ce qui déterminera l'équarrissage du second quand le premier sera donné. Il en sera de même pour les arêtes latérales des poinçons. — Nous supposons d'abord que les deux combles se pénètrent mutuellement, ce qui donne lieu à quatre noues assemblées sur un même poinçon; ce poinçon commun est figuré par un parallélogramme $MNPQ$ (fig. 3), dont le point O est le centre. On a fait abstraction sur la figure de toutes les pièces de la charpente qui ne sont point nécessaires au tracé de la noue. On a réduit la longueur des pièces, en conservant leur équarrissage, afin de rendre les détails plus saisissables.

Après avoir déterminé l'équarrissage que l'on veut donner à la noue, il faut d'abord la dévoyer comme un arêtier de croupe droite ou biaise (*Voy. GROUPE*), c'est-à-dire qu'il faut la placer de manière que ses arêtes supérieures soient dans les plans de lattis supérieurs des deux combles; ce qui se réduit à inscrire dans l'angle $A'AA''$ une droite BC égale à l'équarrissage de la noue, et dont la direction soit perpendiculaire à OA . Ce problème, très-simple d'ailleurs, est résolu à l'art. *CROUPE DROITE*. Les arêtes latérales de la noue devront passer respectivement par les points B et C ; leurs projections, qui doivent être parallèles à OA , se trouvent donc déterminées. Mais on ne prend pas ici pour ligne de gorge, comme on le fait pour l'arêtier, la droite bc qui joint les points où les arêtes de la noue rencontrent les lignes de gorge des deux combles; la noue devant être creusée à sa partie supérieure, offrirait ainsi trop peu de résistance; on transporte sa gorge en $\beta\gamma$ en la faisant passer par le point a . Pour creuser la noue, il faut en enlever le prisme triangulaire qui a pour base le triangle ABC , et ses arêtes parallèles à celles de la noue; cette opération constitue le *déclardement* de la noue. — La tête de la noue vient embrasser le poinçon par deux faces verticales dites *faces d'engueulement*, comme cela a lieu pour l'arêtier. Mais pour ne pas affaiblir le faitage du premier comble par sa rencontre avec la noue, on entaille celle-ci en dessous, suivant le plan de lattis inférieur (qui est celui du faitage), et on termine la noue de ce côté au plan vertical 2.3 mené par la ligne de couronnement, ce qui produit une face quadrangulaire $E.1.3.2$. On entaille de même la noue en dessous par le plan de lattis inférieur du second comble, et on la termine de ce côté au plan vertical 5.6 de la ligne de couronnement de ce second comble; on obtient ainsi une face quadrangulaire $F.4.6.5$. — Pour se rendre complètement compte de la forme de la noue à sa rencontre avec le poinçon, il faut la projeter sur un plan vertical parallèle à ses arêtes latérales. Soit XY (fig. 4) la trace horizontale de ce plan, que nous supposons rabattu. Prenons X sur le prolongement de BC ; abaïssons du point O sur XY

la perpendiculaire OH , et prenons YH égal à $O'H'$ ou à $O''H''$; puis tirons XH ; ce sera la projection verticale des arêtes de la noue projetées horizontalement en Bb et Cc . Prolongeons $\beta\gamma$ jusqu'en α , et menons par ce point une parallèle à XH , ce sera la projection des arêtes inférieures; abaïssons du point A sur XY la perpendiculaire AD , et menons par le point D une nouvelle parallèle à XH , ce sera la projection de l'arête de l'angle rentrant; enfin, prolongeons bc jusqu'en i et tirons if parallèle à XH , ce sera la projection de l'intersection des faces verticales de la noue avec les plans de lattis inférieurs des deux combles. — Sur les droites ainsi obtenues, projetons les différents points de la projection horizontale de la tête de la noue. Les points E et F viendront en f , le point M viendra en m , les points marqués 1, 2, 3, 4, 5, 6 donneront ceux qui sont marqués des mêmes chiffres sur la figure 4 (les points 2 et 5 donnent le même point 5). Il sera facile alors de tracer la projection verticale de la tête de la noue. On y reconnaîtra : 1° une première face quadrangulaire $f. \varphi. 0.4$; c'est l'intersection de la noue par la face verticale du faitage du second comble; le côté $f.4$ est horizontal, puisque c'est une des arêtes horizontales du faitage; 2° une seconde face quadrangulaire $f.4.6.5$; c'est l'intersection de la noue par le plan de lattis inférieur du même comble, formant l'un des plans supérieurs du faitage; le côté 5.6 est horizontal, puisque c'est aussi une arête horizontale du faitage; 3° une face rectangulaire 5.6.8.7; c'est une face verticale par laquelle la noue s'appuie de ce côté sur la tête de la noue voisine, qui n'est pas figurée sur l'épure; 4° une face de forme hexagonale $\mu.0.4.6.8.m$; c'est une des deux faces d'engueulement. Quatre autres faces, analogues à celles que nous venons d'énumérer, se retrouveraient de l'autre côté du poinçon; on n'aperçoit sur la figure qu'une partie de la seconde face d'engueulement; elle coupe la première, suivant la verticale μm ; les autres faces ne sont point visibles. — La figure 5 montre la tête de la noue en perspective.

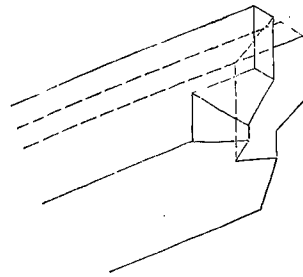


Fig. 5.

Quant au pied de la noue, il s'assemble à tenon et embrèvement dans le demi-tirant qui le porte, et que l'on n'a point représenté sur l'épure. Les détails de l'embrèvement et du tenon sont suffisamment indiqués sur les figures 3 et 4.

Si l'on veut obtenir la section droite de la noue, on pourra employer ou les méthodes générales de la Géométrie descriptive, ou le procédé suivant qui s'en déduit sans difficulté. Menez (fig. 4) la droite pq perpendiculaire à XH , et qui rencontre

en x la droite Dm . Sur XH portez, à partir du point p , une longueur ps égale à la distance des droites BE et CF de la figure 3, c'est-à-dire à l'équarrissage de la pièce. Sur Dm portez, à partir du point x , une longueur xt égale à la distance des droites BE et AM ; menez sr parallèle à pq , et joignez ts et tp ; la figure $pqrstp$ sera la section droite demandée, supposée rabattue sur le plan de la figure 4, en tournant autour de pq .

Cette section présente, comme on voit, des angles très-aigus en p et en s . Pour les éviter, on coupe souvent la noue par des plans parallèles à ses arêtes latérales et normaux respectivement aux deux plans de lattis supérieurs. Ces plans sont figurés sur la section droite par les lignes uy et vz perpendiculaires à tp et à ts . Les points u et v sont situés sur les intersections des faces verticales de la noue avec les plans de lattis inférieurs; c'est en effet par ces intersections que l'on fait passer les plans normaux. La projection verticale de l'arête correspondante au point y sera la parallèle à XH menée par ce point; on obtiendra la projection horizontale correspondante en menant par le point δ où la projection verticale rencontre la ligne de terre XY une perpendiculaire à cette ligne jusqu'à la rencontre de la ligne d'about AB , en un point ϵ , et en menant par ce point ϵ une parallèle à OA . On obtiendra semblablement les projections λ et ζ de l'arête correspondante au point z . Ces arêtes devront remplacer les arêtes supérieures projetées verticalement en XH et horizontalement en BE et CE . La noue sera diminuée ainsi du prisme triangulaire ayant pour base le triangle $Bb\epsilon$ et ses arêtes parallèles à celle de la noue, ainsi que du prisme analogue ayant pour base le triangle $Cc\zeta$. Le pas de la noue, qui était $\beta BAC\gamma$, se trouvera réduit à $\beta b\epsilon A \zeta c\gamma$.

On construirait comme ci-dessus la projection verticale de la tête de la noue. Mais, afin de donner un exemple des principaux cas qui peuvent se présenter, nous supposons d'une part que les faces $MA\zeta\theta$ (fig. 3), $\theta\zeta CF$, et la face verticale CF soient prolongées jusqu'à la face verticale MP du pignon, ce qui pourrait avoir lieu s'il n'y avait pas de noue de l'autre côté du faitage du second comble; les droites $\zeta\theta$ et CF devront dans ce cas être prolongées jusqu'à leur rencontre avec MP aux points h et k , Nous supposons d'autre part que, du côté MN , la tête de la noue soit prolongée jusqu'au plan de lattis supérieur du premier comble, de l'autre côté du faitage, ce qui pourrait avoir lieu si les deux combles, au lieu de se croiser mutuellement comme nous l'avons supposé jusqu'ici, ne faisaient que se rencontrer en présentant un arêtier en opposition avec la noue considérée (Voy. COMBLES). Il faut alors, sur la figure 1, prolonger la trace du lattis inférieur $a'I$ jusqu'à sa rencontre en g avec la trace du lattis supérieur, de l'autre côté du faitage, et mener par le point g une parallèle $g\xi$ à OO' ; elle servira de limite à la tête de la noue. On prolongera BE (fig. 3) jusqu'à sa rencontre avec $g\xi$ au point π , et $\epsilon\sigma$ jusqu'à sa rencontre avec 2.3 au point S ; et l'on joindra πS . Cela posé, transportons (fig. 6) les lignes parallèles à XH de la figure 4 sur lesquelles se projettent verticalement les différents points de la tête de la noue, et les lignes

de cette même tête. Puis, des divers points de cette projection horizontale abaissons des perpendiculaires sur la ligne de terre XY , prolongées jusqu'à leur rencontre avec les lignes correspondantes de la

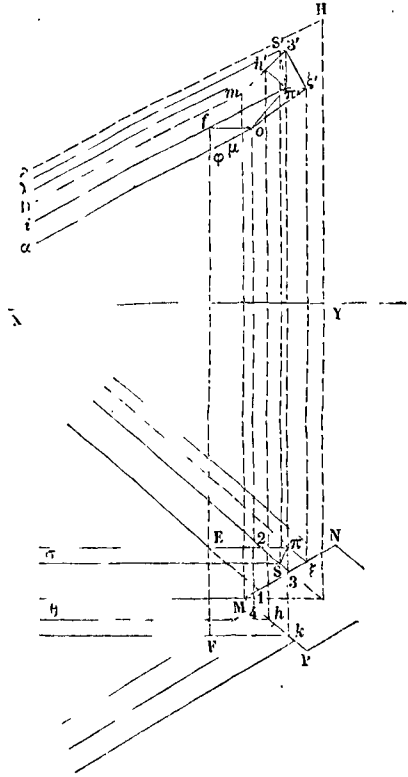


Fig. 6.

projection verticale. Les points E et F donneront sur $\alpha\phi$ le point ϕ et sur if le point f ; le point M donnera sur Dm le point m ; le point h donnera sur $\alpha\phi$ le point o ; le point k donnera sur $\lambda h'$ le point h' ; le point k donnera sur if le point π' , qui correspond également au point π ; le point ξ donnera ξ' sur une parallèle à XY menée par le point π' ; le point S donnera sur $\delta S'$ le point S' ; enfin le point 3 donnera $3'$ sur une parallèle à XY menée par le point S' . On joindra $f.o$; $o.\pi'$; $o.\xi'$; $h'.3'$; $h'.\pi'$; et $3'.\xi'$; on aura ainsi la projection verticale de la tête de la noue. On y reconnaîtra du côté MP : 1° une face triangulaire $\phi.f.o$; c'est l'intersection de la noue par la face verticale du faitage du second comble; le côté $f.o$ est horizontal, puisqu'il coïncide avec une arête horizontale de ce faitage; 2° une seconde face triangulaire $f.o.\pi'$; c'est l'intersection de la noue avec la face supérieure inclinée du même faitage; elle a pour projection horizontale le triangle $F.h.k$; 3° une face polygonale $\mu.o.\pi'.h'.m$; c'est la première face d'engueulement; elle n'est point visible sur la figure; 4° une face $Dm'h'\lambda$, parallèle aux arêtes longitudinales; c'est une des faces de délarquement; 5° une seconde face $i.\pi'.h'\lambda$ parallèle aux arêtes; c'est une des faces normales au lattis supérieur; 6° enfin, la face verticale $\alpha\phi fi$.

Du côté MN, on reconnaîtrait une série de faces analogues. La seconde face d'engueulement est $\mu.o.\xi'.3'.m$. La seconde face de délardement est $D.m.3'.S'.\delta$. La face qui forme le bout de la pièce, et qui a pour projection horizontale $\pi.S.3.\xi$, est projetée verticalement en $\pi'.S'.3'.\xi'$; elle n'est point visible sur la figure.

La noue considérée en premier lieu porte quelquefois le nom de noue *délardeé*, et l'on donne à la noue à faces normales au lattis le nom de noue *déversée*, par suite d'une fausse analogie avec les chevrons et empanons. Ces dénominations sont inexactes, attendu que chacune des deux noues est délardée, et qu'aucune des deux n'est réellement déversée puisqu'elles conservent des faces normales. Il est préférable de distinguer la seconde par le nom de *noues à faces normales*.

Quelques constructeurs ajoutent un embrèvement au point où la noue s'assemble avec le poinçon; il en résulte une petite modification dans le tracé de la noue et dans celui du poinçon. Le lecteur trouvera tous les détails désirables à cet égard dans le *Traité de Charpente* de J. Adhémar.

Les chevrons et chevrons-empanons peuvent, comme dans le cas d'une croupe biaise, être délardés ou déversés; et ils donnent par conséquent lieu aux mêmes problèmes (*Voy. EMPANON DÉVERSÉ*).

Enfin, lorsque deux combles se rencontrent en formant un angle rentrant, on peut, comme dans le cas de l'angle saillant ou de la croupe, rabattre les plans de lattis supérieurs dans un plan unique, après y avoir projeté tous les chevrons et empanons. On obtient ainsi une *herse* analogue à celle dont il est question à l'article *CROUPE*.

(*Voy. l'ouvrage cité plus haut, et le Traité de Stéréotomie* de A. Leroy.)

En réalité, il y a au-dessous de la noue un arbalétrier auquel on donne le nom d'*arbalétrier de noue*. Cet arbalétrier se *dévoit* comme la noue elle-même. Supposons que OA (fig. 7) soit la projection

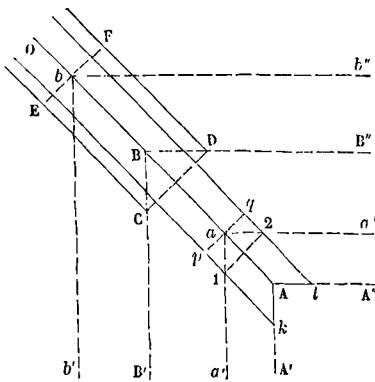


Fig. 7.

horizontale de l'arête de la noue; que AA', AA'' soient les lignes d'about des chevrons des deux profils du comble, aa', aa'' les lignes de gorge de ces chevrons; que BB' et BB'' soient les lignes d'about des arbalétriers de ces mêmes profils, et bb', bb'' leurs lignes de gorge. Après avoir placé la noue comme il a été expliqué plus haut, on placera la ligne d'about CD de l'arbalétrier de noue de ma-

nière qu'elle soit perpendiculaire à AO, et qu'elle s'appuie par ses extrémités sur les lignes d'about BB' et BB''; la ligne de gorge EF de cet arbalétrier passera par le point b, intersection des lignes de gorge des arbalétriers des deux profils. Le pas de la noue sera la figure Akpql; le pas de l'arbalétrier de noue sera le rectangle CDFE.

Lorsque deux combles cylindriques de même hauteur se rencontrent, ils donnent lieu à une *noue elliptique*, soumise aux mêmes règles qu'une noue droite, mais offrant la courbure d'une ellipse. On détermine ses arêtes par les procédés que fournit la Géométrie descriptive pour construire l'intersection de deux surfaces cylindriques; et, pour pouvoir tailler les pièces dont l'assemblage forme la noue, on les projette sur un plan parallèle à leurs faces verticales. (*Voy. le Traité de Charpente* de J. Adhémar, n° 464.)

NOULET, ensemble des pièces de charpente placées à l'intersection de deux COMBLES (*Voy. ce mot*) de hauteurs différentes. — Soient AA' et BB' (fig. 1)

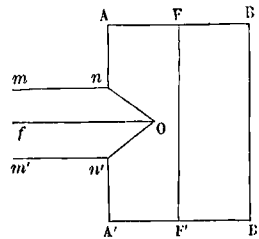


Fig. 1.

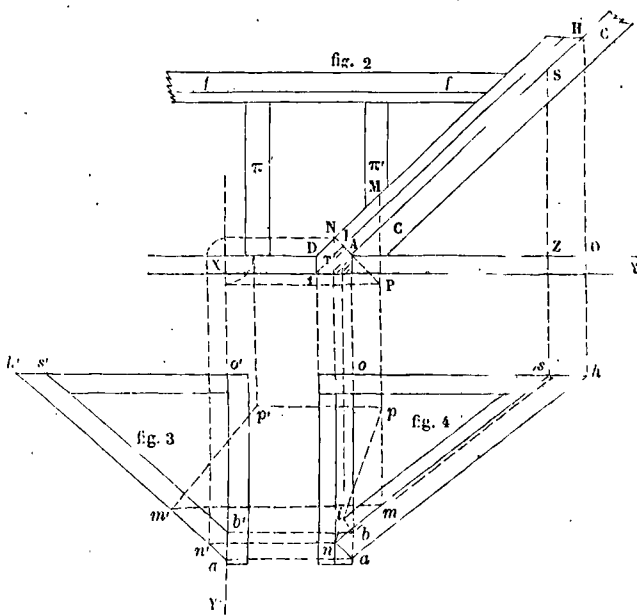
les lignes d'about d'un comble; mn et m'n' les lignes d'about d'un comble moins élevé; FF' et fO les lignes de couronnement de ces deux combles. La ligne fO rencontrera le plan AFF'A' en un point O; et les plans de lattis supérieurs du petit comble couperont le plan de lattis du grand comble suivant deux droites On et On'. Les pièces de charpente placées suivant les arêtes On et On' forment ce qu'on appelle un *noulet*. Le noulet est *droit* lorsque, comme dans l'exemple de la figure 1, les lignes de couronnement des deux combles sont perpendiculaires entre elles; il serait *biais* si ces deux lignes étaient obliques l'une par rapport à l'autre.

La plupart du temps le plus petit des deux combles recouvre un bâtiment élevé après coup auprès d'un bâtiment ancien, et il n'y a point de communication entre l'intérieur du comble nouveau et l'intérieur de l'ancien. Pour relier les deux combles, on applique sur le comble ancien une ferme inclinée, qui a la forme du triangle nOn' et qu'on appelle la *ferme couchée*; c'est avec cette ferme couchée que s'assemblent le fattage et les pannes du comble nouveau.

On s'astreignait autrefois, et pour des raisons de symétrie, à donner aux faces supérieures de la ferme couchée une direction parallèle au lattis du vieux comble, et à toutes les autres faces une direction parallèle au lattis du comble nouveau. Cette disposition donne lieu à un grand nombre d'angles aigus et de coupes obliques. On préfère aujourd'hui donner à la face supérieure des chevrons

et arbalétriers de la ferme couchée une direction perpendiculaire au lattis du nouveau comble; ses assemblages se font alors d'après les règles ordinaires (Voy. ASSEMBLAGES) et ne présentent point de difficulté. Mais on a à construire les projections des arêtes des pièces ainsi déladées. Pour cela on opère de la manière suivante. Soit CC (fig. 2) la

mènera donc une parallèle à ah , et l'on aura la projection d'une seconde arête du chevron. On en aura une troisième en menant une parallèle aux deux premières par le point b , projection de b' sur Oa . Pour obtenir la quatrième, il faut suivant ns faire passer un plan perpendiculaire au plan de lattis du petit comble. On s'y prendra de la manière suivante. Sur



l'arête projetée en ns on prendra un point quelconque dont les projections seront m, m' et M . On prolongera la trace NA jusqu'à sa rencontre avec mM , ce qui donnera un point P . Par le point m' on mènera une perpendiculaire à $a'h'$. Par le point P on fera passer un plan horizontal qui coupera cette perpendiculaire en un point p' , que l'on projettera sur mM en p . Enfin on joindra np ; on mènera par le point b une parallèle à an ; elle coupera np en un point i , qui sera le pied de la quatrième arête du chevron. Il résulte en effet de la construction que ni est la trace, sur la face NA , d'un plan mené par l'arête ns , perpendiculairement au plan du lattis supérieur du petit comble. Le point i projeté sur NA donnera un point I ; par les points I et N on mè-

nera des parallèles à AH ; et l'on aura les projections verticales des arêtes du chevron.

On emploiera les mêmes constructions pour obtenir les projections de l'arbalétrier. Il faut remarquer toutefois que la face correspondante à bi n'est pas astreinte à être parallèle au lattis du petit comble. Cette condition n'est nécessaire que pour la face correspondante à an ; parce que c'est entre cette face et la face inférieure du chevron que doivent être introduites les pannes. La face de l'arbalétrier qui correspond à bi peut donc rester perpendiculaire au plan de lattis du vieux comble.

Toutes les autres pièces de la ferme couchée, le poinçon, l'entrait, etc., ont simplement leurs faces, inférieure et supérieure, parallèles au lattis de l'ancien comble, et leurs faces latérales perpendiculaires à ce lattis, comme cela résulte naturellement de leur position et de leur forme équerrie.

Au-dessus de la ferme couchée, les chevrons du petit comble vont en se raccourcissant à mesure qu'ils approchent du sommet; ils s'assemblent, avec les chevrons de la ferme couchée, par des tenons et des embrèvements ordinaires; la position qui a été donnée à la face supérieure de ces chevrons dispense de tout mode particulier d'assemblage. Les chevrons qui se correspondent des deux côtés du petit comble s'assemblent d'ailleurs par entaille à mi-bois comme dans les combles ordinaires.

Lorsque la dernière ferme du petit comble π (fig. 2) est trop éloignée du sommet de la ferme couchée, on est obligé d'employer dans l'intervalle une ferme tronquée π' dont le poinçon s'assemble

projection verticale du chevron du vieux comble; ff le faite du comble nouveau, et T la section du tirant de la ferme couchée. L'une des faces de ce tirant, représentée par la droite AN , est normale au lattis de l'ancien comble. Soit (fig. 3) la moitié d'une des fermes du petit comble, rabattue sur le plan des lignes d'about des deux combles, que nous prendrons pour plan horizontal. Cette ferme est réduite à son chevron, à son poinçon et à son tirant; la hauteur $o'h$ détermine la ligne OH de la figure 2, en grandeur et en position, et la hauteur $o's$ est égale à ZS . — Cela posé, il s'agit de construire les projections de la ferme couchée. En premier lieu, par les sommets A, N, D de la section T du tirant de cette ferme, on mènera des perpendiculaires à la ligne de terre XY . En prolongeant $h'o'$ on obtiendra l'axe oh de la ferme demandée, lequel devra être terminé à la projection h du point H . Par le point a' on mènera une parallèle à XY , ce qui donnera le point a ; en le joignant au point h on aura la projection horizontale d'une des arêtes du chevron qu'on veut obtenir. Pour se procurer l'arête parallèle qui rencontre l'arête supérieure du tirant passant par le point N , il faut, par le point a , mener, dans la face qui a pour trace AN , une droite qui soit située dans le plan de lattis supérieur du petit comble. On obtiendra cette droite en remarquant que si par le point N on mène un plan horizontal, il coupera ce plan de lattis suivant une droite $n'n$ parallèle à $a'a$; il suffira donc de joindre an , ce sera la droite demandée; car il résulte de la construction qu'elle a deux points a et n dans le plan de lattis considéré. Par le point n on

à tenon dans celui de la ferme couchée, et dont les chevrons et arbalétriers s'assemblent de même avec les chevrons et les arbalétriers de la ferme couchée.

Pour l'exécution de cette dernière ferme, il est commode de s'en procurer le rabattement sur le plan horizontal, afin d'avoir les pièces en vraie longueur. Pour opérer ce rabattement, on projette tous les points de la figure 2 appartenant à la ferme couchée, sur une parallèle à AH menée par le point 1, et l'on fait tourner la projection ainsi obtenue autour de la perpendiculaire au plan vertical menée par ce même point 1. Cette opération ne présente aucune difficulté.

Plus généralement on donne le nom de *noulet* à l'ensemble des pièces placées à l'intersection de deux combles, d'espace quelconque, mais de hauteurs différentes; et particulièrement dans le cas où l'un des combles est un comble ordinaire à deux égouts. Le noulet est cylindrique, conique, ou sphérique, suivant que le comble principal a la forme d'un cylindre, d'un cône ou d'une sphère. Les arêtes de noulet se déterminent par les procédés qu'enseigne la Géométrie descriptive pour trouver l'intersection des surfaces. Si le noulet a des faces planes, on le projette sur un plan parallèle à ces faces, et la projection ainsi obtenue, reportée sur la pièce même, sert à lui donner la forme qu'elle doit avoir. Si le noulet est à double courbure, on tire chacune des pièces qui le composent du *solide capable* convenablement déterminé par des opérations analogues au débillardement du LITON d'un escalier (Voy. ce mot). Nous ne saurions entrer ici dans le détail des diverses espèces de noulets, dont chacun exigerait une épure spéciale. Ce genre de construction est peu en usage dans les édifices modernes. Nous renverrons aux traités de charpente, et particulièrement à celui de M. J. Adhémar, n° 498 et suiv.

NOYAU (D'ESCALIER), pilastre ou poteau établi

dans un escalier pour recevoir les bouts des marches opposés à ceux qui s'engagent dans le mur (Voy. ESCALIERS).

NOYAU D'ASSEMBLAGE, terme de charpente. On nomme ainsi une pièce de bois conique, verticale, et généralement courte, qui reçoit les abouts de tous les chevrons ou arêtiers d'un comble conique, sphérique, elliptique, ou d'un dôme polygonal. Ce noyau est remplacé par un poinçon commun quand les fermes du comble ou du dôme sont pourvues d'entrait.

NUTATION, mouvement de l'axe de la terre en vertu duquel le pôle de l'équateur décrit sur la sphère céleste, autour de sa position moyenne, une petite ellipse. Cette ellipse, dont le grand axe est situé dans le plan déterminé par l'axe de la terre et par celui de l'écliptique, a une amplitude de 19",3, tandis que son petit axe, perpendiculaire à ce même plan, a une amplitude de 14",4. Ce mouvement, dont la période est de 18 ans 2/3, s'effectue pendant que la position moyenne de l'axe de la terre décrit autour de l'axe de l'écliptique, et en vertu de la PRÉCESSION (Voy. ce mot), un cône de révolution, dans l'espace de 26 000 ans environ. Par l'effet de ce double mouvement, le pôle de l'équateur parcourt réellement sur la sphère céleste une courbe ondulée, et il s'approche et s'éloigne alternativement du pôle de l'écliptique; il en est le plus éloigné toutes les fois que le nœud ascendant de la lune coïncide avec l'équinoxe de printemps. On fait voir dans la Mécanique céleste que la nutation est en effet due à l'action de la lune.

Le balancement de l'axe de la terre, qui constitue la nutation, entraîne un balancement semblable de l'équateur; en sorte que l'obliquité de l'écliptique oscille autour de sa valeur moyenne, de 9°,65 en plus ou en moins dans une durée de 18 ans 2/3.

La nutation a été découverte par Bradley, en 1747.

O

OBLIGATIONS, engagements souscrits par les Compagnies ou par les villes autorisées à contracter un emprunt. Ces titres produisent un intérêt annuel fixé d'après leur valeur nominale. Les obligations sont généralement remboursables, à des époques déterminées, par voie de tirage au sort, et donnent lieu à des *primes* pour un certain nombre des premiers numéros sortant à chaque tirage.— Les obligations offrent en général un mode de placement plus avantageux que les *actions* (Voy. ce mot), parce que les sommes affectées au paiement des intérêts, au remboursement des obligations sorties par voie de tirage, et aux primes auxquelles le tirage donne lieu, sont prélevées sur les recettes générales avant toute répartition en faveur des actionnaires. Parfois même le remboursement des obligations est garanti par l'État. (Voy. les articles qui suivent immédiatement.) La valeur des obligations est cotée chaque jour à la Bourse, et le revenu qu'elles produisent est inscrit dans une colonne spéciale du Bulletin.

OBLIGATIONS DE LA VILLE DE PARIS, engagements souscrits par la ville de Paris en échange de sommes prêtées. Nous prendrons pour exemple l'emprunt contracté en 1852.

A cette époque, la ville de Paris voulant contracter un emprunt de 50 millions, a souscrit au profit des prêteurs 50 000 obligations au porteur, de 1000^f chacune, rapportant 50^f d'intérêts annuels, payables par semestre, les 1^{er} janvier et 1^{er} juillet. Les obligations de la ville de Paris sont remboursables au pair par 37 tirages au sort, qui ont lieu les 1^{er} mai et 2 novembre de chaque année, jusqu'en novembre 1870; le remboursement des obligations désignées par le sort à ces tirages s'effectue le 1^{er} juillet ou le 2 janvier suivants.

Indépendamment du remboursement au pair, les 60 premiers numéros sortis gagnent des primes ainsi réparties :

1 ^{er} numéro sorti.....	une prime de 50 000 ^f
2 ^e	— 20 000
3 ^e	— 15 000

4°.....	—	10 000
5° et 6°, chacun.....	—	5 000
7°, 8°, etc., jusqu'au 12° inclusivement, chacun.	—	3 000
13°, 14°, jusqu'au 20°....	—	2 000
21°, 22°, — 34°....	—	1 000
35°, 36°, — 59°....	—	500
60°, une prime variable de 2175' à 3025', et dont la moyenne est.....	2 500	

Enfin, aux 13 premiers tirages, il ne doit être tiré que 60 numéros; à partir du 14°, correspondant au 1^{er} mai 1859, le nombre des numéros qui devront être tirés croît brusquement et va en s'élevant à chaque tirage depuis 1522 jusqu'à 2673.

Ces obligations peuvent donner lieu à divers problèmes.

I. On suppose qu'un capitaliste étant porteur de 30 obligations achetées à 1045', cinq de ces obligations aient été désignées par le sort au 11^e tirage pour être remboursées, les rangs des numéros sortis étant le 3°, le 17°, le 28°, le 41° et le 57°.

On demande ce que ce capitaliste a gagné ou perdu ?

Il a perdu d'un côté 5 fois 45' ou 225'.

Mais il a gagné pour le n° sorti le 3°...	15 000'
—	17°... 2 000
—	28°... 1 000
—	41°... 500
—	57°... 500

Total..... 19 000'

Retranchant la perte..... 225

Il reste pour le bénéficiaire..... 18 775'

II. On suppose qu'au 37^e tirage, toutes les obligations soient entre les mains d'un même propriétaire, et qu'il les ait achetées au prix de 1062'; et l'on demande ce qu'il perdra ou gagnera à ce tirage ?

Au dernier tirage, le nombre des obligations sera réduit à 2673; et comme elles seront toutes tirées, leur propriétaire gagnera toutes les primes, savoir, d'après ce qui a été dit plus haut :

$$50\,000' + 20\,000' + 15\,000' + 10\,000' + 5000 \times 2 \\ + 3000 \times 6 + 2000' \times 8 + 1000' \times 14 \\ + 500' \times 25 + 2500'.$$

En effectuant les calculs, on trouve 168 000'. Mais le propriétaire des obligations perdra par contre $62' \times 2673$ ou 165 726'. Son bénéfice sera donc l'excès de 168 000' sur 165 726', c'est-à-dire 2274'.

III. On demande quelle a été, pour le porteur d'une obligation de la ville de Paris, la probabilité de gagner la prime de 50 000', au 13^e tirage, au 15^e, et quelle sera cette probabilité au 37^e tirage ?

La probabilité d'un événement est, comme on sait (Voy. PROBABILITÉ), le rapport du nombre des chances favorables à cet événement au nombre total des chances. Au 13^e tirage, il y a déjà eu 12 fois 60 numéros sortis, c'est-à-dire 720 numéros; il en reste donc 50 000 — 720 ou 49 280; ainsi, la probabilité que le premier numéro sortant soit celui de l'obligation considérée, est le rapport de 1 à 49 280, c'est-à-dire $\frac{1}{49280}$.

Au 15^e tirage, il a été tiré 13 fois 60 numéros, plus 1522 numéros, en tout 2302 numéros; il en restait donc 50 000 — 2302 ou 47 698. La probabilité demandée est donc le rapport de 1 à 47 698, c'est-

a-dire $\frac{1}{47698}$.

Au 37^e tirage, il ne restera plus que 2673 numéros à tirer; la probabilité demandée sera donc le rapport de 1 à 2673, c'est-à-dire $\frac{1}{2673}$.

IV. Quelle est l'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE correspondante à chacune des probabilités évaluées à l'article précédent ?

L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (Voy. ce mot) est le produit de la somme à gagner par la probabilité de cet événement. Au 13^e tirage, l'espérance mathématique de gagner la prime de 50 000' est donc $\frac{50000'}{49280}$, ou environ 1',014...

Au 15^e tirage, on obtient $\frac{50000'}{47698}$, ou environ

1',048...

Au 37^e tirage, l'espérance mathématique devient $\frac{50000'}{2673}$, ou environ 18',705...

V. Quelle était, pour le porteur d'une obligation, la probabilité de gagner au 13^e tirage la prime de 20 000', la prime de 15 000', la prime de 10 000'; et quelle était l'espérance mathématique correspondante à chacune de ces primes ?

Pour ces primes, comme pour la prime de 50 000', il n'y a, sur 49 280 chances, qu'une seule chance

favorable; la probabilité est donc $\frac{1}{49280}$.

Pour la prime de 20 000', l'espérance mathématique est donc..... $\frac{20000'}{49280}$, ou 0',408;

Pour la prime de 15 000'..... $\frac{15000'}{49280}$, ou 0',304;

— 10 000'..... $\frac{10000'}{49280}$, ou 0',203;

c'est-à-dire environ 0',40, 0',30 et 0',20.

VI. Quelle sera, pour le porteur de 100 obligations, la probabilité de gagner au moins la prime de 50 000' au 37^e tirage ?

Le nombre des numéros qui restent à tirer au 37^e tirage est 2673. Si, pour abrégier l'écriture, nous représentons ce nombre par n , le nombre total des chances sera le nombre des arrangements de n objets, 60 à 60, c'est-à-dire

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-59). \quad [1]$$

Pour former toutes les chances favorables, il suffira de faire occuper la première place par l'un des 100 numéros appartenant au porteur considéré, et de mettre à la suite tous les arrangements des $n-1$ numéros sortants pris 59 à 59. Le nombre des chances favorables sera donc

$$100(n-1)(n-2)\dots(n-59). \quad [2]$$

La probabilité demandée est le quotient de l'expression [2] par l'expression [1], c'est-à-dire

$$\frac{100}{n}, \text{ ou } \frac{100}{2673}, \text{ ou encore } 0,038411\dots$$

On peut remarquer que cette probabilité est, comme on devait s'y attendre, 100 fois plus grande que celle qui a été obtenue plus haut, dans le cas où la personne dont il s'agit n'était porteur que d'une seule obligation (III).

VII. Quelle sera, pour le porteur de 100 obligations, la probabilité de gagner au moins les six premières primes au 37^e tirage ?

La lettre n désignant toujours le nombre 2673,

on vient de voir que le nombre total des chances est $n(n-1)(n-2)\dots(n-59)$. [1]

Pour former toutes les chances favorables, il faut faire occuper les six premières places par 6 des numéros appartenant au porteur considéré, ce qui fournit un nombre d'arrangements exprimé par

$$100.99.98.97.96.95;$$

puis, à la suite de ces groupes, il faut mettre tous les arrangements des $n-6$ numéros restants, considérés 60—6 à 60—6, ou 54 à 54, ce qui fournit un nombre d'arrangements marqué par

$$(n-6)(n-7)(n-8)\dots(n-59);$$

en sorte que le nombre des chances favorables est exprimé par

$$100.99\dots95 \times (n-6)(n-7)\dots(n-59). [2]$$

La probabilité demandée est le quotient de l'expression [2] par l'expression [1], c'est-à-dire en ôtant les facteurs $n-6, n-7, \dots, n-59$, qui deviennent communs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{100.99.98.97.96.95}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}.$$

En mettant pour n sa valeur 2673, et effectuant les calculs par logarithmes, on trouve 0,000000002366...

VIII. *Quelle sera, pour le porteur de 1000 obligations, la probabilité de gagner toutes les primes au 3^e tirage, et quelle est l'espérance mathématique correspondante à cette probabilité?*

1^o Pour former les chances favorables, il faut faire occuper les 60 premières places par 60 des numéros appartenant au porteur considéré; le nombre de ces chances est donc le nombre des arrangements de 1000 objets, 60 à 60, c'est-à-dire

$$1000.999.998\dots941.$$

Le nombre total des chances est d'ailleurs exprimé par

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-59),$$

n désignant toujours le nombre 2673.

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{1000.999.998\dots941}{n(n-1)(n-2)\dots(n-59)}.$$

Le logarithme du numérateur est la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 1000 jusqu'à 941, c'est-à-dire 179,2155826. Le logarithme du dénominateur est la somme des logarithmes des nombres depuis 2673 jusqu'à 2673—59 ou 2614, c'est-à-dire 205,3301997.

Ainsi, le logarithme du quotient est 27,8853829, et par conséquent la probabilité demandée est exprimée par 768 unités du 2^e ordre décimal.

2^o Quant à l'espérance mathématique correspondante, elle est le produit de 168000^f par cette probabilité, c'est-à-dire environ 129 unités du 2^e ordre décimal.

Les autres emprunts de la ville de Paris donneraient lieu à des problèmes du même genre. (Voy. nos *Problèmes et exercices d'arithmétique et d'algèbre*.)

OBLIGATIONS FONCIÈRES. Ces obligations ont été émises par la Société du Crédit foncier pour satisfaire aux prêts hypothécaires qui sont l'objet principal de ses opérations. Ces obligations sont réparties sous 200 000 numéros, de telle sorte que chaque numéro répond ou à une obligation de 1000^f, ou à 2 obligations de 500^f, ou à 10 obligations de 100^f. Elles donnent droit à un intérêt an-

nuel de 3 pour 100, et à une prime de 20 pour 100 au moment du remboursement, lequel s'effectue par voie de tirage au sort, et doit être effectué au plus tard en 50 années. Cependant la Société a consenti à convertir cette prime de 20 pour 100 en une augmentation d'intérêt de 1 pour 100 pour la plupart des obligations de 500^f et de 100^f.

Un exemple fera comprendre le genre de calculs auxquels ces obligations peuvent donner lieu.

Un capitaliste a acheté, au prix de 925^f chacune, 18 obligations de 1000^f; au prix de 395^f chacune, 30 obligations de 500^f donnant droit à un intérêt de 3 pour 100, et dont 7 ont été désignées par le sort pour être remboursées; au prix de 440^f chacune, 25 obligations de 500^f donnant droit à un intérêt de 4 pour 100; au prix de 85^f chacune, 43 obligations de 100^f donnant droit à un intérêt de 3 pour 100, et dont 15 ont été désignées par le sort pour être remboursées; enfin, au prix de 90^f chacune, 51 obligations de 100^f donnant droit à un intérêt de 4 pour 100. On demande ce que ce capitaliste a gagné au bout de l'année, et à quel taux moyen il a placé son argent.

Il faut calculer d'abord les sommes déboursées.

Elles se composent :

de 18 fois 925 ^f , soit.....	16 650 ^f
— 30 — 395 —	11 850
— 25 — 440 —	11 000
— 43 — 85 —	3 655
— 51 — 90 —	4 590
Total.....	47 745 ^f

Il faut calculer en second lieu les rentrées.

Les actions de 1000^f ont produit chacune un intérêt de 30^f, ce qui fait en tout 18 fois 30^f ou 540^f

Sur les 30 premières actions de 500^f, 7, d'après l'énoncé, ont été remboursées à 600^f, ce qui produit..... 4200

Les 23 autres ont produit chacune un intérêt de 15^f, ce qui fait en tout 15^f × 23 ou 345

Les 25 dernières obligations de 500^f ont produit chacune un intérêt de 4^f pour 100, soit en tout 20^f × 25, ou..... 500

Sur les 43 premières obligations de 100^f, 15 ont été remboursées à 120^f, ce qui fait 120^f × 15, ou..... 1800

Les 28 autres ont produit un intérêt de 3^f chacune, soit en tout 3^f × 28, ou..... 84

Enfin, les 51 dernières obligations de 100^f ont produit chacune un intérêt de 4^f, soit en tout 4^f × 51, ou..... 204

Total..... 7673^f

Mais, pour obtenir le bénéfice, il faut en déduire le prix de revient des obligations remboursées, savoir :

7 fois 395 ^f ou.....	2765 ^f
plus 15 fois 85 ^f ou.....	1275
En tout.....	4040 ^f 4040 ^f

Le bénéfice se réduit donc à..... 3633^f

Le bénéfice pour cent est donné par la proportion :

$$47745 : 3633 = 100 : x, \text{ d'où } x = 7,609$$

ou un peu plus de 7,60 pour 100.

OCCIDENT, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (Voy. ce mot). Dans notre hémisphère, lorsqu'on

regarde le soleil à midi, on a l'occident à sa droite. L'occident se nomme aussi *ouest*.

OCCULTATION, disparition momentanée d'une étoile derrière le disque de la lune. Le mouvement propre de la lune s'effectuant en sens inverse du mouvement diurne, c'est par le bord oriental de son disque que l'étoile est occultée; et c'est par un des points de son bord occidental qu'elle reparait. Le phénomène de l'occultation est tout à fait analogue aux éclipses de soleil; la différence essentielle est que, dans le cas qui nous occupe, l'astre éclipsé est immobile sur la sphère céleste et que son diamètre apparent est nul. Mais on conçoit qu'on puisse, par des procédés analogues à ceux qu'on emploie pour les éclipses de soleil (*Voy. ÉCLIPSES*), déterminer l'instant initial et l'instant final d'une occultation, en traçant à l'avance sur la sphère céleste la série des positions que viendra occuper le centre de la lune à des instants déterminés suffisamment rapprochés les uns des autres. L'exacte coïncidence qu'on remarque entre la durée des occultations ainsi calculées, et la durée qu'on observe effectivement est une des plus fortes preuves de ce fait que la lune n'a pas d'atmosphère.

L'occultation ou la réapparition d'une étoile remarquable étant un phénomène instantané dont le moment peut être observé avec précision de différents lieux, ce phénomène fournit une méthode précieuse pour la détermination des longitudes terrestres (*Voy LONGITUDE*). La différence entre les heures où ce phénomène a été observé de deux lieux quelconques, donne la différence des longitudes de ces deux lieux. La plus grande durée d'une occultation d'étoile répond au cas où le point d'occultation et le point de réapparition sont les extrémités d'un même diamètre. Le moyen mouvement de la lune étant de $13^{\circ} 10' 35''$ ou $47435''$ par jour moyen, et son diamètre apparent ayant pour valeur moyenne $31' 10''$ ou $1870''$, en appelant x la durée de l'occultation dans le cas qui nous occupe, on aura

$$47435'' : 1870'' = 24^h \text{ ou } 86400'' : x;$$

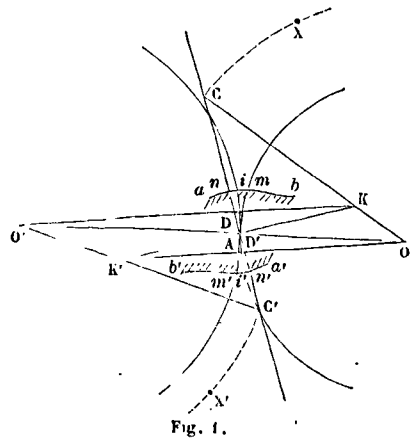
d'où l'on tire $x = 56^m 46^s$,
telle est la durée dont il s'agit.

OCCUPATION, portion de la surface d'une pièce de charpente occupée par la face de contact d'une autre pièce assemblée avec elle. On donne aussi le nom de *pas* à cette portion de surface.

OCTANT, instrument employé, principalement dans la marine, pour la mesure des angles, et qui ne diffère essentiellement du **SEXTANT** (*Voy. ce mot*) qu'en ce que l'arc divisé n'embrasse qu'un huitième de circonférence, d'où le nom d'octant, et que, par conséquent, on ne peut mesurer que des angles qui ne dépassent pas 90° . L'octant a ordinairement 25 centimètres de rayon, et peut donner les angles à une demi-minute près. Il ne porte point de lunette; elle est remplacée par un simple tube, à l'un des bouts duquel une plaque de cuivre percée de deux trous tient lieu d'oculaire; on vise par le trou le plus voisin du plan de l'instrument ou par le trou le plus éloigné, selon que l'image réfléchié de l'objet qu'on vise est peu éclairée ou au contraire très-brillante.

ODONTOGRAPHE (du grec *οδούς*, *οδόντος*, dent, *γράφω*, j'écris), instrument imaginé par le docteur Willis pour faciliter l'application de sa méthode de tracé des engrenages cylindriques à retour.

Il est nécessaire d'exposer sommairement cette méthode approximative pour faire comprendre l'utilité et l'emploi de l'instrument. Le but que s'est proposé le docteur Willis était de remplacer la courbe et le flanc de chaque dent par deux arcs de cercles, de manière que la condition relative aux vitesses angulaires fût remplie exactement pour un point de chacun de ces arcs, et approximativement pour les autres. Voici le tracé qu'il a adopté. Soient O et O' (fig. 1) les centres des circonférences primitives,



qui se touchent en A. Par ce point on mène une droite CC' faisant avec OO' un angle qui pourrait rester arbitraire, mais que M. Willis prend égal à 75° , comme s'il s'agissait du tracé d'un engrenage à développantes. Sur cette droite il élève au point A la perpendiculaire KK', sur laquelle il prend $AK = AK'$; ces distances restent d'ailleurs arbitraires, pourvu qu'elles soient plus petites que le plus petit des deux rayons des circonférences primitives. Il joint OK, O'K, OK' et O'K', qui rencontrent CC' aux points C et D, C' et D'. D'après la formule de Savary, ou plutôt d'après la propriété géométrique qui en est le corollaire (*Voy. ENGRENAGES*), les points C et D seront les centres de courbure de deux courbes, ayant pour normale commune CC' et pouvant se conduire mutuellement avec des vitesses angulaires ayant entre elles le rapport donné (inverse de celui des rayons des circonférences primitives). Si à ces courbes on substitue deux arcs de cercle ayant respectivement pour centres C et D, la condition dont il s'agit ne sera remplie exactement que lorsque ces arcs se toucheront sur la droite CC'; mais elle le sera approximativement pour les autres points si les arcs sont petits, c'est-à-dire si les dents sont petites elles-mêmes, ce qui a généralement lieu dans la pratique, pour des raisons tirées de la considération du frottement. Ce que nous venons de dire des points C et D, on pourrait le répéter identiquement pour les points C' et D'. Dans ce système, le profil de chaque dent se composera de deux arcs de cercle, l'un convexe remplaçant l'épicycloïde des engrenages ordinaires, l'autre concave remplaçant le flanc rectiligne. Le point D étant le centre de l'arc convexe d'une dent de la roue O, le point C sera le centre de l'arc concave correspondant d'une dent de la roue O'. De même, le point D' sera le centre de l'arc convexe d'une dent de la roue O' et

le point C' sera le centre de l'arc concave correspondant d'une dent de la roue O . La valeur absolue de ces rayons demeurant arbitraire, on opère de la manière suivante. On prend, à partir du point A , sur les deux circonférences primitives, les longueurs Am et Am' égales à un demi-pas. Du point D' comme centre, on décrit l'arc ma , qui est l'arc convexe d'une dent de la roue O ; et du point D l'arc $m'a'$, qui est l'arc convexe d'une dent de la roue O' . Pour avoir l'arc concave de la dent de la roue O , il faudrait, d'après ce qui a été dit plus haut, décrire de C comme centre un arc passant par le point n' où la courbe $m'a'$ rencontre la droite CC' ; M. Willis le fait passer pour plus de simplicité par le point n' , ce qui n'altère pas sensiblement l'arc de cercle. Il faut, de plus, le faire tourner autour du centre O pour l'amener à passer par le point m . Pour cela, de O comme centre on trace un arc indéfini CX , et du point m , avec Ci' pour rayon on décrit un second arc qui coupe cet arc indéfini en un point X ; de ce point X on décrit enfin l'arc mb , qui est l'arc concave de la dent de la roue O . De même, on décrit de O' comme centre l'arc indéfini $C'X'$, et de m' comme centre, avec $C'i'$ pour rayon, un second arc qui coupe le premier en un point X' ; puis de ce point X' on décrit enfin l'arc $m'b'$ qui est l'arc concave d'une dent de la roue O' . Ayant ainsi les profils des deux dents, il est facile d'achever le tracé de l'engrenage d'après les règles ordinaires.

C'est pour abrégé les opérations que M. Willis a imaginé l'*odontographe*, sorte de rapporteur, en corne ou en carton, $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta$ (fig. 2) dont un côté $\alpha\beta$

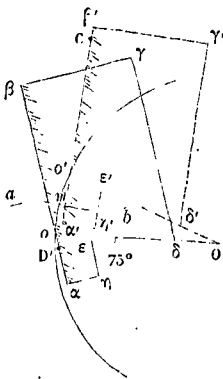


Fig. 2.

porte des divisions dans les deux sens à partir d'un zéro o et dont un autre côté $\epsilon\delta$, passant par le zéro, fait avec $\alpha\beta$ un angle de 75° . Sur l'instrument même sont inscrites deux tables, qui donnent pour chaque couple de valeurs du pas et du nombre de dents, l'une le rayon de l'arc convexe, l'autre le rayon de l'arc concave. Soit m le point de la circonférence primitive où l'on veut tracer le profil de la dent. On prend d'abord les distances mo et $m'o'$ égales à un demi-pas, et l'on tire Oo et $O'o'$. On place l'*odontographe* de manière que le zéro des divisions corresponde au point o , et que le côté $\epsilon\delta$ coïncide avec le rayon Oo . La table des rayons des arcs convexes donne une certaine longueur que l'on

porte de o en D' sur la partie oa de la règle divisée; et du point D' comme centre, avec $D'm$ pour rayon on décrit l'arc ma , qui est l'arc convexe de la dent. On transporte ensuite l'instrument de manière que le zéro des divisions coïncide avec le point o' et que le côté $\epsilon'\delta'$ soit dirigé suivant le rayon $O'o'$. La table des rayons des arcs concaves donne une longueur que l'on porte de o' en C sur la partie $o'\beta'$ de la règle divisée; et du point C comme centre avec Cm pour rayon on décrit l'arc mb qui est l'arc concave de la même dent. On opère de même pour les autres dents, soit de la roue O , soit de la roue O' .

On peut remarquer que les arcs am et mb ne se raccordent pas tangemment au point m , ce qui est un inconvénient, bien que l'erreur soit généralement faible. Une autre erreur résulte, comme on l'a vu plus haut, de ce qu'on remplace les points n et n' (fig. 2) par les points i et i' , qui ne sont pas sur la normale CC' passant par le point A . En sorte que ce tracé, un peu trop proné peut-être, comme fondé sur des considérations théoriques, n'est en définitive qu'un tracé expéditif, mais arbitraire et inexact. Le docteur Willis, dont la science fait autorité dans les arts mécaniques, a réussi à introduire sa méthode dans quelques-uns des principaux ateliers d'Angleterre; mais elle n'est pas adoptée en France.

OEIL-DE-BOEUF, ouverture conique pratiquée dans une voûte sphérique pour donner du jour. On place le sommet de la surface conique qui sert de douelle à l'œil-de-bœuf au centre même de la sphère. Les pierres qui forment la douelle conique, concourent aussi à former l'intrados et l'extrados de la voûte sphérique, et participent à l'appareil des deux voûtes. Considérées comme appartenant au cône, elles présentent une douelle conique et deux joints plans normaux passant par l'axe du cône; considérées comme appartenant à la voûte sphérique, elles présentent une douelle sphérique concave faisant partie de l'intrados, une surface convexe, ordinairement sphérique aussi, faisant partie de l'extrados, deux joints coniques normaux aux deux sphères, et enfin un joint montant qui est un plan vertical mené par le centre de la sphère. La détermination exacte des éléments nécessaires à l'application du trait sur la pierre exige une série d'opérations assez compliquées.

Nous prendrons pour plan horizontal de projection le plan de naissance de la voûte sphérique, et pour plan vertical celui qui passe par l'axe de l'œil-de-bœuf. Soit SO (fig. 1) cet axe, XY la ligne de terre; soient TU , t les intersections des deux sphères, ayant leur centre en S , avec le plan horizontal, $TAFG$, $tafg$ leurs intersections avec le plan vertical, SA et SF les génératrices du cône situées dans ce dernier plan, AF , af les traces verticales des plans des cercles suivant lesquels le cône rencontre les deux sphères. Nous supposons le cercle AF rabattu en $A'Z'F'$ sur le plan vertical en tournant autour de AF . Ce cercle est divisé en parties égales par les arêtes de douelle de la surface conique; les points de division se projettent sur AF en B, C, D , etc.; et si l'on joint ces points au sommet S du cône, on aura en Bb, Cc, Dd , etc., les projections verticales des arêtes de douelle. Le cercle AF se projette horizontalement suivant une ellipse $A'B'C'D'...F'$ facile à

construire en remarquant que son demi grand axe est le rayon AO, et que les sommets de son petit axe sont les projections A' et F' des points A et F. On construira également la projection a'b'c'd'...f' du cercle af. Au moyen de perpendiculaires à la ligne de terre on reportera sur ces ellipses les points B, C, D,... b, c, d...; et les lignes B'b', C'c', D'd', etc., qui devront concourir au point S, seront les projections horizontales des arêtes de douelle.

Les joints qui passent par ces arêtes coupent les deux sphères suivant des arcs de cercles qui se projettent suivant des arcs d'ellipses; on les obtiendra de la manière suivante. Considérons un point quelconque appartenant au rabattement de l'un des joints, par exemple le point φ appartenant au rabattement δμ; si par ce point, supposé ramené à sa place, on mène une parallèle à l'axe du cône, elle percera la sphère extérieure en un point qui appar-

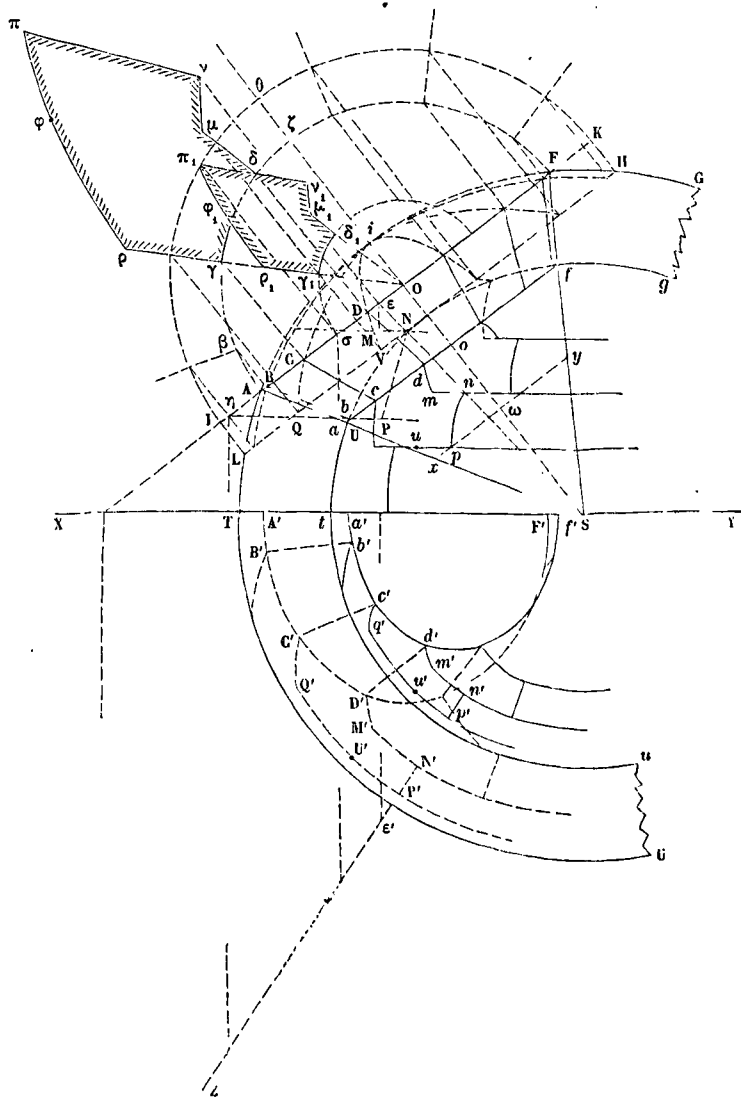


Fig. 1.

tiendra au joint et à la sphère, et par conséquent à leur intersection. Pour le trouver, imaginons le cercle IK qui a le point O pour centre et qui passe par le point φ, et prenons-le pour base d'un cylindre droit ayant ses génératrices parallèles à OS; il rencontrera la sphère extérieure suivant un cercle égal à cette base, et qui sera projeté verticalement suivant la droite LH égale et parallèle à IK; si donc

on abaisse du point φ une perpendiculaire sur LH, son pied V sera la projection verticale du point cherché. On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de la projection de l'intersection du joint et de la sphère, et l'on pourra tracer cette projection iDMV; et par le même moyen on déterminera les projections des autres arcs analogues iCQ, iBR, etc. Elles passent toutes par le point i, où

l'axe OS rencontre le cercle extérieur TAFG. Ces arcs ne doivent être prolongés que jusqu'à leur intersection avec le parallèle par lequel passe le joint conique de la sphère le plus voisin; ainsi, après avoir divisé la circonférence TAFG en parties égales, à partir de XY, si l'on mène par les points de division des parallèles à la ligne de terre, on sait qu'elles seront les projections verticales d'autant de parallèles de la sphère; et il sera facile de déterminer les cercles qui sont les projections horizontales correspondantes; l'arc iDV ne devra être prolongé que jusqu'à sa rencontre en M avec le parallèle MN; de même, l'arc iCQ ne devra être prolongé que jusqu'à sa rencontre avec le parallèle NQ; et ainsi des autres. Enfin, soit SZ la trace du plan vertical formant le joint montant situé immédiatement à droite du point M; il sera facile de construire l'ellipse projection verticale du grand cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère; et si NP est la portion de cette ellipse comprise entre les parallèles MN et PQ, on aura en CDMNPQ la projection verticale de la face extérieure de l'un des voussoirs de l'œil-de-bœuf. Par des perpendiculaires à la ligne de terre, on déterminera la projection horizontale $C'D'M'N'P'Q'$ de la même face; et l'on se procurera de la même manière les projections des faces extérieures des autres voussoirs. Les projections des faces intérieures des mêmes voussoirs s'obtiendront par des moyens analogues; et les faces externe et interne d'un même voussoir étant évidemment des figures semblables dont le centre S de la sphère est le centre de similitude, il en sera de même de leurs projections; en sorte que les sommets homologues devront se trouver deux à deux sur des droites concourant au point S. Sur la figure on a représenté par des grandes lettres les points qui se rapportent aux faces extérieures, et par les mêmes lettres en petit caractère les points homologues qui se rapportent aux faces intérieures; ainsi $cdmnpq$ et $c'd'm'n'p'q'$ sont les projections de la face interne correspondante à la face externe projetée suivant CDMNPQ et $C'D'M'N'P'Q'$.

Pour pouvoir tailler commodément le voussoir qui a ces deux faces, il est nécessaire de déterminer en vraie grandeur le polygone suivant lequel le plan JK est coupé par les joints et la douelle conique de ces voussoirs suffisamment prolongés, ainsi que le polygone suivant lequel les mêmes joints et la même douelle rencontrent le plan xy , parallèle à IK, mené par le point p le plus éloigné pris sur le contour de la projection $cdmnpq$ de la face interne. Voici comment on pourra se procurer ces polygones sans recourir à d'autres projections. Occupons-nous d'abord de celui qui se trouve dans le plan $AZ'F$ ou $l'OK$ relevé. La douelle conique le rencontre suivant l'arc $\gamma\delta$; les joints plans de cette douelle le coupent suivant les droites $\delta\mu$ et $\gamma\rho$ menées par le centre O du cercle $AZ'F$. Les joints coniques de la voûte sphérique coupent ce même plan suivant des arcs d'ellipses que l'on peut obtenir par points. Si l'on joint, par exemple, un point quelconque du parallèle MN, $M'N'$ au centre de la sphère, on aura une génératrice du joint conique correspondant; et tout se réduit à trouver son intersection avec le plan $AZ'F$ et à rabattre cette intersection. Or, en considérant en particulier le point N, N' , on voit que la génératrice passant par ce point coupe le plan $AZ'F$ au

point ϵ , ϵ' ; ce point se rabat sur une perpendiculaire à AF menée par ϵ , à une distance de AF égale à la distance du point ϵ' à la ligne de terre; on obtient ainsi ce rabattement au point ν . On obtiendra de même en μ le rabattement de l'intersection du plan $AZ'F$ avec la génératrice qui passe par le point M, M' ; ce point μ devra, comme vérification, se trouver sur le rayon O δ . On se procurera ainsi autant de points que l'on voudra de l'arc d'ellipse considéré, et l'on pourra tracer cet arc $\nu\mu$, qui, prolongé, irait passer par le point σ où la trace MN du parallèle considéré rencontre la droite AF. En opérant de même pour le parallèle PQ, $P'Q'$, on obtiendra l'arc d'ellipse $\pi\rho$, qui, prolongé, irait passer par le point η où PQ rencontre AF. Il ne reste plus pour clore le polygone qu'à trouver l'intersection du plan $AZ'F$ avec le joint montant NP, $N'P'$; or, cette intersection est une droite; il suffira donc de joindre les points ν et π . On pourrait, par des procédés analogues, se procurer le polygone suivant lequel le plan xy est coupé par les mêmes surfaces; mais on abrégera l'opération en remarquant que les deux polygones dont il s'agit sont des figures semblables ayant le centre S pour centre de similitude. On imaginera qu'après avoir déterminé le second polygone on le projette sur le plan du premier; du point O comme centre avec $o\omega$ pour rayon on décrira une demi-circonférence; l'arc $\gamma_1\delta_1$, compris entre les rayons O γ et O δ sera l'homologue de $\gamma\delta$; il sera dès lors facile de déterminer le polygone $\delta_1\mu_1\nu_1\pi_1\rho_1\gamma_1$ semblable à $\delta\nu\pi\rho\gamma$.

On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour procéder à la taille des voussoirs. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de celui auquel se rapportent les deux polygones dont il vient d'être question. On commencera par dresser une face plane, qui représentera le joint $\gamma_1\rho$; et, perpendiculairement à cette face, on mènera deux plans parallèles entre eux, et distants d'une quantité égale à celle qui sépare les droites AF et xy ; ce seront les plans des deux polygones; et ils couperont la première face suivant des droites qui seront celles sur lesquelles doivent être portées les longueurs $\rho\gamma$ et $\gamma_1\rho_1$. Pour les y porter convenablement, il faut remarquer que, sur la pierre, la droite qui joint le point γ à son homologue γ_1 n'est pas perpendiculaire à $\gamma\rho$ et à $\gamma_1\rho_1$; elle fait avec ces droites les angles d'une génératrice du cône avec ces rayons, c'est-à-dire l'angle FAx et l'angle Axy . On mènera donc, dans la première face dressée, une droite faisant ces angles avec les traces des deux plans parallèles; ce sera l'arête de douelle $\gamma\gamma_1$. Sur les deux plans parallèles on pourra alors appliquer les panneaux $\delta\nu\pi\rho\gamma$ et $\delta_1\mu_1\nu_1\pi_1\rho_1\gamma_1$; leur position y sera déterminée par celle des points γ et γ_1 et par la direction des rayons $\gamma\rho$ et $\gamma_1\rho_1$. Les arcs $\gamma\delta$ et $\gamma_1\delta_1$ serviront de directrices pour tailler la douelle conique; il suffira pour cela de diviser ces arcs en un même nombre de parties égales, et d'appliquer une règle sur les points de division correspondants. Les arcs $\pi\rho$ et $\pi_1\rho_1$ serviront de directrices pour tailler l'un des joints coniques de la voûte sphérique; les arcs $\mu\nu$ et $\mu_1\nu_1$ seront les directrices de l'autre joint conique. Par les droites $\delta\mu$ et $\delta_1\mu_1$ on fera passer un plan, qui sera le second joint de la douelle conique; par les droites $\pi\nu$ et $\pi_1\nu_1$ on en fera passer un autre, qui sera le joint montant de la voûte sphérique. Il restera à tailler les

deux faces appartenant à l'intrados et à l'extrados de cette voûte; on se servira pour cela de deux cerces (Voy. ce mot) : l'une convexe, taillée sur le cercle *tafg*, pour la surface interne de la voûte; l'autre concave, taillée sur le cercle *TAFG*, pour la surface externe. Il sera facile de se procurer des points de repère pour se guider dans la pose des cerces. Si l'on mène, par exemple, par le point *S*, une droite quelconque coupant les figures *c'd'm'n'p'q'* et *C'D'M'N'P'Q'* aux points *m', u'* et *M', U'*, on pourra reporter les points d'intersection sur les figures *cdmnpq* et *CDMNPQ*, aux points *m, u* et *M, U*, et de là il sera facile de les reporter sur les polygones $\delta\mu\nu\pi\gamma$ et $\delta\mu_1\nu_1\pi_1\rho_1\gamma_1$ aux points μ, φ et μ_1, φ_1 en rabattant ces points comme on l'a fait pour les sommets des polygones. Le voussoir se trouvera ainsi complètement taillé.

Il est représenté figure 2 dans la position qu'il oc-

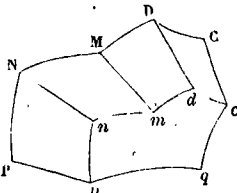


Fig. 2.

cupe, à gauche et au-dessous du diamètre horizontal de l'œil-de-bœuf, pour un observateur placé au centre de la sphère : *cdCD* est la douelle conique, *amDM* et *cqCQ* sont les joints plans normaux à cette douelle; *mnMN* et *pqPQ* sont les joints coniques normaux aux deux sphères; *npNP* est le joint montant vertical.

Si l'axe du cône était dans le plan de naissance, l'épure se simplifierait, et l'œil-de-bœuf deviendrait une simple LUNETTE CONIQUE (Voy. ce mot).

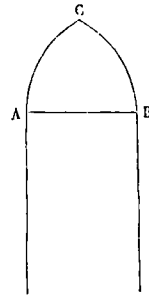
Si la base du cône était une courbe différente du cercle, les joints de la douelle conique ne passeraient plus nécessairement par l'axe du cône; mais le tracé de l'épure et l'application du trait sur la pierre se feraient encore d'après les mêmes principes. Il faut remarquer toutefois que les génératrices du cône ne faisant plus toutes le même angle avec les normales aux courbes intersections de la douelle conique et des sphères, il serait nécessaire de déterminer cet angle pour chaque voussoir.

OEUVRES MORTES, partie d'un navire située au-dessous de la ligne de flottaison (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

OEUVRES VIVES, partie d'un navire située au-dessous de la ligne de flottaison (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

OGIVE (pour *augive*?, du latin *augere*, augmenter), nom donné primitivement aux nervures saillantes qui marquent l'intersection des voûtes gothiques, et étendu ensuite à la figure que forme la section droite de ces voûtes. La manière la plus ordinaire de tracer l'ogive est la suivante. Soient *A* et *B* les naissances de la voûte, ou extrémités supérieures des piédroits, situées sur une même horizontale. Des points *A* et *B* comme centres avec la distance *AB* des piédroits comme rayon, on décrit deux arcs de cercle *BC* et *AC* qui, par leur inter-

section, déterminent le sommet *C* de l'ogive. Cependant plusieurs ogives paraissent décrites de centres plus éloignés ou plus rapprochés que les piédroits; dans le premier cas l'ogive est *surbais-*



sée, dans le second elle est *surhaussée*. D'autres ogives ne semblent point tracées au compas, et l'on a voulu voir dans les arcs dont elles se composent des arcs de paraboles ou d'autres courbes connues. Peut-être, dans ce cas, chaque arc est-il décrit de plusieurs centres successifs. L'ogive représentée sur la figure est celle qu'on rencontre le plus souvent. On lui donne quelquefois le nom d'*arc en tiers-point*.

OMBRES (TRACÉ GÉOMÉTRIQUE DES), l'une des principales applications de la Géométrie descriptive. Toutes les fois qu'on a des objets à représenter graphiquement, la détermination des ombres facilite l'intelligence du dessin, et vient avantageusement en aide à la méthode des projections.

I. Il y a deux cas à distinguer, suivant que l'espace est supposé éclairé par un point lumineux unique, ou par un corps lumineux de dimensions finies. Le premier cas se divise lui-même en deux autres, suivant que le point lumineux est situé à une distance finie ou à une distance infinie des objets à représenter, c'est-à-dire suivant que les rayons lumineux sont divergents ou qu'ils peuvent être considérés comme parallèles.

II. Considérons d'abord le cas des rayons divergents; et concevons une surface conique ayant son sommet au point lumineux et formée de rayons tangents à la surface du corps éclairé, que nous supposons opaque (Voy. CÔNE CIRCONSCRIT). Les rayons extérieurs à ce cône divergeront dans l'espace sans rencontrer le corps opaque considéré; les rayons intérieurs au cône rencontreront au contraire la surface du corps, sans pouvoir le traverser; et tout l'espace situé au delà du corps dans l'intérieur du cône sera privé de lumière: c'est cet espace que l'on appelle en général l'*ombre* du corps opaque. La surface de ce corps sera elle-même divisée en deux régions par la ligne de contact de cette surface avec le cône; la partie tournée du côté du point lumineux sera éclairée, tandis que la partie tournée du côté opposé sera dans l'ombre; cette partie est ce qu'on appelle l'*ombre propre* du corps opaque; et l'on donne le nom de *séparatrice* à la ligne de contact du cône avec la surface du corps, parce qu'elle sépare cette surface en deux parties, dont l'une est éclairée et l'autre privée de lumière. Si un second corps opaque est placé dans le cône d'ombre que le premier projette derrière lui, ce

second corps opaque est lui-même privé de lumière. S'il est placé en dehors du cône d'ombre, il est éclairé comme le premier. Mais s'il est placé en partie dans le cône d'ombre et en partie au dehors, la portion de sa surface qui serait éclairée par le point lumineux si le premier corps n'existait pas, se trouve partiellement privée de lumière dans tous les points situés à l'intérieur du cône d'ombre projeté par ce premier corps; cette portion de surface non éclairée est ce qu'on nomme l'ombre portée du premier corps sur le second.

III. Si les rayons lumineux au lieu d'être divergents étaient parallèles, les résultats seraient analogues, avec cette différence que le cône d'ombre se changerait en un cylindre (Voy. CYLINDRE CIRCONSCRIT). La détermination de l'ombre portée se réduit donc à construire l'intersection d'un cône ou d'un cylindre avec la surface du corps qui reçoit l'ombre portée (Voy. INTERSECTIONS DE SURFACES). Quant à la détermination de l'ombre propre d'un corps, c'est une question de PLANS TANGENTS (Voy. ce mot). En effet, pour obtenir la séparatrice, dans le cas des rayons divergents, on n'a qu'à mener par le point lumineux une série de plans tangents à la surface du corps opaque considéré; la série des points de contact formera la séparatrice, puisque les rayons menés aux divers points de cette ligne seront tangents à la surface du corps. Si les rayons sont parallèles, la séparatrice sera le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à la direction commune des rayons lumineux. On voit ainsi comment les questions d'ombres se rattachent à la Géométrie descriptive. Nous en donnerons quelques exemples, en commençant par l'hypothèse des rayons lumineux parallèles, qui est la plus fréquemment employée, attendu qu'elle réalise très-approximativement les conditions de la lumière solaire.

IV. OMBRE D'UN PRISME DROIT SUR LES PLANS DE PROJECTION (fig. 1). Le prisme est donné par sa

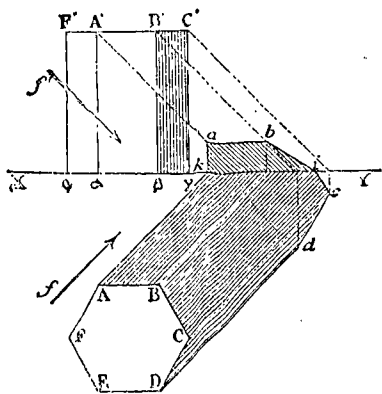


Fig. 1.

base ABCDEF dans le plan horizontal, et par les projections $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$, $\phi F'$ de ses arêtes latérales. Les flèches f et f' sont les projections d'une droite parallèle à la direction des rayons lumineux.

La séparatrice se compose ici des arêtes latérales projetées en A et en D, et de la portion du contour de la base supérieure projetée en ABCD. L'ombre propre du prisme se projette verticalement suivant

le rectangle $\beta\beta' C'\gamma'$, projection verticale de la face qui a pour projection horizontale CD; les deux autres faces dans l'ombre donnent des projections verticales qui ne sont pas visibles par la figure. Pour obtenir l'ombre portée sur les plans de projection, il faut mener par les points AA' , BB' , CC' , DD' , des parallèles aux rayons lumineux, et chercher les traces de ces droites. Soient a , b , c , d , ces traces. L'arête D, $\beta\beta'$ a pour ombre sur le plan horizontal Dd. L'arête A, $\alpha\alpha'$ porte ombre sur les deux plans de projection; l'ombre Ak sur le plan horizontal est parallèle à la flèche f ; l'ombre ku sur le plan vertical est verticale. L'arête horizontale DC, $B'C'$ a pour ombre horizontale une droite cd qui lui est égale et parallèle. L'arête AB, $A'B'$ a pour ombre verticale ab, qui lui est aussi parallèle et égale. L'arête BC, $B'C'$ porte ombre en partie sur le plan horizontal et en partie sur le plan vertical; la partie horizontale ci est parallèle à BC, ce qui détermine le point i; la partie verticale s'obtient donc en joignant ib. On a ainsi, sur le plan horizontal, l'ombre portée AkicdD, et sur le plan vertical l'ombre portée kabi.

V. OMBRE D'UNE SPHERE SUR UN CYLINDRE ET SUR SA BASE PROLONGÉE (fig. 2). Le cylindre est vertical;

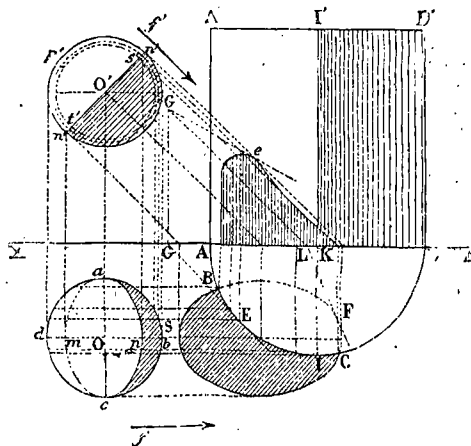


Fig. 2.

il est donné par sa base ABCD, située dans le plan horizontal. La sphère a pour projection deux cercles égaux, dont les centres O et O' sont les projections de celui de la sphère elle-même. Les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical; leur direction est déterminée par les flèches f et f' .

La séparatrice sur la sphère est un grand cercle perpendiculaire aux rayons lumineux; il se projette verticalement suivant $m'n'$ perpendiculaire à la flèche f' , et horizontalement suivant l'ellipse $ancm$. L'ombre propre de la sphère a donc pour projection verticale le demi-cercle $m'q'n'$, et pour projection horizontale l'espace compris entre la demi-circconférence abc et la demi-ellipse anc .

La séparatrice sur le cylindre est la génératrice I, K' suivant laquelle ce cylindre serait touché par un plan parallèle au plan vertical de projection. L'ombre propre du cylindre se projette donc verti-

calement dans l'espace compris entre les verticales KI' et DD' .

L'ombre portée de la sphère sur le plan horizontal est une ellipse, intersection de ce plan avec le cylindre circonscrit à la sphère et dont les génératrices sont parallèles à f' . Les sommets M et N du grand axe de cette ellipse s'obtiennent en menant par les points m, m' et n, n' des parallèles aux rayons lumineux et déterminant leurs traces horizontales. Le petit axe de l'ellipse est d'ailleurs égal au diamètre de la sphère. L'ellipse est donc déterminée, et l'on peut en tracer la partie utile, c'est-à-dire celle qui se trouve en dehors de la base du cylindre.

Pour obtenir l'ombre portée sur le cylindre, la méthode consiste à couper la sphère et le cylindre par des plans parallèles aux rayons lumineux et aux génératrices du cylindre. Ici ces plans sont parallèles au plan vertical de projection. Soit rs la trace horizontale de l'un d'eux. Ce plan coupe la sphère suivant un petit cercle qui se projette horizontalement suivant rs et verticalement suivant le cercle égal $r's'$. Ce même plan coupe le cylindre suivant une génératrice E, HE' . Menons au cercle $r's'$ la tangente $s'e$ parallèle aux rayons lumineux; elle rencontrera la projection verticale HE' de la génératrice en un point e qui sera un point de la projection verticale de l'ombre portée. On obtiendra de la même manière tous les points de cette projection. Si l'on veut avoir la tangente au point e , on suivra la marche générale pour mener la tangente aux projections de l'intersection de deux cylindres : la tangente EG au point E de la base du cylindre vertical, et la verticale GG' seront les traces du plan tangent à ce cylindre le long de la génératrice qui contient le point projeté en e ; la tangente FL au point F de l'ellipse, et la droite LG' parallèle aux rayons lumineux seront les traces du plan tangent au même point du cylindre incliné; en joignant $G'e$ on aura donc la tangente en e à la projection verticale de l'ombre portée.

VI. OMBRE D'UNE CAVITÉ CONIQUE (fig. 3). Les bases

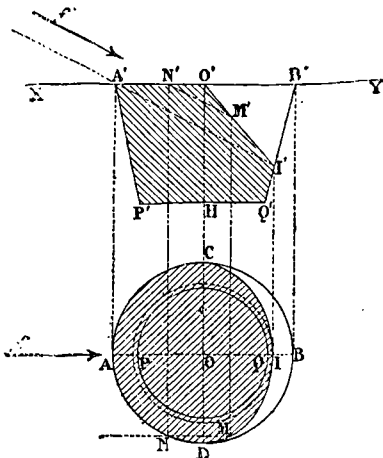


Fig. 3.

de la cavité sont le cercle $AB, A'B'$ situé dans le plan horizontal, et le cercle $PQ, P'Q'$ situé au-

dessous du plan à une profondeur donnée $O'H$ et ayant son centre sur la même verticale. Les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical. Le contour de l'ombre est l'intersection de la surface conique avec le cylindre formé par les rayons lumineux qui rasant la base supérieure $AB, A'B'$. Les deux surfaces étant du second degré, et la courbe d'entrée étant plane (le cercle $AB, A'B'$), la courbe de sortie est également plane, et par conséquent le contour de l'ombre est une ellipse, puisque le cylindre rencontre toutes les génératrices d'une même nappe. Pour obtenir les projections de cette ellipse, on remarquera que la courbe de sortie a avec la courbe d'entrée deux points communs : ce sont les points C et D , extrémités du diamètre perpendiculaire à AB . Ces deux points, à cause de la symétrie, sont les sommets du grand axe de l'ellipse cherchée, et par conséquent aussi les sommets du grand axe de la projection horizontale. Pour avoir le sommet du petit axe, on prendra dans le plan vertical de symétrie AB , le point A, A' ; par ce point on mènera une parallèle aux rayons lumineux; cette parallèle viendra percer la surface conique sur la génératrice $BQ, B'Q'$ en un point I, I' ; le point I sera le sommet du petit axe de la projection horizontale demandée, que l'on pourra par conséquent construire à l'aide de ses axes. En joignant $O'I$, on aura la projection verticale du contour de l'ombre. Comme vérification, si l'on prend sur la circonférence $AB, A'B'$ un point quelconque N, N' , et que par ce point on mène une parallèle aux rayons lumineux, cette parallèle devra rencontrer le plan $O'I'$, perpendiculaire au plan vertical de projection, en un point M, M' situé sur l'ellipse CID . Cette remarque fournit un moyen de tracer, si l'on veut, l'ellipse par points sans le secours de ses axes.

VII. OMBRE PROPRE D'UNE NICHE SPHÉRIQUE (fig. 4).

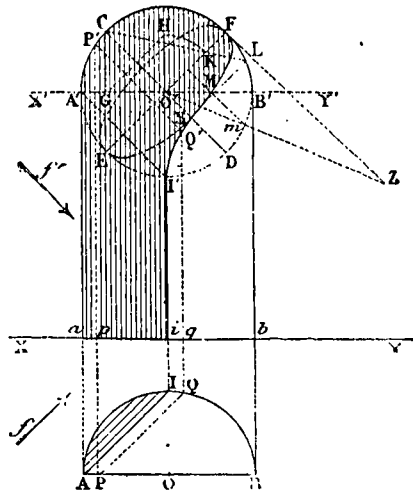


Fig. 4.

La niche est formée d'un demi-cylindre $AIB, aA'b'b$, surmonté d'un quart de sphère de même rayon. La demi-circonférence $A'CB'$ qui se raccorde avec les pignonets aA', bB' se nomme l'arc de tête, et la demi-circonférence $AIB, A'B'$, suivant laquelle la sphère

se raccorde avec le cylindre, s'appelle le *cercle de naissance*. L'ombre à déterminer se compose de trois parties : l'ombre de l'arête A, aA' sur le cylindre ; l'ombre de l'arc de tête sur ce même cylindre ; l'ombre de l'arc de tête sur la sphère. La première de ces trois ombres s'obtient sans difficulté ; par le point A, A' , on mène une parallèle aux rayons lumineux ; la projection horizontale AI de cette parallèle détermine la génératrice du cylindre sur laquelle doit être placée l'ombre du point A' , et la projection verticale de cette même parallèle détermine sur la génératrice dont il s'agit le point I' qui est l'ombre de A' ; la première partie de l'ombre cherchée est donc la droite $I'A'$.

La seconde partie de l'ombre s'obtient par un moyen analogue. Elle est l'intersection du cylindre droit formant la niche avec le cylindre oblique ayant pour base l'arc de tête et ses génératrices parallèles aux rayons lumineux. On prend sur l'arc de tête un point quelconque P, P' ; par ce point on mène une parallèle aux rayons lumineux ; sa projection horizontale PQ détermine la génératrice sur laquelle cette parallèle rencontre le cylindre, et sa projection verticale $P'Q'$ détermine sur cette génératrice le point Q' , ombre du point P'. On obtiendrait ainsi autant de points que l'on voudrait de la deuxième partie de l'ombre. Si l'on voulait la tangente au point Q' , on l'obtiendrait par les procédés ordinaires, c'est-à-dire en construisant l'intersection des plans tangents aux deux cylindres. Cette seconde partie de l'ombre se raccorde en I' avec la droite $I'A'$, et se termine à sa rencontre avec le cercle de naissance.

La troisième partie de l'ombre est l'intersection de la sphère avec le cylindre oblique déjà considéré. Comme les deux surfaces sont du second degré et que la courbe d'entrée, qui est ici l'arc de tête, est plane, il en est de même de la courbe de sortie. Cette courbe est donc un cercle, lequel se projette verticalement suivant une ellipse. Le grand axe de cette ellipse est le diamètre EF perpendiculaire à la direction f' , car le cercle d'ombre dont il vient d'être parlé est évidemment un grand cercle perpendiculaire aux rayons lumineux. Pour obtenir le petit axe de l'ellipse, supposons le plan horizontal transporté en $X'Y'$; et, par le centre de la sphère, menons un plan auxiliaire CD perpendiculaire au plan vertical et parallèle aux rayons lumineux. Le rayon qui passe par le point C sera dans ce plan, et il percera la sphère en un point qui se projettera sur CD, et sera conséquemment, à cause de la symétrie, le sommet du petit axe cherché. La trace horizontale H de ce rayon lumineux est facile à obtenir ; pour cela, il suffit de projeter le point C en G, et de mener par le point G une parallèle à f' ; ayant ainsi les projections $C'O'$ et GH du rayon lumineux, on obtient sa trace horizontale en élevant en O' une perpendiculaire à $A'B'$. Concevons maintenant que l'on fasse tourner le plan auxiliaire autour de sa trace CD pour le rabattre sur le plan vertical. La droite $O'H$, qui est dans ce plan auxiliaire et qui est perpendiculaire à CD, se rabattra suivant EF ; et le point H viendra se placer en K, à une distance $O'K$ égale à $O'H$. Le rabattement du rayon lumineux sera donc la droite CK ; et le point L, où elle rencontre l'arc de tête, sera le rabattement du point où ce rayon perce la sphère. Quand on

relèvera le plan rabattu, le point L viendra se projeter sur CD en un point N, pied de la perpendiculaire abaissée de L sur CD ; ce point N est donc le sommet du petit axe de l'ellipse. Connaissant les axes de la courbe, il sera facile de la tracer. La portion utile de cette partie de l'ombre se termine à l'intersection de l'ellipse avec la droite $A'B'$, en un point M ; et elle se raccorde en ce point avec la partie I'M.

Le point M peut être obtenu directement par les propriétés connues de l'ellipse. On élèvera au point F une perpendiculaire à EF, sur laquelle on portera une longueur $F'Z$ qui soit une quatrième proportionnelle aux longueurs $O'N$, $O'F$ et $F'Y'$; on joindra $O'Z$, et du point M, où la ligne de jonction rencontre le prolongement de l'arc de tête, on abaissera sur EF une perpendiculaire qui rencontrera $A'B'$ au point M que l'on veut obtenir. On peut encore déterminer le point M en considérant qu'il est la projection de l'intersection du cercle de naissance avec le cercle d'ombre ; mais ce procédé exige l'emploi d'un nouveau plan de projection. Le point M une fois obtenu, il est utile de mener en ce point la tangente à l'ellipse, afin d'opérer avec plus de sûreté le raccordement des deux arcs I'M et FM.

L'ombre de la niche a donc pour projection verticale la ligne mixte $I'MF$. On pourrait construire sa projection horizontale ; mais elle n'offre aucun intérêt, et on ne la détermine ordinairement pas.

VIII. OMBRE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION (fig. 5). On pourrait appliquer la méthode générale exposée au commencement de cet article. Mais il est bon de connaître la suivante, qui est d'une application plus facile et offre de l'avantage dans beaucoup de cas.

Elle consiste à considérer la surface comme composée de parallèles opaques qui projettent chacun leur ombre. Considérons d'abord l'ombre portée sur le plan horizontal. Chaque parallèle donne sur ce plan une ombre circulaire de même rayon. Si donc par le centre de chacun d'eux on mène une parallèle aux rayons lumineux, qu'on en détermine la trace horizontale, et que de cette trace comme centre on décrive un cercle de même rayon que le parallèle considéré, on aura l'ombre de ce parallèle. Cette opération est suffisamment indiquée sur la figure ; les points marqués 0, 1, 2, 3, etc., sur le plan horizontal, sont les centres des parallèles marqués des mêmes chiffres sur le plan vertical. — Si maintenant on trace d'un trait continu l'enveloppe de tous les cercles ainsi déterminés, on aura l'ombre portée de la surface de révolution sur le plan horizontal.

On peut en déduire l'ombre propre de la surface. Pour cela, on déterminera avec soin les points où les différents cercles sont touchés par la courbe enveloppe. Soit m le point de contact de l'enveloppe avec le cercle 6, ombre du parallèle de même rang. Pour obtenir le point correspondant de la séparatrice, on n'aura qu'à mener par le point m une parallèle aux rayons lumineux jusqu'à la rencontre de la surface ; pour cela, il suffit d'abaisser $m\mu$ perpendiculaire à la ligne de terre, et de mener μM parallèle à la direction de la flèche f' ; le point M où cette parallèle rencontre la projection verticale du parallèle 6, est le point demandé de la séparatrice. Tous les points de cette courbe peuvent être obtenus de la même manière.

Cherchons maintenant l'ombre portée sur le plan vertical. Les rayons lumineux menés par les divers points d'un même parallèle forment un cylindre oblique, dont l'intersection avec le plan vertical

est l'ombre portée de ce parallèle. Considérons, par exemple, le parallèle supérieur qui porte le n° 20. Le diamètre AB, parallèle au plan vertical, considéré comme une ligne opaque, donnerait sur le plan

vertical une ombre égale et parallèle. Si donc par le centre du cercle AB on mène une parallèle aux rayons lumineux, et qu'on détermine sa trace verticale marquée 20 sur l'épure; puis que, par le point 20 on mène une droite ab parallèle à XY, égale à AB et ayant son milieu au point 20, on aura un diamètre de l'ellipse, ombre du parallèle considéré. Imaginons maintenant que par l'extrémité C du diamètre du cercle AB, perpendiculaire au plan vertical, on mène une parallèle aux rayons lumineux, et que l'on détermine sa trace verticale c , on aura un point de l'ellipse, et par conséquent un nouveau diamètre $c.20$. Mais la tangente en C au parallèle AB donnerait une ombre parallèle à elle-même et conséquemment à ab ; il en résulte que la tangente en c à l'ellipse est parallèle au diamètre ab et que dès lors les diamètres ab et $c.20$ sont conjugués; ils suffisent donc pour tracer l'ellipse. Tous les autres parallèles successifs donnent pour ombre sur le plan vertical des ellipses semblables et qui s'obtiennent de la même manière. L'enveloppe de ces ellipses est l'ombre portée sur le plan vertical. La figure montre comment ces ellipses se rejoignent sur la ligne de terre avec les cercles obtenus sur le plan horizontal. Les points de contact de l'enveloppe avec les diverses ellipses donneraient de nouveaux points de la séparatrice, comme pour l'ombre portée sur le plan horizontal.

Il reste à déterminer l'ombre portée par le cercle AB sur la surface elle-même. Pour l'obtenir, il faut chercher l'intersection du cylindre oblique qui a pour directrice le cercle AB et ses génératrices parallèles aux rayons lumineux, avec le plan de chaque parallèle; cette intersection est un cercle égal au cercle AB; les points où il coupe le

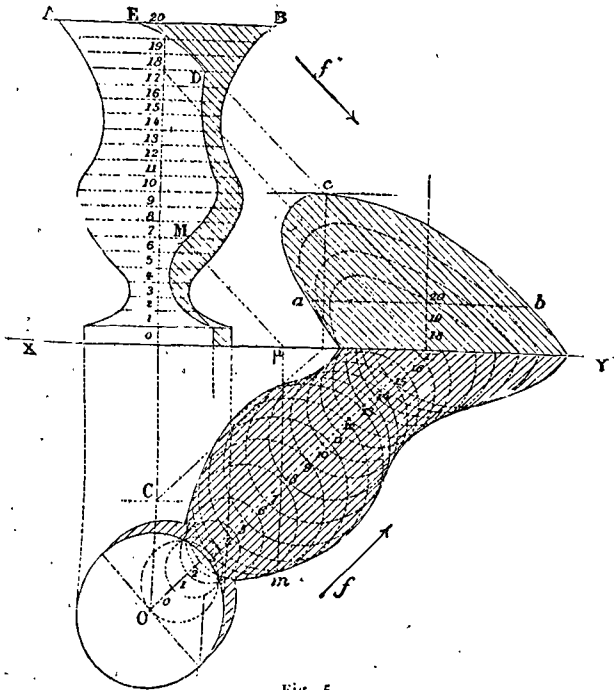


Fig. 5.

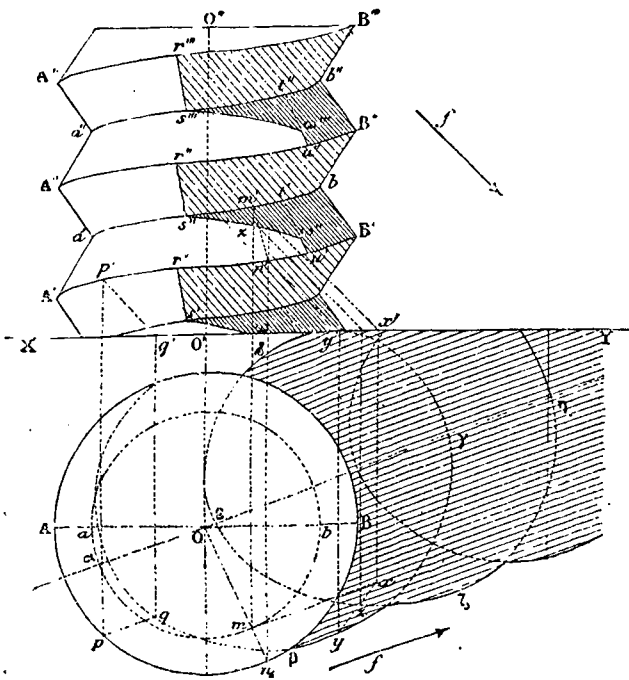


Fig. 6.

parallèle lui-même appartiennent à l'ombre qu'on cherche. Cette recherche n'offre aucune difficulté, et les opérations n'ont point été indiquées sur la figure; on s'est contenté d'y marquer le résultat ou l'ombre demandée DE.

IX. OMBRES DE LA VIS. Nous considérerons d'abord une vis à filet triangulaire (fig. 6). Cette vis est donnée par son axe $O O'$, par son hélice saillante, ayant pour projection horizontale le cercle O , et pour projection verticale la courbe $A'B', A''B'',$ etc.; enfin, par son hélice rentrante, ayant pour projection horizontale le cercle Oa , et pour projection verticale la courbe $a'b', a''b'',$ etc. La vis est éclairée par des rayons lumineux parallèles dont la direction est donnée par la droite ayant pour projections f et f' .

On a trois ombres à construire : 1° l'ombre portée de la vis sur les plans de projection, et particulièrement sur le plan horizontal; 2° l'ombre propre de la vis; 3° l'ombre portée des différents filets les uns sur les autres.

1° Pour avoir l'ombre portée de la vis sur le plan horizontal, on mène par les différents points de l'hélice saillante, et, au besoin, de l'hélice rentrante, des parallèles à la direction des rayons lumineux, et l'on détermine la trace horizontale de ces parallèles. Si, par exemple, pp' est un point de l'hélice saillante, on mène $p'q'$ parallèle à f' jusqu'à la rencontre de la ligne de terre, et $p'q$ parallèle à f ; par le point q' on mène une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de $p'q$ en un point q ; le point q est la trace horizontale du rayon lumineux mené par le point pp' . En répétant cette construction pour un nombre suffi ant de points de l'hélice saillante, on obtient son ombre sur le plan horizontal $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\dots$ On opère de même pour trouver l'ombre de l'hélice rentrante. Dans la figure, la première ombre cache entièrement la seconde; si cela n'a pas lieu, on raccorde les deux courbes par des tangentes communes, comme dans la projection verticale de la vis. D'après un théorème, démontré il y a près de trente ans, par M. Guillery, l'ombre de chacune de ces hélices est une cycloïde allongée ou raccourcie, suivant l'inclinaison des rayons lumineux. Sur la figure, c'est une cycloïde allongée. Cette considération peut servir à abrégier la construction de la courbe. (Voy. le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de La Gournerie, p. 113.)

2° Pour obtenir l'ombre propre de la vis, il faut suivre la méthode générale qui consiste à mener à la surface des plans tangents parallèles aux rayons lumineux, et à déterminer la ligne des contacts de ces plans. Par une génératrice quelconque de la surface hélicoïde on mène un plan parallèle aux rayons lumineux, et l'on détermine le point où ce plan est tangent à la surface (Voy. *PLAN TANGENT [Surfaces hélicoïdes]*). La projection verticale de la ligne d'ombre est ordinairement une ligne très-peu courbe, en sorte qu'il suffit d'en déterminer deux ou trois points. Ces lignes sont indiquées en $r's', r''s'', r''''s''''$ pour la face inférieure des filets, et en $t'u', t''u''$ pour la face supérieure.

3° Pour tracer l'ombre portée d'un filet sur le filet placé au-dessous, on opère de la manière suivante. On commence par déterminer les projections l'une génératrice de la surface qui doit recevoir l'ombre portée. Soit m, m' un point de l'hélice rentrante $Oa, a'b'$; on mène Om , qui coupe en n la

circonférence OA ; on abaisse du point n sur la ligne de terre une perpendiculaire qui rencontre l'hélice saillante $A'B'$ en un point n' ; les droites mn et $m'n'$ sont les projections d'une génératrice. On détermine l'ombre fictive de cette droite sur le plan horizontal, en menant par ses extrémités des parallèles aux rayons lumineux, et cherchant les traces horizontales x et y de ces parallèles. On joint xy , qui est l'ombre cherchée. Cette droite rencontre en un point z l'ombre de l'hélice saillante $A''B''$. Ce point z est donc la trace horizontale d'un rayon lumineux qui rencontre à la fois l'hélice saillante $OA, A''B''$ et la génératrice $mn, m'n'$; le point z, z' où ce rayon lumineux rencontre cette génératrice est donc un point de l'ombre portée par le filet qui a pour hélice saillante $OA, A''B''$ sur le filet situé au-dessous. En opérant de même pour d'autres génératrices, on se procure autant de points que l'on veut de l'ombre portée dont il s'agit. Cette ombre portée est représentée en $s''\omega', s''\omega'', s''\omega''''$.

On représente quelquefois sur l'épure à tête, soit carrée, soit hexagone, de la vis. Cette tête, qui est en saillie, donne une ombre portée sur la vis même; cette ombre portée s'obtient de même en déterminant d'abord l'ombre portée de la tête de la vis sur le plan horizontal et cherchant les points où cette ombre est rencontrée par l'ombre fictive des différentes génératrices.

On n'a point figuré sur l'épure ci-contre l'ombre portée sur le plan vertical; elle se déterminerait d'après les mêmes méthodes que l'ombre portée sur le plan horizontal.

X. Les méthodes exposées pour trouver les différentes ombres de la vis à filet triangulaire sont applicables à la vis à filet carré. Mais il y a à déterminer de plus l'ombre propre du noyau, l'ombre propre du cylindre qui termine les filets, et l'ombre portée des filets sur le noyau. L'ombre propre du noyau est la génératrice suivant laquelle ce cylindre est touché par un plan parallèle aux rayons lumineux. Il en est de même pour l'ombre propre du

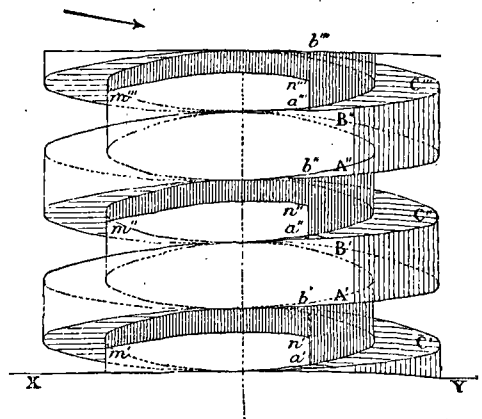


Fig. 7.

cylindre terminant les filets. Quant à l'ombre portée du filet sur le noyau, on le détermine par points, en cherchant, comme plus haut, sur le plan horizontal, l'intersection de l'ombre de l'hélice for-

mant l'arête du filet, avec l'ombre des diverses génératrices du noyau. La figure 7 représente la projection verticale d'une vis à filet carré, éclairée par des rayons lumineux peu inclinés par rapport à l'horizon. Les lignes $a^i b^i$, $a^ii b^ii$, $a^iii b^iii$ représentent l'ombre propre du noyau; les lignes $A^i B^i$, $A^{ii} B^{ii}$ représentent l'ombre du cylindre terminant le filet; les lignes $a^i c^i$, $a^{ii} c^{ii}$, $a^{iii} c^{iii}$, représentent l'ombre propre du filet; enfin les lignes $m^i n^i$, $m^{ii} n^{ii}$, $m^{iii} n^{iii}$ représentent l'ombre portée par le filet sur le noyau.

XI. Comme exemple du cas où les rayons lumineux sont divergents, nous supposons (fig. 8) une

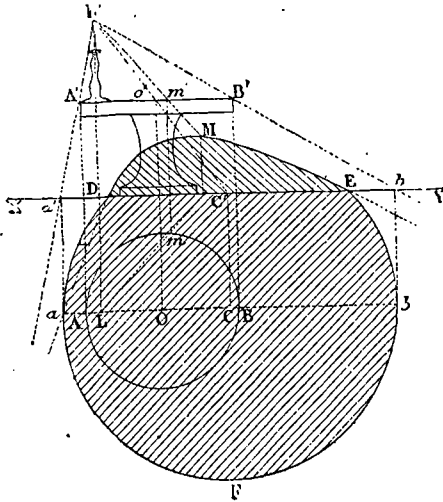


Fig. 8.

table circulaire éclairée par une bougie; et nous déterminerons l'ombre portée de cette table sur les deux plans de projection. Soient AB, A'B' les projections du contour de la table, O, O' celles de son centre; L, L' celles du point lumineux, placé dans le plan vertical qui a pour trace AB. Les rayons menés aux différents points du cercle AB, A'B' forment un cône oblique à base circulaire, dont l'intersection avec les plans de projection donnera les ombres portées que l'on cherche. L'intersection avec le plan horizontal est un cercle, dont on obtient le diamètre en menant les rayons LA, L'A et LB, L'B' jusqu'à la rencontre de la ligne de terre aux points a^i et b^i . Son centre s'obtient en menant le rayon LO, L'O', et déterminant sa trace horizontale C. Du point C comme centre avec $C^i a^i$ ou $C^i b^i$ pour rayon, on décrira un cercle qui sera l'ombre portée sur le plan horizontal. Dans le cas de la figure, ce cercle rencontre la ligne de terre aux points D et E, et l'ombre portée horizontale s'arrête à la ligne de terre. L'intersection du cône avec le plan vertical est une hyperbole qui passe par les points D et E, et qui a pour asymptotes les droites L'a' et L'b', projections des génératrices parallèles au plan vertical. Ces données suffiraient pour construire l'hyperbole. Mais si l'on veut en construire un point, on prendra sur le contour de la table un point quelconque m , m' ; par ce point on mènera un rayon lumineux Lm, L'm'; et l'on déterminera

sa trace verticale M. Cette trace sera un point de l'hyperbole demandée.

XII. Quand la lumière émane d'un corps de dimensions finies, les questions d'ombre se compliquent; mais ce n'est guère que dans la question des ÉCLIPSES (Voy. ce mot) que cette hypothèse trouve son application. Un corps lumineux et un corps opaque étant en présence, concevons que l'on mène des plans tangents extérieurs aux surfaces de ces deux corps, c'est-à-dire qui laissent les deux corps d'un même côté. Ces plans tangents, supposés infiniment voisins, détermineront une surface développable S, qui touchera le corps opaque suivant une certaine courbe C. Tous les points du corps lumineux qui peuvent envoyer des rayons au corps opaque seront compris à l'intérieur de cette surface. Concevons une autre série de plans tangents intérieurs, c'est-à-dire passant entre les deux corps; si on les suppose infiniment voisins, ils détermineront une seconde surface développable S', qui touchera le corps opaque suivant une courbe C'. Les courbes C et C' diviseront la surface du corps opaque en trois régions; la première, plus voisine du corps lumineux; la seconde formant une zone comprise entre les deux courbes C et C'; la troisième, plus éloignée que les deux autres du corps lumineux. De tous les points de la première région on apercevra tous les points du corps lumineux qui peuvent envoyer des rayons au corps opaque; et cette région recevra la totalité de la lumière qui lui est envoyée par le corps lumineux. Des divers points de la troisième région on ne pourra au contraire apercevoir aucun point du corps lumineux, et cette troisième région sera complètement dans l'ombre. Si l'on considère maintenant un point du corps opaque compris dans la zone intermédiaire, on verra que de ce point on ne peut apercevoir qu'une partie de la surface lumineuse; la vue du reste étant interceptée par la courbure du corps opaque lui-même. Cette zone ne reçoit donc la lumière que d'une manière incomplète; elle n'est ni complètement éclairée comme la première région, ni complètement dans l'ombre comme la troisième; on lui a donné le nom de *pénombre*; la clarté y est d'autant plus grande qu'on s'approche davantage de la courbe C', et d'autant moindre qu'on se rapproche plus de la courbe C.

Si l'on considère maintenant l'espace situé au delà du corps opaque, on voit que les points situés dans l'intérieur de la surface S ne reçoivent aucun rayon lumineux; cette région forme l'ombre absolue projetée derrière lui par le corps opaque. Tous les points situés à l'extérieur de la surface S' reçoivent de la lumière de tous les points de la surface éclairante comprise dans la surface S et au-delà; ils correspondent à une région complètement éclairée. Enfin les points situés entre les surfaces S et S' ne sont qu'incomplètement éclairés, parce qu'une partie des rayons émanés de la surface éclairante est interceptée par le corps opaque; ils correspondent à une région appelée aussi *pénombre*, et où l'intensité de la lumière reçue va en diminuant depuis la surface S' jusqu'à la surface S.

Si l'on applique ces généralités à deux sphères (fig. 9), l'une A lumineuse, l'autre B opaque, on voit que les surfaces nommées ci-dessus S et S' deviennent des cônes LSK, L'S'R; et les courbes C et C'

des cercles ab et $a'b'$. La portion C du corps opaque est complètement éclairée; la portion D est complètement privée de lumière. La portion ou zone intermédiaire ab , $a'b'$ ne reçoit pas toute la

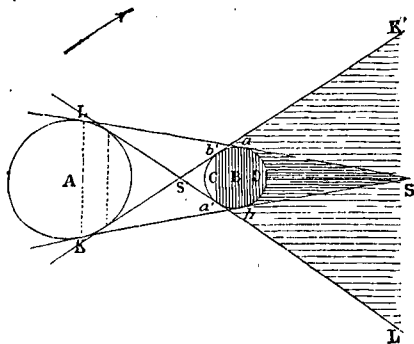


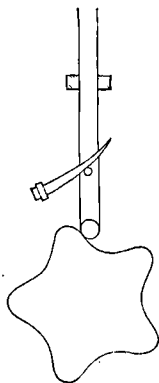
Fig. 9.

mière qui émane de la surface éclairante située en avant de LK; elle forme la pénombre sur la surface du corps opaque. L'espace compris dans le cône aSb est complètement dans l'ombre; l'espace compris entre les deux cônes est dans la pénombre; l'espace situé à l'extérieur du cône $L'S'K'$ est complètement éclairé.

Dans le cas dont nous nous occupons, où le corps éclairant a des dimensions finies, l'ombre portée est toujours bordée d'une pénombre, correspondant aux points qui ne reçoivent qu'une partie des rayons lancés par le corps lumineux. Cette circonstance compliquerait beaucoup le problème des ombres si l'on y avait égard; mais, dans le tracé ordinaire des ombres, même lorsqu'il s'agit de corps éclairés par le soleil, qui est un corps lumineux de grandes dimensions, on néglige ordinairement la pénombre; et l'on regarde la lumière solaire comme émanant d'un point situé à une distance infinie (Voy. PERSPECTIVE DES OMBRES).

ONCE, ancienne unité de poids. L'once était le 16^e de la livre. Sa valeur changeait d'une contrée à l'autre. A Paris, l'once valait 30^{gr}, 59 (Voy. POIDS ET MESURES).

ONDES (CAME λ), sorte d'excentrique destiné à



produire un certain nombre d'alternatives à chaque révolution. La figure ci-contre représente une came

à ondes produisant 5 alternatives. La came agit sur une roulette placée à l'extrémité de la pièce guidée, qu'un ressort tend à ramener sans cesse vers le centre O. Chaque saillie ou onde produit un mouvement alternatif, c'est-à-dire que la roulette est repoussée par la came, puis ramenée à la position par le ressort. (Voy. EXCENTRIQUES, CAMES.)

ONGLETS (MÉTACDE DES), méthode employée pour déterminer le métacentre latitudinal ou le métacentre longitudinal d'un navire (Voy. MÉTACENTRE). Les onglets sont les volumes en forme de coins compris entre les plans de deux lignes d'eau très-voisines; les deux onglets déterminés par ces deux plans ont le même volume; et leur arête commune, intersection des deux plans considérés, passe par le centre de gravité de chacune des deux lignes d'eau. On en verra la démonstration à l'article cité.

OPÉRATEURS, organes qui, dans les machines, effectuent le travail industriel qu'on a en vue. Ils sont aussi variés que les opérations mêmes qu'ils ont à accomplir. Ils sont soumis, quant à l'économie du travail, aux mêmes conditions que les récepteurs; c'est-à-dire qu'ils doivent, autant qu'il est possible, agir sans choc et d'une manière continue; mais on sent qu'il est souvent nécessaire de renoncer à cet avantage pour remplir d'autres conditions plus importantes. Malgré leur infinie variété, on peut les ranger en trois classes : 1^o ceux qui ont pour objet de vaincre la pesanteur, l'inertie, les résistances passives, sans altérer la forme des corps sur lesquels ils agissent; 2^o ceux qui ont pour objet de vaincre la cohésion pour donner au corps une forme déterminée; 3^o ceux qui ne sont chargés que de disposer dans un certain ordre les éléments sur lesquels ils opèrent.

I. Dans la première classe sont placés les opérateurs chargés de déplacer les corps solides, comme le LEVIER, le CRIC, la CHÈVRE, les SAPINES, la GRUE, le TREUIL, les POULIES, les PALANS, les MONTE-CHARGE, les DROPS, les ROULEAUX, etc. (Voy. ces mots), et les véhicules de toute espèce (Voy. TIRAGE DES VOITURES). Puis viennent les opérateurs chargés de déplacer les corps flottants, comme les VOILES, les PROPULSEURS À AUBES et les PROPULSEURS À HÉLICE (Voy. ces mots). A ces opérateurs se rattache le HALAGE (Voy. ce mot). Viennent ensuite les opérateurs chargés du transport des liquides eux-mêmes, comme les POMPES, les ÉCOPES, les CHAPELETS, les NORIAS, la VIS D'ARCHIMÈDE, les TYMPANS, les ROUES ÉLÉVATOIRES, le BÉLIER HYDRAULIQUE, les ESSOREUSES (Voy. ces mots). Viennent enfin les opérateurs chargés de mettre en mouvement les gaz, comme les SOUFFLETS, les MACHINES SOUFFLANTEs, les TROMPES, les CAGNARDELLES, les VENTILATEURS, etc. (Voy. ces mots).

II. Dans la seconde classe, on peut distinguer les opérateurs qui agissent par simple pression, comme les PRESSES À COIN, les PRESSES À VIS, la PRESSE HYDRAULIQUE, les PRESSES MONÉTAIRES (Voy. ces mots); ceux qui agissent par pression avec choc, comme les MARTEAUX, les BALANCIERS MONÉTAIRES, les LAMINOIRS (Voy. ces mots); ceux qui agissent par pression avec traction longitudinale comme les FILIÈRES (Voy. ce mot). Viennent ensuite ceux qui modifient la surface du corps par *rapage* et *polissage*, comme les LIMES, les POLISSOIRS, les BRUNISSOIRS, pour lesquels nous renverrons aux traités

de Technologie. Puis viennent les opérateurs qui agissent par division, comme les *scies*, le *ciseau*, le *rabot*, le *foret*, etc. (Voy. SCIERIES, MACHINES À RABOTER, ALÉSOIR, MACHINES À PERÇER, MACHINE À FORER, MACHINES À TARAUDER, TOUR, TOUR À FILETER, MACHINE À FENDRE LES ROUES D'ENGRENAGE, TOUR À GUILLOCHER, TOURS COMPOSÉS). Puis viennent enfin les opérateurs chargés d'écraser les matières solides, comme les *meules* (Voy. MOULINS), et les *pilons* (Voy. PILONS, BOCARDS).

III. La description des opérateurs de la troisième classe appartient plus particulièrement à la Technologie; nous citerons néanmoins les plus importants à connaître.

Dans le *cardage* de la laine ou du coton, l'opérateur se compose de deux peignes à dents brisées ou courbes, dont les dentures sont opposées (fig. 1). Si

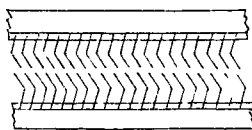


Fig. 1.

l'on imprime à ces deux peignes des mouvements rectilignes en sens contraire, chaque fibre, plus ou moins enroulée autour des fibres voisines, est saisie par une dent du premier peigne et par une dent du second, lesquelles en s'écartant tendent à disposer la fibre dans un sens parallèle au mouvement, et finissent en effet par lui donner cette direction après une certaine succession d'actions analogues. Les fibres ainsi disposées parallèlement adhèrent par simple contact, et forment une nappe qu'on détache en faisant agir l'un des peignes en sens contraire. Il est plus avantageux de substituer au mouvement rectiligne un mouvement circulaire continu; pour cela on dispose les dents des peignes sur de grands tambours qui tournent autour de leur axe. La même nappe passe successivement ainsi sur plusieurs cardes circulaires, à dents de plus en plus minces et plus serrées, suivant le degré de finesse qu'on veut obtenir.

Le *peignage* du lin et du chanvre se fait au contraire à l'aide de peignes à dents droites qui agissent constamment dans le même sens.

L'*étrirage* se fait, dans les filatures, à l'aide de plusieurs couples de cylindres cannelés, entre lesquels on fait passer les fibres textiles qui ont été disposées en *ruban* par le travail des cardes. Les deux cylindres d'un même couple tournant en sens contraire entraînent entre eux le ruban, comme dans un laminoir; la distance, de centre en centre, de deux paires de cylindres consécutives est plus grande que la longueur des fibres; en sorte qu'une même fibre ne peut jamais être saisie par les deux bouts. La première paire de cylindres entre lesquels passe la matière est d'un plus petit diamètre que la seconde; et celle-ci est d'un plus petit diamètre que la troisième, et ainsi de suite. Tous les cylindres sont d'ailleurs animés d'une même vitesse angulaire; il en résulte que la vitesse à la surface augmente d'une paire à la suivante; et c'est cet accroissement de vitesse qui produit

l'*étrirage*, attendu que les fibres saisies par la seconde paire sont entraînées avant que les autres ne soient abandonnées par la paire précédente. Le ruban s'allonge ainsi, à chaque tour, d'une quantité égale à la différence des circonférences des deux cylindres consécutifs. L'*étrirage* du coton est de 7 à 9 fois la longueur moyenne des fibres. A mesure que le ruban s'allonge, sa section diminue; quand cette section est descendue au-dessous d'une certaine limite, on double les rubans pour leur rendre une épaisseur convenable, et en même temps pour donner plus de régularité aux fils, à mesure que les doublages se multiplient. Le nombre de ces doublages successifs dépasse quelquefois 5000.

La torsion et le renvidement des fils s'opèrent à l'aide des broches. (Voy. BANCS À BROCHES, MULL-JENNY.)

Le *tricot* mécanique s'obtient à l'aide d'aiguilles parallèles (fig. 2), dont l'extrémité recourbée par en

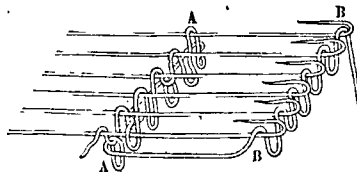


Fig. 2.

haut, peut rentrer par pression dans une rainure du corps de l'aiguille et former ainsi un crochet fermé. Concevons qu'à un instant quelconque du travail le tissu déjà formé occupe la position AA, chaque aiguille traversant une des mailles de la dernière rangée faite. On dispose sur les aiguilles un fil BB auquel on fait prendre la forme ondulée à l'aide de pièces appelées *platines* qui s'abaissent successivement entre les aiguilles, en allant vers l'extrémité libre du fil. Ce fil ondulé est poussé sous les crochets; puis, après avoir fermé ceux-ci, on donne au tissu un mouvement en avant qui fait passer les mailles supérieures de ce tissu par-dessus les extrémités des aiguilles; il vient ainsi se suspendre aux mailles nouvelles enfermées dans les crochets. On relève les pointes de ceux-ci, on pousse le tissu en arrière; il reprend la position AA, avec une rangée de mailles de plus, et les mêmes opérations recommencent. On peut élargir ou rétrécir à volonté la bande de tricot en mettant en jeu un plus ou moins grand nombre d'aiguilles. Il existe des métiers circulaires où les aiguilles agissent successivement, et d'où le tricot sort sous la forme d'un cylindre.

Le *tissage* consiste, comme on sait, à faire passer entre des fils parallèles formant ce qu'on appelle la *chaîne* de l'étoffe, un fil continu formant ce qu'on appelle la *trame* et qui croise à angles droits les premiers. Pour cela, les fils de la chaîne étant tendus sur les cylindres horizontaux appelés *cyndres ensouples*, il faut faire lever un certain nombre de ces fils et faire passer, entre les deux séries de fils ainsi séparés, une *navette* contenant le fil continu. On y parvient en faisant à l'avance passer chaque fil de la chaîne dans une boucle ou un petit anneau de verre ou de métal, maintenu par un fil tendu perpendiculairement au plan de la chaîne. Tous les fils analogues se nomment les *lisses*. En tirant une

des lisses, on fait sortir le fil de la chaîne qui lui correspond du plan des autres fils formant la chaîne. Dans la fabrication de la plus grande partie des tissus, toutes les lisses correspondant aux fils de rang impair sont liées à une même pièce qu'on fait mouvoir à l'aide d'une pédale ou *marche*, et toutes les lisses correspondant aux fils de rang pair sont liées de même à une pièce analogue qu'on fait mouvoir à l'aide d'une seconde pédale. Si l'on appuie sur l'une des marches, on sépare les fils de rang impair des fils de rang pair, et l'on peut lancer la navette entre les deux séries de fils : c'est ce que l'on nomme une *duite*; en agissant alors sur l'autre marche, on fait lever tous les fils qui étaient restés immobiles la première fois, tandis que ceux qui avaient été levés demeurent en repos à leur tour; la séparation des fils est opérée en sens inverse, et l'on peut lancer la navette en sens contraire pour former une seconde duite; et ainsi de suite indéfiniment. A chaque duite, il faut faire pénétrer le fil de la trame le plus intimement possible entre les fils de la chaîne; pour cela on donne un *coup de battant*. Le battant est une pièce de bois horizontale qui oscille autour d'un axe horizontal placé à la partie supérieure du métier; à la hauteur de la chaîne, il présente une série de lames de métal, ou de roseaux, passant chacune entre deux fils de la chaîne, et formant la pièce appelée *rot*. A chaque coup de battant, c'est-à-dire à chaque oscillation imprimée au battant, les lames dont il s'agit poussent le fil de la duite vers la partie de la chaîne où se trouve déjà la duite précédente, et contribue ainsi à serrer le tissu.

Toutes ces opérations s'effectuent d'elles-mêmes dans les métiers mécaniques. On varie d'une infinité de manières l'apparence des étoffes en adoptant différentes *armures*, c'est-à-dire différents modes de groupement des lisses qui se lèvent ensemble à chaque duite.

C'est ici l'occasion de dire un mot du *métier à la Jacquard* employé depuis plus d'un demi-siècle à la fabrication des rubans et des étoffes de soie connues sous le nom de *façonnés*. Dans ce genre de fabrication, la difficulté consiste à faire varier, pour ainsi dire à chaque duite, l'ordre des lisses à mouvoir. Avant Jacquard, ce résultat ne pouvait être obtenu qu'à l'aide d'une multitude de pédales dont le jeu rendait le travail très-pénible et très-lent, et exigeait l'emploi d'un ou plusieurs auxiliaires, pris d'ordinaire parmi les femmes et les enfants. Il existe encore un certain nombre de métiers anciens de cette espèce dans les montagnes du Forez et du Velay, lesquels alimentent encore en partie les fabriques de Lyon et de Saint-Étienne; mais dans ces deux villes elles-mêmes, et dans toutes les villes d'Europe où l'industrie des soieries a réussi à s'établir, c'est le métier à la Jacquard qui est seul employé. Voici en quoi consiste le principe de cet appareil. Les fils de la chaîne étant disposés verticalement, les lisses sont remplacées par des aiguilles horizontales, portant chacune une boucle dans laquelle passe un des fils de la chaîne. En regard des pointes de ces aiguilles est disposé un prisme horizontal à section carrée, qui peut tourner par quarts de tour autour de son axe de figure. Ce prisme est évidé et

n'est représenté que par ses arêtes. Dans la position naturelle des fils de la chaîne, les aiguilles pénètrent dans l'intérieur du prisme, comme cela se voit en *ab* (fig. 3). Mais si l'on recouvre la face du prisme placée en regard des aiguilles d'une surface plane en carton, toutes les aiguilles seront repoussées, et feront écarter les fils de la chaîne, comme on le voit en *a'b'*. Si le carton est percé de trous correspondants à certaines aiguilles, ces aiguilles pénétreront dans le prisme et les fils correspondants de la chaîne resteront verticaux; mais les aiguilles qui rencontreront les parties pleines du carton seront repoussées, et

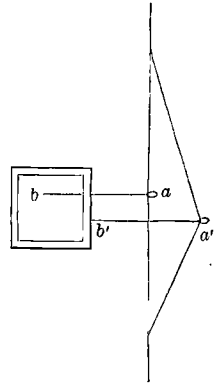


Fig. 3.

repousseront elles-mêmes les fils correspondants de la chaîne. On conçoit dès lors que pour obtenir que la duite recouvre certains fils et passe au contraire au-dessous des autres, il suffit de percer des trous dans le carton, en regard des aiguilles qui doivent rester immobiles, et de laisser les parties pleines du carton en regard des aiguilles qui doivent être repoussées. Si maintenant on imagine que les cartons correspondants aux duites successives soient articulés ensemble de manière à former une sorte de chapelet suspendu au prisme, en faisant tourner celui-ci par quarts de tour on amènera successivement sur la face en regard des aiguilles les cartons correspondants à ces diverses duites; et le dessin, quelque compliqué qu'il soit, s'obtiendra par le jeu d'un certain nombre de navettes chargées de fils de couleurs convenables. Tel est le métier à la Jacquard, réduit à sa plus simple expression. — L'opération qui consiste à percer les cartons conformément à l'effet que l'on veut obtenir s'appelle le *lissage*; elle s'exécute d'après un travail préparatoire qu'on appelle la *mise en carte*, travail qui consiste à figurer, sur papier quadrillé, le dessin qui doit être reproduit sur l'étoffe, de manière que chaque carré corresponde à la place d'un fil, et indique la couleur qu'il doit avoir sur l'étoffe — Nous renverrons aux ouvrages spéciaux de Technologie pour les détails de l'appareil. Il a reçu, à diverses époques, des perfectionnements, dont les derniers, dus à MM. Carré et Couplet, sont décrits dans le tome VIII de la *Publication industrielle* de M. Armengaud.

Pour être juste, et sans vouloir diminuer en rien le mérite de l'illustre Jacquard, nous devons dire que l'idée de remplacer les lisses par des aiguilles venant buter contre un obstacle fixe n'est pas de lui, mais bien de Vaucanson. Ce savant mécanicien avait inventé une machine à tisser, qu'on peut voir encore au Conservatoire des arts et métiers, et qui était fondée sur ce principe. Cette machine, repoussée par les ouvriers lyonnais, comme un produit de la science pure, demeura sans application. Cependant elle renferme, comme on voit, le principe d'un perfectionnement fécond. Mais, dans

La machine de Vaucanson, les aiguilles venaient buter contre un cylindre troué ou cannelé, et c'était la disposition des trous ou des cannelures qui déterminait le jeu des aiguilles. L'appareil était ainsi borné dans ses combinaisons; tandis qu'avec le prisme creux et les cartons, dont l'invention appartenait en propre à Jacquard, la variété des combinaisons est indéfinie.

Nous renverrons également aux ouvrages spéciaux pour la description des métiers à tulle. Nous dirons seulement que ce genre de tissus est obtenu au moyen d'une chaîne de fils parallèles, et de deux trames obliques qui se croisent elles-mêmes, et dans chacune desquelles le fil tourne autour de chaque fil de la chaîne. Cet effet est obtenu à l'aide de bobines plates pouvant passer entre les fils et tourner autour de chacun d'eux. Un métier à tulle comprend 1000 à 1200 bobines de ce genre.

Nous terminerons par quelques mots sur les machines à coudre. La première machine imaginée pour remplacer le travail ordinaire de la couture remonte à 1804. Elle avait été construite par MM. Th. Stone et James Henderson. Dans cette machine, l'aiguille traversait l'étoffe, comme dans le travail à la main; elle était reprise en dessous par des pinces, puis retournée, etc.; elle faisait des points de surjet. Ce dispositif a été abandonné. Cependant l'aiguille a deux pointes avec l'œil au milieu, présentée en 1834 par M. Heilmann, est restée dans l'industrie de la broderie, parce qu'elle n'exige pas de retournement. Elle est conduite au PANTOGRAPHIE, et un grand nombre d'aiguilles peuvent travailler à la fois.

Après les machines où l'aiguille traverse l'étoffe, sont venues les machines à un seul fil faisant des points de chaînette. La première machine de ce système est de 1830; elle a été construite par MM. Thimonnier et Ferrand. L'aiguille est à crochet; elle perce l'étoffe; une pièce située au-dessous y enroule le fil d'une bobine, le crochet ramène en dessus une boucle qui passe dans la boucle précédente, et ainsi de suite. Un grand nombre d'essais ont été faits dans la même voie; on a renoncé à ce genre de machines, parce que le point de chaînette se défait trop aisément.

Le problème de la couture mécanique n'a été réellement résolu que par les machines américaines, qui emploient simultanément deux fils. On en distingue deux espèces. Dans la première, une aiguille verticale percée près de la pointe, et alimentée par une bobine, perce l'étoffe et forme en dessous une boucle; une petite navette, chargée d'un second fil, passe dans cette boucle; l'aiguille en se relevant serre ce second fil contre l'étoffe en serrant la boucle qu'elle vient de faire, et va en faire une autre plus loin. Un grand nombre de constructeurs ont établi des machines de ce genre, avec des dispositifs variés, depuis M. Walter Hunt, jusqu'à MM. Le Dard et Leduc (de Troyes). L'inconvénient de ce système est dans les dimensions nécessairement exigées de la navette.

Enfin est apparue la machine de MM. Grover et Parker, qui emploie également deux fils, mais exécute un double point de chaînette. La navette est ici remplacée par une aiguille circulaire alimentée par une seconde bobine, et mobile autour d'un axe horizontal. Cette aiguille circulaire intro-

duit une boucle dans celle qui a été faite par l'aiguille verticale; celle-ci en se relevant serre sa première boucle et vient en introduire une seconde un peu plus loin dans celle qui vient d'être faite par l'aiguille circulaire; celle-ci à son tour vient introduire une seconde boucle dans celle de l'aiguille verticale, et ainsi de suite; ce système donne un point très-solide, et il est adopté aujourd'hui dans tous les grands ateliers de couture.

Nous citerons encore la machine de M. Overy, de Pensylvanie, dans laquelle deux aiguilles, agissent obliquement dans le plan vertical de la ligne de couture, l'une au-dessus et l'autre au-dessous des deux morceaux d'étoffe à assembler, et se croisent entre les deux étoffes. Elles forment un double point de chaînette qui n'offre de chaque côté que l'aspect d'une piqûre ordinaire. Cette machine est employée chez M. Dusautoy pour la confection des équipements militaires.

(Voy. le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye, le *Dictionnaire des Arts et Manufactures*, et les ouvrages spéciaux de Technologie. — Voy. aussi l'article MACHINES AGRICOLES.)

IV. Nous ne pouvons terminer cet article sans dire un mot de la *Presse typographique* ou *presse mécanique*, employée aujourd'hui au tirage dans les imprimeries, et qui tient des opérateurs de la seconde et de la troisième classe puisqu'elle agit à la fois par pression et par disposition. Il en existe un grand nombre de variétés, mais le principe est toujours le même. Une table horizontale bien dressée, et mobile sur des galets, reçoit un mouvement alternatif dans le sens de sa longueur. Aux deux bouts de la table sont placées les formes, contenant les caractères d'imprimerie préalablement disposés par les compositeurs. Quand une forme avance vers le milieu de la table, elle passe sous un cylindre tournant qui exerce sur sa surface une certaine pression. Quand elle recule vers le bout de la table au contraire, elle passe sous un rouleau chargé d'encre qui couvre d'encre la partie saillante de ces caractères, c'est-à-dire la lettre. Imaginons qu'une feuille de papier blanc, guidée par des rubans convenablement disposés, s'enroule sur le premier cylindre; en arrivant sous ce cylindre, l'extrémité de la feuille rencontre la forme, qui avance dans le sens de la rotation du cylindre; elle s'engage donc entre le cylindre et la forme, et se trouve imprimée sur l'un de ses côtés. Elle est immédiatement reprise, toujours à l'aide de rubans convenablement disposés, par un premier cylindre intermédiaire sur lequel s'enroule la face imprimée, puis par un second cylindre intermédiaire, tournant en sens contraire, sur lequel s'enroule de nouveau la face imprimée, en sorte que la face blanche se trouve alors en dehors. En arrivant au-dessous de ce second cylindre principal, elle rencontre la seconde forme qui s'avance dans le sens de la rotation de ce second cylindre, elle s'engage entre ce second cylindre et cette seconde forme, et reçoit l'impression sur la face non encore imprimée. — Tout le mécanisme, dont nous sommes obligés de supprimer les détails secondaires, est mis en mouvement par une machine à vapeur, à l'aide d'une courroie sans fin et d'une série de roues dentées. La machine n'exige que l'intervention de deux ouvriers, dont l'un pose la

feuille sur des cylindres qui le conduisent sur le premier cylindre principal, et dont l'autre la retire après son passage sous le second cylindre principal. Nous n'insisterons pas sur cette machine, dont la description complète exigerait de nombreux dessins et de longues explications, et qui est si répandue aujourd'hui que tout le monde peut la voir fonctionner.

OPÉRATIONS DE BANQUE. On désigne sous ce nom l'ESCOMPTE, le CHANGE, le commerce des MÉTAUX PRÉCIEUX (Voy. ces mots), et, en général toutes les opérations qui ont pour but de suppléer à l'insuffisance du numéraire ou d'en éviter le transport. Les *banquiers* se chargent des recouvrements, reçoivent des dépôts, prêtent sur nantissement ou consignation, ou sur contrat hypothécaire; négocient des emprunts avec les États, se chargent de l'émission des actions industrielles, etc. Enfin la plupart des banquiers se livrent aux OPÉRATIONS DE BOURSE (Voy. ce mot).

OPÉRATIONS DE BOURSE. Elles comprennent les MARCHÉS AU COMPTANT, les MARCHÉS À TERME, les REPORTS, et les diverses combinaisons que l'on peut faire de ces opérations simples (Voy. les mots en petites capitales). Les marchés à terme comprennent eux-mêmes les MARCHÉS FERMES et les MARCHÉS LIBRES OU À PRIMES.

Les marchés fermes portent sur toutes les valeurs cotées à la Bourse; les principales sont: les RENTES FRANÇAISES, les FONDS ÉTRANGERS, les OBLIGATIONS DE LA VILLE DE PARIS, les ACTIONS DE LA BANQUE DE FRANCE, les ACTIONS DU COMPTOIR D'ESCOMPTE, les ACTIONS et OBLIGATIONS DU CRÉDIT FONCIER, les ACTIONS DU CRÉDIT MOBILIER, les ACTIONS INDUSTRIELLES (chemins de fer, canaux, mines, etc). (Voy. ces mots.)

Les marchés à primes, ainsi que les reports, ne portent que sur la rente 3 p. 100, et sur un petit nombre de valeurs cotées, telles que le Crédit foncier, le Crédit mobilier, les chemins de fer d'Orléans, de Paris à Lyon et à la Méditerranée, du Midi, etc.

Le *Bulletin de la Bourse*, publié dans tous les journaux, donne la liste exacte de toutes les valeurs cotées, et de celles sur lesquelles portent les marchés libres et les reports.

OPPOSITION, position relative de deux corps célestes dont les longitudes diffèrent de 180 degrés. Cette dénomination s'emploie principalement lorsque l'un des corps célestes considérés est le soleil. Ainsi la lune est en opposition à l'époque de la pleine lune.

ORBITE, courbe décrite par le centre d'une planète, d'un satellite ou d'une comète. Les orbites des planètes et de leurs satellites sont des ellipses (Voy. LOIS DE KÉPLER). Il en est certainement de même d'un certain nombre de comètes, dont le retour périodique peut être prévu à l'avance. Quelques comètes paraissent décrire des paraboles; et il ne serait pas impossible que les courbes décrites par quelques-uns de ces astres errants fussent des hyperboles.

Parmi les ÉLÉMENTS (Voy. ce mot) du mouvement d'une planète, il y en a cinq qui servent à déterminer la position et la forme de son orbite; ce sont: la longitude du nœud ascendant, l'inclinaison de l'orbite, la longitude du périhélie, la moyenne distance

au soleil et l'excentricité. Les données nécessaires pour déterminer l'orbite d'un satellite sont analogues; mais on les rapporte à la planète principale.

ORBITE APPARENTE DU SOLEIL, courbe que le centre du soleil paraît décrire en vertu de son mouvement propre. Cette courbe est plane puisque sa projection sur la sphère céleste est un grand cercle de cette sphère (Voy. ÉCLIPTIQUE). Pour en déterminer la nature, il faut avoir recours à l'observation du *diamètre apparent* (Voy. ce mot) du soleil. Ce diamètre n'est pas constant, d'où il faut conclure que le soleil ne reste pas à une distance constante de la terre. Le diamètre apparent d'un astre étant en raison inverse de sa distance à la terre, la connaissance exacte de ce diamètre pour chaque jour de l'année permettrait de construire une courbe semblable à l'orbite cherchée. Soit, en effet, S (fig. 1) la position du soleil à un instant donné,

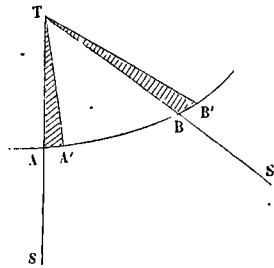


Fig. 1.

par exemple à l'équinoxe du printemps; soit δ son diamètre apparent pour cette époque. Soit T la position de la terre, regardée comme fixe.

Supposons que l'on ait pris la distance TA pour représenter la distance ρ du soleil à la terre le jour dont il s'agit. Soit maintenant S' la position du soleil à une époque quelconque t ; soit δ' son diamètre apparent observé à cette époque, et soit ρ' sa distance à la terre. En vertu de la proportion rappelée ci-dessus, on aura

$$\rho' : \rho = \delta : \delta'; \text{ d'où } \rho' = \rho \frac{\delta}{\delta'}$$

et si TB représente ρ' à l'échelle choisie, on pourra écrire

$$TB = TA \frac{\delta}{\delta'}$$

relation qui donnera le point B. En opérant de même pour une autre époque, on obtiendrait un nouveau point de la courbe destinée à représenter l'orbite cherchée; et l'on pourrait s'en procurer ainsi un assez grand nombre pour pouvoir tracer cette courbe.

On peut encore opérer d'une autre manière. Soient v et v' les nombres de degrés de longitude parcourus par le soleil en un jour sidéral à deux époques quelconques de l'année pour lesquelles ses distances à la terre sont ρ et ρ' et ses diamètres apparents δ et δ' . L'observation conduit à la relation très-approchée

$$\frac{v}{v'} = \frac{\delta^2}{\delta'^2} \quad [1]$$

qu'on exprime en disant que les *vitesses angulaires* sont *proportionnelles aux carrés des diamètres apparents*; et cette relation serait d'autant plus exacte qu'on prendrait une unité de temps plus pe-

tite, attendu que le mouvement n'est pas uniforme. Or on a

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\rho'}{\rho} \tag{2}$$

Il en résulte

$$\frac{v}{v'} = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \tag{3}$$

d'où

$$v\rho^2 = v'\rho'^2.$$

Mais l'arc décrit en un jour par le soleil se confondant sensiblement avec un arc de cercle décrit de la terre comme centre, $v\rho^2$ exprime le double de l'aire du secteur tel que ATA', décrit en un jour par le rayon vecteur TA; car ce secteur a pour mesure

$$\frac{1}{2} AA'.TA \text{ ou } \frac{1}{2} v\rho.p.$$

La relation ci-dessus exprime donc que le secteur décrit en un jour par le rayon vecteur mené de la terre au soleil est une quantité constante, d'où il suit que les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps. C'est en cela que consiste le principe des aires (Voy. LOIS DE KÉPLER).

De la relation [3] on tire

$$\rho' = \rho \sqrt{\frac{v}{v'}}$$

ce qui permet de calculer ρ' , et de tracer par conséquent l'orbite, ou du moins une courbe semblable.

Ce tracé donne une courbe fort peu différente du cercle. Les anciens, convaincus que le soleil devait décrire un cercle d'un mouvement uniforme, supposaient, pour expliquer les différences observées, que la terre n'en occupait pas le centre; c'est ce qu'on appelle l'hypothèse de l'excentrique, due à Hipparque. Le même astronome essaya encore de rendre compte du mouvement observé, à l'aide d'une autre hypothèse, appelée hypothèse de l'épicycle; elle consiste à supposer que le soleil parcourt uniformément un cercle, nommé épicycle, dont le centre parcourt uniformément un autre cercle nommé déferent. — Cette seconde hypothèse revient au fond à la première; et aucune d'elles ne s'accorde rigoureusement avec l'observation. C'est Képler qui parvint à représenter exactement les faits en admettant que l'orbite apparente du soleil est une ellipse dont la terre occupe un des foyers; ce qui revient à dire que, dans le mouvement réel, la terre décrit une ellipse dont le soleil occupe un foyer. Newton démontra plus tard que le mouvement elliptique est une conséquence de l'attraction en raison inverse du carré des distances (Voy. GRAVITATION UNIVERSELLE, PLANÈTES).

Pour déterminer la direction du grand axe de l'orbite solaire, on remarque que cet axe divise la

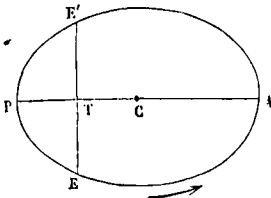


Fig. 2.

courbe en deux parties symétriques, et que par conséquent le temps employé par le soleil pour parcourir chacune des deux moitiés doit être le même.

On cherche donc, dans le tableau des longitudes observées, deux longitudes qui diffèrent de 180°, et telles que le temps employé par le soleil pour passer de l'une des deux portions à l'autre soit le même, c'est-à-dire une demi-année. La droite AP (fig. 2) qui joint ces deux positions est le grand axe de l'ellipse. Le point P, ou celle de ces deux positions qui est la plus rapprochée de la terre, est le *périgée*; le point A, qui en est le plus éloigné, est l'*apogée*. On trouve de la sorte qu'en 1861 la longitude de l'apogée était 99° 30' 29" et celle du périgée 279° 30' 29".

Il résulte de la loi des aires que la vitesse du soleil va en diminuant du périgée à l'apogée, et en augmentant de l'apogée au périgée, puisque le contraire a lieu pour le rayon vecteur. Au point P, qui répond à peu près au 1^{er} janvier, le déplacement du soleil en longitude dans un jour est de 1° 1' 11"; au point A, qui répond à peu près au 2 juillet, ce déplacement n'est que de 57' 12",5. On en déduit, en vertu de la relation [3],

$$\frac{TA}{TP} = \sqrt{\frac{1^{\circ}1'11''}{57'12'',5}} = \sqrt{\frac{3671}{3432,5}} = 1,034153.$$

On obtient ensuite l'excentricité de l'ellipse en observant que si a désigne le demi grand axe AC, c la distance CT du centre au foyer, et e l'excentricité ou le rapport $\frac{c}{a}$, on a

$$TA = a + c, \quad TP = a - c;$$

par conséquent

$$\frac{TA}{TP} = \frac{a + c}{a - c} = \frac{1 + e}{1 - e} = 1,034153,$$

d'où

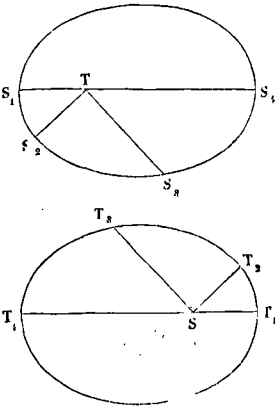
$$e = 0,01679.$$

La forme de l'orbite se trouve ainsi déterminée. Quant à ses dimensions réelles, on les obtient en mesurant la distance de la terre au soleil; on a trouvé pour la grandeur du demi grand axe 24068. R, en appelant R le rayon équatorial (Voy. SOLEIL). Il en résulte pour les distances TA et TP les valeurs

$$TA = 24472. R \text{ et } TP = 23664. R.$$

ORBITE TERRESTRE, courbe que le centre de la terre décrit d'occident en orient dans son mouvement de translation annuel. Cette orbite réelle se déduit aisément de l'orbite apparente du soleil (Voy. ce mot). Soit, en effet, T la position de la terre supposée fixe, et S₁, S₂, S₃, S₄, différentes positions que le soleil vient occuper successivement dans son mouvement propre apparent. Soit, au contraire, S la position du soleil supposé fixe; menons les droites ST₁, ST₂, ST₃, ST₄, respectivement égales et parallèles aux droites TS₁, TS₂, TS₃, TS₄; si, pour l'observateur placé en T le soleil paraît prendre successivement les positions S₁, S₂, S₃, S₄, pour l'observateur placé en S, la terre paraîtra prendre aux mêmes instants les positions T₁, T₂, T₃, T₄; car pour les deux observateurs les distances seront les mêmes, mais les directions seront opposées. Or les angles étant égaux dans les deux figures à cause du parallélisme, les deux courbes sont égales puisqu'à des angles égaux répondent des rayons vecteurs égaux; de plus, ces deux courbes sont décrites dans le même sens. Par conséquent, puisque l'orbite apparente du soleil est une ellipse dont la terre occupe l'un des foyers, l'orbite réelle de la terre est une ellipse égale dont le soleil occupe l'un des foyers; cette ellipse est parcourue dans le même sens que

l'ellipse apparente, c'est-à-dire d'occident en orient (Voy ECLIPTIQUE). Aux positions apparentes S_1 et S_2 qui sont le *périgé* et l'*apogée*, répondent dans le



mouvement réel les positions T_1 et T_2 qui sont le *périhélie* et l'*aphélie* (Voy. ces mots).

ORDRES D'ARCHITECTURE, systèmes de proportions et d'ornements adoptés par les Grecs et les Romains pour leurs édifices publics, et d'après lesquels se règlent encore les parties principales des édifices modernes. Les ordres qui servent de types sont au nombre de cinq : l'ordre *toscan*, l'ordre *dorique*, l'ordre *ionique*, l'ordre *corinthien* et l'ordre *composite*. Le premier et le dernier sont romains, les trois autres sont grecs; mais le dorique, tel qu'on l'étudie aujourd'hui, n'est pas le dorique grec primitif; c'est le dorique modifié par les Romains, et appelé pour cette raison *dorique romain*. On reconnaît que les divers membres de l'architecture grecque tirent leur origine et trouvent leur raison d'être dans l'imitation des constructions en charpente qui ont d'abord été exclusivement employées dans l'architecture civile et religieuse des peuples grecs. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette remarque, qui jette du jour sur beaucoup de détails relatifs aux divers ordres.

Les règles principales de l'architecture antique se rapportent à la partie extérieure de l'édifice, ou à sa façade, qui, réduite à son expression la plus simple, se compose de l'extrémité des pièces d'un plancher, des piliers ou colonnes destinées à le soutenir, et des supports ou piédestaux, sur lesquels reposent ces colonnes. Aussi les parties essentielles de chaque ordre sont-elles au nombre de trois : un *entablement*, une *colonne* et un *piédestal*. Chacune de ces trois parties se subdivise elle-même en trois autres. L'entablement se compose d'une *corniche*, qui n'est que l'extrémité ornée du plancher, d'une *frise*, formant l'emplacement où aboutissent les extrémités des solives qui portent ce plancher, solives dont on aperçoit même le bout dans l'ordre dorique, enfin d'une *architrave* ou maîtresse poutre, sur laquelle s'appuient les extrémités des solives, et qui repose elle-même sur les colonnes. La colonne, à son tour, présente trois parties principales : une tête que l'on nomme le *chapiteau*, un corps que l'on appelle le *fût*, et un pied auquel on donne le nom de *base*. Enfin le piédestal comprend également trois parties :

une *corniche* qui en forme le couronnement *t*, un *dé* qui en est le corps, et une *base* qui supporte le tout. C'est dans les proportions diverses de ces neuf masses principales, et dans le choix des ornements qu'elles peuvent recevoir, que consistent les distinctions essentielles entre les ordres. Nous les passerons successivement en revue.

ORDRE TOSCAN (fig. 1). Pour construire le profil de

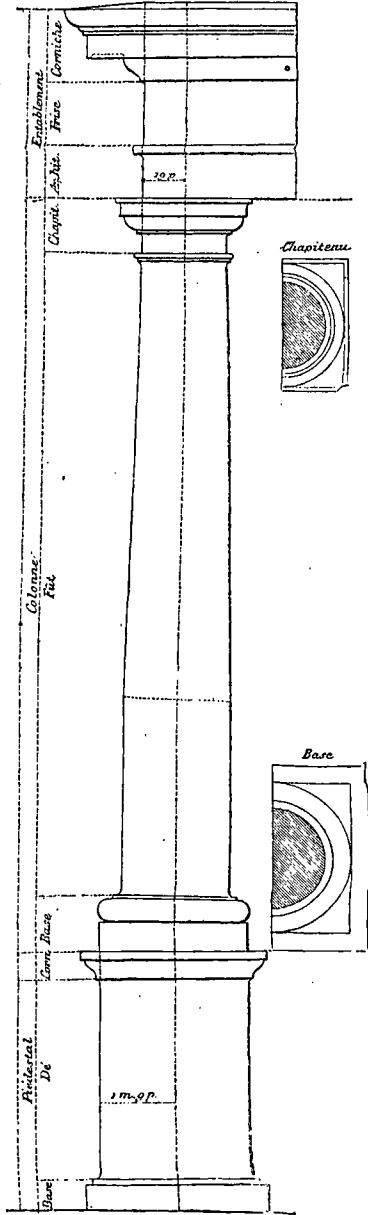


Fig. 1. Ordre toscan.

cet ordre, il faut diviser la hauteur donnée en 19 parties égales; 3 de ces parties formeront la hauteur de l'entablement, 4 autres formeront celle du piédestal. Le reste sera la hauteur de la colonne; on

la divisera en 14 parties égales dont une sera le module, que l'on divisera lui-même en 12 minutes.

On trouvera ainsi que l'entablement a 3 modules $\frac{1}{2}$, la colonne 14 modules, et le piédestal 4 modules $\frac{2}{3}$.

Voici maintenant le détail des parties dont le profil se compose, avec la hauteur de chacune, et sa saillie sur le nu de l'architrave pour les parties appartenant à l'entablement, sur le nu du gorgerin ou du fût à la partie supérieure, pour celles qui se rapportent au chapiteau, et sur le nu du dé pour celles qui entrent dans le piédestal; ce dé lui-même est à l'aplomb du tore qui termine la colonne.

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
ENTABLEMENT.				
CORNICHE.				
Cimaise supérieure.	Quart de rond.	0 4	1 6	
	Baguette.....	0 2	1 2,5	
	Filet.....	0 0,5	1 2	
Larmier...	Congé.....	0 1	1 1	
	Larmier.....	0 5	1 1	
	Filet.....	0 0,5	0 4,5	
Cimaise inférieure..	Talon, en haut.	0 4	0 4	
	id. en bas...		0 0,5	
FRISE.....	1 2	0 0		
ARCHITRAVE.				
Listel.....	0 2	0 2		
Plate-bande	Congé.....	0 2	0 2	
	Face.....	0 8	0 0	
CHAPITEAU.				
Tailloir....	Filet.	0 1	0 5	
	Congé.....	0 1	0 5	
	Larmier.....	0 2	0 4	
Cimaise....	Quart de rond.	0 3	0 3,85	
	Filet.....	0 1	0 1	
Gorgerin...	Congé.....	0 1	0 1	
	Gorgerin.....	0 3	0 0	
FÛT.				
Astragale..	Baguette.....	0 1	0 1,5	
	Filet.....	0 0,5	0 1	
Fût.....	Congé supérieur	0 1	0 1	
	Fût.....	11 8	0 0	
	Congé inférieur	0 1,5	0 1,5	
BASE.				
Filet.....	0 1	0 1,5		
Tore.....	0 5	0 4,5		
Plinthe.....	0 6	0 4,5		
PIÉDESTAL.				
CORNICHE.				
Cimaise....	Listel.....	0 2	0 4	
	Talon { en haut. } { en bas.. }	4	0 3,5 0 0,5	
DÉ.				
Socle.....	3 6	0 0		
Congé.....	0 2	0 2		
BASE.				
Filet.....	0 1	0 2		
Socle.....	0 6	0 4		

Afin que l'eau ne séjourne pas sur la corniche supérieure, on lui donne une inclinaison de $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire que la saillie sur le nu de l'architrave étant de 1 module 6 parties ou 18 parties, on donne au point où la face supérieure rencontre le prolongement du nu une hauteur de 2 parties au-dessus de l'angle de la cimaise.

L'ordre toscan se distingue par l'absence des ornements et par un caractère général de solidité, qui

le fait employer aujourd'hui dans la construction des arsenaux, des casernes, des prisons, etc.

Le rez-de-chaussée du palais du Luxembourg, à Paris, est d'ordre toscan. L'église Saint-Laurent, au faubourg Saint-Martin, est ornée de pilastres toscans.

ORDRE DORIQUE (fig. 2). Les proportions relatives

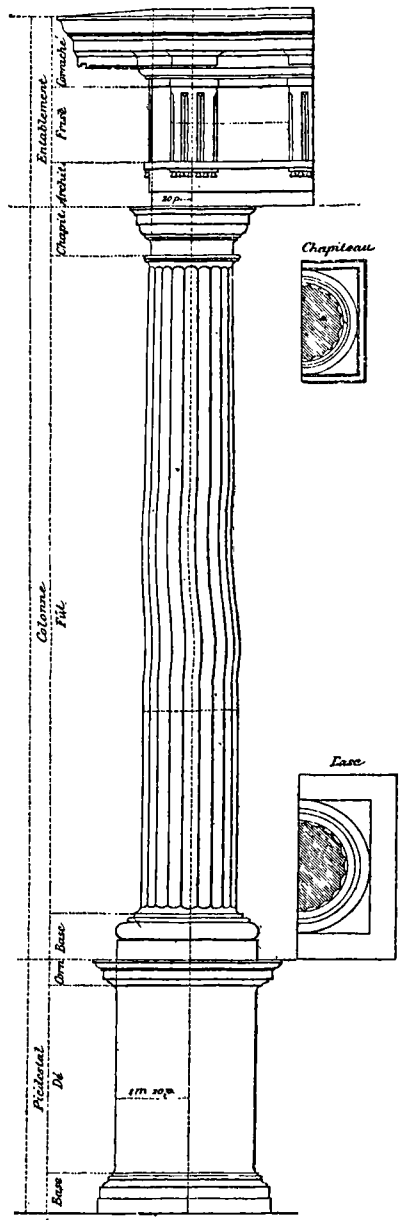


Fig. 2. Ordre dorique.

de l'entablement, de la colonne et du piédestal sont les mêmes que dans l'ordre toscan. Mais, pour avoir le module, il faut diviser la hauteur de la colonne en 16 parties égales.

Voici le tableau des parties et de leurs dimensions relatives :

		HAUTEUR.	SAILLIE.
		mod. p.	mod. p.
CORNICHE.			
ENTABLEMENT.	Filet de couronnement.....	0 1	2 0
	Doucine.....	0 3	1 9
	Filet.....	0 0,5	1 9
	Talon.....	0 1	1 8,85
	{ en haut.....		1 8,25
	{ en bas.....	0 3,5	1 8
	Larmier.....	0 3,5	1 8
	Talcn.....	0 1	1 7,5
	{ en bas.....		1 6,75
	Mutules (indiquées en <i>m</i> sur la figure et supportant le larmier). Elles représentent l'extrémité des chevrons.	0 3	1 6,5
Gouttes, ornement inférieur des mutules, au nombre de 36 sous chacune.....	0,5	» »	
Quart de rond.....	0 2	0 3,5	
Filet.....	0 0,5	0 1,5	
Chapeau des triglyphes.....	0 2	0 1	
FRISE.			
TRIGLYPHES.	Triglyphes.....	1 6	0 0,5
	Métopes.....	1 6	0 0
Les <i>triglyphes</i> TTT représentent l'extrémité des solives, sillonnées par des <i>canaux</i> verticaux formés par les eaux pluviales. Ils sont séparés par des espaces carrés appelés <i>métopes</i> .			
ARCHITRAVE.			
ENTABLEMENT.	Listel.....	0 2	0 2
	Chapiteau des gouttes.....	0 0,5	0 1,5
	Gouttes (<i>gg</i>) au nombre de 6 sous chaque triglyphe....	0 1,5	0 1,5
	Première face ou plate-bande.	0 6	0 0,5
Deuxième id. id.	0 4	0 0	
CHAPITEAU.			
COLONNE.	Listel.....	0 0,5	0 5
	Talon... { en haut.....	0 1	0 4,75
	{ en bas.....	0 1	0 4
	Tailloir ou abaque.....	0 2,5	0 3,75
	Quart de rond.....	0 2,5	0 3,5
	Baguette.....	0 1	0 1,5
	Filet.....	0 0,5	0 1
	Gorgerin... { Congé.....	0 1	0 1
	{ Gorgerin.....	0 3	0 0
	Fût.....	13 7,75	0 1
{ Baguette....	0 1,5		
{ Filet.....	0 0,5	0 1	
{ Congé supérieur	0 1	0 1	
{ Fût.....	0 0	0 0	
{ Congé inférieur	0 1,75	0 1,75	
BASE.			
BASE	Filet.....	0 0,66	0 1,75
	Baguette.....	0 1,33	0 2,5
	Tore.....	0 4	0 5
	Plinthe.....	0 6	0 5
CORNICHE.			
BASE	Listel.....	0 0,5	0 6
	Quart de rond.....	0 1	0 5,75
	Filet.....	0 0,5	0 4,75
	Larmier... { Congé.....	0 0,75	» »
	{ Larmier.....	0 1,75	0 4
Talon..... { en haut.....	0 1,5	0 1,5	
{ en bas.....	0 0,25	0 0,25	

		HAUTEUR.	SAILLIE.
		mod. p.	mod. p.
DÉ.			
Socle.....		3 10,5	0 0
Congé.....		0 1,5	0 1,5
BASE.			
BASE	Filet.....	0 0,5	0 1,5
	Baguette.....	0 1	0 2
	Talon renversé.....	0 2	0 3,5
	Deuxième socle.....	0 2,5	0 4
	Premier socle.....	0 4	0 5
Les mutules de l'ordre dorique sont quelquefois remplacés par des <i>denticules</i> , ornements formés de saillies à section carrée, qu'on retrouvera dans l'ordre ionique et dans les ordres corinthien et composite.			
La largeur des triglyphes est de 1 module; ils sont espacés de 1 mod. $\frac{1}{2}$; et il y a toujours un triglyphe au-dessus de l'axe de chaque colonne. La largeur des métopes égale leur hauteur; cet espace carré est souvent orné de figures d'animaux, d'armures ou de trophées.			
Le caractère de l'ordre dorique est sévère, mais plus léger que l'ordre toscan. Parmi les modèles de cet ordre on cite, dans l'antiquité, le Parthénon, à Athènes, les Propylées et le temple de Thésée, dans la même ville, la colonne Trajane à Rome. Parmi les monuments modernes on peut nommer, à Paris: les Tuileries (côté de la cour), le vieux Louvre, le portail de l'église Saint-Gervais (rez-de-chaussée), l'église Saint-Sulpice (rez-de-chaussée), l'Odéon, le théâtre des Variétés (rez-de-chaussée), l'école des Beaux-Arts, la colonne de la place Vendôme.			
ORDRE IONIQUE (fig. 3). On divisera encore la hauteur totale en 19 parties, dont 3 pour l'entablement, 4 pour le piédestal, et le reste pour la colonne; mais, pour avoir le module, il faut diviser la hauteur de la colonne en 18 parties égales.			
On réglera ensuite la hauteur et la saillie de chacune des parties de l'ordre, conformément au tableau ci-dessous :			
		HAUTEUR.	SAILLIE.
		mod. p.	mod. p.
CORNICHE.			
ENTABLEMENT.	Filet de couronnement.....	0 1,5	1 13
	Doucine, ou cimaise supérieure.....	0 5	1 13
	Filet.....	0 0,5	1 8
	Talon... { en haut.....	0 2	1 7,5
	{ en bas.....	0 2	1 6
	Larmier.....	0 6	1 5,5
	Quart de rond.....	0 4	0 13,5
	Baguette.....	0 1	0 10
	Filet.....	0 0,5	0 9,5
	Cordon des denticules.....	0 1,5	0 6,5
Denticules (DD) figurant l'extrémité des chevrons.....			
Filet.....	0 1	0 5	
Talon ou ci- { en haut.....	0 4	0 4,25	
{ en bas.....		0 0,75	
{ maise inférieure.....	1 9	0 0	
FRISE.			
ARCHITRAVE.			
ENTABLEMENT.	Listel.....	0 1,5	0 5
	Talon... { en haut.....	0 3	0 4,66
	{ en bas.....	0 3	0 2,33
	Première face ou plate-bande.	0 7,5	0 2
	Deuxième id. id.....	0 6	0 1
Troisième id. id.....	0 4,5	0 0	

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
CHAPITEAU.				
Filet.....	0	1	0	5
Talon.....	0	2	en haut.....	4,5
			en bas.....	3
Listel.....	0	1	0	2,5
Canal des volutes (Voy. l'art. CHAPITEAU).....				
Quart de rond.....	0	3	0	2
	0	5	en haut.....	7
			en bas.....	2
FÛT.				
Astragale... Baguette..	0	2	0	3
Filet.....	0	1	0	2
Congé supérieur	0	2	0	2
Fût.....	15	15,5	0	0
Congé inférieur	0	2	0	2
BASE.				
Filet.....	0	1,5	0	2
Tore.....	0	5	0	4,5
Filet.....	0	0,25	0	2,5
Scotie.....	0	2	0	2
Filet.....	0	0,25	0	4
Deux baguettes.....	0	2	0	4,5
Filet.....	0	0,25	0	4
Scotie.....	0	2	0	3
Filet.....	0	0,25	0	6
Socle.....	0	6	0	7
CORNICHE.				
Filet.....	0	0,5	0	10
Talon.....	0	1,5	en haut.....	9,75
			en bas.....	8,75
Larmier.....	0	3	0	8,5
Quart de rond.....	0	3	0	4,5
Baguette.....	0	1	0	2
Filet.....	0	1	0	1,25
DÉ.				
Congé supérieur.....	0	1,25		
Dé.....	4	12,75	0	0
Congé inférieur.....	0	2	0	2
BASE.				
Filet.....	0	1	0	2
Baguette.....	0	1,33	0	3
Talon renversé.....	0	3	0	7
Filet.....	0	0,66	0	7
Socle.....	0	4	0	8

L'ordre ionique se distingue par sa grâce et son élégance. On l'emploie aujourd'hui pour la construction des maisons de plaisance, dans l'intérieur des salles de spectacle ou de concert, etc. Parmi les beaux exemples de cet ordre dans l'antiquité, on cite le théâtre de Marcellus à Rome, le Colisée, le temple de la Fortune virile. Parmi les constructions modernes appartenant au même ordre, on peut nommer l'hôtel des Monnaies, à Paris, le premier étage de la façade du théâtre des Variétés, l'église Saint-Vincent-de-Paul (les chapiteaux ont des volutes sur les quatre faces). (Voy. l'art. CHAPITEAU.)

ORDRE CORINTHIEN (fig. 4). Pour tracer le profil de cet ordre, on peut, comme l'indiquent beaucoup d'auteurs, diviser la hauteur totale en 19 parties égales, en prendre 3 pour l'entablement, 4 pour le piédestal et 12 pour la colonne, comme dans les ordres précédents; puis, diviser la hauteur de la colonne en 20 parties pour avoir le module. Mais Vignole, afin de donner à l'ordre plus d'élégance, exhausse le piédestal d'un tiers de module; ce système revient à diviser la hauteur totale en 32 par-

ties, dont chacune est un module; 5 de ces parties ou modules forment la hauteur de l'entablement, 20 la hauteur de la colonne, et 7 celle du piédestal. La fig. 4 est tracée dans le premier système. Voici maintenant le tableau des diverses parties avec leurs saillies et leurs hauteurs :

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
CORNICHE.				
Filet de couronnement.....	0	1	2	2
Doucine.....	0	5	2	2
Filet.....	0	0,5	1	15
Talon.....	0	1,5	en haut.....	14,5
			en bas.....	13,5
Larmier.....	0	5	1	13
Talon.....	0	1,5	en haut.....	12,5
			en bas.....	11,5
Modillon.....	0	6	1	11
Filet.....	0	0,5	0	13,5
Quart de rond.....	0	4	0	13
Baguette.....	0	1	0	10
Filet.....	0	0,5	0	9,5
Denticules.....	0	6	0	9
Filet.....	0	0,5	0	5
Talon.....	0	3	en haut.....	4,66
			en bas.....	2
FRISE.				
Baguette.....	0	1	0	1,75
Filet.....	0	0,5	0	1,25
Congé.....	0	1,25	0	1,25
Frise.....	1	6,25	0	0
ARCHITRAVE.				
Filet.....	0	1	0	5
Talon.....	0	4	en haut.....	4,75
			en bas.....	2,25
Baguette.....	0	1	0	2
Première face.....	0	7	0	1,5
Talon.....	0	2	en haut.....	1,33
			en bas.....	0,75
Deuxième face.....	0	6	0	0,5
Baguette.....	0	1	0	0,5
Troisième face.....	0	5	0	0
CHAPITEAU.				
Quart de rond.....	0	2		
Filet.....	0	1		
Face du tailloir.....	0	3		
Grandes volutes.....	0	8	0	17
Petites feuilles supérieures.....	0	4	0	13
Grandes feuilles.....	0	12	0	8
Feuilles inférieures.....	0	12	0	6,5
FÛT.				
Astragale... Baguette.....	0	2	0	3
Filet.....	0	1	0	1,5
Congé supérieur	0	1,5	0	1,5
Fût.....	16	5	0	0
Congé inférieur	0	1,5	0	1,5
Filet.....	0	1	0	1,5
BASE.				
Tore.....	0	3	0	3,5
Filet.....	0	0,25	0	2
Scotie.....	0	1,25	0	1,5
Filet.....	0	0,25	0	3,12
Deux baguettes.....	0	1,5	0	3,5
Filet.....	0	0,25	0	3,12
Scotie.....	0	1,25	0	2,5
Filet.....	0	0,25	0	4,5
Tore.....	0	4	0	7
Socle.....	0	6	0	7

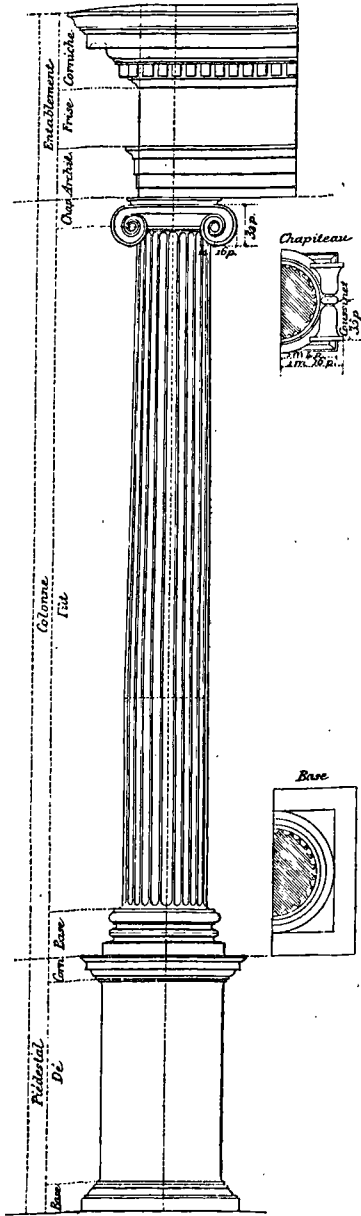


Fig. 3. Ordre ionique.

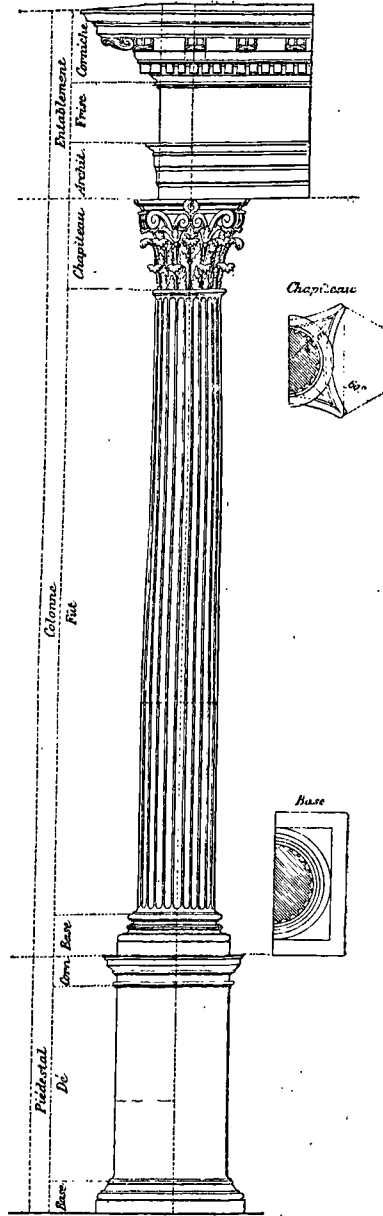


Fig. 4. Ordre corinthien.

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
CORNICHE.				
Filet.....	0	0,66	0	8
Talon.....	}	1,83	0	6,75
{ en haut.....				
{ en bas.....				
Larmier.....	0	3	0	6,5
Gorge ou gouttière.....	0	1,25	0	3
Baguette.....	0	1	0	1,5
Filet.....	0	0,75	0	1
Frise.....	0	5	0	0
Baguette.....	0	1	0	2
DÉ.				
Filet.....	0	1	0	1,5
Congé.....	0	1,5	0	1,5
Socle.....	4	17	0	0
Congé.....	0	1,5	0	1,5
Filet.....	0	1	0	1,5
BASE.				
Baguette.....	0	1	0	2
Talon renversé.....	0	3	0	6
Filet.....	0	1	0	6
Tore.....	0	3	0	8
Socle.....	0	4	0	8

Le modillon qui figure dans la corniche de l'entablement est une petite console horizontale soutenant le larmier. Les denticules sont des ornements analogues à ceux qui figurent sous le même nom dans les ordres précédents (Voy. aux art. CHAPITEAU et ABAQUE les détails du chapiteau corinthien). Le dé ou socle du piédestal, d'après Vignole, devrait être exhaussé d'un tiers de module ou 6 parties, et porté par conséquent à 5 mod. 5 au lieu de 4 mod. 17.

L'ordre corinthien est celui que sa richesse et son élégance font choisir pour tous les monuments qui demandent de la magnificence et de la grandeur.

On cite comme exemple d'ordre corinthien dans les monuments antiques : l'arc de Marius, à Orange, la Maison Carrée de Nîmes, le temple de la Sibylle à Tivoli, près Rome, le temple de Jupiter Stator, le Panthéon, à Rome, le Forum et le temple de Nerva, les thermes de Caracalla, etc. Parmi les monuments modernes appartenant au même ordre, on peut nommer : à Paris, le rez-de-chaussée de l'Hôtel de Ville, l'église du Val-de-Grâce, le Garde-Meuble, l'École militaire, l'École de médecine, la Bourse, l'église Notre-Dame de Lorette, la chapelle du château de Versailles, la cour principale du château d'Écouen, etc.

ORDRE COMPOSITE (fig. 5). Les masses principales de cet ordre ont les mêmes proportions que dans l'ordre corinthien, et le module se détermine par conséquent de la même manière. Nous donnerons donc sur-le-champ le tableau des proportions de détail.

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
CORNICHE.				
Filet de couronnement.....	0	1,5	2	0
Doucine.....	0	5	2	0
Filet.....	0	1	1	13
Talon.....	}	2	1	12,5
{ en haut.....				
{ en bas.....				
Baguette.....	0	1	1	10,75
Larmier.....	0	5	1	10
Doucine engagée en partie sous le larmier.....	0	1,5	1	3
Filet.....	0	1	1	0
Talon.....	}	4	0	17,5
{ en haut.....				
{ en bas.....				

	HAUTEUR.		SAILLIE.	
	mod.	p.	mod.	p.
CORNICHE.				
Denticules.....	0	8	0	14
Filet.....	0	1	0	8
Quart de rond.....	0	5	0	7
FRISE.				
Baguette.....	0	1	0	2
Filet.....	0	0,5	0	1,25
Congé supérieur.....	0	1,25	0	1,25
Frise.....	0	17,25	0	0
Congé inférieur.....	0	7	0	7
ARCHITRAVE.				
Filet.....	0	1	0	7
Cavet.....	0	2	0	5,88
Quart de rond.....	0	3	0	5,5
Baguette.....	0	1	0	2,5
Première face.....	0	10	0	2
Talon.....	}	2	0	1,66
{ en haut.....				
{ en bas.....				
Deuxième face.....	0	8	0	0
CHAPITEAU.				
Quart de rond.....	0	1,5	»	
Filet.....	0	0,5	»	
Volutes.....	0	16	0	16
Grandes feuilles.....	0	12	0	8
Petites feuilles.....	0	12	0	6,5
FÛT.				
Astragale.....	0	2	0	3
{ Baguette.....	0	1	0	7
{ Filet.....	0	2	0	2
{ Congé supérieur.....	16	3,5	0	0
{ Fût.....	0	2	0	2
{ Congé inférieur.....	0	1,5	0	2
{ Filet.....				
BASE.				
Tore.....	0	3	0	4
Filet.....	0	0,25	0	2,5
Scotie.....	0	1,5	0	2
Filet.....	0	0,25	0	3,33
Baguette.....	0	0,5	0	3,75
Filet.....	0	0,25	0	3,33
Scotie.....	0	2	0	2,66
Filet.....	0	0,25	0	5
Tore.....	0	4	0	7
Socle.....	0	6	0	7
CORNICHE.				
Filet.....	0	0,66	0	8
Talon.....	}	1,5	0	7,75
{ en haut.....				
{ en bas.....				
Larmier.....	0	3	0	6,5
Doucine.....	0	1,33	0	3,5
Filet.....	0	0,5	0	1,25
Cavet.....	0	1	0	0,25
Frise.....	0	5	0	0
Baguette.....	0	1	0	2
DÉ.				
Filet.....	0	1	0	1,25
Congé supérieur.....	0	1,25	0	1,25
Socle.....	4	16,75	0	0
Congé inférieur.....	0	2	0	2
Filet.....	0	1	0	2
BASE.				
Baguette.....	0	1	0	2,75
Talon ren-	}	3	0	3
{ en haut.....				
{ en bas.....				
{ versé.....	0	1	0	5,25
Filet.....	0	1	0	6,25
Tore.....	0	3	0	8
Socle.....	0	4	0	8

Voy. aux art. CHAPITEAU et ABAQUE les détails du chapiteau composite.

D'après Vignole, le socle du dé du piédestal devrait être exhaussé d'un tiers de module, et porté à 5 mod. 4^r,75 au lieu de 4 mod. 16^r,75.

Riche et grandiose comme le corinthien, l'ordre

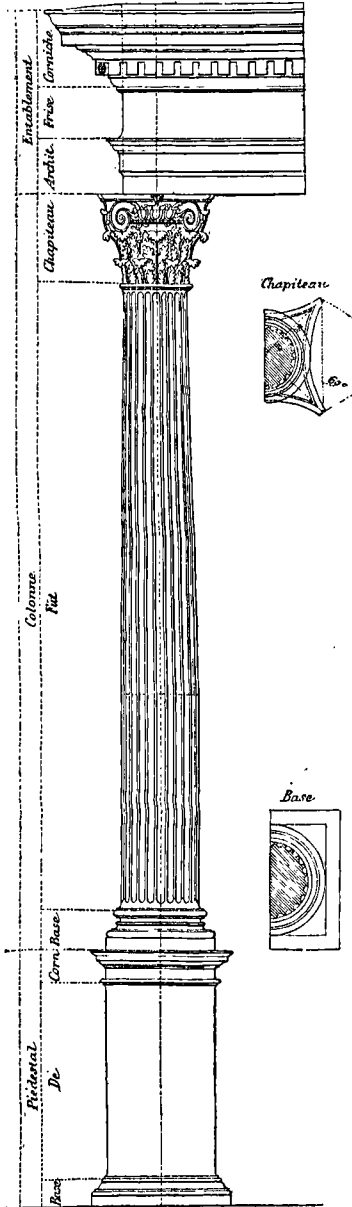


Fig. 5. Ordre composite.

composite s'emploie dans les mêmes circonstances. Comme modèles antiques on peut citer l'arc de Titus, l'arc de Septime Sévère, le temple de Mars, à Rome. Comme exemples modernes, on peut nommer à Paris : la fontaine des Innocents, la porte

Saint-Denis, l'arc de la barrière de l'Etoile, la fontaine du Palmier, place du Château, l'église de la Madeleine, la colonne de Juillet.

Du reste les proportions que nous venons de rapporter sont celles qu'indiquent les auteurs qui font autorité; mais elles n'ont rien d'absolu. On trouve, entre les monuments antiques construits dans le même ordre, des différences souvent notables. Ces différences sont également sensibles dans les monuments modernes. Les cinq ordres, tels qu'on les étudie aujourd'hui, doivent être regardés comme des types, dont il convient de se rapprocher autant que possible, mais dont il est permis de s'écarter suivant l'inspiration du goût, ou en vue de la destination particulière de chaque monument. (Voy. les art. MOULURES, PORTIQUE, COLONNADE, FRONTON, etc.)

Quelques auteurs ajoutent aux cinq ordres dont il vient d'être question, un sixième ordre auquel ils donnent le nom de *dorique grec* ou *ordre de Paestum*, parce qu'on en retrouve le modèle dans ce qui reste du temple de Neptune à Paestum, en Italie. Cet ordre diffère surtout du dorique romain en ce qu'il est plus lourd et qu'il est employé sans piédestal; la colonne repose immédiatement sur le sol. Il est aussi plus simple dans ses détails. Son chapiteau ne se compose que de l'abaque, d'un quart de rond et de quatre filets successifs appelés *annelets*, séparés par des refouillements égaux à leur hauteur. L'astragale est remplacée par une gorge ou rainure. Le fût de la colonne repose immédiatement sur le socle, qui forme à lui seul toute la base. Nous renverrons aux Traités d'architecture pour les détails de cet ordre qui n'est point généralement admis.

ORDRES DE BANQUE. On désigne sous cette dénomination certains problèmes qu'on peut être amené à résoudre à l'occasion des questions d'ARBITRAGES (Voy. ce mot), et dont on se fera une idée par le problème suivant :

Un banquier de Paris reçoit de son correspondant de Londres l'ordre de lui remettre du papier sur Madrid à 517 (Voy. CHANGE), et de se couvrir en tirant sur Hambourg à 187. Mais, au moment où cet ordre lui parvient, le Madrid est monté à 522; à quel change devra-t-il tirer sur Hambourg, pour ne pas déranger les calculs de son correspondant?

L'ordre à exécuter, traduit en langage vulgaire, revient à celui-ci : acheter des piastres à 517 centimes, et récupérer la somme ainsi dépensée en vendant les marcs-banco à 187 centimes. Mais le change avec Madrid s'étant élevé de 517 à 522, le prix des piastres se trouve multiplié par le rapport de 522 à 517, c'est-à-dire par $\frac{522}{517}$. Pour compenser

l'accroissement de dépense par l'accroissement de recette, il faut augmenter dans le même rapport le prix des marcs-banco, c'est-à-dire multiplier 187 par ce rapport, ce qui donne

$$\frac{187 \times 522}{517} \text{ ou } 188,81.$$

On peut remarquer que le change inconnu est donné par le quatrième terme de la proportion

$$517 : 522 = 187 : x,$$

laquelle exprime que les deux changes varient dans le même rapport.

En examinant tous les cas qui peuvent se présenter dans ce genre de questions, on reconnaît que toutes les fois que la place qui reçoit l'ordre donne l'*incertain* aux deux autres (*Voy. CHANGE*), ou toutes les fois qu'elle donne le *certain* aux deux autres, les changes varient en raison directe; mais si la place qui reçoit l'ordre donne le *certain* à l'une des deux autres et l'*incertain* à la seconde, les changes varient en raison inverse.

Pour faire comprendre la seconde règle, nous résoudrons le problème suivant :

Un banquier de Saint-Petersbourg reçoit de son correspondant de Berlin l'ordre de lui remettre du papier sur Amsterdam à 195 roubles papier pour 100 florins, et de se couvrir en tirant sur Londres à 38 pence pour 1 rouble argent. Au moment où il reçoit cet ordre, le change avec Amsterdam est à 198 roubles papier pour 100 florins; à quel change doit-il tirer sur Londres pour ne pas déranger les calculs de son correspondant ?

Le change avec Amsterdam étant monté de 195 roubles à 198, le prix des florins à acheter a augmenté dans le rapport de ces nombres, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $\frac{198}{195}$. Pour que la dépense soit compensée par la recette, il faut que le prix des livres sterling à vendre augmente dans le même rapport et soit aussi multiplié par $\frac{198}{195}$, ce qui exige que le nombre de pence donnés pour 1 rouble argent varie dans le rapport inverse, et soit multiplié par $\frac{195}{198}$; le nombre de pence cherché est donc

$$\frac{38 \cdot 195}{198} \text{ ou } 37,4 \text{ pence.}$$

On voit que le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$198 : 195 = 38 : x,$$

ce qui exprime que les changes varient dans le rapport inverse.

ORIENT, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (*Voy. ce mot*). L'observateur qui, dans notre hémisphère, regarde le soleil à midi, a l'orient à sa gauche. L'orient porte aussi le nom d'est.

ORIENTATION, opération qui a pour but de faire connaître la position des diverses parties d'un plan par rapport aux points cardinaux. Pour cela, il suffit de déterminer l'angle que fait une des droites du plan, ordinairement un des côtés du POLYgone TOPOGRAPHIQUE (*Voy. ce mot*) avec la MÉRIDienne du lieu. La boussole fournit une solution immédiate du problème; car si on l'installe à l'une des extrémités de la droite considérée, de manière que le plan vertical de cette droite soit parallèle à la ligne de foi de l'instrument, l'écart de l'aiguille indiquera l'angle que la projection horizontale de la droite fait avec le méridien magnétique; et comme ce méridien magnétique fait avec le méridien du lieu un angle qui est connu, et qui est en ce moment de 20° 6' vers l'ouest, il sera facile d'en déduire l'angle de la projection horizontale considérée avec le méridien. Si, par exemple, le plan vertical de la droite fait avec le méridien magnétique, et vers l'ouest, un angle de 61° 43', on aura l'angle cherché en retranchant de celui-ci 20° 6', ce qui donne 41° 37'; si le plan ver-

tical de la droite fait avec le méridien magnétique un angle de 61° 43' vers l'est, on aura l'angle cherché en ajoutant à celui-ci 20° 6', ce qui donne 81° 49'.

On peut encore résoudre la question en déterminant directement sur le terrain la direction du méridien du lieu (*Voy. MÉRIDIE*).

Sur les plans, on prend ordinairement une parallèle à l'un des côtés du cadre pour représenter la méridienne; mais si la forme du plan rend cette méthode incommode, ou si l'on oriente le plan après coup, on y représente la direction de la méridienne par une flèche dont la pointe indique le nord.

ORILLON, prolongement de la face d'un bastion, en saillie sur le flanc adjacent (O, fig. 1). Les bas-



Fig. 1.

tions à orillons ont été employés dès 1554 par les ingénieurs italiens; et on les retrouve, avec diverses modifications dans le tracé, jusqu'au temps de Vauban, qui en a fait usage dans les premières places fortes qu'il a construites. L'orillon peut être à pan coupé (O, fig. 2), auquel cas il porte plus sou-

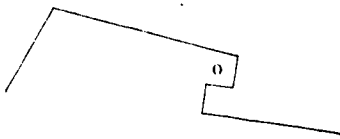


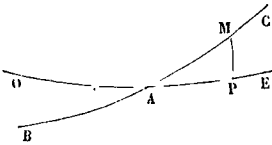
Fig. 2.

vent le nom d'*époulement*. Vauban a renoncé aux orillons parce qu'ils gênent les feux des flancs; et les ingénieurs modernes les ont proscrits de leurs tracés.

ORLE, moulure qui a le même profil que le LISTEL (*Voy. ce mot*), mais qui appartient à une surface de révolution (*Voy. MOULURES*). L'orle est souvent appelée *ceinture*.

ORTHODROMIQUE (ROUTE), (du grec *ὀρθός*, direct, et *δρομή*, course). Route la plus courte que puisse suivre un navire pour aller d'un point à un autre sur la surface des mers. Le globe étant considéré comme sphérique, cette route la plus courte est l'arc de grand cercle qui joint les deux points donnés; dans les longues traversées, elle diffère souvent d'une manière notable de la route loxodromique (*Voy. LOXODROMIE*), et le navigateur a intérêt à s'en rapprocher le plus possible. Pour la suivre d'une manière rigoureuse, il faudrait changer de direction à chaque instant; attendu qu'un grand cercle coupe les méridiens sous des angles différents, à moins que ce grand cercle ne soit lui-même un méridien, ou l'équateur, cas tout à fait particuliers. La méthode adoptée aujourd'hui par les navigateurs consiste à déterminer d'avance un certain nombre de points de la route orthodromique, et à naviguer de l'un à l'autre par des arcs de loxodromie.

Soit BC un arc de grand cercle quelconque, OE l'équateur, O l'origine des longitudes, α la longitude du point A où l'arc considéré coupe l'équateur, ω l'angle CAE; soit M un point quelconque de l'arc



de grand cercle, $L = OP$ sa longitude, et $l = MP$ sa latitude. Le triangle sphérique AMP, rectangle en P, donne la relation

$$\text{tang } MP = \text{tang } CAE \sin AP,$$

ou

$$\text{tang } l = \text{tang } \omega \sin (L - \alpha) \quad [1]$$

c'est l'équation du grand cercle considéré. Si l'on veut qu'il passe par deux points donnés, dont les coordonnées géographiques sont $l', L',$ et $l'', L'',$ on aura deux relations analogues à la précédente

$$\text{tang } l' = \text{tang } \omega \cdot \sin (L' - \alpha) \quad [2]$$

et

$$\text{tang } l'' = \text{tang } \omega \cdot \sin (L'' - \alpha). \quad [3]$$

Les relations [2] et [3] serviront à déterminer les constantes α et ω . Pour cela, il suffit de les diviser membre à membre, ce qui donne

$$\frac{\text{tang } l'}{\text{tang } l''} = \frac{\sin (L' - \alpha)}{\sin (L'' - \alpha)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\text{tang } l' + \text{tang } l''}{\text{tang } l' - \text{tang } l''} = \frac{\sin (L' - \alpha) + \sin (L'' - \alpha)}{\sin (L' - \alpha) - \sin (L'' - \alpha)},$$

ou bien

$$\frac{\text{tang } \left[\frac{1}{2} (L' + L'') - \alpha \right]}{\text{tang } \frac{1}{2} (L' - L'')} = \frac{\sin (l' + l'')}{\sin (l' - l'')},$$

relation qui fera connaître $\frac{1}{2} (L' + L'') - \alpha$, et par suite α . L'équation [2] donnera ensuite

$$\text{tang } \omega = \frac{\text{tang } l'}{\sin (L' - \alpha)},$$

d'où ω . Si l'on veut obtenir des points sur l'arc de grand cercle considéré, il suffira de donner à L des valeurs comprises entre L' et L'' , et d'en déduire les valeurs correspondantes de l à l'aide de l'équation [1] : calcul très-facile, une fois que les constantes α et ω sont déterminées.

Les coordonnées géographiques de ces points étant ainsi obtenues, on peut les marquer sur une carte marine; en les joignant par des droites successives, on obtient une ligne brisée inscrite dans la ligne orthodromique et dont les côtés sont des arcs de loxodromie; et ce tracé donne immédiatement l'angle que chaque loxodromie fait avec le méridien de son point de départ, c'est-à-dire le rumb suivant sur lequel on doit gouverner pour se transporter au point suivant. Ces directions pourraient être déterminées par le calcul; mais la méthode graphique est plus prompte et suffisamment exacte.

C'est en se rapprochant ainsi de la route orthodromique, et en ayant égard aux données relatives aux vents locaux et aux courants contenus dans les *Wind and Current charts* publiées par le lieutenant Maury (*Voy. COURANT*), que l'on est parvenu à

abrégé d'une manière notable les grandes traversées. On a pu, par exemple, gagner 10 jours sur la traversée moyenne de New-York à l'équateur, 48 jours sur la traversée de New-York à la Californie, 90 jours sur la traversée d'Angleterre en Australie, etc.

La route orthodromique a l'inconvénient d'entraîner parfois le navigateur dans des latitudes élevées; c'est ce qui arrive notamment quand le point de départ et le point d'arrivée sont situés tous deux à des latitudes assez hautes et à peu près égales; la route orthodromique peut alors traverser les régions polaires. Dans ce cas, on fixe à l'avance le parallèle qu'on ne veut pas dépasser, et l'on partage la route en deux : l'une qui va du point de départ à un point déterminé de ce parallèle; l'autre qui va de ce dernier point au point d'arrivée. Il est impossible de donner des règles à cet égard. On peut encore opérer d'une autre manière : on mène du point de départ et du point d'arrivée des arcs de grands cercles tangents au parallèle qu'on ne veut pas dépasser; soient a et b les points de tangence; la route se trouve partagée en 3 : l'une du point de départ au point a , la seconde du point a au point b , la troisième du point b au point d'arrivée. On trouvera dans le *Cours de navigation et d'hydrographie* de E. P. Dubois, page 486, la méthode employée pour déterminer les points de tangence a et b , ainsi que plusieurs autres détails qui ne pourraient entrer dans le cadre de cet article.

ORTHOGRAPHIQUE (PROJECTION), projection orthogonale des différents points de la surface de la terre, de la lune, ou d'une planète, sur le plan d'un grand cercle, ou sur un plan parallèle (*Voy. CARTES GÉOGRAPHIQUES, CARTES CELESTES*).

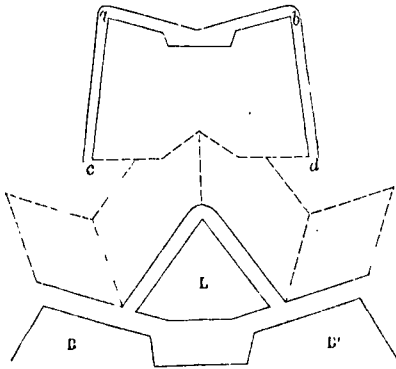
OSCILLATION, l'une des périodes égales dont se compose le mouvement alternatif d'un pendule; c'est celle qui est comprise entre l'instant initial et celui où le pendule se trouve pour la première fois dans la position symétrique de l'autre côté de la verticale (*Voy. PENDULE SIMPLE*). La demi-oscillation est la période comprise entre l'instant initial et celui où le pendule passe pour la première fois par la verticale.

Ce mot s'applique aussi aux périodes égales du mouvement du spiral dans les montres et chronomètres.

OUEST, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (*Voy. ce mot*). Dans notre hémisphère, lorsqu'on regarde le soleil à midi, on a l'ouest à sa droite. L'ouest porte aussi le nom d'*occident*.

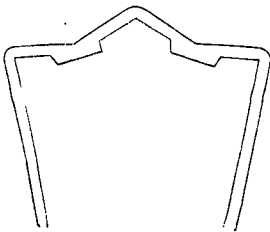
OUVRAGE À CORNES, ouvrage avancé qui se compose d'un front bastionné et de deux branches latérales plus ou moins longues, et qui remplace avec avantage les simples lunettes. Du temps de Vauban, on plaçait l'ouvrage à cornes devant un bastion, les branches appuyées aux demi-lunes collatérales; cette position était vicieuse, parce que l'ennemi établi sur le chemin couvert de l'ouvrage à cornes pouvait profiter des trouées formées par les fossés des branches latérales pour battre en brèche les demi-lunes. On le plaçait aussi devant une demi-lune; mais l'inconvénient était plus grand encore, puisque par la trouée des fossés des branches latérales l'ennemi pouvait faire brèche aux bastions eux-mêmes. Les ingénieurs modernes plaçant les ouvrages à cornes devant les demi-lunes,

mais assez loin pour que les branches latérales n'atteignent que le pied des glacis, comme on le voit sur la figure. Le front *ab* se défend lui-même; les branches latérales *ac* et *bd* sont flanquées par



les bastions B et B'; et les fossés de ces branches, étant masqués par les glacis, ne peuvent servir de trouée pour battre en brèche les bastions. Dans cette situation, un ouvrage à cornes peut être utile pour tenir l'ennemi à distance, occuper une hauteur ou défendre quelque point important, barrer des passages dans des marais, prendre possession d'une des rives d'un fleuve, etc., etc. Un ouvrage à cornes doit avoir au moins 6^m d'escarpe revêtue, et 4^m de contrescarpe; le côté extérieur *ab* peut avoir de 300 à 400 mètres; mais les branches latérales ne sauraient avoir sans inconvénient plus de 150^m. Le corps de place doit conserver sur cet ouvrage un commandement de 2^m au moins.

OUVRAGE À COURONNE, ouvrage détaché, composé de deux ou trois fronts bastionnés et de deux

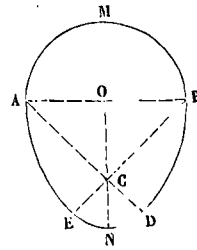


branches latérales. La figure représente un ouvrage à couronne qui ne présente qu'un bastion et deux demi-bastions; il pourrait y avoir deux ou un plus

grand nombre de bastions entiers indépendamment des demi-bastions. Quelquefois on place des demi-lunes sur les courtines. Les ouvrages à couronne s'emploient dans les mêmes circonstances que les ouvrages à cornes (Voy. ce mot); ils ont les mêmes propriétés défensives, avec cette différence qu'ils embrassent un front plus étendu. La meilleure place à leur donner est en avant d'une demi-lune, mais assez loin pour que les fossés des branches latérales n'arrivent qu'au pied du glacis. Les branches latérales sont flanquées par les faces des bastions collatéraux du corps de place. Ces ouvrages, comme les ouvrages à cornes, ne peuvent être employés utilement que lorsque la garnison est assez nombreuse.

OVALE, nom que l'on donne quelquefois à l'ellipse, dans les arts. On nomme encore ainsi une courbe à plusieurs centres, se traçant à l'aide du compas, d'après les mêmes méthodes que l'ANSE DE PANIER (Voy. ce mot).

OVE, courbe fermée, en forme d'œuf, qui entre fréquemment dans les ornements de l'architecture. On la trace de la manière suivante. Sur une droite AB comme diamètre on décrit une demi-circon-



férence AMB. Au milieu O de AB on élève une perpendiculaire ON sur laquelle on prend une longueur OC égale à AO; et l'on joint AC et BC. Du point A comme centre, avec AB pour rayon, on décrit un arc BD, terminé au prolongement de AC; du point B comme centre, avec BA pour rayon, on décrit un arc AE, terminé au prolongement de BC. Les longueurs AD et BE étant égales, ainsi que les longueurs AC et BC, il en résulte que leurs différences CD et CE sont égales. On peut donc, du point C comme centre, avec CD pour rayon, décrire un quart de cercle, qui passera au point E. Les arcs ainsi décrits se raccorderont aux points A, B, D, E, par des contacts intérieurs, et forment la courbe fermée à laquelle on a donné le nom d'ove.

P

PALAN, machine employée pour élever les fardeaux ou pour exercer un effort de traction considérable. Un palan se compose de deux systèmes de poulies mouflées (Voy. MOUFLES) M et M' (fig. 1) sur lesquelles s'enroule une même corde, dans l'ordre 1, 1', 2, 2', 3, 3'; le dernier brin va s'attacher à un crochet disposé à cet effet à la par-

tie inférieure de la moufle M. Cette moufle est suspendue à un point fixe; à l'autre moufle est suspendu le poids P qu'il s'agit d'élever; au brin libre de la corde est appliquée la force mouvante F.

L. Si l'on néglige d'abord le frottement et la roideur des cordes, il est facile de se rendre compte

Ju jeu de cet appareil. Supposons que la charge s'élève d'une certaine quantité h , tous les cordons qui vont d'une poulie à l'autre, ou de la dernière 3' au crochet de la moufle M, cordons auxquels on donne le nom de courants, se seront raccourcis chacun de h . Mais, comme la longueur totale de la corde n'a pas varié, il faut que le brin libre, auquel est appliquée la force mouvante F , brin que l'on nomme le garant, se soit allongé d'autant de fois h qu'il y a de courants, soit de nh s'il y a n courants. Ainsi le chemin parcouru par la charge est au chemin parcouru par le point d'application de la force mouvante comme l'unité est au nombre des courants.

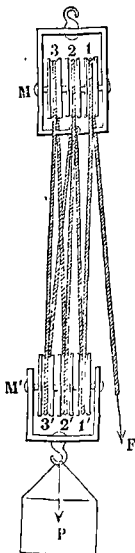


Fig. 1.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que toutes les poulies d'un même palan n'ont pas la même vitesse. Le chemin parcouru par un point de la circonférence de gorge de la poulie 1, par exemple, est nh , tandis que le chemin parcouru dans le même temps par un point de la circonférence de gorge de la poulie 3' n'est que h . Ainsi la vitesse de la poulie 1 est n fois plus grande que la vitesse de la poulie 3'. Et, comme chaque courant joue le rôle de garant à l'égard du système formé par les poulies qui précèdent, à partir de la poulie 3', on voit que la vitesse de chaque poulie est égale à celle de la poulie 3' multipliée par le nombre des courants compris entre le crochet M et la poulie que l'on considère:

La relation entre les forces F et P s'obtient fort aisément aussi dans l'hypothèse qui nous occupe. Si l'on considère successivement l'équilibre de chacune des poulies qui forment le système M, on voit que les tensions de tous les cordons qui y aboutissent sont égales entre elles et à la force F . Si l'on considère en second lieu l'équilibre de la moufle M', on voit que la somme des tensions des courants, que l'on peut regarder comme des forces parallèles, doit être égale au poids de la charge (γ compris le poids de la moufle M' elle-même); on doit donc avoir :

$$nF = P, \text{ d'où } F = \frac{P}{n},$$

c'est-à-dire que la force motrice est égale à la charge, divisée par le nombre des courants.

On peut remarquer que, d'après ce qui a été dit des chemins parcourus, si la charge s'élève de h , on aura

$$\mathcal{E}P = Ph \text{ et } \mathcal{E}F = F.nh = \frac{P}{n}.nh = Ph,$$

c'est-à-dire que le travail moteur est égal au travail de la force résistante P , ce qui devait être puisqu'on néglige les résistances passives.

II. Mais ces résistances passives sont rarement négligeables. Si l'on veut y avoir égard, il faut considérer successivement l'équilibre de chaque poulie. Soient $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ les tensions des courants, regardées comme des forces verticales,

on aura, pour la dernière poulie (Voy. Poulie)

$$T_1 = 0 + T_1 = \alpha \frac{1-1}{\beta-1} + 1.T.$$

pour l'avant-dernière

$$T_2 = \alpha + \beta T_1 = \alpha \frac{\beta-1}{\beta-1} + \beta T_1$$

et, ainsi de suite,

$$T_3 = \alpha + \beta T_2 = \alpha \frac{\beta^2-1}{\beta-1} + \beta^2 T_1,$$

$$T_4 = \alpha + \beta T_3 = \alpha \frac{(\beta^3-1)}{\beta-1} + \beta^3 T_1,$$

.....

$$T_n = \alpha + \beta T_{n-1} = \alpha \left(\frac{\beta^{n-1}-1}{\beta-1} \right) + \beta^{n-1} T_1.$$

La somme des premiers membres est égale à P ; effectuant cette somme et réduisant, on obtient

$$P = \frac{\alpha}{\beta-1} \left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - n \right) + \frac{\beta^n-1}{\beta-1} T_1; [1]$$

mais la poulie 1, à laquelle sont appliquées les forces F et T_n , donne de même :

$$F = \alpha + \beta T_n = \alpha \left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1} \right) + \beta^n T_1. [2]$$

Éliminant T entre les relations [1] et [2], on trouve

$$F = \alpha \left(\frac{n\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1} \right) + \frac{\beta^n(\beta-1)}{\beta^n-1} P; [3]$$

c'est la relation qu'il s'agit d'obtenir. (Voy. le Cours de M. Bélanger à l'École centrale.)

Supposons, par exemple, un palan composé de 6 poulies, de 0^m,1 de diamètre; soit $\rho = 0^m,005$; $f = 0,15$,

ce qui donne $f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = 0,1484$

et par suite $f_1 \rho = 0,000742$.

Supposons que la corde soit une corde blanche de 9 fils de caret, ce qui correspond à un diamètre de 0^m,011 (Voy. ROUEUR DES CORDES) et suppose

$$A = 0^k,022521 \text{ et } B = 0,003267.$$

On en déduira d'abord

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}A}{r - f_1 \rho} = 0^k,22859$$

$$r + \frac{1}{2}B + f_1 \rho$$

$$\text{et } \beta = -\frac{1}{r - f_1 \rho} = 1,06327.$$

On trouve ensuite par logarithmes

$$\beta^6 = 1,44498;$$

et en substituant ces valeurs dans la formule [3], on obtiendra

$$F = 0^k,84016 + 0,205456.P.$$

Pour $P = 500^k$ on trouverait $F = 103^k,568$, au lieu de $\frac{500^k}{6}$ ou $83^k,333$ qu'on obtient en négligeant les résistances passives.

On déduit aisément de la relation [3] celle qui lie le travail de F au travail de P ; multiplions en effet les deux membres par nh , h désignant la hauteur dont la charge s'est élevée, il viendra

$$\mathcal{E}F = nhx \left(\frac{n\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1} \right) + \frac{n\beta^n(\beta-1)}{\beta^n-1} \mathcal{E}P. [4]$$

III. On emploie quelquefois des palans formés de mouffes à poulies inégales; on leur donne le nom de *mouffettes*. Ce genre de palan est représenté par la figure 2, qui montre suffisamment comment la corde s'enroule sur les poulies successives. Les poulies n'ayant pas toutes le même diamètre, les

quantités α et β ne resteraient plus les mêmes en passant d'une poulie à l'autre; néanmoins on parviendrait à la relation qui lie F et P en suivant une marche analogue à la précédente. Mais on préfère

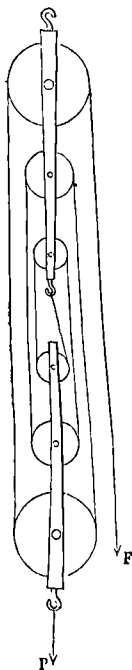
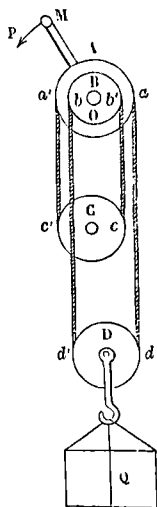


Fig. 2.

généralement les palans à poulies égales, comme étant plus légers, moins encombrants, et d'un maniement plus commode. (Voy. MOUFLE DE WHITE.)

PALAN DIFFÉRENTIEL DE WILSON, nom assez impropre donné à une combinaison de poulies ima-



ginée récemment et qui est représentée par la figure ci-dessus. Deux poulies fixée A et B, dont les rayons

sont R et r , et qui sont rendues solidaires, sont mises en mouvement à l'aide d'une manivelle OM . Deux autres poulies C et D , dont le rayon est égal à $\frac{1}{2}(R+r)$, sont disposées au-dessous. Une corde sans fin s'enroule sur ces quatre poulies dans l'ordre A, D, B, C, A . A la chape de la poulie D est appliqué un poids Q ; la poulie C peut porter de même un poids; nous supposons qu'elle ne porte que son propre poids p .

Soit ω la vitesse angulaire imprimée aux poulies fixes A et B . Dans le temps θ , le cordon ad s'enroule sur la poulie A d'une quantité égale à $\omega R\theta$; mais en même temps le cordon bd' se déroule de la poulie B d'une quantité égale à $\omega r\theta$; la longueur $add'b$ se raccourcit donc de $\omega R\theta - \omega r\theta$, ou de $\omega\theta(R-r)$; et comme le raccourcissement se distribue également sur les deux brins ad et bd' puisque la poulie D est mobile, cette poulie s'élève de la moitié du raccourcissement total, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}\omega\theta(R-r)$. Dans le même temps la poulie C s'abaisse évidemment de la même quantité, puisque la corde sans fin n'a pas changé de longueur. Or, soit b la longueur du bras OM de la manivelle; le bouton M décrit dans le temps θ un chemin exprimé par $\omega b\theta$; la vitesse de ce bouton est donc à celle de la poulie D dans le rapport de $\omega b\theta$ à $\frac{1}{2}\omega\theta(R-r)$ ou dans le rapport de b à $\frac{1}{2}(R-r)$. On voit qu'on peut rendre la vitesse de la poulie D ou du poids Q aussi petite qu'on voudra en diminuant la différence des rayons des deux poulies fixes.

Soit F la force mouvante appliquée en M perpendiculairement à OM . Si le mouvement est uniforme, on devra avoir en vertu du principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot) :

$$F \cdot \omega b\theta = Q \cdot \frac{1}{2}\omega\theta(R-r) - q \cdot \frac{1}{2}\omega\theta(R-r) + k\omega\theta,$$

en désignant par k une constante dépendant du frottement, d'où

$$F = (Q - q) \frac{R-r}{2b} + \frac{k}{b}, \quad [1]$$

valeur qu'on peut rendre aussi voisine qu'on le voudra de $\frac{k}{b}$ en diminuant la différence des rayons

R et r des poulies A et B , ou celle des poids Q et q .

Ceci suppose que la corde ne glisse pas sur les poulies fixes; pour cela il est nécessaire que le rapport des poids Q et q reste au-dessous d'une certaine limite, facile à déterminer. Pour l'équilibre de la poulie D il faut que les tensions des cordons ad et bd' soient égales chacune à la moitié de Q ; pour l'équilibre de la poulie C il faut de même que les tensions des cordons $b'c$ et $a'c'$ soient égales chacune à la moitié de q . Pour que la corde ne glisse pas sur la poulie A , il faut donc (Voy. CORDES) que le rapport des tensions de ad et de $a'c'$ reste inférieur à $e^{f\pi}$, f désignant le coefficient du frottement de la corde sur la gorge de la poulie; c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$\frac{Q}{q} < e^{f\pi}.$$

Si cette condition est remplie, la corde ne pourra pas non plus glisser sur la poulie B ; et l'équation

[1] donnera la valeur de la force mouvante F. Si l'on pouvait négliger le frottement, on aurait $F=0$ soit pour $R=r$, soit pour $Q=q$.

PALANS CONJUGUÉS, palans liés entre eux de manière que la puissance agisse sur l'un d'eux et la résistance sur l'autre. Les figures 1 et 2 repré-

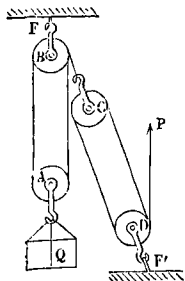


Fig. 1.

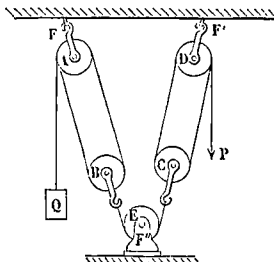


Fig. 2.

sent deux dispositions de palans conjugués. Dans la première, la résistance Q est appliquée à la moufle mobile A; la moufle B est fixée en F; le garant T de ce premier palan est attaché à la moufle mobile C d'un second palan; la moufle D est fixée en F', et la puissance P est appliquée au garant de ce second palan.

Dans la deuxième disposition, la résistance Q et la puissance P sont appliquées aux garants de deux palans A, B et C, D, dont les moufles B et C sont liées par une corde passant sur une poulie fixe E.

Il est facile de se rendre compte, dans chacun de ces deux cas, du rapport des vitesses des points d'application des forces P et Q. Considérons d'abord le cas de la figure 1. Soit n le nombre des brins ou courants du premier palan A, B, et n' celui des courants du second palan C, D. Si le poids Q s'élève de la quantité h, le point T d'attache du garant à la moufle C s'abaisse de nh; mais, alors le point d'application de la force P s'élève de n' fois nh, ou de nn'h. Les vitesses des points d'application des forces Q et P sont donc entre elles comme h est à nn'h ou comme 1 est à nn'. — Dans le cas de la figure 2, si n et n' désignent toujours les nombres de brins des deux palans, A, B et C, D, on voit que si le poids Q s'élève de h, la moufle B s'abaisse de $\frac{h}{n}$, la moufle C s'élève donc aussi de $\frac{h}{n}$, puisque la corde qui joint ces deux moufles est de longueur invariable; mais alors le point d'application de la force P s'abaisse de n' fois $\frac{h}{n}$ ou de $\frac{n'}{n}h$. Les vitesses des points d'application des forces Q et P sont donc entre elles comme h est à $\frac{n'}{n}h$ ou comme n est à n'. Ces vitesses seraient égales si l'on avait $n=n'$.

On peut aussi se rendre compte aisément de la relation qui relie les forces P et Q dans l'état d'équilibre ou de mouvement uniforme. Dans le cas de la figure 1, on aura, en nommant T la tension du garant du premier palan, et $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des constantes dépendant de la construction de chaque

palan ainsi que du frottement exercé par les poulies sur leurs axes et de la roideur des cordes (Voy. PALAN),

$$T = \alpha + \beta Q \quad \text{et} \quad P = \alpha' + \beta' T,$$

d'où l'on tire en éliminant T

$$P = (\alpha' + \alpha\beta') + \beta\beta' Q.$$

Dans le cas de la figure 2, si T désigne la tension de la corde qui joint les deux moufles B et C on aura

$$Q = \alpha + \beta T \quad \text{et} \quad P = \alpha' + \beta' T,$$

d'où l'on tire en éliminant T

$$P = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta} + \frac{\beta'}{\beta} Q.$$

Il est facile de voir que la disposition de la figure 1 est plus avantageuse que celle de la figure 2; car les quantités désignées par β et β' sont toujours plus petites que l'unité.

Si le frottement était négligeable, on aurait

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{n}, \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = \frac{1}{n'},$$

et par suite, dans le cas de la figure 1,

$$P = \frac{Q}{nn'},$$

et dans le cas de la figure 2

$$P = \frac{n}{n'} Q.$$

Dans le cas de la figure 2 on aurait $P=Q$, si les palans étaient identiques.

PALÉES, nom que prennent les piles d'un pont lorsqu'elles sont construites en bois ou en métal. La palée la plus simple consiste dans une rangée de pieux, perpendiculaire à la direction du pont, et recouverte d'une pièce horizontale appelée *chapeau*, sur laquelle reposent les abouts des deux travées. Cette disposition suffit sur un cours d'eau qui n'est pas navigable et qui n'est sujet ni à des crues ni à des débâcles. Si la palée est exposée à un effort notable dans le sens du courant, il faut que les pieux soient reliés par une moise inclinée partant du niveau des basses eaux en aval et s'élevant jusqu'au chapeau en amont. Si le courant est rapide et qu'on ait à craindre le choc des corps flottants, on relie en outre les pieux par des moises horizontales placées au niveau des basses eaux. Enfin, si le cours d'eau est sujet aux débâcles, on dispose en amont, dans le plan de la palée, plusieurs pieux qu'on relie par des moises horizontales et par un chapeau, qui, partant du niveau des basses

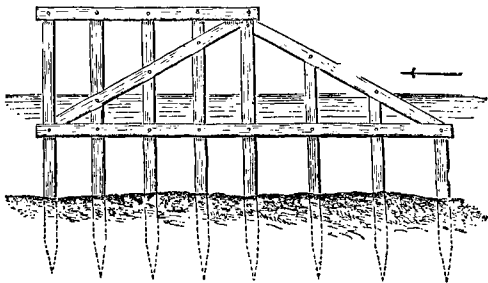


Fig. 1.

eaux, vient buter contre la palée au niveau des plus hautes eaux. Cette partie de la construction se nomme le *brise-glace* (fig. 1); elle remplace l'avant-

bec d'une pile en pierre (Voy. PILES). Dans tous les cas, le nombre et l'épaisseur des pieux formant la palée doivent être calculés de manière qu'en divisant le poids d'une travée (ou de deux demi-travées) par la somme des sections droites des pieux, on obtienne un quotient qui ne dépasse pas 60 kilogrammes environ pour le chêne, ou 80 kilogrammes pour le sapin, par centimètre carré.

Si l'on a à craindre une forte surcharge accidentelle, comme le poids d'une lourde charrette pesant 3000 à 4000 kilogrammes, il faut ajouter ce poids à celui de la travée. Mais alors, comme il ne s'agit que d'une surcharge momentanée, on peut admettre que le bois, au lieu de ne porter que le 10^e de la charge répondant à sa limite d'élasticité, en porte pendant quelques instants le 6^e ou même le 5^e, ce qui revient à 120 kilogrammes par centimètre carré pour le chêne ou 160 kilogrammes pour le sapin.

Quand le cours d'eau a une grande profondeur, on donne à la palée deux étages. On forme l'étage inférieur de deux rangs de pieux, reliés par des moises horizontales au niveau de l'étiage, et couronnés de deux chapeaux, un pour chaque rangée. Transversalement à ces deux chapeaux, et dans le plan de chaque couple de pieux formé par ceux qui se correspondent dans les deux rangées, est placée une pièce appelée *blochet*. C'est sur les blochets que reposent les pieux de la haute palée, reliés dans le bas par des moises horizontales. — Le brise-glace est alors composé de deux rangs de pieux qui convergent vers l'amont et forment de ce côté un angle aigu.

Quelquefois on forme la palée basse d'une seule rangée de pieux reliés par des moises horizontales au niveau de l'étiage; c'est alors sur le chapeau de cette palée basse que repose la palée haute.

On emploie, depuis quelques années, dans la construction des ponts métalliques, sur les rivières dont le fond est affouillable, des palées en fonte formées de tubes d'un grand diamètre, dont chacun est composé d'anneaux qui se superposent. La figure 2 montre l'élévation et la coupe d'un de ces tubes. On commence par assembler le nombre d'anneaux nécessaires pour que le tube puisse descendre du niveau de l'eau (à l'étiage) jusqu'au fond de la rivière, et on le suspend dans cette position. Au moyen d'un appareil spécial on y introduit de l'air comprimé, qui chasse l'eau et permet de débayer l'intérieur du tube et d'y élever une maçonnerie annulaire, qui est représentée par sa section droite sur la figure. Quand la maçonnerie est arrivée au niveau du dernier anneau, on ajoute un nouvel anneau, et on laisse descendre le tube; on continue à monter la maçonnerie annulaire intérieure, et l'on ajoute de nouveaux anneaux jusqu'à ce que le tube soit parvenu à la profondeur nécessaire pour trouver un terrain solide, et d'autres anneaux l'élèvent jusqu'à la hauteur du tablier. Pour pouvoir passer aisément de l'atmosphère comprimée à l'atmosphère libre, on coiffe le tube d'un appareil particulier appelé *chambre à air* que nous ne pouvons décrire ici. Ce genre de fondation a été employé avec succès au pont de la Quarantaine à Lyon, aux ponts de Mâcon, de Saint-Germain-des-Fossés, etc., et plus récemment au pont d'Argenteuil. Dans ce dernier pont, chaque pile se compose de deux tubes de 3^m,70 de diamètre intérieur

au-dessous de l'étiage, et de 3^m,20 de diamètre au-dessus. Chacun de ces tubes s'enfonce de 15 à 20 mètres au-dessous des plus basses eaux. Les deux tubes d'une même pile sont reliés par deux étages de

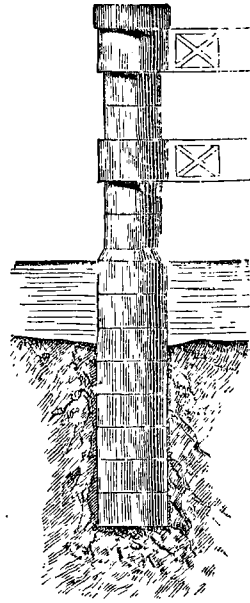


Fig. 2.

contrevents, qui ont la forme indiquée par la figure 3. — Au pont de Kehl les tubes cylindriques ont été remplacés par des caisses rectangulaires de 7 mètres sur 5^m,89; quatre de ces caisses placées à

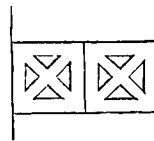


Fig. 3.

la suite les unes des autres forment une pile culée rectangulaire de 23^m,35 sur 7 mètres. (Voy. pour plus de détails le *Cours de routes et ponts* professé à l'École centrale par M. Mary, et l'ouvrage publié par MM. Vuigner et Fleur-Saint-Denis sur la construction du pont de Kehl.)

Ces palées en fonte peuvent porter un poids énorme. Si l'on prend pour exemple le pont d'Argenteuil, où les anneaux ont 0^m,05 d'épaisseur et 3^m,20 de diamètre, on trouve que leur section est de 0^m,510510; ce qui, à raison de 6 kilogrammes par millimètre carré, donne pour chaque tube une résistance de 3 063 060 kilogrammes, soit 6 126 120 kilogrammes pour la palée entière.

PALETTES, ais ou planches qui garnissent la circonférence d'une roue hydraulique en dessous, dite à *aubes planes* (Voy. ROUES EN DESSOUS).

PALIER, support du tourillon d'une roue à axe horizontal. La partie de ce support qui est immédiatement en contact avec le tourillon, et qui par conséquent est exposée à une détérioration plus rapide, peut ordinairement s'enlever et se remplacer; elle porte le nom de *coussinet*.

PALIER GLISSANT, dispositif proposé par M. Girard pour réduire dans une proportion considérable le frottement des tourillons. La partie du coussinet sur laquelle doit reposer le tourillon est percée d'un trou autour duquel on a pratiqué un système de rainures; par cet orifice peut affluer l'eau d'un réservoir où, à l'aide d'une pompe, on entretient une forte pression. (A l'usine de Saint-Vaast, cette pression s'élève jusqu'à 10 atmosphères.) L'eau soulève le tourillon, qui tourne ainsi sur une légère lame d'eau, sans toucher au coussinet. Le coefficient de frottement est réduit de la sorte à quelques millièmes. A la vérité, la machine est obligée de fournir le travail nécessaire pour produire la pression de l'eau; mais néanmoins l'économie est de moitié ou des trois quarts des pertes ordinaires d'effet utile. (Voy. la description de ce dispositif par M. Haton de la Goupillière dans la *Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger*, n° du 18 mai 1867.)

PALIERS, planchers ou surfaces horizontales ménagées de distance en distance dans le parcours d'un escalier pour servir de repos. Les paliers principaux sont placés au niveau des appartements auxquels ils donnent accès. Dans les escaliers dont la cage est rectangulaire, les paliers principaux sont des rectangles dont le plus grand côté est égal à la largeur de la cage et le plus petit à l'embranchement (Voy. ESCALIERS). La figure 1 représente un palier P

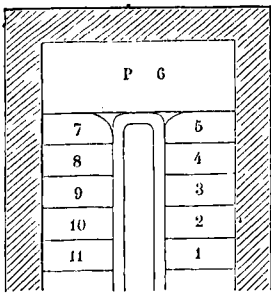


Fig. 1.

de ce genre. Les paliers présentent un caractère commun : c'est que la rampe qui précède et celle qui suit sont parallèles à un même plan vertical. Nous dirons plus loin pourquoi les marches 5 et 7 présentent une arête curviligne. Les paliers intermédiaires entre les paliers principaux se nomment *demi-paliers* ou *demi-repos*. Ils ont la forme carrée, comme on le voit figure 2; la rampe qui précède et celle qui suit sont parallèles à deux murs consécutifs de la cage. Dans les escaliers à cage curviligne la forme des paliers dépend de celle de la cage; mais on peut toujours leur appliquer les observations qui nous restent à faire.

Considérons le demi-palier de la figure 2; et voyons ce qui arriverait si les arêtes saillantes de la marche 4 formant palier et de la marche 5 avaient pour projections horizontales les droites *ab* et *ac*

Imaginons qu'on fasse une section de la première rampe suivant le plan vertical *ad* et une section de la seconde suivant le plan vertical *af*; puis, qu'on fasse tourner l'une de ces sections autour de la ver-

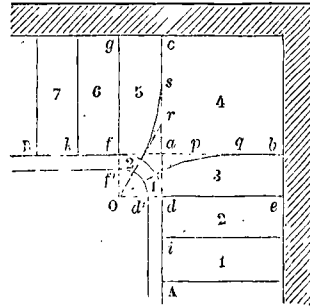


Fig. 2.

ticale du point *a* pour l'amener dans le plan de l'autre; l'ensemble de ces deux sections ainsi placées présenterait la disposition indiquée par la figure 3; c'est-à-dire qu'au point *a* il y aurait un

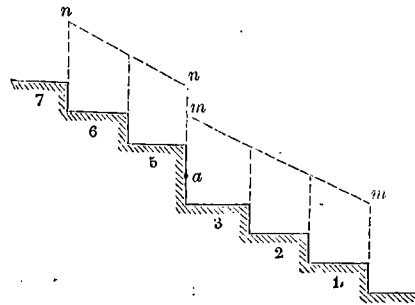


Fig. 3.

saut brusque de deux hauteurs de marche, attendu que le limon ne touche le palier qu'en ce point. Par conséquent la main courante *mm* de l'escalier 1.2.3 et celle *mn* de l'escalier 5.6.7 présenteraient au point où elles atteignent la verticale du point *a* une différence de niveau égale à une hauteur de marche. Dans les anciens escaliers, on plaçait au point *a* un poinçon qui dissimulait cette différence, sans faire disparaître toutefois l'inconvénient plus grave d'un changement brusque de pente pour la personne qui monte l'escalier près du limon. Pour faire disparaître ce défaut, on donne au limon et aux arêtes saillantes des marches 4 et 5 des formes curvilignes qu'on détermine de la manière suivante.

On prolonge jusqu'à leur rencontre en O (fig. 2) les projections *de* et *fg* des arêtes saillantes des marches 3 et 6, et l'on décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à *Od*, le quart de cercle *d.1.2.f*, qui forme la courbe interne de la projection du limon; on obtient la courbe externe en décrivant un second quart de cercle du même centre avec le rayon *Od'*. Cela fait, on divise le quadrans *df* en trois parties égales, aux points 1 et 2. On joint O.1, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en *p* avec la droite *ab*; on prend sur cette droite la

distance pq égale à $p.1$; et l'on raccorde les droites $O.1$ et bq par un arc de cercle tangent en 1 au quart de cercle df et en q à la droite ab ; la ligne mixte $1.q.b$ forme la projection de l'arête saillante de la marche 4. On raccorde de même les droites $O.2$ et cs par un arc de cercle tangent en 2 au quart de cercle df et en s à la droite ac ; la ligne mixte $c.s.2$ forme la projection de l'arête saillante de la marche 5. De d en f on obtient ainsi une pente uniforme; cette pente est à la vérité plus roide que de A en d ou de f en B ; mais le changement brusque est devenu moins sensible. Pour mieux s'en rendre compte, on peut porter sur une horizontale une série de distances respectivement égales à $Ai, id, d.1, 1.2, 2.f, fk, kB$, élever aux points ainsi obtenus des perpendiculaires respectivement égales à $1, 2, 3, 4, \dots$, hauteurs de marche, et joindre par des droites les extrémités de ces perpendiculaires, on obtient ainsi la ligne brisée $Adfi$ (fig. 4) qui représente le développement de la

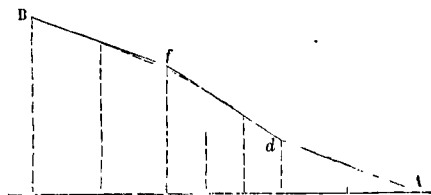


Fig. 4.

courbe du limon ou de la main-courante. On rend encore moins sensible le changement de pente en raccordant les côtés de cette ligne brisée par deux arcs de cercle, l'un tangent à Ad et à df , l'autre à df et à fB .

Quoique l'inconvénient du changement brusque de pente soit moindre pour un palier principal, tel que celui de la figure 1, que pour un demi-palier, néanmoins on remplace aussi le limon droit par un limon en partie curviligne; et l'on peut adopter pour cela la construction de la figure 2.

PANÉMORE (du grec $\pi\acute{\alpha}\nu\alpha\varsigma$, tout, $\acute{\alpha}\nu\epsilon\mu\omicron\varsigma$, vent, $\delta\rho\epsilon\upsilon\nu$, pousser), moulin à vent à axe vertical, pouvant tourner à tous les vents (Voy. MOULINS À VENT).

PANNE DE BRISIS, pièce de charpente horizontale qui, dans les combles à la Mansard, ou combles brisés, relie les extrémités des entrails de deux fermes consécutives (Voy. FERMES).

PANNEAU, espèce de patron employé dans la coupe des pierres pour transporter sur une face plane ou cylindrique un contour dont on a l'épure. On exécute le plus souvent les panneaux en matière flexible, comme le carton ou la toile; cependant lorsqu'ils doivent être appliqués sur une surface plane, on les fait quelquefois en bois ou même en métal mince. Dans la construction des toûtes on distingue les panneaux en *panneaux de tête*, *panneaux de douelle*, *panneaux de joints*, etc., suivant qu'ils sont destinés à s'appliquer sur les plans de tête, sur la surface d'intrados, sur les faces de joints, etc. (Voy. VOÛTES, et les divers articles relatifs à la COUPE DES PIERRES.)

PANNES, pièces de charpente placées horizontalement sur les arbalétriers d'un comble, et destinées à soutenir les chevrons (Voy. COMBLES,

FERMES). Le rectangle $MNPQ$ (fig. 1) représente la section droite d'une panne reposant sur l'arbalétrier AA , et supportant le chevron CC . Les arêtes horizontales projetées en M et en P sont les arêtes

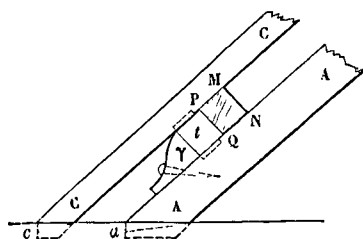


Fig. 1.

externes, supérieure et inférieure, de la panne, les arêtes projetées en N et en Q sont les arêtes internes. — Au point où la panne repose sur un arbalétrier, elle est soutenue par un petit parallélépipède de bois t appelé *tasseau*, qui s'assemble à tenon dans le chevron et dans l'arbalétrier. Souvent le tasseau est maintenu lui-même par une sorte de tasseau supplémentaire γ appelé *chantignolle*, qui se fixe sur l'arbalétrier, par des clous ou par une cheville.

I. Toutes les pannes placées à la même hauteur sur les différents pans inclinés qui composent un même comble forment ce qu'on appelle un *cours de pannes*. On adopte pour règle de placer toutes les arêtes supérieures externes d'un même cours de pannes dans un même plan horizontal, ainsi que toutes les arêtes externes inférieures. Il en résulte que les projections horizontales des arêtes supérieures externes d'un même cours de pannes forment une ligne brisée, telle que 1.2.3.4.5 (fig. 2), dont les sommets sont situés sur les pro-

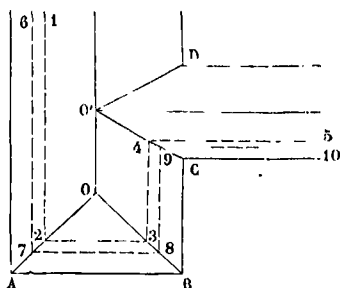


Fig. 2.

jections horizontales $OA, OB, O'C, O'D$, des arêtes des angles dièdres saillants ou rentrants formés par les divers pans du comble. Et il en est de même pour les projections horizontales des arêtes externes inférieures du même cours de pannes; elles forment une seconde ligne brisée 6.7.8.9.10 dont les côtés sont parallèles à ceux de la première, et dont les sommets sont également situés sur les droites $OA, OB, O'C, O'D$. — Il résulte aussi de la règle posée ci-dessus que la section droite n'est pas la même pour toutes les pannes d'un même cours. Si l'on considère, par exemple, les pannes

projetées suivant 1.2.7.6 et celles qui sont projetées suivant 2.3.8.7., on pourra prendre pour base de leur section droite la distance des arêtes externes, laquelle est la même pour le long-pan et pour la croupe; ces sections droites auront donc même base; mais leur hauteur dépendra de l'inclinaison de la toiture. On s'en rend aisément compte sur la figure 1; si, sans changer les lignes d'about *a* et *c* de l'arêtier et du chevron, on fait tourner ces pièces autour de ces lignes d'about, en conservant leur parallélisme; les points M et P restant les mêmes, la hauteur MN du rectangle MNPQ sera d'autant moindre que l'inclinaison de la toiture sera plus faible.

Les pannes qui avoisinent le plan vertical AO se terminent toutes deux à ce plan, et s'appuient l'une sur l'autre suivant ce plan; mais, d'après ce qu'on vient de dire, il est clair que leurs sections par le plan vertical AO ne coïncident pas; ce sont deux parallélogrammes qui ont une base commune, projetée suivant 2.7; mais les côtés latéraux ont une inclinaison différente; et les bases opposées à la base commune, bien que situées sur une même droite, n'ont pas les mêmes extrémités.

La rencontre des deux pannes dont nous parlons présente d'ailleurs une autre circonstance importante. Comme la face supérieure de l'arbalétrier placé au-dessous de l'arêtier (Voy. CROUPE) n'est parallèle à aucun des deux latis, il faut y pratiquer des entrailles pour loger le bout des deux pannes. La figure 3 montre cette disposition. On y voit

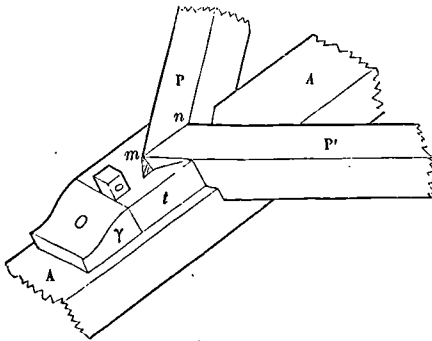


Fig. 3.

les pannes P et P' pénétrer dans l'arbalétrier AA, et s'appuyer l'une contre l'autre par des faces verticales qui n'ont que le côté mn commun. La même

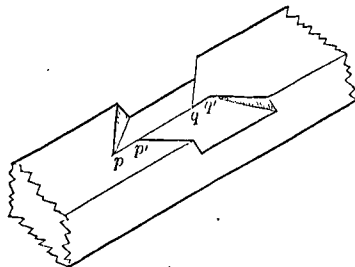


Fig. 4.

figure montre la disposition du tasseau qui retient en ce point les deux pannes, ainsi que de la chantignolle sur laquelle s'appuie le tasseau. La figure

4 représente l'arbalétrier seul avec les entailles destinées à loger les pannes. On y remarque en *pq* et *p'q'*, sur une même droite placée dans la face supérieure, les bases des deux parallélogrammes dont on ne voit que la base commune *mn* sur la figure 3, et qui limitent les faces de contact des deux pannes. La figure 5 montre la forme du tas-

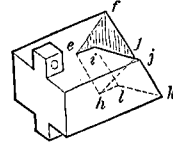


Fig. 5.

seau. Il touche les faces latérales des pannes par les parallélogrammes *efgh* et *ijkl*; et présente en outre une face verticale interne *eilh* contre laquelle s'appuie le bout de la panne P.

La face inférieure de l'arêtier reçoit aussi des entailles pour loger les pannes; nous verrons bientôt comment toutes ces entailles se déterminent.

Les pannes qui aboutissent au plan vertical OB présentent les mêmes circonstances que celles qui aboutissent au plan OA. Celles qui aboutissent au plan vertical OC', lequel contient l'arête d'une noue (Voy. ce mot), pénètrent également dans la face inférieure de la noue, et dans la face supérieure de l'arbalétrier situé au-dessous. La figure 6 montre

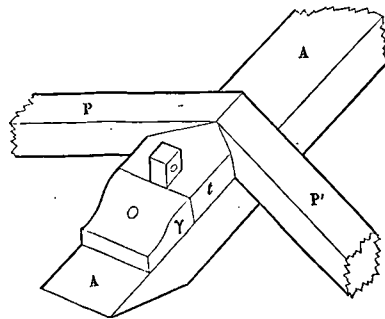


Fig. 6.

comment s'ajustent les deux pannes P et P' sur l'arbalétrier AA, au moyen du tasseau *t* et de la chantignolle *γ*. Les entailles pratiquées dans l'ar-

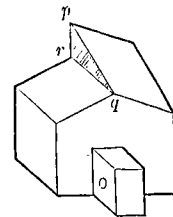


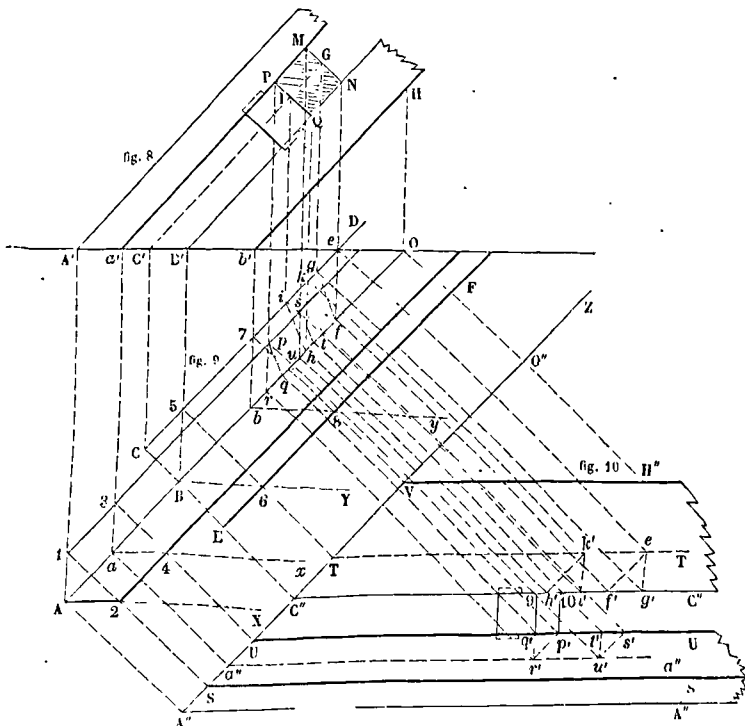
Fig. 7.

balétrier pour loger les pannes se trouvent cachées sur la figure par les pannes elles-mêmes. — La figure 7 donne la forme du tasseau; on l'a renversé

afin de montrer la face triangulaire *pqr* par laquelle le tasseau s'appuie sur le bout de la panne P.

II. Il reste à expliquer comment on détermine géométriquement les entailles qu'il faut pratiquer dans l'arbalétrier, dans l'arêtier ou dans la noue pour loger le bout des deux pannes. Nous prendrons pour exemple la rencontre d'une panne avec un arêtier et avec l'arbalétrier correspondant (fig. 8, 9 et 10). Soit (fig. 9) la projection horizontale

de l'arête saillante de l'arêtier (*Voy. GROUPE*). Soit fig. 8 le profil de croupe, comprenant le chevron, l'arbalétrier, une panne avec son tasseau. De ce profil on déduira les lignes d'about de croupe *AA'* et *BB'*, et les lignes de gorge *aa'* et *bb'*. Soient de même *AX*, *BY*, *ax* et *by* (fig. 9), les lignes d'about et les lignes de gorge de long-pan. Étant donné l'équarrissage de l'arêtier, on *dévoiera* cette pièce conformément à la règle établie à l'article



GROUPE; on *dévoiera* de même l'arbalétrier, dont l'équarrissage est aussi donné, en ayant soin de faire passer sa ligne d'about par le point B intersection des deux lignes d'about de croupe et de long-pan relatives à l'arbalétrier. Cette pièce n'est point délardée comme l'arêtier; elle conserve sa forme de parallélépipède à section rectangulaire; et sa ligne de gorge est inscrite dans l'angle *b'by* formé par les lignes de gorge de croupe et de long-pan.

Cela posé, déterminons l'entaille que la panne fait dans l'arbalétrier. Pour cela, remarquons que la ligne qui a pour projections *B'N* et *BO* est dans le plan mené par *B'N* parallèlement au lattis de croupe; or, ce plan contient l'horizontale *BB'*; par conséquent l'arête horizontale *N* de la panne doit rencontrer la droite *B'N*, *BO*. Mais, avant de l'atteindre au point projeté en *f*, elle perce la face verticale *CD* de l'arbalétrier en un point dont la projection horizontale est *e*; la face *MN* de la panne coupe donc la face verticale *CD* de l'arbalétrier suivant une droite dont une extrémité est projetée en *e*; l'autre extrémité est située évidemment sur l'arête supérieure de l'arbalétrier. Pour l'obtenir,

concevons par cette arête un plan parallèle au lattis de croupe; il aura pour trace horizontale la droite *CC'* parallèle à *AA'*, et pour trace verticale la droite *C'G* parallèle à *B'N*. Par conséquent il coupera la face *MN* de la panne suivant une horizontale projetée en *G*; par suite, le point cherché se projette en *g* à la rencontre de *CD* avec la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point *G*. Ainsi la section faite dans l'arbalétrier par la face *MN* de la panne, est un triangle dont la projection horizontale est *efg*. La face parallèle *PQ* détermine une section égale et parallèle, que l'on détermine de la même manière, et qui se projette en *khi*. Par conséquent la panne enlève à l'arêtier un prisme triangulaire dont les bases se projettent suivant ces deux triangles, et dont les arêtes, parallèles à l'arête saillante de l'arêtier, ont pour projections *ek*, *fh*, *gi*. — Il faut projeter ce prisme sur un plan vertical parallèle aux faces latérales de l'arbalétrier. Soit donc *A''Z* (fig. 10) la nouvelle ligne de terre, parallèle à *AO*. Projetons sur cette droite les points *A*, *a*; *C*, *O*, en *A''*, *a''*, *C''*, *O''*; prolongeons les lignes 1.2, 3.4, 5.6, 7.8 jusqu'à la

rencontre de $A''Z$ aux points S, U, T, V. Élevons sur $A'O$ la perpendiculaire OH ; et sur le prolongement de OO'' prenons $O''H'$ égal à OH ; et joignons VH'' . Enfin par les points A, S, a'' , U, C'' , T menons des parallèles à VH'' ; nous aurons en $A''A'$ la projection de l'arête saillante de l'arétier, en SS la projection de ses arêtes latérales supérieures, en UU la projection de ses arêtes latérales inférieures; en $C''C'$ la trace verticale de la face supérieure de l'arbalétrier, en VH'' la trace de sa face inférieure. La droite $a''a'$ sera la projection de l'intersection de la face verticale de l'arétier avec la face MP de la panne; et la droite TT sera la projection de l'intersection de la face verticale de l'arbalétrier avec la face NQ de cette même panne. — Le point e devra donc être projeté en e' sur TT, les points f et g en f' et g' sur $C''C'$; comme vérification la droite $e'f'$ devra être parallèle à $A''Z$, puisque les points e, e' et f, f' sont sur une arête horizontale de la panne. Le triangle khi se projettera de même en $k'h'i'$, et $k'h'$ devra être parallèle à $A''Z$. Le prisme que la panne enlève à l'arbalétrier aura donc pour projection verticale ces deux triangles qui sont les projections des bases, et les droites $e'k', f'h', g'i'$ qui sont les projections des arêtes latérales. On aura ainsi les éléments nécessaires pour déterminer sur l'arbalétrier l'entaille prismatique dont il s'agit.

Il faut déterminer semblablement l'entaille que la panne fait à l'arétier. L'arête P de la panne rencontre l'arête latérale supérieure de l'arétier en un point projeté en p , et pénètre dans l'intérieur jusqu'au point où elle rencontre le plan vertical AO, c'est-à-dire jusqu'en un point qui a pour projection horizontale le point r . La face PQ rencontre donc le plan vertical AO suivant une droite qui se projette sur rO , et détermine dans l'arétier une section triangulaire projetée suivant un certain triangle pqr . On pourrait obtenir le point q comme on a obtenu le point g ; mais il est plus simple de remarquer que pq doit être parallèle à gf , attendu que les intersections de deux plans parallèles par deux autres plans parallèles sont elles-mêmes parallèles. La face MN coupe de même l'arétier suivant un triangle égal et parallèle, dont on obtiendra de la même manière la projection stu . La panne enlève donc à l'arétier un prisme triangulaire dont les bases se projettent suivant les triangles pqr et stu , et dont les arêtes latérales ont pour projections ps, qt, ru . — Il faut projeter ce prisme sur le plan vertical $A''Z$ parallèle à AO. Le point p se projette en p' sur la droite UU; le point q en q' sur la même droite; le point r en r' sur la droite $a''a'$; et, comme vérification la droite $p'r'$ devra être parallèle à $A''Z$ puisque les points p, p' et r, r' appartiennent à une arête horizontale de la panne. Le triangle stu se projettera de même en $s't'u'$; et $s'u'$ devra être parallèle à $A''Z$. Le prisme considéré a donc pour projection verticale les deux triangles $p'q'r'$ et $s't'u'$ qui sont les projections de ses bases, et les droites $p's', q't', r'u'$ qui sont les projections de ses arêtes latérales; et l'on a ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer sur l'arétier l'entaille produite par la panne.

On peut remarquer que le parallélogramme qui forme l'intersection du taseau d'arétier avec la face PQ de la panne est dans le prolongement de

la section triangulaire que cette même face détermine dans l'arétier. On obtiendra donc sa projection verticale en prolongeant $r'q'$ jusqu'au point 9, et en lui menant par le point p' la parallèle $p'10$, ce qui donne le parallélogramme $p'q'910$.

Nous n'avons déterminé que les entailles situées du côté de la croupe; il faudrait construire de même les entailles situées du côté du long-pan. Les opérations seraient exactement les mêmes; nous ne les reproduisons pas; il suffirait de substituer au profil de croupe de la figure 8 le profil de long-pan. Les projections horizontales des entailles seraient reportées comme ci-dessus sur la projection verticale de la figure 10.

Les opérations seraient encore de même nature si l'arétier était remplacé par une noue. Le lecteur trouvera aisément les modifications qu'il faut faire subir dans ce cas à l'épure. Il faut se rappeler que la ligne d'about de l'arbalétrier de noue est inscrite dans l'angle formé par les lignes d'about des arbalétriers des deux profils, et que sa ligne de gorge passe par le point d'intersection des lignes de gorge de ces mêmes arbalétriers. (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy, n° 947 et suiv.; et le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, n° 384 et suiv.)

Les charpentiers se dispensent souvent de déterminer les entailles nécessaires pour loger les pannes dans l'arétier; ils se contentent de couper les pannes par le plan de la face inférieure de l'arétier. Il n'en résulte aucun inconvénient sérieux parce que, comme le montre la figure 3, le bout des pannes, engagé dans l'angle rentrant que forme le taseau, se trouve suffisamment retenu. Mais il n'en serait pas de même dans le cas d'une noue; et il est nécessaire dans ce cas de déterminer les entailles où doivent se loger les pannes.

III. On calcule les dimensions transversales d'une panne comme si elle était simplement posée sur deux appuis, répondant à deux fermes consécutives. Si a est la longueur de la panne, b l'intervalle de deux pannes consécutives, et p le poids de la toiture par mètre carré, le poids total supporté par la panne est $2pa \cdot \frac{1}{2}b$ ou pab ; le poids par mètre courant uniformément réparti sur la panne est donc pb ; et, par conséquent, le maximum du moment fléchissant a pour expression

$$\mu = \frac{1}{8} pba^2,$$

c'est cette valeur qu'on mettra dans la formule de la résistance

$$R = \frac{vu}{I}.$$

Si x désigne le côté du carré formant la section de la panne, on a

$$v = \frac{1}{2}x, \quad I = \frac{1}{12}x^3,$$

par suite

$$R = \frac{6\mu}{x^3},$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{6\mu}{R}} = \sqrt[3]{\frac{3pb'a^2}{4R}}.$$

formule dans laquelle on mettra pour R le nombre 600000 ou le nombre 800000 pour le chêne, et 800000 ou 900000 pour le sapin, suivant la qualité.

PANS DE BOIS, nom que l'on donne d'une manière générale à tout système de pièces de char-

pente assemblées d'une manière invariable, mais dont les axes sont tous dans un même plan; telles sont les parties d'un bâtiment en charpente qui forment les murs, les cloisons, les planchers, la couverture: les murs et les cloisons sont des pans de bois verticaux; les planchers sont des pans de bois horizontaux; les combles sont des pans de bois inclinés. Mais, comme on applique plus particulièrement le nom de pans de bois aux murs et aux cloisons, il ne sera question dans cet article que des pans de bois verticaux (*Voy. PLANCHERS, COMBLES*).

I. La figure 1 représente une des dispositions

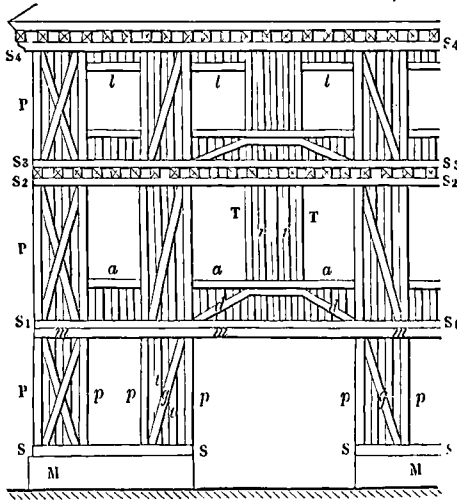


Fig. 1.

le plus généralement adoptées. Sur un mur d'appui en maçonnerie MM, on établit une pièce horizontale SS, qui porte le nom de *sablière*; sur cette pièce s'assemblent à tenons et à mortaises (*Voy. ASSEMBLAGES*) les pièces verticales P, p, p, p; la première, qui forme l'angle du pan de bois porte le nom de *poteau cornier*, les autres, qui forment l'encadrement des portes et des fenêtres, se nomment *poteaux d'huissierie*. Tous ces poteaux sont reliés à la partie supérieure par une seconde pièce horizontale nommée *sablière haute*, mais qui prend le nom de *poitrail* lorsque, comme dans le cas de la figure, elle recouvre de larges espaces, tels qu'une porte cochère ou l'ouverture d'une boutique. Des pièces assemblées ainsi à angle droit ne formeraient pas un système invariable de forme, à cause du jeu que présentent nécessairement les assemblages; on est donc obligé de les relier en outre par des pièces obliques, telles que g, g, auxquelles on donne le nom de *guettes*. Près des poteaux corniers on remplace souvent les simples guettes par des *croix de Saint-André*, composées de deux pièces obliques assemblées à mi-bois, et qui donnent plus de rigidité au système. Les guettes et les croix de Saint-André sont assemblées à *tenons en about* avec la sablière et le poitrail. L'intervalle des poteaux est rempli par d'autres pièces verticales t, t, appelées *tourneuses*; elles sont rapprochées de manière que les intervalles qu'elles laissent entre elles

soient égaux à leur épaisseur; elles s'assemblent avec les sablières à tenons et mortaises, et avec les guettes ou les croix de Saint-André, soit par embrèvement, soit par assemblage à houllice.

On évite de placer dans le prolongement l'une de l'autre celles qui se correspondent au-dessus et au-dessous de la pièce oblique, afin de ne pas affaiblir celle-ci par deux mortaises placées au même point.

Pour augmenter la rigidité du système, on remplace quelquefois les guettes par des moises (*Voy. ce mot*) et les tourneuses par des poteaux assemblés directement avec les deux sablières; mais cette disposition n'est point économique.

Sur le poitrail on pose une seconde sablière S₁S₁, dite *sablière de chambrée*; sur cette seconde sablière S₁S₁ s'élèvent d'autres poteaux corniers et d'autres poteaux d'huissierie, consolidés de même par des croix de Saint-André ou des guettes, et remplis par des tourneuses, le tout couronné par une sablière haute S₂S₂. A une hauteur convenable au-dessus de la sablière S₁S₁ sont disposées des pièces horizontales a, a, a, servant d'appui aux fenêtres; elles sont reliées à la sablière S₁S₁ par des *potelets*, ou petits poteaux séparés aussi par des intervalles égaux à leur épaisseur. Le *trumeau* TT compris entre les deux fenêtres pratiquées au-dessus de la porte cochère est rempli par des poteaux d'un moindre équarrissage, nommés *poteaux de remplage* (pour remplissage); sur la figure ils sont assez rapprochés pour qu'il ne soit pas nécessaire de les relier par des guettes. Les potelets placés au-dessous de ces fenêtres et de ce trumeau sont reliés par des pièces obliques d, d appelées *décharges*.

Les pièces obliques portent le nom de *décharges* quand elles font avec l'horizon un angle de 45 degrés; si elles se rapprochent de la position verticale, on leur donne le nom de *guettes*; si elles se rapprochent de la position horizontale, on leur donne le nom de *décharges*.

Les solives qui forment le plancher du premier étage reposent sur le poitrail, derrière la sablière S₁S₁. Celles qui forment le plancher du deuxième étage reposent sur la sablière S₂S₂; on en voit les bouts sur la figure. Sur ces solives repose une nouvelle sablière de chambrée S₃S₃, sur laquelle s'élèvent de nouveaux poteaux corniers et de nouveaux poteaux d'huissierie, reliés comme à l'étage situé au-dessous. Sur la figure, la disposition de ce second étage ne diffère de celle du premier que par les pièces horizontales l, l, l, appelées *linteaux* qui forment le dessus des fenêtres, et qui sont reliées par des potelets à la sablière haute S₁S₁. Sur cette sablière on pourrait poser les bouts des solives formant le plancher d'un troisième étage, puis une nouvelle sablière de chambrée, etc. Il est rare qu'un pan de bois s'élève au delà du troisième étage.

On relie quelquefois les poteaux par des pièces horizontales pour réduire la longueur des tourneuses, diminuer l'inclinaison des guettes, et obtenir ainsi des assemblages sous un angle moins aigu. C'est ce que l'on fait particulièrement lorsqu'on emploie des portes ou des fenêtres cintrées; les pièces horizontales dont nous parlons sont alors placées à la naissance des cintres. La figure 2 montre cette disposition; h, h est la pièce horizontale qui divise la hauteur AB de l'étage.

Pour donner plus de solidité à la construction on prolonge quelquefois en hauteur les poteaux corniers de manière à relier entre eux plusieurs étages; les sablières sont alors assemblées à tenons

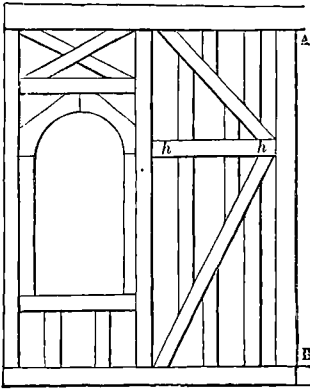


Fig. 2.

et mor à ses dans les poteaux corniers. Si la façade a une grande largeur, on prolonge de même quelques poteaux intermédiaires qui prennent alors le nom de poteaux de fond.

Les sablières appartenant à deux pans de bois consécutifs placés à angle droit s'assemblent ordinairement à queue d'hironde, comme le montre la figure 3. Les sablières sont ordinairement reliées en outre par des harpons en fer.

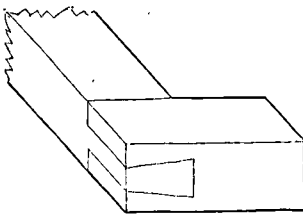


Fig. 3.

On se sert pour former les poteaux corniers de pièces de bois d'un équarrissage plus fort que les autres pièces; on les évide à l'intérieur, comme la figure 4 le montre en plan.

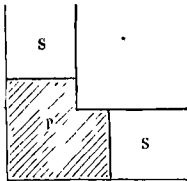


Fig. 4.

Les pièces de bois d'un même étage ont la même épaisseur; mais l'équarrissage des pièces peut diminuer à mesure qu'on passe d'un étage à l'étage supérieur, parce qu'elles ont une moindre charge à supporter.

Les cloisons se construisent comme les pans de bois servant de façade; seulement on emploie des bois d'un moindre équarrissage; et l'on sépare les tournisses par des intervalles plus grands que leur épaisseur.

Les intervalles entre les pièces d'un pan de bois sont remplis, comme on sait, par un *hourdis* en moellons de petites dimensions, en briques, ou en plâtras.

II. Les différentes pièces qui entrent dans la composition d'un pan de bois doivent avoir des dimensions transversales proportionnées aux efforts que ces pièces ont à supporter.

Les pièces verticales peuvent en général être traitées comme des PRISMES CHARGÉS DEBOUT (*Voy. ce mot*); les pièces horizontales ou obliques peuvent donner lieu aux divers problèmes relatifs à la FLEXION PLANE. (*Voy. ce mot.*) Voici d'après M. Emy (*Traité de l'art de la charpenterie*) les dimensions généralement adoptées :

	Épaisseur	
Pans de bois des façades (de 3 ^m ,90).	0 ^m ,217 à 0 ^m ,244	
Poteaux corniers [et poteaux de fond]..... Équarrissage.	0 ^m ,244	0 ^m ,271
Poteaux d'étrier.....	0,217	0,244
Sablières.....	0,217	0,244
Poteaux d'huissierie.....	0,189	0,217
Poteaux de remplage.....	0,162	0,217
Écartement des poteaux de remplage.....	0,271	0,225
Guettes, décharges, croix de Saint-André.....	0,162	0,217
Tournisses et potelets.....	0,135	0,217
Pans de bois intérieurs ou cloisons (de 3 ^m ,90)..... Épaisseur.	», » à 0 ^m ,162	
Pans de bois intérieurs ou cloisons (au-dessus de 3 ^m ,90).....	», » 0,135	
Poteaux portant plancher. Équarrissage.....	0 ^m ,135	0 ^m ,162
— ne portant pas plancher	0,108	0,135
Cloisons de refend ou en porte-à-faux.....	0,081	0,135

Rondelet (*Traité de l'art de bâtir*) prescrit de donner aux pans de bois et cloisons la moitié de l'épaisseur que devrait avoir un mur (*Voy. Murs*) dans les mêmes circonstances. Le quart de l'épaisseur du mur suffirait pour une cloison légère ne portant pas de plancher.

PANTOGRAPH (du grec πᾶς, πανός, tout, et γράφω, j'écris), instrument destiné à copier les figures en les réduisant dans un rapport donné. Cet instrument, réduit à ses parties essentielles, se compose de 4 règles OA, AM, Bm, am (fig. 1) articulées aux points A, B, a, m, et remplissant deux conditions : la première, que la figure BAam soit un parallélogramme, la seconde que les trois points O, M et m soient en ligne droite. Il est aisé de voir que si ces conditions sont remplies pour une position déterminée de l'instrument, elles le seront encore pour toute autre position. Car, en premier lieu, la figure BA am ayant par hypothèse ses côtés opposés égaux deux à deux, restera parallélogramme dans toutes les positions des règles articulées. En second lieu, si les trois points O, M, m sont en ligne droite dans une position donnée, on en conclut par des similitudes évidentes

$$OA : AM = Oa : am,$$

[1]

et, comme ces quatre lignes sont de longueur constante, la proportion subsistera dans toutes les positions de l'instrument; mais les angles Oam et OAM seront toujours égaux, puisque les droites am ,

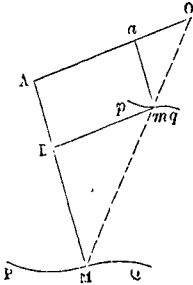


Fig. 1.

AB resteront parallèles; donc les deux triangles Oam et OAM seront toujours semblables. Dès lors les angles en O seront toujours égaux; et, par conséquent, les points O , m , M seront toujours en ligne droite.

Il résulte de la similitude constante des deux triangles variables Oam et OAM , qu'on aura toujours

$$Om : OM = Oa : OA.$$

Or, les longueurs Oa et OA sont constantes; donc les distances Om et OM seront dans un rapport constant.

C'est sur cette propriété qu'est fondé l'usage de l'instrument. Supposons que le point O soit fixe; qu'en M soit établi un traçoir ou pointe fine propre à suivre les contours d'une figure PMQ , et en m un crayon. Quand on fera mouvoir l'instrument de manière que le traçoir parcoure la ligne PMQ , le crayon placé en m tracera une ligne semblable pmq ; et le centre de similitude des deux figures sera le point fixe O . En faisant varier les distances Oa et AB , de telle sorte cependant que les deux conditions énoncées plus haut soient remplies, on fera passer le rapport de Om à OM par toutes les valeurs plus petites que l'unité.

Dans l'exécution, l'instrument comporte quelques parties accessoires dont nous n'avons pas parlé, et une disposition un peu différente. Le centre O (fig. 2) est formé par l'extrémité d'une pointe por-

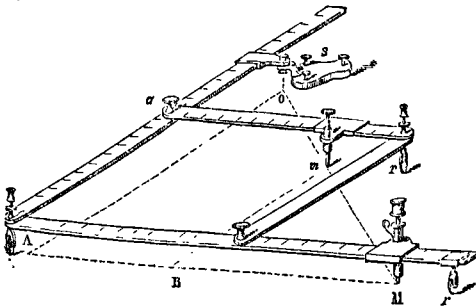


Fig. 2.

lée par un curseur que l'on peut faire glisser le long de la règle OA et fixer en un point quelconque de cette règle à l'aide d'une vis de pression. Cette

pointe traverse un support S que l'on fixe à l'aide de trois vis, en un point quelconque du plan sur lequel on opère. Les quatre règles articulées sont de longueur invariable; mais le traçoir est porté par un curseur qui peut parcourir la règle AM et se fixer en un point quelconque de cette règle; et le crayon est porté par un autre curseur pouvant se fixer de même en un point quelconque de la règle am . On peut ainsi faire varier à volonté le rapport des distances am et AM , tout en satisfaisant à la condition que les trois points O , m et M soient en ligne droite. Il suffit de mener mB parallèle à aA pour retrouver tous les éléments de la figure 1. Pour la commodité de la manœuvre, les règles sont soutenues par de petites roulettes, comme l'indique la figure en r , r , r .

Dans les pantographes ordinaires la longueur des grandes règles varie de 0^m,50 à 1 mètre, selon la grandeur des dessins que l'on a à réduire.

Il est facile de reconnaître qu'au lieu de placer le traçoir sur le prolongement du côté AB du parallélogramme $BAam$ (fig. 1) on pourrait le placer sur le prolongement du côté mB ; mais alors le crayon ne serait plus en m , mais en un point de am , en ligne droite avec le centre O et avec le traçoir. Le pantographe de M. Pawlowicz est construit dans ce système. Le principe de l'instrument est toujours le même d'ailleurs.

Le pantographe a été imaginé en 1615 par M. de Marolais; et le R. P. Scheiner y a apporté, peu de temps après, divers perfectionnements.

M. Collas a eu, il y a peu d'années, l'idée d'étendre l'emploi de cet instrument à la réduction des figures à trois dimensions, et de l'appliquer particulièrement à la réduction des statues. Voici la disposition qu'il a adoptée. Le côté OM (fig. 3) du pantographe est articulé en O par un JOINT UNIVERSEL (Voy. ce mot) qui permet à ce côté de prendre dans l'espace toutes les directions possibles. Les tiges am et AM sont articulées en a , et A avec le côté OA , articulé lui-même en O avec le côté OM . Mais les extrémités m et M de ces tiges glissent dans des coulisses pratiquées suivant la longueur de OM . Les longueurs am et AM sont réglées de telle sorte que ces tiges soient dans le rapport des distances Oa et OA ; d'où il résulte que si leurs extrémités m et M sont en ligne droite avec le point O , leurs directions sont constamment parallèles, et que par conséquent les distances Om et OM sont constamment dans le rapport de Oa à OA . On fait glisser l'extrémité M dans sa coulisse à l'aide d'une vis v ; l'extrémité m est contrainte de glisser aussi dans la sienne.

Cela posé, la statue à réduire, et la matière molle (cire, glaise) sur laquelle on veut opérer, sont placées sur des socles, reposant eux-mêmes sur deux roues horizontales égales R et R' , dont les axes sont dans un même plan vertical avec le centre O du joint universel; et ces deux roues, dentées convenablement, engrènent toutes deux avec une même vis sans fin que l'on peut faire mouvoir à l'aide d'une manivelle C . En M est fixée une touche, pointe fine destinée à parcourir la surface du modèle sans l'entamer; en m est fixé un burin propre à entamer au contraire la matière molle sur laquelle on opère. Si, avec la touche, on parcourt une courbe quelconque sur la surface du modèle, le bu-

rin parcourra une courbe semblable dans la matière soumise à son action, puisque les distances Om et OM resteront dans un rapport constant, et le centre de similitude des deux courbes sera le point O . En

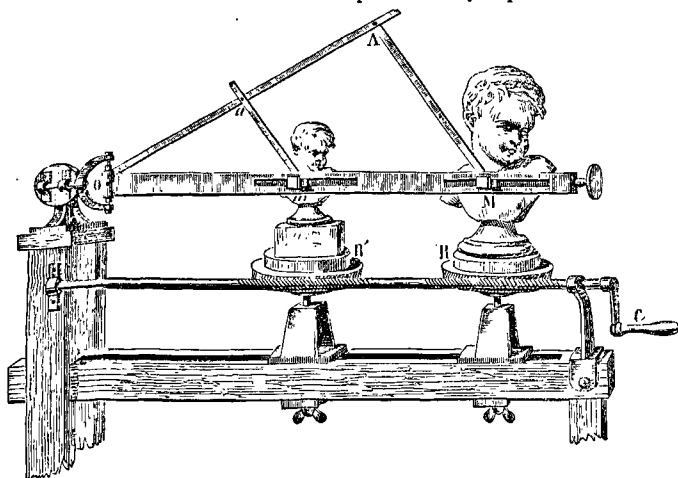


Fig. 3.

rapprochant les courbes ainsi décrites, on parcourra ainsi tous les points contenus dans une portion quelconque de la surface du modèle; et le burin tracera dans la matière molle une portion de surface exactement semblable. En faisant mouvoir la manivelle C , on fera tourner les deux roues R et R' de la même quantité angulaire, et l'on pourra opérer sur une autre portion quelconque de la surface du modèle. On finira ainsi par avoir promené la touche sur tous les points de cette surface; et le burin aura tracé dans la matière molle une surface semblable; c'est-à-dire qu'on aura obtenu une réduction fidèle du modèle proposé.

PANTOMÈTRE (de $\pi\acute{\alpha}\varsigma$, παντός, tout, et de μέτρον, mesure), instrument qui sert à mesurer les angles. (Voy. ÉQUERRE—GRAPHOMÈTRE.)

PARABOLOÏDE DE RACCORDEMENT, paraboloïde hyperbolique qui a une génératrice commune avec une surface gauche, et les mêmes plans tangents le long de cette génératrice. C'est par la considération des paraboloïdes de raccordement que l'on mène le plus souvent les plans tangents aux surfaces gauches. (Voy. PLAN TANGENT.)

I. Une surface gauche a toujours, le long d'une même génératrice, une infinité de paraboloïdes de raccordement. On démontre, en effet, que deux surfaces gauches qui ont les mêmes plans tangents en trois points m, n, p d'une génératrice commune G , se raccordent le long de cette génératrice. Car si par les points m, n, p on mène trois plans sécants, ils détermineront sur les deux surfaces trois couples de courbes A et a, B et b, C et c tangentes deux à deux, et qui pourront être regardées comme des directrices des deux surfaces gauches. Si l'on fait glisser la génératrice G sur les trois courbes A, B, C , dans une position infiniment voisine elle pourra être regardée comme rencontrant encore les trois courbes a, b, c tangentes respectivement aux trois premières. On peut donc considérer les deux surfaces comme ayant deux génératrices consécu-

tives communes G et G' . Cela posé, coupons les deux surfaces par un plan quelconque P ; il coupera les deux génératrices G et G' en des points q et q' infiniment voisins et appartenant aux deux

surfaces; il coupera donc ces deux surfaces elles-mêmes suivant deux courbes D et d ayant les points q et q' communs, et qui seront conséquemment tangentes au point q . Le plan tangent au point q étant déterminé par les droites G et qq' sera commun aux deux surfaces. Donc ces surfaces ont le même plan tangent en un point quelconque q de la génératrice commune G ; donc ces surfaces se raccordent suivant cette génératrice.

II. On démontre en second lieu que si l'on coupe une surface gauche par une série de plans parallèles à un plan donné Q ,

les tangentes de toutes les sections, aux points situés sur une même génératrice G , seront sur un même paraboloïde hyperbolique. Soient, en effet, m, n, p trois points pris arbitrairement sur la génératrice G ; et soient T_1, T_2, T_3 les tangentes menées par ces points aux sections parallèles au plan Q . Ces trois tangentes, parallèles à un même plan, pourront être considérées comme trois génératrices, d'un même système, d'un paraboloïde hyperbolique dont l'un des plans directeurs P est parallèle au plan Q . Or, les plans menés respectivement par la génératrice G et par les trois tangentes T_1, T_2, T_3 seront tangents à la fois à la surface gauche considérée et au paraboloïde. Donc, en vertu de la première proposition ci-dessus démontrée, ces deux surfaces se raccordent tout le long de la génératrice G . Tout plan parallèle au plan Q coupera donc le paraboloïde suivant une droite qui sera tangente à la surface gauche; et réciproquement, tout plan parallèle au plan Q coupera la surface gauche suivant une courbe dont la tangente, au point de rencontre avec la génératrice G , sera une génératrice du paraboloïde.

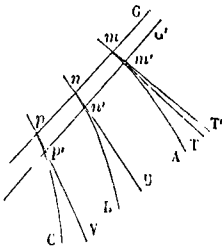
III. On voit que le long d'une génératrice donnée G , il existe toujours un paraboloïde de raccordement ayant l'un de ses plans directeurs parallèle à un plan donné quelconque Q . Il y a donc une infinité de paraboloïdes de raccordement correspondants à une génératrice donnée de la surface gauche.

Le second plan directeur P' du paraboloïde est parallèle à la génératrice G , et à la génératrice G' infiniment voisine sur la surface gauche; car les génératrices G et G' sont deux génératrices, du second système, du paraboloïde de raccordement. Ce second plan directeur P' est donc aussi parallèle aux génératrices g et g' respectivement parallèles à G et à G' sur le cône directeur de la surface gauche; c'est-à-dire que P' est parallèle au plan déterminé par g et g' , ou, ce qui revient au même, au plan tangent au cône directeur suivant la génératrice g parallèle à G . Ce second plan directeur est,

comme on le voit, indépendant de la direction du plan Q parallèlement auquel on a mené les plans sécants.

Si l'on prend le plan Q perpendiculaire au plan P', ce qui peut se faire d'une infinité de manières, les sections principales du paraboloides sont deux paraboles égales, et le paraboloides est *isocèle*; car on sait que c'est dans ce cas seulement que les deux plans directeurs de la surface sont perpendiculaires entre eux. C'est ce qui arrive particulièrement quand on prend le plan Q perpendiculaire à la génératrice G de la surface gauche. Le sommet du paraboloides est alors sur cette génératrice, et son axe principal est perpendiculaire à cette droite (Voy. la *Géométrie analytique* à trois dimensions).

IV. Si une surface gauche est déterminée par deux directrices courbes A et B et par un plan direc-



teur P, on se procure aisément un paraboloides de raccordement le long d'une génératrice donnée G. Soient, en effet, m et n les points où cette génératrice rencontre les deux directrices A et B, et soient mT et nU les tangentes en m et en n à ces directrices. Prenons sur la courbe A un point m' infiniment voisin du point m, il appartiendra à la tangente m'T. Par ce point m' menons un plan parallèle au plan directeur P, il coupera la courbe B en un point n' infiniment voisin du point n, et qui conséquemment appartiendra à la tangente n'U. Considérons le paraboloides hyperbolique engendré par une droite assujettie à rencontrer mT et nU et à rester parallèle au plan P. Je dis que ce paraboloides se raccordera avec la surface donnée le long de la génératrice G. Car soit p un point quelconque de cette génératrice; par ce point menons un plan parallèle à la fois aux deux droites mT et nU; il coupera m'T' ou G' en un point p' infiniment voisin de p; et la droite pp' ou pV sera tangente à la surface donnée. Par conséquent le plan des droites G et pV sera tangent à cette surface. Mais il sera aussi tangent au paraboloides, car, d'après la manière dont pV a été construit, ce n'est autre chose qu'une génératrice du second système. Les deux surfaces auront donc le même plan tangent au point p; et, comme ce point est un point quelconque de la génératrice G, il en résulte que les deux surfaces se raccorderont le long de cette génératrice.

Si la surface est déterminée par trois directrices A, B, C, voici comment on pourra obtenir un paraboloides de raccordement le long d'une génératrice donnée G. Soient mT, nU, pV les tangentes menées aux trois directrices par les points m, n, p où elles rencontrent la génératrice donnée. Par le point m on mènera un plan parallèle aux tangentes nU et pV; il coupera le plan des droites G et mT

suivant une droite mT'. Si l'on considère le paraboloides engendré par une droite assujettie à rencontrer les trois droites mT', nU et pV qui sont dans un même plan, ce paraboloides sera un paraboloides de raccordement le long de la génératrice G. Car les deux surfaces ont évidemment des plans tangents communs aux trois points m, n, p; et par conséquent ils se raccorderont, d'après le théorème démontré au commencement de cet article.

PARABOLOÏDE DES NORMALES, paraboloides hyperbolique dont les génératrices sont les normales menées à une surface gauche par les différents points d'une même génératrice (Voy. PARABOLOÏDE NORMAL).

PARABOLOÏDE NORMAL, paraboloides hyperbolique qui a, avec une surface gauche, une génératrice commune G, et dont les plans tangents aux différents points de cette génératrice sont respectivement perpendiculaires à ceux de la surface gauche. Pour obtenir un paraboloides normal il suffit de mener un PARABOLOÏDE DE RACCORDEMENT (Voy. ce mot) et de le faire tourner de 90° autour de la génératrice G. Il existe donc une infinité de paraboloides normaux à une surface gauche le long d'une génératrice donnée; et même une infinité de paraboloides normaux isocèles. Parmi ces paraboloides normaux, il y en a un qui mérite une attention particulière; c'est celui dont toutes les génératrices, d'un même système, sont normales à la surface gauche. Pour le déterminer, il faut prendre l'un de ses plans directeurs P perpendiculaire à la génératrice G. Si l'on conçoit qu'on ait mené d'abord un paraboloides de raccordement remplissant cette condition, ses génératrices parallèles au plan P seront perpendiculaires à G et situées respectivement dans un plan tangent; quand on aura fait tourner le paraboloides de 90° autour de G, ces mêmes génératrices n'auront pas cessé d'être perpendiculaires à G, et elles seront devenues perpendiculaires aux plans tangents respectifs dans lesquels elles étaient primitivement contenues, c'est-à-dire qu'elles seront devenues normales.

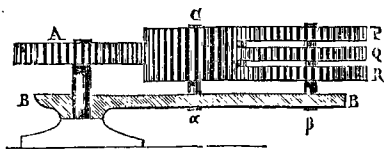
Ceci démontre que les normales à une surface gauche menées par les différents points d'une même génératrice forment un paraboloides hyperbolique. M. de La Gournerie nomme ce paraboloides le *paraboloides des normales*. Il a pour premier plan directeur le plan P, perpendiculaire à G, et un second plan directeur parallèle au plan normal à la surface mené suivant la génératrice G; car, avant la rotation, le second plan directeur était parallèle au plan tangent suivant cette génératrice. Le paraboloides des normales ayant ses plans directeurs perpendiculaires entre eux est évidemment isocèle.

PARADOS, construction élevée derrière une courtine, à la gorge d'un bastion, d'une demi-lune, ou d'un ouvrage de fortification quelconque, pour garantir ses défenseurs des coups de revers, lorsque le **DEFILEMENT** (Voy. ce mot) est impossible. Un mur, un épaulement en terre, un terrain s'élevant en glacis, etc., peuvent suivant les circonstances remplir les fonctions de parados.

PARADOXE DE FERGUSSON, dispositif qui réalise un cas singulier des **TRAINS EPICYCLOÏDAUX** (Voy. ce mot), et peut servir à faire comprendre les propriétés de ce genre d'engrenage.

La roue A est une roue fixe, autour de l'axe de

laquelle peut tourner le bras porte-train BB, auquel sont fixés deux axes α et β parallèles à l'axe fixe. Sur l'axe α est montée une roue folle C qui engrène avec A, et sur l'axe β sont montées trois



roues folles de même diamètre P, Q, R qui engrènent avec la roue C, mais qui n'ont pas le même nombre de dents; si n est le nombre des dents de la roue fixe A, la roue P a $n + 1$ dents, la roue Q en a n , la roue R en a $n - 1$. On concevra la possibilité de cette combinaison en admettant que les engrenages soient à développantes (Voy. ENGRÉNAGES); on sait que dans ce système une même roue peut engrener avec des roues de différents nombres de dents, au moins entre certaines limites. Cela posé, si l'on fait mouvoir le bras porte-train dans un sens quelconque, on verra la roue P tourner dans le même sens, la roue R en sens contraire, et la roue Q n'aura qu'un mouvement de translation circulaire sans rotation. C'est en cela que consiste la *paradoxe de Fergusson*. Le résultat est indépendant du nombre des dents de la roue C.

L'explication de ce paradoxe apparent est facile. Soit m le nombre des dents d'une roue M quelconque montée sur l'axe β et engrenant avec la roue C; et soit ω la vitesse angulaire du bras porte-train. Ramenons ce bras au repos en imprimant à tout le système une vitesse angulaire $-\omega$ de sens contraire. La roue A, au lieu d'être fixe, aura la vitesse $-\omega$. La vitesse de la roue M sera de même sens; et d'après la théorie des ROUAGES (Voy. ce mot) sa valeur absolue sera exprimée par $\omega \cdot \frac{n}{m}$.

Rendons au bras porte-train sa vitesse ω , la roue A sera ramenée au repos, et la roue M sera animée des deux vitesses simultanées $-\omega \cdot \frac{n}{m}$ et $+\omega$; sa vitesse absolue dans l'espace sera donc la somme algébrique de ces deux vitesses, l'une relative et l'autre d'entraînement, c'est-à-dire

$$\omega \left(1 - \frac{n}{m}\right) \text{ ou } \omega \cdot \frac{m-n}{m}.$$

Faisons maintenant $m = n + 1$; nous trouverons pour la vitesse angulaire absolue de la roue P

$$\omega \cdot \frac{1}{n},$$

quantité positive. Donc cette roue tournera dans le sens du bras porte-train dont la vitesse a été regardée comme positive.

Faisons $m = n - 1$; nous trouverons pour la vitesse angulaire absolue de la roue R

$$-\omega \cdot \frac{1}{n},$$

quantité négative. Donc cette roue tournera en sens contraire du bras porte-train.

Faisons enfin $m = n$; nous trouverons *zéro* pour la vitesse angulaire absolue de la roue Q. Donc cette roue n'aura qu'un mouvement de translation circulaire autour de l'axe fixe, mais point de rotation.

Ces résultats auraient pu se déduire des formules générales des trains épicycloïdaux; mais un examen direct éclaircit mieux ce cas singulier.

PARADOXE HYDROSTATIQUE. On désigne sous ce nom le théorème d'hydrostatique suivant lequel la pression par mètre que supporte le fond d'un vase rempli d'un liquide est indépendante de la forme du vase, et ne dépend que de la distance du fond au niveau supérieur. La dénomination de *paradoxe* donnée à ce théorème remonte à une époque où l'explication de la vérité énoncée était encore mal connue ou peu répandue.

PARALLAXE (du grec παράλλαξις, changement), angle sous lequel le rayon terrestre serait vu du centre d'un astre, ou angle formé par le rayon visuel mené de la surface du globe à l'astre avec le rayon mené du centre de la terre au même astre.

I. L'effet de la parallaxe est d'augmenter les distances zénithales; car si AE (fig. 1) est le rayon vi-

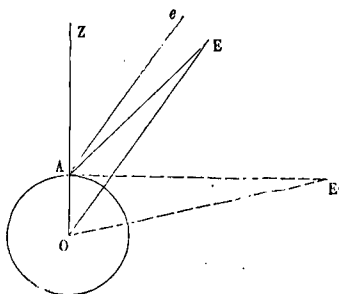


Fig. 1.

suel mené d'un point A de la surface du globe à une étoile E, OE le rayon mené du centre de la terre à la même étoile, AZ la verticale du point A, et Ae une parallèle à OE, la distance zénithale observée est l'angle EAZ, tandis que, si l'observation était faite au centre de la terre, ce serait l'angle EOZ, ou son égal eAZ; la distance zénithale est donc augmentée de l'angle eAE, ou de son égal AEO, qui est précisément la parallaxe.

La parallaxe est la plus grande possible lorsque le rayon visuel AE est dans le plan de l'horizon, comme AE'; on lui donne alors le nom de *parallaxe horizontale*; c'est l'angle qui a pour sinus le rapport du rayon terrestre AO à la distance OE' du centre de la terre à l'étoile ou $\frac{r}{d}$. Dans toutes les autres positions de l'étoile au-dessus de l'horizon, la parallaxe prend le nom de *parallaxe de hauteur*. Si on la désigne par p , et qu'on nomme z' la distance zénithale corrigée de la réfraction, on a dans le triangle AOE

$$\frac{\sin AEO}{\sin EAO} = \frac{AO}{OE} \text{ ou } \frac{\sin p}{\sin z'} = \frac{r}{d},$$

d'où $\sin p = \frac{r}{d} \sin z'$,

ou, comme p est toujours très-petit,

$$p = \frac{r \sin z'}{d \sin 1''}, \quad [1]$$

formule qui peut être convertie en table.

En appelant z_1 la distance zénithale directement observée, et θ la *réfraction astronomique* (Voy. ce mot), on a

$$z' = z_1 + \theta - p \quad [2]$$

pour la distance zénithale corrigée de la réfraction et de la parallaxe.

II. La formule [1] ci-dessus suppose que l'on connaisse la distance d du centre de la terre au centre de l'astre considéré. Or la détermination primitive de cette distance est liée à celle de la parallaxe elle-même.

Soit M (fig. 2) le centre de l'astre, O celui de la

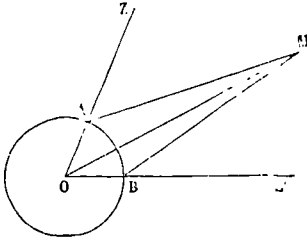


Fig. 2.

terre, A et B deux stations éloignées choisies sur un même méridien. Deux observateurs postés en A et B observent les distances zénithales MAZ et MBZ' du centre de l'astre à l'instant de son passage au méridien. Soient Z et Z' ces distances zénithales supposées corrigées de la réfraction. Les deux points A et B étant connus, l'angle AOB est déterminé; c'est la somme des latitudes λ et λ' de ces deux lieux. Si p désigne l'angle AMO et p' l'angle BMO, on a par la formule [1]

$$p = \frac{r \sin Z}{d \sin 1''} \quad \text{et} \quad p' = \frac{r \sin Z'}{d \sin 1''},$$

d'où
$$p + p' = \frac{r (\sin Z + \sin Z')}{d \sin 1''}.$$

Mais dans le quadrilatère AOBM on a

$$p + p' + 180^\circ - Z + 180^\circ - Z' + \lambda + \lambda' = 360^\circ;$$

d'où
$$p + p' = (Z + Z') - (\lambda + \lambda'),$$

et, par conséquent,

$$\frac{r (\sin Z + \sin Z')}{d \sin 1''} = (Z + Z') - (\lambda + \lambda');$$

d'où

$$\frac{r}{d} = \frac{(Z + Z') - (\lambda + \lambda')}{\sin Z + \sin Z'} \cdot \sin 1''.$$

Cette formule fait connaître le rapport $\frac{r}{d}$, qui n'est autre chose que la parallaxe horizontale de l'astre; et comme r est connu, on en déduit la distance d .

C'est par cette méthode que Lacaille et Lalande, postés, le premier au cap de Bonne-Espérance et le second à Berlin, ont déterminé les parallaxes de la lune, de Vénus et de Mars. La même méthode a été appliquée depuis aux autres planètes. — Il n'est point indispensable que les deux stations soient exactement situées sous un même méridien; les observations ne pouvant alors être simultanées, il faut tenir compte de la variation de distance zénithale, ou, ce qui revient au même, de la variation de déclinaison qu'éprouve l'astre observé, en passant du méridien de l'une des stations au méridien de l'autre.

III. Appliquée au soleil, cette méthode ne donnerait pas une approximation suffisante. La parallaxe du soleil se déduit de l'observation du passage de Vénus sur le disque de cet astre. La vitesse de la planète étant connue, on sait le temps qu'elle emploie-

rait, à l'époque où l'on se trouve, à parcourir dans le ciel un arc égal au diamètre apparent du soleil. Supposons qu'un observateur mesure le temps que Vénus emploie à traverser le disque du soleil; la comparaison de ces deux durées fera connaître le rapport de la corde parcourue au diamètre, et par suite la distance de cette corde au centre. Remarquons que Vénus se trouve, au moment de son passage sur le disque du soleil, soit dans le plan même de l'écliptique, soit très-près de ce plan; mais que, l'inclinaison de son orbite par rapport à ce même plan étant très-faible, la corde qu'elle semble décrire sur le disque peut être regardée comme sensiblement parallèle au plan de l'écliptique. Supposons un second observateur placé en un autre lieu du globe; il verra Vénus traverser le disque du soleil suivant une corde parallèle à la première; et pourra déterminer de même la distance de cette corde au centre. Du rapprochement des deux observations, on déduira la distance des deux cordes parallèles, ou du moins le rapport de cette distance au diamètre apparent du soleil, et par suite le nombre de degrés, minutes et secondes que cette distance embrasse sur la sphère céleste. — Imaginons pour fixer les idées que les stations A et B (fig. 3) des deux

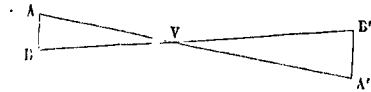


Fig. 3.

observateurs soient les extrémités d'une corde du globe terrestre perpendiculaire au plan de l'écliptique; soient A' et B' les milieux des deux cordes considérées sur le disque du soleil; A'B' sera parallèle à AB; et si V est la position du centre de Vénus, les triangles semblables AVB et A'VB' donneront

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AV}{A'V}.$$

Or, on connaît, d'après les LOIS DE KÉPLER (Voy. ces mots), le rapport des distances A'V et AV qui sont les distances de Vénus et de la terre au soleil; il est facile d'en déduire le rapport de AV à A'V; et, en vertu de la proportion qu'on vient d'écrire, on aura le rapport de AB à A'B'. C'est-à-dire qu'on en déduira, en degrés, minutes et secondes, l'angle sous lequel la corde AB serait vue du soleil. Mais cette corde peut être calculée au moyen des coordonnées géographiques des points A et B; on connaîtra donc l'angle sous lequel une longueur connue AB située à la distance de la terre au soleil serait vue de ce dernier astre. Par une simple proportion on en déduira l'angle sous lequel le rayon terrestre serait vu de la même distance; car, à une distance aussi considérable, les angles sous lesquels deux longueurs, relativement très-petites, sont vues, sont sensiblement proportionnels à ces longueurs. On aura donc ainsi la parallaxe horizontale du soleil. Si l'on a besoin de la parallaxe de hauteur, on se servira de la formule [1], ou de la table calculée à l'aide de cette formule (cette table existe dans la *Connaissance des temps*).

Il n'est pas indispensable que les stations A et B soient les extrémités d'une corde perpendiculaire à l'écliptique; on peut encore, en employant deux stations quelconques, déterminer la parallaxe du

soleil; la seule condition que ces stations doivent remplir, c'est d'être telles que les cordes qui paraissent décrites par Vénus sur le disque du soleil observé de ces stations ne soient ni trop petites ni trop rapprochées l'une de l'autre. Le dernier passage de Vénus sur le disque du soleil a eu lieu en 1769; et de l'observation de ce passage faite en divers lieux, on a déduit pour la parallaxe moyenne du soleil le nombre 8", 57. Elle varie, dans le cours de l'année, de 8", 72 à 8", 44 environ. (Le plus prochain passage de Vénus sur le disque du soleil n'aura lieu qu'en 1874.)

Les passages de Mercure sur le disque du soleil ne se prêtent pas aussi bien que ceux de Vénus à la détermination de la parallaxe du soleil. Mercure étant, en effet, beaucoup plus rapproché du soleil, les cordes que cette planète semble parcourir sur le disque solaire, pour deux observateurs placés, même à de grandes distances, à la surface du globe terrestre, sont toujours trop voisines l'une de l'autre pour que la méthode qui vient d'être exposée fournisse une exactitude suffisante.

IV. La parallaxe moyenne de la lune est de 57". Elle varie de 60' 7", 7 à 53' 52", 3.

La parallaxe de Mercure varie de 6", 4 à 15", 3.

— Vénus — 5", 0 31", 5.

— Mars — 3, 8 17", 3.

La parallaxe de Jupiter est en moyenne de 1", 64.

— Saturne — 0, 99.

— Uranus — 0, 46.

— Neptune — 0, 28.

(Ces parallaxes seraient un peu différentes si, au lieu de la valeur 8", 57 adoptée généralement jusqu'ici pour la parallaxe du soleil, on prenait 8", 86, comme le propose l'Annuaire du Bureau des longitudes pour 1865.)

Les étoiles n'ont pas de parallaxe appréciable, dans le sens que nous avons donné jusqu'ici à ce mot.

V. On nomme *parallaxe annuelle* d'une étoile l'angle sous lequel on verrait de cette étoile le rayon de l'orbite terrestre. Pour déterminer cette parallaxe, il faut observer l'étoile à 6 mois d'intervalle, et calculer l'angle des rayons visuels menés à l'étoile à ces deux époques. Pour comprendre la possibilité de cette détermination, remarquons d'abord que les COORDONNÉES ÉQUATORIALES (Voy. ce mot) d'une étoile étant connues à un instant quelconque, il est facile de calculer l'angle que le rayon visuel mené à l'étoile fait avec le diamètre de l'écliptique à l'extrémité duquel se trouve la terre à l'instant considéré, car la longitude de l'autre extrémité étant connue, on peut en déduire son ascension droite et sa déclinaison (Voy. COORDONNÉES URANOGRAPHIQUES); or, connaissant les coordonnées équatoriales de deux points du ciel, il est facile d'en déduire l'angle que font les rayons visuels menés à ces deux points; car c'est le troisième côté d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés, les distances polaires des deux points, et l'angle compris, qui est la différence de leurs ascensions droites. Cela posé, concevons qu'on ait observé une étoile E (fig. 4) à 6 mois de distance, c'est-à-dire pour deux positions T et T' de la terre situées aux extrémités d'un même diamètre de l'écliptique; et qu'on ait déterminé les angles ETO et E'T'O: on en déduira l'angle TET' formé par les

rayons visuels menés à l'étoile des positions T et T'. Si le diamètre TT' est perpendiculaire à OE, ce qui aura lieu lorsque la longitude du point T différera de 90° de celle de l'étoile, l'angle TET' sera le dou-

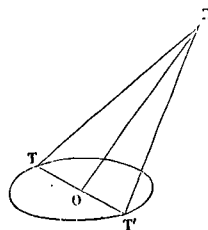


Fig. 4.

ble de TEO, c'est-à-dire le double de la parallaxe annuelle de l'étoile, qui se trouvera ainsi déterminée. La résolution du triangle rectangle TOE suffirait d'ailleurs pour donner à la fois la parallaxe annuelle TEO et la distance TE de l'étoile à la terre.

Cette méthode appliquée à différentes étoiles, choisies parmi les plus brillantes, et vraisemblablement les plus rapprochées de la terre, n'a donné que des parallaxes annuelles inférieures à 1", et affectées par conséquent de l'incertitude qui s'attache à des quantités de cet ordre. Mais il en résulte qu'on n'a pas encore trouvé d'étoile pour laquelle la distance TE ne soit supérieure à

$\frac{TO}{\sin 1''}$, ou à $\frac{TO}{1''}$, ou $\frac{TO \cdot 1296000}{2\pi}$ ou 206265 . TO, c'est-à-dire à plus de 206 265 fois le rayon de l'orbite terrestre.

PARALLÈLE, cercle de la sphère céleste dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde, et par conséquent parallèle au plan de l'équateur.

On donne le même nom en Géographie aux cercles tracés à la surface du globe et dont le plan est parallèle à l'équateur. La terre n'étant pas rigoureusement une surface de révolution, il faut, si l'on a égard à cette circonstance, modifier la définition des parallèles géographiques. Un parallèle est alors le lieu des points de la surface du globe pour lesquels la verticale fait un même angle avec la ligne des pôles, ou, si l'on veut, c'est le lieu des points qui ont la même LATITUDE GÉOGRAPHIQUE (Voy. ce mot). Ce lieu est généralement une courbe à double courbure; mais dans les applications à la Géographie on peut sans inconvénients le considérer comme une courbe plane, attendu que la différence serait insensible sur une carte.

PARALLÉLÉPIÈDE DES CHEMINS. Voy. COMPOSITION DES CHEMINS.

PARALLÉLÉPIÈDE DES FORCES. Voy. COMPOSITION DES FORCES.

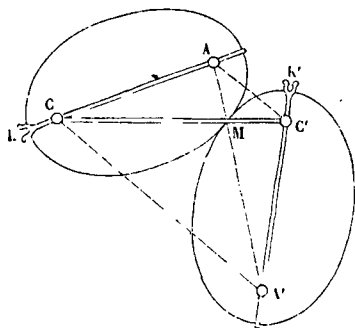
PARALLÉLÉPIÈDE DES VITESSES. Voy. COMPOSITION DES VITESSES.

PARALLÈLES, tranchées qui servent de base aux opérations d'un siège. On trace ordinairement trois parallèles: les deux premières sont des lignes brisées dont chaque côté fait des angles égaux avec la capitale d'une demi-lune et la capitale du bastion voisin; la troisième est parallèle au côté extérieur du polygone fortifié. Il en était primitivement ainsi des deux premières, d'où le nom

de *parallèles* qu'on leur a conservé. On ouvre la première parallèle à 600 mètres des saillants du chemin couvert des demi-lunes; la seconde à 280 mètres, la troisième à 60 mètres (*Voy. ATTAQUE DES PLACES*), sur le pied des glacis.

PARALLÉLISME DES TRANCHES. On nomme ainsi, en Hydraulique, l'hypothèse suivant laquelle toutes les molécules de fluide situées dans une même tranche perpendiculaire à la direction d'un courant sont animées de la même vitesse. Cette hypothèse n'est employée que pour introduire la considération de la *vitesse moyenne* qui simplifie les énoncés.

PARALLÉLOGRAMME DE REULAUX (de Zurich), nom impropre donné à un dispositif qui sert à transformer un mouvement de rotation continue en un autre mouvement de rotation continue autour d'un axe parallèle au premier. C'est un cas particulier du système **BALANCIER ET CONTRE-BALANCIER** (*Voy. ce mot*), celui dans lequel les axes de rotation C et C' étant situés de part et d'autre de la



bielle AA', les balanciers CA et CA' sont égaux entre eux; et la bielle est égale en longueur à la ligne des centres CC'. Si l'on trace les deux ellipses qui ont pour foyers, l'une les points C et A, l'autre les points C' et A', et dont le grand axe a pour longueur celle de la bielle AA', on reconnaît que ces deux ellipses sont tangentes au point M de la bielle qui se trouve sur la ligne des centres CC'. Car si l'on joint CA' et AC', on reconnaît que les triangles CAA' et CC'A' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; il en est de même des triangles ACC' et AA'C'. Il en résulte que les angles CAM et A'C'M sont égaux, ainsi que les angles ACM et C'A'M. Les deux triangles AMC et A'MC' sont donc égaux, et l'on a

$$AM = C'M \text{ et } CM = A'M.$$

Par conséquent

$$CM + MA = CM + MC' = CC';$$

donc le point M appartient à la première ellipse; de même

$$AM + MA' = CC' = MC' + MA';$$

donc le même point M appartient à la seconde ellipse. De plus, la bissectrice de l'angle AMC' est une tangente commune aux deux courbes; donc elles sont tangentes entre elles au point M. Les choses se passent donc comme si ces deux ellipses roulaient l'une sur l'autre. Mais pour assurer la continuité du mouvement dans le voisinage des points morts, c'est-à-dire dans le voisinage des positions où les points C, A, C', A' se trouvent en ligne droite, il

est nécessaire d'armer chaque balancier d'une encoche k ou k' dans laquelle vient se loger l'extrémité de l'autre balancier prolongé.

On donne aussi au système Reulaux ainsi disposé le nom de *manivelles an'rotatives*.

PARALLÉLOGRAMME DE WATT, parallélogramme articulé imaginé par Watt pour transmettre au balancier de sa machine à vapeur le mouvement alternatif imprimé au piston.

I. Considérons (fig. 1) un balancier Oa, un con-

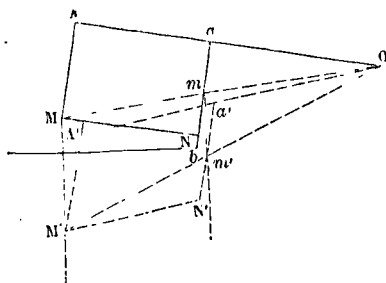


Fig. 1.

tre-balancier Cb, liés par une bielle ab articulée à ses extrémités. On sait (*Voy. BALANCIER ET CONTRE-BALANCIER*) que si l'on adapte en un point de ab, au milieu m par exemple, l'extrémité d'une tige verticale, elle sera guidée sensiblement en ligne droite, suivant la verticale du point m. Concevons maintenant le balancier prolongé jusqu'en A; menons par ce point une droite AM parallèle à ab, et terminée à sa rencontre avec la droite Om; puis, achevons le parallélogramme AMNA. Si l'on suppose ce parallélogramme articulé à ses quatre sommets, le point M décrira aussi une verticale. En effet, les triangles Oam et OAM restent semblables entre eux pendant le déplacement du balancier, attendu le parallélisme obligé des droites AM et aN; les trois points O, m, O demeurent donc toujours en ligne droite. Soit O, m', M' leur position à un autre instant; joignons mm' et MM'. La similitude des triangles Oam et OAM donne

$$Om : OM = Oa : OA;$$

mais, les distances Oa et OA restant constantes, on aura aussi dans la nouvelle position du balancier

$$Om' : OM' = Oa' : OA' = Oa : OA;$$

d'où résulte

$$Om' : OM' = Om : OM;$$

par conséquent les droites mm' et MM' sont parallèles; et puisque la première est verticale, il en est de même de la seconde. Donc enfin le point M décrit une verticale; et une tige articulée en ce point serait guidée verticalement.

On donne généralement à OA une longueur double de Oa. Il en résulte que AM est égal à ab, et que le point N se confond avec le point b, comme le montre la figure 2. — Une autre conséquence de la relation OA = 2.Oa, c'est que le point M décrit la verticale du point C. Cette conséquence devient évidente quand on place le balancier et le contre-balancier dans la position horizontale; car le point M se confond alors avec le point C, comme le montre la figure 3, attendu que Cb, égal à Oa, est alors égal à Aa ou à Mb. Ceci explique pourquoi

dans la représentation graphique de la machine de Watt, le point C se projette sur l'axe même de la tige du piston.

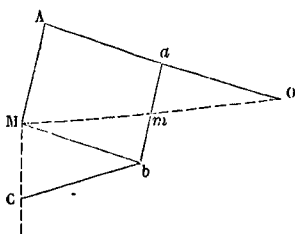


Fig. 2.

Nous avons décrit et raisonné jusqu'ici comme si tout se passait dans un même plan; mais pour l'exécution il est nécessaire que le système soit double, c'est-à-dire qu'il y a, de part et d'autre du balancier, deux parallélogrammes égaux; les deux som-

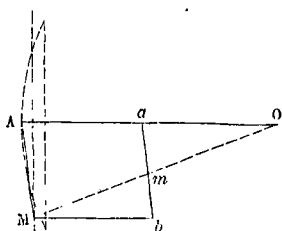


Fig. 3.

ets qui se projettent en M sont reliés par un axe horizontal, et c'est au milieu de cet axe qu'est articulée la tige du piston; de même les deux points qui se projettent en m sont reliés par un axe horizontal auquel est articulée la tige de la pompe à air; enfin, extérieurement aux parallélogrammes, sont placées les deux brides qui se projettent suivant Cb, et dont l'ensemble forme le contre-balancier; les axes qui se projettent en C sont fixés au bâti de la machine; mais ils ne se rejoignent point d'une bride à l'autre, le milieu de l'intervalle étant occupé par la tige du piston. La figure 4

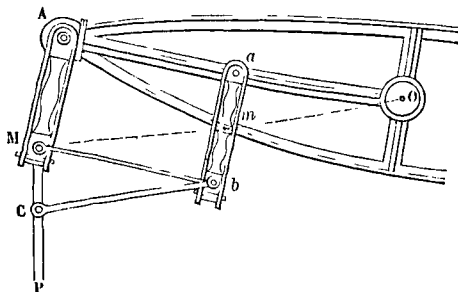


Fig. 4.

montre en projection le parallélogramme de Watt tel qu'il est ordinairement exécuté. La partie du bâti à laquelle est fixé l'axe C n'a pu être figurée, parce qu'elle eût caché la tige du piston et le sommet M du parallélogramme.

II. On peut, suivant les besoins, faire varier

entre certaines limites les dimensions relatives du parallélogramme, mais il est bon de se conformer aux règles suivantes, établies par M. de Prony, et qui ont été sanctionnées par l'expérience; elles s'accordent d'ailleurs avec celles qui ont été données par Watt lui-même (*Voy. BALANCIER ET CONTRE-BALANCIER*). Soit OA (fig. 5) la position horizontale du balancier :

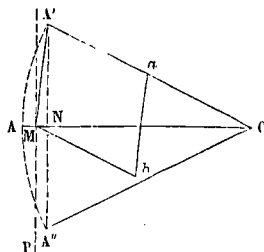


Fig. 5.

1° Il faut que dans son mouvement alternatif il s'écarte de quantités angulaires AOA' , AOA'' égales, au-dessus et au-dessous de sa position horizontale.

2° Les angles AOA' ou AOA'' ne doivent jamais dépasser 30 degrés.

3° La corde $A'A''$ de l'arc décrit par l'extrémité du balancier doit être égale à la course du piston; la longueur OA du demi-balancier doit être comprise entre 1 fois et demie et 2 fois cette course.

4° La longueur du côté ab du parallélogramme doit être comprise entre la moitié et le tiers de celle du demi-balancier OA.

5° La direction de la tige du piston doit passer à égale distance du point A et de la corde $A'A''$.

6° La longueur du côté ab doit être réglée de telle sorte que le sommet M du parallélogramme se trouve sur l'horizontale du point O quand le balancier est dans sa position la plus élevée.

M. Haton de la Goupillière, dans son *Traité des Mécanismes*, a déduit des considérations géométriques d'autres règles qu'il énonce en disant que si l'on représente par 37 la longueur du demi-balancier, celle du contre-balancier ayant la même valeur, la distance horizontale de leurs centres doit être représentée par 72, la longueur de la bielle par 24, ainsi que l'excursion de la tige du piston, ou la corde de l'arc parcouru par l'extrémité du balancier. La flèche de cet arc est alors représentée par 2, et l'amplitude des oscillations est d'environ $37^{\circ} 51'$.

Il est clair qu'entre certaines limites ces déterminations restent arbitraires.

Cependant il y a des cas exceptionnels où l'on est obligé de s'écarter de ces règles; c'est ce qui arrive notamment pour les machines employées à la propulsion des bateaux. Le peu d'espace dont on dispose ne permet pas de placer le balancier à la partie supérieure de la machine; on emploie ordinairement deux balanciers accouplés que l'on place de part et d'autre de la machine, à sa partie inférieure ou moyenne; il faut alors placer le parallélogramme au-dessus, comme le montre la figure 6. Les côtés ab et AM du parallélogramme doivent avoir assez de hauteur pour que le point M reste au-dessus du cylindre à vapeur dans toutes les po-

sitions du balancier. Pour déterminer le centre C du contre-balancier, on trace le parallélogramme dans trois positions, correspondantes aux positions extrêmes et à la position moyenne du balancier, en

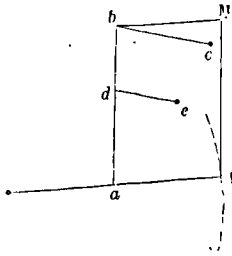


Fig. 6.

ayant soin de placer le point M sur la verticale qui répond à la tige du piston. On obtient ainsi trois positions correspondantes du point b; le centre du cercle passant par ces trois positions du point b sera le centre C du contre-balancier. Si ce point C était situé trop haut pour que le bâti de la machine s'élevât jusqu'en ce point, au lieu de se servir de trois positions du point b, on se servirait des trois positions correspondantes d'un point quelconque d pris sur le côté ab; le centre e du cercle passant par ces trois positions du point d serait le centre d'un nouveau contre-balancier de qui remplirait la même fonction que le contre-balancier bc.

III. On peut avoir besoin de guider en ligne droite plus de deux tiges; pour se procurer un troisième point qui se meuve verticalement, on fait usage d'un second parallélogramme intérieur au premier, comme le montre la figure 7.

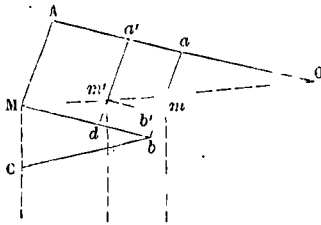


Fig. 7.

Soit m' la direction de la nouvelle tige à faire mouvoir; cette direction rencontre en m' la droite OM. Achevons le parallélogramme $aa'm'b'$ dont les côtés sont parallèles à ceux du parallélogramme $aAMb$; si ce nouveau parallélogramme est articulé à ses quatre sommets, le sommet m' décrira la verticale $m'r$; car à cause de la similitude des triangles $Oam, Oa'm', OAM$, les quatre points O, m, m', M seront constamment en ligne droite, et les distances $O'm, Om', OM$ seront constamment proportionnelles aux distances Oa, Oa', OM ; par conséquent, puisque le point M décrit une verticale, il en sera de même des points m' et m . — On peut remarquer qu'au lieu de se servir du côté $m'b'$ pour déterminer le point m' , on pourrait se contenter de prolonger $a'm'$ jusqu'en d à sa rencontre avec Mb ; la droite $a'd$ étant supposée articulée en a' et en d , la position du point m' serait déterminée comme s'il était le sommet du parallélogramme $aa'm'b'$.

IV. L'emploi du parallélogramme de Watt n'est pas borné aux machines à vapeur; on le retrouve dans les machines à colonne d'eau et dans les machines soufflantes. Dans ces dernières il y a même un parallélogramme à chaque extrémité du balancier, l'un pour transmettre au balancier le mouvement du piston de la machine à vapeur, l'autre pour transmettre le mouvement du balancier au piston du cylindre de la soufflerie. Le grand avantage du parallélogramme de Watt est de se composer de pièces articulées qui ne subissent que de faibles déplacements relatifs et ne donnent lieu qu'à un faible frottement. La suppression du balancier dans beaucoup de machines entraîne la suppression du parallélogramme; mais il faut le remplacer par des glissières qui donnent lieu à un frottement notable.

PARALLÉLOGRAMME DES ACCÉLÉRATIONS.

Voy. COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS.

PARALLÉLOGRAMME DES CHEMINS. Voy. COMPOSITION DES CHEMINS, MOUVEMENT PARABOLIQUE.

PARALLÉLOGRAMME DES FORCES. Voy. COMPOSITION DES FORCES.

PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES. Voy. COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES ROTATIONS.

PARAPET, partie de la masse couvrante d'un ouvrage de fortification comprise entre les plans verticaux passant par la crête intérieure et par la crête extérieure. L'épaisseur du parapet proprement dit varie depuis 0^m,70, épaisseur suffisante pour résister aux balles d'infanterie, jusqu'à 6^m, épaisseur que l'on donne aux parapets de l'enceinte d'un corps de place pour résister à l'artillerie de siège (Voy. FORTIFICATION).

PAREMENT, face plane d'une pierre taillée qui est destinée à rester à découvert (Voy. COUPE DES PIERRES).

PARPAING, pierre de taille qui a deux parements dans le sens de sa longueur (Voy. COUPE DES PIERRES).

PARQUETAGE, disposition des feuilles d'un parquet. Les parquets les plus communs se font en sapin; on les fait en chêne dans les habitations d'une valeur moyenne; dans les riches appartements ils s'exécutent en bois choisis, de diverses essences, employés dans l'ébénisterie.

La disposition des parquets en sapin est des plus simples; les feuilles du parquet sont de longs rectangles posés bout à bout, en alternant les joints d'une bande à l'autre, comme l'indique la figure 1.

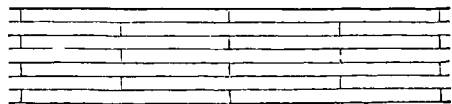


Fig. 1.

La disposition la plus ordinaire des parquets en chêne est celle qui porte le nom de *point de Hongrie* et qui est représentée fig. 2. Les feuilles du parquet ont la forme de parallélogrammes dont un côté est beaucoup plus petit que le côté adjacent. Ces feuilles, juxtaposées par leur plus grand côté, de manière que les petits côtés soient

en ligne droite, forment une large bande ABCD à côté de laquelle on en pose une semblable A'B'CD, mais dans laquelle les feuilles sont dirigées en sens contraire; de telle sorte que l'ensemble des deux

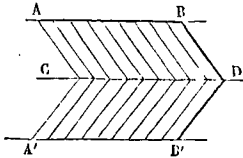


Fig. 2.

bandes a pour axe de symétrie la ligne CD des petits côtés.

Les parquets en chêne peuvent aussi être disposés comme l'indique la figure 1.

Quand on fait usage de bois de choix, on peut varier d'une manière indéfinie la disposition des parquets, et obtenir, selon la forme donnée aux feuilles et suivant la nature des bois employés, une multitude de combinaisons plus ou moins riches et d'un aspect plus ou moins agréable aux yeux. Les dispositions adoptées pour le CARRELAGE (Voy. ce mot) peuvent alors être appliquées au parquetage; mais la facilité avec laquelle on façonne les bois, permet d'employer des dessins plus compliqués, plus délicats, plus capricieux. Il y a des parquets dont l'exécution est un véritable travail de marqueterie.

PARTAGE DES TERRES, ou *division des héritages*, opération d'arpentage qui a pour but de partager un terrain proportionnellement aux droits de plusieurs héritiers. Ce problème est généralement indéterminé. Mais il arrive quelquefois que certaines conditions particulières le déterminent; il peut se faire, par exemple, qu'il y ait, dans le terrain à partager, un puits auquel chacune des parts soit assujettie à aboutir; il peut se faire de plus qu'un chemin conduisant à ce puits doit être pris pour limite commune de deux parts. Dans ce cas on opère de la manière suivante : Soit ABCDE (fig. 1) le terrain à partager, par exemple, en qua-

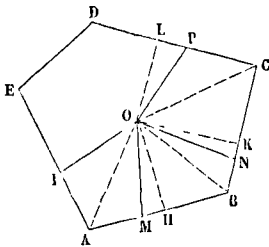


Fig. 1.

tre parties proportionnelles aux nombres m, n, p, q ; soit O le puits qui doit être commun; et soit OI le chemin qui doit servir de limite. On mesure la surface totale, et on la divise, par les procédés de l'arithmétique, en quatre parties proportionnelles aux nombres donnés; soient ma, na, pa, qa les quatre parts obtenues. On tire OA, et l'on mesure le triangle OIA; supposons qu'il soit inférieur à la première part ma d'une certaine

quantité b . On abaisse du point O sur AB une perpendiculaire OH; on la mesure, et l'on divise b par $\frac{1}{2} OH$; le quotient est la base d'un triangle ayant OH pour hauteur et b pour superficie; on porte, de A en M, une longueur égale à ce quotient; on joint OM; et la figure OIAM équivaut à la première part ma . On tire OB; on mesure le triangle OMB, dont on a la hauteur OH, et dont il est aisé de se procurer la base MB. Supposons que la superficie de ce triangle soit inférieure à na d'une quantité égale à c . On abaisse du point O une perpendiculaire OK sur le côté BC; on la mesure; et l'on divise c par $\frac{1}{2} OK$; on porte de B en N une longueur égale au quotient obtenu; on joint ON; et la figure OMBN est équivalente à la seconde part na . En opérant de même, on obtiendra une figure ONCP équivalente à la troisième part pa ; et dès lors la figure restante OPDEI sera équivalente à la quatrième part qa .

Si la première limite OI et le point O ne sont pas donnés, on peut les choisir arbitrairement, mais de manière cependant à ce que les parts ne soient pas trop irrégulières. Soit proposé, par exemple, de diviser un triangle ABC (fig. 2) en trois parties

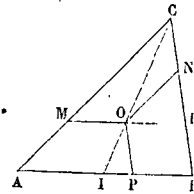


Fig. 2.

équivalentes. On mène la droite CI qui divise la base AB en deux parties égales; et l'on prend le point O au tiers de IC à partir du point I; en d'autres termes, on détermine le centre de gravité O du triangle. Cela fait, on mène par le point O les droites OM, ON, OP respectivement parallèles aux côtés AB, AC, BC. Le triangle se trouve divisé en trois trapèzes équivalents. Il est aisé de voir, par exemple, que la hauteur du trapèze AMOP est le tiers de la hauteur du triangle; or, si l'on prolonge MO jusqu'en H, on a $MO = OH$, puisque O est sur la médiane CI; et $OH = PB$ comme parallèles comprises entre parallèles. La mesure du trapèze, ou $\frac{1}{2} (AP + MO) \cdot \frac{1}{3} h$, en désignant par h la hauteur du triangle, équivaut donc à $\frac{1}{2} (AP + PB) \cdot \frac{1}{3} h$ ou $\frac{1}{3} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} h$, c'est-à-dire au tiers du triangle ABC. On démontrerait de la même manière que les deux autres parts sont chacune le tiers du triangle.

Lorsque aucune considération particulière ne détermine le choix des lignes de division, on peut encore opérer le partage par un autre procédé général, d'une application assez commode. Soit, par exemple, à diviser le polygone ABCDEFGH (fig. 3) en deux parties équivalentes. On mène par les sommets une série de droites parallèles quelconques hh ;

Bb, Gg, Cc, Ff, Dd, que l'on divise chacune en deux parties égales. La ligne brisée qui joint les points de division et les sommets extrêmes A et E, partage évidemment le polygone en deux parties équivalentes; car les triangles extrêmes HAh et DEd, ainsi que tous les trapèzes intermédiaires, sont divisés chacun en deux parties équivalentes.

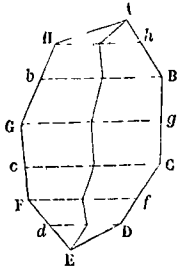


Fig. 3.

On doit éviter les modes de partage qui donneraient aux parts des formes trop aiguës, incommodes pour le labourage ou pour le transport des récoltes. Si, par exemple, on avait à diviser en trois parties égales

un trapèze dont les bases AB et CD (fig. 4) fussent petites par rapport à la longueur des côtés, il ne faudrait pas employer le procédé qui se présente naturellement à l'esprit, et qui consisterait à diviser en trois parties égales

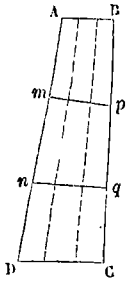


Fig. 4.

chacune des bases, et à joindre les points de division correspondants, comme le montrent les lignes ponctuées sur la figure. Il serait préférable de prendre sur l'un des côtés AD deux points m et n , tels que Am soit un peu plus grand que le tiers de AD et nD un peu plus petit que ce même tiers; puis de mener par ces points deux droites mp et nq qui déterminent un quadrilatère $ABpm$ et un quadrilatère $CDnq$ équivalents chacun au tiers du trapèze, ce qui se ferait

par le procédé employé à l'occasion de la figure 1. C'est pour éviter les angles trop aigus qu'il est bon de prendre les points m et n comme nous l'indiquons.

Nous avons supposé jusqu'ici que le terrain à partager n'était composé que d'une seule nature de terres, et que par conséquent il n'y avait à se préoccuper que de l'étendue des surfaces. Mais il arrive le plus souvent que la propriété qu'il s'agit de diviser renferme des parties de nature très-différentes; et dans ce cas il faut avoir égard non-seulement à leur étendue, mais encore à leur valeur relative. Si la meilleure terre est en petite quantité, il pourra arriver que les copartageants consentent à l'attribuer en entier à l'une des parts, sauf à compenser, dans les autres parts, l'infériorité de la terre par une plus grande étendue. Pour opérer le partage, il faut alors mesurer chacune des deux étendues de terre; multiplier chacune par le prix de l'unité de superficie, et faire la somme pour avoir le prix total de la propriété; puis partager ce prix proportionnellement aux droits des copartageants. Si le prix de la meilleure terre n'atteint pas le chiffre attribué à la part correspondante, on y ajoute une portion de la terre de qualité inférieure, de manière à compléter cette part; il ne reste plus qu'à partager le surplus de la mauvaise terre, ce qui peut se faire alors sans avoir égard au prix. — Si la meilleure terre est en quantité notable, il arrivera ordinairement que cha-

cun des copartageants voudra en avoir sa part. Dans ce cas on partagera séparément la bonne et la mauvaise terre; et pour cela il ne sera pas nécessaire d'avoir égard au prix. La seule condition à remplir sera de faire en sorte que les limites tracées dans la bonne terre se raccordent le plus naturellement et le plus commodément possible avec celles qui seront tracées dans la mauvaise.

Il y a une opération dont l'arpenteur est fréquemment chargé, et qui se rattache au partage des terres: c'est la *rectification des limites*. Supposons que deux propriétés voisines soient séparées par une limite tortueuse $AmpqrsB$ (fig. 5); il peut

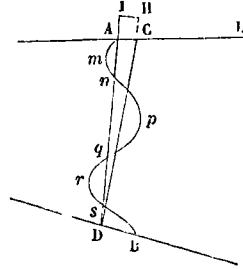


Fig. 5.

arriver, et le cas se présente souvent dans les héritages, que les deux propriétaires conviennent de remplacer cette limite par une ligne droite. Voici comment l'arpenteur doit opérer. Il trace d'abord une droite AD qui lui paraisse remplir à peu près la condition de ne pas agrandir l'une des propriétés aux dépens de l'autre. Il mesure ensuite avec soin, d'une part les portions $AmnA$, $qrsq$ qui sont ainsi enlevées à l'une des propriétés, et d'autre part les portions $npqn$, $sBDs$ qui sont enlevées à l'autre. S'il y avait compensation exacte, la ligne AD serait la nouvelle limite; mais cela n'aura pas lieu en général. Supposons qu'il y ait une différence a , et que la limite doive être reportée un peu plus à droite. L'arpenteur mesure la droite AD, et il divise a par $\frac{1}{2} AD$; en un point quelconque de AD ou

de son prolongement, il élève une perpendiculaire IH égale au quotient obtenu; par le point H il mène une parallèle à AD, laquelle rencontre en un point C la ligne AL qui sert de limite à la propriété qu'il s'agit de diminuer; la droite CD qui joint le point C ainsi obtenu avec le point D déjà déterminé précédemment est la nouvelle limite cherchée. En effet,

le triangle ACD a pour mesure $AD \times \frac{1}{2} IH$, c'est-à-dire a d'après la manière dont IH a été calculé. On ne pourrait pas employer ce procédé si les terres séparées par la limite tortueuse avaient une valeur très-différente; il faudrait évaluer le prix des portions $AmnA$, $npqn$, etc.; et s'il n'y avait pas compensation, faire varier AD par tâtonnements.

PARTIES MÉRIDIONALES, nom que l'on donne, dans l'emploi des *cartes réduites* (Voy. CARTES MARINES), aux minutes comptées sur le méridien: minutes dont la longueur, dans ces cartes, va en augmentant avec la latitude. Une minute du méridien est sensiblement égale à une minute de l'équateur, divisée par le cosinus de la latitude à laquelle on la mesure. Nous disons *sensiblement*

parce que cette relation n'a réellement lieu qu'entre deux portions infiniment petites du degré. On a en effet, en appelant l la latitude et φ la distance du parallèle correspondant à l'équateur sur la carte réduite, la relation (Voy. LOXODROMIE) :

$$\varphi = \int_0^l \frac{dl}{\cos l}, \quad \text{d'où} \quad d\varphi = \frac{dl}{\cos l},$$

ce qui est la relation annoncée. Elle a lieu approximativement entre une minute du méridien et une minute de l'équateur.

PAS, nom que prend le seuil d'une porte quand il s'élève au-dessus du sol (Voy. SEUIL, PORTE).

PAS D'UNE HÉLICE, distance entre deux points de l'hélice situés sur une même parallèle à l'axe, mais sur deux spires consécutives (Voy. HÉLICE).

PAS D'UN ENGRENAGE, distance comptée sur la circonférence primitive entre les milieux de deux dents consécutives (Voy. ENGRENAGES).

PAS D'UNE VIS, pas de l'hélice formée par le filet (Voy. VIS).

PASSAGE AU MÉRIDIEN (HEURE DU), heure qui correspond à l'instant précis où le centre d'un astre traverse le plan du méridien d'un lieu déterminé. Pour pouvoir calculer cette heure, il faut connaître la longitude du lieu, et avoir à sa disposition une table des ascensions droites de l'astre dont il s'agit, et une table des ascensions droites du soleil.

I. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une étoile. Si l'ascension droite du soleil pouvait être considérée comme constante dans l'intervalle d'un jour, il suffirait pour obtenir l'heure demandée de prendre la différence entre l'ascension droite de l'étoile et celle du soleil, et de la convertir en temps. En effet, l'ascension droite de l'étoile, exprimée en temps, est le temps qui s'écoule entre le passage de l'étoile à un méridien quelconque, et le passage du point vernal au même méridien; de même l'ascension droite du soleil supposée constante exprimerait le temps qui s'écoule entre le passage du soleil au méridien et celui du point vernal; la différence de ces deux temps serait donc le temps écoulé entre le passage de l'étoile et celui du soleil, c'est-à-dire le nombre d'heures, minutes et secondes qui séparent le passage de l'étoile du midi vrai; ce serait donc l'heure cherchée si l'étoile passe au méridien après le soleil; dans le cas contraire on aurait l'heure cherchée en temps astronomique en retranchant la différence d'ascensions droites de 24 heures; et il suffirait de retrancher 12 heures pour l'obtenir en temps civil. — Mais l'ascension droite du soleil étant variable, le calcul précédent ne donne que l'heure approchée du passage; et pour avoir une valeur plus exacte, il faut opérer de la manière suivante. A l'heure approchée, obtenue en faisant la différence des ascensions droites de l'étoile et du soleil, on ajoute la longitude du lieu donné si elle est occidentale, ou on la retranche si elle est orientale, et l'on a l'heure approchée du passage en temps vrai de Paris; en ajoutant l'ÉQUATION DU TEMPS (Voy. ce mot), on obtient l'heure en temps moyen. On calcule l'ascension droite du soleil pour cette heure en se servant de la table des ascensions droites insérée dans la *Connaissance des temps*, et en faisant une interpolation. Faisant de nouveau la différence entre l'ascension droite de l'étoile et celle qu'on vient de

calculer pour le soleil, on obtient une valeur plus approchée de l'heure du passage.

Supposons, par exemple, qu'on demande l'heure du passage de Sirius au méridien de Cayenne, le 17 janvier 1862. On trouvera dans la *Connaissance des temps* que l'ascension droite de Sirius est $6^{\text{h}} 39^{\text{m}} 6^{\text{s}}, 52$; et que celle du soleil à midi, le 17 janvier, à Paris, est $19^{\text{h}} 56^{\text{m}} 58^{\text{s}}, 71$. Faisant d'abord la différence de ces ascensions droites, en ajoutant 24 h. à la première, on obtient $10^{\text{h}} 42^{\text{m}} 7^{\text{s}}, 81$ pour l'heure approchée du passage. On trouvera, dans le même recueil, que la longitude de Cayenne, exprimée en temps, est $3^{\text{h}} 38^{\text{m}} 35^{\text{s}}$; comme elle est occidentale, on l'ajoutera à l'heure trouvée ci-dessus, ce qui donnera $14^{\text{h}} 20^{\text{m}} 42^{\text{s}}, 81$ pour l'heure de Paris, temps vrai. Pour le convertir en temps moyen, on prendra dans la table du soleil l'équation du temps pour le 17 janvier; elle est de $0^{\text{h}} 10^{\text{m}} 24^{\text{s}}, 36$; et la différence pour un jour est de $19^{\text{s}}, 24$; on aura donc la différence pour $14^{\text{h}} 20^{\text{m}} 42^{\text{s}}, 81$ ou $51642^{\text{s}}, 81$ en posant la proportion

$86400^{\text{s}} : 19^{\text{s}}, 24 = 51642^{\text{s}}, 81 : x$, d'où $x = 11^{\text{s}}, 5$. Ajoutant cette valeur à l'équation du temps pour midi, on aura $0^{\text{h}} 10^{\text{m}} 35^{\text{s}}, 86$ pour l'équation du temps relative à l'heure considérée. Ajoutant alors l'équation du temps ainsi corrigée à l'heure exprimée en temps vrai, soit $14^{\text{h}} 20^{\text{m}} 42^{\text{s}}, 81$, on obtiendra pour la même heure exprimée en temps moyen $14^{\text{h}} 31^{\text{m}} 18^{\text{s}}, 67$. On prendra ensuite, dans la table du soleil, la différence entre l'ascension droite du 17 et celle du 18; cette différence est de $4^{\text{m}} 15^{\text{s}}, 8$ ou $255^{\text{s}}, 8$ pour un jour; la différence pour $14^{\text{h}} 31^{\text{m}} 18^{\text{s}}, 67$ ou $52278^{\text{s}}, 67$ s'obtiendra par la proportion $86400^{\text{s}} : 255^{\text{s}}, 8 = 52278^{\text{s}}, 67 : x$, d'où $x = 2^{\text{m}} 35^{\text{s}}, 78$. Par conséquent l'ascension droite corrigée est $19^{\text{h}} 49^{\text{m}} 9^{\text{s}}, 27$. Faisant de nouveau la différence entre l'ascension droite de Sirius, augmentée de 24^{h} , et celle du soleil que l'on vient d'obtenir, on trouvera $10^{\text{h}} 49^{\text{m}} 57^{\text{s}}, 25$ pour l'heure plus approchée du passage. Cette seconde approximation est toujours suffisante.

II. Le calcul est un peu plus compliqué lorsqu'il s'agit d'un astre animé d'un mouvement en ascension droite, parce qu'il faut, après avoir obtenu l'heure approchée du passage en faisant la différence des ascensions droites, se servir de cette heure approchée pour obtenir l'ascension droite de l'astre et celle du soleil à l'heure du passage. Supposons, par exemple, qu'on demande l'heure du passage de la lune au méridien de Saint-Petersbourg, le 9 septembre 1862. On trouvera d'abord pour l'ascension droite de la lune, le 9, $23^{\text{h}} 55^{\text{m}} 25^{\text{s}}, 23$; et pour celle du soleil $11^{\text{h}} 10^{\text{m}} 21^{\text{s}}, 44$; la différence, ou $12^{\text{h}} 45^{\text{m}} 3^{\text{s}}, 79$, sera une première valeur approchée de l'heure que l'on cherche. Retranchant la longitude de Saint-Petersbourg, ou $1^{\text{h}} 55^{\text{m}} 53$ puisqu'elle est orientale, le reste, $10^{\text{h}} 53^{\text{m}} 10^{\text{s}}, 79$, sera l'heure approchée du passage exprimée en temps vrai de Paris. L'équation du temps pour le 9 est $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 16^{\text{s}}, 52$; et la différence pour un jour est $-20^{\text{s}}, 69$; on aura la différence pour $10^{\text{h}} 53^{\text{m}} 10^{\text{s}}, 79$ ou $39190^{\text{s}}, 79$ en posant la proportion : $86400 : 20, 69 = 39190, 79 : x$, d'où $x = 9^{\text{s}}, 38$. Retranchant de l'équation du temps ci-dessus écrite, on trouvera $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 7^{\text{s}}, 14$ pour l'équation du temps relative à l'heure approchée du passage. L'heure du passage, exprimée en temps moyen de Paris, sera donc $10^{\text{h}} 53^{\text{m}} 10^{\text{s}}, 79 + 11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 7^{\text{s}}, 14 = 12^{\text{h}}$ ou $10^{\text{h}} 50^{\text{m}} 17^{\text{s}}, 93$

(Voy. EQUATION DU TEMPS). On fera ensuite comme ci-dessus la correction de l'ascension droite du soleil ; la différence pour un jour étant 215', 85, la différence pour 10^h 50^m 17', 93 s'obtiendra par la proportion

86400 : 215', 85 = 39017', 93 : x, d'où x = 1^m 37', 47. L'ascension droite corrigée sera donc 11^h 11^m 58', 91.

Il faudra maintenant corriger de même l'ascension droite de la lune. Or, on trouve, dans la *Connaissance des temps*, que la valeur de cette ascension droite pour 10 heures, le 9, est 0^h 15^m 39', 45 ; et que la différence pour une heure est 121', 30. On aura la différence pour 50^m 17', 93 ou 3017', 93 en posant 3600 : 121', 30 = 3017', 93 : x, d'où x = 1^m 41', 68. L'ascension droite corrigée est donc 0^h 17^m 21', 09.

Faisant enfin la différence des ascensions droites corrigées de la lune et du soleil, on trouvera 13^h 5^m 22', 16 pour la seconde valeur approchée de l'heure du passage.

Mais le mouvement de la lune en ascension droite étant assez rapide, cette seconde approximation sera en général insuffisante. Il faudra partir de la valeur qu'on vient de trouver, et recommencer les calculs : ce qui donnera pour la troisième valeur approchée 13^h 6^m 0', 22. Partant de cette valeur, et recommençant encore les calculs, on trouvera pour quatrième valeur approchée 13^h 6^m 1', 41. La cinquième serait 13^h 6^m 1', 45. Ce n'est donc qu'à la cinquième approximation que l'erreur se trouve réduite à une fraction de seconde.

III. En mer, on ne cherche ordinairement l'heure du passage d'un astre au méridien que pour se préparer à une observation de latitude ; et, dans ce cas, la première ou la seconde approximation suffisent, parce que l'astre étant voisin de son point culminant, sa hauteur ne varie pas d'une manière appréciable dans le court intervalle de temps qui répond à la différence entre l'heure exacte du passage et l'heure approchée. Mais si on voulait déterminer l'heure du passage d'un astre pour vérifier la marche d'un chronomètre, il faudrait que l'approximation fût poussée aussi loin que possible.

PASSAGE D'UNE PLANÈTE INFÉRIEURE SUR LE DISQUE DU SOLEIL, phénomène analogue à une éclipse de soleil, et qui peut être calculé par des méthodes semblables. Pour qu'il se produise, il faut que la planète, au moment de sa conjonction inférieure, se trouve très-près de l'un de ses nœuds. Les passages de Mercure sur le disque du soleil sont beaucoup plus fréquents que ceux de Vénus ; mais ces derniers ont une importance bien plus grande parce qu'ils servent à déterminer avec précision la parallaxe du soleil (Voy. PARALLAXE). Le dernier passage de Vénus a eu lieu en 1769 ; les deux plus prochains passages auront lieu en 1874 et en 1882. Les deux derniers passages de Mercure ont eu lieu en 1848 et en 1861 (12 nov.) ; les plus prochains auront lieu en 1868 et en 1878.

Dans les passages d'une planète inférieure sur le disque du soleil, la planète traverse le disque d'orient en occident, en vertu du mouvement propre du soleil, et en vertu de celui de la planète qui est alors de sens contraire (Voy. PLANÈTES). Le passage de Mercure peut durer plus de 2 heures et demie, et celui de Vénus plus de 5 heures ; mais la durée de ces phénomènes est généralement beaucoup moindre.

PATUILLET, appareil employé dans la métal-

lurgie pour débarrasser les minerais de leurs parties terreuses. Il se compose d'un arbre vertical, armé de bras en fer qui tournent dans une bêche renfermant le minerai, et où l'eau afflue constamment ; elle entraîne les terres ; et le minerai lavé reste au fond de la bêche.

PENDENTIFS, portions triangulaires d'une voûte sphérique dont certaines parties latérales ont été enlevées par des plans verticaux. Soit ABCD (fig. 1)

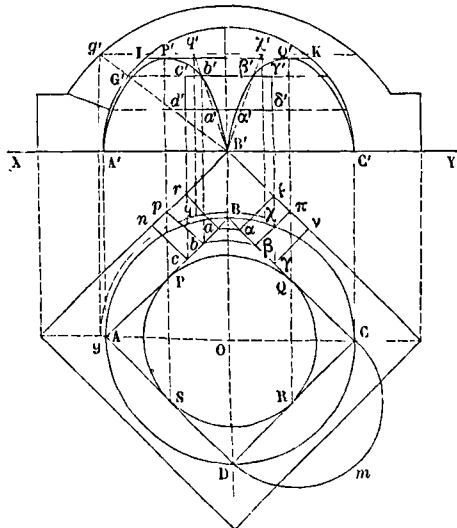


Fig. 1.

le cercle de naissance d'une voûte sphérique, dont nous prendrons le plan pour plan horizontal de projection. Concevons qu'après avoir inscrit dans ce cercle un carré ABCD, on mène suivant les côtés de ce carré des plans verticaux ; chacun d'eux coupera la sphère suivant un petit cercle ayant pour diamètre le côté du carré ; l'un de ces petits cercles est rabattu en CmD.

Les extrémités supérieures des diamètres verticaux de ces quatre petits cercles seront dans un même plan horizontal qui coupera la sphère suivant un cinquième petit cercle égal aux quatre précédents, et qui aura pour projection horizontale le cercle inscrit au carré. Ce qui reste de la voûte sphérique se composera ainsi de cinq parties ; la première est la calotte sphérique ayant pour base le petit cercle projeté en PQRS ; les 4 autres sont les portions triangulaires qui se projettent horizontalement suivant les figures SAP, PBQ, QCR, RDS ; l'une d'elles est figurée en projection verticale, sur un plan parallèle à la diagonale AC, par la figure P'B'Q'. Ce sont ces parties triangulaires qui portent le nom de *pendentifs* ; et la voûte réduite à la calotte sphérique IHK et aux quatre pendentifs prend elle-même le nom de *voûte en pendentifs*. Mais il y a deux cas à considérer. Les demi-cercles projetés en A'P'B', B'Q'C', etc., peuvent être fermés par des murs, qui portent alors le nom de *fermerets*, et la voûte est dite *en pendentifs avec fermerets*. Ces mêmes demi-cercles peuvent rester ouverts et servir de section droite à autant de borceaux horizontaux ou lunettes ; on dit alors que la voûte est *en pen-*

dentifs avec lunettes. Dans l'un et l'autre cas la construction de la partie de la voûte qui correspond à la calotte IHK ne présente aucune particularité, et rentre dans la construction ordinaire des VOÛTES SPHÉRIQUES. (Voy. ce mot.) Il ne peut y avoir de difficulté que pour les pendentifs; nous examinerons successivement le cas où la voûte est en pendentifs avec fermerets et celui où elle est en pendentifs avec lunettes; et nous supposons d'abord la voûte appareillée par assises horizontales.

1. Si l'on considère une pierre appartenant à la fois à l'un des pendentifs et aux deux fermerets contigus, on reconnaît que sa douelle se compose d'une partie sphérique et de deux plans verticaux, et que chacun de ses joints est formé du joint conique de la voûte sphérique et de deux joints plans horizontaux appartenant aux fermerets. Ces deux espèces de joints ne se raccordant pas d'eux-mêmes, on les coupe par un joint auxiliaire, déterminé ordinairement par la dernière génératrice du joint conique et par une perpendiculaire à la face du fermeret. — La figure 2 représente une pierre de ce genre; $ab\beta\alpha$

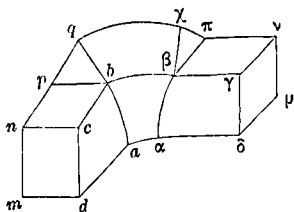


Fig. 2.

est la douelle sphérique; $abcd$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ sont les faces appartenant aux fermerets; $bq\chi\beta$ est le joint conique; $bcnp$ et $\beta\gamma\pi\tau$ sont les joints horizontaux; bpq et $\beta\pi\chi$ sont les joints auxiliaires. On voit que le joint bpq , par exemple, est déterminé par la génératrice bq du joint conique correspondante à l'extrémité b de l'arc bb' , et par la droite bp perpendiculaire à la face $abcd$ du fermeret; de même pour $\beta\pi\chi$. — Les éléments nécessaires pour la taille d'un pareil vousoir se tirent aisément de l'épure (fig. 1). Soit $\delta'a'd'c'\gamma'$ la projection verticale de la surface interne du vousoir, comprenant la portion sphérique $\alpha'a'b'\beta'$, et les deux portions planes $a'b'c'd'$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Les projections horizontales correspondantes à $\alpha'a'$ et à $b'\beta'$ seront les arcs $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ décrits du point O comme centre; et les projections horizontales correspondantes aux droites $\alpha'd'$, $\alpha'\delta'$, $b'c'$, $\beta'\gamma'$ seront les droites ac , $\alpha\gamma$, bc , $\beta\gamma$. Le vousoir sera limité en outre par les plans verticaux cn , γv , par les joints coniques passant par les arcs $\alpha\alpha$, $\alpha'a'$ et $\beta\beta$, $b'\beta'$, par les joints plans horizontaux des fermerets, par les deux joints auxiliaires dont nous avons parlé, et par l'extrados de la voûte. Le joint conique qui passe, par exemple, par l'arc $\beta\beta$, $b'\beta'$, rencontre l'extrados suivant un arc de cercle, car l'intrados et l'extrados sont des surfaces de révolution autour du même axe vertical $O, B'H$; la projection verticale de ce cercle sera une parallèle à XY , que l'on se procurera en remarquant que si l'on faisait tourner la génératrice ayant pour projection verticale $B'b'$ autour de l'axe vertical $O, B'H$, elle viendrait prendre la position

$B'G'$; le point g' où, dans cette position, la génératrice considérée perce l'extrados, appartient donc à la projection verticale du cercle dont il s'agit, et en menant par le point g' une parallèle à XY , on aura en $q'\chi'$ la projection verticale de l'intersection du joint conique avec l'extrados; on obtiendra sa projection horizontale en décrivant du point O comme centre l'arc $q\chi$ passant par le point g . Par suite, on aura en bpq , $b'p'q'$ les projections du joint auxiliaire. On opérerait de même pour avoir celui qui correspond au second fermeret. Le joint conique passant par l'arc $\alpha\alpha$, $\alpha'a'$ donnerait lieu aux mêmes opérations.

Cela posé, pour appliquer le trait sur la pierre on procédera de la manière suivante. On préparera un prisme droit ayant pour base la figure $acnB'\gamma\gamma\alpha$ prise sur la projection horizontale, et pour hauteur la distance des droites $\alpha'a'$ et $q'\chi'$. Sur la surface cylindrique correspondante à l'arc $b\beta$, et à une hauteur au-dessus de la base égale à la distance de $b'\beta'$ à la ligne de terre, on tracera à la règle ployante l'arc $b\beta$ (fig. 2), et les horizontales bc et $\beta\gamma$, puis cn et γv . On pourra dès lors tailler les faces horizontales $bcnp$ et $\beta\gamma\pi\tau$. Sur la face supérieure du prisme on pourra tracer $q\chi$ d'après l'arc de même nom de la figure 1; en divisant donc en un même nombre de parties égales les arcs $b\beta$ et $q\chi$, on pourra, à l'aide d'une règle posée sur les points de division correspondants, tailler ce joint conique $bq\chi\beta$; et par suite les joints auxiliaires bpq et $\beta\pi\chi$. On fouillera ensuite la pierre jusqu'à ce qu'une CERCE (Voy. ce mot) taillée d'après l'arc $\alpha\alpha$ de la figure 1 puisse s'appliquer sur la base inférieure en se raccordant avec les arêtes rectilignes da et $\delta\alpha$. Les arcs $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ serviront de directrices pour tailler la douelle sphérique à l'aide d'une cerce taillée sur la section méridienne de l'intrados. Le joint conique inférieur pourra se tailler à l'aide d'un BEUVEAU (Voy. ce mot) préparé de manière qu'une de ses branches coïncide avec la méridienne et l'autre avec un rayon; en promenant la branche courbe sur la douelle sphérique, de manière que le plan de l'instrument reste normal à l'arc $\alpha\alpha$, la branche droite décrira le joint demandé; d'où l'on déduira comme plus haut les joints auxiliaires inférieurs. Quant à l'extrados, on se contente d'en dégrossir la surface.

II. Considérons maintenant une voûte en pendentifs avec lunettes. Nous prendrons toujours le plan de naissance pour plan horizontal de projection; mais nous choisirons le plan vertical perpendiculaire aux génératrices de l'un des berceaux, ou, ce qui revient au même, parallèle à l'un des côtés du carré.

Soit O (fig. 3) le centre de la sphère; AB le côté du carré parallèle à la ligne de terre XY ; AD un côté perpendiculaire. Soit 1. 2. 3. 4. 5 la projection verticale du grand cercle suivant lequel la sphère est coupée par un plan vertical parallèle à XY et passant par le point O . Soient Aa et Aa' les pieds-droits des deux berceaux; $abcd\dots$ et $a'b'c'd'\dots$ leurs sections droites; la seconde est supposée rabattue sur le plan horizontal. Enfin soit gh la section méridienne de l'extrados de la voûte sphérique parallèle au plan vertical de projection, et $g'h'$ la section droite de l'extrados du second berceau, rabattue sur le plan horizontal. On commencera

à la ligne de terre à une distance de cette ligne égale à la distance du point g' à la droite AD. Cette génératrice rencontre l'extrados sphérique en un point dont il faut obtenir les projections. Pour cela, on mènera une parallèle à la ligne de terre à une distance de cette ligne égale au rayon de l'extrados du berceau; cette droite $K'H'$ sera la projection verticale de la génératrice la plus élevée de l'extrados du berceau, qui a pour projection horizontale la droite KH passant par le point O; et le point H, H' où elle rencontre la section méridienne de la sphère parallèle au plan vertical appartiendra à l'intersection des deux voûtes. Or, cette intersection est un cercle vertical dont le plan est perpendiculaire à la ligne de terre; les traces de ce plan se confondent donc en une seule droite HH'; et le point x, x' où les projections de la génératrice qui passe en g' rencontrent la droite HH' sera l'intersection de cette génératrice avec l'extrados sphérique. Le joint plan du berceau coupe aussi cet extrados, suivant un arc de grand cercle, dont les extrémités sont projetées en N, N' et en x, x' ; cet arc aura pour projections des arcs d'ellipses. Pour en obtenir un point intermédiaire, on peut faire tourner le joint $g'd'KO$ autour de la droite OK pour le rabattre sur le plan horizontal; les points N, N' et x, x' se rabatront sur le cercle décrit du point O comme centre avec le rayon de la sphère d'extrados; on prendra un point intermédiaire de l'arc ainsi rabattu, et il n'y aura qu'à relever ce point, ce qui n'offre aucune difficulté. On pourrait construire de même les intersections du joint du premier berceau avec l'extrados de ce berceau et avec celui de la voûte sphérique; mais il sera plus simple de se servir de la symétrie par rapport à la droite AO; on obtiendra ainsi en $exNM\zeta$ la projection horizontale du contour formé par l'intersection des joints supérieurs avec les extrados. Par des opérations semblables on obtiendra en $wrQP\rho\omega$ le contour analogue pour les joints inférieurs; on pourra dès lors construire les panneaux de douelles et les panneaux de joints des berceaux (Voy. BERCEAU); et l'on aura tous les éléments nécessaires pour procéder à la taille du voussoir.

Pour cela on préparera un prisme droit ayant pour base la projection horizontale de ce voussoir $wrQP\rho\omega\delta mn\delta't$; et on lui donnera pour hauteur la distance verticale de la droite $M'N'$ au-dessus du point C. Sur les faces correspondantes à wt et à ωs on appliquera le panneau de tête $c'd'g'i$; et, à l'aide d'une équerre on taillera les douelles et les plans de joints des berceaux, en procédant avec précaution jusqu'à ce qu'on puisse y appliquer les panneaux précédemment construits; on pourra ainsi tracer sur la pierre les courbes dont les projections sont

$\delta'n, \delta'n' - \gamma q, \gamma'q' - xN, x'N' - rQ, r'Q'$. Sur la base supérieure du prisme on tracera l'arc MN; et sur la surface cylindrique répondant à mn , on tracera à une hauteur égale à celle de $m'n'$ au-dessus de la ligne de terre, un arc égal à mn ; on se servira pour cela d'une règle ployante. Les arcs MN et mn , divisés en un même nombre de parties égales, serviront de directrices pour tailler à la règle le joint conique supérieur. On opérera d'une manière analogue pour tailler le joint conique infé-

rieur à l'aide des arcs PQ et pq . Il restera à tailler la douelle sphérique, ce qui se fera à l'aide d'une cerce préparée d'après la section méridienne de la sphère, et que l'on posera sur des points de repère obtenus en menant des rayons par le point O. — Tous les voussoirs appartenant aux pendentifs se tailleront de la même manière. La figure 4 représente l'un de ces voussoirs.



Fig. 4.

Les berceaux qui pénètrent ainsi dans une voûte sphérique pour former les pendentifs sont souvent munis à leur rencontre avec la surface de la sphère d'espèces de nervures appelées arcs doubleaux, sortes d'anneaux à section rectangulaire, qui renforcent le berceau en ce point. La présence de ces arcs doubleaux ne modifie en rien la méthode exposée ci-dessus; il n'en résulte qu'une espèce de resaut dans les douelles cylindriques.

III. Afin d'éviter les parties aiguës au bas des pendentifs, on emploie souvent une autre disposition. Soit toujours ABCD (fig. 5) le carré inscrit dans le

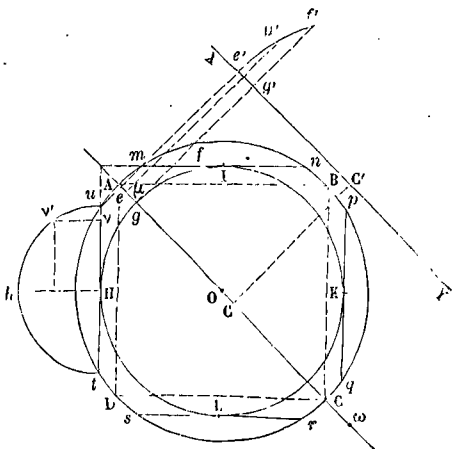


Fig. 5.

cercle de naissance de la voûte sphérique; au lieu de prendre pour traces des plans verticaux qui doivent couper la sphère les côtés de ce carré, on prend des cordes mn, pq, rs, tu , parallèles à ces côtés, mais un peu plus distantes du centre; l'intersection de l'un de ces plans verticaux avec la sphère est rabattue en thu sur le plan de naissance. Il en résulte que la sphère ne s'appuie plus seulement sur ce plan par les 4 sommets du carré, mais bien par les 4 arcs mAu, nBp, qCr, sDt , qui correspondent à autant de pieds-droits cylindriques. Les pendentifs, au lieu de se projeter horizontalement suivant des triangles, se projettent ici suivant des trapèzes curvilignes, tels que $muHI$. Et comme on donne en général le nom de trumeaux aux

parties pleines comprises entre deux ouvertures, ces pendentifs prennent le nom de *pendentifs avec trumeaux*. L'appareil et la taille des pierres sont d'ailleurs les mêmes que ci-dessus. Le cercle IKLH tangent aux 4 cordes mn , pq , etc., est toujours la projection du parallèle auquel les pendentifs se terminent.

IV. Quelquefois on remplace les pieds-droits cylindriques par des murs plans, c'est-à-dire qu'on remplace les arcs mAn , nBp , etc., par leur cordes. Si ces cordes diffèrent notablement des arcs, on ne peut plus conserver aux pendentifs la forme sphérique, parce qu'une sphère ne saurait se raccorder avec les plans verticaux des pieds-droits. On adopte une surface qui s'engendre de la manière suivante. Concevons un plan vertical suivant la diagonale AC; il coupe la corde mn en un point e , et le parallèle dont IKLH est la projection en un point que nous appellerons F et qui se projette horizontalement au point g . Projetons les points e et F sur un plan vertical XY parallèle à AC; le point e se projetera en e' , et le point F en un point f' , situé au-dessus de XY à une distance gf' qui est précisément égale à gf , car si l'on rabatrait sur le plan de naissance le grand cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan vertical AC, il viendrait se confondre avec le cercle de naissance, et le point F viendrait se rabattre en f . Cela posé, faisons passer par les points e' et f' un arc de cercle dont le centre soit sur XY; et soit c' ce centre; puis regardons cet arc $e'f'$ comme la projection d'un arc égal eF tracé dans le plan vertical AC. L'arc eF et le demi-cercle uht serviront de directrices à la surface que nous voulons obtenir. Nous prendrons pour génératrice un cercle horizontal variable, dont le centre soit dans le plan vertical AC, et qui soit assujéti à rencontrer les deux directrices. Pour obtenir le cercle générateur dans une position déterminée quelconque, prenons sur les arcs eF , et uh deux points μ' et ν' situés à la même hauteur au-dessus du plan de naissance; ces points se projeteront horizontalement en μ et ν ; par ces points faisons passer un cercle dont le centre soit sur AC; soit ω le centre de ce cercle; la circonférence décrite du point ω comme centre avec $\omega\mu$ pour rayon sera la projection horizontale du cercle générateur; sa hauteur au-dessus du plan de naissance sera $\omega\nu'$. On voit, d'après ce mode de génération même, que lorsque le cercle générateur est à une distance du plan de naissance égale à gf' , il se confond avec le parallèle de la sphère projetée en IKLH; et lorsqu'il est dans le plan de naissance même, il se confond avec la droite mu . Les pendentifs prennent, dans le cas qui nous occupe, le nom de *pendentifs en voussure*.

Pour tailler la surface ainsi engendrée il faut se servir de plusieurs cerces préparées d'après la projection horizontale du cercle générateur dans diverses positions; il faut que chaque cerce, présentée dans un plan horizontal, à la hauteur correspondante, coïncide avec la surface. Les arêtes de douelle sont des cercles horizontaux; les joints montants sont des plans méridiens; quant aux joints qui séparent les assises, on les fait coniques, comme s'il s'agissait d'une sphère; mais on leur donne pour sommet commun le point c centre de l'arc eF . L'épure et la taille des voussoirs s'exécu-

tent du reste d'après les mêmes principes que si la voûte était sphérique.

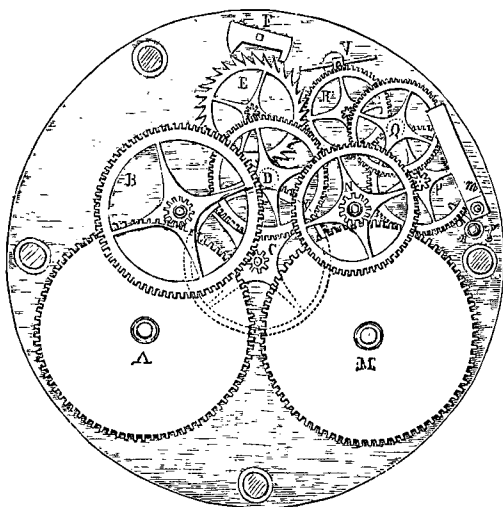
V. C'est particulièrement aux voûtes en pendentifs que s'applique l'appareil *par enfourchement* sur lequel on trouvera quelques mots à l'art. VOÛTES SPHÉRIQUES. Ce mode d'appareil, à compartiments bizarres, n'a point le caractère de simplicité et n'offre pas les conditions de solidité qu'on recherche dans les constructions de quelque importance.

VI. Les voûtes en pendentifs sont fréquemment employées, dans les grands monuments, préféablement aux voûtes d'ARÊTES (Voy. ce mot), parce qu'elles ont un caractère plus grandiose et offrent à la fois des lignes plus adoucies vers les naissances et des angles moins aigus au sommet. La nef de l'église de la Madeleine, à Paris, a pour motif principal trois voûtes en pendentifs, avec fermettes latéraux. Le Panthéon offre également un bel exemple de ce genre de constructions. Les voûtes en pendentifs offrent l'avantage de pouvoir rester ouvertes à la partie supérieure pour éclairer l'intérieur du monument. Quelquefois, pour donner plus de hauteur à l'édifice, on recouvre le parallèle situé au sommet des pendentifs par une demi-sphère. Quelquefois aussi, on élève à partir de ce parallèle une tour ronde, recouverte elle-même par une voûte sphérique; c'est à cette dernière disposition que l'on donne plus particulièrement le nom de *dôme*.

Enfin les voûtes sphériques ne sont pas les seules qui puissent donner naissance aux pendentifs, on trouve cette disposition dans des voûtes ELLIPTIQUES (Voy. ce mot); l'entrée du Panthéon en offre un exemple remarquable. La condition à remplir est que les ellipses, intersection de la voûte elliptique par les plans verticaux, élevés suivant les côtés d'un rectangle inscrit à l'ellipse de naissance, aient la même montée, afin qu'elles se terminent à une même ellipse horizontale. Dans l'exemple du Panthéon deux de ces ellipses sont des cercles égaux à la section droite du berceau principal formant la nef; il en résulte que l'intrados de la voûte elliptique est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe horizontal de ce berceau. La forme des voussoirs appartenant aux pendentifs est évidemment subordonnée à l'appareil de la voûte elliptique; et la taille de ces voussoirs se complique nécessairement en raison de cette circonstance (Voy. VOÛTES ELLIPTIQUES). Il y a de plus une certaine attention à avoir pour que les arêtes de douelle des deux berceaux, dont la section droite est alors différente, se trouvent à la même hauteur, sans qu'il en résulte trop d'inégalité dans la largeur des douelles. Ce n'est que patâtonnement que l'on peut satisfaire à cette condition. On trouvera dans le *Traité de la coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 290 et suiv., de nombreux détails relatifs aux pendentifs elliptiques qui n'auraient pu entrer dans le cadre de cet article. — Ce genre de construction est d'ailleurs un dispositif exceptionnel qui doit plutôt être évité que recherché.

PENDULE, horloge d'appartement, qui tient à la fois de l'horloge et de la montre : de l'horloge en ce que le mouvement est régularisé par les oscillations d'un pendule (ordinairement suspendu

par un fil de soie), de la montre en ce que le moteur est un ressort enroulé dans un barillet. La longueur du pendule qui sert de régulateur est ordinairement de 20 à 25 centimètres; souvent elle est réglée de manière à ce que le pendule batte la demi-seconde. L'échappement le plus fréquemment employé est l'échappement à ancre (Voy. HORLOGE); mais on y rencontre aussi l'échappement improprement appelé à demi-repos, sorte d'échappement à ancre dans lequel le repos s'effectue sur l'un des bras de l'ancre et la levée sur l'autre bras. Le rouage principal et le rouage de sonnerie sont les mêmes que dans les horloges, sauf la place occupée par les mobiles, la disposition des détentes et la forme des marteaux. La figure ci-contre montre le plan ou calibre d'une pendule moderne. A est le barillet de mouvement,



B la roue de minutes, C la grande moyenne, D la roue de secondes, E la roue d'échappement; F représente l'ancre à demi-repos. M est le barillet de sonnerie, N la roue de compte, P la roue de chevilles, Q la roue d'étoteau, R la dernière roue dentée qui fait marcher le pignon du volant (Voy. pour la fonction de chacune de ces roues, les détails donnés au mot HORLOGE). Chacune des roues du mouvement engrène avec le pignon de la roue suivante; il en est de même pour le rouage de sonnerie. La roue de chaperon, montée sur l'axe de la roue N, n'est point représentée sur la figure; mais on voit en *m* le couteau qui arrête la sonnerie quand il tombe dans une des entailles de la roue de chaperon, ou qui laisse sonner les heures quand il s'appuie sur l'un des arcs qui joignent deux entailles consécutives.

Les pendules marchent ordinairement pendant 15 à 20 jours sans avoir besoin d'être remontées. Elles sonnent les heures et frappent en outre un coup à chaque demie. Le marteau a pour tête un disque métallique qui frappe par sa tranche sur un timbre placé derrière la cage contenant tout le mécanisme. Quelques pendules donnent les secondes, soit sur un cadran à part, comme les

chronomètres, soit sur le même cadran que les minutes et les heures. (Voy. CHRONOMÈTRE, HORLOGE, MONTRE.)

PENDULE À ÉQUATION, horloge d'appartement donnant à la fois le temps vrai et le temps moyen (Voy. HORLOGE À ÉQUATION, MONTRE À ÉQUATION).

PENDULE À QUANTIÈME, horloge d'appartement donnant, indépendamment de l'heure, le mois et le quantième du jour (Voy. HORLOGE À QUANTIÈME, MONTRE À QUANTIÈME).

PENDULE À RÉPÉTITION, horloge d'appartement pouvant répéter les heures à volonté. Le mécanisme des pendules à répétition est le même au fond que celui des montres à répétition; les mêmes pièces principales figurent dans les deux cadratures. Mais dans les pendules la pièce nommée *crémaillère* est effectivement un râteau qui engrène avec un pignon monté sur l'axe du barillet renfermant le ressort de répétition; il suffit de faire tourner ce râteau pour armer le ressort et faire répéter l'heure. Pour cela le râteau est muni d'un cordon que l'on peut tirer du dehors; d'où le nom de *pendule à tirage* ou simplement *tirage* donné en horlogerie aux pendules à répétition. Ces pendules fort recherchées à une certaine époque ne sont plus guère aujourd'hui qu'un objet de curiosité.

PENDULE BALISTIQUE, appareil qui sert à mesurer la vitesse des projectiles de l'artillerie. Le pendule balistique est dû à Robins, bien que la première indication de la méthode expérimentale appliquée au moyen de cet appareil paraisse avoir été donnée dès 1707 par Jacques Cassini. Cette méthode consiste essentiellement à faire pénétrer le projectile dans une masse beaucoup plus grande, librement suspendue à un axe horizontal, et à déterminer la vitesse cherchée par l'amplitude de l'oscillation imprimée à cette masse. Le pendule dont se servait Robins était un madrier en bois qui ne pesait que 22^l, et ne pouvait servir qu'à mesurer la vitesse des balles de fusil. On a employé successivement un massif de bois assemblé par des ferrures, et pesant depuis 400 jusqu'à 4000 kilogrammes, puis des masses de fonte, de plomb, d'argile desséchée; enfin des masses de sable tassé. — Voici le dispositif auquel on s'est arrêté d'après les indications de MM. Morin et Didion.

La masse soumise au choc du projectile se compose de sable tassé contenu dans un baril que l'on introduit au moment de l'expérience dans une *dme* tronconique AAA (fig. 1 et 2) en fonte, encadrée en fer forgé, où elle est retenue par une plaque mince en plomb. Ce sable et l'âme qui le contient forment ce qu'on appelle le *récepteur*. Le récepteur est soutenu par quatre tiges en fer TTTT, reliées par un système de traverses et d'entretoises qui donnent à l'appareil la rigidité convenable. Le tout est suspendu, à l'aide d'une suspension à couteaux, sur des piliers offrant une grande résistance, et peut tourner autour d'un axe horizontal OO. Un poids M, composé de disques en plomb que traverse un écrou fileté, sert à faire varier au besoin le centre de gravité du système, ainsi que son centre d'oscillation, et à rendre ho-

horizontal l'axe AH du récepteur. A la partie inférieure de l'appareil est disposée une petite tige horizontale *t* qui, lorsque le pendule oscille, parcourt un arc en cuivre UU, en poussant devant

elle dans la montée un curseur pouvant glisser sur ce même arc à frottement doux. Le poids total du pendule balistique destiné à mesurer la vitesse des projectiles de fort calibre est d'environ 6000^g; la

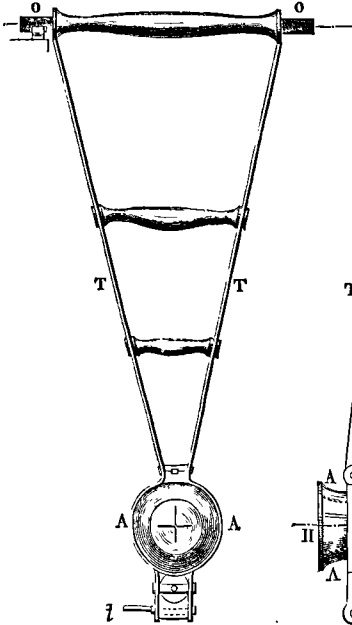


Fig. 2.

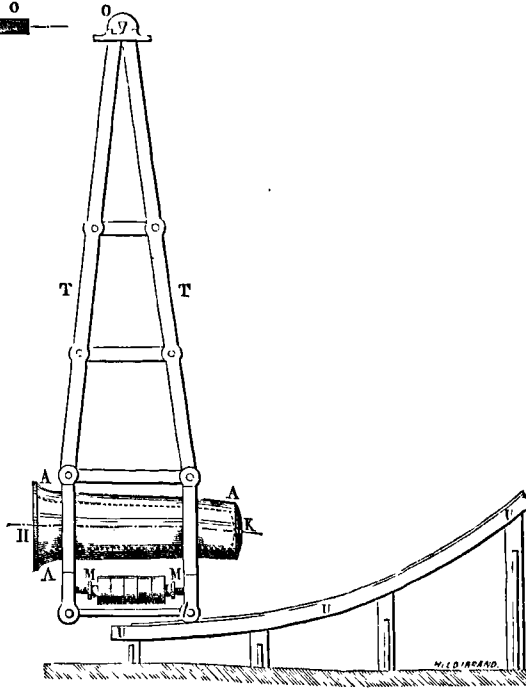


Fig. 1.

distance de l'axe du récepteur à l'axe de suspension est de 5^m. En face du récepteur est disposé un canon, suspendu de la même manière à un axe horizontal parallèle à l'axe OO; on lui donne le nom de *canon-pendule*. La distance entre les piles du canon-pendule et celles du récepteur est de 12^m; de telle sorte que la distance entre la tranche de la bouche à feu et la plaque de plomb qui ferme l'âme du récepteur est d'environ 10^m. L'axe de la bouche à feu est sensiblement dans le prolongement de celui du récepteur. Entre eux, et à 2^m du récepteur, est disposé un écran en bois de 1^m,20 de côté, percé d'un trou circulaire de 0^m,50 de diamètre; il sert à intercepter le passage des parties du chargement autres que le boulet, et à diminuer l'action sur le récepteur des gaz provenant de l'explosion de la poudre. On trace sur la plaque de plomb dont il a été parlé, deux diamètres perpendiculaires qui déterminent le *point d'impact* du projectile, c'est-à-dire le point où la plaque doit être rencontrée par la trajectoire du centre du boulet.

Tout étant disposé comme on vient de le dire, on met le feu à la pièce; le projectile pénètre dans la masse de sable; le pendule balistique est mis en mouvement; et, à la première oscillation la tige *t* pousse le curseur jusqu'en un certain point de l'arc métallique UU; ce curseur est muni d'un vernier qui permet de lire, à moins d'un dixième de

minute près, la quantité angulaire dont le pendule s'est déplacé. A l'aide de certaines données préalablement obtenues, et de l'arc dont il est question, on peut déterminer par le calcul la vitesse que l'on cherche. En effet :

Le projectile, en pénétrant dans le récepteur, y perd dans $\frac{1}{70}$ de seconde environ, s'il s'agit d'un boulet de 24, la plus grande partie de sa quantité de mouvement (*Voy. PÉNÉTRATION DES PROJECTILES*); cet effet est dû aux réactions du milieu dans lequel se fait la pénétration. Si l'on appelle *F* la résultante de ces réactions au bout du temps *t*, résultante que nous pouvons, à cause de la symétrie, supposer horizontale; si l'on désigne par *m* la masse du boulet, par *v* sa vitesse au moment où il atteint le récepteur, et par *u* celle qu'il conserve à la fin du choc, on aura en vertu du principe des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (*Voy. ce mot*)

$$mu - mv = - \int_0^{\theta} F dt, \quad [1]$$

θ désignant la durée du choc. D'un autre côté le pendule reçoit du projectile, pendant cette même durée, des actions précisément égales et contraires aux réactions qu'il exerce sur lui; la valeur absolue de leur résultante, au bout du temps *t*, est donc *F*; et si l'on désigne par ω la vitesse angu-

(aire du pendule au bout de ce même temps, on a, d'après la valeur connue de l'ACCELERATION ANGULAIRE (*Voy.* ce mot) dans un système animé d'un mouvement de rotation,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F\rho}{I}, \quad [2]$$

en désignant par ρ la distance du point d'impact à l'axe de suspension, et par I le MOMENT D'INERTIE (*Voy.* ce mot) du pendule par rapport à ce même axe.

Indépendamment de la force F , le pendule reçoit pendant le choc l'action de trois autres forces, la pesanteur et les réactions des appuis; mais la première étant dirigée suivant la verticale du centre de gravité rencontre l'axe de suspension, attendu que le pendule ne se déplace pendant la durée du choc que d'une quantité négligeable; quant aux deux autres, si l'on néglige le frottement, on peut les regarder comme normales à la surface arrondie des couteaux, et par conséquent elles rencontrent aussi l'axe; les moments de ces forces sont donc nuls ou tout à fait négligeables vis-à-vis du moment de la force F qui est considérable; cette dernière est donc la seule qui doive entrer dans la formule.

Intégrant de $t = 0$ à $t = \theta$, et appelant ω' la valeur de la variable ω à la fin du choc, on trouve

$$\omega' = \frac{\int_0^\theta F\rho dt}{I} = \frac{\rho}{I} \int_0^\theta F dt. \quad [3]$$

Éliminant l'intégrale entre les relations [1] et [3], on obtient

$$\omega' = \frac{\rho}{I}(mv - mu),$$

ou, en remarquant qu'on peut admettre la relation $u = \omega'\rho$,

$$I\omega' = mv\rho - m\omega'\rho^2, \\ \text{d'où} \quad v = \frac{\omega'(I + m\rho^2)}{m\rho}. \quad [4]$$

Cette relation donnerait la vitesse v , si ω' était connu. Or, soit α le nombre de degrés parcourus par le curseur sur l'arc métallique UU , ou l'amplitude de la demi-oscillation ascendante du pendule, il existe entre ω' et α une relation facile à établir. En effet, la durée du choc étant très-petite, le déplacement qu'éprouve le pendule pendant ce temps très-court peut être négligé. Ce pendule peut donc être considéré comme partant de sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire initiale ω' ; il s'écarte de cette position jusqu'à ce que le travail de la pesanteur ait détruit sa PUISSANCE VIVE (*Voy.* ce mot); on a donc, en appelant h la quantité dont son centre de gravité s'est élevé verticalement,

$$\frac{1}{2}I'\omega'^2 = P'h, \quad [5]$$

en désignant par I' le moment d'inertie du pendule, y compris le projectile qui s'y est logé, et P' le poids total du pendule et du boulet. Mais si L' désigne la distance du centre de gravité actuel du pendule à l'axe de suspension, la quantité dont il s'est élevé est $L'(1 - \cos \alpha)$

ou $2L' \sin^2 \frac{1}{2} \alpha;$

on a donc

$$\frac{1}{2}I'\omega'^2 = 2P'L' \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

d'où $\omega' = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{P'L'}{I'}}$.

Mais en appelant P le poids du pendule, p celui du boulet, et L la distance du centre de gravité primitif à l'axe de suspension, on a

$$P'L' = PL + p\rho$$

(le boulet pouvant être supposé placé au centre du récepteur),

$$I' = I + m\rho^2,$$

et par conséquent

$$\omega' = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{PL + p\rho}{I + m\rho^2}}. \quad [6]$$

Par suite, la valeur de v devient

$$v = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{PL + p\rho} \sqrt{I + m\rho^2}}{m\rho}. \quad [7]$$

On peut faire disparaître le moment d'inertie I de cette formule, en remarquant que si l désigne la longueur du pendule simple qui oscillerait comme le pendule balistique, on a (*Voy.* PENDULE COMPOSÉ)

$$l = \frac{I\rho}{PL}, \quad \text{d'où} \quad I = \frac{PLl}{\rho}.$$

Substituant à I cette valeur, multipliant les deux termes par g et remplaçant mg par p , on obtient enfin

$$v = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{g(PL + p\rho)(PLl + p\rho^2)}}{p\rho}; \quad [8]$$

c'est la formule généralement employée. Quand les données sont suffisamment exactes, elle donne la vitesse d'un boulet de 24 à quelques décimètres près.

Elle renferme trois données que l'on détermine avant l'expérience, p , PL et l . La distance ρ entre l'axe du récepteur et l'axe de suspension résulte de la construction même de l'appareil et peut être regardée comme connue; nous avons dit que dans le pendule balistique ordinairement employé, cette distance est de 5 mètres. Le produit PL pourrait s'obtenir en déterminant séparément P et L ; il suffirait pour cela de poser l'appareil sur les arêtes horizontales de deux couteaux et de déterminer la force verticale nécessaire pour soulever l'appareil en le faisant tourner autour de l'une des deux arêtes; deux expériences de ce genre, dans lesquelles on ferait varier la distance du point d'attache au point de rotation, donneraient le poids P et la distance du centre de gravité à l'arête considérée (*Voy.* CENTRE DE GRAVITÉ). M. Didion a fait adopter pour cette détermination un appareil spécial qu'il nomme BALANCE À MOMENTS (*Voy.* ce mot). Quant à l , on l'obtient en faisant osciller le pendule; on compte, par exemple, 300 oscillations, dont on détermine la durée totale, à un dixième de seconde près; en la divisant par 300 on a la durée d'une oscillation; on répète ordinairement 3 fois cette détermination et l'on prend la moyenne. — Connaissant la durée d'une oscillation, on en déduit la longueur l par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{d'où} \quad l = g \cdot \frac{t^2}{\pi^2}.$$

Il y a une condition importante à remplir dans l'emploi du pendule balistique, c'est que le choc ait lieu de manière que l'axe de suspension n'éprouve

aucune percussion ; on sait qu'il faut pour cela que la direction du choc passe par le point qui porte le nom de CENTRE DE PERCUSSION (*Voy.* ce mot). — Il y a une correction à faire pour tenir compte de la résistance de l'air, du frottement des couteaux, et de la résistance du curseur. Pour cela, on fait osciller le pendule, et l'on note la diminution d'amplitude au bout de 10, 20, 30 oscillations ; cette diminution est due aux deux premières causes. On recommence l'expérience en plaçant à chaque oscillation le curseur au zéro de la division ; et les nouvelles diminutions d'amplitude sont dues aux trois causes à la fois ; on en déduit par une simple soustraction la portion de la diminution qui doit être attribuée au curseur seul ; si l'on prend alors le quart des diminutions de la première série, pour avoir celles qui se rapportent à un quart d'oscillation, et qu'on y ajoute la diminution due au curseur, on aura la diminution définitive due aux trois causes dans le premier quart d'oscillation. c'est-à-dire dans la première oscillation ascendante ; cette correction devra être ajoutée à l'angle α donné par l'observation. Enfin la vitesse v donnée par la formule [8] n'est point la vitesse v_0 du projectile au sortir de l'âme de la pièce ; c'est la vitesse au bout d'un parcours de 10^m. Pour avoir la relation qui lie ces deux vitesses, on pourra recourir aux formules de Balistique, dans lesquelles on fera $x = 10^m$, $\alpha = 0$, et $\sigma = 1$ (*Voy.* BALISTIQUE, formule [23]). On a dans ce cas

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\varphi}}$$

mais on peut dans la fonction φ supposer v_0 remplacé par v qui en diffère peu ; en sorte qu'on peut écrire

$$v_0 = v\sqrt{\varphi}$$

Quand le pendule balistique doit être employé au tir à de grandes distances, le récepteur est ordinairement en bois, parce que l'incertitude du tir peut faire craindre que le boulet ne touche la paroi. Le pendule qui a servi aux expériences faites à Metz sur la résistance de l'air, a un récepteur de 2^m,35 de longueur, de 1^m,35 de diamètre intérieur et de 1^m,51 de diamètre extérieur ; il est doublé de tôle, et formé de douves cerclées en fer ; l'ouverture est fermée par un fond en planches. Il peut contenir de 3100^k à 3300^k de sable, que l'on introduit par deux ouvertures pratiquées à la partie supérieure et qui se ferment par des portes ferrées. Son poids total est d'environ 6000^k.

Pour le tir des balles de fusil on emploie un pendule balistique de dimensions beaucoup moindres. Le sable est remplacé par une masse de plomb de forme tronconique ; l'ouverture du récepteur est fermée par une planchette. L'arc de cercle sur lequel glisse le curseur est placé au-dessus du récepteur. Le canon de fusil est suspendu comme le canon-pendule ; la bouche est à 2^m du récepteur. La théorie est d'ailleurs la même, et l'on fait usage de la même formule.

Dans ce pendule, la masse de plomb pénétrée par la balle est remplacée à chaque coup par une masse exactement semblable, en sorte que les constantes qui entrent dans la formule n'éprouvent aucune variation. Il n'en saurait être de même pour le pendule destiné au tir des canons ; le poids du baril de sable change nécessairement, ce qui fait varier P , L et l . Il serait impraticable de dé-

terminer à chaque fois la longueur l par les oscillations du pendule. On se contente de supposer que le poids additionnel q est placé sur l'axe du récepteur ; et l'on augmente en conséquence le produit PL de qp , et le produit PLl de qc^2 . (Ces termes seraient soustractifs s'il y avait diminution de poids.)

Nous avons supposé que la direction du tir coïncidait exactement avec l'axe du récepteur ; si cela n'avait pas lieu, il faudrait dans la formule [8] remplacer ρ par la distance ρ' du point d'impact réel à l'axe de suspension. Quand on se sert du pendule balistique pour étudier le tir à de grandes distances, la direction du projectile, au moment où il pénètre dans le récepteur, n'est plus parallèle à l'axe ; et il faut tenir compte de cette circonstance dans l'évaluation de la distance ρ ; mais, comme alors la véritable direction du boulet n'est jamais parfaitement connue, l'emploi du pendule dans ce cas laisse toujours quelque incertitude sur le résultat obtenu.

Voyez le *Traité de Balistique* de M. Didion, section VIII.

PENDULE COMPOSÉ, corps solide de forme quelconque pouvant osciller autour d'un axe horizontal. L'étude des oscillations du pendule composé se ramène à celle des oscillations d'un pendule simple.

I. Soit en effet (fig. 1) un corps solide quelconque,

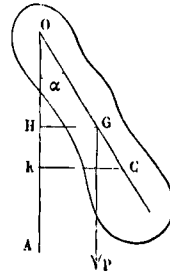


Fig. 1.

dont nous désignerons le poids par P et la masse par M , oscillant autour d'un axe horizontal O perpendiculaire au plan de la figure. Du centre de gravité G de ce corps abaissons sur l'axe un plan perpendiculaire, qui le rencontrera en un certain point O ; joignons OG , et appelons α l'angle AOG que cette droite fait avec la verticale OA . Le corps, pendant son mouvement, est soumis à deux forces : son poids P , force verticale appliquée en G , et la réaction R qui s'exerce sur l'axe, de la part de ses appuis ; on néglige la résistance de l'air. Cherchons

l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$, ω désignant la vitesse angulaire ou $\frac{d\alpha}{dt}$. On sait que

l'ACCÉLÉRATION ANGULAIRE (*Voy.* ce mot) a pour valeur la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation divisée par le moment d'inertie du corps par rapport au même axe. Si l'on néglige le frottement, les réactions qui s'exercent sur l'axe sont des forces normales qui rencontrent l'axe, et dont le moment par rapport à cet axe est conséquemment nul. Le moment de la force P est

le produit de P par la distance GH de son point d'application à la verticale OA; or $GH = OG \sin \alpha$; en représentant donc la distance OG par a on aura pour le moment de P

$$Pa \sin \alpha.$$

Par suite, en désignant par I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe O, on aura

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pa \sin \alpha}{I}. \quad [1]$$

Considérons maintenant un PENDULE SIMPLE (Voy. ce mot) formé d'un point matériel C situé, à l'instant qui correspond à l'écart α du pendule composé, sur la ligne OG; soit l la longueur de ce pendule; p le poids du point matériel. Abaissons sur OA la perpendiculaire CK, qui sera égale à $l \sin \alpha$. Si nous appliquons les raisonnements ci-dessus, nous trouverons de même, en désignant par ω' la vitesse angulaire du pendule simple, et remarquant que le moment d'inertie du point matériel a pour valeur $\frac{p}{g} l^2$,

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{pl \sin \alpha}{\frac{p}{g} l^2} = \frac{g \sin \alpha}{l}. \quad [2]$$

On rendra les deux accélérations $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\omega'}{dt}$ égales, indépendamment de α , en posant

$$\frac{Pa \sin \alpha}{I} = \frac{g \sin \alpha}{l}, \quad \text{d'où} \quad l = \frac{gI}{Pa},$$

ou, en désignant par M la masse du pendule composé,

$$l = \frac{I}{Ma}. \quad [3]$$

Si l'on donne au pendule simple la longueur l exprimée par cette relation, l'accélération angulaire sera donc la même pour les deux pendules, pourvu que l'écart α soit le même pour chacun d'eux. Or de l'égalité

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

on tire

$$\omega' = \omega$$

sans constante arbitraire, parce que les deux pendules ont le même écart initial et sont abandonnés sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur. De cette relation, qui peut s'écrire

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{d\alpha}{dt},$$

on tire de même

$$\alpha' = \alpha$$

attendu qu'à l'instant initial les valeurs de α' et de α sont toutes deux égales à l'écart initial supposé le même. Il en résulte que pendant toute la durée du mouvement les deux pendules auront le même écart, et que par conséquent la loi de leur mouvement sera la même. En d'autres termes, le point C déterminé par la relation [3] sur la droite OG se mouvra comme un pendule simple entièrement libre. On donne à ce point le nom de *centre d'oscillation*. D'après la formule [3] la longueur de ce pendule simple, capable d'osciller d'après la même loi que le pendule composé, s'obtient en divisant le moment d'inertie du pendule composé par rapport à l'axe de suspension par le produit de la masse du pendule et de la distance de son centre de gravité au même axe.

Si l'on mène dans le corps, par le point C, une droite parallèle à l'axe de suspension, tous les

points de cette droite se mouvront comme le point C, c'est-à-dire comme s'ils étaient librement suspendus à l'axe de rotation. On donne à cette droite le nom d'*axe d'oscillation*.

II. Le centre d'oscillation C est toujours plus bas que le centre de gravité. En effet, si I_0 représente le moment d'inertie du pendule composé par rapport à une droite menée par son centre de gravité G parallèlement à l'axe de suspension, on sait que l'on a (Voy. MOMENT D'INERTIE)

$$I = I_0 + Ma^2.$$

En substituant à I cette valeur dans l'équation [3], on obtient

$$l = \frac{I_0 + Ma^2}{Ma} = \frac{I_0}{Ma} + a; \quad [4]$$

la longueur l est donc plus grande que a ; ainsi le point C est au-dessous du point G.

La relation [4] conduit à une autre propriété remarquable de l'axe d'oscillation. Supposons qu'on retourne le corps et que l'on prenne cet axe d'oscillation pour axe de suspension. La distance du centre de gravité à ce nouvel axe de suspension sera GC ou $l - a$; ainsi, en appelant l' la longueur du pendule simple capable d'osciller comme le nouveau pendule composé, on aura une relation analogue à l'équation [4], dans laquelle a sera remplacé par $l - a$; savoir

$$l' = \frac{I_0}{M(l-a)} + (l-a). \quad [5]$$

Or de la relation [4] on tire

$$l - a = \frac{I_0}{Ma} \quad \text{et} \quad \frac{I_0}{M(l-a)} = a.$$

Il vient donc

$$l' = a + l - a \quad \text{ou} \quad l' = l,$$

c'est-à-dire que la longueur du pendule simple sera la même; ainsi l'ancien axe de suspension O deviendra l'axe d'oscillation. Cette propriété s'énonce en disant qu'il y a *réciprocité* entre les axes de suspension et d'oscillation. Elle a été utilisée dans les expériences de pendule, comme nous le verrons tout à l'heure.

En appelant R_0 le rayon de gyration relatif au moment d'inertie I_0 , on a $I_0 = MR_0^2$; par suite, la relation [4] peut s'écrire

$$l = \frac{R_0^2}{a} + a. \quad [6]$$

On peut demander en quel point de la droite OC il faut faire passer l'axe de suspension, pour que les oscillations soient les plus rapides possible. Pour cela, il faut que l soit un minimum. Or, si l'on prend la dérivée du second membre de [6] par rapport à a et qu'on l'égalé à zéro, on trouve

$$-\frac{R_0^2}{a^2} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad a = R_0.$$

Cette valeur rend d'ailleurs positive la seconde dérivée $+\frac{2R_0^2}{a^3}$; par conséquent elle répond bien à un minimum. On a alors $l = 2R_0$, et les points O et C sont à égale distance du point G. Il est aisé de voir d'ailleurs que l n'a pas de maximum, car pour $a = 0$ on trouve $l = \infty$.

III. Si le pendule composé est formé d'une sphère pleine, de rayon r , suspendue par un fil dont on puisse négliger le poids par rapport à celui de la sphère, le centre de gravité du pendule sera le centre de la sphère, et en désignant par λ la dis-

tance de ce centre à l'axe de suspension, on aura (Voy. MOMENT D'INERTIE)

$$R_0^2 = \frac{2}{5} r^2$$

et
$$l = \frac{2r^2}{5\lambda} + \lambda. \quad [7]$$

Le premier terme sera souvent négligeable devant le second.

Si le pendule a la forme d'une règle dont la longueur soit $2h$ et la largeur $2b$, et que l'axe de suspension coupe la médiane verticale à la distance a du centre de gravité, on aura

$$R_0^2 = \frac{1}{3} (b^2 + h^2)$$

et
$$l = \frac{b^2 + h^2}{3a} + a.$$

IV. Ayant déterminé la longueur l du pendule simple qui oscille comme le pendule composé, il devient facile d'en conclure la durée d'une oscillation; il suffit pour cela de remplacer l par sa valeur

leur $\frac{l}{Ma}$ dans la formule du pendule (Voy. PENDULE SIMPLE)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

ce qui donne

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mga}} \quad \text{ou} \quad T = \pi \sqrt{\frac{I}{Pa}}, \quad [8]$$

ou encore
$$T = \sqrt{\frac{R_0^2 + a^2}{ag}}$$

La difficulté consiste à déterminer exactement les quantités I et a , ou R_0 et a qui entrent dans ces formules. On a imaginé diverses méthodes pour effectuer cette détermination ou pour l'éviter. Les plus simples sont celle de Borda, et celle du capitaine Kater.

Borda, dans les expériences faites à l'Observatoire en 1790, se servait d'un pendule formé d'une sphère de platine de 0^m,025 de rayon, suspendue à un fil très-fin et dont on pouvait négliger le poids; la distance comprise entre le centre de la sphère et l'axe de suspension était de 1^m exactement; en sorte que la distance entre le point de suspension et le point le plus bas de la sphère devait être exactement 1^m + 0^m,025; l'emploi du cathétomètre simplifierait aujourd'hui beaucoup cette vérification. La formule [7] donnait alors

$$l = 1^m + \frac{2}{5} \cdot \frac{(0,025)^2}{1} = 1^m,00025.$$

Borda comptait le nombre des oscillations par la méthode des coïncidences (Voy. ce mot). La résistance de l'air pouvait être négligée.

Le capitaine Kater s'est servi dans ses expériences d'un pendule formé d'une règle en sapin, portant deux couteaux de suspension, l'un fixe O (fig. 2), l'autre C mobile dans une rainure longitudinale à l'aide d'une vis de rappel, et ayant son arête tournée en sens contraire. On faisait osciller le pendule en le suspendant successivement par les deux couteaux; et on faisait varier la position du couteau mobile jusqu'à ce que, dans les deux cas, le nombre des oscillations exécutées dans un même temps fût exactement le même. On était assuré alors que la distance entre ces deux axes réciproques était la longueur du pendule simple oscillant comme le

pendule composé; et il ne restait qu'à mesurer la distance entre les arêtes des deux couteaux. Cette méthode ingénieuse, dont l'idée paraît due à M. de Prony, dispense de déterminer le centre de gravité du pendule et son moment d'inertie.

On donne au pendule du capitaine Kater le nom de *pendule reversible*. On le construit aujourd'hui d'une autre manière. Au lieu de faire varier la distance des couteaux de suspension, on fait varier la disposition des masses, au moyen de deux curseurs glissant le long du pendule. Quand on a réglé la position de ces curseurs de manière que le nombre des oscillations exécutées dans un temps donné soit le même, quel que soit celui des deux couteaux qui serve d'axe de suspension, la distance fixe entre les arêtes de ces couteaux est la longueur du pendule simple qui oscille comme le pendule composé. En mettant cette longueur et la durée observée de l'oscillation dans la formule du pendule simple, on en déduit la valeur de l'accélération g due à la pesanteur dans le lieu où se fait l'observation.

V. La formule [8] peut servir à déterminer expérimentalement le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe, quand on peut le faire osciller autour d'un axe parallèle. On compte en effet le nombre des oscillations exécutées dans un temps donné; on en déduit la durée T d'une oscillation; la formule [8] donne alors

$$I = \frac{PaT^2}{\pi^2};$$

et quand on a le moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension employé, on peut en déduire le moment d'inertie par rapport à tout autre axe parallèle. Cette méthode est employée dans l'application du PENDULE BALISTIQUE (Voy. ce mot) à la mesure de la vitesse des projectiles de l'artillerie.

PENDULE CONIQUE, nommé aussi *modérateur de Watt*, *régulateur à force centrifuge*, ou *régulateur à boules*, régulateur fondé sur l'action de la force centrifuge, et destiné à agir sur le moteur dès que la vitesse de la machine sort des limites qui lui ont été assignées. Il se compose généralement d'un parallélogramme OACA' (fig. 1) articulé

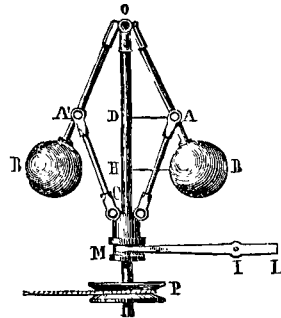


Fig. 1.

à ses quatre sommets; les extrémités O sont liées à une tige verticale OC qui reçoit de la machine un mouvement de rotation par l'intermédiaire d'une poulie P; les extrémités C sont liées à un man-



Fig. 2.

chon M qui embrasse cette tige, et qui n'a que la faculté de s'élever ou de s'abaisser verticalement. Ce manchon, qui tourne avec la tige verticale, par suite de sa liaison avec le parallélogramme, est embrassé à son tour par une fourche, formant l'une des extrémités d'un levier L, mobile autour d'un axe horizontal fixe I, et dont l'autre extrémité fait ouvrir ou fermer, soit la vanne d'un récepteur hydraulique, soit la clef qui règle l'orifice de passage de la chaudière au cylindre d'une machine à vapeur. Les branches OA et OA' du parallélogramme se prolongent vers le bas, et se terminent, à égale distance du point O, par deux boules égales et pesantes, B et B'.

Il est facile de concevoir le jeu de cet appareil. Tant que la machine conserve sa vitesse de régime, ou s'en écarte d'une très-faible quantité, l'appareil conserve dans sa rotation une figure constante qui a été déterminée d'avance. Mais si la vitesse de la machine augmente, la vitesse angulaire de l'appareil augmentant aussi, l'accroissement de force centrifuge qui en résulte fait écarter les boules, et par conséquent soulever le manchon; le levier qui l'embrasse fait fermer la vanne ou l'orifice d'admission de la vapeur, et diminue ainsi le travail moteur, jusqu'à ce que la machine ait repris sa vitesse de régime; et alors les boules reprennent leur écart primitif. L'inverse a lieu si la vitesse de la machine devient notablement moindre que sa vitesse de régime; la vitesse angulaire de l'appareil devenant moindre, il y a diminution de force centrifuge; les boules se rapprochent, le manchon s'abaisse, le levier fait ouvrir la vanne ou l'orifice d'admission de la vapeur; et le travail moteur augmente jusqu'à ce que la machine ait repris sa vitesse de régime, et les boules leur écartement primitif. — On voit que, par ce dispositif ingénieux, la machine se règle d'elle-même. Toutefois, l'effet de ce régulateur n'est pas instantané comme on pourrait le croire; il se passe toujours un certain temps avant que la vitesse de régime soit rétablie, et l'appareil ne saurait par conséquent remédier aux variations de vitesse qui ont une très-courte durée. Néanmoins le pendule conique est un des régulateurs les plus précieux et des plus répandus.

I. En établissant sa théorie, on a deux questions à résoudre : 1° déterminer la figure constante que l'appareil doit conserver quand la machine conserve la vitesse de régime; 2° calculer le poids des boules de manière que le régulateur fonctionne quand la vitesse de la machine s'écarte de la vitesse de régime d'une fraction donnée de cette vitesse, dans un sens ou dans l'autre.

Dans cette théorie on néglige ordinairement le poids des tiges qui forment le parallélogramme, et l'on n'a égard qu'au poids des boules.

1° Désignons par ω la vitesse angulaire de régime du régulateur, par P le poids de chacune des deux boules. Des points A et B abaissons sur l'axe vertical les perpendiculaires AD et BH. Posons pour abréger

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OD = x, \quad OH = Z, \quad BH = d.$$

Le mouvement de rotation étant supposé uniforme, chacune des deux branches OB ou OB', la première par exemple, peut être considérée comme étant en équilibre relatif sous l'action du poids P

de la boule, de sa force centrifuge, qui a pour expression $\frac{P \cdot \omega^2 \cdot d}{g}$ (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS), e

de la réaction qui s'exerce au point O de la part de la tige OC (on néglige ici la réaction de la tige AC). Si l'on prend les moments de ces forces par rapport au point O, le moment de la réaction inconnue qui s'exerce en ce point sera nul; le moment de la force verticale P sera Pd; le moment de la force centrifuge, qui est horizontale, sera $\frac{P\omega^2 d}{g} \cdot Z$; on aura donc pour l'équilibre, en ayant égard au sens de chacun des deux moments

$$\frac{P\omega^2 d}{g} \cdot Z = Pd,$$

d'où l'on tire

$$Z = \frac{g}{\omega^2}, \quad [1]$$

quantité indépendante du poids P des boules, et de la longueur de OB. La hauteur Z ou OH étant ainsi déterminée, fera connaître l'écart des boules, si l'on se donne la longueur OB; par suite, la position du manchon sera déterminée aussi, et l'on connaîtra la figure de l'appareil correspondante à la vitesse de régime.

2° Il faut maintenant déterminer le poids des boules de manière que le manchon soit sur le point d'être soulevé quand la vitesse angulaire prendra une valeur ω' excédant ω d'une fraction $\frac{1}{k}$ de cette dernière, en sorte qu'on ait

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$\omega' = n\omega,$$

en désignant par n la quantité

$$1 + \frac{1}{k}.$$

Le manchon étant sur le point de s'élever, l'appareil peut être considéré comme en équilibre. La branche CA est en équilibre sous l'action des forces qu'elle reçoit en C et en A de la part du manchon et de la branche OB, puisque nous négligeons son poids. Il en résulte d'abord que ces réactions sont égales et opposées, ce qui exige que leur commune direction soit la droite CA. On ferait une remarque analogue à l'égard de la branche CA'. Soit 2p la force verticale que le manchon doit vaincre pour s'élever, et qui peut être déterminée par expérience. Ce manchon est en équilibre sous l'action de la force verticale 2p et des réactions qu'il reçoit des branches CA et CA', lesquelles sont égales et contraires à celles que le manchon exerce sur les mêmes branches, et qui sont, comme on l'a vu, dirigées suivant CA et CA'. Si donc on appelle α l'angle COB que fait la tige OB avec la verticale, et si R désigne l'une quelconque des réactions dont nous venons de parler, on devra avoir, en écrivant que la somme des projections verticales de ces réactions et de la force 2p est nulle,

$$2R \cos \alpha = 2p, \quad \text{d'où } R = \frac{p}{\cos \alpha}. \quad [2]$$

La branche OB est en équilibre sous l'action de cinq forces : 1° deux forces agissant en B, l'une verticale égale à P, l'autre horizontale égale à $\frac{P\omega'^2 d}{g}$;

2° les composantes verticale et horizontale de la réaction R qui s'exerce en A de la part de la branche CA, lesquelles sont égales l'une à $R \cos \alpha$ ou à p , en vertu de [2], l'autre à $R \sin \alpha$ ou à $p \tan \alpha$; 3° la réaction qui s'exerce en O. Prenons les moments de ces cinq forces par rapport au point O ; la réaction qui s'exerce en ce point disparaîtra, et il restera, en ayant égard au sens des moments,

$$P \cdot d - \frac{P \omega^2 d}{g} Z + p \cdot a \sin \alpha + p \tan \alpha \cdot a \cos \alpha = 0;$$

mais on a

$$d = b \sin \alpha, \quad \omega' = n \omega, \quad \text{et} \quad Z = \frac{g}{\omega'^2};$$

si l'on substitue ces valeurs dans l'équation des moments, qu'on divise par $b \sin \alpha$, et qu'on réduise, on obtient

$$P (1 - n^2) + 2p \cdot \frac{a}{b} = 0 \quad \text{ou} \quad P (n^2 - 1) = 2p \cdot \frac{a}{b};$$

si l'on remet pour n sa valeur $1 + \frac{1}{k}$ et qu'on néglige le carré de $\frac{1}{k}$, il vient enfin

$$\frac{2P}{k} = 2p \cdot \frac{a}{b}, \quad \text{d'où} \quad P = p \cdot k \cdot \frac{a}{b}. \quad [3]$$

Ainsi le poids des boules est sensiblement proportionnel au poids que le manchon doit soulever, au dénominateur k de la fraction qui exprime le degré de régularité à obtenir, et au rapport $\frac{a}{b}$ des distances OA et OB. Si, par exemple, on a

$$a = \frac{2}{3}b, \quad 2p = 5^k, \quad \text{et} \quad k = 20,$$

on trouvera

$$P = \frac{2}{3}, \quad 2^k \cdot 5 \cdot 20 = 33^k \cdot 33.$$

Si la vitesse descendait au-dessous de la vitesse de régime ω au lieu de s'élever au-dessus, la résistance du manchon s'exercerait en sens contraire ; il faudrait donc changer p en $-p$; mais en même temps on aurait

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{1}{k} \right),$$

ce qui revient à changer k en $-k$; par conséquent l'équation [3] resterait la même.

Dans les calculs qui précèdent on a négligé le poids des tiges. La force centrifuge développée serait donc un peu plus grande que celle qui est due aux boules seules. Mais, d'une part, la différence est toujours faible ; d'autre part, cet excès est nécessaire pour vaincre les frottements dont il n'est pas possible de tenir compte. Si l'on fait le calcul en ayant égard au poids des tiges, il n'en résulte pas pour les boules une diminution de poids de plus des 0,008 de sa valeur dans les cas les plus défavorables. On pourra néanmoins consulter sur ce sujet un mémoire de M. Mahistre, faisant partie des Mémoires de la Société impériale des sciences, de l'agriculture et des arts, de Lille (1865).

II. Le pendule conique n'a pas toujours la disposition représentée par la figure 1. — Lorsque l'effort à exercer sur le manchon doit être notable, on le place au-dessus du pendule, auquel on donne la disposition indiquée par la figure 2. Elle permet d'obtenir, pour un même écart des limites, une

course plus grande du manchon placé en C ; il suffit de disposer des longueurs OA et AC en conséquence. Le triangle OAC peut ne pas être isocèle ; les calculs sont un peu moins simples, mais la marche est toujours la même.

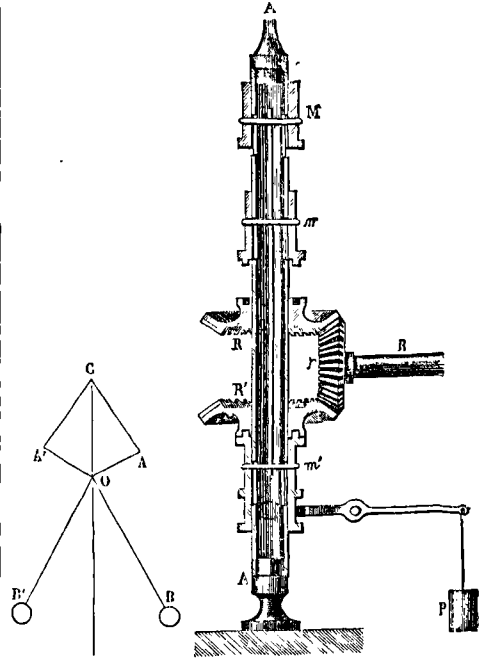


Fig. 2.

Fig. 3.

Lorsque l'effort à exercer sur le manchon doit être très-considérable, comme cela arrive quelquefois, on peut employer un dispositif différent : le manchon n'a d'autre fonction que de faire mouvoir des manchettes d'embrayage, et c'est l'axe vertical OC lui-même qui est chargé d'agir sur le moteur. — Voici comment : l'arbre du pendule est creux dans une longueur suffisante pour placer les deux manchettes d'embrayage m et m' (fig. 3), et les roues folles R et R', qui engrenent avec la roue r calée sur l'arbre B chargé du mécanisme de la vanne. Les trois manchettes sont reliés entre eux par une tige placée dans l'arbre, et des clavettes traversant à la fois la tige, l'arbre et chacun des manchettes, font participer ces derniers au mouvement de l'arbre, tout en leur laissant la liberté de se mouvoir simultanément dans le sens de sa longueur. Le poids des manchettes, de la tige et des clavettes est équilibré par un contre-poids P fixé à l'extrémité d'un levier qui se termine à l'autre extrémité par une fourche embrassant un collier ménagé au bas du manchon m' . Lorsque le manchon M du pendule s'élève, le manchon m' embraye avec la roue R ; et celle-ci fait tourner la roue r et l'arbre B dans un certain sens. Quand le manchon M s'abaisse, c'est le manchon m qui embraye avec la roue R, et celle-ci fait tourner la roue r et l'arbre B dans un sens contraire à celui de tout à l'heure. Ce mouvement de l'arbre B dans deux sens opposés est mis à profit pour diminuer ou accroître l'action du moteur.

de long; il est délicatement suspendu par un axe en bronze très-dur, dont les extrémités cylindriques reposent sur des appuis en acier fondu pratiqués dans des pièces analogues aux ponts de l'hor-

guille *l* qui y est adaptée vient se placer de manière que le zéro de son vernier vienne coïncider avec le zéro de l'arc divisé. Si l'on imagine qu'un courant passe par le fil de l'électro-aimant

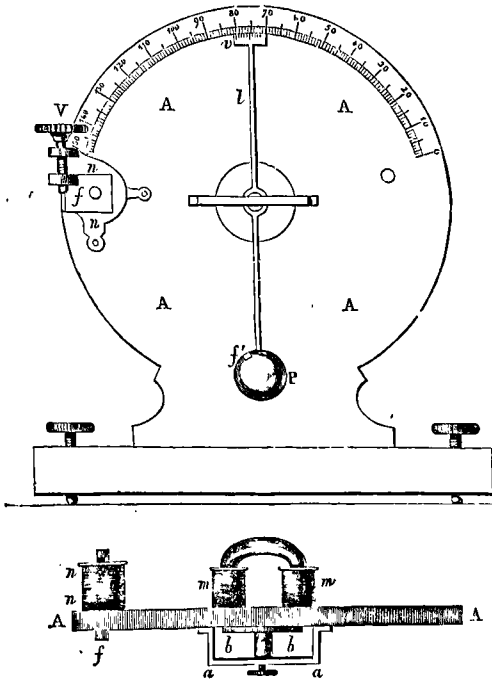


Fig. 1.

logerie, et dont une seule *aa* est visible sur la figure. Ces ponts sont fixés à un disque vertical en laiton AA, à une petite distance duquel le pendule oscille. L'axe du pendule est entouré dans une partie de sa longueur par un manchon dans lequel il peut tourner à frottement doux; ce manchon est appuyé par son extrémité contre un bourrelet saillant de l'axe en bronze, au moyen d'un petit ressort fixé à ce bourrelet et s'appuyant sur le manchon. A ce manchon est adaptée une aiguille *l*, dont l'extrémité, munie d'un vernier, parcourt un arc de 150 degrés tracé sur le disque AA. A l'extrémité de ce même manchon est fixée une rondelle en fer doux *bb* qui peut s'introduire dans une ouverture de même diamètre pratiquée au centre du disque AA. Derrière cette rondelle en fer doux, et à une très-petite distance, est disposé un électro-aimant en fer à cheval *mm*, dont les extrémités se rapprochent en pénétrant dans l'ouverture correspondant à la rondelle. Un second électro-aimant *nn* est disposé sur le côté du disque AA; il pénètre dans une ouverture pratiquée dans ce disque, et présente en avant l'extrémité *f* de son cylindre en fer doux; il est porté sur un chariot qu'on peut faire mouvoir, à l'aide d'une vis V, de manière à le déplacer un peu sur le bord du disque AA. Dans l'épaisseur de la lentille P est logé un morceau de fer doux *f'* qui peut être amené en contact avec l'extrémité *f* de l'électro-aimant *nn*. Dans ce mouvement, le manchon qui enveloppe l'axe étant entraîné par son frottement, tourne avec lui; et l'ai-

guille aura ainsi parcouru sur le limbe un certain arc correspondant au temps qui s'est écoulé entre l'instant où le circuit a été ouvert dans l'électro-aimant *nn* et celui où le circuit a été fermé dans l'électro-aimant *mm*. Nous verrons plus loin comment ce temps peut se déduire de l'amplitude de l'arc correspondant. Le disque AA est porté sur un support à vis calantes; et tout l'appareil est enfermé dans une cage en verre.

II. Le *conjoncteur* se compose d'un électro-aimant M (fig. 2) pouvant glisser verticalement le long d'une colonne CC, à l'aide d'une vis U. A l'extrémité inférieure de cet électro-aimant est suspendu, quand le circuit est fermé, un petit cylindre de fer doux terminé par un poids en plomb *p*. Au-dessous du poids *p* est disposé un petit mortier en fer *e* contenant du mercure. De la presse à vis R, part une lame d'acier LL, terminée par une

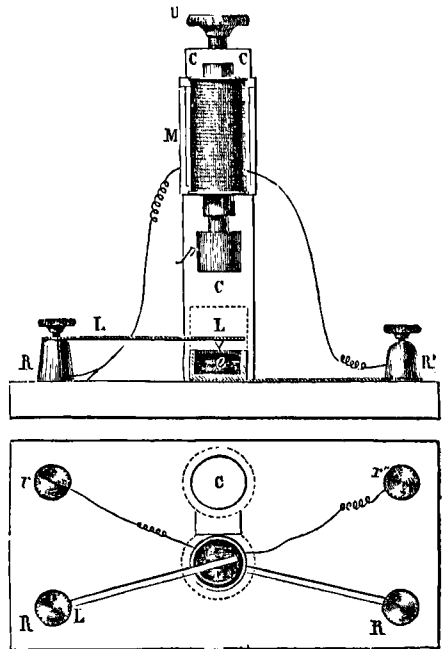


Fig. 2.

pointe en fer dirigée vers la surface du mercure.

Une bande en cuivre H met le mortier en communication avec la presse à vis R'. Le fil de la bobine M est mis en communication avec d'autres presses à vis r et r'. Quand le circuit qui anime l'électro-aimant M est fermé, il n'y a aucune communication électrique de la presse à vis R à la presse à vis R', parce que la pointe qui termine la lame LL est à une petite distance au-dessus du mercure; mais quand le circuit qui anime la bobine M vient à s'ouvrir, l'électro-aimant cessant d'être actif abandonne le poids p, lequel, en tombant, fait entrer la pointe de la lame LL dans le mercure, et établit ainsi une communication métallique entre les presses à vis R et R'. Le conjointeur est porté sur un pied muni de vis calantes; et l'on peut rendre la colonne CC verticale au moyen d'un fil à plomb placé dans son intérieur et que l'on aperçoit par des fenêtres pratiquées dans la colonne.

III. Le disjoncteur comprend deux lamettes fixes en cuivre U (fig. 3) séparées par une bande d'ivoire,

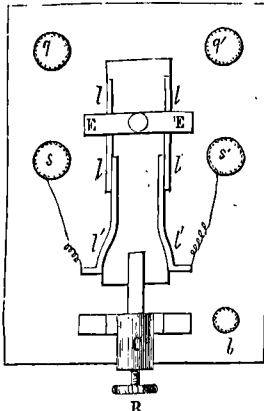


Fig. 3.

et maintenues par un étrier EE également en ivoire à sa partie interne; et de deux lamettes mobiles en cuivre VV', séparées aussi par une bande d'ivoire, et formant un système mobile qui peut pénétrer à frottement entre les lamettes fixes U. A la pièce d'ivoire qui sépare les lamettes fixes mobiles est articulée une tige en acier, qui traverse le cylindre fixe C, et vient se terminer par un bouton B. Dans l'intérieur du cylindre C est disposé un ressort à boudin qui tend à tenir les lamettes mobiles séparées des lamettes fixes; lorsqu'on veut faire pénétrer les lamettes VV' entre les lamettes U, il faut pousser le bouton B, jusqu'à ce que le bec d'une gâchette placée sous la tablette, et sollicitée par un petit ressort, s'engage dans une coche pratiquée sous la tige en acier dont il a été parlé ci-dessus. Lorsqu'on veut retirer les lamettes mobiles, on presse sur un bouton b, qui agit sur le petit ressort de la gâchette; celle-ci se dégage de la coche où elle était engagée, et l'on peut retirer les lamettes en tirant à soi le bouton B. — Les lamettes fixes ont une communication métallique intérieure, l'une avec la presse à vis q, l'autre avec la presse à vis q'; les lamettes mobiles communiquent, à l'aide de bandes en cuivre pliées en zigzags, l'une avec la presse à vis s, l'autre avec la presse à vis s'. Nous verrons

plus loin comment on établit les communications entre les diverses parties des trois appareils que nous venons de décrire.

IV. Indépendamment de ces trois parties principales, l'appareil comprend, pour les expériences de tir, deux cadres en bois, sur lesquels est étalé en lignes parallèles, soit horizontalement, ou mieux encore verticalement, un fil conducteur isolé. La dimension de ces cadres dépend de la distance à laquelle on se propose de les placer par rapport à l'arme à feu ou à la bouche à feu mise en expérience, et aussi de la justesse du tir. L'intervalle des fils ne doit pas dépasser les deux tiers du diamètre du projectile. Quand les dimensions du cadre sont très-grandes, on maintient les fils à distance en les croisant par des fils non conducteurs, tels que des fils de coton.

Le pendule, le conjointeur et le disjoncteur sont installés dans un bâtiment éloigné de la bouche à feu; et la communication avec les cadres s'établit à l'aide de fils conducteurs isolés, portés par des poteaux qu'on espace de 10 à 15 mètres.

Deux piles sont nécessaires pour faire fonctionner l'appareil. Voici comment les communications doivent être établies. Il y a à considérer trois circuits.

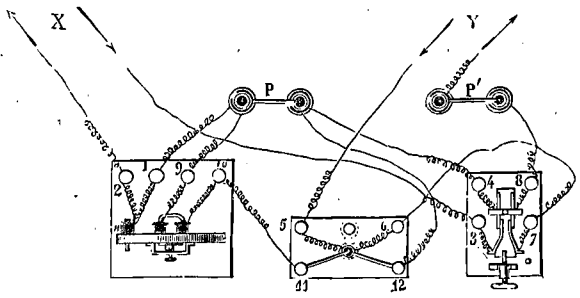


Fig. 4.

Pour plus de clarté, nous désignerons (fig. 4) par X le cadre le plus rapproché de la bouche à feu, et par Y celui qui en est le plus éloigné.

Le premier circuit part de la pile P, entre dans le pendule par la presse à vis 1, va animer l'électro-aimant latéral n, sort par la presse à vis 2, va au cadre X, en revient par la presse à vis 3 du disjoncteur, passe dans la lamette mobile de gauche, de là dans la lamette fixe de gauche, supposée en contact avec la première, sort du disjoncteur par la presse à vis 4, et retourne à la pile P.

Le second circuit part de la pile P', va au cadre Y, en revient par la presse à vis 5 du conjointeur, anime l'électro-aimant vertical, sort du conjointeur par la presse à vis 6, entre dans le disjoncteur par la presse à vis 7, passe dans la lamette mobile de droite, de là dans la lamette fixe de droite, sort du disjoncteur par la presse à vis 8, et retourne à la pile P'.

Le troisième circuit, qui n'est jamais fermé en même temps que le premier, part de la pile P, entre dans le pendule par la presse à vis 9, va animer l'électro-aimant en fer à cheval, sort par la presse à vis 10, arrive au conjointeur par la presse à vis 11, passe par la lame d'acier dans le mercure, sort par la presse à vis 12, et retourne à la pile P.

On voit que ce troisième circuit n'est fermé qu'autant que le premier est ouvert, puisqu'il faut que le poids suspendu à l'électro-aimant vertical du conjoncteur soit tombé pour faire communiquer la lame d'acier avec le mercure.

V. Voici maintenant en quoi consiste la méthode d'expérimentation. Supposons que, les circuits 1 et 3 étant fermés, on ait amené la lentille du pendule au contact avec l'électro-aimant latéral, et par conséquent l'aiguille au zéro de la division; supposons en même temps que le poids p ait été suspendu à l'électro-aimant du conjoncteur. Le système pourra demeurer tant qu'on le voudra dans cette position. Mais si l'opérateur presse le bouton B (fig. 3), les deux circuits dont nous parlons sont aussitôt interrompus, parce que les lamettes mobiles $l'l'$ ne sont plus en contact avec les lamettes fixes. A l'instant, l'électro-aimant mn du pendule abandonne la lentille; le pendule commence son oscillation, en entraînant l'aiguille. En même temps l'électro-aimant du conjoncteur abandonne le poids qu'il soutenait. Mais presque aussitôt, au bout du temps employé à la chute de ce poids, le circuit 3 se trouve fermé, il anime l'électro-aimant mn du pendule, qui attire à lui la rondelle de fer, et fixe l'aiguille sur le limbe, et le pendule continue seul ses oscillations. L'aiguille a parcouru ainsi un arc, qui peut être lu à $\frac{1}{20}$ de degré près à l'aide du vernier, et que nous nommerons α .

Supposons maintenant qu'on ait remis les lamettes mobiles du disjoncteur au contact avec les lamettes fixes; qu'on ait fermé les circuits 1 et 2, remis la lentille au contact avec l'électro-aimant mn , et suspendu de nouveau le poids p à l'électro-aimant du conjoncteur. En d'autres termes, supposons qu'on ait rétabli les choses dans la même situation qu'au commencement de la première expérience. Cette fois, au lieu d'opérer les interruptions à l'aide du disjoncteur, on les opérera en mettant le feu à l'arme ou à la pièce qu'on veut expérimenter. Le projectile, en traversant le cadre X, coupe les fils qu'il rencontre, et interrompt le courant 1. L'électro-aimant mn du pendule abandonne la lentille, qui entre en oscillation en entraînant l'aiguille. Le même projectile en traversant le cadre Y, interrompt ensuite le courant 2. L'électro-aimant du conjoncteur abandonne le poids p , qui, en tombant, ferme le circuit 3; l'électro-aimant mn du pendule attire la rondelle de fer et fixe l'aiguille, le pendule continuant seul à osciller. Dans cette seconde expérience, l'aiguille a parcouru sur le limbe un arc β un peu plus grand que le premier; car tout s'est passé comme dans la première expérience, avec cette différence que les deux courants 1 et 2 au lieu d'être interrompus simultanément par le disjoncteur, l'ont été successivement par le projectile; l'arc β doit donc surpasser l'arc α d'une quantité correspondante au temps employé par le projectile pour aller du premier cadre au second; et par conséquent l'arc $\beta - \alpha$, qui peut être lu, comme nous l'avons dit, à $\frac{1}{20}$ de degré près, peut servir de mesure au temps considéré; et en divisant la distance connue des deux cadres par le temps ainsi obtenu on aura la vitesse moyenne du projectile pendant ce temps.

VI. Pour pouvoir déduire de l'observation des arcs α et β la durée correspondante à $\beta - \alpha$, il faut d'abord déterminer une fois pour toutes la longueur du pendule simple qui oscille comme le pendule considéré. Il ne suffit pas ici de compter le nombre des oscillations faites dans un temps donné, et d'appliquer la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

en ne donnant à l'écart initial qu'une amplitude très-faible, on n'obtiendrait qu'un très-petit nombre d'oscillations, insuffisant pour déterminer t et par suite l avec une approximation convenable. M. Navez préfère donner à l'écart initial une grande amplitude, et tenir compte dans le calcul de la diminution de cette amplitude. On sait que si h désigne la hauteur verticale dont le pendule simple descend dans une demi-oscillation, on a pour la durée de l'oscillation entière (Voy. PENDULE SIMPLE)

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 h}{2} + \frac{\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)^4}{2} + \dots \right\};$$

et l'on peut déduire de cette formule le rapport de t' à t correspondant aux diverses amplitudes initiales. On trouve par exemple,

pour une amplitude de 10 degrés,	$t' = t.0,00012$
— 20 —	$t' = t.0,00190$
— 30 —	$t' = t.0,00426$

et ainsi de suite. M. Navez classe les oscillations en groupes dans chacun desquels l'amplitude est sensiblement la même; si, par exemple, il y a eu n oscillations ayant une amplitude de 30 degrés, leur durée totale a été $nt.0,00426$; s'il y a eu n' oscillations ayant une amplitude de 20 degrés, leur durée totale a été $n't.0,00190$; s'il y a eu en n'' à 10 degrés, leur durée a été $n''t.0,00012$; et ainsi de suite. La durée totale sera donc t multiplié par un facteur connu, que nous appellerons k ; et comme cette durée totale T est donnée par l'observation, on aura

$$kt = T,$$

d'où l'on déduira t . On aura alors l par la relation

$$l = \frac{g t^2}{\pi^2}.$$

Cela posé, si ω_0 représente l'écart initial et ω l'écart correspondant à une position déterminée du pendule, sa vitesse sera donnée par la relation

$$v = \sqrt{2gl}(\cos \omega - \cos \omega_0).$$

On peut à l'aide de cette formule déterminer la vitesse du mobile pour toutes les positions, de degré en degré, depuis l'écart ω_0 , jusqu'à l'écart zéro. On peut admettre alors que chaque arc d'un degré a été parcouru avec une vitesse constante, égale à la moyenne des valeurs de v qui répondent aux deux extrémités de cet arc; et comme sa longueur est connue, en la divisant par cette vitesse moyenne, on obtient le temps employé par le pendule à parcourir un arc d'un degré, à chacun des instants de sa chute; et, par de simples additions, on en déduit le temps employé à descendre de la position initiale à une position donnée quelconque. Dans l'instrument sur lequel M. Navez opérait on avait $l = 0^m, 10168$. Il a trouvé, par la méthode que nous venons d'indiquer, les valeurs suivantes pour le temps employé par l'ai-

guille pour aller du zéro de l'arc divisé placé à 75 degrés de la verticale, à toutes les positions, de degré en degré, depuis 41 degrés, qui est inférieur à la plus petite valeur de α jusqu'à 111 degrés, qui est supérieur à la plus grande valeur que puisse

prendre β dans les expériences ordinaires. Pour appliquer ces nombres à un autre appareil dans lequel l serait remplacé par l' , il n'y aurait qu'à les multiplier par $\sqrt{\frac{l}{l'}}$.

ARCS.	DURÉES.	ARCS.	DURÉES.	ARCS.	DURÉES.	ARCS.	DURÉES.	ARCS.	DURÉES.
41°	0,00168	56°	0,02544	71°	0,04770	86°	0,06964	101°	0,09234
42	0,00334	57	0,02696	72	0,04916	87	0,07112	102	0,09391
43	0,00499	58	0,02847	73	0,05062	88	0,07260	103	0,09539
44	0,00663	59	0,02997	74	0,05208	89	0,07409	104	0,09708
45	0,00825	60	0,03147	75	0,05354	90	0,07558	105	0,09868
46	0,00986	61	0,03296	76	0,05500	91	0,07707	106	0,10029
47	0,01146	62	0,03445	77	0,05646	92	0,07857	107	0,10191
48	0,01305	63	0,03594	78	0,05792	93	0,08007	108	0,10355
49	0,01463	64	0,03742	79	0,05938	94	0,08158	109	0,10520
50	0,01620	65	0,03890	80	0,06084	95	0,08210	110	0,10686
51	0,01776	66	0,04037	81	0,06230	96	0,08462	111	0,10854
52	0,01931	67	0,04184	82	0,06376	97	0,08615	"	"
53	0,02085	68	0,04331	83	0,06523	98	0,08769	"	"
54	0,02239	69	0,04478	84	0,06670	99	0,08923	"	"
55	0,02392	70	0,04624	85	0,06817	100	0,09078	"	"

L'usage de ce tableau est des plus simples; supposons que l'expérience ait donné

$$\alpha = 44^\circ \text{ et } \beta = 101^\circ,$$

la table donne pour les durées correspondantes 0,00663 et 0,09234; la différence 0,08571 sera le temps employé par le projectile pour franchir la distance des deux cadres; et si cette distance est de 40^m, on en déduit pour la vitesse moyenne du

projectile $\frac{40^m}{0,08571}$ ou 466^m,7. Si α et β étaient exprimés par des nombres fractionnaires de degrés, on interpolerait comme avec une table de logarithmes.

VII. Nous avons négligé dans la description de l'appareil plusieurs petits détails sur lesquels nous pouvons revenir maintenant. Ainsi l'aiguille du pendule, lorsqu'elle est amenée au zéro de l'arc divisé, s'appuie sur un taquet qui sert de point de repère; on règle la position de l'électro-aimant *nn* (fig. 1) de manière que la lentille soit alors en contact avec le cylindre de fer doux qui forme l'aimant. Un NIVEAU SPHÉRIQUE (*Voy.* ce mot) établi sur le pied de l'appareil permet de rendre l'axe du pendule parfaitement horizontal. Le niveau du mercure dans le petit mortier du conjoncteur (fig. 2) est réglé au moyen d'une vis qui pénètre latéralement dans la paroi.

Il est important que la moyenne entre les arcs α et β tombe à peu de distance de 75°, parce que ce nombre, qui correspond à l'instant où le pendule a la plus grande vitesse, répond par cela même à l'instant où la vitesse éprouve le moins de variation dans un même temps, et surtout parce que les temps sont alors exprimés par de plus grands arcs.

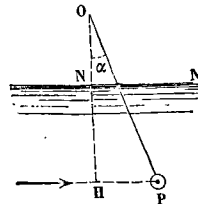
Les arcs peuvent être lus à $\frac{1}{20}$ de degré. Les variations accidentelles, qui ne peuvent être complètement évitées, ne paraissent pas s'élever à plus d'un quart de degré.

VIII. Le pendule électro-balistique de M. Navez fonctionne en Belgique depuis 1849; il a déjà rendu des services réels. Voici une expérience qui peut donner une idée de sa précision. On a placé le premier cadre contre la bouche d'une carabine à tige,

et le second à 16^m,45 du premier; on a obtenu 0,0509316 pour la durée du trajet du projectile; laissant le second cadre à sa place on a porté le premier 14^m plus loin; la durée du trajet a été trouvée de 0,0450511; enfin on a remplacé le premier cadre à la bouche de la carabine, et le second à la distance 16^m,54 + 14^m ou 30^m,54; la durée du trajet a été trouvée de 0,0959961. Ce nombre ne diffère de la somme des deux premiers que d'une quantité inférieure au 5800^{ième} de sa valeur. Mais les indications de cet appareil sont toujours par excès, parce que les résistances passives tendent à diminuer l'arc qui sert de mesure au temps. Le pendule balistique ordinaire donne au contraire des résultats approchés par défaut. Dans des expériences comparatives faites avec les deux pendules, on a trouvé 343^m,83 avec l'un et 340^m,11 avec l'autre pour les vitesses d'un même projectile avec une même arme et une même charge. La vitesse véritable est comprise entre ces deux nombres, mais vraisemblablement plus voisine du premier.

On pourra consulter pour plus de détails l'ouvrage ayant pour titre : *Application de l'électricité à la mesure de la vitesse des projectiles*, par Navez, 1853.

PENDULE HYDROMÉTRIQUE (du grec $\beta\delta\omega\rho$, eau, et $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$, mesure), instrument proposé pour mesurer la vitesse d'un courant à une profondeur quelconque. Il se compose d'une boule d'ivoire ou de laiton creux, P, suspendue par un fil en un



point O. Si la boule est plongée dans un courant, le fil s'écarte de la verticale d'un angle que nous désignerons par α . Dans cette position, la boule est

en équilibre sous l'action de son poids, de la force horizontale F que le courant exerce sur elle, et de la tension du fil; il faut donc que la résultante des forces P et F soit dirigée suivant le prolongement du fil, ce qui exige qu'on ait

$$F = P \tan \alpha;$$

mais, d'après ce qu'on sait de la **RÉSISTANCE DES FLUIDES** (Voy. ce mot), la force F est proportionnelle au carré de la vitesse du courant au point P , et peut être représentée par kV^2 , k étant un coefficient numérique, indépendant de l'angle α . On aurait donc

$$[1] \quad kV^2 = P \tan \alpha, \text{ d'où } V = \sqrt{\frac{l}{k} P \tan \alpha}. \quad [2]$$

On peut déterminer le coefficient k en mesurant à l'aide d'un flotteur la vitesse V à la surface du courant, et en déterminant la valeur que prend l'angle α lorsque la boule est elle-même tout près de la surface. Dans l'équation [1] il n'y a plus alors que k d'inconnu. Une fois k déterminé, on se servira de la formule [2] pour déterminer la vitesse du courant à une profondeur quelconque. Si l désigne la longueur du fil, augmentée du rayon de la boule, la distance de l'horizontale HP au-dessous du point O sera $l \cos \alpha$; il suffira d'en retrancher la distance ON pour avoir la profondeur de cette horizontale, où le courant a la vitesse V .

Le point O est ordinairement le centre d'un quadrant divisé, dont un côté est vertical, et sur le limbe duquel on lit immédiatement l'angle α . Bien employé, cet instrument peut fournir des indications assez exactes.

PENDULE RÉVERSIBLE, pendule composé imaginé par le capitaine Kater, et dont l'usage est fondé sur la réciprocité des axes de suspension et d'oscillation (Voy. **PENDULE COMPOSÉ**).

PENDULE SIMPLE, appareil idéal formé d'un point matériel pesant suspendu à un point fixe par un fil inextensible et sans poids. On a une image sensible du pendule simple en suspendant une petite balle de plomb par un fil très-délié.

Lorsqu'un appareil de ce genre est dans sa position d'équilibre, le fil a une direction verticale, telle que OA (fig. 1); car il est sollicité d'une part

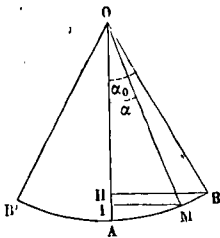


Fig. 1.

par le poids de la petite balle de plomb A , de l'autre par la réaction du point fixe O ; il faut donc pour l'équilibre que ces deux forces soient égales et opposées, ce qui exige que la direction du fil soit celle de la pesanteur, c'est-à-dire une direction verticale. Si on écarte le fil de sa position d'équilibre pour l'amener, par exemple, dans la position OB , et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, il revient de lui-même à la position verticale OA ;

mais il la dépasse en vertu de la vitesse qu'il acquise, et s'en écarte de l'autre côté, jusqu'à une certaine position OB' ; puis il revient à la verticale, et ainsi de suite, en exécutant, de part et d'autre de la verticale du point fixe, une série d'oscillations qui serait indéfinie si diverses causes ne concouraient à altérer et à détruire en définitive le mouvement. Ce sont les lois de ces oscillations qu'il s'agit d'étudier; elles servent de base à la théorie du **PENDULE COMPOSÉ** (Voy. ce mot), qui joue lui-même un rôle essentiel dans la mesure du temps et dans les questions qui se rapportent à la **FIGURE DE LA TERRE** (Voy. ce mot).

I. Désignons par l la longueur OA d'un pendule simple, par p le poids et par m la masse du point matériel suspendu à l'extrémité du fil. Soit α_0 l'angle AOB qui mesure l'écart initial; soit OM la position que le pendule, abandonné à lui-même dans la position OB , aura prise au bout du temps t ; et soit α l'angle AOM . Abaissons des points B et M sur la verticale OA les perpendiculaires BH et MI — Appliquons au point matériel en mouvement le *Principe de l'effet du travail* (Voy. **EFFET DU TRAVAIL**). Le mobile est soumis à deux forces : son poids p , et la tension du fil. Mais cette tension s'exerce suivant le rayon MO , c'est-à-dire normalement à l'arc de cercle parcouru par le mobile, son travail élémentaire est constamment nul, en sorte qu'elle n'entrera point dans l'équation du travail. Quant au travail de la force p , depuis l'instant où le mobile était en B jusqu'à l'instant où il est venu en M , il aura pour expression (Voy. **TRAVAIL DE LA PESANTEUR**)

$$p.HI = p.(OI - OH) = pl(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = mgl(\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

D'un autre côté, comme le mobile était sans vitesse en B , l'accroissement de sa puissance vive se réduira à celle qu'il possède en M , c'est-à-dire à $\frac{1}{2}mv^2$, en appelant v sa vitesse en ce point; on aura donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos \alpha - \cos \alpha_0),$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}. \quad [1]$$

Cette équation fera connaître la vitesse du mobile pour une position quelconque. On reconnaît qu'elle est à son maximum quand $\cos \alpha$ est le plus grand possible, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, ou pour la position verticale du pendule. On voit aussi qu'elle devient nulle toutes les fois qu'on a $\cos \alpha = \cos \alpha_0$, ce qui suppose $\alpha = \pm \alpha_0$; par conséquent sa vitesse devient nulle pour les deux positions symétriques OB et OB' ; elle augmente toutes les fois que le pendule va en se rapprochant de la verticale; elle va au contraire en diminuant toutes les fois que le pendule s'écarte de la verticale.

Mais, pour avoir une connaissance complète du mouvement, il est nécessaire de déterminer le temps qu'emploie le mobile pour passer de sa position initiale à une position donnée quelconque; et pour cela il faut introduire le temps explicitement dans la relation [1]. Or, si s désigne l'arc BM , on a

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

$$\text{D'ailleurs } s = AB - AM = l(\alpha_0 - \alpha)$$

$$\text{et par conséquent } ds = -l d\alpha;$$

d'où

$$v = -l \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Mettant pour v cette valeur dans l'équation [1], et tirant la valeur de dt , on obtient, après réduction,

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}}$$

et par conséquent,

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \\ = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \quad [2]$$

Si cette intégration pouvait s'effectuer sous forme finie, on aurait donc t en fonction de α ; c'est-à-dire qu'on aurait la relation qui existe entre le temps et l'angle que fait le pendule avec la verticale au bout de ce temps.

Lorsque l'angle α_0 , ou l'écart initial, qu'on appelle aussi l'amplitude, est très-petit, il en est de même de α , et l'expression [2] peut être simplifiée. On a, en effet,

$$\cos \alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{1.2} + \frac{\alpha_0^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

et si α_0 est très-petit, on peut écrire, en négligeant les puissances de α_0 supérieures à la seconde,

$$\cos \alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Pour une raison semblable on a de même, à fortiori,

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

par suite

$$2(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \alpha_0^2 - \alpha^2$$

et par conséquent

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \quad [3]$$

et, en effectuant l'intégration,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{\alpha}{\alpha_0} \right). \quad [4]$$

Si l'on veut avoir le temps employé par le pendule à revenir de la position OB à la verticale, il faut, dans cette formule, faire $\alpha = 0$, ce qui donne

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on veut le temps employé par le pendule pour atteindre la position OB' symétrique de sa position initiale, il faut faire $\alpha = -\alpha_0$, ce qui donne, en appelant T la durée cherchée,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad [5]$$

ce temps est le double du précédent; par conséquent le pendule emploie le même temps à descendre de la position OB à la verticale, que pour remonter de la position verticale à la position OB'. Le pendule se retrouvant en OB' dans la même situation que dans la position OB, on conçoit que le mouvement oscillatoire se continue d'une manière indéfinie.

II. La formule [5] est la relation connue sous le nom de *formule du pendule*. On voit qu'elle est indépendante de l'écart initial α_0 , qu'on appelle aussi l'amplitude de l'oscillation, pourvu que celui-ci soit très-petit; on en conclut que lorsque l'écart

initial est très-petit, les oscillations du pendule deviennent *isochrones*, c'est-à-dire de même durée, ce qui offre un avantage précieux pour la mesure du temps (Voy. PENDULES). L'isochronisme des petites oscillations du pendule a été une des premières découvertes de Galilée.

On voit par cette relation [5] que la durée d'une oscillation est directement proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule, c'est-à-dire que si la longueur du pendule devient 4 fois, 9 fois, etc., plus grande, la durée de l'oscillation devient 2 fois, 3 fois, etc., plus longue. On voit aussi que si l'on fait osciller le même pendule en différents lieux du globe où l'accélération g due à la pesanteur n'ait pas une valeur égale, la durée d'une oscillation est en raison inverse de la racine carrée du nombre g .

Soit n le nombre des oscillations exécutées par le pendule dans un certain temps Θ , on aura

$$\Theta = nT, \text{ d'où } T = \frac{\Theta}{n}.$$

Si l'on met pour T cette valeur dans la relation [5] et qu'on en tire la valeur de g , on trouve

$$g = \frac{\pi^2 l}{\Theta^2} \cdot n^2, \quad [6]$$

c'est-à-dire que l'accélération due à la pesanteur dans un lieu donné du globe est proportionnelle au carré du nombre des oscillations exécutées dans un temps donné. Si ce temps est une heure, ou 3600 secondes, on a

$$g = \left(\frac{\pi}{3600} \right)^2 \cdot l \cdot n^2 = 0,00087266 \cdot l \cdot n^2.$$

La longueur du pendule simple qui bat la seconde sexagésimale se tire aussi de la formule [5] en y supposant

$$T = 1;$$

on trouve

$$l = \frac{g}{\pi^2}.$$

A Paris, où

$$g = 9,8088,$$

on a

$$l = \frac{9,8088}{(3,1416)^2} = 0^m,99384$$

ou à très-peu près 0^m,994.

III. La formule (4) peut être mise sous la forme

$$\alpha = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t;$$

elle permet de donner une image sensible de la loi suivant laquelle l'écart α varie en fonction du temps. — Concevons que l'on représente les arcs α et α_0 par des longueurs à une échelle arbitraire; et décrivons d'un point O quelconque (fig. 2) une

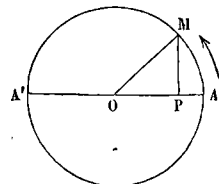


Fig. 2.

circonférence de cercle avec α_0 pour rayon. Si l'on imagine qu'un mobile, placé en A à l'origine du temps, parcourt cette circonférence dans le sens indiqué par la flèche, avec une vitesse angulaire

constante $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, la distance OP du centre à la projection du mobile sur le diamètre qui passe par le point A, exprimera la longueur α ; en sorte que la loi des variations de α en fonction du temps sera exprimée par le mouvement de la projection P sur le diamètre AA'. On a en effet

$$OP = OM \cdot \cos MOA$$

ou
$$OP = \alpha_0 \cos \omega t = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t.$$

Ainsi $OP = \alpha.$

On retrouverait, en discutant le mouvement de cette projection, toutes les circonstances du mouvement oscillatoire du pendule.

IV. Si l'écart initial α_0 n'est pas assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances de α_0 supérieures à la seconde, on ne peut plus intégrer l'équation [2] sous forme finie. On ne peut obtenir l'expression de t que par le développement en série. On trouve ainsi, en appelant h la distance AH (fig. 1) laquelle est égale à $l(1 - \cos \alpha_0)$,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \dots \right],$$

et l'on voit que les oscillations ne sont plus indépendantes de l'écart initial, puisque h , qui en dépend, entre dans la formule. Si l'on peut négliger le carré du rapport $\frac{h}{2l}$, il reste

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{h}{l} \right);$$

mais $\frac{h}{l} = 1 - \cos \alpha_0 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0,$

on peut donc écrire

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0 \right), \quad [8]$$

en négligeant une quantité qui renfermerait la 4^e puissance de $\sin \frac{1}{2} \alpha_0$ (Voy. le Cours de Mécanique de M. Duhamel, tome I, page 316).

En général on ne donne pas à l'écart initial α_0 une valeur supérieure à 6 ou 8 degrés. Pour 8^e la valeur numérique du terme $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0$ se réduit à 0,001216...; ainsi lorsqu'on néglige ce terme, il faut plus de 822 oscillations pour que l'erreur commise sur la durée soit égale à celle d'une oscillation.

PÉNÉTRATION, se dit d'une manière générale de deux corps dont les surfaces se rencontrent, de telle sorte qu'une même portion de l'espace soit à la fois intérieure aux deux corps. On dit, dans ce sens, PÉNÉTRATIONS DE POLYÈDRES. (Voy. ce mot.)

Le mot *pénétration* s'emploie dans un sens plus particulier, pour désigner la situation relative de deux corps, lorsque l'intersection de leurs surfaces se compose de deux courbes séparées, l'une appelée *courbe d'entrée* et l'autre *courbe de sortie*. Si celui des deux corps qui pénètre l'autre était enlevé, il laisserait dans celui-ci une cavité à deux orifices.

On dit qu'il y a *pénétration avec point multiple* ou *pénétration tangentielle* quand les deux surfaces

sont tangentes en l'un de leurs points de rencontre. La courbe d'entrée et la courbe de sortie ont alors un point commun, et ne forment qu'un seul contour sans interruption. Il peut y avoir plusieurs points communs si les surfaces sont tangentes en plusieurs de leurs points de rencontre. C'est ainsi que deux cylindres de révolution ayant le même rayon et dont les axes se coupent, se rencontrent suivant deux ellipses égales qui ont deux points communs aux extrémités d'un commun diamètre.

Lorsque l'intersection ne forme qu'une seule courbe, sans que les surfaces soient tangentes, il y a ARRACHEMENT. (Voy. ce mot.)

La belle collection des modèles géométriques en relief de M. Bardin présente un excellent choix d'exemples de pénétrations diverses.

Voy. INTERSECTIONS DE SURFACES.

PÉNÉTRATION DES PROJECTILES, quantité linéaire dont un projectile pénètre dans les terres, dans la maçonnerie, dans le bois, etc. (Indépendamment de ce sens particulier, le mot *pénétration* se prend aussi en artillerie, dans le sens général, pour l'action de pénétrer). La pénétration des projectiles a été étudiée expérimentalement; elle est soumise à des lois qui peuvent être exprimées par des formules mathématiques, et qui servent à résoudre divers problèmes d'application. Plusieurs auteurs se sont occupés de cette question : Jean Bernoulli, S'Gravesande, Musschenbroek, Euler, Robins, Camus, Poleni; mais ce sont les expériences faites à Metz en 1834 et 1835 qui ont offert, par leur étendue et leur ensemble, les éléments nécessaires pour traiter la question d'une manière satisfaisante. Le milieu résistant qui se prête le mieux aux expériences est la terre argileuse, parce que les parois de la cavité formée par le projectile conservent leur forme après son passage. Lorsqu'un boulet pénètre dans un massif de terres argileuses, il y fait un trou circulaire dont l'orifice AAA (fig. 1)

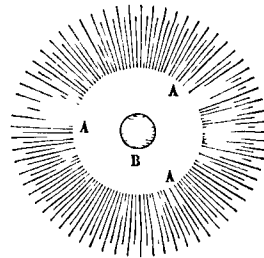


Fig. 1.

est beaucoup plus grand que le diamètre du boulet, et dont les bords sont fendillés dans le sens des rayons. L'intérieur de la cavité forme une surface de révolution dont la génératrice AB (fig. 2) tourne sa convexité vers l'axe; en sorte que cette cavité, qui est conique vers l'orifice, devient sensiblement cylindrique vers le fond; ce qui revient à dire que la section transversale de la surface va en diminuant à mesure que la vitesse du projectile diminue; mais que cette section décroît plus rapidement dans les premiers instants de la pénétration que vers la fin du phénomène. Si l'on examine le boulet, après l'avoir retiré de la cavité où il était

engagé, on voit qu'il est strié dans le sens des méridiens, c'est-à-dire des grands cercles dont le plan passe par l'axe du mouvement; ces stries, dues au frottement des grains de sable, sont quelquefois

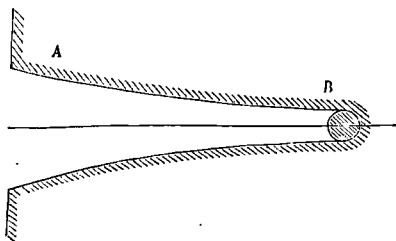


Fig. 2.

assez profondes pour qu'un boulet de 24 ait perdu pendant la pénétration plus de 15 grammes de son poids; mais elles cessent d'être sensibles vers le grand cercle perpendiculaire à la direction du boulet. En cherchant à se rendre compte de ce qui se passe pendant le phénomène, on voit que les particules terreuses situées en avant du boulet, aux environs du point A (fig. 3) sont simplement refou-

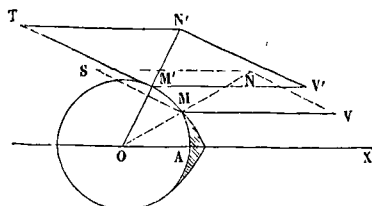


Fig. 3.

lées, et ne peuvent se séparer du projectile. Celles qui sont rencontrées par un point tel que M de la surface du boulet, placé à une certaine distance du point A, prennent une vitesse MN normale à la surface du boulet (ou sensiblement normale si l'on tient compte du frottement); mais leur VITESSE RELATIVE (Voy. ce mot) MS a la direction d'une corde de la sphère, et la molécule terreuse considérée ne peut que glisser sur la surface sans s'en détacher. Les particules qui sont rencontrées par un point M' de la surface, tel que la vitesse relative ait la direction de la tangente M'T au point M', s'échappent et s'écartent de l'axe OX du mouvement, non pas avec cette vitesse relative, mais avec leur vitesse absolue M'N'; et la composante de cette vitesse absolue, perpendiculairement à OX, est la vitesse avec laquelle la molécule s'éloigne de l'axe. Elle refoule les particules avec lesquelles elle est en contact, et s'éloigne de OX jusqu'à ce que sa vitesse soit épuisée par les résistances qu'elle éprouve. Il résulte de ces remarques que le boulet doit éprouver deux résistances distinctes; la première est due à la cohésion du milieu, qu'il est obligé de détruire pour y pénétrer; cette résistance peut être regardée comme indépendante de la vitesse du projectile. La seconde est due à la force vive que le boulet communique aux particules terreuses, force vive qui est prise aux dépens de la sienne propre et lui est proportionnelle, c'est-à-dire qu'elle est propor-

tionnelle au carré de la vitesse du boulet. On a été conduit ainsi à admettre que la résistance totale éprouvée par le projectile se compose de deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel au carré de la vitesse. D'un autre côté, il est évident que cette même résistance doit être proportionnelle à la section transversale du projectile; en appelant F la résistance, R le rayon du boulet, v sa vitesse, α et β deux constantes, on pose donc

$$F = \pi R^2 (\alpha + \beta v^2). \quad [1]$$

On peut, à l'aide de cette expression, trouver la relation qui existe entre la quantité x dont le projectile a pénétré dans le milieu considéré, et la vitesse v qu'il possède à cet instant. En effet, si l'on nomme m la masse du projectile, on aura en égalant l'élément de force vive perdue dans un temps infiniment court, au travail élémentaire de la résistance F,

$$mvdv = -\pi R^2 (\alpha + \beta v^2) dx,$$

$$\text{d'où} \quad dx = -\frac{mvdv}{\pi R^2 (\alpha + \beta v^2)}.$$

Intégrant, et déterminant la constante de manière que $v = v_0$, la vitesse initiale, pour $x = 0$, on obtient

$$x = \frac{m}{2\pi R^2 \beta} \cdot \log' \frac{\alpha + \beta v_0^2}{\alpha + \beta v^2}. \quad [2]$$

Si X désigne la pénétration totale, laquelle correspond à $v = 0$, on trouve

$$X = \frac{m}{2\pi R^2 \beta} \cdot \log' \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2 \right). \quad [3]$$

Les nombreuses expériences faites à Metz avec des pièces de 24, des pièces de 12 et des obusiers de 22 centimètres, ont montré que les valeurs de α et β qui satisfont le mieux aux résultats observés sont $\alpha = 345000^4$ et $\beta = 27,6$.

Si par exemple on considère un boulet de 24, dont on peut prendre le diamètre égal à 0^m,1478; et qu'on le suppose tiré à une courte distance, avec une charge égale au tiers du poids du boulet, de telle sorte que sa vitesse en arrivant au but soit $v_0 = 494$ mètres, on trouvera, en prenant 7032 kilogrammes pour le poids du mètre cube de fonte, $X = 3^m, 866$.

L'expérience directe a donné 3^m,26 et 3^m,51.

La formule [3] donne lieu à plusieurs remarques. En appelant D la densité du projectile, et mettant pour m sa valeur, on peut écrire

$$X = \frac{2R \cdot D}{3g\beta} \log' \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2 \right). \quad [4]$$

Il en résulte que, pour une même vitesse initiale, les pénétrations totales sont proportionnelles aux produits du diamètre du projectile par sa densité.

Si le diamètre est le même, les pénétrations totales sont proportionnelles aux densités; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour les obus comparés aux boulets pleins de même diamètre.

Lorsque la vitesse initiale v_0 est faible, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ étant lui-même très-petit (0,00008 dans le cas

des terres argileuses), le logarithme de $1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2$

est sensiblement proportionnel à $\frac{\beta}{\alpha} v_0^2$; en sorte que, dans ce cas, les pénétrations totales sont sensiblement proportionnelles aux carrés des vitesses initiales.

Lorsqu'il s'agit des projectiles oblongs (Voy. ARMES RAYÉES), la résistance du milieu n'est, à diamètre égal, que les $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle serait pour un projectile sphérique. La formule [2] doit donc être remplacée par celle-ci :

$$x = \frac{3m}{4\pi R^2 \beta} \log' \frac{\alpha + \beta v_0^2}{\alpha + \beta v^2} \quad [5]$$

et la formule [3] par

$$X = \frac{3m}{4\pi R^2 \beta} \log' \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2 \right) \\ = \frac{RD}{g\beta} \log' \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2 \right). \quad [6]$$

Dans les terres sablonneuses, la cavité formée par le boulet se referme derrière lui, par suite de la mobilité des parois; mais on peut admettre, qu'à part cette différence, le phénomène est absolument le même. Voici la valeur de α et β pour quelques-uns des terrains qui se rencontrent le plus fréquemment :

Nature des terres.	α	β
Sable mêlé de gravier.....	435 000 ^b	87
Terre sablonneuse.....	600 000	120
Terre argileuse mêlée de sable.	461 000	27,7
Terre d'ancien parapet, légère..	304 000	60,8
— — rassise..	700 000	42

Les formules établies dans le cas où le projectile pénètre dans les terres, peuvent être appliquées aux cas de pénétration dans la maçonnerie; la principale différence, et elle n'affecte pas les formules, tient à ce que l'orifice est généralement agrandi par les éclats que le projectile enlève en atteignant la paroi offerte à son action. Voici les valeurs de α et de β pour quelques-uns des cas ordinaires.

Nature de la maçonnerie.	α	β
Maçonnerie de bonne qualité....	5 520 000 ^b	82,9
— de médiocre qualité.	4 400 000	66,2
Brique.....	3 160 000	47,4

La pénétration dans la maçonnerie est, comme on devait s'y attendre, beaucoup moindre que dans les terres; pour le boulet de 24 elle ne dépasse pas 0^m,65, avec les plus grandes charges.

Aux faibles distances, jusqu'à 100 mètres, et avec des charges du tiers et de la moitié du poids du boulet, il arrive fréquemment que le boulet se brise contre la maçonnerie quand elle est de bonne qualité.

Dans les bois, le phénomène est encore de même nature que dans les milieux précédemment étudiés, avec cette différence toutefois que la texture fibreuse du bois ne permet pas aux particules atteintes de prendre une très-grande vitesse.

Pour le bois de chêne, on peut prendre $\alpha = 2085000^b$ et $\beta = 41,7$.

Les pénétrations peuvent aller jusqu'à 1^m,60 pour le boulet de 24, tiré à la charge de moitié du poids du boulet, et à la distance de 25 mètres. Afin de donner une idée de la manière dont les pénétrations dans le bois varient avec le diamètre des projectiles et avec la distance à laquelle ils sont lancés, nous citerons quelques-uns des résultats des expériences faites à Gâvres, par la marine, de 1830 à 1840; les résultats que nous choisissons sont ceux

qui se rapportent au cas où la charge était le tiers du poids du projectile.

Calibres.	Pénétrations aux distances de					
	100 ^m	200 ^m	400 ^m	600 ^m	800 ^m	1000 ^m
36	1 ^m ,34	1 ^m ,24	1 ^m ,06	0 ^m ,90	0 ^m ,77	0 ^m ,65
30	1 ^m ,26	1 ^m ,16	0 ^m ,98	0 ^m ,82	0 ^m ,70	0 ^m ,59
24	1 ^m ,17	1 ^m ,07	0 ^m ,89	0 ^m ,73	0 ^m ,61	0 ^m ,51
18	1 ^m ,07	0 ^m ,96	0 ^m ,78	0 ^m ,64	0 ^m ,52	0 ^m ,42
12	0 ^m ,89	0 ^m ,83	0 ^m ,65	0 ^m ,51	0 ^m ,40	0 ^m ,31

L'expérience a montré que la capacité de l'espèce d'entonnoir produit par la pénétration d'un projectile dans un massif en terre ou en maçonnerie est exactement proportionnel, pour un même milieu, à la force vive initiale du projectile. Cette loi remarquable s'étend même aux métaux. Il est donc permis de l'étendre à une période quelconque de la pénétration d'un projectile dans un milieu donné; et cette remarque fournit un moyen de déterminer la forme de l'entonnoir. En vertu de la proportionnalité dont on vient de parler, on a, à un instant quelconque de la pénétration,

$$\frac{1}{2} (v_0^2 - v^2) = k \cdot \int \pi y^2 dx,$$

en appelant k un coefficient numérique, et y le rayon de la surface de l'entonnoir correspondant à la profondeur x , répondant elle-même à la vitesse v ; car cette relation exprime que la perte de force vive est proportionnelle au volume compris entre l'orifice de l'entonnoir et la position actuelle du projectile. On en tire en différentiant

$$mvdv = -k\pi y^2 dx. \quad [7]$$

Mais on a trouvé précédemment

$$mvdv = -\pi R^2 (\alpha + \beta v^2) dx.$$

Il en résulte

$$ky^2 = R^2 (\alpha + \beta v^2).$$

Mais de l'équation [2], qu'on peut écrire

$$x = \frac{1}{n} \log' \frac{\alpha + \beta v_0^2}{\alpha + \beta v^2},$$

en posant pour abrégér l'écriture

$$n = \frac{2\pi R^2 \beta}{m},$$

on tire

$$\alpha + \beta v^2 = (\alpha + \beta v_0^2) e^{-nx}.$$

Par conséquent

$$y^2 = \frac{R^2}{k} (\alpha + \beta v_0^2) e^{-nx}; \quad [8]$$

c'est l'équation de la génératrice de la surface de révolution qui sert de limite à la cavité produite par le projectile. On peut l'écrire plus simplement en remarquant que pour $x = X$ on doit avoir $y = R$; car il en résulte

$$k = (\alpha + \beta v_0^2) e^{-nX}; \quad [9]$$

et, par conséquent,

$$y^2 = R^2 e^{n(X-x)}. \quad [10]$$

On peut remarquer que, d'après la valeur trouvée plus haut pour X , le coefficient k n'est autre chose que α ; on le verrait en tirant X de l'équation [9] et comparant avec [3].

Pour $x = 0$, c'est-à-dire à l'orifice de l'entonnoir, on a

$$y^2 = R^2 e^{nX} = R^2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2 \right).$$

On en conclut que le diamètre de l'orifice sera

d'autant plus grand que le rapport de β à α sera plus considérable.

Enfin, on peut des formules qui précèdent déduire la durée de la pénétration. En effet, on a pour l'accélération du projectile (en supposant le mouvement horizontal)

$$m \frac{dv}{dt} = -\pi R^2 (\alpha + \beta v^2),$$

d'où

$$dt = -\frac{m}{\pi R^2} \frac{dv}{\alpha + \beta v^2}.$$

Intégrant, déterminant la constante de manière que l'on ait $v = v_0$ pour $t = 0$, et posant pour abréger l'écriture

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{m}{\pi R^2 \sqrt{\alpha \beta}} = a,$$

on trouvera

$$t = a \cdot \left(\text{arc tang} \frac{v_0}{\varepsilon} - \text{arc tang} \frac{v}{\varepsilon} \right).$$

Par conséquent, la durée totale T de la pénétration sera

$$T = a \cdot \text{arc tang} \frac{v_0}{\varepsilon} = \frac{m}{\pi R^2 \sqrt{\alpha \beta}} \cdot \text{arc tang} v_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Cette formule donne toujours pour T de très-petites fractions de seconde; de $\frac{1}{32}$ à $\frac{1}{70}$ pour le bou-

let de 24 animé d'une vitesse $v_0 = 494^m$. Le premier de ces nombres se rapporte aux terres argileuses, le second aux sables mêlés de gravier. (Voy. le *Traité de Balistique* de M. Didion, et le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert, I^{re} partie.)

PÉNÉTRATIONS DE POLYÈDRES, questions de Géométrie descriptive dans lesquelles on se propose de trouver l'intersection des surfaces de deux polyèdres qui se rencontrent. Ces questions trouvent parfois leur application; mais elles servent surtout dans les cours à préparer les élèves aux problèmes relatifs à l'intersection des surfaces courbes. Quoiqu'on les désigne le plus souvent sous le nom de *pénétrations de polyèdres*, il peut y avoir, comme pour les surfaces courbes (Voy. INTERSECTIONS DE SURFACES), *pénétration* proprement dite ou *arrachement*, ou une disposition intermédiaire, analogue à la pénétration avec plan tangent commun, et dans laquelle une arête du premier polyèdre et une arête du second se coupent, en déterminant un plan extérieur aux deux polyèdres, au moins dans le voisinage du point de rencontre de ces deux arêtes. Cette espèce de pénétration peut même se subdiviser en plusieurs variétés, si l'on considère à part le cas où une arête de l'un des polyèdres est dans le plan d'une des faces du second, ou celui où une face de l'un des polyèdres est dans le même plan qu'une des faces du second, etc.

La méthode générale employée pour déterminer l'intersection des surfaces de deux polyèdres est d'ailleurs la même que pour construire l'intersection des surfaces courbes. Elle consiste à couper les deux polyèdres par des surfaces auxiliaires convenablement choisies et à déterminer les points communs aux intersections de chaque surface auxiliaire avec la surface de chacun des polyèdres. Les surfaces auxiliaires que l'on emploie sont des plans que l'on fait passer par les arêtes de chaque polyèdre pour déterminer l'intersection de chacune

de ces arêtes avec les faces de l'autre polyèdre. Dans l'application de cette méthode on s'appuie sur les remarques suivantes :

Tout plan parallèle à une arête latérale d'un prisme coupe sa surface suivant des droites parallèles à ses arêtes.

Tout plan qui passe par le sommet d'une pyramide coupe ses faces latérales suivant des droites passant par ce sommet.

Par conséquent, tout plan qui passe par le sommet d'une pyramide et qui est parallèle aux arêtes latérales d'un prisme coupe ces deux polyèdres suivant des droites; et les points communs aux droites déterminées par un même plan sécant appartiennent à l'intersection des surfaces des deux polyèdres.

De même : tout plan qui passe par le sommet de deux pyramides coupe leurs faces suivant des droites; et la rencontre de ces droites deux à deux, dans chacun des plans sécants, donne des points communs aux surfaces des deux pyramides.

Tout polyèdre pouvant être décomposé en pyramides, ou accidentellement en pyramides et en prismes, on comprend que la recherche des points communs aux surfaces de deux polyèdres se ramène à l'application des principes que nous venons de rappeler.

Nous nous bornerons ici à l'exemple suivant, dont les données sont extraites des *Notes et croquis de Géométrie descriptive* de M. Bardin.

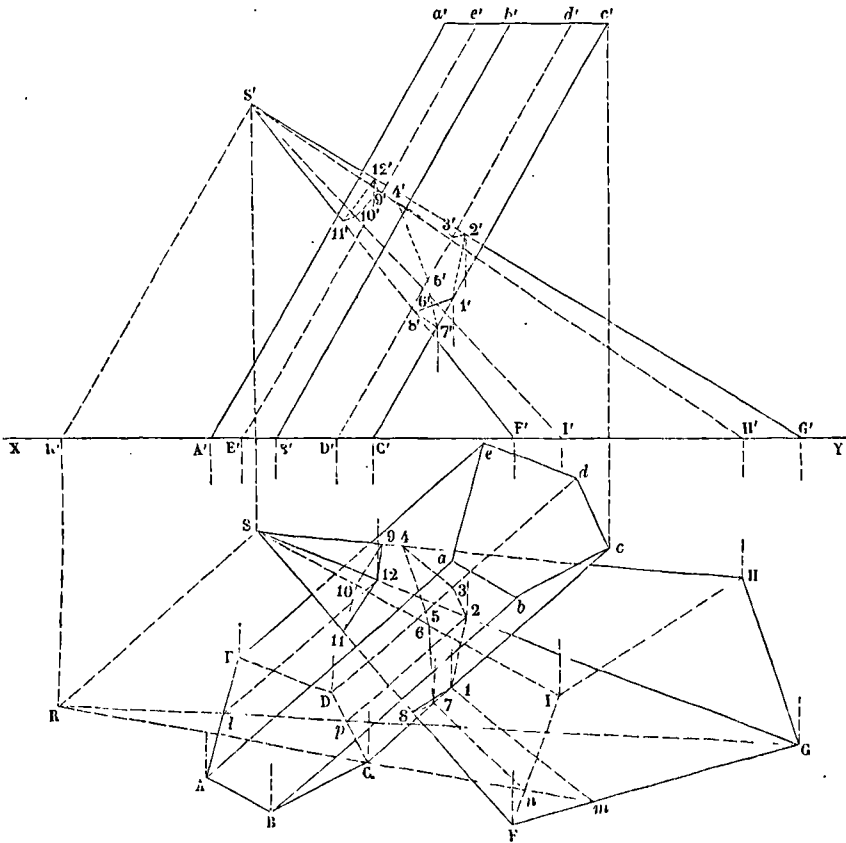
Il s'agit d'une pyramide pénétrant un prisme. Le prisme a pour base le pentagone ABCDE, qui se projette en A'B'C'D'E'; ses arêtes ont la direction indiquée par Aa, A'a'; sa base supérieure se projette en a'b'c'd'e'. La pyramide a pour base le quadrilatère FGHI, qui se projette en F'G'H'I', et son sommet a pour projections S et S'.

Par ce sommet on mène une parallèle aux arêtes latérales du prisme; et l'on détermine la trace horizontale R, R' de cette droite. Par la droite RS, R'S', et par l'arête Cc, C'c' du prisme menons un plan; sa trace horizontale RC coupe FG en un point m, et par conséquent ce plan coupe la face SFG, S'F'G' suivant une droite ayant pour trace horizontale le point m, et qui coupe Cc en un point 1; ce point est la projection horizontale d'un point de l'intersection cherchée. On détermine la projection verticale correspondante 1' en menant 1.1' perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de C'c'.

Par la droite RS, R'S' et par l'arête SG, S'G' de la pyramide, on mène un plan, dont la trace horizontale est RG. Cette trace coupe CD en un point p. Le plan coupe donc la face CDcd, C'D'c'd', suivant une parallèle aux arêtes latérales, laquelle a pour projection horizontale p 2. Cette projection horizontale coupe SG au point 2; ce point est donc la projection horizontale d'un second point de l'intersection demandée. On détermine la projection verticale correspondante 2' en menant 2.2' perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de S'G'.

On détermine de la même manière tous les points dont on peut avoir besoin, en menant par la droite RS, R'S' des plans auxiliaires que l'on fait passer, ou par les arêtes latérales du prisme pour obtenir leurs intersections avec les faces de la pyramide

ou par les arêtes latérales de la pyramide pour avoir leur rencontre avec les faces du prisme. On trouve ainsi successivement : le point 3.3' où l'arête Dd, D'd' du prisme perce la face SGH, S'G'H' de la pyramide; le point 4.4' où l'arête SH, S'H' de la pyramide perce la face Ae, A'e' du prisme; le point 5.5' où l'arête Dd, D'd' du prisme perce la face SIH, S'I'H' de la pyramide; le point 6.6' où



l'arête SI, S'I' de la pyramide perce la face Cd, C'd' du prisme; le point 7.7' où l'arête Cc, C'c' du prisme perce la face SIF, S'I'F' de la pyramide; le point 8.8' où l'arête SF, S'F' de la pyramide perce la face Cb, C'b' du prisme; puis, les points 9.9'; 10.10'; 11.11'; 12.12' où les arêtes latérales de la pyramide percent la face Ae, A'e' du prisme. En unissant ces points successifs par des droites, on obtient le polygone gauche 1.2.3.4.5.6.7.8.1; 1'.2'.3'.4'.5'.6'.7'.8'.1' qui forme le polygone d'entrée; et le quadrilatère plan 9.10.11.12; 9'.10'.11'.12' qui forme le polygone de sortie.

Afin d'éviter la confusion, on n'a conservé sur l'épure que les lignes de construction relatives à la détermination des points 1.1' et 2.2'.

PENOMBRE, zone ou bande imparfaitement éclairée qui borde une ombre propre ou une ombre portée (Voy. OMBRES). La pénombre est due aux dimensions du corps éclairant; elle ne se manifesterait pas si la lumière émanait d'un simple point lumineux. — On donne aussi le nom de pénombre à l'espace imparfaitement éclairé qui entoure l'ombre projetée derrière un corps opaque et la sépare de l'espace complètement éclairé.

PENTE D'UNE DROITE, tangente de l'angle que cette droite fait avec sa projection horizontale. Elle a pour mesure le rapport entre la hauteur d'un point quelconque de la droite au-dessus du plan horizontal de comparaison, et la distance de la projection de ce point à la trace de la droite; et ce rapport s'exprime par deux nombres dont l'un, le numérateur, prend le nom de *hauteur*, et l'autre, le dénominateur, prend le nom de *base*; on dit ainsi que la pente d'une droite est de 2 de hauteur pour 3 de base, ou que sa pente est 2 sur 3 ou $\frac{2}{3}$. Une droite inclinée à 1 sur 1 est une droite qui fait un angle de 45° avec l'horizon. Le plus souvent on prend pour hauteur l'unité; dire alors que la pente d'une droite est $\frac{1}{6}$, c'est dire que, la hauteur étant 1, la base est 6. — Quelquefois on rapporte la pente à la verticale au lieu de la rapporter à l'horizon; dire alors qu'une droite est inclinée au tiers, c'est dire que la base est le tiers de la hauteur. On évite toute confusion en disant que la droite est inclinée à *tant* de base sur *tant* de hauteur.

La pente d'un plan est la pente d'une perpendiculaire aux horizontales de ce plan, perpendicu-

laire que l'on appelle la *ligne de plus grande pente* du plan, attendu qu'une droite tracée sur ce plan dans toute autre direction fait avec l'horizon un angle moindre.

Lorsqu'une droite et un plan sont perpendiculaires, la droite et la ligne de plus grande pente du plan font avec l'horizon des angles complémentaires; il en résulte que leurs pentes sont deux nombres inverses l'un de l'autre; si l'une est exprimée par $\frac{2}{3}$, l'autre a pour valeur $\frac{3}{2}$. En d'autres termes, le produit des deux pentes est égal à l'unité.

On appelle *PENTE PAR MÈTRE*, le quotient de la différence de niveau des extrémités d'une droite par la longueur de cette droite. C'est le sinus de l'angle que la droite fait avec l'horizon. Cette expression s'applique fréquemment à l'inclinaison d'une route, d'une conduite d'eau, de la surface d'un cours d'eau découvert, etc. Si, par exemple, sur une longueur de 6000^m un pareil cours d'eau conserve une inclinaison uniforme, et que la différence de niveau entre les points extrêmes de sa surface soit de 3^m, on dira que la pente par mètre est $\frac{3^m}{6000}$ ou 0^m,0005.

PERCHE, ancienne mesure de longueur usitée en France, et dont le carré servait de mesure agraire. La perche variait d'une contrée à l'autre, mais les plus fréquemment employées étaient la *perche de Paris*, carré de 18 *pieds* de côté, valant 34^m,19, et la *perche des eaux et forêts*, carré de 22 *pieds* de côté, valant 51^m,07. 100 perches faisaient un *arpent*. (Voy. POIDS ET MESURES.)

PÉRIGÉE (du grec *περί*, près de, et *γή*, terre), point de l'orbite apparente du soleil qui est le plus rapproché de la terre; c'est l'un des sommets du grand axe de cette orbite. Le périgée, dans le mouvement apparent du soleil, répond au périhélie dans le mouvement réel de la terre (Voy. PÉRIHÉLIE).

On nomme également *périgée* le point de l'orbite lunaire où cet astre est le plus rapproché de la terre; ce point est celui où, d'après la loi des aires (Voy. LOIS DE KÉPLER), la vitesse de la lune est la plus grande; et c'est par cette considération qu'il se détermine. Le périgée n'est point fixe sur l'orbite lunaire; il a un mouvement dans le même sens que celui de la lune, et en vertu duquel il fait le tour du ciel en 3282¹/₅₇.

PÉRIHÉLIE (du grec *περί*, près de, et *ήλιος*, soleil), point de l'orbite terrestre le plus rapproché du soleil; c'est un des sommets de l'ellipse que décrit le centre de la terre. Ce point n'est pas fixe; il éprouve un déplacement lent dans le sens direct, qui est de 11^{''},7 par an. Comme, dans le même espace de temps, l'équinoxe du printemps rétrograde de 50^{''},2, il en résulte que la longitude du périhélie augmente chaque année de la somme de ces deux arcs, soit de 61^{''},9.

L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs de la terre au périhélie forme l'*année anomalistique*; elle surpasse l'année sidérale de 4^m,35.

Le mouvement direct du périhélie, et par conséquent du grand axe de l'orbite terrestre, se combine avec le mouvement rétrograde de la ligne des équinoxes pour faire varier la durée des SAISONS (Voy. ce mot).

On donne également le nom de *périhélie* au point de l'orbite d'une planète qui est le plus rapproché du soleil. C'est au périhélie que la planète a la plus grande vitesse.

PÉRIMÈTRE MOUILLÉ, intersection du lit d'un cours d'eau par un plan perpendiculaire à la direction du courant. Dans un courant à section rectangulaire dont la largeur est *b* et la profondeur *h*, le périmètre mouillé est *b* + 2*h*. Si la section du courant est un demi-cercle de rayon *R*, le périmètre mouillé est πR ; et ainsi de suite. (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS, JAUGEAGE DES COURS D'EAU.)

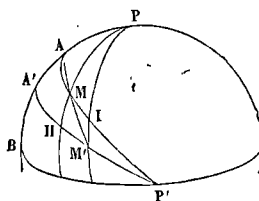
PÉRISCIENS (du grec *περί*, autour, et de *σκιά*, ombre), peuples dont l'ombre à midi fait le tour de l'horizon pendant la durée de l'année. Ce sont les habitants des zones glaciales.

PERPENDICULAIRE ARRIÈRE, verticale du point où la râblure d'étambot d'un navire rencontre la ligne de flottaison en charge (Voy. CONSTRUCTION NAVALE, DEVIS DE CONSTRUCTION). C'est une des droites auxquelles on rapporte les distances mesurées dans le sens longitudinal.

PERPENDICULAIRE AVANT, verticale du point où la râblure d'étrave d'un navire rencontre la ligne de flottaison en charge (Voy. CONSTRUCTION NAVALE, DEVIS DE CONSTRUCTION). C'est une des droites à partir desquelles on mesure les distances dans le sens longitudinal.

PERPENDICULAIRES À LA MÉRIDIENNE, lignes géodésiques (Voy. ce mot) dont le premier élément est perpendiculaire à la méridienne du lieu considéré.

I. Lorsque l'on regarde le globe terrestre comme une sphère, une perpendiculaire à la méridienne n'est autre chose que la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire au méridien du lieu, puisque sur la sphère les lignes géodésiques sont des arcs de grands cercles. Dans ce cas, soit *P* le pôle ter-



restre, *PAB* un méridien, *AM* et *A'M'* deux arcs de grand cercle perpendiculaires à ce méridien; ces arcs prolongés iront se couper en un point *P'*, qui sera le pôle du méridien *PAB*, et qui sera par conséquent situé sur l'équateur puisque sa distance au point *P* sera de 90 degrés. Les perpendiculaires à la méridienne sont quelquefois employées en Géodésie pour fixer la position des divers sommets d'un réseau de triangles à la surface du globe. Soit *M* un de ces sommets; au lieu de déterminer sa position par ses coordonnées géographiques, on suppose qu'on ait mené par ce point une perpendiculaire *MA* à la méridienne principale *PB*, et l'on prend pour coordonnées du point *M* les arc *PA* et *AM*. De même, si *M'* est un second sommet du réseau, et *M'A'* une perpendiculaire à la méridienne principale *PB*, les coordonnées du point *M'* seront *PA'* et *M'A'*. Ces coordonnées peuvent être désignées sous le

nom de *coordonnées sphériques rectangulaires*. Dans les TRIANGULATIONS (Voy. ce mot) on a à résoudre ce problème : Connaissant les coordonnées sphériques rectangulaires d'un sommet M, la longueur d'un côté géodésique MM', et l'azimut de ce côté sur l'horizon du sommet M, trouver les coordonnées du point M'.

Soient PMH et PIM' les méridiens des points M et M'. Désignons PA par x , MA par y , PA' par x' , M'A' par y' , l'angle IMH par ω , l'angle M'MH par α . On connaît dans le triangle PAM, rectangle en A, le côté PA = x et le côté AM = y ; on pourra donc calculer l'angle PMA = ω . Dans le triangle MP'M' on connaîtra alors le côté MM' qui a été mesuré, le côté MP' = $90^\circ - y$, et l'angle P'MM' = $\omega - \alpha$; on pourra donc calculer : 1° l'angle en P', lequel a pour mesure $x' - x$, ce qui donnera x' ; 2° le côté M'P' = $90^\circ - y'$, ce qui fera connaître y' .

On aura d'abord, dans le triangle PAM,

$$\tan \omega = \frac{\tan x}{\sin y}. \quad [1]$$

Le triangle MP'M' donnera ensuite, en désignant MM' par u ,

$$\sin y' = \cos u \sin y + \sin u \cos y \cos (\omega - \alpha), \quad [2]$$

et

$$\sin (x' - x) = \frac{\sin u \sin (\omega - \alpha)}{\cos y'}, \quad [3]$$

relations qui résolvent le problème, puisque la première donnera y' et la seconde $x' - x$, d'où x' .

Mais, au lieu de procéder de cette manière, il est plus simple de remarquer que le problème qui nous occupe en ce moment est le même que celui qui consiste à déterminer la latitude et la longitude des sommets successifs d'un réseau de triangles [Voy. COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des)], avec cette différence que le pôle P est remplacé par le point P', l'équateur par la méridienne principale PB, les méridiens des points M et M' par les perpendiculaires P'MA, P'M'A' à la méridienne, et que par suite les latitudes l et l' se trouvent remplacées par les ordonnées MA = y et M'A' = y' , et la différence $L_1 - L$ des longitudes par l'arc AA' = $x' - x$. En même temps, il faut remplacer l'azimut A du côté MM' sur l'horizon du point M, par l'angle $180^\circ + IMM'$ ou $180^\circ + \omega - \alpha$ qu'il fait avec la perpendiculaire P'A, en comptant cet angle à partir du point A, vers le nord. Si l'on fait ces changements dans les formules [3] et [6] établies à l'article cité, on obtient, en désignant toujours par u le rapport du côté MM' au rayon,

$$y' = y + u \cos (\omega - \alpha) - \frac{1}{2} u^2 \tan y \cdot \sin^2 (\omega - \alpha), \quad [4]$$

et

$$x' - x = \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\cos y} \cdot u - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\cos y} u^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^3 (\omega - \alpha)}{\cos^3 y} u^3. \quad [5]$$

Cette dernière formule peut, la plupart du temps, être réduite à son premier terme.

Ces relations peuvent être présentées sous plusieurs formes différentes (Voy. le *Traité de Géodésie* de M. Puissant, et la *Géodésie* de Francoeur). Les arcs y sont rapportés au rayon; il faudrait diviser par $\sin 1''$ pour les rapporter au degré.

II. Lorsqu'il n'est pas permis de regarder la terre

comme sphérique, la perpendiculaire à la méridienne n'est plus un arc de grand cercle, ce n'est même plus une courbe plane. Si, par exemple, la surface terrestre est considérée comme un ellipsoïde de révolution, le premier élément de la perpendiculaire AM à la méridienne détermine, avec la normale en A à l'ellipsoïde, un plan vertical; de même, le dernier élément détermine avec la normale en M un autre plan vertical; or ces deux plans verticaux, contenant les normales en deux points différemment situés sur l'ellipsoïde méridienne, viennent rencontrer l'axe de rotation en des points différents; ces deux plans ne sauraient donc se confondre. Ainsi la perpendiculaire à la méridienne est en général une courbe à double courbure.

Si l'on veut néanmoins déterminer les coordonnées x', y' en fonction de x, y , il faut substituer à la surface terrestre la sphère *transversalement osculatrice* au point M, qui a pour rayon la grande normale N à l'ellipse méridienne (Voy. COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES). Il faut alors dans les formules [4] et [5] ci-dessus, remplacer u par $\frac{k}{N}$, la lettre k désignant la longueur du côté géodésique MM'; et diviser par $\sin 1''$, si l'on veut que y' et $x' - x$ soient exprimés en degrés.

Si l'on veut avoir la différence des latitudes ou des longitudes des extrémités d'une perpendiculaire à la méridienne, dont la longueur est petite par rapport au rayon du globe, ce qui est le cas ordinaire, il faut dans les formules [5] et [8] de l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des) faire A = 90° , ce qui donne

$$l_1 = l - \frac{k^2}{N^2} \cdot \frac{\tan l (1 + e^2 \cos^2 l)}{2 \sin 1''}$$

et

$$L_1 = L - \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{\cos \lambda \cdot \sin 1''}.$$

Dans cette dernière formule, on a

$$\lambda = l + \frac{k^2}{N^2} \cdot \frac{1}{2 \sin 1''},$$

en vertu de la formule [4] de l'article cité.

Lorsque la perpendiculaire à la méridienne a une longueur comparable au rayon du globe, les formules ci-dessus ne sont plus applicables; et il faut recourir aux relations générales concernant les LIGNES GÉODÉSQUES (Voy. ce mot).

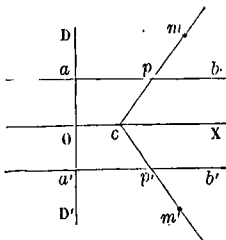
PERPÉTUELLE APPARITION (CERCLE DE), petit cercle de la sphère céleste dont tous les points sont à une distance du pôle égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. Ce cercle sépare la région des étoiles *circumpolaires* (Voy. ce mot) de celle où se trouvent les étoiles qui passent plus ou moins de temps au-dessous de l'horizon.

PERPÉTUELLE OCCULTATION (CERCLE DE), petit cercle de la sphère céleste dont tous les points sont à une distance du pôle égale au supplément de la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. Les étoiles placées à une distance du pôle plus grande restent constamment au-dessous de l'horizon, et sont, par suite, constamment *occultées*. Le cercle de perpétuelle occultation sépare la région du ciel où se trouvent ces étoiles, de celle où se trouvent les étoiles qui passent un temps plus ou moins long au-dessus de l'horizon.

PERPIGNAGE, opération qu'on exécute dans la **CONSTRUCTION NAVALE** (*Voy.* ce mot) pour s'assurer que les faces planes des couples sont perpendiculaires au plan supérieur de la quille, et que les barres inférieures de l'arcasse ont leur face de dessous parallèle à ce même plan. La première de ces vérifications pourrait se faire avec le fil à plomb si la quille était placée horizontalement; mais, en vue de la mise à flot, ou du **lancement** du navire, la quille est disposée dans le chantier suivant une ligne inclinée de 76 à 83 millimètres pour les vaisseaux et frégates, et davantage pour les petits bâtiments; et c'est dans cette position que la membrure vient s'y assembler, l'étrave en haut et l'étambot du côté de la mer. Le fil à plomb ne peut donc suffire pour s'assurer que les faces planes des couples sont perpendiculaires au plan supérieur de la quille.

Pour perpigner un couple droit, on prend deux points symétriques sur l'arête extérieure d'un même gabariage, du gabariage avant par exemple, et sur la ligne médiane de la quille deux points placés de part et d'autre à égale distance de ce même plan de gabariage. Le couple sera perpigné si, en joignant chacun des deux premiers points à chacun des deux derniers, on obtient quatre droites égales. Si cela n'était pas, on rappellerait le couple sur l'avant ou sur l'arrière d'une quantité convenable en le maintenant balancé (*Voy.* **BALANCEMENT**). Cette opération se fait avec le plus grand soin pour le maître-couple; elle pourrait s'exécuter de même pour les couples de levée; mais on emploie la méthode suivante pour opérer un perpignage général des couples droits. On cloue sur l'une des faces du maître-couple une planche, dite *planche d'ouverture*, dont le can supérieur répond à deux points symétriquement placés sur les deux branches; et l'on divise l'arête supérieure de cette planche en trois parties égales. Aux deux points de division on fixe deux longues règles que l'on maintient parallèles à la quille. Cela fait, pour perpigner un couple quelconque, on tend d'une branche à l'autre un cordeau qui touche les deux règles, et qui correspondra à deux points symétriques sur ces deux branches si le couple est bien balancé. Il faudra de plus, pour qu'il soit bien perpigné, que les distances, comptées sur les deux règles, entre le cordeau et la planche d'ouverture fixée au maître-couple, soient égales à la distance qui sépare, sur la quille, le plan du maître-couple et le plan du couple considéré.

Pour perpigner un couple dévoyé, on se sert du couple droit le plus voisin, supposé perpigné déjà.



Soit OX la ligne médiane de la quille, DD' la trace horizontale du plan du couple droit sur la face supérieure de la quille; ab, a' b' les projections, sur ce même plan, des deux règles dont il a été ques-

tion tout à l'heure et que nous désignerons par AB et A'B'. Soient cm et c'm' les traces sur le même plan des deux plans verticaux qui contiennent les deux branches du couple dévoyé; m, m' les projections de deux points M et M' symétriques sur ces deux branches; et p, p' les intersections des droites cm et c'm' avec les droites ab et a'b'. Les distances ap et a'p' sont données par le devis; on peut les reporter sur les règles, à partir des points A et A' projetés en a et a', ce qui donnera sur ces règles deux points P et P', projetés en p et p'. Si l'on joint dans l'espace les points M et P et les points M' et P', les droites de jonction seront situées l'une dans le plan de l'une des branches du couple dévoyé, l'autre dans le plan de l'autre branche; elles se rencontreront donc sur l'intersection de ces deux plans, laquelle est perpendiculaire à la face supérieure de la quille. Si donc on opère la jonction dont on vient de parler par le moyen de deux cordons, la droite qui joindra le point c avec le point de rencontre des deux cordons devra être perpendiculaire à la face supérieure de la quille; et la distance de ce point de rencontre des deux cordons au plan du couple droit devra être égale à Oc.

Pour perpigner l'arcasse, il faut se rappeler que, lorsqu'elle est dressée, la face inférieure du fourcat, qui est plane, doit être parallèle à la face supérieure de la quille. Si donc on trace, sur l'une des faces latérales de l'étambot, une droite perpendiculaire à la face inférieure du fourcat, ou, ce qui revient au même, aux arêtes des entailles pratiquées dans l'étambot pour assembler le fourcat avec lui, cette droite, quand l'arcasse sera dressée, devra être perpendiculaire à la face supérieure de la quille. On s'assure, quand l'arcasse est encore à terre, que la droite est perpendiculaire à la face inférieure du fourcat, en y appliquant l'un des côtés de l'angle droit d'une équerre; l'autre côté de l'angle droit doit coïncider, dans toutes les parties de l'équerre, avec la face du fourcat. Quand l'arcasse est dressée, il est facile de s'assurer que la droite dont il s'agit est perpendiculaire à la face supérieure de la quille; il suffit pour cela de vérifier qu'elle fait avec la direction du fil à plomb un angle égal à celui que la quille fait avec le plan horizontal.

PERROQUET (MÂT DE), partie du mât supérieure au mât de hune. Le perroquet du grand mât prend le nom de *grand perroquet*, celui du mât de misaine se nomme *petit perroquet*, celui du mât d'artimon se désigne sous le nom de *mât de perruche*. (Le hunier d'artimon porte aussi le nom de *perroquet* de fougue). Les mêmes noms s'appliquent aux voiles correspondantes. (*Voy.* **MÂTURE**, **VOILES**.)

PERSPECTIVE, branche de la Géométrie appliquée qui enseigne à représenter, sur une surface donnée, les corps supposés placés au delà, tels qu'ils seraient vus s'ils existaient réellement et que la surface donnée fût transparente. — La surface sur laquelle on représente ainsi les corps prend le nom de *tableau*; elle peut être quelconque, mais le plus généralement elle se réduit à un plan vertical; quelquefois cependant c'est une surface cylindrique ou une sphère.

Si de l'œil du spectateur on suppose mené un rayon visuel à un point M situé derrière le tableau, ce rayon perce le tableau en un point m qui est ce

qu'on appelle la *perspective* du point M. Si, de même, on mène de l'œil du spectateur des rayons visuels à tous les points d'une ligne AB, droite ou courbe, placée derrière le tableau, la surface plane ou conique ainsi déterminée coupe le tableau suivant une ligne *ab* qui est la perspective de la ligne AB. Si l'on imagine un corps quelconque placé derrière le tableau, et que l'on mène par l'œil du spectateur tous les rayons visuels qui rasent la surface du corps sans y pénétrer, on détermine une surface conique, qui enveloppe le corps considéré, et dont l'intersection avec le tableau forme ce qu'on appelle le *contour apparent* de ce corps. L'ensemble formé par le contour apparent, et par les perspectives de toutes les arêtes visibles du corps, constitue la *perspective* de ce corps. Sa vue procure à l'œil la même sensation, en ce qui concerne la forme, que s'il voyait le corps lui-même.

I. Le problème général de la perspective consiste donc à trouver l'intersection du tableau avec diverses surfaces coniques ayant toutes pour sommet l'œil du spectateur. Si l'on suppose, comme cela a toujours lieu en effet, que le tableau soit une surface géométriquement définie, et dont on sache construire les sections planes, la recherche de l'intersection de cette surface avec l'une des surfaces coniques dont il vient d'être question n'offre aucune difficulté. Par l'œil O du spectateur on mènera un plan P, qui coupera le tableau suivant une ligne L, et la surface conique suivant une ou plusieurs génératrices, G, G', etc. On déterminera l'intersection *g*, *g'* de chacune de ces génératrices avec la ligne L; les points *g*, *g'*, appartiendront à l'intersection du tableau avec la surface conique. En faisant varier la direction du plan P on obtiendra autant de points que l'on voudra de l'intersection demandée, et on pourra les réunir par un trait continu.

II. Quand le tableau est un plan vertical, ce qui est le cas ordinaire, la méthode générale se simplifie, et conduit, dans chaque cas particulier, à des règles d'une application facile. — Il résulte d'abord de ce que le tableau est plan que toute ligne droite a pour perspective une ligne droite; car tous les rayons visuels menés aux différents points d'une même droite forment un plan, dont l'intersection avec le plan du tableau est une droite. — Il en résulte en second lieu que si deux droites sont parallèles dans l'espace, leurs perspectives vont concourir au point où le tableau est rencontré par une droite menée de l'œil du spectateur parallèlement aux deux premières. Désignons, en effet, par AB et CD les deux droites, et par O l'œil du spectateur. Les rayons visuels menés de O aux divers points de AB déterminent un plan OAB qui coupe le tableau suivant une droite *ab*, perspective de AB. De même, le plan OCD coupe le tableau suivant une droite *cd*, perspective de CD. Concevons maintenant que par le point O l'on mène une parallèle aux deux droites proposées, et soit o le point où elle rencontre le tableau. La droite Oo étant dans le plan OAB puisqu'elle est parallèle à AB, le point o est à la fois dans le plan OAB et dans le plan du tableau; il appartient donc à la droite *ab*. De même la droite Oo étant dans le plan OCD puisqu'elle est parallèle à CD, le point o est à la fois dans le plan OCD et dans le plan du tableau; il appartient donc à la droite

cd. Donc enfin, les droites *ab* et *cd* concourent au point o, ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ces droites concourantes sont ce que l'on appelle des *fuyantes*.

Il n'y a d'exception que pour les droites parallèles au plan du tableau; les perspectives de ces droites sont parallèles aux droites elles-mêmes, et par conséquent parallèles entre elles.

Toute figure parallèle au plan du tableau reste semblable à elle-même en perspective. Supposons d'abord, en effet, que la figure soit un triangle; chacun de ses côtés ayant pour perspective une droite parallèle, le triangle perspectif sera équiangle avec le triangle proposé, et lui sera par conséquent semblable. Si la figure considérée est un polygone, on pourra le diviser en triangles; le polygone perspectif et la figure proposée se composeront donc d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et seront par conséquent semblables. On passera du cas d'un polygone à celui d'une figure curviligne quelconque en y inscrivant des polygones d'un nombre de côtés de plus en plus grand: chacun de ces polygones ayant pour perspective un polygone semblable, il en sera encore de même à la limite, c'est-à-dire quand le polygone inscrit ayant un nombre infini de côtés infiniment petits se confondra avec la figure donnée.

Enfin le choix d'un tableau plan et vertical donne lieu à une dernière remarque. Si de l'œil du spectateur on abaisse une perpendiculaire sur le plan du terrain supposé horizontal, on obtient ce qu'on appelle le *ped du spectateur*. Toute droite qui, prolongée, irait passer par le pied du spectateur (ou, d'une manière plus générale, toute droite qui, prolongée, irait rencontrer la verticale menée par l'œil du spectateur), a pour perspective une verticale, intersection du plan du tableau avec le plan vertical contenant la droite. Car ce plan vertical contient tous les rayons visuels menés aux différents points de la droite.

III. On prend le plan du tableau pour plan vertical de projection, et le plan du terrain sur lequel le spectateur est supposé placé pour le plan horizontal. Soit XY (fig. 1) la ligne de terre, O et P les

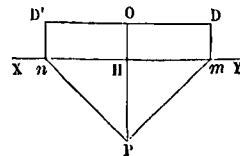


Fig. 1.

projections verticale et horizontale de l'œil du spectateur. Le point O est ce qu'on appelle le *point de vue*; c'est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil du spectateur sur le plan du tableau; d'après ce qui a été démontré plus haut, toutes les droites perpendiculaires au tableau auront pour perspectives des droites concourant au point O, ce qu'on énonce en disant que les *perpendiculaires au tableau vont, en perspective, concourir au point de vue*.

Par le point O menons DD' parallèle à XY. Cette droite est la trace verticale du plan horizontal

mené par l'œil du spectateur; on lui donne le nom d'*horizon*. C'est sur cette droite que se trouvent les perspectives de tous les points situés dans le plan horizontal passant par l'œil du spectateur.

Imaginons dans ce plan deux droites, dont les projections horizontales Pm et Pn font avec la ligne de terre des angles de 45° ; les traces verticales D et D' de ces deux droites portent le nom de *points de distance*. C'est vers l'un ou l'autre de ces points que vont concourir toutes les horizontales qui font avec le tableau des angles de 45° . Leur nom vient de ce que, les triangles PHm et PHn étant isocèles puisque les angles en m et en n sont de 45° , les distances Hm et Hn , et par suite leurs égales OD et OD' , sont égales à HP , ou à la distance de l'œil du spectateur au plan du tableau.

Les problèmes de perspective usuelle se résolvent tous par la considération du point de vue et des points de distance. Mais il y a une dernière convention à faire connaître. Les objets dont on cherche la perspective étant situés derrière le tableau, leurs projections horizontales sont placées au-dessus de la ligne de terre, c'est-à-dire précisément dans l'emplacement destiné à la perspective demandée. Pour éviter cet inconvénient, on transporte le plan du tableau au delà des projections horizontales dont il s'agit, afin de pouvoir exécuter à part les constructions relatives aux données du problème, et celles qui se rapportent à la perspective demandée. Les exemples suivants feront comprendre l'usage de cette convention.

1. *Mettre en perspective un point donné sur le plan horizontal de projection.* Soit XY (fig. 2) la

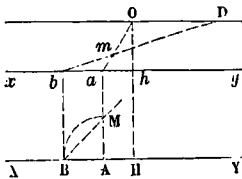


Fig. 2.

trace horizontale du tableau, M le point donné; xy la ligne de terre transportée, O le point de vue, D le point de distance. Abaissons MA perpendiculaire sur XY ; rabattons MA en BA par un arc de cercle décrit du point A ; joignons MB . Puis reportons les points A et B en a et b sur xy par des perpendiculaires à cette ligne. Le point M peut être considéré comme l'intersection des droites AM et BM . La première étant perpendiculaire au tableau, aura pour perspective la droite aO dirigée vers le point de vue; la seconde étant horizontale et faisant avec le tableau un angle de 45° , sa perspective sera une droite bD dirigée vers le point de distance. Le point m , intersection de aO et de bD , sera donc la perspective du point M .

2. *Mettre en perspective un polygone ABCDE* (fig. 3) donné sur le plan horizontal de projection. Il suffit de répéter pour chaque sommet la construction que nous venons d'indiquer, et de joindre les points obtenus par des droites successives. Le polygone $abcde$ qui en résulte est la perspective du polygone donné $ABCDE$.

3. *Mettre en perspective un cercle donné dans le*

plan horizontal de projection. Circonscrivez au cercle un polygone régulier; mettez en perspective ce polygone ainsi que les points de tangence; et tracez à la main une courbe qui passe par les per-

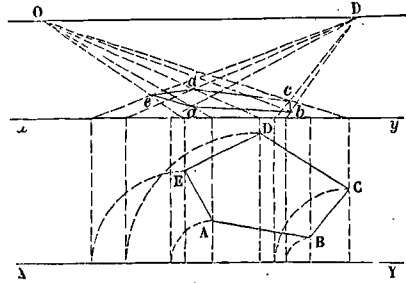


Fig. 3.

spectives de ces points de tangence, et qui soit tangente aux côtés du polygone perspectif; cette courbe sera la perspective du cercle proposé.

La figure 4 montre le résultat obtenu par l'emploi d'un hexagone régulier.

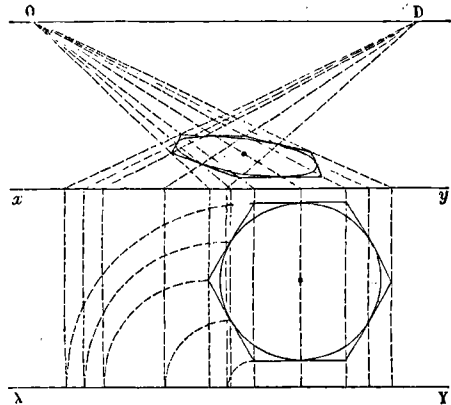


Fig. 4.

Lorsque le cercle est très-petit, on se contente de lui circonscrire un carré. Lorsqu'il est au contraire très-grand, il faut multiplier les côtés du polygone régulier si l'on veut obtenir une approximation satisfaisante. La perspective obtenue est une ellipse toutes les fois que le cercle donné est, comme dans la figure 4, situé en arrière du tableau. C'est encore une ellipse quand une partie seulement du cercle est située derrière le tableau, pourvu que le cercle soit tout entier en avant du spectateur, c'est-à-dire en avant de la parallèle à la ligne de terre menée par le pied du spectateur; parce qu'alors le tableau coupe encore toutes les génératrices d'une même nappe du cône formé par les rayons visuels menés de l'œil aux différents points du cercle. — Mais on obtient un arc de parabole quand le cercle donné est tangent à cette parallèle, parce que le tableau est alors parallèle à l'une des génératrices du cône. On obtient un arc d'hyperbole quand le cercle donné coupe la parallèle dont il s'agit, parce que le tableau coupe alors les deux nappes du cône.

Pour le cas où le cercle donné est en entier der-

la sphère imaginons un plan horizontal ; il coupera la surface sphérique suivant un grand cercle, que nous regarderons comme l'équateur de la surface afin de mieux fixer le langage. Dans cet équateur menons une série de cordes parallèles au plan du tableau ; leurs milieux seront sur une même perpendiculaire à ce plan. Il sera facile de mettre ces cordes en perspective ; les milieux des cordes viendront se placer sur une droite allant au point de vue, et leurs extrémités détermineront une ellipse qui sera la perspective de l'équateur. Concevons maintenant que l'on coupe la sphère par des plans verticaux menés suivant les cordes parallèles dont il vient d'être question ; ces plans seront parallèles au plan du tableau ; et ils couperont la sphère suivant des cercles, qui demeureront des cercles en perspective. Les perspectives de ces cercles s'obtiendront donc en décrivant, du milieu de chaque corde comme centre, un cercle ayant la moitié de cette corde pour rayon. Le contour apparent de la sphère devra être une ellipse enveloppant les cercles ainsi obtenus, et il sera facile de la tracer à la main. Ce procédé est représenté sur la figure 12. On n'y a tracé que la partie de la sphère supérieure à l'équateur, comme s'il s'agissait de la perspective d'une coupole ; mais il serait facile d'obtenir la perspective de la sphère entière, en achevant les cercles décrits sur chaque corde comme diamètre.

On opérerait d'une manière semblable pour obtenir la perspective d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical ; les sections parallèles au plan du tableau ne seraient plus des cercles, mais ce seraient des ellipses semblables à l'ellipse méridienne.

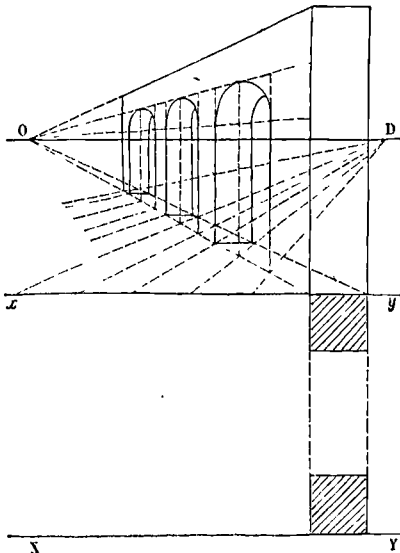


Fig. 13.

VII. 11. On peut avoir à représenter en perspective des cercles ou portions de cercles situés dans des plans verticaux perpendiculaires au tableau ; c'est toujours en les inscrivant dans des polygones, et particulièrement dans des carrés, qu'on en construit la perspective. La figure 13, qui représente la perspective d'un portique en plein cintre,

offre un exemple du procédé dont nous parlons. Les naissances de tous les arcs de tête antérieurs sont sur une même droite allant au point de vue. Les sommets de ces arcs sont également sur une droite allant au point de vue. Les arcs de tête postérieurs sont obtenus de la même manière ; mais on n'en a conservé que la partie visible.

12. On a encore des cercles à mettre en perspective toutes les fois qu'il s'agit de représenter une porte ou une fenêtre en partie ouverte. On trace les demi-circonférences décrites par l'extrémité des côtés horizontaux de la fenêtre ou de la porte ; et l'on met ces demi-circonférences en perspective. Pour représenter alors la fenêtre ou la porte plus ou moins ouverte, il suffit de faire aboutir les lignes qui représentent les côtés horizontaux à deux points des perspectives elliptiques obtenues qui se correspondent sur une même verticale. La figure 14 montre une porte à deux battants

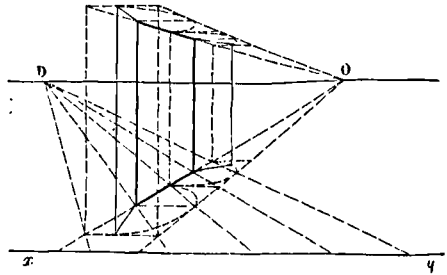


Fig. 14.

ainsi représentée, les deux battants en partie ouverts. Les lignes ponctuées de la figure indiquent suffisamment les opérations.

VIII. On peut avoir à figurer des droites parallèles autres que celles qui font avec le tableau des angles de 90 degrés ou de 45 degrés. Il faut alors déterminer le point où la parallèle à ces droites menée par l'œil du spectateur, et que nous désignerons par L, vient rencontrer le plan du tableau. Ce point est ce qu'on appelle un point de vue accidentel. Voici comment on le détermine. La direction de la droite L dont il s'agit étant connue, on connaît l'angle α que le plan vertical qui la contient fait

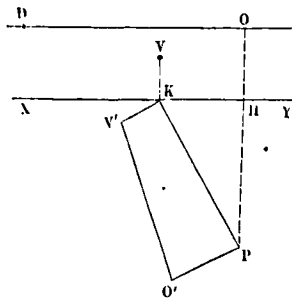


Fig. 15.

avec le plan du tableau. Par le pied du spectateur on pourra donc mener une droite PK (fig. 15) faisant avec la ligne de terre un angle égal α ; ce sera la trace du plan vertical contenant la droite.

Concevons qu'on rabatte ce plan sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace PK; l'œil du spectateur viendra se rabattre en O', sur une perpendiculaire menée à PK par le point P, et à une distance de ce point égale à la hauteur de l'œil (ou à la distance OH). On connaît l'angle β que la droite L fait avec la verticale; on pourra donc faire en O' un angle PO'V' égal à β , et l'on aura le rabattement de la droite L. Elevons au point K une perpendiculaire à PK; ce sera le rabattement de la verticale suivant laquelle le plan vertical contenant la droite L rencontre le plan du tableau; le point V' où cette perpendiculaire rencontre le rabattement de la droite L, sera donc le rabattement du point où cette droite perce le plan du tableau. Si donc, sur une perpendiculaire à la ligne de terre élevée au point K, on prend une longueur KV' égale à KV', le point V ainsi obtenu sera le point de vue accidentel demandé. C'est en ce point que devront concourir les perspectives de toutes les droites parallèles à la droite L.

Comme exemple de l'emploi des points de vue accidentels, nous représenterons (fig. 16) un escalier

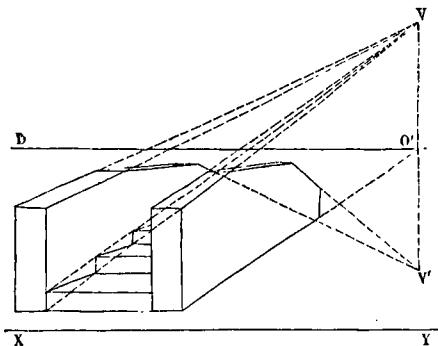


Fig. 16.

montant et un escalier descendant, aboutissant tous deux à un même palier horizontal. Les angles saillants des marches sont sur une même droite dirigée au point de vue accidentel V; il en est de même des angles rentrants de ces mêmes marches, ainsi que des arêtes des deux rampes ascendantes. Les arêtes horizontales des marches sont dirigées les unes parallèlement à la ligne de terre, les autres vers le point de vue accidentel O' pris sur la ligne d'horizon. Les arêtes des deux rampes descendantes sont dirigées vers le point de vue accidentel V' situé au-dessous de la ligne d'horizon à une distance O'V' égale à O'V.

IX. On peut avoir à représenter en perspective l'image d'un objet réflétiée par la surface de l'eau. Il faut se rappeler pour cela que l'image d'un point dans un miroir plan est placée sur une perpendiculaire abaissée de ce point sur le miroir, et à la même distance de ce miroir que le point lui-même, de l'autre côté de la surface réfléchissante; ce qu'on peut énoncer simplement en disant que le point donné et son image sont symétriquement placés par rapport au miroir. Dans le cas qui nous occupe, on se donnera la trace verticale de la surface horizontale de l'eau; l'image demandée s'obtiendra en abaissant de chaque point de l'objet une

perpendiculaire sur ce plan horizontal, et en la prolongeant au-dessous d'une quantité égale à elle-même. On s'aide de cette considération que les droites parallèles au miroir donnent des images parallèles à elles-mêmes, et allant par conséquent concourir en perspective au même point de vue, normal ou accidentel. La figure 17 montre la perspective d'une

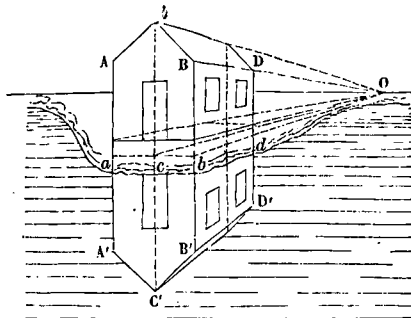


Fig. 17.

maisonnette et de son image dans l'eau; le niveau de l'eau est donné par la droite ab, à l'aide de laquelle les constructions ont été exécutées. On a $aA' = aA$, $bB' = bB$, $cC' = cC$, $dD' = dD$. Les lignes ponctuées indiquent suffisamment les opérations.

X. Nous avons supposé jusqu'ici que le tableau était un plan. C'est quelquefois une surface cylindrique. Cela a lieu en particulier dans les panoramas; le tableau est un cylindre vertical à base circulaire. L'œil du spectateur est alors supposé dans l'axe du cylindre. Toute ligne droite contenue dans un plan vertical mené par l'axe est représentée en perspective par une génératrice du cylindre, ou du moins par une portion de cette génératrice. Toute ligne droite située dans le plan horizontal mené par l'œil du spectateur est représentée par un arc du cercle suivant lequel ce plan coupe la surface du cylindre. Cette ligne d'intersection est ce qu'on appelle dans ce cas la *ligne d'horizon*. Toute autre droite est représentée en perspective par un arc d'ellipse, intersection de la surface cylindrique par le plan qui contient la droite et l'œil du spectateur. Cette perspective ne peut donc être obtenue que par points. Il en est de même à plus forte raison de la perspective de toute autre ligne. Pour obtenir la perspective d'un point, il faut mener par ce point et par l'œil du spectateur un plan vertical, et le rabattre, ainsi que l'œil, le point donné et la génératrice d'intersection avec le tableau, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. On joint alors le point rabattu au rabattement de l'œil; la ligne de jonction coupe la génératrice rabattue en un point qu'il n'y a plus qu'à relever. Dans ce mode de perspective les opérations sont donc longues et pénibles; aussi est-il peu employé, surtout pour la représentation des édifices. Alaux l'a cependant employé avec un grand succès dans le Panorama de l'intérieur de la basilique de Saint-Pierre, qui a été admiré comme un chef-d'œuvre de perspective.

Quelquefois aussi le tableau est une surface sphérique. C'est ce qui arrive pour la peinture des

coupoles. On place alors l'œil au centre de la sphère, ou au moins sur la verticale de ce centre. Les opérations sont encore plus compliquées dans ce cas que dans le cas d'un tableau cylindrique, et il est nécessaire de recourir aux procédés généraux de la Géométrie descriptive. Mais les artistes qui peignent les coupoles, choisissent d'ordinaire des sujets où la vue et le sentiment sont plus nécessaires que les méthodes mathématiques.

XI. La perspective dont nous venons de faire connaître sommairement les règles, porte le nom de *perspective linéaire*, par opposition avec la *perspective aérienne* fondée sur la dégradation des teintes, et qui est particulièrement du ressort de la peinture.

Elle porte aussi le nom de *perspective régulière*, par opposition avec les méthodes de *perspective rapide* employées dans certains cas, et connues sous les noms de PERSPECTIVE CAVALIÈRE, et de PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE (Voy. ces mots).

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE (du grec $\acute{\alpha}\lambda\omega\nu$, $\sigma\nu\sigma$, axe, et $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$, mesure), mode de *perspective rapide* (Voy. PERSPECTIVE), rapportée à trois axes obliques. Concevons d'abord que tous les points de l'objet à représenter soient rapportés à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; et soient x, y, z les coordonnées par rapport à ces axes d'un point M de l'objet. Imaginons que l'on projette l'objet sur un plan faisant avec les trois axes des α, β, γ , et des x, y, z , les angles α, β, γ ; les trois axes se projettent suivant trois droites $O'x, O'y, O'z$ (fig. 1)

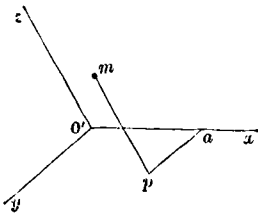


Fig. 1.

faisant généralement entre elles des angles obtus; et les coordonnées x, y, z , auront pour projections des droites parallèles à ces nouveaux axes, et ayant respectivement pour valeur $x \cos \alpha, y \cos \beta, z \cos \gamma$. Si l'on prend sur $O'x$ une longueur $O'a = x \cos \alpha$, que l'on mène ap parallèle à $O'y$ et égal à $y \cos \beta$, puis pm parallèle à $O'z$ et égal à $z \cos \gamma$, le point m ainsi obtenu sera évidemment la projection du point considéré M. On peut rapporter de la même manière tous les points de la projection de l'objet aux trois axes $O'x, O'y, O'z$ situés dans le plan de projection; et les coordonnées nouvelles se déduiront toujours des coordonnées primitives en les multipliant respectivement par $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. Ceci revient à dire que les nouvelles coordonnées seront les mêmes que les anciennes, à cette différence près qu'elles seront évaluées à trois échelles différentes. Or, les angles α, β, γ étant connus, on peut construire à l'avance ces trois échelles, en prenant pour unité parallèlement à $O'x$ l'unité linéaire multipliée par $\cos \alpha$, parallèlement à l'axe $O'y$ l'unité linéaire multipliée par $\cos \beta$, et parallèlement à l'axe $O'z$ l'unité linéaire multipliée par $\cos \gamma$. — C'est ce mode de représentation à

l'aide de trois axes situés dans le même plan et ayant chacun leur échelle distincte, qu'on appelle la perspective axonométrique.

Ordinairement on se donne arbitrairement dans le plan de projection les trois axes $O'x, O'y, O'z$, avec la seule condition de faire entre eux des angles obtus; et l'on en déduit les angles α, β, γ , de la manière suivante. Les trois axes primitifs OX, OY, OZ forment un trièdre trirectangle. Le plan de projection coupe ses trois arêtes en des points A, B, C (fig. 2) tels que les droites AB, AC, BC soient

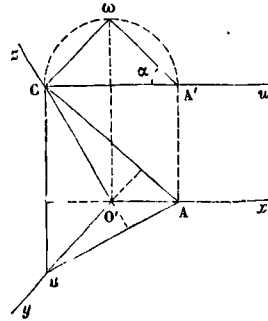


Fig. 2.

respectivement perpendiculaires aux axes $O'z, O'y, O'x$ puisqu'elles sont les traces de plans respectivement perpendiculaires aux axes primitifs. — Par le point C faisons passer un plan perpendiculaire au plan de la figure: soit Cu sa trace; et prenons-le pour plan vertical de projection, le plan proposé étant supposé horizontal. Le point A se projettera verticalement en A' ; et l'axe OX primitif se projettera suivant une droite passant par A' . La trace du plan YOZ passera par le point C et sera perpendiculaire à la projection verticale de OX. Il en résulte que le point O se projettera verticalement en un point de la demi-circonférence décrite sur CA' comme diamètre. D'ailleurs les deux projections du point O doivent être sur une même perpendiculaire à Cu ; la projection verticale ω du point O se trouve donc ainsi déterminée. Et l'angle α n'est autre chose que l'angle $\omega A'C$. Les angles β et γ se détermineront de la même manière.

Pour que la perpendiculaire abaissée de O' sur Cu rencontre la demi-circonférence, il est nécessaire que l'angle $xO'z$ soit obtus, comme nous l'avons supposé. On reconnaît en outre que le trièdre OABC ainsi déterminé est bien trirectangle; il résulte, en effet, de la construction que OX est perpendiculaire au plan ZOY, et par conséquent aux droites OY et OZ; mais $O'y$ étant perpendiculaire à AC, OY est dans un plan vertical perpendiculaire à AC; et OY est par conséquent perpendiculaire à AC; donc OY, perpendiculaire aux droites OX et AC, est perpendiculaire au plan de ces droites, c'est-à-dire au plan XOZ; on verrait de même que OZ est perpendiculaire au plan YOX; et le trièdre OXXX est trirectangle.

Lorsque les trois axes OX, OY, OZ sont également inclinés sur le plan de projection, la perspective est dite *isométrique* (de ἰσος , égal). Les trois angles $xO'y, yO'z, zO'x$ valent alors chacun 120° ; et les trois échelles sont égales. L'unité de chacune est le

produit de l'unité linéaire par $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ou par 0,8165.

On reconnaît, en effet, en prenant sur les trois arêtes d'un trièdre trirectangle trois points à égale distance du sommet, que le cosinus de l'angle formé par chaque arête avec le plan de ces trois

points est le quotient de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Lorsque deux des axes sont également inclinés

sur le plan de projection, le troisième ne l'étant pas, la perspective est dite *monodimétrique* (de $\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$, seul, $\delta\acute{\iota}\varsigma$, deux). Lorsque les trois axes sont inégalement inclinés, la perspective est dite *anisométrique* (de α privatif, $\alpha\nu$ devant une voyelle, et $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma$, égal). La perspective axonométrique est employée, surtout en Allemagne, dans le dessin industriel et dans l'architecture pour rendre plus sensibles des détails qui ne seraient pas compris si l'on employait des projections orthogonales. La faculté de faire varier les angles que forment les trois axes, permet de choisir leurs directions de la manière la plus avantageuse pour l'objet que l'on a en vue. Les lignes droites parallèles aux axes primitifs se projettent suivant des lignes proportionnelles parallèles aux axes nouveaux. Les cercles parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés primitifs se projettent suivant des ellipses semblables; et le rapport de leurs axes peut être déterminé à l'avance. Dans la perspective isométrique, par exemple, les cercles parallèles aux plans coordonnés primitifs sont des ellipses dans lesquelles les axes sont dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$; et l'on peut même construire des rapporteurs elliptiques qui donnent les divisions de ces cercles en parties égales, et qui permettent d'obtenir plus rapidement la perspective isométrique d'une roue dentée ou d'une colonne cannelée.

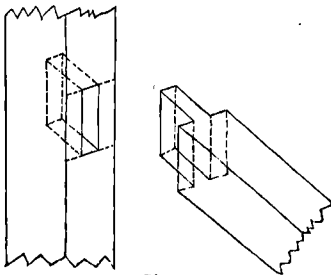


Fig. 3.

La figure 3 est la perspective anisométrique d'un assemblage à tenon, les deux pièces séparées.

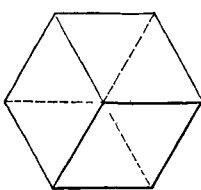


Fig. 4.

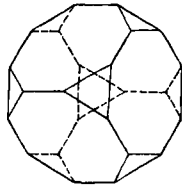


Fig. 5.

La figure 4 est la perspective isométrique d'un cube; et la figure 5 est la perspective isométrique

du même cube, tronqué sur tous ses angles trièdres, et formant le passage entre le cube et l'octaèdre régulier.

Voy. à l'article GUITARE une perspective isométrique de ce genre de charpente.

(Voy. le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie.)

PERSPECTIVE CAVALIÈRE, mode de *perspective rapide* (Voy. PERSPECTIVE) dans lequel les *fuyantes*, c'est-à-dire les droites qui vont concourir au point de vue, sont remplacées par des droites parallèles. Les distances au plan du tableau sont alors réduites dans un rapport arbitraire, mais constant; ce rapport est souvent $\frac{1}{2}$. La perspective cava-

lière est celle dont on fait usage pour représenter les figures de Géométrie dans l'espace. C'est ainsi que la figure 1 représente un cube, et la figure 2

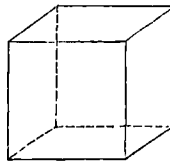


Fig. 1.

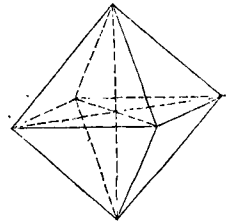


Fig. 2.

un octaèdre régulier. La direction des *fuyantes* demeure arbitraire; on la choisit de manière à rendre la représentation la plus claire possible. Les droites parallèles au tableau conservent leur grandeur. Ainsi dans la figure 2 la hauteur de la pyramide à base carrée qui forme la moitié de l'octaèdre doit être prise égale à $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, la lettre *a* représentant la longueur d'une arête.

Mais c'est surtout dans les assemblages de charpente que ce genre de perspective est utile. Les figures 3 et 4 représentent les deux pièces d'un

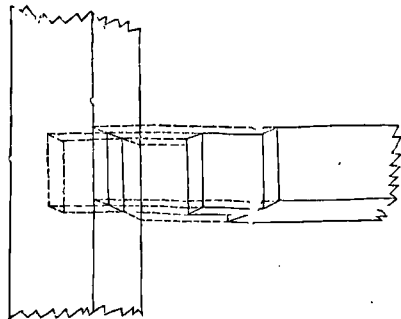


Fig. 3.

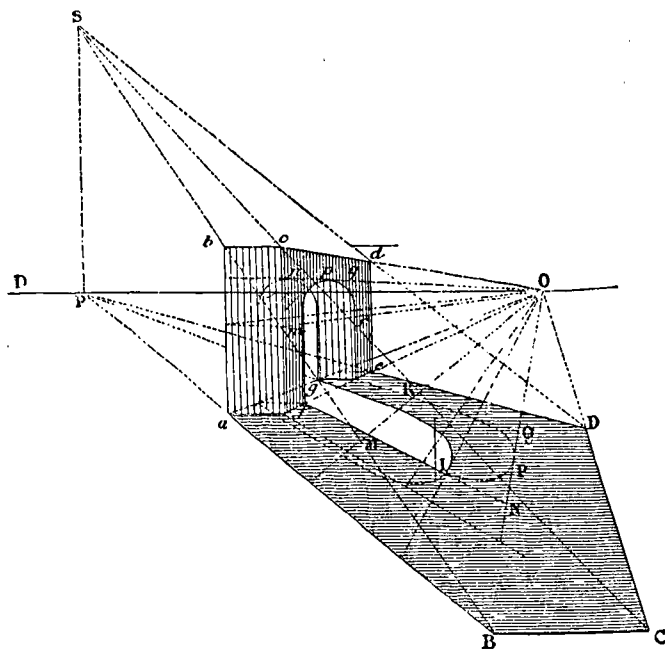
Fig. 4.

assemblage à tenon d'après ce mode de perspective. Lorsque, comme dans cet exemple, deux pièces sont en connexion, on dirige ordinairement les *fuyantes* en sens inverse par rapport à la verticale, mais de manière à faire des angles égaux avec cette direction; et l'on place sur une même horizontale les points correspondants des deux pièces, pour en faire saisir la connexion.

Les pièces, dans ce mode de perspective, sont représentées d'une manière plus nette que par de simples projections rectangulaires.

On peut regarder la perspective cavalière comme une projection oblique.

PERSPECTIVE DES OMBRES. Il est utile de déterminer les ombres sur les dessins en perspective comme sur les projections géométrales, pour mieux faire sentir le relief des objets représentés. On peut suivre pour cela deux méthodes. La première consiste à marquer les ombres sur les projections, et à mettre les lignes d'ombres en perspective comme les autres lignes de la figure; cette méthode est d'une application facile, et qui n'exige aucune règle particulière (*Voy. PERSPECTIVE*). La seconde méthode consiste à tracer les ombres sur la perspective même, en mettant en perspective les lignes de construction que l'on aurait à tirer pour déterminer les ombres sur le dessin géométral. Cette méthode est plus expéditive et plus élégante, mais elle exige plus d'attention. Afin d'en donner un exemple, nous supposerons qu'après avoir tracé en perspective une porte cintrée pratiquée dans un mur perpendiculaire au plan du tableau, on se propose de déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant parallèles. — Ces rayons iront concourir en perspective en un certain point, situé en général au-dessus de l'horizon OD; et leurs



projections horizontales concourront en un point P de l'horizon, situé sur la verticale du point S. Considérons une arête verticale *ab*; cette arête et le point S déterminent un plan vertical, dont la trace horizontale *aB* va passer par le point P. Si donc on joint *Sb*, cette droite prolongée viendra couper *Pa* en un point B qui sera l'ombre du point *b*; en sorte que *aB* sera l'ombre de l'arête *ab*. On obtiendra de la même manière l'ombre *eD* de l'arête *ed*; ainsi

que l'ombre C du point *c*. En joignant BC on aura l'ombre de l'arête *bc*; cette ombre devra être parallèle à l'horizon comme *bc*. En joignant CD on aura l'ombre de l'arête *cd*; cette ombre devra passer par le point de vue O, puisqu'elle est parallèle à *cd*. — Pour déterminer l'ombre de la porte, on cherchera l'ombre de chacune des lignes de construction qui ont servi à tracer cette porte en perspective. L'ombre des piédroits s'obtiendra comme celle des autres arêtes verticales déjà considérées. L'arc de tête antérieur est inscrit dans un rectangle *mnpqr*; l'ombre de ce rectangle MNPQR s'en déduira sans difficulté, et l'on y inscrira l'arc MPR, ombre de l'arc *mpr*. L'ombre de l'arc de tête postérieur se déterminera par le même procédé. Et, en ayant égard aux ombres qui se recouvrent mutuellement pour n'en former qu'une seule, on trouvera que le contour de l'ombre de la porte est *aBCDefIj*.

Tout autre exemple pourrait être traité d'après les mêmes principes.

Le cas que nous avons considéré suppose le soleil placé derrière le tableau; les rayons lumineux vont alors concourir en perspective, comme on vient de le voir, en un point S situé au-dessus de l'horizon. Si le soleil était placé en avant du tableau, les rayons lumineux étant inclinés iraient concourir en perspective en un point situé au-dessous de l'horizon OD. Il peut arriver que les rayons lumi-

neux soient parallèles au plan du tableau; on dit alors que le soleil est dans le plan du tableau même; dans ce cas les rayons demeurent parallèles au plan du tableau et par conséquent parallèles entre eux. Du reste, les constructions se font toujours d'après la même méthode, qui consiste à chercher l'ombre de chaque arête, comme si elle était seule opaque; l'ombre définitive se déduit aisément de l'ensemble des ombres portées par les arêtes.

Quand les objets sont éclairés par un point lumineux placé à une distance finie, ce point lumineux est ordinairement derrière le plan du tableau, et donné de position, ainsi que le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal. Les rayons lumineux émanent du point

donné; et leurs projections horizontales vont passer par le pied de la perpendiculaire donnée. Les constructions sont les mêmes que dans l'exemple traité ci-dessus, avec cette seule différence que le soleil S est remplacé par le point lumineux donné, et le point P par le pied de la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur le plan de l'horizon.

PERTE DE CHARGE, diminution de la hauteur

piézométrique (*Voy. PIÉZOMÈTRE*) qui mesure la pression en un point d'une conduite d'eau (*Voy. CONDUITES*). Si l'eau d'une conduite y était en équilibre hydrostatique, la colonne piézométrique devrait s'élever jusqu'au niveau de l'eau dans le réservoir supérieur; mais par suite du mouvement de l'eau, et de son frottement contre les parois de la conduite, la colonne piézométrique s'élève en réalité à une hauteur beaucoup moindre. La différence constitue la *perte de charge*, ou diminution de pression au point considéré. Diverses circonstances occasionnent un surcroît de perte de charge : tels sont les **CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION**, les **COUDES** (*Voy. ces mots*), etc.

PERTUIS, espace qui peut être laissé libre pour l'écoulement des eaux d'une rivière à côté d'un barrage fixe, mais qui est ordinairement fermé par un barrage mobile (*Voy. BARRAGE*) que l'on n'ouvre que pour le passage d'un certain nombre de bateaux. La navigation au moyen d'un pertuis est toujours incommode, puisque les bateaux sont obligés d'attendre le moment de l'ouverture. De plus elle est dangereuse. En premier lieu, l'ouverture du pertuis détermine un écoulement très-rapide dans les premiers instants, et il est difficile de gouverner le bateau au sortir de la veine fluide. En second lieu la surface de l'eau qui s'écoule au travers du pertuis présentant une très-grande pente, il arrive que l'avant du bateau plonge beaucoup moins que l'arrière; et il en résulte une inégalité de pression qui peut faire rompre le bateau sous son propre poids, comme cela est fréquemment arrivé. Enfin la profondeur de l'eau en aval étant toujours très-faible, le bateau est exposé à toucher le fond et à se briser par le choc. Les pertuis présentent encore un autre inconvénient : c'est que le volume d'eau qui s'écoule à chaque *lâchure* étant considérable, il faut un temps très-long pour que l'eau reprenne son niveau en amont du pertuis, après que le barrage mobile a été remis en place. On préfère généralement l'emploi des **ÉCLUSES À SAS** (*Voy. ce mot*).

PERTURBATIONS, modifications que le mouvement elliptique d'une planète autour du soleil éprouve par l'effet de l'attraction des autres planètes. Pour se rendre compte plus simplement du mouvement réel d'une planète, on imagine une planète fictive animée du mouvement elliptique, mais sur une orbite dont les éléments varient peu à peu; et l'on conçoit que la planète réelle oscille de part et d'autre de cette planète fictive. Les changements qu'éprouvent les éléments de l'orbite de la planète fictive, sont ce que l'on nomme les *inégalités séculaires*; et les écarts de la planète réelle de part et d'autre de la planète fictive constituent ce que l'on appelle les *inégalités périodiques*.

Les inégalités séculaires affectent tous les éléments de l'orbite (*Voy. ÉLÉMENTS du mouvement planétaire*) à l'exception du grand axe qui demeure invariable. La durée de la révolution sidérale conserve également une valeur constante, en vertu de la 3^e loi de Képler (*Voy. LOIS DE KÉPLER*). — On a démontré que l'inclinaison de l'orbite, après avoir varié pendant un certain temps dans un certain sens, doit varier ensuite en sens contraire, de manière à osciller toujours entre des limites peu éloignées. Une observation analogue s'applique à l'excentricité.

PESANTEUR, force qui attire les corps vers le centre de la terre, et en vertu de laquelle ils *tombent* à sa surface s'ils ne sont pas soutenus. Cette force, dont les effets frappent sans cesse nos regards, et qui est la cause d'une multitude de phénomènes dont l'étude appartient à la Physique ou à la Mécanique, n'est qu'un exemple particulier de l'attraction universelle. La direction de la pesanteur est donnée par le **FIL-À-PLOMB** (*Voy. ce mot*); en effet l'instrument n'étant sollicité que par la pesanteur qui agit sur la petite masse de plomb, et par la réaction qu'exerce le point de suspension du fil, l'équilibre ne peut s'établir que lorsque ces deux forces sont directement opposées, ce qui exige que la direction de la force appliquée à la masse de plomb soit telle que son prolongement aille passer par le point fixe; d'où il résulte que le fil a la direction de la pesanteur elle-même. En chaque lieu du globe cette direction, qu'on appelle la *verticale*, est perpendiculaire à la surface de l'eau tranquille (*Voy. HYDROSTATIQUE*); mais elle change d'un lieu à l'autre; et ce n'est que dans une petite étendue qu'il est permis de regarder les verticales comme parallèles. On démontre en Physique que, dans le vide, tous les corps tombent de la même manière; et que par conséquent la pesanteur agit de la même manière sur tous les corps. Les expériences sur le mouvement vertical des corps pesants (*Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES, MACHINE D'ATWOOD, APPAREIL DE M. MORIN*) montrent que ce mouvement est uniformément varié; d'où il résulte que pour un même lieu la pesanteur est une **FORCE CONSTANTE** (*Voy. ce mot*), ou moins jusqu'à une faible hauteur au-dessus de la surface du globe. — L'accélération due à la pesanteur se désigne habituellement par la lettre *g*, initiale du mot *gravité*; sa valeur à Paris est 9^m,8088. Cette valeur pourrait être obtenue approximativement par l'emploi de la machine d'Atwood, par l'appareil à indications contenues de M. Morin, ou à l'aide du plan incliné; mais l'approximation serait insuffisante. Ce n'est que par l'emploi du **PENDULE** (*Voy. ce mot*) qu'on peut déterminer avec quelque précision le nombre *g*. On a trouvé (*Voy. FIGURE DE LA TERRE*) que ce nombre croît de l'équateur au pôle proportionnellement au carré du sinus de la latitude, et qu'on peut écrire, en appelant *l* la latitude et π le rapport de la circonférence au diamètre.

$$h = \pi^2 (0,99102557 + 0,00507188 \sin^2 l)$$

$$\text{ou } g = 9^m,781031 + 0^m,050057 \sin^2 l.$$

Lorsqu'un corps s'élève d'une quantité notable au-dessus de la surface terrestre, la pesanteur ne peut plus être regardée comme une force constante; elle suit les lois de la gravitation universelle, et varie par conséquent en raison inverse du carré de la distance du corps au centre de la terre; c'est-à-dire que si l'on désigne par *g* l'accélération due à la pesanteur à la surface du globe, par *g'* l'accélération à la hauteur *h* au-dessus de la surface, et par *R* le rayon de la terre, considérée comme sphérique, on doit avoir, puisque les accélérations sont proportionnelles aux forces quand il s'agit d'un même mobile (*Voy. MESURE DES FORCES*),

$$g' : g = R^2 : (R + h)^2,$$

$$\text{d'où } g' = g \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}.$$

Mais si la hauteur h n'est pas trop considérable, de telle sorte qu'on puisse négliger par rapport à l'unité le carré du rapport $\frac{h}{R}$, on peut écrire simplement, en développant et s'arrêtant au second terme :

$$g' = g \left(1 - \frac{2h}{R} \right).$$

PÈSE-LETTRÉ. Voy. PESON.

PESON, balance employée dans les manufactures à peser le coton, la laine, et autres matières légères. Cet instrument se compose d'un levier AB (fig. 1), mobile autour d'un axe horizontal fixe O,

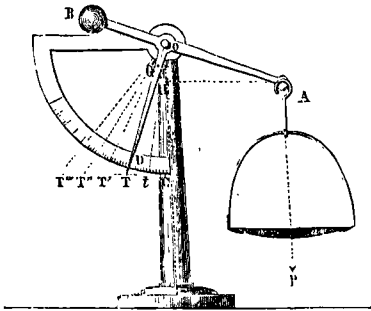


Fig. 1.

et portant une aiguille OD dont l'axe passe par le point O et fait un angle droit avec la direction de AB. Le centre de gravité du système formé par le levier et l'aiguille est placé en un point G sur l'axe de cette dernière. L'extrémité D de l'aiguille parcourt un quart de cercle divisé; et, à l'extrémité A du levier, est suspendu un bassin dans lequel on dépose les objets que l'on veut peser.

Soit P le poids placé dans le bassin (augmenté de celui du bassin lui-même); soit p le poids du levier, que l'on peut regarder comme appliqué en G. Menons les horizontales GI et AH, qui rencontrent en I et en H la verticale OC menée par le point de suspension. Menons aussi l'horizontale CT, terminée au prolongement de l'axe de l'aiguille. Faisons enfin $OA = a$, $OG = \delta$, $COD = \alpha$.

En supposant que l'on puisse négliger le frottement qui s'exerce sur l'axe O, on devra avoir pour l'équilibre (Voy. ÉQUILIBRE, MOMENTS)

$$P \cdot AH = p \cdot GI, \text{ ou } Pa \cos \alpha = p\delta \sin \alpha,$$

$$\text{d'où} \quad P = p \cdot \frac{\delta}{a} \cdot \tan \alpha. \quad [1]$$

Les quantités p , δ et a étant constantes, on voit que P est proportionnel à $\tan \alpha$. Il est facile d'après cela de graduer l'instrument. On chargera le bassin de 1 décagramme, par exemple; supposons que Ot soit la position correspondante de l'aiguille; on portera sur l'horizontale CT une suite de distances tT, tT', tT'', etc., égales entre elles et à Ct; on joindra TO, T'O, T''O, etc.; et l'on aura les positions que prendrait l'aiguille si l'on chargeait le bassin de 2 décagrammes, 3 décagrammes, 4 décagrammes, etc. En divisant chacun des espaces Ct, tT, tT', etc., en 10 parties égales, si cela est possible, et joignant les points de division au point O, on aurait les divisions du quart de cercle correspondantes, de gramme en gramme.

Le *pèse-lettre*, représenté fig. 2, est un peson construit d'après les mêmes principes; mais qui est de plus petites dimensions.

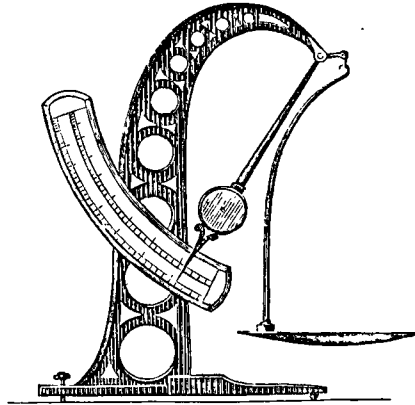


Fig. 2.

On donne aussi le nom de *peson* à un instrument à ressort employé dans le commerce pour évaluer le poids des corps (Voy. DYNAMOMÈTRE).

PETIT CHEVAL, petite machine à vapeur uniquement employée à l'alimentation des grandes chaudières, dans les machines fixes, et dans les machines appliquées à la navigation. Le petit cheval reçoit de la grande chaudière elle-même la vapeur qui le fait mouvoir; il fait mouvoir, à son tour la pompe d'alimentation (Voy. GÉNÉRATEURS, MACHINES À VAPEUR).

PHASE (ERREUR DE), erreur qui peut affecter la mesure d'un angle horizontal, par suite de la manière dont un signal est éclairé. Soit C (fig. 1) le centre

de la station; et supposons que le signal ait pour base un rectangle $mnpq$ dont le côté mn soit seul éclairé; en dirigeant un rayon visuel CB vers le milieu B de ce côté, au lieu de le diriger vers le centre invisible A du rectangle, on commettra une erreur de phase exprimée par l'angle ACB ou C. Or, dans le triangle ABC, dont nous nommerons a , b , c les côtés opposés aux angles A, B, C, on a

$$\begin{aligned} a \sin C &= c \sin A = c \sin(B + e) \\ &= c \sin B \cos C \\ &\quad + c \cos B \sin C, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\tan C = \frac{\frac{c}{a} \sin B}{1 - \frac{c}{a} \cos B}.$$

Or le rapport $\frac{c}{a}$ ou $\frac{AB}{BC}$ étant toujours très-petit, on peut négliger le terme $\frac{c}{a} \cos B$ vis-à-vis de l'unité. En même temps l'angle C étant très-petit, on peut

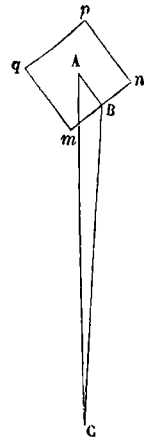


Fig. 1.

remplacer la tangente par l'arc, et écrire

$$C = \frac{c}{a} \sin B, \text{ ou } C = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin B}{\sin 1''},$$

en rapportant l'angle C au degré.

Supposons en second lieu que le signal soit une tour à base circulaire AMBN. Soit O le centre de cette base; OS la direction des rayons lumineux; la demi-circonférence AHB sera éclairée. Soit C le

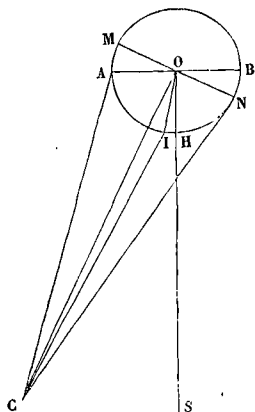


Fig. 2

centre de la station; et MN un diamètre perpendiculaire à la droite CO menée de la station au centre O du cercle; l'observateur ne verra que la demi-circonférence MAHN; et pour lui par conséquent il n'y aura d'éclairé que l'arc AIN. Si CA et CN sont les rayons visuels menés aux points extrêmes A et N de cet arc, le rayon visuel mené de C au signal sera la bissectrice CI de l'angle ACN, et non le rayon CO mené au centre; l'erreur de phase sera donc l'angle OCI, que nous désignerons par α . Soit

$$ACI = ICN = \alpha; \cos \beta = \beta; OA = r, \text{ et } CO = d.$$

Dans le triangle ACO on aura

$$AO : AC = \sin ACO : \sin COA = \sin(\alpha - x) : \cos \beta,$$

d'où, en remplaçant AC par OC qui en diffère très-peu,

$$\sin(\alpha - x) = \frac{r}{d} \cos \beta. \quad [1]$$

Dans le triangle NCO, rectangle en O, on aura

$$ON = CN \cdot \sin OCN = CN \cdot \sin(\alpha + x)$$

d'où, en remplaçant CN par CO,

$$\sin(\alpha + x) = \frac{r}{d}. \quad [2]$$

Des formules (1) et (2) on tire par soustraction

$$2 \cos \alpha \sin x = 2 \cdot \frac{r}{d} \sin^2 \frac{1}{2} \beta,$$

d'où

$$\sin x = \frac{r}{d} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \beta}{\cos \alpha}.$$

Mais α étant un angle très-petit, on peut remplacer $\cos \alpha$ par l'unité; x étant plus petit encore, on peut remplacer $\sin x$ par x , et écrire en prenant pour unité le degré

$$x = \frac{r}{d} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \beta}{\sin 1''}. \quad [3]$$

Les longueurs r et d sont connues. L'angle β ou OCS

peut être mesuré directement en se plaçant au point C, ou très-près de ce point (Voy. RÉDUCTION AU CENTRE DU SIGNAL), et visant successivement le Soleil et le signal O; on pourra donc, au moyen de la formule [3], calculer la correction x .

On n'avait point égard aux erreurs de phase avant Delambre; et cette circonstance explique les discordances qu'on remarquait souvent entre les résultats d'une série d'observations faites avec le même signal. On évite ces erreurs en se servant de mires établies au sommet et au centre même du signal, ou en employant l'héliotrope de Gauss (Voy. ce mot) Dans les observations de nuit les erreurs de phase ne sont point à craindre parce qu'on établit toujours au point sur lequel on vise un réverbère qui constitue un signal d'une grande netteté.

PHASES, (du grec φάσις; apparence), apparences diverses que présentent les corps célestes éclairés par le soleil, et particulièrement la Lune et quelques planètes (Vénus, Mercure, Mars).

PHASES DE LA LUNE. La Lune n'étant point lumineuse par elle-même, ne nous envoie que la lumière réfléchi du Soleil; une moitié de sa surface reçoit la lumière solaire; elle est séparée de la partie qui reste dans l'ombre par un grand cercle appelé *cercle d'illumination*; une moitié de sa surface est visible de la terre, elle est séparée de la partie invisible pour nous par un grand cercle qui est le *contour apparent* de la Lune. Il en résulte que nous ne pouvons apercevoir que la portion de l'hémisphère éclairé comprise dans le contour apparent; et que par conséquent l'apparence que le disque lunaire nous offre doit varier avec la position relative de la lune, du Soleil et de la Terre.

Lorsque la Lune est en conjonction avec le Soleil, c'est-à-dire lorsque la Lune et le Soleil ont la même longitude, l'hémisphère tourné vers la terre est alors complètement dans l'ombre, comme on le voit en L_1 (fig. 1), et la Lune est invisible. On dit alors

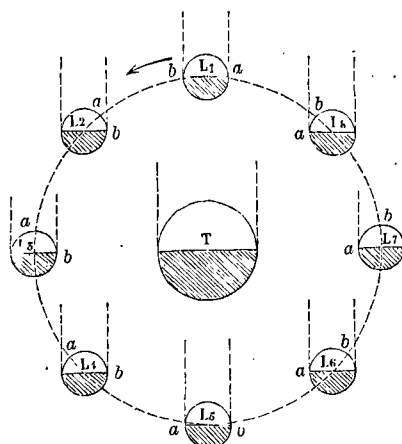


Fig. 1.

qu'il y a *nouvelle lune* ou *néoménie*; à cette époque la Lune se lève et se couche en même temps que le Soleil et passe au méridien en même temps que lui. (Il peut y avoir une légère différence provenant de ce que le Soleil et la Lune pouvant avoir même longitude sans avoir la même latitude, ces deux

astres peuvent être en conjonction sans avoir la même déclinaison, et sans passer par conséquent en même temps au méridien. Mais cette différence est sans importance pour l'explication des phases).

Trois ou quatre jours après, la Lune ayant marché sur son orbite dans le sens de la flèche se trouve en L_2 ; si l'on fait abstraction du mouvement de translation de la Terre dans cet intervalle de temps, les rayons émanés du Soleil peuvent être regardés comme ayant conservé une direction parallèle; le cercle d'illumination est donc aussi parallèle à sa première position; et la partie visible de l'hémisphère éclairé de la Lune se trouve représenté sur la figure par l'arc ab , qui est le quart d'une demi-circumference. Ceci montre pourquoi la Lune se présente alors sous la forme d'un croissant (fig. 2), dont

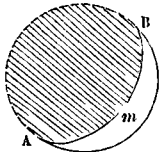


Fig. 2.

les cornes A, B sont tournées dans le sens opposé au Soleil. Le cercle d'illumination, vu ainsi en perspective, se projette sur le disque lunaire sous la forme d'une demi-ellipse AmB . Un peu plus de 7 jours après la néoménie, la Lune est arrivée en L_3 , où les longitudes du Soleil et de la Lune diffèrent de 90° ; on dit alors que la Lune est à son *premier quartier*; l'arc ab qui mesure la partie visible de l'hémisphère éclairé est alors la moitié d'une demi-circumference; aussi la Lune se présente-t-elle sous la forme d'un demi-cercle AB (fig. 3). A cette épo-

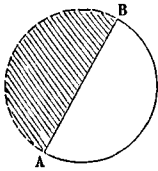


Fig. 3.

que, et sauf l'observation faite plus haut, la Lune se lève 6 heures après le Soleil, c'est-à-dire vers midi, passe au méridien au coucher du Soleil, et se couche vers minuit.

Trois ou quatre jours après le premier quartier, lorsque la Lune est arrivée en L_4 , l'arc ab qui mesure la partie visible de l'hémisphère éclairé est les

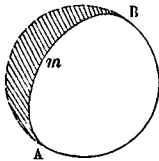


Fig. 4.

trois quarts du disque lunaire, comme le montre la figure 4; le cercle d'illumination se projette encore sous la forme d'une demi-ellipse AmB , mais sa con-

véxité est tournée vers l'orient, tandis que, dans le cas de la figure 2, elle était tournée vers l'occident.

Environ 14 jours $\frac{1}{2}$ après la néoménie, la Lune est arrivée en opposition en L_5 ; sa longitude diffère de 180° de celle du Soleil; tout l'hémisphère éclairé est visible de la terre; la Lune se présente à nous sous la forme d'un disque complètement lumineux; on dit alors qu'il y a *pleine lune*. La Lune se lève alors au coucher du Soleil, passe au méridien à minuit, et se couche au lever du Soleil.

On se rend aisément compte des apparences que présente la Lune dans la seconde partie de sa révolution. Quand elle est arrivée en L_6 elle a la forme représentée par la fig. 5; cette forme est analogue

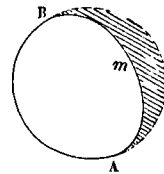


Fig. 5.

à la figure 4; mais la partie éclairée au lieu d'être tournée vers l'occident est maintenant tournée vers l'orient. Lorsqu'elle est parvenue en L_7 , où sa longitude diffère de 270° de celle du Soleil, elle présente l'apparence indiquée par la figure 6; c'est-à-

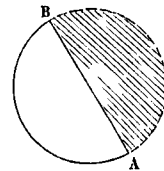


Fig. 6.

dire que la moitié orientale de son disque est seule visible. On dit alors que la Lune est à son *dernier quartier*; à cette époque elle se lève vers minuit, passe au méridien au lever du Soleil, et se couche vers midi.

Quand la Lune est arrivée à la position L_8 elle présente la forme indiquée par la figure 7.

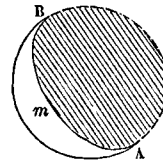


Fig. 7.

Enfin, 29 jours $\frac{1}{2}$ après la néoménie, la Lune a repris la position L_1 et est redevenue invisible; c'est une nouvelle lunaison qui recommence.

Il est inutile de dire que l'apparence du disque lunaire passe graduellement par toutes les positions intermédiaires entre celles qui sont représentées par les figures 2 à 7.

Nous avons dit qu'à l'époque de la néoménie la Lune était invisible. Mais très-peu de temps après, lorsqu'elle apparaît sous la forme d'un croissant lumineux très-délié, le reste de son contour peut être aperçu, à la faveur d'une faible lumière qui éclairait la partie placée dans l'ombre. Cette faible lumière, à laquelle on donne le nom de *lumière cendrée*, est due à la réflexion des rayons solaires sur la surface de la terre. Si l'on examine en effet la figure 1, on reconnaîtra que pour un observateur placé à la surface de la Lune la Terre offrirait un spectacle analogue à celui que nous présente la Lune, mais que les phases de la Terre seraient complémentaires de celles de la Lune : la Terre serait dans son plein à l'époque où la Lune est nouvelle; elle serait nouvelle au contraire à l'époque de la pleine Lune : la Terre serait au contraire à son premier quartier quand la Lune est à son dernier quartier. Il résulte de cette circonstance que c'est au moment de la néoménie que la Terre tourne vers la Lune la totalité de son hémisphère éclairé; c'est donc aussi à cette époque que la Lune reçoit de la Terre le plus de lumière réfléchie. Au moment de la conjonction même, la Lune est trop voisine du disque solaire pour qu'elle puisse être aperçue; mais on l'aperçoit parfaitement un jour ou deux jours après. La lumière cendrée va en s'affaiblissant à mesure que la Lune s'éloigne du disque solaire; et à l'époque du premier quartier elle a presque entièrement disparu, parce que la Lune ne peut apercevoir à cette époque que la moitié de l'hémisphère éclairé de la Terre; elle reçoit donc moitié moins de lumière réfléchie qu'à l'époque de la nouvelle Lune; et en même temps une moitié de l'hémisphère lumineux étant devenue visible pour nous, l'autre moitié du disque tend à s'effacer à nos yeux par un effet de contraste. La lumière cendrée reparaît peu de temps après le dernier quartier et va en augmentant d'intensité jusque dans le voisinage de l'opposition suivante.

Les positions correspondantes à la nouvelle Lune et à la pleine Lune portent le nom commun de *syzygies*; les positions correspondantes au premier et au dernier quartier s'appellent les *quadratures*.

Si l'on imagine deux droites menées du centre de la Lune au centre du Soleil et au centre de la Terre, l'angle formé par ces deux droites sert de mesure à ce que l'on appelle la *phase*. Quand cet angle est nul, c'est-à-dire à l'époque de l'opposition, on dit que la phase est nulle; quand cet angle est droit, ce qui a lieu aux quadratures, on dit que la phase est $\frac{1}{2}$; quand cet angle est de 180° , ce qui a lieu à l'époque de la conjonction, on dit que la phase est *totale*.

Nous avons supposé, dans les explications précédentes, que le Soleil était à une distance infinie de la Terre; et nous avons admis, en conséquence, que le premier et le dernier quartier coïncidaient exactement avec les quadratures; il n'en est pas rigoureusement ainsi. La Lune est en quadrature lorsque, dans le triangle qui a pour sommets les centres du Soleil, de la Terre et de la Lune, l'angle à la terre est de 90° , c'est-à-dire que les longitudes géocentriques du Soleil et de la Lune diffèrent de 90° . — Au contraire, d'après ce que nous avons dit plus haut, il y a premier ou dernier quartier lors-

que, dans le même triangle, c'est l'angle à la Lune qui est droit, parce que le cercle d'illumination et le contour apparent sont alors dans des plans perpendiculaires. Il n'y a donc pas coïncidence entre les quartiers et les quadratures; mais, à cause de l'éloignement du soleil, la différence est peu considérable.

PHASES DES PLANÈTES. La planète Vénus est la première dont on ait observé les phases; cette observation est due à Galilée. Vénus décrivant autour du Soleil une orbite qui est comprise dans l'orbite terrestre, cette planète ne peut jamais être en opposition avec le Soleil; mais, dans une même révolution, elle est deux fois en conjonction; une première fois au delà du Soleil, c'est la conjonction *supérieure*; une seconde fois en deçà, c'est la conjonction *inférieure*. Il résulte de cette circonstance que Vénus présente des phases tout à fait analogues à celles de la Lune; quand elle est en conjonction supérieure, son disque entier nous paraît lumineux; quand elle est en conjonction inférieure, elle est invisible pour nous (à moins qu'elle ne passe sur le disque du Soleil (*Voy. PASSAGE*)). Lorsque la planète occupe une des deux positions pour lesquelles la droite qui joint son centre à celui de la terre est sensiblement tangente à l'orbite de la planète, la moitié seulement de son hémisphère lumineux est visible pour nous; et elle nous présente alors l'aspect de la Lune au premier ou au dernier quartier. Dans les positions intermédiaires, Vénus nous apparaît sous des formes analogues à celles des figures 2, 4, 5 ou 7. Mais cette planète présente une particularité qui ajoute à la variété d'apparences causée par ses phases : c'est la variation considérable de son diamètre apparent. La distance de la Terre au Soleil étant prise pour unité, celle de Vénus au Soleil est exprimée par 0,72333; il en résulte que la distance de cette planète à la Terre varie sensiblement entre $1 - 0,72333$ et $1 + 0,72333$, c'est-à-dire entre 0,27667 et 1,72333. Son diamètre apparent variant en raison inverse (*Voy. DIAMÈTRE APPARENT*), est 6 fois plus considérable près de la conjonction inférieure que près de la conjonction supérieure. Peu de temps après la conjonction supérieure, elle présente l'apparence indiquée par *v* (fig. 8); tandis que quelque temps avant la con-

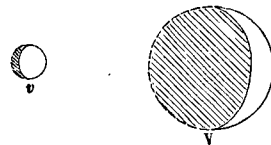


Fig. 8.

jonction inférieure elle présente l'apparence indiquée par *V*.

Mercury présente des phases analogues à celles de Vénus; mais elles sont moins remarquables, et le diamètre apparent de cette planète ne varie que dans le rapport de 1 à 2.

Les planètes supérieures, parcourant des orbites qui embrassent dans leur intérieur l'orbite terrestre, nous présentent dans tout le cours de leur révolution la presque totalité de leur hémisphère éclairé; en sorte que leurs phases sont à peu près insensibles. Cependant, dans certaines posi-

tions, Mars nous montre une partie de son hémisphère obscur, et il en résulte une légère diminution de son disque. Ces positions sont celles pour lesquelles, dans le triangle ayant pour sommet les centres du Soleil, de la Terre et de Mars, l'angle à la Terre est d'environ 90°.

Jupiter et Saturne ne présentent absolument aucune phase.

PIÈCES DE PONT, pièces de bois posées transversalement sur les poutres d'un pont en charpente, et destinées à porter le plancher de ce pont (*Voy. PONTS EN CHARPENTE, PONTS SUSPENDUS*).

PIÈCES COURBES (FLEXION PLANE DES). Les pièces courbes qui entrent dans les constructions, et dont il peut être nécessaire de déterminer la résistance, sont ordinairement des pièces symétriques par rapport à un plan vertical mené dans le sens de leur longueur. Les sections normales ont leurs centres de gravité sur une ligne courbe située dans ce plan de symétrie; on la nomme la *ligne moyenne*, ou la *fibre moyenne*; on peut, en effet, considérer la pièce comme formée d'un faisceau de fibres longitudinales, courbes dans leur état naturel et situées dans des plans verticaux parallèles. Les forces qui sollicitent les pièces courbes sont ordinairement symétriques elles-mêmes par rapport au plan de symétrie dont nous avons parlé, en sorte qu'elles se réduisent à des résultantes partielles situées dans ce plan. Sous l'action de ces forces, les fibres éprouvent une flexion parallèle au plan de symétrie: c'est ce qu'on appelle une *FLEXION PLANE*; et le plan de symétrie prend le nom de *plan de flexion*. Les sections normales sont souvent égales entre elles dans toute la longueur de la pièce courbe, ou, si elles varient, c'est graduellement et d'une manière peu sensible; il en résulte que dans une petite étendue la pièce peut être assimilée à un prisme, et que l'on peut dès lors lui appliquer les formules établies pour la flexion plane des pièces droites (*Voy. FLEXION PLANE*). C'est-à-dire que si l'on appelle Ω l'aire d'une section normale quelconque, v la distance du plan des fibres neutres (ou sans flexion) à la fibre la plus éloignée, R la tension ou la pression par unité de surface que supporte cette fibre, E le coefficient d'élasticité de la matière qui forme la pièce, T la somme des projections, perpendiculairement à la section considérée, des forces qui sollicitent la pièce depuis cette section jusqu'à l'extrémité, μ la somme des moments de ces forces par rapport à un axe mené par le centre de gravité de la section perpendiculairement au plan de flexion, I le moment d'inertie de la section par rapport à ce même axe, i l'allongement ou le raccourcissement par mètre que subit la fibre moyenne, enfin V la distance de cette fibre au plan des fibres neutres, on aura les équations

$$[1] T = E\Omega i, \quad [2] V = \frac{IT}{\mu\Omega}, \quad R = \frac{v\mu}{T} - \frac{T}{\Omega}. \quad [3]$$

I. Dans la flexion plane des pièces primitivement droites, on obtient aisément une équation différentielle approchée, dont l'intégration fait connaître la forme de la fibre moyenne. Mais dans les pièces courbes, il est nécessaire d'apprécier progressivement l'effet produit sur la pièce entière par le déplacement de chacune des sections normales relativement à celle qui la précède.

Nous examinerons d'abord le cas le plus ordi-

naire, celui où la pièce, indépendamment du plan de symétrie dont nous avons parlé, en a un second, également vertical, et perpendiculaire au premier, et où les forces sont symétriquement distribuées par rapport à ce second plan de symétrie. Il en résulte qu'après la flexion, la pièce reste symétrique par rapport à ce plan; et que la section normale que ce plan détermine ne peut se déplacer qu'en s'élevant ou s'abaissant d'une certaine quantité, toujours très-petite, dans le sens de la verticale. Cette première cause de déplacement, si elle était seule, aurait pour effet d'accroître ou de diminuer de cette même quantité les ordonnées verticales de tous les points de la fibre moyenne. Mais il y a deux autres causes de déplacement. Considérons (fig. 1) deux sections très-voisines ab et $c'd$; après la flexion, leur position relative aura changé, et cd sera venu en $c'd'$, en tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de flexion et passant par le point K qui appartient à une fibre neutre. Mais on peut concevoir ce mouvement comme résultant de deux autres, savoir: un mouvement de translation, par lequel la section cd se serait avancée parallèlement à elle-même, de manière que son centre de gravité g soit venu en g' ; puis un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de flexion et passant par le point g' . Le premier de ces mouvements aurait pour effet de transporter toute la partie de la pièce comprise entre la section cd et l'extrémité, d'une quantité égale et parallèle à gg' ; le second aurait pour effet de faire tourner cette même partie de la pièce courbe autour de l'axe projeté en g' , d'une quantité angulaire égale à l'angle des droites cd et $c'd'$. Mesurons ces deux mouvements. On a

$$gg' = i.Gg = ids,$$

en désignant par ds l'arc élémentaire de la fibre moyenne; mais $i = \frac{T}{E\Omega}$, en vertu de l'équation [1]; il vient donc

$$gg' = \frac{Tds}{E\Omega}. \quad [4]$$

On a ensuite, en appelant $d\psi$ l'angle cKc' ,

$$d\psi = \frac{gg'}{gK} = \frac{ids}{V},$$

ou, en mettant pour i et V leurs valeurs données par les équations [1] et [2],

$$d\psi = \frac{\mu ds}{EI} = \frac{\mu ds}{\varepsilon}, \quad [5]$$

en désignant par ε le produit EI . Il résulte de cette formule qu'un point situé dans le plan de flexion à la distance l du point g' décrirait dans la rotation un petit arc exprimé par

$$l.d\psi \quad \text{ou} \quad l.\frac{\mu ds}{\varepsilon}. \quad [6]$$

Les formules seraient les mêmes si Gg , au lieu de s'allonger s'était raccourci.

II. Cela posé, soit G_0G_1 (fig. 2) une portion quelconque de la fibre moyenne comprise entre le plan de symétrie normal et une section normale quelconque. Prenons pour axe des y la verticale du

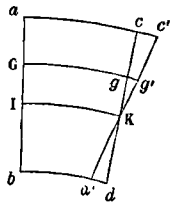


Fig. 1.

point G_0 , et pour axe des x une horizontale quelconque OX menée dans le plan de flexion. Soit f l'ordonnée du point G_0 ; soient x_1 et y_1 les coordonnées du point G_1 , x et y celles d'un point quelcon-

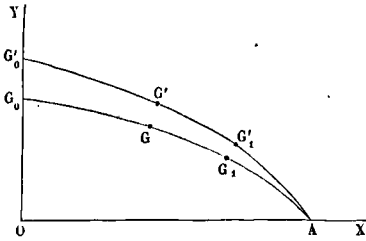


Fig. 2.

que G de la fibre moyenne. Soit $G'_0 G'_1$ la position de la fibre moyenne après la flexion.

Le mouvement de G_0 en G'_0 a pour effet d'accroître toutes les ordonnées d'une même quantité $G_0 G'_0$, que nous représenterons Δf ; l'abscisse du point G_0 n'a pas changé.

Apprécions les effets du second mouvement; et pour cela considérons la section normale faite en un point quelconque G . L'élément ds qui se termine en ce point s'est allongé (ou raccourci) de la quantité $\frac{T ds}{\Omega E}$; par suite, l'abscisse de ce point s'est accrue d'une quantité égale à la projection de cette même longueur sur l'axe des x . Or les cosinus des angles que l'élément ds fait avec ces axes ont respectivement pour valeurs $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$; les projections du chemin considéré sont donc

$$\frac{T dx}{\Omega E} \quad \text{et} \quad \frac{T dy}{\Omega E};$$

par conséquent, par le seul fait de l'allongement (ou du raccourcissement) de cet élément, les coordonnées de tous les points de la fibre moyenne situés au delà du point G se sont accrues de ces mêmes quantités. L'accroissement total des coordonnées du point G_1 résultant de l'allongement (ou du raccourcissement) des divers éléments de la fibre moyenne, est donc pour chacune de ces coordonnées

$$\int_0^{x_1} \frac{T dx}{\Omega E} \quad \text{et} \quad \int_0^{y_1} \frac{T dy}{\Omega E}. \quad [7]$$

Mesurons maintenant les effets du troisième mouvement, et considérons encore la section normale faite au point G . La rotation de cette section autour du point G a fait décrire au point G_1 un arc exprimé par la formule [6], si l y désigne la distance GG_1 . Or cet arc peut être considéré comme une perpendiculaire à la droite GG_1 ; celle-ci faisant avec les axes coordonnées des x et des y des angles dont les cosinus ont pour expression

$$\frac{x_1 - x}{l} \quad \text{et} \quad \frac{y_1 - y}{l},$$

les cosinus de ceux que fait l'arc dont il s'agit avec les mêmes axes seront exprimés par

$$+ \frac{y_1 - y}{l} \quad \text{et} \quad - \frac{x_1 - x}{l};$$

les accroissements correspondants des coordonnées x_1 et y_1 seront donc

$$+ \frac{\mu ds}{\varepsilon} (y_1 - y) \quad \text{et} \quad - \frac{\mu ds}{\varepsilon} (x_1 - x);$$

et, par conséquent, les accroissements dus à la rotation successive de toutes les sections normales depuis G_0 jusqu'à G_1 seront exprimés par

$$- \int_0^{y_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (y - y_1) \quad \text{et} \quad + \int_0^{x_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (x - x_1).$$

Si donc on appelle Δx_1 et Δy_1 les accroissements complets des coordonnées du point G_1 dues aux trois mouvements que nous venons d'analyser, on aura, en faisant la somme algébrique des accroissements dus à ces mouvements partiels,

$$\Delta x_1 = \int_0^{x_1} \frac{T dx}{\Omega E} - \int_0^{y_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (y - y_1), \quad [8]$$

et

$$\Delta y_1 = \Delta f + \int_f^{y_1} \frac{T dy}{\Omega E} + \int_0^{x_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (x - x_1). \quad [9]$$

Ces formules, dans lesquelles les intégrales pourront toujours être calculées numériquement à l'aide d'une formule de quadrature par approximation, par exemple par la formule de Th. Simpson (*Voy. QUADRATURE*), donneront pour un point quelconque de la fibre moyenne dans sa position primitive, ayant pour coordonnées x_1 et y_1 , les variations de ces coordonnées, et par suite la nouvelle position du point dont il s'agit.

III. Ceci suppose toutefois que toutes les forces qui agissent sur la pièce courbe, depuis le point G_0 jusqu'au point G_1 soient connues. Si l'extrémité A (fig. 2) de la pièce courbe, que nous pouvons toujours supposer placée sur l'axe des x , repose sur un appui, il est nécessaire de déterminer d'abord les réactions horizontale et verticale X et Y que ce point d'appui exerce sur la pièce.

Pour déterminer Y , on remarquera que l'on peut, dans l'équilibre de la pièce, supprimer la moitié gauche de la pièce, et la remplacer par une force horizontale appliquée en G'_0 ; car les réactions des deux moitiés de la pièce au point G'_0 devant être symétriques, et en même temps égales et opposées, ne peuvent être que perpendiculaires au plan de symétrie dont la trace est OY. Si donc on représente par P l'une quelconque des forces extérieures qui agissent sur la moitié $G'_0 A$, on aura, en projetant les forces sur la verticale,

$$\Sigma P_y + Y = 0, \quad \text{d'où} \quad Y = -\Sigma P_y.$$

Pour déterminer X , on mettra cette force en évidence dans l'équation [8], et attendu que la distance OA est alors invariable, on exprimera que Δx_1 est nul pour

$$x_1 = OA = a \quad \text{et} \quad y_1 = 0.$$

Le terme qui dans T provient de X , est la projection de X sur la tangente au point dont les coordonnées sont x et y . Soit α l'angle que cette tangente fait avec l'axe des x , le terme dont il s'agit sera

$$- X \cos \alpha.$$

Le terme qui dans le moment fléchissant μ provient de la force X , est Xy . Mettant donc ces termes en évidence en conservant les notations T

et μ pour les autres forces extérieures, on mettra l'équation [8] sous la forme

$$0 = \int_0^a \frac{T dx}{\Omega E} + \int_0^S \frac{\mu ds}{\varepsilon} \cdot y - X \int_0^a \frac{\cos \alpha dx}{\Omega E} - X \int_0^S \frac{ds}{\varepsilon} y^2, \quad [10]$$

équation d'où l'on tirera X . Cette force est la *poussée* que la pièce courbe exerce sur son appui; Y est la *charge* que supporte ce même appui.

IV. Afin de donner un exemple de l'application de ces formules, supposons que les forces extérieures se réduisent à des poids proportionnels à la projection horizontale des éléments de l'arc G_0A . Soit p la charge par mètre courant. On aura

$$T = p(a - x) \sin \alpha, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2} p(a - x)^2. \quad [11]$$

Ces valeurs mises dans l'équation [10] permettront de calculer X . On aura ensuite

$$Y = -pa.$$

L'équation [9] devra donner

$\Delta y_1 = 0$ pour $x_1 = a$ et $y_1 = 0$, ce qui fera connaître Δf .

Ces diverses valeurs mises dans les équations [8] et [9] donneront le déplacement d'un point quelconque de la fibre moyenne dont les coordonnées sont x_1 et y_1 dans sa position primitive.

On peut remarquer que lorsque la pièce courbe affecte la forme d'un arc très-surbaissé, les premier et troisième termes de l'équation [10] sont presque toujours négligeables vis-à-vis des second et quatrième termes. En même temps, la section de la pièce courbe est ordinairement constante, en sorte que I , et par suite ε sont des constantes; la valeur de X est alors donnée par l'équation

$$X = \frac{\int_0^S \mu y ds}{\int_0^S y^2 ds}. \quad [12]$$

V. Il pourrait arriver que la distance OA ne fût pas invariable, mais que l'extrémité A de la pièce courbe fût assujettie à se mouvoir sur une horizontale, et n'eût par conséquent à supporter qu'une réaction verticale. On aurait dans ce cas

$$X = 0 \quad \text{et} \quad Y = -\Sigma P.$$

On exprimerait que l'équation [8] est satisfaite pour

$$x_1 = a \quad \text{et} \quad y_1 = 0,$$

ce qui donnerait la variation Δa de la longueur a en OA . On exprimerait ensuite que l'équation [9] donne $\Delta y_1 = 0$, quand on y fait $x_1 = a$ et $y_1 = 0$: ce qui ferait connaître la variation de flèche Δf . Les équations [8] et [9] donneraient ensuite le déplacement d'un point quelconque x_1 et y_1 de la fibre moyenne.

VI. Il y a encore une question qu'il est utile de traiter, au point de vue de ses applications: c'est celle où la pièce courbe étant posée par ses extrémités sur deux appuis de niveau, n'est pas symétriquement chargée par rapport au plan normal vertical qui la divise en deux parties égales dans sa position primitive. Dans ce cas, auquel se rapporte la figure 3, prenons pour axe des x la droite G_0A

qui unit les deux points d'appuis. Le point G_0 ne peut plus, comme dans les cas précédemment traités, prendre un mouvement de translation; mais la section extrême, faite au point G_0 , peut tourner d'un

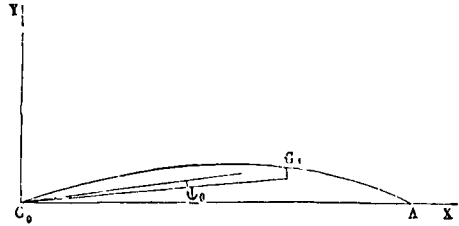


Fig. 3.

certain angle ψ_0 autour de ce point. Il en résultera, pour un point quelconque G_1 de la fibre moyenne, un déplacement exprimé par $G_0G_1 \cdot \psi_0$ ou $l \psi_0$. Or, les cosinus des angles que la droite G_0G_1 fait avec

les axes étant $\frac{x_1}{l}$ et $\frac{y_1}{l}$, ceux des angles que fait avec les mêmes axes le petit arc décrit par G_1 , et qui peut être regardé comme une perpendiculaire à G_0G_1 , seront exprimés par $\frac{y_1}{l}$ et $-\frac{x_1}{l}$; les déplacements de G_1 suivant les axes, dus à la rotation ψ_0 , auront donc pour expression:

$$\begin{aligned} \text{Sur l'axe des } x & \quad y_1 \psi_0; \\ \text{Sur l'axe des } y & \quad -x_1 \psi_0. \end{aligned}$$

D'ailleurs on aura

$$\Delta x_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta y_0 = 0;$$

les équations [8] et [9] seront donc remplacées par les suivantes:

$$\Delta x_1 = y_1 \psi_0 + \int_0^{x_1} \frac{T dx}{\Omega E} - \int_0^{s_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (y - y_1), \quad [13]$$

$$\Delta y_1 = -x_1 \psi_0 + \int_0^{y_1} \frac{T dy}{\Omega E} + \int_0^{s_1} \frac{\mu ds}{\varepsilon} (x - x_1). \quad [14]$$

Aux points d'appui G_0 et A s'exercent des réactions dont nous représenterons les composantes par X_0, Y_0 et par X, Y . Les conditions d'équilibre de la pièce entière considérée comme rigide seront, en désignant par P une quelconque des forces extérieures,

$$\begin{aligned} X + X_0 + \Sigma P_x = 0, \quad Y + Y_0 + \Sigma P_y = 0, \\ Y \cdot a + \Sigma \mathcal{M}_{G_0} P = 0. \end{aligned} \quad [15]$$

Les deux dernières feront connaître Y et Y_0 . Maintenant si dans les équations [13] et [14] on met X en évidence comme on l'a fait plus haut, et qu'on exprime que pour $x_1 = a$ et $y_1 = 0$, ces équations donnent $\Delta x_1 = 0$ et $\Delta y_1 = 0$, on aura deux équations du premier degré pour déterminer X et ψ_0 ; la première des équations [15] donnera alors X_0 .

VII. Lorsqu'il s'agit d'une pièce courbe métallique de grande dimension, comme par exemple un des arcs en fonte ou en tôle qu'on emploie aujourd'hui dans les fermes de ponts, il peut être nécessaire de tenir compte des déformations dues aux variations de température. Pour cela on se contente d'augmenter les valeurs de Δx_1 et de Δy_1 , des quantités

$$\tau(x_1 - x_0) \quad \text{et} \quad \tau(y_1 - y_0),$$

τ désignant un coefficient numérique, qui est le produit du coefficient de dilatation de la matière

employée par l'accroissement de température. Pour le fer, le coefficient de dilatation est

0,0000122 suivant Laplace et Lavoisier,
0,0000118 — Dulong et Petit,

soit, en moyenne 0,000012. Le coefficient représenté ci-dessus par τ serait donc 0,000012. θ , en appelant θ le nombre de degrés dont la température s'est accrue.

(Voy. la *Théorie de la résistance des solides* par M. Bélanger, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse, tome I, et le *Traité pratique de la résistance des matériaux* par M. Bourdais.)

PIED À BEC. Voy. ÉTALON À COULISSE.

PIED-DE-BICHE, nom que l'on donne quelquefois au cliquet, qui, dans les roues-à-rochet, s'engage entre les dents pour empêcher le mouvement rétrograde de la roue, tout en permettant le mouvement direct (Voy. ENCLIQUETAGES, ROUES À ROCHET).

PIÉDESTAL, partie inférieure des ordres d'architecture, celle qui porte la colonne. Sa hauteur est le tiers de celle de la colonne, suivant un grand nombre d'auteurs; Vignole lui attribue $\frac{1}{3}$ de module de plus dans les ordres corinthien et composite, ce qui porte sa hauteur à 7 modules. Le piédestal se subdivise en trois parties: la CORNICHE, le DÉ et la BASE (Voy. ces mots; Voy. aussi l'art. ORDRES).

PIÉDOUCHE, petit piédestal, destiné à porter des objets de faibles dimensions, tels qu'un buste, un vase, un balustre, etc.

PIÉDROITS, murs verticaux sur lesquels repose une PLATE-BANDE, un BERCEAU, une VOÛTE quelconque (Voy. ces mots). Lorsqu'il s'agit d'une porte ou d'une fenêtre, les piédroits portent aussi le nom de jambages.

Les dimensions des piédroits d'une voûte doivent être calculées de manière à résister non-seulement à leur poids et à celui de la voûte, mais encore à la poussée horizontale que celle-ci exerce (Voy. POUSSÉE DES VOÛTES). Ayant déterminé la réaction de la voûte sur le piédroit, on compose cette réaction avec le poids du piédroit; et il faut que la résultante remplisse les conditions suivantes: 1° il faut qu'elle rencontre la base du piédroit dans l'intérieur de cette base, autrement le piédroit serait renversé (Voy. STABILITÉ); 2° il faut que le point d'application de cette résultante ne soit pas à une distance de l'arête la plus voisine inférieure au tiers de la distance de cette arête à l'arête opposée, sans quoi cette dernière ne porterait rien (Voy. COMPRESSION [Résistance à la]); 3° il faut que la composante verticale de cette résultante, c'est-à-dire la moitié du poids de la voûte augmentée du poids du piédroit, divisée par la base de ce piédroit, donne un quotient au plus égal à la charge par mètre carré que les matériaux employés peuvent supporter d'une manière permanente sans danger de rupture, soit environ 50 000^k pour la pierre de taille, ou 10 000^k pour le moellon; 4° il faut enfin que cette résultante fasse avec la verticale un angle au plus égal à l'angle du frottement de la pierre sur la pierre, angle dont la tangente est 0,76 et qui équivaut à environ 37°; sans cela le piédroit glisserait sur sa base (Voy. FROTTEMENT). Si ces conditions n'étaient pas remplies, il faudrait augmenter l'épaisseur du piédroit.

PIEZOMÈTRE (du grec $\pi\acute{\iota}\epsilon\zeta\omega$, je presse, et $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu$, mesure), instrument qui sert à mesurer la pression de l'eau dans les conduites.

I. Il est formé d'un tuyau de plomb flexible AB (fig. 1) que l'on adapte par son extrémité inférieure A au point de la conduite où l'on a intérêt à connaître la pression, et dont l'extrémité supérieure se termine par un tube de verre BC qui sert à voir à quelle hauteur s'élève l'eau dans le tuyau. La hauteur verticale de ce niveau au-dessus du point où est adaptée l'extrémité inférieure représente l'excès de la pression dans la conduite sur la pression atmosphérique. On a, en effet, dans l'état d'équilibre, statique ou dynamique, en nommant \mathcal{P} la pression par mètre dans la conduite, \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique, h la hauteur de l'eau dans le piézomètre, et Π le poids du mètre cube d'eau. (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE)

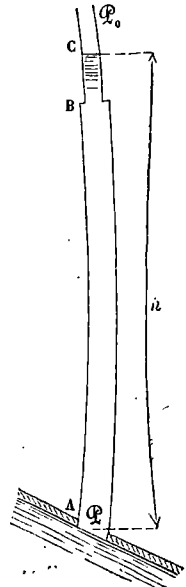


Fig. 1.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \Pi h,$$

d'où

$$h = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{\Pi}.$$

Il y a une règle mnémotechnique très-simple pour déduire de la hauteur h observée

la pression par centimètre carré dans la conduite. Cette règle consiste à ajouter 10^m, 33 à la hauteur h observée, exprimée en mètres, et à diviser la somme par 10; le quotient exprime en kilogrammes la pression demandée rapportée au centimètre carré. Supposons, en effet, que l'on ait observé $h = 6^m, 47$; comme 10^m, 33 est la hauteur d'eau dont la pression équivaut à la pression atmosphérique, la somme 6^m, 46 + 10^m, 33 ou 16^m, 80 exprimera la hauteur d'eau produisant la pression \mathcal{P} sur un mètre carré, c'est-à-dire 16 800^k, puisque le mètre cube d'eau pèse 1000^k; si l'on rapporte cette pression au centimètre carré, il faut diviser par 10 000, ce qui donne 1^k, 68 pour la pression demandée. Or ce nombre s'obtient bien en faisant la somme des nombres 6,47 et 10,33 et divisant la somme par 10.

Il ne faut point confondre l'instrument dont nous venons de parler avec l'instrument d'Ørsted qui porte le même nom, et qui sert à observer la compressibilité des liquides. On en trouvera la description dans les *Traité de Physique*.

II. M. Bélanger a donné le nom de *piézomètre différentiel* à un appareil destiné à mesurer non pas la pression en un point d'une conduite, mais la différence des pressions en deux points différents d'une même conduite. Il se compose de deux piézomètres AB, CD (fig. 2) dont les extrémités inférieures sont adaptées en deux points de la conduite, et dont les extrémités supérieures sont réunies par un tube de verre recourbé AMD, percé en M d'un trou capillaire que l'on peut fermer ou ouvrir à volonté.

Dans l'état ordinaire les robinets R et R_a de

communication avec la conduite sont fermés et les deux piézomètres sont remplis d'air. Lorsqu'on veut mesurer la différence des pressions en B et C, on ouvre les deux robinets; l'eau de la conduite monte

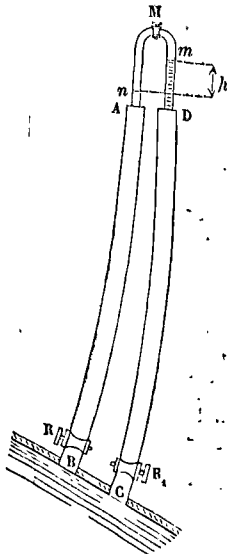


Fig. 2.

dans les deux piézomètres en comprimant l'air qui y est contenu. Si son niveau n'apparaît pas dans le tube de verre, on débouche l'orifice M, et on laisse échapper un peu d'air, jusqu'à ce que les deux niveaux apparaissent. Si n et m sont ces deux niveaux, la différence h de hauteur verticale entre ces deux points fera connaître la différence des pressions en B et en C, en tenant compte de la différence de niveau des points B et C eux-mêmes, si elle n'est pas négligeable. Si h' est cette différence de niveau des points B et C, $h + h'$ mesurera la différence de pression demandée, puisque

la pression de l'air en m et en n est la même.

Il pourrait arriver qu'en ouvrant l'orifice M on ne parvint pas à faire apparaître les deux niveaux dans le tube de verre; cela indiquerait que les tubes piézométriques sont trop longs; et il faudrait les raccourcir.

PIGNON, nom donné d'une manière générale à la plus petite des deux roues dentées engrenant ensemble (Voy. ENGRENAGES), mais que l'on applique surtout lorsque le nombre des dents de cette roue est très-petit, et qu'elle est fondue d'une seule pièce, pleine et sans bras; ses dents portent souvent alors le nom d'ailes. — Il peut arriver, lorsque le nombre des dents du pignon descend au-dessous d'une certaine limite, que le tracé de l'engrenage, d'après la condition que le contact commence un pas avant la ligne des centres et se termine un pas après, donne pour les dents du pignon une forme trop amincie vers le bout, et qui n'offrirait pas, au point de vue de la résistance des matériaux, une solidité suffisante. Il peut même arriver que ce tracé devienne tout à fait impossible, parce que les deux courbes qui terminent la deuxième dent du pignon (épi-cycloïdes, ou développantes) se coupent en dehors de la circonférence primitive de la grande roue. Il faut, dans ce cas, renoncer à la condition rappelée ci-dessus et modifier le tracé de la manière suivante.

Après avoir tracé deux dents en contact sur la ligne des centres, on les trace de nouveau dans la position qu'elles occupent lorsqu'elles ont tourné, non plus d'un pas entier, mais d'une fraction déterminée du pas, $\frac{3}{4}$ ou même $\frac{1}{2}$, par exemple; on détermine le point de contact dans cette position; et c'est ce point qui sert à limiter la saillie des dents et le creux comme dans le tracé ordinaire. — On

reconnait ainsi que lorsque la roue a au moins 12 dents, le nombre des dents du pignon peut descendre jusqu'à 4; mais si la roue a moins de 12 dents, le pignon doit en avoir au moins 5. — Cette circonstance est toujours défavorable au point de vue du frottement, et doit être évitée dans les machines qui ont de grands efforts à transmettre.

PIGNON, face triangulaire que forme le haut du mur perpendiculaire à la ligne de faite, dans un comble à deux égouts, lorsque ce mur s'élève jusqu'au faitage (Voy. COMBLE).

PIGNON VALSEUR. Voy. ROUE SATELLITE, ENGRENAGE DIFFÉRENTIEL.

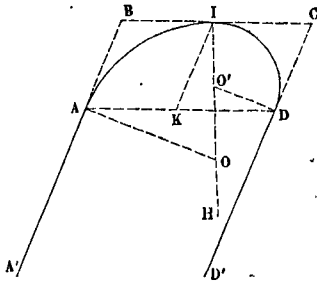
PILASTRE, colonne à section carrée, à laquelle on donne le même chapiteau et la même base qu'à une colonne ordinaire, suivant l'ordre auquel il appartient. Les pilastres servent ordinairement à orner les piédroits d'une arcade, en y tenant la place des colonnes; dans ce cas ils sont toujours engagés dans le mur de manière à n'avoir qu'une saillie égale au sixième de leur largeur. La saillie n'est même parfois que le dixième de la largeur. Dans des cas plus rares on n'engage le pilastre que de la moitié ou du tiers de sa largeur; l'entablement obligé de suivre cette saillie éprouve alors un ressaut, qui n'est pas toujours d'un bon effet. Quand les pilastres sont associés aux colonnes, on leur donne vers le haut une diminution de $\frac{1}{15}$ de la largeur.

Quand ils sont isolés, on n'est pas dans l'usage de les diminuer. Les pilastres peuvent recevoir des cannelures, dont le nombre n'est jamais inférieur à 7 ni supérieur à 9; il convient qu'il y ait une cannelure au milieu de la largeur, ce qui oblige à opter entre l'un de ces deux nombres. Le nombre de 7 cannelures est celui qui est le plus fréquemment employé dans les monuments pouvant servir de modèle. (Voy. ORDRES, COLONNE, PORTIQUE.)

PILES, appuis intermédiaires d'un pont établis entre les rives du cours d'eau que le pont doit traverser. Les piles s'exécutent en maçonnerie (lorsque ces appuis sont exécutés en bois ou en fonte, ils prennent le nom de *palées*). La section de la pile proprement dite est un rectangle dont la longueur est égale à la dimension transversale du pont, et dont la largeur est calculée d'après le poids que la pile doit supporter. Mais on termine les piles du côté d'amont et du côté d'aval par des massifs de maçonnerie faisant saillie, et auxquels on donne respectivement le nom d'*avant-bec* et d'*arrière-bec*. Ces massifs sont destinés à garantir la pile contre le choc des corps flottants; ils doivent s'élever jusqu'à la hauteur des plus hautes eaux, ce qui explique pourquoi, dans les ponts en plein cintre et en anse de panier, ils s'élèvent souvent au-dessus des naissances. La section des becs doit être choisie de manière à faciliter l'écoulement des eaux et à éviter les tourbillonnements; une forme aiguë paraîtrait donc devoir être préférée; mais les becs seraient alors exposés à être détruits par le choc des glaces; aussi adopte-t-on généralement la forme demi-circulaire.

Dans les ponts biais on donne à la section des becs une forme composée de deux arcs de cercle qui se raccordent entre eux et avec les piédroits. Soit A'ADD' la section de la pile proprement dite; par le milieu K de AD on mène une parallèle KH

aux côtés AA' et DD'; et l'on prend sur cette droite une longueur KI égale à AK; puis on mène par le point I une droite droite BC parallèle à AD et terminée de part et d'autre aux prolongements de AA'



et de DD'; c'est dans le parallélogramme ABCD que l'ensemble des deux arcs de cercle devra être compris. Pour les tracer, on élèvera en I une perpendiculaire IH à la droite BC; et aux points A et D on élèvera sur les côtés AA' et DD' des perpendiculaires qui rencontreront respectivement IH aux points O et O'. Le point O sera également distant de AA' et de BC; par conséquent l'arc AI décrit de ce point comme centre sera tangent à ces deux droites en A et en I. Le point O' sera également distant de BC et de DD'; par conséquent l'arc ID décrit de ce point comme centre sera tangent à ces droites en I et en D. Les deux arcs se raccorderont au point I.

On donne aux parois d'une pile un léger talus, ou fruit, qui ne doit pas dépasser $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{15}$.

Chaque pile d'un pont en pierre reçoit des deux arches qui précèdent et qui suivent deux poussées égales et de sens contraire (Voy. Poussée des voûtes); d'où il résulte que la pile n'éprouve aucune tendance au renversement ni au glissement sur sa base, mais elle supporte les poids des deux demi-arches adjacentes, indépendamment de son propre poids; et c'est d'après cette considération que son épaisseur doit être calculée. Il faut que, si on divise la somme de ces poids par l'aire de la base de la pile, on obtienne un quotient inférieur au poids par mètre carré que les matériaux employés peuvent supporter d'une manière permanente, sans danger de rupture; ce poids varie de 10 000^k à 50 000^k.

(Voy., pour les piles tubulaires en fonte, l'article PALÉES).

PILES DE BOULETS, amas de boulets de même calibre, disposés dans un ordre qui permet d'en déterminer aisément le nombre. Les piles de boulets en usage dans les arsenaux sont de trois espèces : les piles à base carrée, les piles à base rectangulaire, les piles à base triangulaire. Chacune de ces espèces de piles peut en outre être complète ou tronquée.

I. Piles à base carrée. Dans les piles à base carrée, chaque boulet d'une tranche horizontale repose sur 4 boulets de la tranche immédiatement inférieure. Chaque tranche présente la forme d'un carré, et contient autant de files qu'il y a de boulets dans chaque file; en sorte que, si n désigne le

nombre des boulets de l'une des files de cette tranche, le nombre des boulets contenus dans la tranche entière est n fois n , ou n^2 . Le côté dans chaque tranche contient un boulet de plus que le côté de la tranche immédiatement supérieure. Il résulte de cette disposition que la première tranche, en commençant par le haut, ne contient qu'un seul boulet; la seconde en contient 2 fois 2, ou 4; la troisième en contient 3 fois 3, ou 9; la quatrième 4 fois 4 ou 16; en général la $n^{\text{ième}}$ contient n fois n , ou n^2 boulets. Par conséquent, si N désigne le nombre des boulets qui forment le côté de la dernière tranche en bas, la somme totale des boulets contenus dans la pile sera

$$1 + 4 + 9 + 16 \dots + \dots + N^2.$$

Or, la somme des carrés des nombres consécutifs depuis 1 jusqu'à N est exprimée par

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6};$$

tel est donc le nombre des boulets contenus dans la pile quadrangulaire. On voit que, pour le trouver, il suffit de connaître le nombre N des boulets contenus dans le côté de la base, ou, ce qui revient au même, le nombre des tranches horizontales dont la pile se compose. Si, par exemple, une pile à base carrée se compose de 11 tranches, le nombre des boulets est

$$\frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} \text{ ou } 506.$$

Lorsqu'une pile à base carrée est tronquée, elle peut être considérée comme la différence entre deux piles complètes. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait m tranches, et qu'il y ait n boulets dans le côté de la tranche supérieure; il y en aura $n+1$ dans le côté de la seconde tranche, $n+2$ dans le côté de la troisième, et $n+m-1$ dans le côté de la $m^{\text{ième}}$ ou dernière. Le nombre des boulets de la pile complète serait donc

$$\frac{(n+m-1)(n+m)(2n+2m-1)}{6}.$$

Maintenant si l'on considère ce qui manque à la pile proposée pour former une pile complète, on reconnaît que c'est une autre pile complète, ayant $n-1$ boulets au côté de sa base inférieure, c'est-à-dire qu'il manque un nombre de boulets marqué par

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad [1]$$

Le nombre des boulets de la pile tronquée est donc la différence entre ces deux résultats. Si, par exemple, il y a 7 tranches, et qu'il y ait 5 boulets dans le côté de la tranche supérieure, le nombre total des boulets sera

$$506 - 30 \text{ ou } 476.$$

II. Piles à base rectangulaire. Dans cette espèce de pile, la tranche supérieure est une simple file de boulets. La seconde se compose de 2 files, ayant chacune 1 boulet de plus que la file supérieure. La troisième tranche se compose de 3 files, ayant chacun 2 boulets de plus que la première file; et ainsi de suite. Si donc on désigne par $p+1$ le nombre des boulets de la première file :

La première tranche aura

$$p+1 \text{ boulets ou } p+1,$$

la seconde aura

$$2(p+2) \text{ boulets ou } 2p+2^2,$$

la troisième

$$3(p+3) \text{ boulets ou } 3p+3^2,$$

la N^{ième} $N(p+N)$ boulets ou $Np+N^2$.

La somme des nombres de la première colonne verticale est

$$p(1+2+3+\dots+N), \text{ ou } \frac{pN(N+1)}{2};$$

la somme des nombres de la seconde colonne verticale est

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

La somme totale est donc

$$\frac{N(N+1)(2N+3p+1)}{6}. \quad [2]$$

Si, par exemple, il y a 11 boulets dans la file supérieure, et qu'il y ait 7 tranches, on aura

$$p=10 \text{ et } N=7,$$

ce qui donnera

$$\frac{7.8(14+30+1)}{6} \text{ ou } 420$$

pour le nombre des boulets de la pile considérée.

Une pile à base rectangulaire peut être tronquée; dans ce cas on la considère comme la différence entre deux piles complètes. Soit m le nombre des tranches, q le nombre des boulets du plus grand côté de la base supérieure et r le nombre des boulets du plus petit côté de cette même base. Le nombre des tranches de la pile complète serait $m+r-1$. Si $p+1$ désigne toujours le nombre des boulets de la file supérieure, on aura

$$q=p+1+r-1=p+r.$$

Par conséquent, si dans la formule [2] on fait

$$N=m+r-1 \text{ et } p=q-r,$$

on aura le nombre des boulets de la pile complète.

Pour avoir le nombre des boulets de la pile retranchée, il faudra faire $N=r-1$ avec $p=q-r$. En retranchant le second résultat du premier, on aura le nombre des boulets de la pile tronquée. Supposons, par exemple, qu'il y ait 5 tranches, 14 boulets dans le plus grand côté de la base supérieure, et 4 dans le plus petit, on aura pour la pile complète

$$N=5+4-1=8 \text{ et } p=14-4=10,$$

ce qui donnera pour le nombre des boulets de cette pile

$$\frac{8.9(16+30+1)}{6} \text{ ou } 564.$$

Pour la pile retranchée on devra faire

$$N=4-1=3, \text{ avec } p=10,$$

ce qui donnera

$$\frac{3.4(6+30+1)}{6} \text{ ou } 74.$$

La différence de ces résultats, c'est-à-dire 490, sera le nombre des boulets de la pile quadrangulaire tronquée.

III. *Piles à base triangulaire.* Dans les piles à base triangulaire, chaque boulet repose sur 3 boulets de la tranche immédiatement inférieure. Chaque tranche a la forme triangulaire, et se compose d'une série de files inégales dont la première contient 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, et ainsi de suite. Chaque tranche a une file de plus que la tranche immédiatement supérieure. Il faut d'abord savoir évaluer le nombre des boulets d'une tranche connaissant le nombre des boulets contenus dans son côté. Soit n ce dernier nombre. Le nom-

bre des boulets contenus dans la tranche considérée sera la somme des nombres entiers consécutifs depuis 1 jusqu'à n , c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Cela posé, on aura le nombre de boulets de la pile en remplaçant successivement n par 1, 2, 3... jusqu'à N , si N désigne le nombre des tranches, et faisant la somme des résultats. On trouve ainsi :

pour la 1^{re} tranche $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1$

— 2^e — $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2$

— 3^e — $\frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3$

.....

— N^{ième} — $\frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{2} N.$

La somme des nombres contenus dans la première colonne verticale équivaut à

$$\frac{1}{2}(1+4+9+\dots+N^2)$$

c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

La somme des nombres contenus dans la deuxième colonne revient à

$$\frac{1}{2}(1+2+3+\dots+N),$$

ou à $\frac{1}{2} \cdot \frac{N(N+1)}{2};$

on aura donc pour la somme totale

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{N(N+1)}{6} (3+2N+1)$$

ou $\frac{N(N+1)(N+2)}{6}.$ [3]

Si, par exemple, il y a 12 tranches, le nombre des boulets de la pile sera

$$\frac{12.13.14}{6} \text{ ou } 264.$$

Lorsqu'une pile triangulaire est tronquée, on la considère encore comme la différence entre deux piles complètes. Soit, par exemple, m le nombre des tranches, et n le nombre des boulets contenus dans le côté de la base supérieure. Le nombre des tranches enlevées sera $n-1$, et par conséquent le nombre total des tranches sera $m+n-1$. Pour avoir le nombre des boulets de la pile complète, il faudra donc dans la formule [3] faire $N=m+n-1$. Pour avoir le nombre des boulets de la pile triangulaire enlevée, il faudra faire $N=n-1$. En retranchant le second résultat du premier, on aura le nombre des boulets de la pile tronquée. — Supposons, par exemple, qu'il y ait 8 tranches, et qu'il y ait 5 boulets dans le côté de la tranche supérieure; on aura $m=8$ et $n=5$. Par suite, le nombre des boulets de la pile complète serait, en faisant $N=8+5-1=12$,

$$\frac{12.13.14}{6} \text{ ou } 364;$$

le nombre des boulets de la pile retranchée s'obtiendra en faisant

$$N=5-1=4,$$

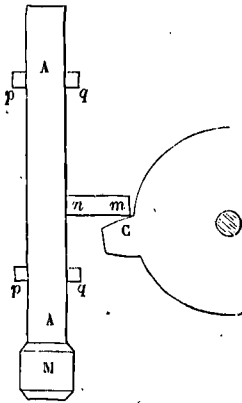
ce qui donne

$$\frac{4.5.6}{6} = 10.$$

Le nombre des boulets de la pile tronquée est donc 364—20 ou 344.

Il peut se faire que non-seulement une pile soit tronquée, mais encore que la tranche supérieure soit entamée. Le plus simple est alors de compter le nombre des boulets qui restent dans cette tranche, et de l'ajouter au résultat obtenu en faisant abstraction de cette tranche.

PILO, machine employée dans l'industrie pour fouler ou broyer des matières; on en fait usage pour la préparation des chiffons dans la fabrication du papier, pour le feutrage des laines, dans la fabrication de la poudre, et pour le broyage du minéral dans les usines métallurgiques, où l'ensemble des pilons affectés au même usage et mis en mouvement par le même moteur forme ce qu'on appelle un *bocard*. Un pilon se compose d'une tige verticale A, A, mobile entre des guides ou prisons



pp, qq, et terminée à sa partie intérieure par une masse M, qui forme ce qu'on appelle la tête du pilon, et qui est destinée à agir sur les matières soumises à l'action du pilon. A la partie latérale de la tige est adaptée une barre transversale que l'on appelle le *mentonnet*. Ce mentonnet est saisi par une *came* C, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal. La came oblige le mentonnet à s'élever, ainsi que le pilon, d'une certaine hauteur qu'on appelle la *levée*; elle l'abandonne alors et le pilon retombe sur les matières qu'il doit fouler ou broyer. Un certain nombre de pilons sont ainsi disposés parallèlement sur une même ligne. Un tambour horizontal est placé parallèlement aux pilons, et sur sa surface sont disposées, en face de chaque mentonnet, un certain nombre de cames, qui font mouvoir les pilons: Les cames ne sont pas rangées sur une même ligne; afin d'éviter le choc simultané d'une rangée de cames contre les mentonnets, elles sont disposées en retraite les unes par rapport aux autres, de manière que les chocs se succèdent à intervalles égaux et sans interruption; le travail est ainsi plus régulier, et la machine n'a pas besoin du secours d'un volant. (Voy. pour le tracé des cames l'article ENGRENAGES.)

La théorie mécanique du pilon rentre dans celle des marteaux frontaux. (Voy. MARTEAUX.)

PILOTAGE, partie de la science nautique qui a

pour objet de déterminer à chaque instant le lieu de la mer où se trouve le navire, et la route qu'il doit suivre pour se rendre à sa destination. (Voy. LATITUDE, LONGITUDE, HEURE, PROBLÈME DES ROUTES, LOXODROME, etc., etc.)

PILOTS, pieux que l'on enfonce verticalement dans les terrains sablonneux, argileux ou schisteux, pour servir de fondation aux édifices, aux piles ou culées des ponts, etc. Ces pieux sont des bois en grume, auxquels on se contente d'enlever l'écorce; on les arme à leur extrémité inférieure d'un sabot en fonte ou en fer forgé disposé en pointe; et à leur extrémité supérieure d'une ou deux frettes en fer destinées à empêcher le bois d'éclater lors du battage. Ce battage s'exécute au moyen d'une masse de bois ou de fonte appelée *mouton*, que l'on élève à une certaine hauteur à l'aide d'une machine nommée *sonnette* (Voy. ces mots), et qu'on laisse retomber sur la tête du pieu. Soit M la masse du mouton, V la vitesse qu'il acquiert au bas de sa chute, m la masse du pieu, et v la vitesse qu'il prend après le choc, R₀ la résistance moyenne du sol dans le sens vertical pendant le choc, et θ la durée du choc. On aura, en appliquant le principe de la QUANTITÉ DU MOUVEMENT (Voy. ce mot),

$$(M + m)v = MV - R_0\theta;$$

mais la durée θ est si courte, que, quoique la force R₀ puisse être considérable, on néglige ordinairement le produit R₀θ, et l'on écrit, comme si le pieu était libre,

$$(M + m)v = MV, \text{ d'où } v = \frac{MV}{M + m}.$$

D'un autre côté, en appelant e la quantité dont le pieu s'est enfoncé, on a, par le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot), et en appelant R la résistance moyenne du sol après le choc,

$$Re = \frac{1}{2}(M + m)v^2 = \frac{1}{2} \frac{M^2 V^2}{M + m},$$

d'où

$$e = \frac{1}{2R} \cdot \frac{M^2 V^2}{M + m},$$

ou, en appelant h la hauteur de chute du mouton, ce qui suppose $V^2 = 2gh$,

$$e = \frac{g}{R} \cdot \frac{M^2 h}{M + m} = \frac{g}{R} \cdot \frac{Mh}{1 + \frac{m}{M}}.$$

On tire de cette relation deux conséquences importantes. La première, c'est que, pour un même mouton, l'effet utile est proportionnel à la hauteur de la chute. La seconde, c'est que, pour une même valeur du produit Mh, et par conséquent pour une même dépense, l'effet utile est d'autant plus grand que M est plus grand par rapport à m. Il y a donc avantage à employer un mouton d'un grand poids, tombant d'une hauteur modérée.

On emploie des moutons en bois ou en fonte. Les moutons en bois doivent peser au moins 300 kilogrammes; ce sont des blocs rectangulaires, fortement frettés du haut et du bas, et leur face inférieure est garnie de larges clous à tête plate formant une surface parfaitement plane. Les moutons en fonte pèsent de 500 à 600 kilogrammes, et quelquefois plus; ils ont la forme d'un tronc de pyramide quadrangulaire, dont une face latérale, celle qui doit glisser le long des jumelles de la sonnette, est perpendiculaire à la base. Les moutons

en bois portent, en arrière, des oreilles ou queues en bois, qui s'engagent entre les jumelles et maintiennent le mouton dans sa voie pendant la chute. Les moutons en fonte peuvent être disposés de même; mais le plus souvent on leur donne une section horizontale tracée de telle sorte qu'ils embrassent les deux jumelles, lesquelles sont, dans ce cas, un peu plus distantes l'une de l'autre. (Voy. MOUTON.)

En général, on ne donne pas au mouton un poids inférieur à la moitié de celui du pieu, et quelquefois on le fait égal au poids du pieu lui-même. La hauteur de chute varie depuis 2^m,5 jusqu'à 4 mètres; cependant dans les derniers coups cette hauteur peut aller jusqu'à 5 ou 6 mètres.

On regarde un pieu comme enfoncé à *refus* lorsque, dans une volée de 30 coups d'une sonnette à tiraude, ou après chaque coup de mouton d'une sonnette à dé clic tombant de 4 à 5 mètres, il n'enfoncé plus que de 3 à 5 millimètres. C'est ce qu'on doit obtenir quand les pieux ont à porter de 60 à 80 kilogrammes par centimètre carré de section. Mais on ne pousse pas toujours le battage aussi loin; si les pieux n'ont à porter que de 10 à 12 kilogrammes par centimètre carré, on peut arrêter l'opération lorsque, dans les circonstances précitées, l'enfoncement est réduit à 4 ou 5 centimètres. Du reste le refus peut n'être qu'apparent, et tenir à la compression du sol environnant par le battage même, et non à ce que le pieu a atteint un sol plus résistant. Quand on a quelques doutes à cet égard, on suspend le battage du pieu, pour donner à la compression du sol environnant le temps de se transmettre à une certaine distance; et on achève l'opération quand le terrain a repris son élasticité. C'est par la même raison que, dans le battage d'une fondation en pilotis, on doit commencer par le centre pour s'avancer progressivement vers les bords.

PINNULES, sortes de fenêtres traversées verticalement par un fil, et qui sont placées aux extrémités d'une ALIDADE (Voy. ce mot).

PINTE, ancienne mesure de capacité pour les liquides. Elle variait d'une contrée à l'autre. La pinte de Paris était de 48 *pouces cubes*, et valait par conséquent 0^m,9522. En réalité elle ne contenait que 0^m,93. Dans certaines branches de commerce où l'usage de la pinte s'est perpétué, on compte 29 pintes pour 27 litres. (Voy. POINS ET MESURES.)

PIQUÉ DES BOIS, opération qui a pour objet de marquer sur une pièce de charpente les limites des joints et des assemblages. Cette dénomination vient de ce que, lorsque le charpentier a déterminé sur la surface de la pièce un point qu'il a besoin de retrouver, il y fait immédiatement une *piquée* avec la pointe du compas. On conçoit qu'on ne puisse donner aucune règle générale pour une opération nécessairement variable suivant la nature de la pièce de charpente qu'on a en vue. Nous nous contenterons d'en donner un exemple. Supposons que les figures 1 et 2 représentent la tête d'un arêtier de *CROUPE DROITE* (Voy. ce mot), projetée (fig. 1) sur un plan parallèle à une de ses faces latérales, et (fig. 2) sur le plan de sa face inférieure. La pièce de bois équarrie ayant été *lignée* et *contre-lignée* (Voy. CHARPENTE), et *mise sur ligne* par rapport à la figure 1, après avoir été couchée sur sa face la-

térale à 8 ou 10 centimètres au-dessus du plan horizontal sur lequel l'épure a été tracée, sa face supérieure sera alors verticale, et sur cette face verticale se trouvera marquée la ligne *ox* qui est dite

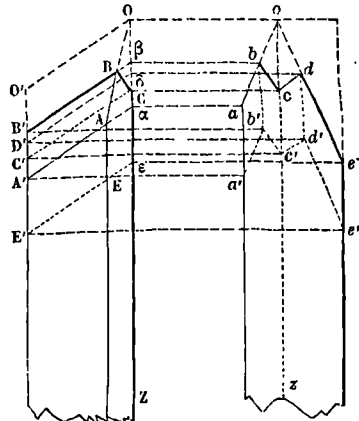


Fig. 1.

Fig. 2.

ligne milieu de la pièce (bien qu'elle n'occupe pas le milieu de la face correspondante). Cela posé, on fera passer le fil à plomb par le point C; sa rencontre avec la ligne milieu *ox* déterminera le point *c* que l'on *piquera* immédiatement. On fera passer le fil à plomb par le point α ; le point où il rencontrera l'arête supérieure de la face verticale sera le point *a*. On fera passer le fil à plomb par le point ϵ ; le point où il rencontrera l'arête inférieure sera le point *e*. On déterminera le point *o* par la rencontre du fil à plomb placé en O avec la ligne milieu *ox*. On pourra alors joindre *oa* et *oe*. On fera passer le fil à plomb au point β ; sa rencontre avec *oa* donnera le point *b*. On fera passer le fil à plomb au point δ ; sa rencontre avec *oe* donnera le point *d*. On tracera les droites *bc* et *cd*. Par des opérations toutes semblables on tracera sur la face opposée de la pièce le contour *a'b'c'd'e'*. Deux traits de scie dirigés suivant *ab* et *a'b'* d'une part et suivant *de* et *d'e'* de l'autre donneront les faces de déjoutement; deux autres traits de scie dirigés suivant *bc* et *b'c'*, et suivant *cd* et *c'd'* donneront les faces d'engueulement. Le tenon et l'embrèvement placés au pied de l'arêtier se détermineront aisément par des procédés semblables, et il ne restera plus qu'à délarder la pièce.

Cet exemple peut suffire pour donner une idée de ce qu'on entend par le *piqué des bois*. Mais quelques heures passées dans un chantier en apprendront plus à cet égard que de longues explications; et nous croyons inutile de multiplier les exemples.

PISTOLE, ancienne monnaie dont l'usage s'est conservé comme monnaie de compte, et qui équivaut à 10 francs. On dit ainsi 100 *pistoles*, pour 1000 francs.

PISTOLET, instrument dont on se sert pour tracer les courbes, et particulièrement pour mettre à l'encre les courbes déjà tracées au crayon. C'est un assemblage de règles courbes, offrant des formes diverses, et réunies de manière à présenter, dans un petit espace, une grande variété de courbures.

Quand on veut mettre une courbe à l'encre, on cherche, parmi celles qu'offre le pistolet, s'il y en a une qui puisse coïncider avec la courbe proposée : on s'en sert alors comme d'une règle pour guider la plume ou le tire-ligne. Si l'on n'en trouve pas qui remplisse le but qu'on se propose, on divise la courbe donnée en un certain nombre de parties, que l'on trace séparément au pistolet. Cette méthode réussit toujours, attendu que lorsque l'arc dont il s'agit a peu de longueur, on parvient toujours à le faire coïncider avec une des courbes de l'instrument.



On opère d'une manière analogue pour faire passer une courbe par un certain nombre de points donnés.

Le pistolet est aussi connu sous le nom de *virgule*.

PISTON, corps généralement cylindrique que l'on fait mouvoir d'un mouvement alternatif dans l'intérieur d'un cylindre ordinairement fixe pour faire varier sa capacité. On rencontre cet organe dans les pompes, dans les machines à vapeur, dans les machines soufflantes, etc.

Dans les pompes on distingue les *pistons pleins* et les *pistons à soupape*. Les pistons pleins se partagent eux-mêmes en deux catégories : les *pistons à garniture* et les *pistons plongeurs*. Le plus simple des pistons à garniture se compose d'un cylindre métallique d'une faible hauteur, mais de même diamètre que le corps de pompe dans lequel il doit se mouvoir ; la surface latérale est creusée pour recevoir des tresses d'étoupes graissées (fig. 1) ; le piston s'applique ainsi plus exactement contre les parois du corps de pompe, en même temps qu'il glisse avec plus de facilité. On obtient un piston plus perfectionné, en superposant deux disques

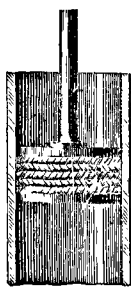


Fig. 1.

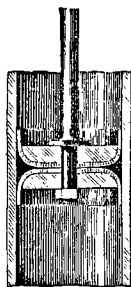


Fig. 2.

métalliques, garnis chacun d'un cuir embouti, mais disposés en sens contraire comme l'indique la figure 2. La pression de l'eau fait appuyer fortement contre les parois du corps de pompe le cuir qui tourne sa concavité vers le sens du mouvement ; et il en résulte une garniture presque hermétique. On peut encore ranger parmi les pistons à garniture le piston conique des pompes Letestu (fig. 3) qui, dans la montée, s'appuie contre les parois du corps de pompe par l'effet de la pression de l'eau qui est au-dessus, mais qui, dans la descente,

cède plus ou moins le passage à l'eau qui est au-dessous.

Un piston *plongeur* (fig. 4) est un cylindre d'un plus petit diamètre que le corps de pompe, mais

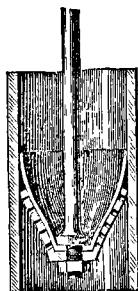


Fig. 3.



Fig. 4.

d'une assez grande longueur, qui pénètre dans le corps de pompe en traversant une boîte à étoupes. Ce piston doit être alésé avec soin ; mais, par son emploi, on peut se dispenser d'alésé le corps de pompe, ce qui offre un avantage important.

Les pistons à soupape sont des pistons à garniture dans lesquels on a percé une ou plusieurs ouvertures, qui sont fermées par des soupapes. Les figures 5 et 6 offrent deux exemples de cette dispo-

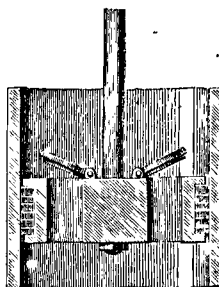


Fig. 5.

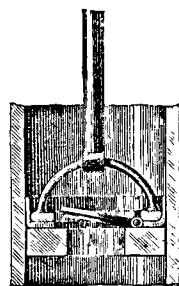


Fig. 6.

sition ; dans le premier exemple, le piston présente deux ouvertures, fermées par autant de soupapes ; dans le second exemple, il n'y a qu'une soupape, et la tige du piston est alors reliée par un étrier au corps du piston.

Dans les machines à vapeur le piston qui reçoit l'action de la vapeur est toujours un piston plein. Dans les premières machines on se servait de pistons à garnitures analogues à ceux des pompes ; mais l'usure des étoupes obligeait à visiter le piston très-fréquemment, ce qui arrêtait le travail. Au-

jourd'hui que l'on est parvenu à aléser les cylindres avec une grande perfection, on se sert de pistons métalliques ayant exactement le diamètre du cylindre. Néanmoins, pour éviter le grippement qui pourrait résulter d'une adhérence trop parfaite entre le cylindre et le piston, on laisse à la surface de celui-ci une certaine élasticité. Pour cela on forme ce piston de deux couches d'anneaux superposés (fig. 7) dont chacun est composé lui-même

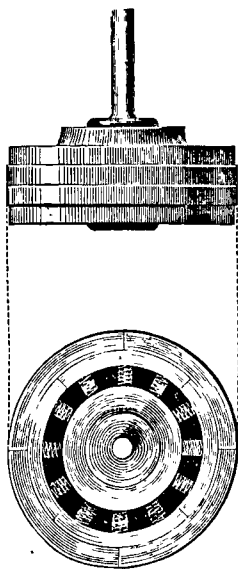


Fig. 7.

d'un certain nombre d'arcs. Ces arcs sont constamment poussés contre les parois du cylindre par des ressorts qui s'appuient sur un cylindre intérieur; et les deux couches d'anneaux sont serrées entre deux plateaux pleins, d'un diamètre légèrement inférieur, qui ne peuvent gêner l'action des arcs contre le cylindre à vapeur.

Les pistons des machines soufflantes sont analogues à ceux des machines à vapeur.

PIVOT, extrémité inférieure d'un arbre vertical tournant, celle sur laquelle il repose. Cette extrémité A, réduite (fig. 1) aux dimensions d'un tourillon, pénètre dans une cavité qui forme support, et que l'on nomme sa *crapaudine*. Des vis de pression V, V, servent à centrer le pivot en déplaçant la crapaudine d'une petite quantité dans un sens ou dans l'autre.

La pièce qui forme le fond de la crapaudine, et sur laquelle repose le pivot, porte le nom de *grain*; elle est ordinairement en acier; elle peut être enlevée et remplacée facilement quand elle est usée.

Le mouvement du pivot sur le fond de sa crapaudine fait naître un frottement dont il est nécessaire de tenir compte dans les machines. On détermine le moment de ce frottement par rapport à l'axe vertical de rotation; et en le multipliant par 2π on a le travail du frottement pour un tour de l'arbre (*Voy. TRAVAIL*), d'où il est facile de déduire celui qui correspond à un nombre donné de tours et fraction de tour. Soit OA (fig. 2), le cercle sui-

vant lequel s'opère le contact entre le pivot et sa crapaudine; soit ω l'aire de ce cercle, et P la pres-

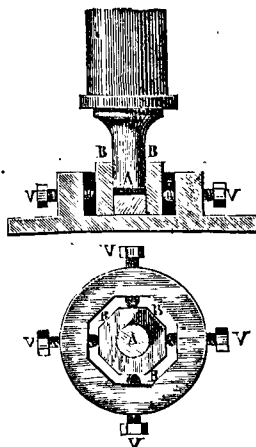


Fig. 1.

sion verticale exercée par le pivot; la pression p sur l'unité de surface sera $\frac{P}{\omega}$, en la supposant uniformément distribuée; la pression sur l'élément $d\omega$

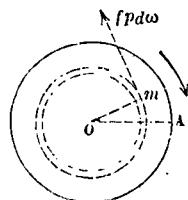


Fig. 2.

sera donc $p d\omega$ et le frottement résultant de cette pression élémentaire sera une force $f p d\omega$ exercée tangentiellement au cercle de rayon ρ que décrit l'élément considéré, et en sens contraire du mouvement. Le moment de ce frottement sera donc $f p d\omega \cdot \rho$, et la somme de tous les moments analogues sera exprimée par $\int f p \rho d\omega$.

Pour faire la somme totale, on peut faire d'abord la somme des moments du frottement sur tous les éléments situés à la distance ρ de l'axe, ce qui donne $f p \rho$ multiplié par la somme de tous ces éléments, laquelle forme une couronne circulaire dont le rayon intérieur est ρ et l'épaisseur $d\rho$, et qui a par conséquent pour aire $2\pi \rho d\rho$. On aura donc à intégrer

$$\int f p \cdot 2\pi \rho d\rho \quad \text{ou} \quad f p \cdot 2\pi \int \rho^2 d\rho$$

depuis la limite zéro jusqu'à la limite r , si r désigne le rayon OA du cercle de contact; on aura donc pour le moment total du frottement

$$f p \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3$$

ou, en remplaçant p par sa valeur $\frac{P}{\omega}$ ou $\frac{P}{\pi r^2}$,

$$f \cdot \frac{P}{\pi r^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} f P r \quad [1]$$

Le travail du frottement pour un tour serait donc

$$2\pi \cdot \frac{2}{3} fPr \text{ ou } 2\pi \cdot \frac{2}{3} r \cdot fP, \quad [2]$$

c'est-à-dire le même que si toute la pression P portait sur un point situé à une distance de l'axe égale aux $\frac{2}{3}$ du rayon du cercle de contact.

La formule [2] montre que, pour réduire le travail consommé par le frottement, il ne suffit pas de réduire le frottement lui-même en lubrifiant convenablement les surfaces frottantes, mais qu'il y a intérêt à réduire le rayon r du cercle de contact. C'est pour cela qu'on arrondit le pivot comme le montre la figure 1, de manière à réduire ce cercle aux dimensions strictement indispensables pour que le pivot puisse résister à la pression qu'il supporte. [Voy. COMPRESSION (Résistance à la)].

Si un arbre vertical, au lieu de reposer sur un pivot, portait sur un épaulement, comme l'indique la figure 3, ce qui n'arrive qu'exceptionnellement,

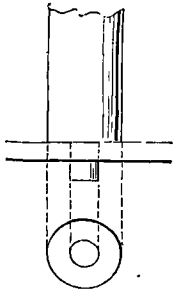


Fig. 3.

le frottement serait beaucoup plus considérable; mais son moment, et par suite son travail, s'évalueraient comme ci-dessus; seulement, comme le contact, au lieu d'avoir lieu par un cercle comme dans le cas du pivot, aurait lieu par une couronne circulaire, il faudrait intégrer l'expression

$$fP \cdot 2\pi \int \rho^2 d\rho$$

non plus de 0 à r , mais de r_0 à r , en nommant r_0 le rayon de la circonférence intérieure

de la couronne et r celui de la circonférence extérieure. On aurait ainsi pour l'expression du moment

$$fP \cdot 2\pi \frac{1}{3} (r^3 - r_0^3),$$

mais la valeur de p serait alors $\frac{P}{\pi (r^2 - r_0^2)}$;

il viendrait donc pour le moment du frottement

$$f \cdot \frac{P}{\pi (r^2 - r_0^2)} \cdot 2\pi \frac{1}{3} (r^3 - r_0^3)$$

ou $\frac{2}{3} fP \cdot \frac{r^2 + r r_0 + r_0^2}{r + r_0}$. [3]

On peut donner à cette expression une forme plus simple, en y introduisant le rayon moyen et la demi-épaisseur de la couronne de contact; si ρ représente ce rayon moyen et si $2e$ représente l'épaisseur, on a

$$r = \rho + e \text{ et } r_0 = \rho - e;$$

en substituant ces valeurs dans l'expression [3] et simplifiant, on peut l'écrire

$$fP \left(\rho + \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2}{\rho} \right). \quad [4]$$

Ce calcul trouve son application dans le CABESTAN (Voy. ce mot) ou même dans le treuil ordinaire lorsqu'il est soumis à une force dirigée suivant son axe (Voy. TREUIL).

Le nom de *pivot*, s'applique aussi d'une manière générale aux tourillons coniques, arrondis par le

bout qu'on emploie dans les machines légères et particulièrement dans l'horlogerie, pour diminuer le frottement des axes; ces tourillons tournent dans des cavités de même forme, pratiquées dans des matières dures; des axes en acier ou en cuivre tournent ainsi dans des trous en rubis, par exemple. (Voy. CHRONOMÈTRES, MONTRES, PENDULES.)

PIVOTEMENT, mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Le **MOUVEMENT INSTANTANÉ** (Voy. ce mot), le plus général dans ce cas, est une rotation autour d'un axe passant par le point fixe; et le mouvement fini du corps peut être reproduit en faisant rouler un cône, qui a ce point fixe pour sommet, sur un cône fixe, ayant pour sommet le même point.

PLACE D'ARMES RENTRANTE, espace réservé, aux rentrants de la contrescarpe du corps de place, pour servir de point de réunion aux assiégés qui défendent le chemin couvert. Pour former cet espace, on brise le glacis de manière à faire des angles de 100° environ avec la direction du chemin couvert. Les places d'armes rentrantes voisines d'un bastion d'attaque sont ordinairement munies d'un réduit. (Voy. FORTIFICATION, ATTAQUE DES PLACES, TRAVERSES, CHEMIN COUVERT, RÉDUIT.)

PLACE D'ARMES SAILLANTE, espace compris, devant l'angle saillant d'une demi-lune, entre les glacis et l'arrondissement de la contrescarpe. Cet espace sert de point de réunion aux défenseurs, tant que l'ennemi n'a pas effectué le couronnement du chemin couvert. (Voy. FORTIFICATION, ATTAQUE DES PLACES, TRAVERSES.)

PLAN, projection d'un édifice sur un plan horizontal, ou coupe horizontale de cet édifice faite au niveau du sol, ou au niveau de chaque étage. Un mode de représentation analogue s'applique à toutes les constructions, aux machines, et à tous les corps susceptibles d'une description géométrique. (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS.)

PLAN DE FLEXION, plan parallèlement auquel toutes les fibres longitudinales d'un prisme solide fléchissent lorsqu'il n'y a pas en même temps torsion (Voy. FLEXION PLANE). On désigne plus particulièrement par le nom de plan de flexion le plan de symétrie longitudinal du prisme, parallèlement auquel la flexion s'opère. Ce plan est vertical dans le cas le plus ordinaire.

PLAN DE LATTIS, plan dans lequel se trouvent, soit toutes les faces supérieures des chevrons d'un même pan de comble, auquel cas il porte le nom de *plan de lattis supérieur*, soit toutes les faces inférieures des arbalétriers, auquel cas c'est le *plan de lattis inférieur* (Voy. COMBLES, CROUPE, NOUÉ.)

PLAN DE NAISSANCE, plan, ordinairement horizontal, dans lequel s'opère le raccordement entre l'intrados d'une voûte et la surface des piédroits qui la supportent. Les lignes suivant lesquelles le raccordement a lieu sont appelées elles-mêmes **LIGNES DE NAISSANCE**.

PLAN DE RUPTURE, plan suivant lequel un massif de terres soutenu par un mur tend à se rompre. (Voy. POUSSÉE DES TERRES, BUTÉE DES TERRES.)

PLAN DE SITE, plan tangent au terrain qui domine un ouvrage de fortification, et assujéti à passer par un point ou par une droite donnée; le

plan de DÉFILEMENT (*Voy.* ce mot) doit être parallèle au plan de site.

PLAN DIRECTEUR, plan auquel les génératrices d'un conoïde sont parallèles. Dans le paraboloïde hyperbolique, il y a un plan directeur pour chacun des deux systèmes de génératrices. Dans la surface de vis à filet carré, le plan directeur est perpendiculaire à l'axe.

PLAN INCLINÉ, machine simple, formée d'une surface plane résistante, inclinée à l'horizon, et sur laquelle un corps est assujéti à se mouvoir. On étudie séparément le cas où le corps est en équilibre ou animé d'un mouvement uniforme sur ce plan, et celui où il se meut sur le plan d'un mouvement varié.

I. Considérons d'abord un corps en équilibre sur un plan incliné, sous l'action d'une force quelconque F , de son poids P , et de la réaction R du plan. Par le centre de gravité du corps, concevons un plan vertical parallèle à la ligne de plus grande pente du plan. Soit AB (fig. 1) l'intersection de ce

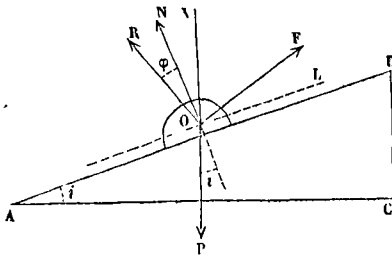


Fig. 1.

plan vertical avec le plan incliné; soit AC une horizontale menée dans ce plan vertical, et BC une verticale; soit enfin $i = \angle BAC$ l'angle qui mesure l'inclinaison du plan par rapport à l'horizon. S'il n'y avait pas de frottement, la force F devrait se trouver dans le plan ABC . En effet, les trois forces F , P , R doivent, pour l'équilibre, être situées dans un même plan et concourir en un même point (*Voy.* ÉQUILIBRE). Ce plan doit être vertical puisqu'il contient la direction de la force P qui est verticale. Il devrait être normal au plan incliné, puisqu'il contient la direction de la réaction R , laquelle serait normale au plan incliné, s'il n'y avait pas de frottement. Le plan des trois forces P , F , R ne serait donc autre chose que le plan ABC , qui est normal au plan incliné et qui contient la direction de la force P . Dans la réalité, l'équilibre peut avoir lieu sans que la force F soit dans le plan ABC ; mais le cas où elle se trouve dans ce plan est le plus ordinaire dans les applications, et c'est celui que nous considérerons. Soit OF la direction de la force F , faisant avec AB un angle α ; soit OV le prolongement de la verticale OP ; menons ON perpendiculaire à AB ; ce sera la normale au plan incliné.

Supposons que le corps placé sur le plan incliné monte uniformément, ou tende à monter dans le sens AB , la réaction R du plan fera avec la normale ON , et du côté opposé au mouvement, un angle $\text{RON} = \varphi$, égal à l'angle du frottement. Les trois forces F , P , R se faisant équilibre, la somme de leurs projections sur AB et sur la perpendiculaire

ON devra être nulle pour chacune de ces directions; on aura donc

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - P \sin i - R \sin \varphi &= 0 \\ \text{et } F \sin \alpha - P \cos i + R \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \quad [1]$$

$$\begin{aligned} F(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \\ - P \sin i \cos \varphi + \cos i \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ou } F = P \cdot \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}, \quad [2]$$

relation qui donne la valeur de la force mouvante F . En développant les deux termes, divisant haut et bas par $\cos \varphi$, et remplaçant $\text{tang } \varphi$ par le coefficient f du frottement, on peut la mettre sous la forme

$$F = P \cdot \frac{\sin i + f \cdot \cos i}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha}. \quad [3]$$

Si l'on prend la dérivée de la valeur [2] par rapport à φ , on trouve

$$P \cdot \frac{\cos(i + \alpha)}{\cos^2(\alpha - \varphi)},$$

quantité qui reste positive quel que soit φ ; par conséquent la valeur de F croît avec φ .

Son minimum a lieu pour $\alpha = \varphi$; il a pour valeur $F = P \sin(i + \varphi)$. La force F est alors perpendiculaire à la réaction R .

Si l'on peut négliger le frottement, il vient

$$F = P \cdot \frac{\sin i}{\cos \alpha}. \quad [4]$$

Si la force F est alors parallèle à la ligne de plus grande pente du plan, c'est-à-dire si l'on a $\alpha = 0$, il reste

$$F = P \cdot \sin i \quad \text{ou} \quad F = P \cdot \frac{BC}{AB},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$F : P = BC : AB,$$

ce qu'on énonce en disant que la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan est à sa longueur.

Si la force F est horizontale, on a $\alpha = -i$; par conséquent

$$F = P \cdot \text{tang } i \quad \text{ou} \quad F = P \cdot \frac{BC}{AC},$$

d'où

$$F : P = BC : AC,$$

ce qu'on énonce en disant que la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan est à sa base.

La formule [2] aurait pu être établie par des considérations géométriques. En effet, chacune des trois forces F , P , R devant être égale et opposée à la résultante des deux autres, si l'on trace un triangle abc (fig. 2) dont les côtés soient respectivement parallèles à ces forces, ces côtés leur seront en même temps proportionnels; et l'on aura

$$\frac{F}{P} = \frac{ac}{ab} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

$$\text{Or } b = \text{ROV (fig. 1)} = \text{RON} + \text{NOV} = \varphi + i.$$

$$\sin c = \sin \text{ROF} = \sin(\text{RON} + \text{NOF})$$

$$= \sin(\varphi + 90^\circ - \alpha)$$

$$\text{ou } \sin c = \cos(\alpha - \varphi).$$

$$\text{Donc } \frac{F}{P} = \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)},$$

ce qui est la formule [2]. On reconnaît aisément sur la figure 2 que ac ou F augmente à mesure

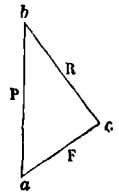


Fig. 2.

que bc ou R fait un angle plus grand avec la normale au plan, et par suite avec la verticale. On voit aussi que le minimum de ac a lieu lorsque ac est perpendiculaire à bc .

II. La force F , au lieu d'être employée à faire monter le corps sur le plan incliné, pourrait être employée à le retenir dans la descente pour empêcher son mouvement de s'accélérer. Dans ce cas, il y aurait encore équilibre entre les trois forces F , P et R ; mais cette dernière, toujours inclinée de l'angle φ sur la normale au plan, passerait de l'autre côté de la normale, entre ON et OV , ou même au delà. Si l'on traite ce cas comme le précédent, on trouve pour F une valeur que nous nommerons F' , et qui est donnée par la formule

$$F = P \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} \quad [5]$$

$$\text{ou} \quad F' = P \cdot \frac{\sin i - f \cos i}{\cos \alpha - f \sin \alpha}, \quad [6]$$

lesquelles ne diffèrent des formules [2] et [3] qu'en ce que φ est changé en $-\varphi$, ou f en $-f$: résultat que l'on pouvait prévoir.

On voit que F' est plus petit que F , car si l'on fait la différence, on trouve, toutes réductions faites,

$$F - F' = \frac{\sin 2\varphi \cos(\alpha + i)}{\cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi)},$$

quantité positive, pourvu que $\alpha + i$ soit moindre que 90° , ce qui a toujours lieu, puisqu'on suppose la force F ou F' dirigée à droite de la verticale OV , et faisant par conséquent avec l'horizon un angle $\alpha + i$ moindre qu'un angle droit.

Si l'on suppose $i = \varphi$, la formule [5] donne $F' = 0$; c'est-à-dire qu'il ne faut aucune force pour empêcher le mouvement descendant de s'accélérer, et que, par conséquent, ce mouvement est uniforme. Si l'on suppose $i < \varphi$, on trouve pour F' une valeur négative; ce qui veut dire que, dans ce cas, pour entretenir le mouvement uniforme il faudrait appliquer la force F' en sens contraire, ou, en d'autres termes, que sans le secours de cette force le mouvement serait retardé.

Il est utile de remarquer que, lorsqu'on n'applique au mobile aucune force motrice F , l'équilibre statique ne peut avoir lieu que si R est égal et opposé à P , ce qui exige que l'angle NOV ou i (fig. 3) ne soit pas plus grand que NOR ou φ ; ou,

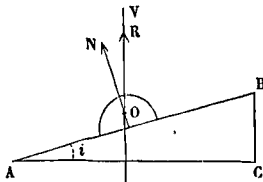


Fig. 3.

en d'autres termes, que l'inclinaison du plan ne soit pas supérieure à l'angle du frottement. Mais i peut être moindre que φ , parce que, comme il n'y a pas de mouvement, la réaction R peut faire avec la normale un angle moindre que l'angle du frottement; et sa direction se modifie en effet, de manière qu'elle reste opposée à P .

III. Considérons maintenant le mouvement varié d'un corps qui descend le long d'un plan incliné sous la seule action de la pesanteur et de la réaction du plan. On sait que, dans un mouvement de translation, l'accélération a pour mesure la somme algébrique des projections des forces extérieures sur la direction du mouvement, divisée par la masse totale du corps (*Voy. TRANSLATION, ACCÉLÉRATION*). En nommant j l'accélération dans le sens du plan, on aura donc

$$j = \frac{P \sin i - R \sin \varphi}{P} = g \cdot \frac{P \sin i - R \sin \varphi}{P}$$

Comme le corps ne se détache pas du plan, et n'a par conséquent aucune vitesse ni aucune accélération perpendiculaire à ce plan, la somme des projections des forces sur la normale au plan doit être égale à zéro, ce qui donne

$$0 = P \cos i - R \cos \varphi.$$

On en tire $R = P \cdot \frac{\cos i}{\cos \varphi}$; et si l'on substitue cette valeur dans celle de j , on trouve après des simplifications évidentes

$$j = g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad [7]$$

Cette valeur étant constante, il s'ensuit que le mouvement est uniformément accéléré. Les équations de ce mouvement sont donc

$$v = g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot t \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2} g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot t^2. \quad [8]$$

En comparant ces formules à celles de la chute des corps dans le vide (*Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES*), on voit que l'accélération, la vitesse et l'espace sont diminués dans le rapport de $\sin(i - \varphi)$ à $\cos \varphi$. La nature du mouvement restant d'ailleurs la même, le plan incliné offre un moyen commode d'étudier les lois du mouvement des corps pesants; et c'est de cette manière, en effet, qu'ont été faites les célèbres expériences de Galilée sur la chute des graves, expériences qui peuvent être regardées comme le point de départ de la physique moderne.

Ce mouvement jouit de deux propriétés remarquables, qu'on trouvera exposées à l'article THÉORÈMES DE GALILÉE.

Nous remarquerons seulement ici que, si l'on avait $i = \varphi$, il en résulterait $j = 0$, et que, par conséquent, le mouvement deviendrait uniforme. Si l'on avait $i < \varphi$, on trouverait pour j une valeur négative; c'est-à-dire qu'en supposant le mobile animé d'une vitesse initiale dans le sens descendant, son mouvement serait uniformément retardé; et que, par conséquent, si le plan était suffisamment long, le mobile finirait par s'arrêter.

IV. Considérons enfin le mouvement ascendant d'un corps sur un plan incliné, sous la seule action de la pesanteur et de la réaction du plan. En opérant comme ci-dessus, on trouvera

$$j = -g \cdot \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad [9]$$

Cette quantité étant négative, le mouvement sera uniformément retardé; et si v_0 désigne la vitesse initiale du mobile, les équations de son mouvement seront

$$v = v_0 - g \cdot \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos \varphi}$$

et
$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos \varphi} t^2 \quad [10]$$

Le mobile montera jusqu'à ce qu'on ait $v = 0$, ce qui donne

$$t = \frac{v_0 \cos \varphi}{g \sin(i + \varphi)},$$

et par suite

$$e = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\cos \varphi}{\sin(i + \varphi)} \quad [11]$$

A partir de cet instant, si l'on a $i > \varphi$, le mouvement sera descendant et uniformément accéléré. Quand le mobile aura parcouru l'espace e donné par la formule [11], c'est-à-dire quand il sera revenu au point de départ, il aura acquis une vitesse marquée par $v = \sqrt{2je}$, ou en remplaçant j par $g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi}$, et e par l'expression [11],

$$v = \sqrt{2 \cdot g \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi} \frac{v_0^2}{2g} \frac{\cos \varphi}{\sin(i + \varphi)}} \\ = v_0 \sqrt{\frac{\sin(i - \varphi)}{\sin(i + \varphi)}}$$

valeur évidemment moindre que v_0 ; ainsi le mobile ne reviendra pas au point de départ avec la même vitesse; cela n'aurait lieu que s'il n'y avait point de frottement.

Si l'on a $i = \varphi$ ou $i < \varphi$, le mobile, parvenu au haut de sa course, ne redescendra plus.

V. Le plan incliné peut être employé comme organe de transformation de mouvement, à changer un mouvement rectiligne continu suivant une direction donnée en un autre mouvement rectiligne continu suivant une autre direction. Mais pour cela il faut que le plan incliné soit mobile, et il devient alors un véritable coin (Voy. ce mot).

VI. Dans les grands travaux de terrassement on emploie, pour élever les wagons chargés de matériaux, un plan incliné formé de deux rails supportés par une charpente solide. Entre ces rails, et aux deux extrémités du plan incliné, sont disposés deux roues verticales armées de dents sur lesquelles s'enroule une chaîne sans fin; la roue supérieure mise en mouvement par un mécanisme convenable entraîne la chaîne et fait tourner la roue inférieure. Sur cette chaîne, des crochets sont disposés de distance en distance. Chaque wagon engagé à son tour sur les rails au bas du plan incliné, est saisi, au milieu de son essieu de derrière, par l'un des crochets, qui l'entraîne ainsi jusqu'au haut du plan, où il se dégage de lui-même en vertu de la vitesse acquise. Pour éviter les accidents qui pourraient survenir si un wagon venait à se dégager, on dispose de distance en distance, à gauche et à droite de la chaîne, des butoirs qui ont la forme d'une équerre, mobile autour d'un axe horizontal traversant le sommet de l'angle droit; dans l'état de repos, l'un des côtés de l'équerre est dirigé vers le bas du plan parallèlement au rail, et l'autre est normal au plan. Lorsqu'un wagon vient à passer en montant, l'essieu fait basculer le butoir, qui se remet en place par son propre poids dès que le wagon est passé; mais si le wagon se présentait au butoir en descendant, il se trouverait arrêté. La figure 4 montre la disposition générale du système; et on

voit en ABC, sur la figure 5, le butoir pris au moment où, après avoir été entraîné par l'essieu, il va lui échapper pour retomber par son propre poids en tournant dans le sens de la flèche (Voy.

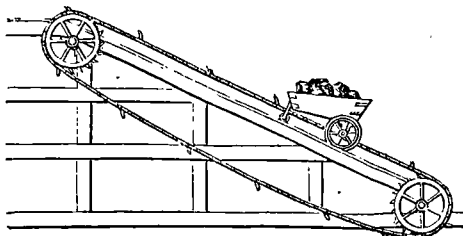


Fig. 4.

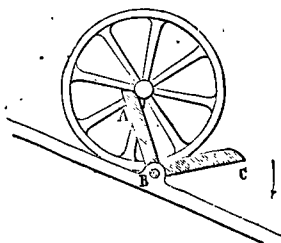


Fig. 5.

les grands dessins coloriés pour l'enseignement de la Mécanique publiés par M. Tresca, sous la direction de M. le général Morin).

PLAN PROJETANT (Géométrie descriptive), lieu des perpendiculaires abaissées des différents points d'une droite sur l'un des plans de projection, et dont la trace sur ce plan est la projection de la droite.

PLAN TANGENT, lieu des tangentes menées, par un même point d'une surface, aux diverses courbes que l'on peut tracer par ce point sur cette surface.

I. On démontre facilement par l'analyse que toutes ces tangentes sont situées dans un même plan; mais on peut aussi le faire voir géométriquement comme il suit.

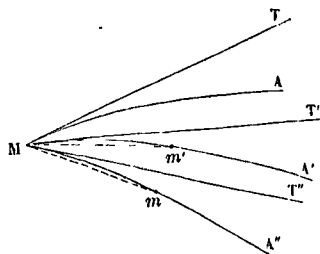


Fig. 1.

Soient MA, MA', MA'' (fig. 1) trois courbes tracées sur la surface par un même point M; et soient MT, MT', MT'' les tangentes en M à ces courbes. Par la tangente MT faisons passer un plan P, qui coupera en général les courbes MA' et MA'' en des points m' et m''; les cordes Mm' et Mm'' seront dans le plan P. Concevons maintenant que l'on fasse tourner le plan P autour de MT, de telle sorte

que le point m'' se rapproche indéfiniment du point M ; le point m' se rapprochera aussi indéfiniment du point M , sans que les cordes Mm' et Mm'' cessent d'être dans le plan mobile P . Mais, quand ces cordes seront devenues infiniment petites, elles se confondront avec les tangentes MT' et MT'' ; donc ces tangentes sont dans un même plan avec la tangente MT . Et, comme on en pourrait dire autant de deux d'entre elles et d'une quatrième tangente quelconque menée par le point M à une courbe tracée sur la surface, il en résulte que toutes les tangentes en M sont dans un même plan. C'est ce plan qu'on nomme *plan tangent* en M . Et le point M est le *point de contact*.

Réciproquement, si par le point de contact M on mène un plan Q qui coupe la surface, suivant une courbe, la tangente en M à cette courbe sera l'intersection du plan tangent par le plan Q ; car cette tangente doit être dans le plan Q , et, d'après ce qui vient d'être démontré, elle doit être dans le plan tangent. On fait un fréquent usage de cette remarque.

II. Dans une surface réglée, chaque génératrice rectiligne est à elle-même sa propre tangente, en un point quelconque de sa direction. Il en résulte que le plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice qui passe par ce point.

Si la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes, le plan tangent en un point de la surface contient les deux génératrices qui passent par ce point. (Voy. pour les propriétés des surfaces invoquées dans cet article, l'article SURFACES COURBES.)

III. La méthode générale pour mener le plan tangent à une surface par un point donné sur cette surface est indiquée par la définition même du plan tangent. Elle consiste à tracer par le point donné deux courbes distinctes sur la surface, à mener par le point donné les tangentes à ces courbes, et à faire passer un plan par ces deux tangentes. Mais pour les besoins de l'application on peut avoir à mener un plan tangent à une surface par un point donné hors de cette surface, auquel cas le problème est souvent susceptible d'une infinité de solutions, ou parallèlement à une droite donnée, ou, dans certains cas, par une droite donnée, ou encore parallèlement à un plan donné. Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de s'appuyer sur les propriétés particulières de la surface à laquelle on veut mener le plan tangent.

Nous passerons donc en revue les surfaces que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications; et nous indiquerons, pour chacune, comment on résout les questions de plans tangents auxquelles elle peut donner lieu.

IV. SURFACES CYLINDRIQUES. Le plan tangent à une surface cylindrique contient la génératrice qui passe par le point de contact. De plus, la trace horizontale de ce plan est tangente à la trace horizontale de la surface, et leur point de contact est la trace horizontale de la génératrice de contact. C'est sur ces remarques que se fondent les procédés employés pour résoudre les questions relatives au plan tangent. Soit $caed$ (fig. 2) la trace horizontale du cylindre; soient ef , gh les tangentes qui limitent le contour apparent sur le plan horizontal, et $c'c''$, $d'd''$ les droites qui limitent le contour

apparent sur le plan vertical. On peut mener le plan tangent d'après trois conditions distinctes.

1° Par un point donné sur la surface. Soit m , m'' ce point (on sait qu'il suffit de connaître l'une des

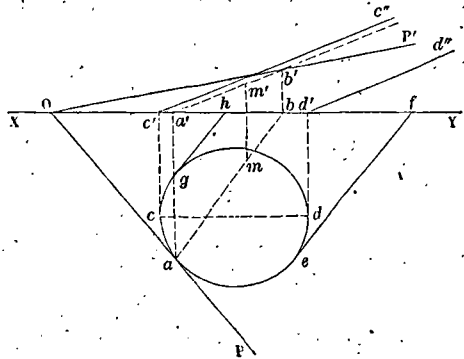


Fig. 2.

projections m ou m''), et soit ab , $a'b'$ la génératrice qui passe par ce point; c'est la génératrice de contact. Par la trace horizontale a de cette génératrice, on mène une tangente OP à la trace horizontale $caed$ de la surface; cette tangente est la trace horizontale du plan tangent. Pour avoir un point de sa trace verticale, on cherche la trace verticale b' de la génératrice de contact. On n'a plus qu'à joindre cette trace au point O où la trace horizontale du plan tangent rencontre la ligne de terre XY .

Si la trace b' n'était pas dans le cadre de l'épure, on aurait plusieurs autres moyens de se procurer un point de la trace verticale du plan tangent. Il suffit pour cela de mener une droite qui soit dans le plan tangent, et de déterminer sa trace verticale. On peut, par exemple, mener par un point de la génératrice de contact une parallèle à la trace horizontale du plan tangent, ou par un point de cette trace une parallèle aux génératrices. On peut encore joindre un point quelconque de cette trace à un point quelconque de la génératrice de contact.

Il peut arriver que la trace horizontale du plan tangent ne rencontre pas la ligne de terre dans le cadre de l'épure. Dans ce cas, il faut un second point pour déterminer la trace verticale du plan; on se le procure par l'un des moyens qui viennent d'être indiqués.

2° Par un point donné hors de la surface. Si par le point donné on mène une parallèle aux génératrices du cylindre, cette droite, étant parallèle à la génératrice de contact, et passant d'ailleurs par un point situé dans le plan tangent, y sera elle-même contenue tout entière. Sa trace horizontale P sera donc située sur la trace horizontale du plan tangent. Par le point P on mènera donc une tangente OP à la base $caed$ du cylindre, ce sera la trace horizontale du plan tangent. Par le point de contact a on mènera une génératrice, qui sera la génératrice de contact. Sa trace verticale b' sera un point de la trace verticale du plan tangent. Si elle était hors du cadre de l'épure, on y suppléerait comme il a été dit ci-dessus.

Le problème aura autant de solutions qu'on

pourra mener de tangentes à la trace horizontale de la surface par la trace horizontale P de la droite menée par le point donné parallèlement aux génératrices du cylindre.

3° *Parallèlement à une droite donnée.* Si par un point de la génératrice de contact on conçoit menée une parallèle à la droite donnée, elle sera tout entière dans le plan tangent. Par conséquent, si, par un point de la droite donnée, on mène une parallèle aux génératrices du cylindre, ces deux droites déterminent un plan parallèle au plan tangent, et dont la trace horizontale sera parallèle à celle du plan tangent. En menant une tangente OP à la trace horizontale caed de la surface, parallèlement à celle de ce plan, on aura donc la trace du plan tangent lui-même. Par le point de contact a on mènera une génératrice, qui sera la génératrice de contact; sa trace verticale b' sera un point de la trace verticale du plan tangent. On y suppléerait comme il a été dit ci-dessus, si elle se trouvait en dehors du cadre de l'épure.

Le problème aura généralement autant de solutions que l'on pourra mener de tangentes à la trace horizontale de la surface parallèlement à une droite donnée.

V. SURFACES CONIQUES. Le plan tangent à une surface conique contient la génératrice qui passe par le point de contact, et il passe par conséquent par le sommet du cône. De plus, comme dans les surfaces cylindriques, la trace horizontale du plan tangent est tangente à la trace horizontale de la surface; et leur point de contact est la trace horizontale de la génératrice de contact. Les procédés en usage pour déterminer le plan tangent sont fondés sur ces remarques.

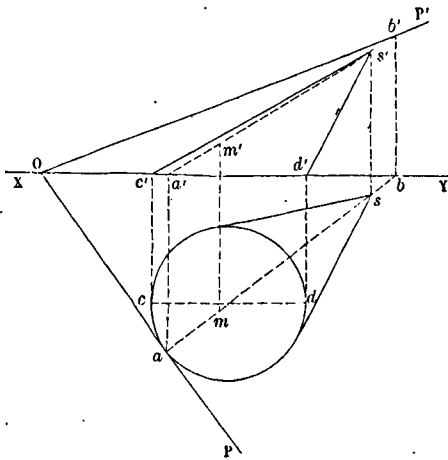


Fig. 3.

Soit caed (fig. 3) la base du cône, S, S' son sommet. On peut mener le plan tangent d'après trois conditions.

1° *Par un point donné sur la surface.* Soit m, m' le point donné, et aS, a'S' la génératrice qui passe par ce point; ce sera la génératrice de contact. (Il suffirait de l'une des projections m ou m' pour déterminer le point donné.) Par la trace horizontale a de la génératrice ab, a'b', on mène une tangente

OP à la trace horizontale caed du cône, c'est la trace horizontale du plan tangent. On obtient un point de la trace verticale de ce plan en déterminant la trace verticale b' de la génératrice de contact. On n'a plus qu'à joindre cette trace au point O où la trace horizontale du plan rencontre la ligne de terre. Si le point b' ou le point O étaient hors du cadre de l'épure, on se procurerait autant de points de la trace verticale du plan tangent qu'on le voudrait, en menant des droites dans ce plan et déterminant leur trace verticale. On pourrait par exemple mener par un point de la génératrice de contact une parallèle à OP, ou joindre un point quelconque de OP à un point quelconque de la génératrice de contact.

2° *Par un point donné hors de la surface.* Si l'on joint le point donné au sommet du cône, on obtient une droite située dans le plan tangent. La trace horizontale P de cette droite est donc un point de la trace horizontale de ce plan. Par le point P on mène donc une tangente OP à la base du cône; c'est la trace horizontale du plan tangent. Par le point de contact a on mène une génératrice; c'est la génératrice de contact. Sa trace verticale b' est un point de la trace verticale du plan tangent; il ne reste plus qu'à joindre au point O où la trace horizontale du plan tangent rencontre la ligne de terre. Si le point b' ou le point O étaient situés hors du cadre de l'épure, on opérerait comme il a été indiqué ci-dessus.

Le problème a généralement autant de solutions que l'on peut mener de tangentes à la base caed du cône par un point donné (le point P).

Il serait impossible si l'on ne pouvait mener par le point P aucune tangente à la base du cône: si, par exemple, la base étant un cercle ou une ellipse, le point P tombait dans l'intérieur de cette courbe.

3° *Parallèlement à une droite donnée.* Par le sommet du cône on mène une parallèle à la droite donnée; cette parallèle est contenue dans le plan tangent. Par sa trace horizontale on mène une tangente à la trace horizontale du cône; c'est la trace horizontale du plan tangent. Le reste s'achève comme dans le cas précédent.

Lorsqu'on a à mener le plan tangent par un point extérieur au cône, il peut arriver que la droite qui joint ce point au sommet soit horizontale; de même, lorsqu'on a à mener le plan tangent parallèlement à une droite donnée, il peut arriver que cette droite soit horizontale elle-même, ainsi que la parallèle qu'on lui mène par le sommet du cône. Dans ces deux cas, on n'a plus la trace horizontale P de cette droite; mais, puisqu'elle est horizontale et contenue dans le plan tangent, la trace horizontale de ce plan doit être parallèle à cette droite, et par conséquent à sa projection horizontale. On mène donc une tangente à la base du cône parallèlement à cette projection; c'est la trace horizontale du plan tangent. Le reste s'achève comme plus haut.

Le problème a généralement autant de solutions que l'on peut mener de tangentes à la base du cône parallèlement à une droite donnée.

VI. SURFACES DE RÉVOLUTION. Le plan tangent à une surface de révolution contient la tangente au méridien et la tangente au parallèle qui passent par le point de contact. De là les procédés en usage pour construire le plan tangent

méridien passant par le point de contact, doit être tangent à la surface de ce cône. La question revient donc à mener un plan tangent à une surface conique par un point extérieur à cette surface, problème qui a été résolu plus haut.

On peut remarquer que si, sans changer le point extérieur, on mène successivement tous les plans tangents passant par ce point et touchant la surface sur ses divers parallèles, l'enveloppe de ces plans est un cône, qui a pour sommet le point extérieur donné, et qui touche la surface suivant la ligne, lieu des points de contact des divers plans tangents. Ce cône est dit *circonscrit* à la surface de révolution. — Si la surface de révolution est une surface du second degré, le cône circonscrit est également du second degré; et la ligne de contact est une ligne plane. (*Voy. CÔNE TANGENT.*)

4° *Parallèlement à une droite donnée, avec la condition de toucher la surface sur un parallèle déterminé.* Si l'on considère comme ci-dessus le cône tangent à la surface de révolution suivant le parallèle donné, on verra de même que le plan tangent demandé doit être tangent à ce cône. La question revient donc à mener le plan tangent à une surface conique parallèlement à une droite donnée, problème qui a été résolu plus haut.

Si l'on mène tous les plans tangents parallèles à une même droite donnée, leur enveloppe est une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à cette même droite, et qui touche la surface suivant la ligne lieu des points de contact des plans tangents. Ce cylindre est dit *circonscrit* à la surface de révolution. Si cette surface de révolution est du second degré, le cylindre circonscrit est aussi du second degré, et la ligne de contact est plane.

On pourrait demander de mener un plan tangent à une surface de révolution et passant par une droite donnée. Si l'on circonscrit à la surface donnée un cylindre dont les génératrices soient parallèles à la droite donnée, le plan tangent demandé, étant un de ceux qui ont pour enveloppe ce cylindre, devrait lui être tangent, puisque les surfaces enveloppées sont toutes tangentes à l'enveloppe. D'ailleurs il doit passer par la droite donnée, qui est parallèle aux génératrices du cylindre. La question reviendrait donc à mener par une droite donnée, parallèle aux génératrices d'un cylindre, un plan tangent à ce cylindre, ce qui reviendrait à mener le plan tangent par un point pris arbitrairement sur la droite donnée. Ce problème a été résolu plus haut.

Le problème se simplifie quand la surface de révolution est une sphère. Par le centre de la sphère on mène un plan perpendiculaire à la droite donnée; ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle. On mène à ce cercle une tangente par le point où son plan rencontre la droite donnée; cette tangente et la droite donnée déterminent le plan tangent. Dans l'exécution, on mène la tangente après avoir rabattu sur le plan horizontal le plan du cercle, et son intersection avec la droite donnée.

VII. SURFACES RÉGLÉES DÉVELOPPABLES. Le plan tangent en un point donné M d'une surface développable contient la génératrice G qui passe par ce point. Il contient aussi la génératrice infiniment voisine G' qui coupe la première. — Considérons le

cône directeur, dont le sommet est choisi arbitrairement, et dont les génératrices sont respectivement parallèles à celles de la surface développable. Soient *g* et *g'* les deux génératrices du cône directeur respectivement parallèles à G et à G'. Le plan tangent au cône directeur suivant la génératrice *g* contient la génératrice infiniment voisine *g'*; il s'ensuit qu'il est parallèle au plan tangent à la surface développable contenant les génératrices G et G', respectivement parallèles à *g* et à *g'*. En d'autres termes, le plan tangent T à une surface développable, en un point d'une génératrice G, est parallèle au plan tangent *t* mené au cône directeur suivant la génératrice *g* parallèle à G. C'est sur cette remarque qu'est fondée la construction du plan tangent à la surface développable. On peut le mener, comme pour le cône, d'après trois conditions.

1° *Par un point donné sur la surface.* On mène la génératrice G qui passe par ce point; on mène, dans le cône directeur, la génératrice *g* parallèle à G. On mène le plan tangent *t* à ce cône suivant *g*; et par la droite G on mène un plan T parallèle à *t*: c'est le plan tangent demandé.

2° *Par un point extérieur à la surface.* On prend ce point pour sommet du cône directeur. Le plan tangent cherché, passant par la génératrice de contact G, et par le sommet du cône directeur, contient la génératrice *g* de ce cône qui est parallèle à G. On en peut dire autant des génératrices correspondantes infiniment voisines G' et g'. Le plan tangent demandé est donc tangent au cône directeur. Sa trace horizontale est donc tangente à la fois à la trace horizontale de la surface développable et à la trace horizontale du cône directeur. On mènera donc cette tangente commune: ce sera la trace horizontale du plan tangent. Pour avoir un point de sa trace verticale, on mènera la génératrice de contact, soit sur la surface, soit sur le cône, et l'on déterminera sa trace verticale.

Il peut y avoir plusieurs solutions; mais toutes les tangentes communes aux traces horizontales des deux surfaces ne répondent pas nécessairement à une solution; il faut encore que les génératrices menées sur la surface et sur le cône par les points de contact de la tangente commune soient parallèles. Si, par exemple, la développable donnée était un cône, on reconnaîtra facilement que les tangentes communes *intérieures*, menées aux deux bases, ne répondraient pas à la question.

3° *Parallèlement à une droite donnée.* On mène un plan tangent *t* au cône directeur parallèlement à la droite donnée. On détermine la génératrice de contact *g*. On cherche sur la développable donnée la génératrice G parallèle à *g*. Et par la droite G on mène un plan T parallèle au plan *t*. C'est le plan tangent demandé.

VIII. SURFACES GAUCHES. Le plan tangent en un point d'une surface gauche contient la génératrice qui passe par ce point; mais il n'est tangent qu'en ce point, et pour tout autre point de la même génératrice la direction du plan tangent est en général différente. C'est par la considération des paraboloides de raccordement (*Voy. PARABOLOÏDES DE RACCORDEMENT*) que l'on construit le plus ordinairement le plan tangent aux surfaces gauches.

1° Supposons d'abord que la surface ait un plan directeur P, et qu'elle soit donnée par ce plan di-

recteur et par deux directrices A et B. Soit p le point de la surface par lequel on se propose de mener le plan tangent; soit G la génératrice qui passe par ce point; soient m et n les points où cette génératrice rencontre les directrices A et B. Par les points m et n menons des tangentes aux deux directrices; représentons par mT et nU ces deux tangentes. Une droite assujettie à rencontrer les droites mT et nU en demeurant parallèle au plan P, engendrera un parabolôide hyperbolique dont G sera une génératrice et qui se raccordera avec la surface donnée tout le long de cette génératrice. Pour mener le plan tangent en p à la surface, il suffit donc de mener le plan tangent au parabolôide; et puisque ce plan contient déjà la génératrice G qui passe par le point p , tout se réduit à déterminer la génératrice du second système qui passe par le même point p . Pour cela, on mènera un plan P' parallèle au plan P; ce plan coupera les tangentes mT et nU en des points m' et n' ; la droite $m'n'$ sera une génératrice du premier système. Par le point p on mènera un plan parallèle aux droites mT et nU ; il coupera la droite $m'n'$ en un point p' ; la droite pp' sera la génératrice cherchée. Le plan des droites G et pp' sera le plan tangent en p au parabolôide, et par conséquent aussi à la surface gauche donnée. Cette construction est applicable aux conoïdes (Voy. SURFACES COURBES).

Supposons, en second lieu, que la surface n'ait pas de plan directeur et soit donnée par trois directrices A, B, C. Soit G une génératrice de la surface, soient m , n , p les points où elle rencontre les directrices; désignons par mT , nU , pV les tangentes à ces directrices menées par les points m , n , p ; et supposons qu'il s'agisse de mener le plan tangent par un point q donné sur la génératrice G . Si les trois droites mT , nU , pV étaient parallèles à un même plan, elles détermineraient un parabolôide hyperbolique qui se raccorderait avec la surface donnée le long de la génératrice G . On n'aurait donc qu'à déterminer comme ci-dessus la génératrice du second système passant par le point q ; cette génératrice et la génératrice G détermineraient le plan tangent. Si les trois droites mT , nU , pV ne sont pas parallèles à un même plan, elles déterminent un hyperbolôide à une nappe qui se raccorde avec la surface donnée le long de la génératrice G . Pour déterminer le plan tangent au point q à l'aide de cet hyperbolôide, on opérera de la manière suivante (Voy. HYPERBOLÔIDE DE RACCORDEMENT). Prenons sur la tangente mT deux points quelconques m' et m'' . Par le point m' menons une droite qui rencontre les deux droites nU et pV ; soient n' et p' les points de rencontre. Par le point m'' menons de même une droite qui rencontre nU et pV ; soient n'' et p'' les points de rencontre. Les droites $m'n'p'$, $m''n''p''$ seront trois génératrices d'un même système de l'hyperbolôide. Par le point q menons une droite qui rencontre les génératrices $m'n'p'$ et $m''n''p''$; soient q' et q'' les points de rencontre. La droite $qq'q''$ ainsi menée sera une génératrice du même système que les trois droites mT , nU , pV . Le plan des droites G et $qq'q''$ sera tangent au point q à l'hyperbolôide, et par conséquent aussi à la surface gauche donnée. Cette construction est applicable à la surface du BIAIS-PASSÉ (Voy. ce mot).

On peut substituer à l'hyperbolôide un parabolôide. Il suffit pour cela de remplacer la droite mT par la droite intersection du plan des droites G et mT par un plan mené par le point m parallèlement aux droites nU et pV . On mène alors la droite $m'n'p'$ comme ci-dessus; et la construction s'achève comme dans le cas où la surface est déterminée par deux directrices et un plan directeur.

La surface pourrait être donnée par les deux directrices A et B et par un cône directeur. On mènerait, dans ce cas, le plan tangent P au cône directeur suivant la génératrice g parallèle à G . Le parabolôide ayant pour directrices les tangentes mT et nU , et pour plan directeur le plan P, serait un parabolôide de raccordement; et la construction se ferait comme plus haut.

2° On peut demander de mener un plan tangent à une surface gauche par un point extérieur, avec la condition que le point de contact soit sur une génératrice déterminée. Le plan tangent devant contenir cette génératrice tout entière, tout se réduit à trouver le point de contact. On y parviendra encore à l'aide d'un parabolôide de raccordement. Soit X un plan passant par la génératrice G ; soit G' une seconde génératrice du même système du parabolôide de raccordement. Cette seconde génératrice perce le plan X en un certain point K' . Par le point K' menons un plan parallèle aux génératrices du second système; il coupera la génératrice G en un point K , qui sera le point de contact demandé: car mm' sera une génératrice du second système, contenue dans le plan X.

On opérerait d'une manière analogue avec un hyperbolôide de raccordement. Mais il faudrait employer une génératrice du premier système de plus; soit G'' cette génératrice, perceant le plan X en un point K'' ; on joindra $K'K''$, qui rencontrera G en un point K : ce sera le point de contact. Car $KK'K''$ est une génératrice du second système contenue dans le plan X.

Il pourrait arriver que la droite $K'K''$ fût parallèle à la génératrice G ; dans ce cas, le point K serait à l'infini sur cette génératrice; et le plan tangent couperait l'hyperbolôide de raccordement suivant deux droites parallèles (appartenant à des systèmes différents).

On peut remarquer qu'alors les génératrices du cône directeur respectivement parallèles à G et à $K'K''$ se confondent en une seule; le plan de ces deux génératrices, de sécant qu'il était, devient tangent. Ainsi, le point de contact K est situé à l'infini quand le plan tangent mené par la génératrice G est parallèle au plan tangent mené au cône directeur suivant la génératrice g parallèle à G .

3° On suivrait une marche analogue pour mener le plan tangent parallèlement à une droite donnée, avec la condition que le point de contact soit situé sur une génératrice déterminée G . Par un point quelconque de G on mènerait une parallèle à la droite donnée; cette parallèle et la génératrice G détermineraient un plan X parallèle à la droite donnée. Ce plan contenant une génératrice serait un plan tangent; il ne resterait plus qu'à déterminer le point de contact, ce qui se ferait comme ci-dessus.

IX. SURFACES HÉLICOÏDES. En chaque point d'une surface hélicoïde passe une génératrice; et la tangente en ce point à cette génératrice doit être dans

le plan tangent. En ce même point passe aussi une hélice tracée sur la surface, hélice dont l'axe est celui de la surface, et dont le pas est le même que celui de l'hélice directrice; la tangente à cette hélice au point considéré est également contenue dans le plan tangent. Ce plan se trouve déterminé par les deux tangentes dont il vient d'être question.

On ne fait usage dans les applications que des hélicoïdes réglés, c'est-à-dire dont la génératrice est une droite. Nous insisterons particulièrement sur la surface de vis à filets triangulaires, sur la surface de vis à filets carrés, et sur l'hélicoïde dévéloppable.

Surface de vis à filets triangulaires. La génératrice rencontre l'axe, et fait avec cet axe un angle constant que nous désignerons par i . Nous supposons l'axe vertical; et nous admettons que la surface soit donnée par cet axe $O, O'O''$ (fig. 5),

les propriétés connues de l'hélice, porter sur cette tangente une longueur ms égale à l'arc mb dévéloppé. D'ailleurs, la trace de la génératrice OM, GM' sur le nouveau plan horizontal est un point c, c' facile à obtenir, puisque c' est sur xy ; en joignant donc sc on aura la trace du plan tangent sur le nouveau plan horizontal. Si donc on mène par le point T une parallèle TS à la droite cs , on aura la trace du plan tangent sur l'ancien plan horizontal. Pour avoir un point de sa trace verticale, il suffirait de déterminer la trace verticale de la génératrice OM, GM' ; et si elle était située hors du cadre de l'épure, on y suppléerait en menant par un point quelconque de TS une parallèle à cette génératrice et cherchant la trace verticale de cette parallèle. La construction qui précède a été modifiée d'une manière très-heureuse par M. de la Gournerie. Du point m abaissions mU perpendiculaire sur SF ; et au point O élevons OV perpendiculaire à Om et terminé au prolongement de Um . La longueur OV est constante et peut être déterminée à l'avance. En effet, les triangles semblables Smt et mOV donnent la proportion

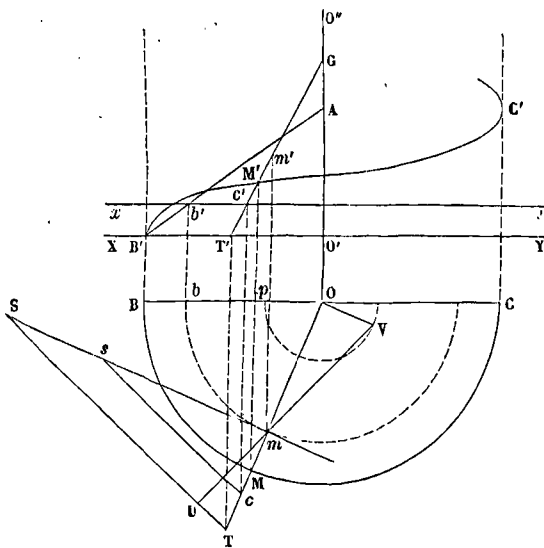


Fig. 5.

par son hélice directrice $BMC, B'M'C'$, et par une génératrice OB, AB' parallèle au plan vertical. Pour avoir une autre génératrice, on prendra sur la directrice un point quelconque M, M' ; on portera sur l'axe une longueur AG égale à la hauteur du point M, M' au-dessus du plan horizontal; les droites OM et GM' seront les projections d'une génératrice. Soit m, m' un point de cette génératrice; et proposons-nous d'abord de mener le plan tangent en ce point. Pour cela, déterminons d'abord la trace horizontale T de la génératrice; la trace horizontale du plan tangent devra passer par le point T . Considérons maintenant l'hélice tracée sur la surface par le point m, m' . Sa projection horizontale est le cercle mb décrit du point O comme centre; et elle rencontre la génératrice OB, AB' en un point qui se projette horizontalement en b , et verticalement en b' . Faisons passer momentanément le plan horizontal par ce point b' ; et soit xy la nouvelle ligne de terre. La tangente en m, m' à l'hélice considérée, se projette horizontalement suivant la tangente mS au cercle mb ; et pour avoir sa trace horizontale, il faut, d'après

perpendiculaire sur SF ; et au point O élevons OV perpendiculaire à Om et terminé au prolongement de Um . La longueur OV est constante et peut être déterminée à l'avance. En effet, les triangles semblables Smt et mOV donnent la proportion

$$\frac{mS}{mT} = \frac{mO}{OV}$$

D'ailleurs, en appelant H le pas des hélices considérées, on a, d'après la propriété connue de la tangente à ces courbes,

$$\frac{m'p}{mS} = \frac{H}{2\pi \cdot Om}$$

Multipliant ces égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{m'p}{mT} = \frac{H}{2\pi \cdot OV};$$

mais le premier membre n'est autre chose que la tangente de l'angle que la génératrice fait avec le plan horizontal, c'est-à-dire $\cot i$; il vient donc

$$\cot i = \frac{H}{2\pi \cdot OV}; \text{ d'où } OV = \frac{H \tan g i}{2\pi}$$

quantité constante, et facile à déterminer à l'avance.

Pour construire la trace horizontale du plan tangent, il suffira donc, après avoir décrit une circonférence du point O comme centre avec OV pour rayon, d'élever en O une perpendiculaire à Om jusqu'à la rencontre de cette circonférence, ce qui donnera le point V ; de joindre Vm ; et d'abaisser du point T une perpendiculaire TS sur la direction de Vm ; ce sera la trace horizontale du plan tangent.

On peut demander au contraire de déterminer le point de contact d'un plan mené par une génératrice OM, GM' . Si TS est la trace horizontale de ce plan, on élèvera comme ci-dessus une perpendiculaire OV à la droite OM , jusqu'à sa rencontre en V avec la circonférence OV ; du point V on abaissera sur TS une perpendiculaire VU , qui rencontrera OM en un point m ; ce point sera la projection horizontale du point de contact, d'où l'on déduira sa projection verticale m' .

Sachant ainsi trouver le point de contact d'un plan passant par une génératrice, on peut mener

usage. Supposons, par exemple, qu'on ait visé des trois stations A, B, C (fig. 3), deux points P, Q qu'on se proposait de déterminer par recoupement, on connaît sur le plan la position des points A,

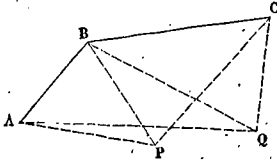


Fig. 3.

B, C, ainsi que les valeurs des angles PAB, QAB, PBA, QBA, PBC, QBC; on mènera au rapporteur des droites faisant avec les bases AB et BC les angles dont la valeur est inscrite au carnet, et les points P et Q se trouveront déterminés chacun par le recoupement de trois droites.

Les points principaux étant rapportés sur le plan, on passera aux détails, ce qui se fera généralement hors du terrain et de retour au cabinet de travail. Supposons d'abord un ruisseau sinueux, dont le cours a été relevé à mètre et à la boussole; on a inscrit au carnet les longueurs des portions de ce cours qui peuvent être regardées comme rectilignes, et les angles que leurs directions font avec le méridien magnétique; la courbe suivie par le ruisseau pourra donc être construite comme le contour d'un polygone. — Supposons, en second lieu, divers détails relevés à l'équerre; on trouvera inscrites au carnet les longueurs des perpendiculaires abaissées de tous les points utiles sur une directrice, et les distances des pieds de ces perpendiculaires à un même point de cette directrice. Cette directrice elle-même aura été déjà rapportée sur le plan, ses extrémités, ou deux de ses points, figurant parmi les points principaux. On aura donc tous les éléments nécessaires pour rapporter les détails dont il s'agit. Au lieu d'une directrice, il pourra se faire qu'on en ait employé plusieurs, mais cela ne changera rien à la méthode de tracé. Imaginons, par exemple, un terrain ABCD (fig. 4), clos d'une haie, avec porte en RS; et sur ce terrain une maison IKLM, précédée d'une pelouse EFGH; enfin un puits P. Soient OX et O'X' les directrices employées; on connaîtra les longueurs des perpendiculaires Aa, Ee, Ii, Kk, Pp, Bb, Cc, Aa', Rr', Hh', Ss', Ff', Gg', Mg', Ll', Dd', Cc'; ainsi que les distances Oa, Oe, Oi, Ok, Op, Ob, Oc et O'a', O'r', O'h', O's', O'f', O'g', O'l', O'd', O'c'. Les directrices étant déjà rapportées sur le plan, ainsi que les points O et O', par de simples ouvertures de compas, on se procurera les points a, e, i, k, etc., a', r', h', s', etc. En ces divers points on élèvera des perpendiculaires sur les directrices; et par de nouvelles ouvertures de compas on obtiendra les points A, E, I, K, etc., R, H, S, etc.; que l'on n'aura plus qu'à joindre, conformément au croquis, soit par des droites telles que AB, BC, etc., IK, KL, etc., ou par l'ovale EFGH. Il pourra être utile de rapporter quelques-uns des points à deux directrices, afin de se ménager des vérifications; c'est ce qu'on suppose dans la figure pour les points A et C.

Tous les détails étant rapportés sur le plan, on y tracera une copie de l'échelle construite sur les

bords collés de la feuille, et qui, ayant servi aux opérations graphiques, est nécessairement fatiguée et trouée; puis on coupera la feuille en dedans des bords collés; et le plan sera terminé. Cependant,

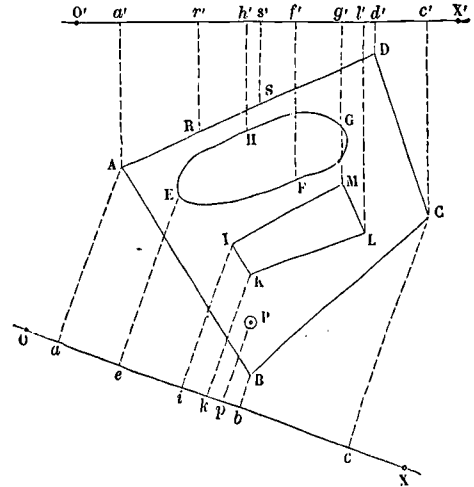


Fig. 4.

pour l'intelligence du plan, on y distingue ordinairement les principaux détails par des SIGNES CONVENTIONNELS, de même que l'on distingue les principales parties du terrain par des TEINTES CONVENTIONNELLES au lavis (Voy. TEINTES ET SIGNES CONVENTIONNELS).

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les angles avaient été mesurés sur le terrain au graphomètre ou à la boussole, et qu'on les rapportait sur le plan à l'aide de l'instrument appelé rapporteur. Dans les levés faits avec une grande précision, on ne peut plus opérer ainsi; les angles mesurés au CERCLE (Voy. ce mot) peuvent être obtenus à une seconde près, tandis que le rapporteur ne peut les reproduire qu'à un quart de degré près environ. On se sert de la trigonométrie pour calculer les côtés des triangles successifs que l'on a à considérer; ainsi que les angles qui ne sont pas mesurés directement; et l'on en déduit, toujours par le calcul, les distances des divers points du terrain à deux droites rectangulaires supposées tracées sur le terrain, mais réellement tirées sur le plan, et qui sont ordinairement la MÉRIDIENNE (Voy. ce mot) et une perpendiculaire à la méridienne, AM et AP (fig. 5). Tous les côtés AB, BC, CD, etc., du polygone considéré étant connus, soit par des mesures directes, soit par le calcul, ainsi que les angles qu'ils font entre eux, on connaît en outre la direction de l'un d'entre eux au moins par rapport à la méridienne si le plan a été orienté (Voy. ORIENTATION); il est facile d'en déduire les directions de tous les côtés par rapport à cette méridienne et par conséquent par rapport à sa perpendiculaire. On peut dès lors calculer les projections de tous les côtés sur ces deux directions; et par des additions ou des soustractions on en déduira les distances de tous les sommets aux droites AM et AP. — Rien de plus facile dès lors que de rapporter tous ces points

sur le plan. Pour rapporter le point D par exemple, on prendra sur la méridienne, à l'échelle du plan, une longueur Ad' égale à la distance calculée du point D à la droite AP; on élèvera au point d une

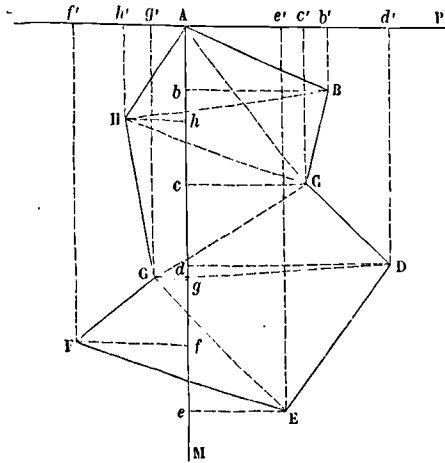


Fig. 5.

perpendiculaire à AM, sur laquelle on portera une longueur dD égale à la distance calculée du point D à la méridienne; et l'on aura ainsi le point D. On l'aurait eu également en prenant sur AP une longueur Ad' égale à la distance du point D à la méridienne, élevant au point d' une perpendiculaire à AP, et prenant sur cette perpendiculaire une longueur $d'D$ égale à la distance du point D à la droite AP. Ces deux manières d'opérer se serviront mutuellement de vérification. On rapportera de la même manière sur le plan tous les points dont les distances à AM et à AP auront été calculées.

Dans la figure 5 les droites AM et AP passent par un des sommets du polygone; il est évident que cette condition n'est pas indispensable.

PLANS AUTOMOTEURS, chemins de fer à forte pente sur lesquels on se sert de la descente d'un certain nombre de wagons pleins pour faire remonter le même nombre de wagons vides. Un câble ou une chaîne fixée par ses extrémités aux deux trains s'enroule sur une large poulie ou sur un tambour dont le diamètre est égal à la distance des deux voies ferrées, d'axe en axe. Comme le poids des wagons pleins est ordinairement supérieur à celui qui serait nécessaire pour faire équilibre au poids des wagons vides et aux frottements que le mouvement fait naître, ce mouvement tend à s'accélérer. Pour que la vitesse ne dépasse pas une certaine limite, on munit le tambour d'un frein. C'est ordinairement une bande de fer que l'on serre, à l'aide d'un levier, contre une poulie en fonte à gorge plate montée sur l'axe du tambour. Mais on a quelquefois employé des freins d'une autre nature. Ainsi, sur un plan automateur établi à Rive-de-Gier, le frein se compose de deux meules de moulin placées sur un axe commun, et que l'on peut rapprocher ou éloigner l'une de l'autre; pour faire agir ce frein, on laisse glisser la meule supérieure sur la meule inférieure qui est fixe; la première, qui participe au mouve-

ment du tambour, frotte alors contre la meule inférieure et produit une résistance suffisante pour arrêter la marche des trains.

Les plans automateurs sont ordinairement employés pour transporter le produit des mines au point d'embarquement, surtout lorsque la pente atteint 25 à 30 millimètres par mètre. Le plan automateur n'est pas toujours à deux voies sur tout son parcours; assez souvent, particulièrement en Angleterre, on n'établit deux voies qu'au point de croisement des deux trains. Quelquefois aussi on donne, au bas du plan, une légère contre-pente à la voie; cette disposition ralentit la vitesse au point d'arrivée des wagons pleins, et facilite le départ des mêmes wagons vides. Par un motif semblable on augmente, au contraire la pente vers le haut du plan automateur, pour faciliter le départ des wagons pleins.

En Amérique, on s'est servi, pour faire monter des wagons pleins, de la descente de chariots en tôle remplis d'eau, qui, puisée à une source au point le plus élevé du plan, était versée ensuite au point le plus bas. M. Perdonnet avait déjà remarqué qu'on pourrait appliquer à un usage semblable l'eau consommée par les écluses des canaux, et remplacer ceux-ci par des chemins de fer.

(Voy. le *Traité élémentaire des chemins de fer*, de M. Perdonnet.)

PLANS COTÉS (MÉTHODE DES), branche de la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (Voy. ce mot) dans laquelle les points de l'espace sont représentés par leur projection sur un plan horizontal fixe, appelé *plan de comparaison* ou *plan de repère*, et par leur hauteur au-dessus ou au-dessous de ce plan, exprimée par un nombre écrit à côté de cette projection et que l'on appelle la *cote* de hauteur de ce point. Cette méthode est surtout employée dans la topographie et dans la fortification. Quel que soit le plan de repère adopté, on regarde comme positives les cotes des points situés d'un côté déterminé de ce plan, et comme négatives celles des points situés de l'autre côté. Pour éviter, autant que possible, les cotes négatives, on prend généralement le plan de repère au-dessus ou au-dessous de tous les points que l'on peut avoir à considérer; si l'on veut ensuite avoir les projections des mêmes points sur un plan horizontal déterminé, c'est comme si l'on transportait le plan de repère parallèlement à lui-même, ce qui revient à augmenter ou à diminuer à la fois toutes les cotes d'une même quantité, égale à celle dont le plan de repère a été transporté. Si, par exemple, la cote primitive d'un point, par rapport à un plan inférieur, était 15^m, et qu'on élève le plan de repère de 10^m, la cote de ce point deviendrait 15^m - 10^m ou 5^m; si la cote primitive d'un point par rapport à un plan supérieur était -4^m, et qu'on abaisse le plan de repère de 10^m, la cote définitive serait -4^m + 10^m ou +6^m.

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par des lettres majuscules les points de l'espace, et par les mêmes lettres minuscules leurs projections sur le plan de repère. Ainsi deux points A et B de l'espace seront représentés, par exemple, par $a.6,5$ et $b.4,1$ (fig. 1).

La distance des deux points A et B, donnés par leurs projections a et b (fig. 1) et leurs cotes 6^m,5 et 4^m, 1 peut s'obtenir par une opération ouvement

numérique. Cette distance est, en effet, l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit une horizontale égale à ab , et une verticale égale à la différence des cotes de A et

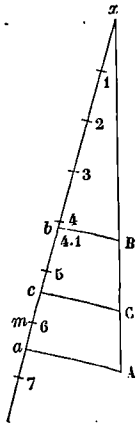


Fig. 1.

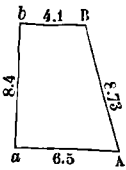


Fig. 2.

de B. Si donc on trouve à l'échelle du plan que ab vaut $8^m,4$, on aura pour la distance demandée

$$\sqrt{(8,4)^2 + (6,5 - 4,1)^2}$$

ou $8^m,73\dots$

On pourrait encore obtenir cette distance en opérant le RABATTEMENT (Voy. ce mot) du plan vertical qui contient les points A et B, autour de sa projection ab , comme l'indique suffisamment la figure 2. Mais le premier procédé est plus conforme à l'esprit de la méthode des plans cotés.

I. Une droite est déterminée sur un plan coté par les projections et les cotes de deux de ses points; ainsi $a.6,5$ et $b.4,1$ (fig. 1) déterminent la droite AB dans l'espace. Lorsque la droite a une existence réelle, on est dans l'usage de la *graduier*, c'est-à-dire d'y marquer les points dont la cote est entière. Pour cela, on commence par déterminer ce qu'on nomme l'*intervalle*, c'est-à-dire la distance entre les projections horizontales de deux points dont la cote diffère de 1^m ; il suffit pour cela de diviser ab par la différence $2^m,4$ des cotes des deux points A et B. Si, par exemple, on trouve, à l'échelle du plan, que la distance ab est de $8^m,4$, on aura pour l'intervalle $\frac{8^m,4}{2,4}$ ou $3^m,5$. On prendra donc, à partir du point a , une longueur am égale à $3^m,5 \times 0^m,5$ ou $1^m,75$; et, à partir de ce point m , dans l'un et l'autre sens, des longueurs successives égales à l'intervalle $3^m,5$; puis, à côté des points obtenus, on inscrira dans un sens les cotes 5, 4, 3, etc.; et dans l'autre les cotes 7, 8, etc.; et la droite sera graduée. Mais, au lieu de porter à la suite du point m une série de longueurs égales à $3^m,5$, ce qui multiplierait les erreurs, il est préférable de porter un multiple de cette longueur assez grand pour atteindre la région extrême sur laquelle on aura à opérer, et de diviser ensuite la distance ainsi portée en un nombre de parties égales marqué par le multiplicateur employé; si, par exemple, on a porté une distance égale à 8 fois l'intervalle, on la divisera en 8 parties égales.

Nous placerons ici les problèmes les plus essentiels sur la ligne droite.

1. Une droite étant donnée par deux de ses points A et B, trouver la cote du point de cette droite qui a pour projection un point donné c. Soit y la cote cherchée, les différences de cotes des points a , c et b étant proportionnelles aux distances horizontales de ces points, on a

$$6,5 - y : y - 4,1 = ac : cb,$$

$$d'où \quad y = \frac{6,5.cb + 4,1.ac}{bc + ac}$$

d'où

Si, par exemple, on a trouvé $ac = 3,8$ et par conséquent $bc = 8,4 - 3,8 = 4,6$, on aura

$$y = \frac{6,5.4,6 + 4,1.3,8}{8,4} = 5^m,41\dots$$

2. Trouver la projection du point qui a une cote donnée. Soit $5^m,4$ la cote donnée; en vertu de la même proportionnalité, on a

$$6,5 - 5,4 : 6,5 - 4,1 = ac : ab,$$

$$d'où \quad ac = ab \cdot \frac{6,5 - 5,4}{6,5 - 4,1}$$

$$ou \quad ac = 8^m,4 \cdot \frac{1,1}{2,4} = 3^m,85,$$

ce qui détermine le point c.

3. Une droite étant donnée par les projections et les cotes de deux de ses points A et B, trouver sa trace sur le plan de projection. Ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent, celui où la cote donnée est zéro. On a donc, en appelant d la distance de la trace cherchée au point a ,

$$6,5 - 0 : 6,5 - 4,1 = d : ab,$$

$$d'où \quad d = ab \cdot \frac{6,5}{6,5 - 4,1},$$

$$ou \quad d = 8^m,4 \cdot \frac{6,5}{2,4} = 22^m,75;$$

ce qui déterminera la trace demandée.

4. Une droite étant donnée par les projections et les cotes de deux de ses points A et B, trouver sa pente (c'est-à-dire la tangente de l'angle qu'elle fait avec sa projection horizontale). Cette tangente est le rapport entre la différence de cote des points donnés A et B, et la distance des projections a et b , c'est-à-dire

$$\frac{6,5 - 4,1}{8,4} \quad ou \quad \frac{2}{7}.$$

Elle répond à un angle de $15^\circ 56' 43'',4$ avec l'horizon.

5. Une droite étant donnée par la projection a et la cote $6^m,5$ d'un de ses points A, par la direction ax de sa projection, et par sa pente $\frac{2}{7}$, trouver la projection c du point dont la cote est $5^m,4$. On déterminera d'abord la trace x de la droite; elle est donnée par la relation

$$\frac{6^m,5}{ax} = \frac{2}{7}.$$

$$d'où \quad ax = 6^m,5 \cdot \frac{7}{2} = 22^m,75,$$

On aura ensuite, par des proportionnalités évidentes

$$ac : 22^m,75 = 6^m,5 - 5^m,4 : 6^m,5,$$

$$d'où \quad ac = 22^m,75 \cdot \frac{1,1}{6,5},$$

$$ou \quad ac = 3^m,85\dots$$

6. Une droite étant donnée comme ci-dessus, trouver la projection d'un point C situé sur cette droite à 4^m du point A.

On cherchera d'abord la distance du point A à la trace x de la droite; cette distance est exprimée par $\sqrt{(22,75)^2 + (6,5)^2}$ ou $23^m,660\dots$; on aura ensuite ac par la proportion

$$ac : 22^m,75 = 4^m : 23^m,66, \quad d'où \quad ac = 3^m,846.$$

On pourrait aussi opérer graphiquement en rabattant le plan vertical qui contient la droite, comme l'indique la figure 1. On prendrait alors sur la droite rabattue, et à partir du point A, une lon-

gueur AC égale à 4^m; et en abaissant Cc perpendiculaire sur ax, on aurait en c la projection du point C.

Quant à la cote du point C, elle se déduira de la projection c par la proportion

$$Cc : Aa = Cx : Ax,$$

ou

$$Cc : 6^m,5 = 23^m,66 - 4^m : 23^m,66 ;$$

d'où

$$Cc = 5^m,40.$$

7. Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée. Par la projection du point donné, on mènera une parallèle à la projection de la droite donnée; et pour la graduer on remarquera que lorsque deux droites sont parallèles, l'intervalle est le même pour chacune d'elles.

8. Deux droites étant données par les projections cotées de deux de leurs points, trouver la condition pour qu'elles se coupent; et, si cette condition est remplie, déterminer la cote de leur point d'intersection. Ce problème peut être résolu de deux manières. 1° Il faut, pour que les droites se coupent, que leurs projections se coupent elles-mêmes. Soit m le point d'intersection de ces projections; ce point m devra correspondre à deux cotes égaux si les droites se rencontrent. On pourra donc déterminer la cote du point m correspondante à chacune des deux droites (probl. 1), et vérifier l'égalité des deux cotes obtenues. Si elles sont égales, chacune d'elles donnera la cote du point M.

2° On peut joindre deux à deux les points de même cote; si les droites proposées se coupent, les lignes de jonction devront être parallèles, car ce seront les projections des horizontales d'un même plan. Si cette condition est remplie, on aura la cote du point m en remarquant que ces mêmes horizontales vont en diminuant à mesure qu'elles se rapprochent du point d'intersection m (fig. 3), et que

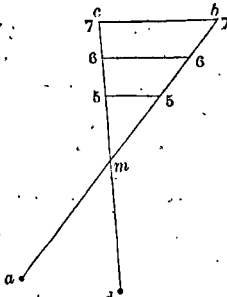


Fig. 3.

la diminution de leur longueur est proportionnelle à la diminution de leur cote. Si donc on trouve à l'échelle du plan que l'horizontale cotée 7 a une longueur de 14^m,5 et l'horizontale cotée 6 une longueur de 10^m,5, on aura, en appelant δ la différence de cotes des points 7 et m, δ : 1^m = 14^m,5 : 14^m,5 - 10^m,5, d'où δ = 3^m,625. Par conséquent, la cote du point m est 7^m - 3^m,625 ou 3^m,375. Cette méthode est surtout utile pour le cas où le point m ne serait pas dans le cadre de l'épure.

II. Un plan est déterminé par une quelconque de ses lignes de plus grande pente, c'est-à-dire par une perpendiculaire à ses horizontales. Si le plan existe réellement, on le représente souvent par ses horizontales à cotes entières, comme le montre la figure 4. Mais on se contente le plus souvent d'in-

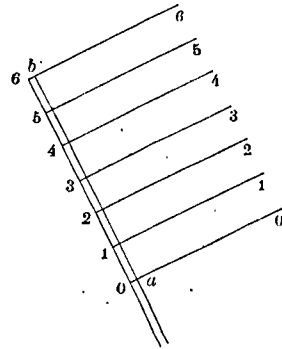


Fig. 4.

diquer la ligne de plus grande pente ab en ayant soin de la graduer. Et pour qu'elle ne puisse pas être confondue avec une droite quelconque, on double le trait, comme l'indique la figure 5. On a

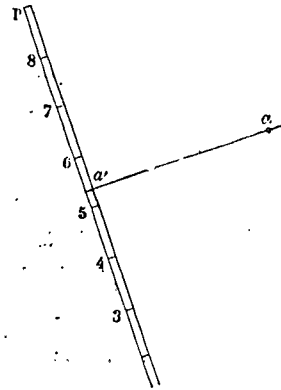


Fig. 5.

ainsi ce qu'on appelle l'échelle de pente du plan. — On peut se proposer divers problèmes relatifs aux plans; nous indiquerons la solution des principaux.

9. Un plan étant donné par son échelle de pente, trouver la cote d'un point de ce plan, dont la projection a est connue.

Par le point a on mènera une perpendiculaire à l'échelle de pente; ce sera la projection de l'horizontale du plan qui contient le point A. La cote de ce point sera donc indiquée par la division de l'échelle de pente à laquelle correspond le pied a' de la perpendiculaire. Sur la figure, ce serait environ 5^m,4.

10. Étant donnée l'échelle de pente d'un plan, trouver sa pente. Il s'agit de trouver la pente de la ligne de plus grande pente; il suffira pour cela de prendre deux points sur l'échelle de pente, et de

diviser la différence de leurs cotes par leur distance horizontale.

11. *Étant donné un point d'un plan, sa pente, et la direction indéfinie de son échelle de pente, construire cette échelle.* On déterminera (problème 5) la projection d'un point dont on se donnera la cote, il ne restera plus qu'à graduer une droite donnée par les projections et les cotes de deux de ses points.

12. *Faire passer un plan par trois points A, B, C (fig. 6) donnés par leurs projections et leurs cotes.*

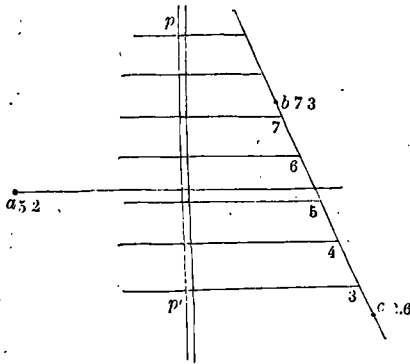


Fig. 6.

Il faut d'abord joindre deux des points donnés, B et C par exemple, par une droite, et la graduer. On joindra ensuite le point *a* au point de *bc* qui a la même cote 5^m,2; la droite *aa'* ainsi menée sera une horizontale du plan : une perpendiculaire *pp'* à cette horizontale, représentera une ligne de plus grande pente. Par les points de division de *bc* on mènera ensuite des parallèles à *aa'*, qui serviront à graduer *pp'*. Cette droite *pp'* sera l'échelle de pente du plan cherché. On n'aura plus qu'à doubler le trait, conformément à l'usage.

13. *Par deux points donnés A et B, faire passer un plan qui ait une pente donnée, 1,5.* On commencera par joindre la droite AB (fig. 7) et la gra-

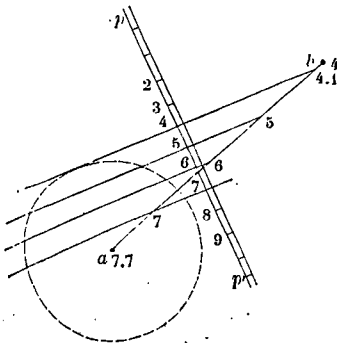


Fig. 7.

duer. Cela fait, on imagine un cône de révolution ayant son sommet en A et sa base sur le plan horizontal passant par le point B, et dont les génératrices aient la pente donnée 1,5; il sera facile d'en déduire le rayon de sa base; car la hauteur de ce

cône étant 7^m,7 — 4^m,1 ou 3^m,6, on doit avoir, en appelant *r* le rayon,

$$\frac{3^m,6}{r} = 1,5 \text{ d'où } r = \frac{3^m,6}{1,5} = 2^m,4.$$

Du point *a* comme centre, avec ce rayon, on décrira une circonférence de cercle; on lui mènera une tangente par le point *b*; ce sera la trace, sur le plan horizontal du point B, d'un plan tangent au cône, et dont la pente sera par conséquent celle de la génératrice de contact, c'est-à-dire 1,5; ce sera donc une horizontale du plan cherché. Perpendiculairement à cette horizontale on mènera la droite *pp'*, sur laquelle on rapportera, par des parallèles à la tangente, les divisions de *ab*; on aura ainsi l'échelle de pente du plan demandé. Il y a deux solutions, puisque par le point *b* on peut mener deux tangentes. Il n'y en aurait qu'une si le point *b* était sur la circonférence; le problème serait impossible si le point *b* était dans l'intérieur de cette circonférence.

14. *Par un point A, donné sur un plan P, tracer dans ce plan une droite ayant une pente donnée 0,8.* Désignons par *x* la distance horizontale du point *a* (fig. 8) au point *b* de la droite cherchée qui a une

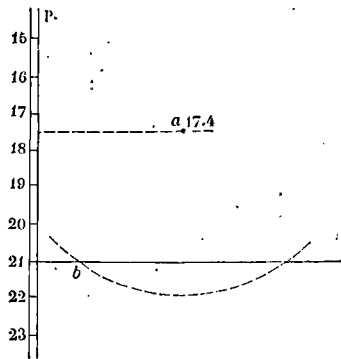


Fig. 8.

cote déterminée, 21 par exemple; on devra avoir

$$\frac{21 - 17,4}{x} = 0,8, \text{ l'où } x = 4^m,5.$$

Du point *a* on décrira donc, avec un rayon égal à 4^m,5 un arc de cercle qui coupera l'horizontale 21 du plan donné en un point *b*; ce sera la projection d'un second point B de la droite cherchée, dont la cote sera 21. La droite cherchée se trouvera donc déterminée. Il y a en général deux solutions. Il n'y en aurait qu'une si l'arc décrit était tangent à l'horizontale considérée. Le problème serait impossible si la distance du point *a* à cette horizontale était plus grande que le rayon de l'arc décrit.

15. *Construire l'intersection de deux plans donnés par leurs échelles de pente.* On mènera deux horizontales de même cote, les horizontales 7 par exemple (fig. 9); elles se couperont en un point *a*,7 qui appartiendra à l'intersection cherchée. On déterminera de la même manière un second point *b*,9 de cette intersection; et l'on joindra *ab*, qui sera la projection de la droite cherchée.

La construction serait en défaut si les échelles de pente étaient parallèles. On se sert dans ce cas

d'un plan auxiliaire Q. On détermine comme ci-dessus l'intersection des plans P et Q, puis l'intersection des plans Q et P'; le point de rencontre des deux droites ainsi obtenues appartient à l'intersec-

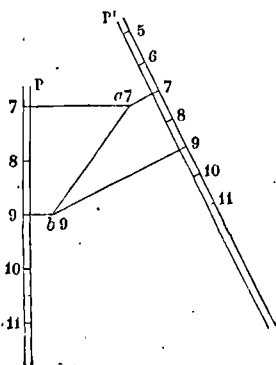


Fig. 9.

tion des plans P et P'. Il ne reste plus qu'à mener par ce point une parallèle aux horizontales des plans donnés; c'est la droite demandée.

La construction serait encore en défaut si les horizontales de même cote des deux plans proposés se coupaient hors du cadre de l'épure; dans ce cas on détermine l'intersection de chacun des plans proposés avec un plan auxiliaire Q; les deux intersections se rencontrent en un point qui appartient à la droite cherchée. On en obtient un second en changeant de plan auxiliaire.

16. Construire l'intersection d'une droite et d'un plan. Par deux points a et b de la droite donnée (fig. 10), on mènera deux parallèles quelconques,

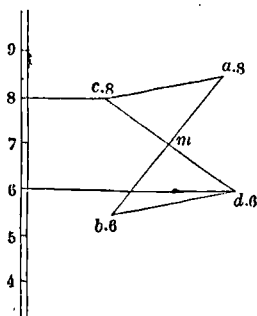


Fig. 10.

qui représenteront deux horizontales d'un plan contenant la droite AB. Dans le plan donné P, on mènera les horizontales de mêmes cotes; elles rencontreront les premières en des points c.8 et d.6 qui appartiendront à l'intersection du plan P avec le plan auxiliaire. On joindra cd; le point m où cette droite rencontrera ab sera la projection du point appartenant à la droite AB et au plan P. Sa cote se déduira de celles des points a et b (prob. 1). Si la droite donnée était parallèle au plan donné, les projections ab et cd seraient parallèles

17. Par un point donné, mener un plan paral-

lèle à un plan donné. Il suffit de mener par le point donné une parallèle à l'échelle de pente donnée. Pour graduer la droite ainsi obtenue, on remarquera que les lignes de plus grande pente de deux plans parallèles étant parallèles elles-mêmes, l'intervalle est le même sur les deux échelles de pente.

18. Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné. La perpendiculaire demandée est perpendiculaire à la ligne de plus grande pente du plan; elle se projette donc parallèlement à l'échelle de pente. D'ailleurs cette perpendiculaire fait avec l'horizon un angle qui est le complément de celui que fait avec l'horizon la ligne de plus grande pente du plan. Si e et e' désignent la valeur de l'intervalle sur la perpendiculaire et sur la ligne de plus grande pente du plan, les pentes de ces deux lignes seront exprimées par $\frac{1^m}{e}$ et $\frac{1^m}{e'}$; et, puisque les angles dont ces pentes sont les tangentes sont complémentaires, on devra avoir

$$\frac{1^m}{e} \cdot \frac{1^m}{e'} = 1, \text{ d'où } e = \frac{1^m}{e'}$$

valeur qui permettra de graduer la perpendiculaire.

19. Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée. La ligne de plus grande pente du plan sera parallèle à la projection de la droite donnée, d'après ce qui vient d'être dit; et, en menant par le point donné une perpendiculaire à cette direction, on aura une horizontale du plan. Pour graduer l'échelle de pente, on déterminera l'intervalle par la relation $ee' = 1$ ci-dessus établie.

20. Par une droite donnée AB faire passer un plan parallèle à une autre droite donnée CD. Il suffit de mener par un point de AB une parallèle à CD, et de déterminer l'échelle de pente du plan qui passe par AB et par cette parallèle, en opérant comme au problème 12.

21. Trouver l'angle de deux droites. On peut toujours supposer que le sommet de l'angle réponde à une cote entière; car, si cela n'était pas, on prendrait, sur l'une des droites, un point ayant une cote entière, et par ce point on mènerait une parallèle à l'autre droite. Soient donc ab et ac (fig. 11)

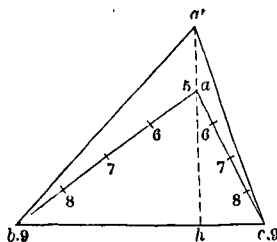


Fig. 11.

les deux droites données. Par deux points de même cote (9) menons une horizontale; et concevons que le plan des deux droites tourne autour de cette horizontale jusqu'à ce qu'il devienne lui-même parallèle à l'horizon. Dans ce mouvement, la perpendiculaire ah, abaissée du point A sur l'axe de rotation ne cessera pas de se projeter horizontalement sur la même droite; et le point A viendra prendre une certaine position a'. Pour la trouver, il

suffit de connaître la vraie distance des deux points A et h dont on a les cotes; ce problème a été résolu au commencement de cet article. Le point a' étant déterminé, on joindra $a'b$ et $a'c$, et l'angle $ba'c$ sera l'angle demandé.

22. Par un point C mener une droite qui fasse un angle donné avec une droite donnée AB (fig. 12).

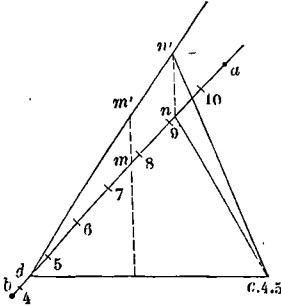


Fig. 12.

Soit ab la droite donnée, et soit c le point donné. On joindra ce point au point d qui a même cote sur la droite ab : et l'on imaginera comme ci-dessus que le plan ABC tourne autour de l'horizontale cd jusqu'à ce qu'il devienne lui-même horizontal. Un point déterminé m de ab viendra, dans ce mouvement, prendre la position m' , que l'on déterminera comme dans le problème précédent. On joindra am' ; et par le point c on mènera la droite cn' faisant avec am' l'angle donné. Puis on imaginera que le plan ABC reprenne sa position primitive; dans ce nouveau mouvement le point n' viendra se placer en n à la rencontre de ab avec une parallèle à mm' menée par le point n' . On joindra cn , ce sera la projection de la droite cherchée.

Cette construction servirait à abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée.

23. Trouver l'angle de deux plans. On pourrait ramener ce problème au précédent en menant par un point quelconque deux droites respectivement perpendiculaires aux deux plans proposés (probl. 18) et déterminant l'angle de ces perpendiculaires. Mais on peut aussi le résoudre directement par les considérations qu'on emploie pour cela dans la Géométrie descriptive ordinaire (Voy. ANGLE DE DEUX PLANS).

Soient P et P' (fig. 13) deux plans donnés par leurs échelles de pente, et ab l'intersection de ces plans (probl. 15). Menons une droite mn perpendiculaire à ab ; elle pourra être considérée comme la trace, sur le plan horizontal coté 11, d'un plan perpendiculaire à AB . Ce plan coupe les deux proposés suivant des droites faisant entre elles l'angle cherché, et il coupe le plan vertical projetant AB , suivant une droite perpendiculaire à AB , dont il est facile de trouver la longueur. Pour cela, on rabattra ce plan vertical autour de ab ; le point a viendra en A à une distance Aa égale à la différence de cote des points a et b ; le point b n'aura pas changé; l'arête de l'angle à mesurer aura donc pris la position Ab ; et la perpendiculaire dont on cherche la longueur sera rabattue en hV ; elle est donc facile à construire. Or, si l'on suppose le point

V ramené à sa place, les droites mV et nV sont celles qui font entre elles l'angle cherché; et l'on peut se proposer de les rabattre en les faisant tourner autour de mn . La droite hV , dans l'espace, est

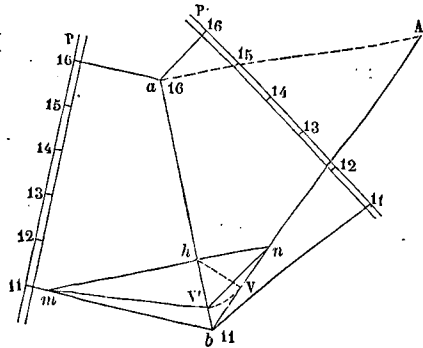


Fig. 13.

perpendiculaire à mn ; car mn , perpendiculaire à ab , est perpendiculaire au plan vertical dont ab est la trace, et par conséquent à hV mené par son pied dans ce plan. Donc, dans le nouveau rabattement que nous imaginons, le point V ne cessant pas d'être perpendiculaire à mn , viendra se rabattre en V' sur ab , à une distance hV' égale à hV . En joignant mV' et $V'n$ on aura en $mV'n$ l'angle demandé.

24. Par une droite donnée ab (fig. 13) faire passer un plan qui fasse avec un plan donné P un angle donné. L'épure est la même que dans le problème précédent; mais elle est tracée dans un autre ordre. On mènera mn perpendiculaire à ab ; on déterminera comme ci-dessus la perpendiculaire hV et le point V' . Par ce point V' on mènera une droite $V'n$ faisant avec mV' l'angle donné; ce qui déterminera le point n . On joindra bn , et l'on mènera par le point a une parallèle à bn ; ces deux parallèles seront les horizontales 11 et 16 du plan cherché. Son échelle de pente sera perpendiculaire à ces horizontales; et elle sera facile à graduer puisqu'on connaîtra les cotes de deux de ses points.

Cette construction permettrait de résoudre ce problème : Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.

III. Une ligne courbe est représentée sur un plan coté par la projection et par les cotes d'une série de points suffisamment rapprochés.

On représente une surface et particulièrement une surface réglée, à l'aide des mêmes données que dans la Géométrie descriptive ordinaire; et l'on peut, avec ces données, résoudre, par des procédés analogues, les questions relatives aux plans tangents et aux intersections de surfaces (Voy. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, PLANS TANGENTS, INTERSECTIONS DE SURFACES, DÉVELOPPEMENT, etc.). Mais c'est surtout aux surfaces irrégulières, telles que celles que l'on rencontre dans la Topographie et dans la Fortification, que s'applique la méthode des plans cotés.

On sait qu'en TOPOGRAPHIE (Voy. ce mot) la surface du terrain est représentée par des courbes de niveau, ou courbes horizontales équidistantes, ou par des lignes de plus grande pente; le plus sou-

vent, par ces deux procédés simultanément; c'est-à-dire que l'on suppose le terrain coupé par des plans horizontaux équidistants, et assez rapprochés, pour que leurs intersections avec le terrain en fassent connaître les principales inflexions; et, qu'indépendamment de ces courbes, on trace sur le plan les lignes de plus grande pente du terrain, c'est-à-dire les normales communes aux courbes de niveau consécutives. On peut à l'aide de ce mode de représentation résoudre divers problèmes dont nous passerons en revue les principaux.

25. Un terrain étant représenté par ses courbes de niveau, trouver la cote d'un point de ce terrain dont on a la projection horizontale. Soit m (fig. 14) la projection horizontale donnée; en mè-

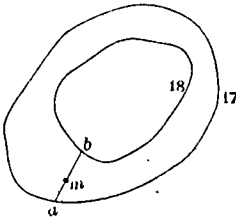


Fig. 14.

nera par ce point une droite ab qui soit, à vue, normale à la courbe horizontale 18, l'une de celles entre lesquelles ce point est compris; on mesurera ab et am à l'échelle du plan; et, connaissant les cotes des points a et b , l'on obtiendra la cote du point m en résolvant le problème 1.

26. Un terrain étant représenté par ses lignes de plus grande pente, trouver la cote d'un point de ce terrain dont on a la projection horizontale. Soient ab et cd (fig. 15) les deux lignes de plus



Fig. 15.

grande pente entre lesquelles se trouve compris le point donné m ; on mènera à vue par ce point une normale à l'une de ces deux courbes, à la courbe ab par exemple; connaissant les cotes des deux points a et b entre lesquels tombera le pied n de la normale, on en déduira la cote du point n , ou, ce qui revient au même, celle du point m , en regardant ab comme une ligne droite, et en résolvant encore le problème 1.

27. Trouver l'intersection du terrain par un plan. 1° Supposons d'abord que le plan donné soit vertical; l'intersection demandée sera ce qu'on appelle le profil du terrain suivant le plan dont la trace horizontale XY est donnée (fig. 16). Pour l'obtenir, on élèvera sur XY des perpendiculaires par les points a, b, c, d , etc., où cette trace coupe les courbes de niveau; et l'on prendra sur chacune d'elles une longueur représentant, à l'échelle du plan, la cote de la courbe de niveau correspondante. Par les points A, B, C, D , etc. ainsi obtenus, on fera passer une courbe, qui approchera d'autant plus du profil demandé, que les courbes de niveau seront plus rapprochées.

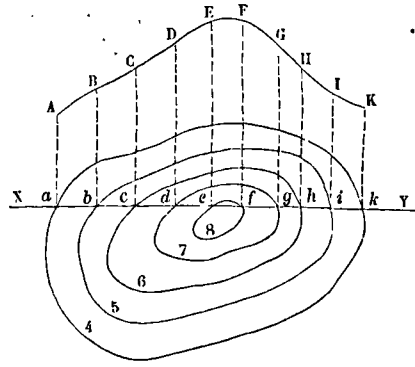


Fig. 16.

2° Si le plan coupant est quelconque, il est donné par son échelle de pente. Par les points de division de cette échelle on mène les horizontales du plan, et l'on détermine leurs intersections avec les courbes de niveau qui ont même cote; puis on joint par une courbe continue les points ainsi déterminés (fig. 17). Pour déterminer la courbe

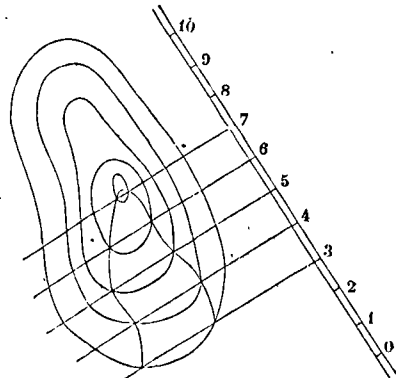


Fig. 17.

d'intersection d'une manière plus précise, il peut être nécessaire de tracer des courbes de niveau intermédiaires; on les obtient en divisant en parties égales les lignes de plus grande pente qui réunissent deux courbes de niveau consécutives, et en joignant par un trait continu les points de division qui se correspondent.

IV. On peut avoir encore à résoudre les problèmes suivants :

Par un point donné, mener, dans une direction donnée, une droite tangente à la surface du terrain;

Par un point donné mener un cône circonscrit à la surface du terrain;

Par une droite donnée mener un plan tangent à la surface du terrain;

Par un point donné mener un plan tangent en deux points à la surface du terrain.

On trouvera la solution de ces problèmes à l'article DÉFILEMENT, où ils trouvent immédiatement leur application.

(Voy. les *Leçons sur les plans cotés*, par M. Bardin; le *Mémoire* du général Noizet, inséré dans le *Mémorial du génie* en 1823; le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie; l'*Introduction aux cours de Topographie et de Fortification*, par le capitaine Hudelot.)

PLANS DE DEJOUTEMENT, plans verticaux, passant par l'axe du poinçon, suivant lesquels un arêtier ou une noue s'appuient sur les chevrons adjacents. (Voy. CROUPE, NOUE.)

PLANS D'ENGUEULEMENT, plans verticaux suivant lesquels un arêtier ou une noue s'appuient sur le poinçon (Voy. CROUPE, NOUE).

PLANCHERS, pans de bois horizontaux qui séparent les différents étages d'un bâtiment. La charpente d'un plancher est formée de solives généralement parallèles. Ces solives peuvent être scellées dans les deux murs opposés; on peut aussi les faire reposer par le bout sur des pièces transversales appelées *lambourdes*, établies le long du mur; ces lambourdes sont soutenues par des consoles en pierre ou par des supports en fer nommés *corbeaux*; elles sont en outre engagées par leurs extrémités dans les deux murs en retour. Cette disposition est indiquée en plan par la figure 1, et

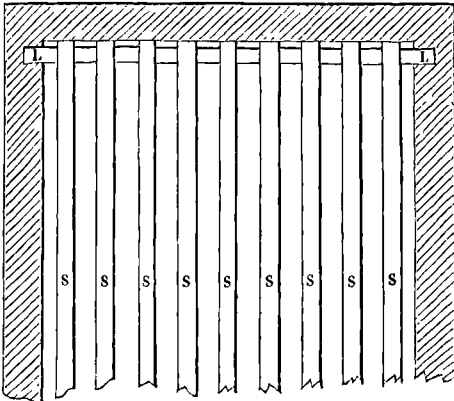


Fig. 1.

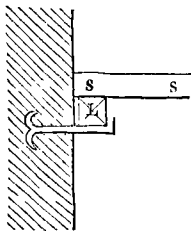


Fig. 2.

en élévation par la figure 2. La lambourde est représentée en LL, les solives sont représentées en SSS... La lambourde est à une petite distance du mur auquel elle est parallèle. Si la dimension de la

pièce dans le sens de la longueur des solives est considérable, on la divise en *travées* par des poutres transversales engagées à leurs extrémités dans les murs; et c'est sur ces poutres que viennent poser les bouts des solives qui forment le plancher de chaque travée. Sur les solives on dispose un lattis, sur lequel on étend une aire en plâtre; si la pièce doit être carrelée, on donne à cette couche de plâtre une épaisseur suffisante pour pouvoir y établir directement le **CARRELAGE** (Voy. ce mot); si la pièce doit être parquetée, on dispose sur l'aire en plâtre une série de pièces de bois transversales aux solives, auxquelles on donne aussi le nom de *lambourdes*, et sur lesquelles on cloue les planches jointives qui doivent former le **PARQUET** (Voy. ce mot).

I. La charpente d'un plancher serait donc fort simple, s'il n'était pas nécessaire d'y ménager des ouvertures pour l'escalier, pour les cheminées, et d'avoir égard aux fenêtres et aux portes pratiquées dans les murs sur lesquels devraient porter les solives. Il serait imprudent en effet de faire porter le bout d'une solive sur une portion de mur située au-dessus d'une porte ou d'une fenêtre. Dans ce cas, on opère de la manière suivante. Soit MM (fig. 3) la section du mur dans lequel est pratiquée

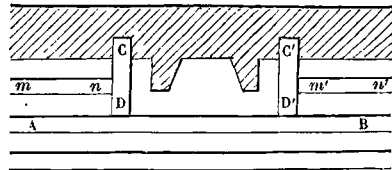


Fig. 4.

une fenêtre au-dessus de l'espace indiqué par des lignes ponctuées; et soient AA et BB les deux solives entre lesquelles cet espace est compris. Sur ces deux solives on fait porter, à une petite distance du mur, une pièce transversale CD appelée *linçoir*; et c'est sur ce linçoir que portent les bouts des solives SS et S'S' correspondantes au vide considéré. Ces solives qui ne portent par un bout que sur un linçoir portent le nom de *solives boiteuses*. A l'emplacement correspondant aux cheminées on emploie une disposition du même genre. Si les solives sont posées, comme dans la figure 4, parallèlement au

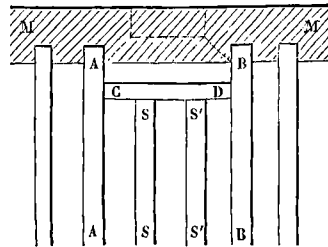


Fig. 3.

mur qui contient la cheminée, la solive la plus voisine AB se nomme *solive d'enchevêtreure*; sur cette solive s'appuient les pièces transversales CD, C'D', engagées par une de leurs extrémités dans le

mur, et auxquelles on donne le nom de *chevêtres*. Les solives boiteuses mn et $m'n'$, comprises entre le mur et la solive AB, s'appuient par un bout sur les chevêtres. Si les solives sont posées, au contraire, comme dans la figure 3, perpendiculairement au mur dans lequel est placée la cheminée, les solives AA et BB jouent le rôle de *chevêtres*, et le linçoir CD prend le nom de *linçoir d'enchevêtrement*. Les dispositions des figures 3 et 4 sont aussi celles dont on fait usage pour ménager l'espace nécessaire au passage d'un escalier; mais le linçoir CD de la figure 3 et la solive AB de la figure 4 devraient alors être à une plus grande distance du mur; et, dans ce dernier cas, il y aurait entre le mur et la solive AB un nombre plus ou moins grand de solives boiteuses analogues à mn et $m'n'$. Toutes les fois qu'on emploie un linçoir, tel que CD (fig. 3), on a soin de soulager ses tenons en soutenant le linçoir lui-même par des brides en fer qui, après avoir passé sous l'un des bouts, C ou D, de la pièce, vient s'attacher sur la solive voisine, AA ou BB.

II. Il peut arriver qu'on ne dispose pas de bois assez longs pour pouvoir les faire porter sur les murs opposés; on emploie dans ce cas diverses dispositions dont le principe paraît dû à l'architecte Serlio. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait à couvrir un espace carré MNOP (fig. 5), et que les

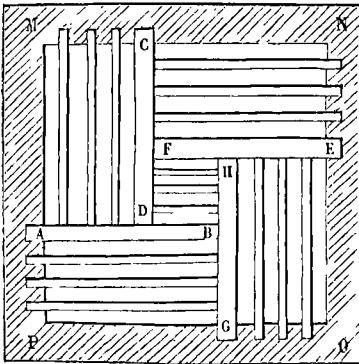


Fig. 5.

bois dont on dispose n'aient que les deux tiers de la longueur du côté de ce carré (plus l'excès de longueur nécessaire pour les encastresments et assemblages). Au tiers du côté MP on dispose une première solive AB, engagée par un bout dans le mur MP et soutenue de l'autre par un appui provisoire. Au tiers du côté MN on établit une seconde solive, engagée par un bout dans le mur MN, et assemblée par l'autre avec la solive AB. Au tiers du mur NO on établit une troisième solive EF, engagée par un bout dans le mur NO et assemblée par l'autre avec la solive CD. Enfin, au tiers du mur OP on établit une quatrième solive GH, engagée par un bout dans le mur OP, et assemblée par l'autre dans la solive EF. Dans cette quatrième solive GH on assemble le bout de la première solive AB; et l'on supprime l'appui provisoire. Les quatre solives AB, CD, EF, GH forment alors un système rigide reposant sur les quatre murs; et l'on remplit les intervalles par des solives secondaires, d'un moindre

équarrissage, qui s'appuient sur les murs et sur les solives principales, comme l'indique la figure.

On peut, en se fondant sur le même principe, adopter beaucoup d'autres dispositions, parmi lesquelles nous citerons la suivante. Soit MNOP (fig. 6)

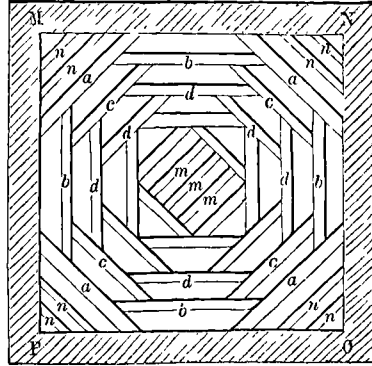


Fig. 6.

un espace carré à couvrir. Sur les murs en équerre on établit d'abord les solives principales aa , aa , etc., engagées par les deux extrémités dans les murs. Sur ces solives principales, on établit ensuite les pièces bb , bb , etc., parallèles aux murs, et jouant le rôle de linçoirs; elles sont ordinairement *embrevées* (Voy. ASSEMBLAGES) avec ces solives, et reliées en outre avec elles par des liens en fer. Sur ces linçoirs bb , bb , etc., on pose de nouvelles pièces obliques cc , cc , etc., sur lesquelles on établit de nouveaux linçoirs dd , dd , etc., et ainsi de suite. Les intervalles sont ensuite remplis par des solives secondaires telles que m , m , n , n , qui peuvent être parallèles soit aux murs, soit aux diagonales du carré, comme, sur la figure.

En combinant les moyens indiqués ci-dessus on peut former la charpente d'un plancher destiné à couvrir un espace de forme quelconque. La figure 7

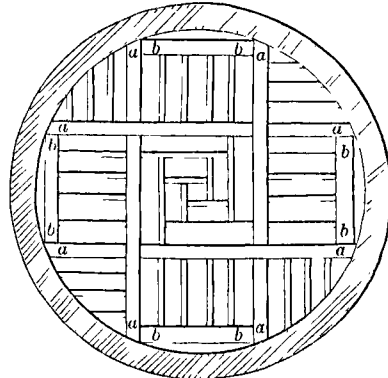


Fig. 7.

montre une des dispositions employées pour construire un plancher circulaire. Cette charpente se compose de 4 solives principales aa , aa , etc., engagées dans le mur circulaire et assemblées entre elles, et de quatre linçoirs bb , bb , etc., assemblés avec ces solives. Les intervalles sont remplis par

des solives secondaires qui s'appuient sur les solives principales et sur les lingoires. Le mode de remplissage du carré intérieur formé par les solives *aa*, *aa*, etc., offre une application du principe de Serlio.

(Voy. pour plus de détails le *Traité de charpente* de J. Adhémar, et le *Traité de l'art de la charpenterie* de M. Emy.)

L'inconvénient des systèmes dont nous venons de parler consiste en ce que la solidité du plancher dépend alors de la résistance des tenons ; et que si un seul assemblage vient à céder, tout le système est compromis.

III. PLANCHERS EN FER. Depuis un certain nombre d'années, depuis surtout que les chemins de fer ont fait faire de notables progrès à la métallurgie, et ont mis le fer à bon marché, on construit des planchers dans lesquels les poutres et les solives en bois sont remplacés par des poutres et des solives en fer, dont la section droite est à double T, comme l'indique la figure 8. Les solives et les poutres s'assemblent au moyen d'équerres et d'étriers en fer. On espace les solives de 0^m,60 à 0^m,80 ; et on les relie par une sorte de lattis en fer léger, sur lequel on établit le hourdis nécessaire, et de petites voûtes en briques creuses, qui remplissent l'intervalle sans trop charger le plancher. Pour une pièce de 4^m,40 de côté, par exemple, la hauteur des solives est de 0^m,165 ; l'épaisseur de l'âme, c'est-à-dire

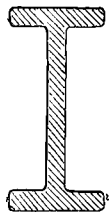


Fig. 8.

de la lame verticale, est de 0^m,007 ; les semelles ou nervures horizontales ont une largeur de 0^m,054 ; leur épaisseur est de 0^m,016 à leur jonction avec l'âme, et de 0^m,008 seulement sur le côté.

IV. Les dimensions transversales des poutres doivent être réglées d'après la charge qu'elles ont à supporter. Dans les maisons d'habitation le poids propre du plancher, avec hourdis, peut ordinairement être évalué à 200 kilogrammes par mètre carré, et il faut y ajouter une surcharge d'épreuve de 150 à 200 kilogrammes par mètre carré ; ce dernier nombre représente à peu près le poids de trois personnes. La charge totale doit donc être comptée pour 350 ou 400 kilogrammes par mètre carré. Dans les magasins à blé, le plancher est ordinairement sans hourdis, et ne pèse que 150 kilogrammes par mètre carré ; mais il faut y ajouter une charge permanente de 0^m,60 de blé, représentant un poids de 450 kilogrammes par mètre carré, ce qui porte la charge totale à 600 kilogrammes.

Les poutres en bois sont ordinairement à section carrée, afin d'utiliser toute la force de l'arbre dans lequel la pièce a été débitée. Cependant si l'arbre est assez gros pour qu'on en puisse tirer plusieurs pièces, on leur donne souvent une section rectangulaire dans laquelle la hauteur est à la base comme $\sqrt{2}$ est à 1, ou approximativement comme 7 est à 5. Quant aux solives, on leur donne quelquefois une hauteur double de leur épaisseur, et même davantage quand les vides sont remplis par des plâtras.

Rondelet prescrivait de donner aux solives une hauteur et une épaisseur égales au 24^e de leur longueur, quand leur intervalle est égal à leur épaisseur, et d'augmenter ces dimensions avec

l'intervalle. Il conseillait de donner aux poutres le 18^e de leur longueur ; quand elles sont écartées de 3^m à 3^m,50.

Mais, au lieu de s'en tenir à ces règles empiriques, il est préférable de calculer les dimensions transversales des pièces d'après les formules que fournit la théorie de la résistance des matériaux. (Voy. FLEXION PLANE.)

V. Considérons d'abord une poutre en bois qui partage en deux parties égales la longueur $2l$ d'une pièce, et qui reçoit des deux côtés les bouts des solives égales et en même nombre ; on pourra regarder la poutre comme uniformément chargée. Soit a sa longueur et p le poids du plancher par mètre carré. Chaque solive charge la poutre de la moitié du poids qu'elle porte elle-même ; la poutre se trouve donc chargée uniformément de la moitié du poids du plancher, c'est-à-dire d'un poids total représenté par pal , ce qui équivaut à pl par mètre courant. Le maximum du moment fléchissant, qui a lieu au milieu de la poutre, est donc exprimé par

$$\mu = \frac{1}{8} pla^2, \quad [1]$$

et, en nommant x le côté du carré qui forme la section de la poutre, on doit avoir

$$R = \frac{\frac{1}{2} x}{\frac{1}{12} x^3} \cdot \frac{1}{8} pla^2 \quad \text{ou} \quad R = \frac{3pla^2}{4x^3},$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{3pla^2}{4R}}. \quad [2]$$

Si, par exemple, on a

$$a = 5^m, \quad l = 4^m, \quad p = 400^k, \quad R = 700000,$$

pour le chêne, on trouvera

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 400 \cdot 4 \cdot 25}{4 \cdot 700000}} = 0^m,350.$$

Si la poutre est en fer, à section double T, on tire de la formule de la résistance, qui est ici

$$R = \frac{v}{I} \cdot \frac{1}{8} pla^2,$$

la valeur

$$\frac{I}{v} = \frac{pla^2}{8R}. \quad [3]$$

On pourrait prendre pour inconnue l'épaisseur x de l'âme, se donner les rapports des autres dimensions à celle-là ; on en déduirait pour le rapport de I à v une expression de la forme kx^3 , dans laquelle k serait connu, et, en la transportant dans l'équation [3], on en tirerait la valeur de x , et par suite les dimensions de la section. Mais on a intérêt à ne point faire fabriquer exprès des poutres de dimensions spéciales, et à se servir au contraire des poutres que les grandes usines livrent au commerce. M. Bourdais a dressé un tableau donnant pour chacune de ces poutres le rapport $\frac{I}{v}$ et la section Ω , dont on a besoin pour calculer le poids des poutres ; on calculera donc $\frac{I}{v}$ par l'équation [3], en y faisant $R = 6000000$, pour la tôle laminée ; et l'on cherchera dans le tableau, que nous reproduisons ci-dessous, la poutre qui s'approche le plus, par excès, de la valeur calculée ; c'est cette poutre qu'il faudra choisir.

PROVENANCE.	HAUTEUR de la poutre.	LARGEUR des semelles.	ÉPAISSEUR de chaque femelle.	ÉPAISSEUR de l'âme.	σ	Ω
	m	m	m	m	mq	
PROVIDENCE.	0,100	0,043	0,006	0,005	0,0000285	0,000956
	0,100	0,045	0,006	0,007	0,0000318	0,001156
	0,120	0,045	0,007	0,004	0,0000102	0,001054
	0,120	0,050	0,007	0,009	0,0000522	0,001654
	0,120	0,085	0,011	0,009	0,0000938	0,003652
	0,120	0,092	0,011	0,016	0,0001214	0,004496
	0,140	0,047	0,007	0,006	0,0000539	0,001212
	0,140	0,053	0,007	0,012	0,0000754	0,002056
	0,160	0,048	0,008	0,007	0,0000773	0,001552
	0,160	0,053	0,008	0,012	0,0000966	0,002352
	0,180	0,055	0,009	0,008	0,0001120	0,001990
	0,180	0,062	0,009	0,015	0,0001497	0,003250
	0,200	0,110	0,014	0,010	0,0003093	0,003800
	0,200	0,117	0,014	0,017	0,0003559	0,005200
	0,220	0,064	0,010	0,009	0,0001822	0,003080
	0,220	0,071	0,010	0,016	0,0002387	0,004774
	0,260	0,067	0,012	0,013	0,0002997	0,004676
	0,260	0,074	0,012	0,020	0,0003786	0,006496
	0,300	0,120	0,018	0,016	0,0007330	0,010656
	0,300	0,128	0,013	0,024	0,0008530	0,013056
DUMONT ET DREYFUS.	0,080	0,045	0,007	0,006	0,0000246	0,001028
	0,080	0,055	0,007	0,016	0,0000353	0,001826
	0,080	0,050	0,008	0,008	0,0000282	0,001312
	0,080	0,055	0,008	0,013	0,0000333	0,001712
	0,080	0,055	0,009	0,009	0,0000358	0,001548
	0,080	0,065	0,009	0,019	0,0000464	0,002348
	0,100	0,055	0,008	0,006	0,0000432	0,001384
	0,100	0,065	0,008	0,016	0,0000698	0,002384
	0,100	0,060	0,009	0,009	0,0000531	0,001808
	0,100	0,070	0,009	0,019	0,0000698	0,002808
	0,100	0,065	0,011	0,011	0,0000655	0,002288
	0,100	0,075	0,011	0,017	0,0000755	0,002888
	0,120	0,065	0,009	0,007	0,0000705	0,001764
	0,120	0,075	0,009	0,017	0,0000945	0,002964
	0,120	0,070	0,010	0,009	0,0000833	0,002300
	0,120	0,080	0,010	0,019	0,0001073	0,003500
	0,120	0,075	0,012	0,011	0,0001010	0,002856
	0,120	0,085	0,012	0,021	0,0001250	0,004056
	0,140	0,080	0,010	0,008	0,0001131	0,002560
	0,140	0,090	0,010	0,018	0,0001457	0,003960
0,140	0,085	0,012	0,010	0,0001380	0,003200	
0,140	0,095	0,012	0,020	0,0001710	0,004600	
0,140	0,090	0,014	0,012	0,0001450	0,004149	
0,140	0,100	0,014	0,022	0,0001780	0,005149	
0,160	0,080	0,010	0,008	0,0001350	0,002120	
0,160	0,090	0,010	0,018	0,0001770	0,004320	
0,160	0,085	0,012	0,010	0,0001670	0,003400	
0,160	0,095	0,012	0,020	0,0002090	0,005000	
0,160	0,090	0,014	0,012	0,0001950	0,004104	
0,160	0,100	0,014	0,022	0,0002370	0,005704	
MONTAIRE.	0,100	0,042	0,0075	0,010	0,0000372	0,001580
	0,100	0,047	0,0075	0,015	0,0000456	0,001980
	0,120	0,047	0,0080	0,005	0,0000455	0,001272
	0,120	0,050	0,0080	0,010	0,0000575	0,001840
	0,140	0,050	0,0085	0,007	0,0000780	0,001711
	0,140	0,055	0,0085	0,012	0,0000845	0,002411
	0,160	0,055	0,0090	0,007	0,0001152	0,001984
	0,160	0,062	0,0090	0,014	0,0001303	0,003104
	0,180	0,060	0,0090	0,008	0,0001192	0,002376
	0,180	0,067	0,0090	0,015	0,0001571	0,003636
	0,200	0,065	0,0095	0,008	0,0001517	0,002863
	0,200	0,073	0,0095	0,016	0,0002050	0,004283
0,220	0,065	0,0095	0,008	0,0001736	0,002843	
0,220	0,073	0,0095	0,016	0,0002382	0,004603	

leur épaisseur 0^m,013 et l'épaisseur de l'âme 0,024; et pour laquelle on trouve

$$\frac{1}{v} = 0,0008530 ;$$

c'est cette poutre qu'il faudrait prendre.

A la rigueur, comme on a négligé dans le calcul le poids de la poutre elle-même, il faudrait, après avoir obtenu, comme nous venons de le dire, une première approximation de ses dimensions transversales, évaluer son volume, puis son poids, l'ajouter au poids uniformément réparti, et recommencer les calculs pour obtenir une seconde approximation. Mais, en supposant la poutre simplement posée sur deux appuis, on s'est placé dans des conditions trop défavorables; car cette poutre étant engagée par ses extrémités dans les murs, il en résulte un encastrement, qui, bien qu'imparfait, ajoute à la résistance de la pièce. Ces deux causes d'erreur étant de sens contraire tendent à se compenser, et l'on s'en tient le plus souvent à la première approximation. Beaucoup de constructeurs, pour tenir compte du demi-encastrement dont nous parlons, remplacent, dans l'expression du moment fléchissant, le coefficient $\frac{1}{8}$ par le coefficient 0,1, qui

est intermédiaire entre $\frac{1}{8}$ répondant au cas d'une

pièce simplement posée sur des appuis, et $\frac{1}{12}$ répondant au cas où la pièce est encastree aux deux bouts. Dans ce cas il serait rationnel d'avoir égard au poids de la poutre. Mais la surcharge de 200 kilogrammes par mètre carré qu'on fait entrer dans le calcul est une garantie suffisante, attendu que cette surcharge est rarement réalisée, et que d'ailleurs le bois ou le fer peuvent accidentellement supporter sans inconvénient sérieux une tension ou une pression supérieures à la valeur de R ordinairement adoptée.

VI. Considérons en second lieu une poutre qui reçoit d'un côté seulement les bouts d'une série de solives uniformément espacées, et de l'autre les bouts de deux chevêtres. La poutre pourra être considérée comme chargée d'un poids uniformément réparti, qui, en appelant l la longueur des solives, et p le poids du plancher par mètre superficiel, sera $\frac{1}{2}pl$ par mètre courant de poutre, et soumise en outre à deux poids P et P' provenant de l'action des chevêtres, appliqués en des points déterminés de la poutre. Pour déterminer P et P' on évaluera le poids supporté par chacun des chevêtres; la moitié de ce poids sera la charge P ou P' transmise à la poutre. Si les forces P et P' sont égales, et appliquées toutes deux à une même distance δ du milieu de la poutre, le moment fléchissant sera maximum en ce milieu, à cause de la symétrie. La réaction du mur sera la moitié du poids total, que la poutre supporte, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} pla + 2P \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} pla + P,$$

et l'on aura

$$\mu = \left(\frac{1}{4} pla + P \right) \frac{a}{2} - \frac{1}{4} pla \cdot \frac{a}{4} - P\delta$$

ou

$$\mu = \frac{1}{16} pla^2 + P \left(\frac{a}{2} - \delta \right) :$$

Dans l'exemple déjà traité pour une poutre en bois, on trouverait, pour une poutre en fer

$$\frac{1}{v} = \frac{400.4.25}{8.6000000} = 0,0008333.$$

La poutre par laquelle $\frac{1}{v}$ se rapproche le plus de cette valeur serait la poutre de la Providence dont la hauteur est 0^m,3, la largeur des semelles 0^m,128,

c'est la valeur qui devra être mise pour μ dans la formule de la résistance

$$R = \frac{v\mu}{I}.$$

Le même calcul s'applique aux solives d'enchevêtreure. Les lambourdes, les chevêtres et les lingoires ne reçoivent que d'un seul côté les bouts des solives; comme celles-ci sont également espacées en général, il n'y a aucun inconvénient à regarder ces pièces comme chargées d'un poids uniformément réparti. Pour les solives cette hypothèse est sensiblement réalisée. Si a est la longueur d'une solive, b la distance de deux solives consécutives et p le poids du plancher par mètre carré, le poids porté par la solive sera $2 \cdot pa \cdot \frac{1}{2}b$, et le poids par mètre courant uniformément réparti sur cette pièce sera par conséquent pb ; on aura donc pour le maximum du moment fléchissant

$$\mu = \frac{1}{8} pb \cdot a^2.$$

Toutes les pièces qui entrent dans la charpente d'un plancher peuvent ainsi être considérées comme des prismes posés sur deux appuis, chargés d'un poids uniformément réparti, et de poids particuliers appliqués en des points déterminés de leur longueur; on pourra donc toujours déterminer le maximum du moment fléchissant par les méthodes exposées à l'article FLEXION PLANE (Résistance à la).

PLANCHETTE, instrument à LEVER LES PLANS par la méthode des INTERSECTIONS (Voy. ces mots). Il se compose d'une planchette PP (fig. 1 et 2) bien dressée et solidement encadrée, comme une planche à dessin, et qui a environ 60 centimètres de long sur 50 à 55 centimètres de large. Ses plus longs côtés sont munis de rouleaux r, r de même longueur, pouvant tourner dans des collets fixés à la planchette, et qui servent à tendre la feuille de papier sur laquelle on doit opérer. La planchette porte en dessous deux traverses longitudinales T, T le long desquelles peut glisser une planche carrée A, A qui tient au pied de l'appareil. On peut ainsi enlever la planchette en la faisant glisser parallèlement aux traverses, et la remettre à volonté. La pièce carrée A, A est liée au plateau M, M, par un système articulé qui porte le nom de *genou à la Cugnot*. Sur un disque D, D, fixé à la pièce A, A, sont montés deux supports dans lesquels peut tourner un cylindre en bois C. Un second cylindre C', pareil au premier, peut tourner de même dans des supports fixés au plateau M, M. Les deux cylindres ont leurs axes perpendiculaires et se pénètrent mutuellement jusqu'à moitié de leur diamètre: ils sont ainsi invariablement liés entre eux. On peut arrêter le mouvement de chacun d'eux dans ses collets, au moyen de deux écrous à oreilles v et v' . Si l'écrou v' est serré et que v ne le soit

pas, la planchette pourra prendre un mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre C, comme le montre la figure 2; si, au contraire, l'écrou v est serré et que v' ne le soit pas, la planchette ne

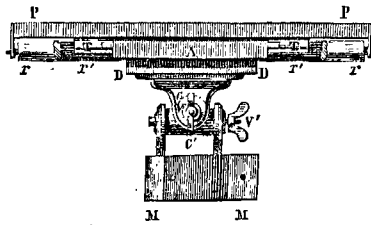
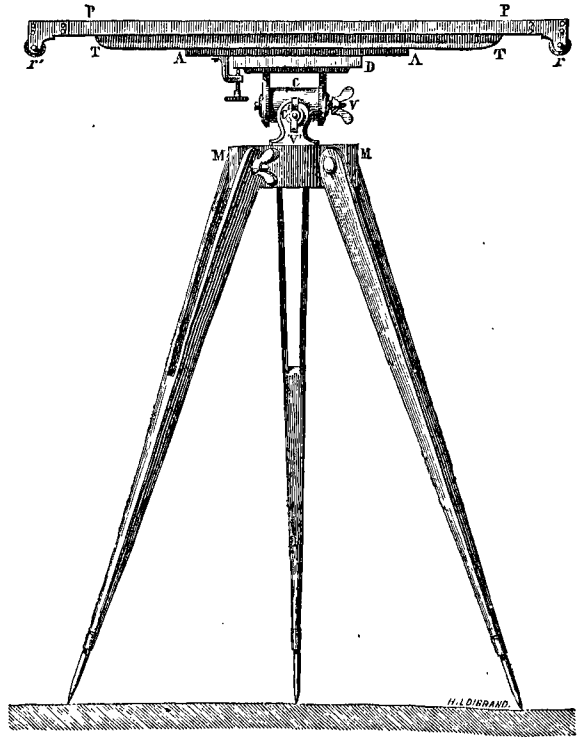


Fig. 2.

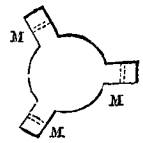


Fig. 3.

peut que tourner autour de l'axe du cylindre C', comme le montre la figure 1; à l'aide de ces deux mouvements, la planchette peut donc prendre toutes les inclinaisons possibles. Le plateau M, M, dont la forme est indiquée figure 3, est soutenu par trois pieds que l'on peut enfoncer solidement dans le sol, et dont on fixe la position par rapport au plateau en serrant les écrous qui les lient à ce plateau.

Dans quelques planchettes, les cylindres r, r sont supprimés, et le genou à la Cugnot est remplacé par le mode d'articulation que l'on appelle *genou à coquilles* (Voy. GRAPHOMETRE). Pour donner à la planchette la position horizontale, on se sert d'un NIVEAU à BULLE D'AIR (Voy. NIVEAU); et pour tracer sur la planchette des droites dans des directions déterminées, on fait usage d'une ALIDADE (Voy. ce mot).

Pour que la planchette soit bonne, il faut qu'elle soit parfaitement plane, et que le double mouvement autour des axes des cylindres C et C' puisse s'exécuter lentement et sans secousses.

Quant à l'emploi de la planchette dans le LEVER DES PLANS, voyez ce mot.

Dans les LEVERS EXPÉDIÉS (Voy. ce mot), et particulièrement dans les reconnaissances militaires, on emploie souvent une planchette, dite de *campagne*, formées d'une peau fixée sur un certain nombre de traverses parallèles en bois; quand on opère, on tend la peau au moyen de deux tringles, qui sont articulées avec la première traverse, et qui peuvent s'accrocher à la dernière; quand on a fini son travail, on décroche les tringles qui se replient sur la première traverse, et l'on roule la planchette de manière qu'elle occupe peu d'espace et devient très-portative. Pour s'en servir, on la pose sur un pied si l'on en a un; quelquefois, on la tient simplement sur la main; mais il est clair que dans ce cas il ne faut pas compter sur une grande précision.

PLANÉTAIRES, machines destinées à imiter les mouvements de la terre, de la lune et des planètes. Lorsque l'on n'a égard qu'aux vitesses moyennes, tous les mouvements dont il s'agit, peuvent être produits à l'aide de rouages ordinaires, plus ou moins compliqués, mais faciles à imaginer d'ailleurs. Mais si l'on veut avoir égard aux variations de la vitesse, c'est-à-dire à la loi des aires, le problème devient beaucoup plus difficile; et c'est pour le résoudre qu'ont été imaginées les **ROUES DE RÖMER** et l'**ENGRENAGE D'HUYGHENS** (Voy. ces mots). L'emploi des planétaires est aujourd'hui abandonné; et ces appareils n'ont plus d'intérêt qu'au point de l'histoire de la science mécanique.

PLANÈTES, corps célestes de forme sphéroïdale, qui circulent autour du soleil et qui sont éclairés par la lumière de cet astre. C'est par leur mouvement propre sur la sphère céleste que les planètes se distinguent des étoiles, avec lesquelles il est facile de les confondre au premier abord. On divise les planètes en planètes principales et en planètes télescopiques. Les planètes principales sont : *Mercur* ☿, *Vénus* ♀, *la Terre* ♂, *Mars* ♂, *Jupiter* ♃, *Saturne* ♄, *Uranus* ♅, *Neptune* ♆. Les cinq planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne étaient connues des anciens. Uranus a été découvert par W. Herschel en 1781. L'existence de Neptune a été démontrée par M. Le Verrier en 1846, et la planète a été vue pour la première fois par M. Galle à Berlin, quelques jours après, dans la région du ciel que l'astronome français avait indiquée.

Les planètes télescopiques sont toutes situées entre Mars et Jupiter; on a émis l'opinion qu'elles pourraient être les débris d'une planète principale. Le nombre de ces planètes télescopiques aujourd'hui connues est de 91.

Cérès (1) a été découverte par Piazzi, le 1^{er} janvier 1801; *Pallas* (2), par Olbers, le 28 mars 1802; *Junon* (3), par Harding, le 1^{er} septembre 1804; *Vesta* (4), par Olbers le 29 mars 1807; *As-*

trée (5), par Hencke, le 19 mai 1845. Toutes les autres ont été découvertes depuis 1847; savoir :

		Découverte par	
En 1847	<i>Hébé</i>	(6) Hencke	le 1 ^{er} juil.
—	<i>Iris</i>	(7) Hind	13 août.
—	<i>Flore</i>	(8) Hind	18 oct.
En 1848	<i>Métis</i>	(9) Graham	26 avril.
En 1849	<i>Hygie</i>	(10) de Gasparis	14 avril.
En 1850	<i>Parthénope</i>	(11) de Gasparis	11 mai.
—	<i>Victoria</i>	(12) Hind	13 sept.
—	<i>Égérie</i>	(13) de Gasparis	2 nov.
En 1851	<i>Irène</i>	(14) Hind	19 mai.
—	<i>Kunomia</i>	(15) de Gasparis	29 juil.
En 1852	<i>Psyché</i>	(16) de Gasparis	17 mars.
—	<i>Thétis</i>	(17) Luther	17 avril.
—	<i>Melpomène</i>	(18) Hind	24 juin.
—	<i>Fortuna</i>	(19) Hind	22 août.
—	<i>Massalia</i>	(20) de Gasparis	19 sept.
—	<i>Lutetia</i>	(21) Goldschmidt	15 nov.
—	<i>Calliope</i>	(22) Hind	16 nov.
—	<i>Thalie</i>	(23) Hind	15 déc.
En 1853	<i>Thémis</i>	(24) de Gasparis	6 avril.
—	<i>Phocée</i>	(25) Chacornac	5 avril.
—	<i>Proserpine</i>	(26) Luther	5 mai.
—	<i>Euterpe</i>	(27) Hind	8 nov.
En 1854	<i>Bellone</i>	(28) Luther	1 ^{er} mars.
—	<i>Amphitrite</i>	(29) Marth	1 ^{er} mars.
—	<i>Uranie</i>	(30) Hind	22 juil.
—	<i>Euphrosine</i>	(31) Fergusson	1 ^{er} sept.
—	<i>Pomone</i>	(32) Goldschmidt	26 oct.
—	<i>Polymnie</i>	(33) Chacornac	28 oct.
En 1855	<i>Circé</i>	(34) Chacornac	6 avril.
—	<i>Leucothée</i>	(35) Luther	19 avril.
—	<i>Atalante</i>	(36) Goldschmidt	5 oct.
—	<i>Fides</i>	(37) Luther	5 oct.
En 1856	<i>Leda</i>	(38) Chacornac	12 janv.
—	<i>Latina</i>	(39) Chacornac	8 févr.
—	<i>Harmonia</i>	(40) Goldschmidt	31 mars.
—	<i>Daphné</i>	(41) Goldschmidt	22 mai.
—	<i>Isis</i>	(42) Pogson	23 mai.
En 1857	<i>Ariane</i>	(43) Pogson	15 avril.
—	<i>Nysa</i>	(44) Goldschmidt	27 mai.

PLAN

PLAN

En 1857 <i>Eugenia</i>	(45) Goldschmidt	11 juil.
— <i>Hestia</i>	(46) Pogson	16 août.
— <i>Agladé</i>	(47) Luther	15 sept.
— <i>Doris</i>	(48) Goldschmidt	19 sept.
— <i>Palès</i>	(49) Goldschmidt	19 sept.
— <i>Virginia</i>	(50) Luther	19 oct.
En 1858 <i>Nemausa</i>	(51) Laurent	22 janv.
— <i>Europa</i>	(52) Goldschmidt	6 févr.
— <i>Calypso</i>	(53) Luther	4 avril.
— <i>Alexandra</i>	(54) Goldschmidt	10 sept.
— <i>Pandore</i>	(55) Searle	10 sept.
En 1859 <i>Melete</i>	(56) Goldschmidt	9 sept.
En 1860 <i>Mnémosyne</i>	(57) Luther	22 sept.
— <i>Concordia</i>	(58) Luther	10 avril.
— <i>Olympia</i>	(59) Chacornac	12 sept.
— <i>Danaé</i>	(60) Goldschmidt	19 sep.
— <i>Echo</i>	(61) Fergusson	15 sept.
— <i>Erato</i>	(62) Forster et Lesser	14 sept.
En 1861 <i>Ausonia</i>	(63) de Gasparis	10 févr.
— <i>Angelina</i>	(64) Tempel	4 mars.
— <i>Maximiliana</i>	(65) Tempel	8 mars.
— <i>Maïa</i>	(66) Tuttle	9 avril.
— <i>Asia</i>	(67) Pogson	17 avril.
— <i>Leto</i>	(68) Luther	29 avril.
— <i>Ilesperia</i>	(69) Schiaparelli	29 avril.
— <i>Panopea</i>	(70) Goldschmidt	5 mai.
— <i>Niobé</i>	(71) Luther	13 août.

En 1862 <i>Feronia</i>	(72) Peters et Saffort	12 févr.
— <i>Clytie</i>	(73) Tuttle	7 avril.
— <i>Galatée</i>	(74) Tempel	29 août.
En 1862 <i>Eurydice</i>	(75) C. H. F. Peters	22 sept.
— <i>Freia</i>	(76) Darrest	21 oct.
— <i>Frigga</i>	(77) C. H. F. Peters	15 nov.
En 1863 <i>Diana</i>	(78) Luther	15 mars.
— <i>Eurymone</i>	(79) Watson	14 sept.
En 1864 <i>Sapho</i>	(80) Pogson	2 mai.
— <i>Terpsichore</i>	(81) Tempel	7 oct.
En 1864 <i>Alcmène</i>	(82) Luther	27 nov.
En 1865 <i>Béatrix</i>	(83) de Gasparis	26 avril.
— <i>Clio</i>	(84) Luther	25 août.
— <i>Io</i>	(85) C. H. F. Peters	19 sept.
En 1866 <i>Sémélé</i>	(86) Tietgen	4 janv.
— <i>Sylvia</i>	(87) Pogson	16 mai.
— <i>Thisbé</i>	(88) C. H. F. Peters	20 juin.
— " "	(89) Stephan	6 août.
— <i>Antiope</i>	(90) Luther	1 ^{er} oct.
— " "	(91) Stéphan	4 nov.

On représente souvent les planètes principales, ou les planètes télescopiques, par les signes qui sont placés ci-dessus à côté de leur nom.

Mercury et Vénus, dont la distance au Soleil est moindre que celle de la terre, portent, pour cette raison, le nom de *planètes inférieures*; toutes les autres planètes sont dites au contraire *planètes supérieures*.

Le mouvement apparent des planètes sur la sphère est assez compliqué. La planète, d'abord animée d'un mouvement direct, c'est-à-dire dans le sens du

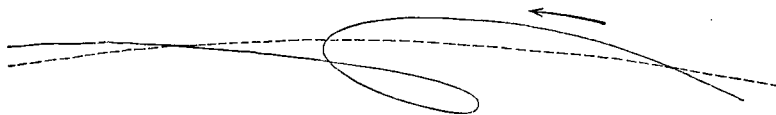


Fig. 1

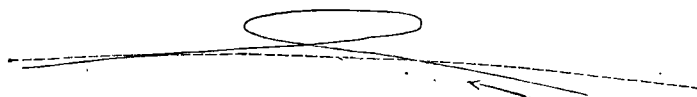


Fig. 2.

mouvement propre du Soleil, paraît, au bout d'un certain temps, se ralentir, s'arrêter même, revenir sur ses pas, puis s'arrêter de nouveau, pour reprendre un mouvement direct, en traçant dans le ciel une courbe à nœuds plus ou moins analogue à celles qu'indiquent les figures 1 et 2, dans lesquelles la ligne ponctuée représente l'écliptique.

Les positions de la planète où elle semble s'ar-

rêter se nomment les *stations*; et les parties de sa route où elle semble animée d'un mouvement rétrograde, se nomment les *rétrogradations*.

Pour expliquer ces apparences, considérons d'abord une planète inférieure; supposons qu'elle décrive d'un mouvement uniforme une orbite circulaire, dont le plan soit celui de l'écliptique, et dont le Soleil soit le centre; faisons la même hypo-

thèse pour la terre. Supposons de plus que nous imprimions au système une vitesse angulaire commune égale et contraire à celle de la terre; le mouvement relatif ne sera pas changé, et la terre se trouvera réduite au repos. Soit S (fig. 3) le Soleil, T la terre, $P_1P_2P_3P_4$ l'orbite de la planète, et $A_1A_2EA_3$

Soleil; nous ferons la même supposition pour la Terre. Nous imaginerons ensuite qu'on imprime à tout le système une vitesse angulaire commune égale et de signe contraire à celle de la planète; celle-ci se trouvera réduite au repos, et le mouvement relatif sera pas changé. Soit S (fig. 4) le Soleil,

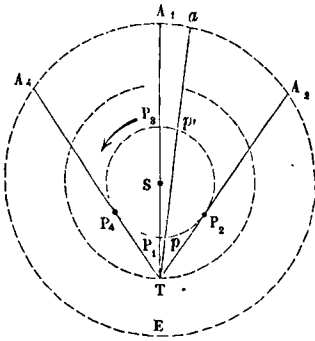


Fig. 3.

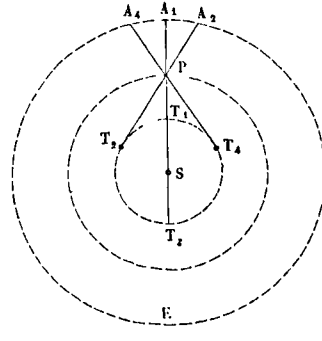


Fig. 4.

l'écliptique céleste. Menons du point T les droites TA_2 et TA_4 tangentes à l'orbite de la planète aux points P_2 et P_4 .

La planète se trouvant dans une position quelconque p ou p' , se projette en a sur l'écliptique. Si elle est en P_1 ou en P_3 , elle se projette en A_1 ; si elle est en P_2 ou en P_4 elle se projette en A_2 ou en A_4 . Cela posé, pendant que la planète parcourra l'arc P_1P_2 , elle semblera décrire l'arc A_1A_2 d'un mouvement rétrograde; tant qu'elle sera dans le voisinage de P_2 , elle semblera s'éloigner très-peu de A_2 et paraîtra stationnaire. Quand elle ira de P_2 en P_3 , elle paraîtra se mouvoir de A_2 en A_1 d'un mouvement direct; ce mouvement se continuera de A_1 jusqu'en A_4 quand la planète ira de P_3 en P_4 . Lorsqu'elle sera dans les environs de P_4 , elle semblera s'éloigner très-peu de A_4 et paraîtra stationnaire. Enfin quand elle ira de P_4 en P_1 , elle semblera se mouvoir de A_4 en A_1 d'un mouvement rétrograde. Et, à chaque révolution de la planète, les mêmes apparences se reproduiront dans le même ordre; en sorte que la planète paraîtra osciller entre les positions A_2 et A_4 . Si maintenant nous restituons au système la vitesse angulaire de la terre que nous lui avons enlevée, le mouvement relatif restera le même; mais il n'en sera pas ainsi du mouvement absolu: les périodes de mouvement direct se trouveront allongées, les périodes de mouvement rétrograde seront raccourcies, et les stations auront lieu à des intervalles plus rapprochés. Si nous remarquons enfin que le mouvement réel de la planète ne s'exécute pas dans l'écliptique, mais dans un plan qui fait un petit angle avec celui de ce cercle, nous verrons que les positions de la planète ne se projetant pas sur le cercle de l'écliptique, mais un peu au-dessus ou un peu au-dessous, il en résultera une courbe apparente analogue à celle de la figure 1.

On peut expliquer d'une manière semblable le mouvement apparent d'une planète supérieure. Nous supposerons encore que la planète décrive d'un mouvement uniforme un cercle dont le plan soit celui de l'écliptique et dont le centre soit le

Soleil, et A_2A_4E l'écliptique céleste. Menons du point P les droites PA_2 , PA_4 tangentes à l'orbite terrestre aux points T_2 et T_4 . Lorsque la terre prendra les positions T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , la planète se projettera sur l'écliptique aux points A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . Par conséquent, tandis que la Terre parcourra l'arc T_1T_2 , la planète semblera se mouvoir de A_1 en A_2 d'un mouvement rétrograde. Quand la Terre sera dans le voisinage de T_2 , la planète s'écartera extrêmement peu de la position A_2 et elle paraîtra stationnaire. Quand la Terre se transportera de T_2 en T_3 , la planète ira de A_2 en A_1 d'un mouvement direct. Ce mouvement se continuera de A_1 en A_4 pendant que la Terre se transportera de T_3 en T_4 . Quand elle sera dans les environs de T_4 , la planète paraîtra s'éloigner très-peu de A_4 , et elle semblera stationnaire. Quand la Terre ira de T_4 en T_1 , la planète paraîtra se mouvoir de A_4 en A_1 d'un mouvement rétrograde. Et à chaque révolution les mêmes apparences se reproduiront dans le même ordre. Si maintenant on rend au système la vitesse angulaire commune qu'on lui avait ôtée, le mouvement relatif restera le même; mais il suffit d'imaginer que tout le système tourne d'un mouvement direct commun autour du point S, pour voir que les périodes de mouvement apparent direct seront allongées, que les périodes de mouvement apparent rétrograde seront raccourcies, et que les stations auront lieu à des intervalles plus rapprochés. Comme d'ailleurs la planète ne se meut point dans l'écliptique même, mais dans un plan qui fait un petit angle avec celui de ce cercle, elle se projette un peu au-dessus ou au-dessous de l'écliptique, et paraît décrire sur la sphère céleste une courbe analogue à celles des figures 1 ou 2.

Les planètes inférieures se distinguent des planètes supérieures par cette circonstance que si l'on observe leur distance au Soleil, on trouve qu'elle reste comprise entre des limites assez resserrées. La planète s'écarte du Soleil vers l'orient jusqu'à une certaine distance, s'en rapproche ensuite, passe à l'occident du Soleil, s'en écarte jusqu'à une cer-

taine distance, pour s'en rapprocher encore, et ainsi de suite; en sorte qu'elle paraît osciller de part et d'autre du Soleil. La distance angulaire d'une planète inférieure au Soleil est ce qu'on nomme son *élongation*; et le maximum de cette élongation est ce qu'on appelle la *digression*. Pour Mercure la digression varie de $16^{\circ} \frac{1}{4}$ à $28^{\circ} \frac{3}{4}$. Pour Vénus elle ne varie qu'entre 45° et $47^{\circ} \frac{3}{4}$.

Il en est tout autrement pour les planètes supérieures; elles s'éloignent indéfiniment du Soleil, et se trouvent en opposition avec cet astre à chacune de leurs révolutions.

Les mouvements des planètes, qui paraissent si compliqués quand on les rapporte à la Terre, deviennent au contraire extrêmement simples quand on les rapporte au Soleil (*Voy. HÉLIOCENTRIQUE*). A Képler était réservée la gloire de découvrir les lois simples qui régissent les mouvements de ces astres (*Voy. LOIS DE KÉPLER*). Mais avant lui déjà les astronomes avaient songé à rapporter les planètes au Soleil, et ils avaient déterminé les rapports de leurs distances à cet astre. Voici comment opérait Copernic. Il observait la planète au moment de l'opposition. Quelque temps après, il mesurait l'angle formé par les rayons vecteurs menés de la Terre à la planète et au Soleil; les arcs décrits par la Terre et par la planète dans l'intervalle des deux observations pouvaient d'ailleurs se déduire de leurs vitesses connues à l'instant de la première observation et du temps écoulé depuis. Il avait ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer le rapport des distances de la planète et de la Terre au Soleil. Soit en effet S le Soleil (fig. 5), T et T' les

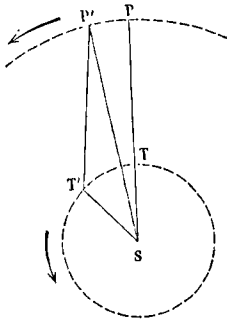


Fig. 5.

deux positions de la Terre, P et P' celles de la planète; joignons P'S. Dans le triangle P'T'S on connaît l'angle en T', qui a été mesuré; l'angle P'ST' est la différence entre l'angle TST' décrit par le rayon ST et l'angle PSP' décrit par le rayon PS; or ces deux angles ne sont autre chose que les produits de la vitesse angulaire de la Terre ou de la planète par le temps écoulé entre les deux observations. On connaît donc deux angles dans le triangle P'T'S, on peut par conséquent déterminer le rapport des côtés P'S et T'S qu'il s'agissait d'obtenir.

On pourrait en remplaçant l'instant de l'opposition par celui de la conjonction inférieure appliquer

le même procédé à une planète inférieure. Mais il est plus simple d'observer la digression. Au moment où la planète paraît s'arrêter avant de changer le sens de son mouvement, le rayon visuel mené de la Terre est tangent à l'orbite, comme l'indique la fig. 6; dans le triangle STV, rectangle en V, on a donc

$$\frac{SV}{ST} = \sin. STV.$$

Connaissant l'angle en T, on a ainsi immédiate-

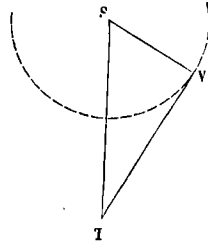


Fig. 6.

ment le rapport de la distance SV cherchée à la distance connue ST de la Terre au Soleil.

Le mouvement des planètes est complètement déterminé par les lois de Képler au moyen de sept données, ou ÉLÉMENTS (*Voy. ce mot*) qui font connaître la forme et la position de l'orbite, ainsi que la durée de la révolution. L'observation du diamètre apparent des planètes à des distances connues a permis de déterminer leur diamètre réel, et par suite leur surface et leur volume. Des considérations tirées de la GRAVITATION UNIVERSELLE (*Voy. ce mot*) ont fourni le moyen de déterminer leur masse et par suite leur densité. Voici les résultats obtenus pour les planètes principales :

Noms.	Diamètre.	Volume.	Masse.	Densité.
Mercure.....	0,378	0,054	0,081	1,501
Vénus.....	0,954	0,868	0,859	0,987
La Terre.....	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars.....	0,540	0,157	0,119	0,779
Jupiter.....	11,160	1389,996	337,171	0,257
Saturne.....	9,527	864,694	100,806	0,132
Uranus.....	4,221	75,253	17,208	0,238
Neptune.....	4,407	85,605	20,231	0,236

Quelques planètes offrent des PHASES (*Voy. ce mot*). Plusieurs sont accompagnées de SATELLITES (*Voy. ce mot*). Pour les autres détails, voyez les articles particuliers consacrés à chaque planète principale.

PLANIMÈTRES, instruments qui servent à mesurer l'aire des figures planes. On en a imaginé de plusieurs espèces; mais les deux seuls appareils de ce genre qui soient aujourd'hui en usage, sont le *planimètre de Ernst*, et le *planimètre de M. Beauvière*.

I. Le premier de ces instruments a été inventé en 1827, par M. Oppikofer, ingénieur suisse; mais il a été perfectionné en 1837, par M. Ernst, constructeur d'instruments de précision à Paris. — L'appareil est représenté en élévation sur la figure 1 et en plan sur la figure 2. Sa partie principale est un tronc de cône AA en bois ou en métal de cloche, dont l'axe est incliné de telle sorte que l'arête supérieure soit horizontale. Cet axe est

monté en pointes sur des supports fixés à une platine BBBB, qui peut recevoir un mouvement de translation dans le sens XX' (fig. 2); pour cela elle est guidée, du côté gauche, par des galets roulant sur un rail longitudinal, qu'on aperçoit en *r* sur la figure 1, et du côté droit par des roulettes sans rebord, roulant sur une bande métallique noyée dans le bois du plateau qui supporte tout l'appareil. La platine BBBB porte avec elle une coulisse CC, à la-

dont l'axe s'appuie sur des supports liés à la directrice CC, en sorte que lorsqu'on fait glisser la directrice dans le sens de sa longueur, la roulette GG s'approche ou s'éloigne du sommet du cône. La vitesse à sa circonférence étant la même qu'au point de la surface du cône où a lieu le contact, il en résulte que, lorsque la platine se déplace dans le sens XX', le nombre de tours que fait la roulette GG est proportionnel à la fois au chemin décrit par la platine, ou par la pointe D, et à la distance de la roulette au sommet du cône; par conséquent, ce nombre de tours est en définitive proportionnel au produit de ces deux quantités.

Concevons un rectangle MNOP, dont un côté NO soit parallèle à XX'; si l'on amène la pointe D en N, et qu'on lui fasse parcourir le côté NO, en faisant mouvoir la platine, le nombre N de tours faits par la roulette GG sera proportionnel à ce côté, que nous nommerons *b*, et à la distance Z de la poulie au sommet du cône; en appelant donc *k* le coefficient de proportionnalité, on aura

$$N = kbZ.$$

Concevons maintenant qu'on fasse glisser la directrice de manière à faire parcourir à la pointe D le côté OP; dans ce mouvement la roulette GG demeurera immobile, puisque le cône ne tournera pas; et cette roulette viendra se placer à une distance *z* du sommet du cône. Concevons enfin qu'en faisant mouvoir la platine en sens contraire de son premier mouvement, on ramène la pointe D de P en M; le nombre *n* de tours faits par la roulette GG sera exprimé par

$$n = kbz.$$

Mais ce second mouvement de la roulette étant de sens contraire au premier, le nombre de tours réellement effectué, sera $N - n$ ou

$$kb(Z - z).$$

Or $Z - z$, c'est le chemin parcouru par la roulette le long de la génératrice horizontale du cône, chemin qui est égal à la hauteur OP ou *h* du rectangle. L'expression du nombre de

tours effectué par la roulette GG sera donc en définitive

$$kbh,$$

c'est-à-dire, qu'il sera proportionnel à l'aire *bh* du rectangle.

L'appareil est complété par un compteur, établi sur les mêmes supports que l'axe de la roulette, et lié par conséquent à la directrice CC. Sur l'axe de la roulette GG est montée une roue de champ *a* engrenant avec un pignon à axe vertical *b* qui fait marcher une aiguille *c* sur un cadran horizontal. Le prolongement de l'axe de la roulette forme en outre un pignon *d* engrenant avec une roue dentée *e* qui fait tourner une aiguille *f* sur un cadran vertical. Mais, au lieu de donner le nombre de tours faits par la roulette, les aiguilles donnent en millimètres carrés la moitié de la surface du rectangle

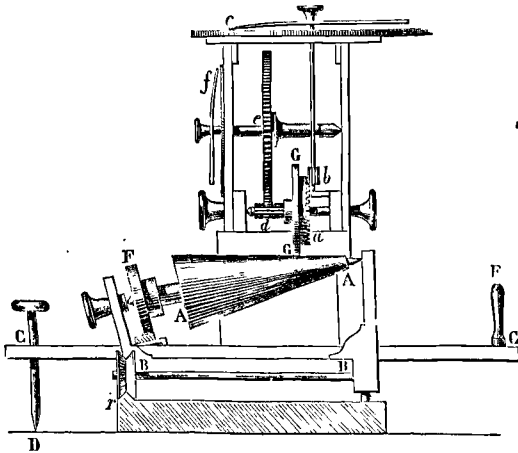


Fig. 1.

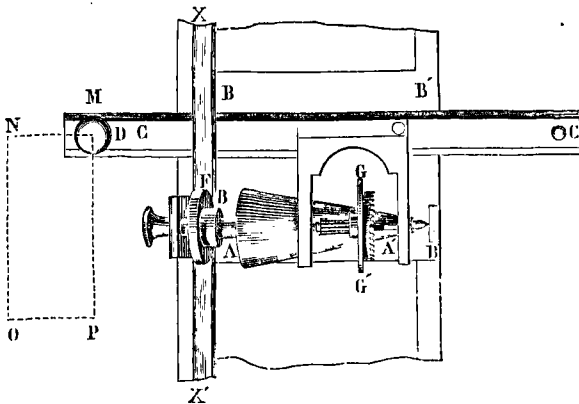


Fig. 2.

quelle on donne le nom de *directrice*, et qui est munie, à son extrémité gauche, d'une pointe D, et à son extrémité droite d'une poignée E. Il résulte d'abord de cette disposition, qu'en faisant mouvoir la platine dans le sens XX', et en faisant glisser la directrice dans le sens de sa longueur, on peut toujours amener la pointe D à une position donnée quelconque dans le plan du plateau. — L'axe du tronc de cône porte une roulette F, qui repose sur une bande métallique établie au-dessus de la platine dans toute la longueur de l'appareil. Quand on fait mouvoir la platine dans le sens XX', la roulette F roule sur cette bande métallique, et le tronc de cône prend un mouvement de rotation proportionnel au déplacement de la platine. — Sur le tronc de cône, et perpendiculairement à la génératrice horizontale, repose une autre roulette GG,

(on verra tout à l'heure pourquoi la moitié). L'aiguille du cadran horizontal fait connaître les unités, dizaines et centaines, l'aiguille du cadran vertical donne les mille et les dizaines de mille.

Tout le compteur peut basculer autour d'un axe horizontal; en sorte qu'on peut à volonté soustraire la roulette au contact du cône, ou rétablir le contact. Pour mesurer avec cet instrument l'aire d'un rectangle MNOP, on soulève le compteur, on fait mouvoir la platine, de manière à amener la pointe D dans la direction MN, puis on fait glisser la directrice pour amener cette pointe au point N. On remet la roulette au contact; et les aiguilles des deux cadrans au zéro; on fait mouvoir la platine pour faire décrire à la pointe D le côté NO; on fait glisser la directrice pour faire décrire à cette pointe le côté OP; puis on ramène la platine en sens contraire de manière que la pointe D parcoure le côté PM. On lit alors les indications des deux aiguilles; elles donnent en millimètres carrés la moitié de la surface du rectangle; et il n'y a plus qu'à la doubler.

Si l'on a à mesurer l'aire comprise entre une courbe donnée, un axe rectiligne et deux ordonnées extrêmes, on divise la courbe en un certain nombre de parties, égales ou inégales, mais assez petites pour que les arcs compris entre deux points de division consécutifs puissent être confondus avec leurs cordes. Par tous les points de division on mène des ordonnées perpendiculaires à l'axe, et des parallèles à cet axe d'une ordonnée à l'autre; on forme ainsi deux séries de rectangles, les uns intérieurs, les autres extérieurs, entre lesquelles se trouve comprise l'aire demandée. On mesure à l'aide du planimètre tous ces rectangles; les indications des aiguilles s'ajoutent, et l'indication finale exprime en millimètres carrés l'aire de la courbe. On voit pourquoi les dimensions du compteur sont réglées de manière à donner la moitié de l'aire de chaque rectangle; c'est que, dans l'évaluation d'une aire curviligne, qui est de beaucoup plus fréquente, on n'a pas besoin de diviser par 2 le résultat; il faudrait, en effet, prendre la demi-somme des deux séries de rectangles; mais puisque le compteur ne donne que la moitié de chacun d'eux, le résultat final est l'aire cherchée elle-même.

Le planimètre de Ernst porte aussi le nom de *planimètre à cône*.

II. Le *planimètre sommateur* de M. Beuvière, géomètre en chef du cadastre, est fondé sur un principe tout différent. Sa partie principale consiste en une glace rectangulaire AA (fig. 3) d'environ 1 décimètre de large sur 2 de longueur, divisée en bandes égales parallèles à son petit côté, et d'un centimètre de hauteur, par exemple; elle est en outre divisée par une ligne médiane ff, dans le sens de sa longueur; cette médiane est la *ligne de foi* de l'instrument. Soit MNOP une figure dont on veut évaluer l'aire. Concevons-la décomposée en bandes parallèles par les prolongements des lignes de division de la glace; et soit mnop l'une de ces bandes. On peut la considérer comme un trapèze, à cause du peu d'étendue des arcs mn et op qui peuvent être confondus avec leurs cordes; en sorte que l'aire de cette bande est égale à sa hauteur 0^m,01, multipliée par la distance entre les milieux

i et k des côtés non parallèles. Voici comment cette distance se mesure. La glace est liée à un curseur qui peut glisser le long d'une règle LL perpendiculairement à la ligne de foi ff. A ce curseur est adaptée une roue horizontale mobile autour d'un axe vertical, et qui roule sur une règle verticale HH. La circonférence de la roue est divisée en millimètres. Lorsqu'on fait glisser le curseur le long de LL, la roue roule sur la règle HH,

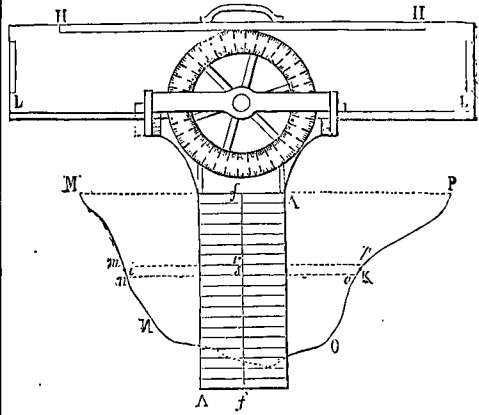


Fig. 3.

d'une quantité précisément égale au déplacement du curseur, et cette quantité est mesurée par le nombre de divisions de la circonférence qui passent devant un index fixé au support de la roue. La règle HH est mobile autour d'une charnière et peut être rabattue en arrière quand on veut qu'elle cesse d'être en contact avec la roue. Supposons donc qu'on ait effectué ce mouvement et amené la ligne ff à passer par le point i en faisant glisser le curseur; puis, qu'après avoir ramené la règle HH à sa position verticale, on fasse de nouveau glisser le curseur jusqu'à ce que la ligne de foi vienne passer par le point k, le nombre de divisions dont la roue aura tourné en roulant sur HH exprimera en millimètres la distance des points i et k. Si, par exemple, le nombre de ces divisions a été de 237, on en conclura que la distance ik est 0^m,237; et par conséquent, que l'aire du trapèze mnop est 0^m,237 × 0^m,01 ou 0^m,002370, c'est-à-dire, 2370 millimètres carrés.

Il n'est pas nécessaire pour effectuer cette opération de marquer à l'avance les points i et k, ni même les points m, n, o, p. Il suffit de considérer la portion rs de la ligne de foi, et d'amener la glace dans une position telle que rs paraisse, à vue, divisé en deux parties égales par la courbe, ce qu'on obtient aisément avec un peu d'habitude.

On mesure de la même manière toutes les bandes parallèles dont se compose l'aire demandée, et l'on obtient cette aire en faisant la somme, ce qui revient à faire la somme des longueurs mesurées en faisant mouvoir la glace, et à multiplier cette somme par la largeur constante d'une des bandes. Or si, chaque fois qu'après avoir mesuré une des longueurs analogues à ik on ramène la glace en sens contraire pour procéder à une nouvelle mesure, on a soin d'abattre la règle HH afin que la roue nè

tourne pas dans ce mouvement rétrograde, les indications de la roue s'ajouteront; et c'est le nombre fourni par la rotation totale de la roue qui devra être multiplié par la largeur d'une bande. Il suffira donc de compter les tours, et d'apprécier la fraction de tour excédante pour obtenir les éléments du calcul très-simple qu'on a à faire.

Le planimètre de M. Beuvière est d'un manie- ment plus commode et d'une construction plus simple que le planimètre de Ernst; ses indications sont aussi plus sûres, parce que, dans le planimètre de Ernst, la roulette est exposée à glisser sans tourner, c'est-à-dire que la rotation du cône ne se transmet pas toujours exactement à la roulette qui est en contact avec sa surface. Aussi le planimètre de M. Beuvière est-il généralement préféré aujourd'hui, et employé non-seulement dans le cadastre, mais dans les eaux et forêts, dans les contributions directes, et dans diverses autres administrations.

PLANISPHÈRE, projection de la sphère céleste ou du globe terrestre sur un plan. Ce n'est autre chose qu'une MAPPE-MONDE (Voy. ce mot, et CARTES GÉOGRAPHIQUES).

PLAQUES FUSIBLES, lames ou rondelles formées d'un alliage de bismuth, de plomb et d'étain en proportions variables, de manière à fondre à une température déterminée. Ces plaques servaient à fermer des orifices pratiqués dans la paroi des chaudières à vapeur, et livraient passage à la vapeur lorsque la température était assez élevée pour amener leur fusion. Ces plaques étaient donc destinées à servir de soupape de sûreté et à empêcher la pression de la vapeur de dépasser une limite déterminée. Chaque plaque était maintenue par un grillage en fonte. On a complètement renoncé à ce genre de soupapes; et les nouvelles ordonnances ne font plus mention des plaques fusibles. On a reconnu, en effet, qu'à la longue les alliages fusibles à une certaine température se transforment en d'autres alliages fusibles à une température différente; en sorte que ces plaques n'offrent aucune garantie. Elles prennent d'ailleurs trop lentement la température de la vapeur; et, lorsqu'il s'agit de pressions élevées, une légère différence de température peut en produire une très-grande dans la pression.

PLAQUES TOURNANTES, appareils qui servent, dans les gares de chemins de fer, à transporter les wagons ou les locomotives d'une voie sur une autre. Supposons d'abord qu'il s'agisse de transporter une voiture de la voie AA (fig. 1) sur la voie perpendiculaire BB. La plaque tournante est établie à l'intersection des deux voies. C'est un disque horizontal, dont le diamètre varie suivant la dimension des voitures auxquelles il doit offrir un moyen de transport. On l'exécute en fonte ou en bois; il est mobile autour d'un axe vertical projeté en O. Les rails de deux voies y sont prolongés jusqu'à leur rencontre où ils présentent la disposition usitée dans les croisements de voie (Voy. CHEMINS DE FER), c'est-à-dire qu'ils sont interrompus aux points d'intersection pour laisser passer le rebord des roues. Ce disque est guidé dans son mouvement de rotation par des galets roulant d'une part sur un rail circulaire établi au fond d'une fosse de 0^m,8C de profondeur. d'autre

part sur un second rail semblable établi sous le disque tournant lui-même. On trouvera la description plus complète de cette disposition à l'article GUIDES DU MOUVEMENT. La plaque représentée fig. 1

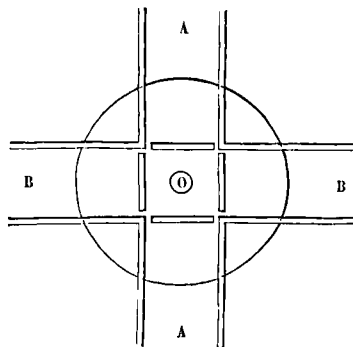


Fig. 1.

est ce qu'on appelle une *plaque tournante rectangulaire*. Si l'on conçoit qu'un wagon, placé sur la voie AA, soit amené sur la plaque tournante, puis, qu'on fasse faire au système un quart de tour, les rails de la plaque qui correspondaient à ceux de la voie AA viendront se placer dans le prolongement de ceux de la voie BB, et le wagon pourra être poussé sur cette seconde voie.

S'il s'agit de faire passer un wagon d'une voie A sur une voie parallèle B, on coupe ces deux voies par une voie transversale C rectangulaire, et l'on place une plaque tournante à l'intersection de cette voie transversale avec chacune des deux voies primitives. Un wagon étant placé sur la première voie A, on l'amène sur la plaque tournante placée à la rencontre de cette voie A avec la voie transversale C; on lui fait faire un quart de tour et on le pousse sur cette voie transversale C, jusqu'à ce qu'il se trouve sur la plaque tournante placée à l'intersection de celle-ci avec la seconde voie B; on lui fait faire un nouveau quart de tour, et on la pousse sur la voie B. Dans les gares importantes, il y a presque toujours plusieurs voies parallèles coupées ainsi par des voies transversales auxiliaires, et des plaques tournantes aux intersections de ces diverses voies.

Au lieu de deux portions de voies perpendiculaires, la plaque en présente quelquefois trois, faisant entre elles des angles de 60 degrés; c'est ce qu'on appelle une *plaque tournante hexagonale* (fig. 2). La figure montre comment les rails sont interrompus, pour laisser passer les rebords des roues. Une pareille plaque sert à faire passer les wagons d'une voie AA sur une autre BB faisant avec la première un angle de 60°. La manœuvre est la même que dans le cas d'une plaque rectangulaire, si ce n'est qu'il faut faire tourner la plaque de 60° ou de 120° suivant le sens qu'on veut faire suivre au wagon.

Une plaque hexagonale sert à faire passer une voiture d'une voie A sur une voie parallèle B. Pour cela il faut supposer les deux voies coupées par une voie auxiliaire C faisant un angle de 60° avec chacune des deux premières. On amène un wagon

de la voie A sur la voie transversale, puis de celle-ci sur la voie C, au moyen de deux plaques tournantes hexagonales établies aux points de croisement. Pour cela il faut faire tourner les plaques de

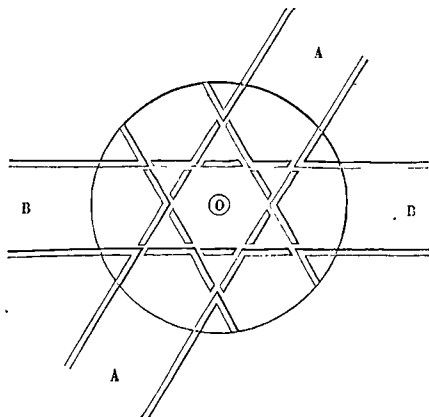


Fig. 2.

60° ou de 120° suivant le sens qu'on veut faire prendre à la voiture.

On emploie les plaques hexagonales lorsque les voies parallèles sont trop rapprochées pour permettre l'emploi de plaques rectangulaires. On conçoit en effet que, dans le cas des plaques hexagonales, l'obliquité de la voie transversale permet de placer les centres de ces plaques à une distance suffisante pour que leurs circonférences ne se coupent pas, tandis que cela pourrait être impossible si la voie transversale devait être perpendiculaire aux voies principales.

Le diamètre minimum des plaques tournantes est aujourd'hui de 4^m,80; ce sont les plaques destinées au transport des wagons. Celles qui sont destinées au transport des locomotives avec leurs tenders ont jusqu'à 12 mètres de diamètre et plus. Les premières coûtent 4000^f environ; mais le prix des dernières s'élève jusqu'à près de 30 000^f. C'est pourquoi, sur beaucoup de lignes, on commence à remplacer les plaques tournantes par des CHARIOTS DE SERVICE (Voy. ce mot). — Voyez pour les dispositions diverses données au mécanisme qui assure le mouvement de rotation de la plaque, les ouvrages spéciaux et en particulier le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet.

PLAT-BORD, pièce continue qui termine à la partie supérieure la paroi d'un navire, et qui déborde un peu en dedans et en dehors (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

PLATE-BANDE, sorte de moulure droite (Voy. MOULURES).

PLATE-BANDE, partie supérieure d'une porte ou d'une fenêtre de forme rectangulaire; sa face inférieure est un plan horizontal. La plate-bande repose sur deux murs verticaux qui portent le nom de *piédroits* ou *jambages*; les pierres qui occupent la partie supérieure des jambages, et qui supportent les extrémités de la plate-bande, se nomment les *sommiers*. Une plate-bande peut être faite d'une seule pierre; cela a quelquefois lieu pour les portes; mais il faut alors des dispositions spéciales pour empêcher qu'elle ne supporte le poids de la

maçonnerie qui est au-dessus, et qui pourrait en occasionner la rupture. Le plus souvent une plate-bande est formée de plusieurs pierres; celle du milieu se nomme la *clef*; les autres prennent le

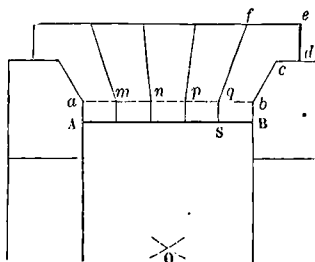


Fig. 1.

nom de *claveaux*. Voici l'appareil le plus usité. Soit AB (fig. 1) l'arête inférieure de la plate-bande. On lui mène une parallèle *ab* à une petite distance au-dessus, au quart environ de l'épaisseur de la plate-bande. On divise cette droite *ab* en un nombre impair de parties égales, et l'on joint tous les points de division à un point O, sommet d'un triangle équilatéral dont *ab* serait la base; les lignes de jonction sont les *coupes* ou joints qui doivent séparer les claveaux; on complète ces joints par des perpendiculaires à AB. Le but de cette disposition est d'éviter les angles aigus. Pour empêcher le dernier claveau de glisser sur le sommier, on brise le joint horizontalement, comme on le voit en *Bbcd*; ce joint porte alors le nom de *crossette*, et l'on dit que le claveau est *taillé en crossette*. La taille des pierres qui composent la plate-bande ne présente aucune difficulté. Pour tailler le dernier claveau, par exemple, on prend une pierre qui ait l'épaisseur qu'on veut donner à la plate-bande dans le sens perpendiculaire à la figure; et sur les deux faces opposées, dressées préalablement, on trace le panneau *Bbcdfqfs*; puis on réunit les arêtes qui se correspondent par des plans, qui seront perpendiculaires à ces premières faces. On augmente quelquefois l'adhérence des claveaux en donnant à chacun, excepté à la *clef*, une petite *crossette* par laquelle il s'accroche sur le claveau suivant; mais comme l'ensemble des coupes ainsi brisées serait d'un effet désagréable à l'œil, on ne pratique la brisure que dans une partie de l'épaisseur de la plate-bande, et les coupes se présentent à l'extérieur comme dans la figure 1. — On pratique tout autour d'une porte ou d'une fenêtre un petit renforcement rectangulaire, appelé *feuillure*, qui est destiné à l'égler la menuiserie; mais on taille d'abord les pierres sans y avoir égard; on creuse ensuite la feuillure au moyen de deux coupes à angle droit.

Lorsque la plate-bande doit offrir une grande solidité, on lui donne plus de hauteur, et l'on taille en *crossette* les claveaux latéraux, comme le montre la figure 2. On remarquera dans cette figure que c'est l'arc décrit du point O comme centre avec OA pour rayon qui a été divisé en parties égales; les joints se dirigent vers le point O à partir de cet arc, et sont complétés vers le bas par des perpendiculaires à AB.

Nous avons supposé jusqu'ici la porte ou la fe-

nêtre pratiquées dans un mur plan. Il peut arriver qu'on ait à faire l'appareil d'une plate-bande dans un mur circulaire. Soient MN et PQ (fig. 3) les traces horizontales des cylindres intérieur et exté-

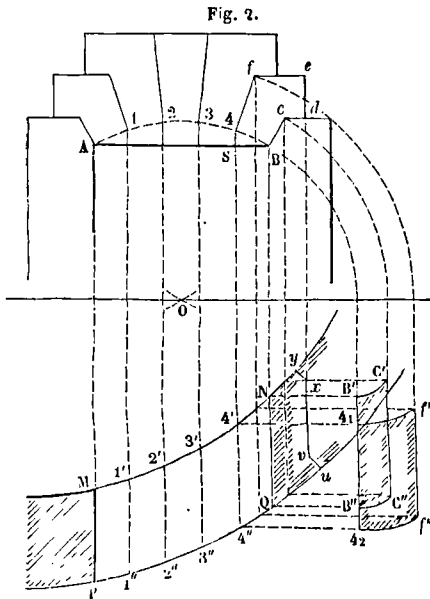


Fig. 3.

rieur qui limitent le mur; MP et NQ les traces des plans verticaux des piédroits. La figure est tracée dans le cas le plus général où l'ouverture à laquelle répond la plate-bande est pratiquée en biais dans le mur circulaire; le tracé serait le même, dans le cas où l'ouverture serait droite; seulement il offrirait plus de symétrie. Dans tous les cas la projection verticale de la plate-bande sur un plan perpendiculaire aux piédroits est la même que s'il s'agissait d'un mur plan; nous supposons qu'on ait adopté l'appareil de la figure 2. Les parties des plans de joints qui sont représentées par des lignes verticales, telle que 4S ou *ed*, couperont les deux cylindres suivant des droites verticales; les parties qui sont représentées par des droites horizontales, telles que SB, *cd* ou *fe*, couperont les deux cylindres suivant des arcs de cercle de mêmes rayons que les arcs MN et PQ; enfin les parties représentées par des droites inclinées, telles que Bc ou 4f, couperont les cylindres suivant des arcs d'ellipses. Pour être en état de tailler les pierres de l'appareil, il faut avoir le rabattement des panneaux de joints tels que Bc et 4f, et le développement des panneaux du tête cylindriques, tel que Bcdef4S. Pour se procurer les premiers, on les fait tourner autour d'une perpendiculaire au plan de la figure 2 menée par le point O, jusqu'à ce qu'ils viennent se placer parallèlement au plan horizontal, et s'y projettent par conséquent en vraie grandeur. L'arête projetée verticalement en B, par exemple, vient ainsi se projeter horizontalement en B'B'' (fig. 3); le point B' est sur une parallèle à la ligne de terre menée par N, et le point B'' sur une autre parallèle menée par Q. Pour avoir le rabattement

de l'arête projetée verticalement en c, on décrit un arc de cercle du point O comme centre, avec Oc pour rayon, jusqu'à la rencontre de la parallèle à la ligne de terre menée par le point O; puis, par le point de rencontre, une perpendiculaire à la ligne de terre, sur laquelle devront se trouver les points c' et c''. Du point c on abaissera sur la ligne de terre une autre perpendiculaire, et par les points où elle rencontre les arcs MN et PQ prolongés, on tracera des parallèles à XY, qui donneront les points c' et c''. En opérant de même pour un point intermédiaire entre B et c, on obtiendra un troisième point des arcs d'ellipses B'c' et B''c'', et on pourra les tracer; on aura ainsi en B'B''c'c' le rabattement du panneau de joint Bc. On se procurera de la même manière en 4₁4₂f''f' le rabattement du panneau de joint 4f. La construction sera la même pour tous les autres panneaux de joints obliques.

Pour avoir le développement des panneaux de tête, des panneaux intérieurs par exemple, on projettera tous les sommets de la figure 1 sur l'arc MN; et l'on développera cet arc en ligne droite (fig. 4); puis par tous les points de division de

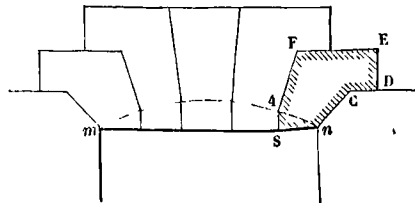


Fig. 4.

mn, développement de MN, on élèvera des verticales respectivement égales aux distances des points de la figure 1 à la droite AB; et l'on joindra les points ainsi obtenus, ce qui donnera le tracé représenté figure 4. On opérera de même pour le développement des panneaux extérieurs, en se servant de l'arc PQ. On aura ainsi tout ce qui est nécessaire pour la taille des claveaux. Seulement il faut savoir que, pour éviter les angles aigus, on brise les joints verticaux, tels que *ed*, de manière à les ramener, vers leurs extrémités, dans une direction normale aux surfaces cylindriques, comme l'indique en projection horizontale la ligne *wvxy* (fig. 3). Pour tailler le claveau extrême Bcdef4S (fig. 2) par exemple, on prendra une pierre ayant la hauteur comprise entre *fe* et BS, et sur ses faces opposées, on tracera le panneau 4'4''*wvxy* donné par la projection horizontale (fig. 3); puis on fera sauter l'excédant de pierre, en s'aidant d'une règle appliquée sur les points correspondants des deux panneaux. On obtiendra ainsi les surfaces cylindriques ayant pour traces 4'y et 4''u. Sur ces surfaces cylindriques on appliquera le panneau nCDEF4S de la figure 4, qui correspond au cylindre intérieur, et le panneau analogue qui correspond au cylindre extérieur, et l'on fera sauter l'excédant de pierre, en se guidant sur les panneaux B'B''c'c' et 4₁4₂f''f' de la figure 3, qui devront coïncider exactement avec les joints Bc et 4f.

Le mur circulaire dans lequel est pratiquée la plate-bande pourrait être en talus; le cylindre extérieur serait alors remplacé par une surface co-

nique; et les points B, c, d, e, f, 4, S, au lieu de se projeter horizontalement sur une même circonférence se projetteraient sur des circonférences différentes, mais concentriques, qu'on obtiendrait à l'aide du rabattement, sur le plan vertical, d'une des génératrices du cône. Cette disposition est peu usitée; on trouvera le détail de l'épure, dans le *Traité de la coupe des pierres* de J. Adhémar, pl. 31, fig. 256 et 257.

PLEIN CINTRE, nom que prend la section droite d'une voûte en BERCEAU (Voy. ce mot) lorsqu'elle est circulaire. Le berceau lui-même est alors dit en *plein cintre*.

PLINTHE, tablette carrée, qui forme la partie inférieure de la base d'une colonne. On lui donne aussi le nom de *socle* (Voy. ORDRES).

On désigne encore sous le nom de plinthe l'espace de plate-bande qui règne au bas des murs dans l'intérieur des appartements, ou qui, à l'extérieur d'un édifice, marque la ligne des planchers.

PLONGÉE, ligne de plus grande pente du plan supérieur d'un parapet, qui joint la crête intérieure à la crête extérieure (Voy. FORTIFICATION). La plongée est généralement de 6 de base sur 1 de hauteur, ce qui revient à dire que l'angle que fait la ligne de plus grande pente avec l'horizon a pour tangente $\frac{1}{6}$. Une plongée plus grande serait illusoire, parce que le soldat s'astreint rarement à diriger son arme parallèlement à cette ligne s'il doit pour cela se découvrir davantage; il se contente de poser l'arme sur la crête intérieure, et tire ainsi sous une inclinaison beaucoup moindre que la plongée.

PLUME GÉOMÉTRIQUE, instrument imaginé par Suardi pour tracer les épicycloïdes (Voy. EPICYCLOÏDE).

PLUVIÔSE, cinquième mois du calendrier républicain. Il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 20 janvier et le 20 février (Voy. CALENDRIER).

POIDS, effort qu'un corps exerce, en vertu de la pesanteur, sur l'obstacle qui le soutient. Le poids d'un corps est une force verticale qui peut être considérée comme appliquée au centre de gravité de ce corps (Voy. CENTRE DE GRAVITÉ). Cette force est constante dans un même lieu, et à une faible distance au-dessus de la surface du globe; mais elle varie suivant les lieux (Voy. PESANTEUR) et à des hauteurs notables au-dessus du sol. — Le poids des corps s'évalue à l'aide d'une BALANCE (Voy. ce mot). En France l'unité de poids est la *gramme*, poids d'un centimètre cube d'eau distillée et au maximum de densité; mais on se sert fréquemment de son multiple le *kilogramme*, qui vaut 1000 grammes. C'est ce multiple que l'on adopte pour unité de force (Voy. ce mot). Le poids d'un corps homogène est proportionnel à son volume; et pour l'obtenir il suffit de connaître le poids de l'unité de volume de ce corps: c'est ce qu'on appelle son **POIDS SPÉCIFIQUE** (Voy. ce mot); si V est le volume d'un corps, exprimé en mètres cubes, et P le poids du mètre cube de la matière de ce corps, on aura le poids P du corps, en kilogrammes aussi, par la formule

$$P = PV.$$

S'il s'agit d'un gaz, il faut tenir compte de la

pression et de la température, conformément à la loi de Mariotte et à la loi de dilatation des gaz. (Voy. les *Traités de physique*.)

Si Π_0 est le poids du mètre cube de gaz à la température zéro et sous la pression exprimée par $0^m,76$ de mercure, et V_0 le volume que le gaz considéré occuperait dans les mêmes conditions physiques, on aura toujours pour l'expression de son poids $\Pi_0 V_0$; mais si V est son volume à la température t et sous la pression exprimée par une hauteur h de mercure, on a

$$\frac{V}{V_0} = \frac{0,76}{h} \cdot (1 + at), \text{ d'où } V_0 = V \cdot \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + at},$$

a représentant le coefficient de dilatation du gaz (pour l'air ce serait 0,00366). Le poids P du gaz dans ces conditions sera donc

$$P = \Pi_0 V_0 \cdot \frac{h}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + at}$$

POIDS D'UNE VALEUR MOYENNE, nombre qui mesure la *précision* avec laquelle une inconnue se trouve déterminée quand on prend pour sa valeur la moyenne fournie par un certain nombre d'observations. Malheureusement les auteurs donnent ce nom à deux quantités différentes. Cette confusion des dénominations est un des grands obstacles que l'on rencontre dans l'étude des applications de la théorie du calcul des probabilités.

I. Les auteurs français nomment, en général, *poids d'une moyenne* (Voy. MOYENNE) le produit du **MODULE DE CONVERGENCE** (Voy. ce mot) par la racine carrée du nombre n des observations. Le module de convergence g ayant pour valeur, en désignant par e un écart fortuit quelconque,

$$g = \sqrt{\frac{n}{2 \sum e^2}},$$

on en déduit pour le poids q la valeur

$$q = g \sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{2 \sum e^2}}. \quad [1]$$

Si l'on appelle t la limite de l'intégrale qui dans la FORMULE DE LAPLACE (Voy. ce mot) donne la probabilité p qu'à une nouvelle épreuve l'écart entre la valeur obtenue et la moyenne résultant des épreuves précédentes ne dépassera pas la limite t en plus ou en moins, on a aussi

$$t = l g \sqrt{n} = l q, \text{ d'où } q = \frac{t}{l}. \quad [2]$$

La considération des poids des moyennes permet de comparer des observations de nature différente; les moyennes qui ont le même poids donnent pour un même écart la même probabilité, puisque la valeur de t est alors la même. Et, pour un même écart, la probabilité est d'autant plus grande que le poids de la moyenne est plus considérable.

II. Les auteurs allemands nomment *erreur moyenne* la racine carrée de la moyenne arithmétique entre les carrés de toutes les erreurs; en sorte qu'en appelant E l'erreur moyenne ainsi définie, on a

$$E = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n}}, \text{ d'où } \sum e^2 = n E^2. \quad [3]$$

Et, d'après Gauss, ils donnent le nom de *poids* à l'inverse du carré de l'erreur moyenne; en sorte qu'en appelant ω ce poids on a

$$\omega = \frac{1}{E^2}. \quad [4]$$

La valeur de q peut s'écrire

$$q = \frac{n}{\sqrt{2nE^2}} = \sqrt{\frac{n}{2E^2}}$$

d'où

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2q^2}{n}$$

On a donc entre les poids ω et q la relation

$$\omega = \frac{2q^2}{n} \quad [5]$$

Il est important d'avoir égard à ces valeurs différentes du même mot *poids* quand on étudie les auteurs qui traitent des probabilités.

Quelle que soit l'expression que l'on adopte pour le poids d'une moyenne, ce poids est d'autant plus considérable que le nombre des mesures effectuées a été plus grand, et qu'elles s'écartent moins de la moyenne. (Voyez les formules [1] et [4].)

POIDS ET MESURES. On trouvera à l'article SYSTÈME MÉTRIQUE le tableau des poids et mesures adoptés en France depuis le 7 avril 1795; et aux articles MONNAIES FRANÇAISES et MONNAIES ÉTRANGÈRES, tous les renseignements qui se rapportent aux monnaies actuelles, en France et dans les pays étrangers. Il ne sera question dans le présent article, que des mesures françaises antérieures au système métrique, et des poids et mesures étrangers (les monnaies non comprises).

I. FRANCE. L'ancienne unité de longueur était la *toise*; elle se subdivisait en 6 *pieds*, le pied en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes*. Les mesures effectuées à l'occasion de l'établissement du système métrique ont donné pour la longueur du quart du méridien terrestre 5 130 740 toises; et c'est la 10 000 000^{ème} partie de cette longueur, c'est-à-dire 0^m,513 074, qui a été adoptée pour nouvelle unité sous le nom de *mètre*. Il en résulte qu'une toise est exprimée en mètres par le nombre

$$\frac{1^m}{0,513074} \text{ ou } 1^m,94904.$$

Le pied, qui est le 6^e de la toise, vaut donc

$$\frac{1^m,94904}{6} \text{ ou } 0^m,32484.$$

Le pouce, qui est le 12^{ème} du pied, vaut

$$\frac{0^m,32484}{12} \text{ ou } 0^m,02707.$$

Enfin la ligne, qui est le 12^{ème} du pouce, vaut

$$\frac{0^m,02707}{12} \text{ ou } 0^m,00225....$$

A l'aide de ces données on forme sans peine le tableau suivant, qui sert à convertir les anciennes mesures de longueur en mesures nouvelles.

TOISES.	MÈTRES.	PIEDS.	MÈTRES.	POUCES.	MÈTRES.
1	1,94904	1	0,32484	1	0,02707
2	3,89807	2	0,64968	2	0,05414
3	5,84711	3	0,97452	3	0,08121
4	7,79615	4	1,29936	4	0,10828
5	9,74518	5	1,62420	5	0,13535
6	11,69422	6	1,94904	6	0,16242
7	13,64326	7	2,27388	7	0,18949
8	15,59229	8	2,59872	8	0,21656
9	17,54133	9	2,92355	9	0,24363
10	19,49037	10	3,24839	10	0,27070

Les lignes s'expriment ordinairement en millimètres, conformément à la table ci-dessous :

LIGNES.	MILLIMÈTRES.	LIGNES.	MILLIMÈTRES.
1	2,256	6	13,535
2	4,512	7	15,791
3	6,767	8	18,047
4	9,023	9	20,302
5	11,279	10	22,558

L'aune de Paris, était de 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$, ce qui revient à 1^m,18845.

II. Lorsqu'on a à effectuer la conversion inverse, on peut faire usage de tables dressées à l'avance, que l'on trouvera dans l'*Annuaire du bureau des longitudes*; mais il est aussi court de multiplier le nombre de mètres ou fractions de mètre donné, par la valeur du mètre en toise, ou 0^m,513074. Veut-on, par exemple, exprimer en toises le nombre 9^m,8088 qui exprime l'accélération de la pesanteur à la latitude de Paris, on aura

$$0^m,513074 \times 9,8088 = 5^m,03264....$$

ou $5^m - 0^p - 2^p - 4^l,2$; c'est à très-peu près 30 pieds. (Voy. dans les *Traité d'Arithmétique* le calcul des nombres complexes.)

III. Les anciennes mesures itinéraires étaient la *lieue commune* de 25 au degré, la *lieue marine* de 20 au degré, et la lieue de poste de 2000 toises. On trouve aisément la valeur de ces lieues en kilomètres. La distance du pôle à l'équateur, qui est de 10 000 000^m ou de 10 000^{li}, représentant 90 degrés ou 90 fois 25 lieues communes, il s'ensuit qu'en divisant 10 000^{li} par 90 \times 25 on aura la valeur de la lieue; on trouve 4^{li},444....

On voit de la même manière que, pour obtenir la valeur de la lieue marine, il faut diviser

$$10000^{\text{li}} \text{ par } 90 \times 20,$$

ce qui donne 5^{li},555....

Quant à la lieue de poste, sa valeur, d'après la définition, est 2000 fois la longueur de la toise, c'est-à-dire

$$1^m,94904 \times 2000 \text{ ou } 3898^m,08,$$

ou encore 3^{li},898.

Dans la marine on fait usage, pour évaluer les profondeurs ou les distances horizontales, de quelques autres unités :

La *brasse* vaut 5 pieds, et a par conséquent pour valeur en mètres 1^m,624.

Le *nœud*, ou $\frac{1}{120}$ du mille marin, vaut 15^m,432.

L'*encablure* ancienne était de 100 toises, et valait par conséquent 194^m,904.

L'*encablure nouvelle* est de 200 mètres.

IV. Le rapport des mesures de superficie se déduit du rapport des mesures de longueur en élevant ce dernier au carré. Si 1 toise vaut 1^m,94904, une toise carrée vaut

1,94904 \times 1,94904 ou 3,798743.... mètres carrés.

La valeur du pied étant 0^m,32484, la valeur du pied carré est le carré de ce nombre ou 0^m,105521.

La valeur du pouce étant 0^m,02707, le pouce carré est le carré de cette expression, c'est-à-dire 0^m,073278....

V. Les anciennes mesures agraires étaient très-variables; nous ne citerons que les plus usitées : l'arpent des eaux et forêts et l'arpent de Paris.

L'arpent des eaux et forêts était composé de 100 perches, dont chacune était un carré ayant 22 pieds de côté. Il en résulte que la perche des eaux et forêts valait 22×22 ou 484 pieds carrés, ou $0^m,105521 \times 484$, c'est-à-dire $51^m,0721$...

L'arpent des eaux et forêts valait donc.

5107^m,21 ou 51 ares 7 centiares environ.

L'arpent de Paris était composé de 100 perches, dont chacune était un carré ayant 18 pieds de côté. Il en résulte que la perche de Paris valait

18×18 ou 324 pieds carrés, ou $0^m,105521 \times 324$, c'est-à-dire $34^m,1888$.

L'arpent de Paris valait donc

34188^m,88 ou 34 ares 19 centiares environ.

Pour convertir un nombre donné d'arpents en hectares, ares, centiares, on n'a qu'à multiplier le nombre donné par la valeur de l'arpent. Si l'on veut savoir, par exemple, ce que valaient 12 arpents des eaux et forêts, on multipliera $51^m,07$ par 12, ce qui donne $612^m,84$ ou environ 6 hectares 13 ares.

Pour opérer la conversion inverse, il faut au contraire diviser le nombre d'ares donné, par la valeur de l'arpent. Si l'on veut, par exemple, convertir 120 hectares en arpents de Paris, on divisera 12 000 ares par $34,19$, ce qui donne 350,98 ou 350 arpents et 98 perches (à peu près 351 arpents).

La lieue commune valait $4^k,444$, la lieue carrée valait $4,444 \times 4,444$ ou $19^k,7491$, environ 19 kilomètres carrés 75 hectomètres carrés.

VI. Le rapport des unités de volume s'obtient en élevant au cube le rapport des unités de longueur. Ainsi : la toise cube vaut

$(1^m,94904)^3$ ou $7^m,403890$...

le pied cube vaut

$(0^m,32484)^3$ ou $0^m,034277$... ou $34^c,28$;

le pouce cube vaut

$(0^m,02707)^3$ ou $0^m,000019836$ ou $19^c,836$.

Pour la mesure des bois de chauffage on se servait de la corde des eaux et forêts. Sa valeur en stères était $3^k,8391$.

Dans la charpente, le volume des bois s'exprimait en solives, valant chacune 3 pieds cubes, ce qui revient à $0^m,10283$.

VII. L'ancienne unité de capacité était le boisseau, qui valait 13 litres. Son multiple, le setier, valait 12 boisseaux, et par conséquent 13×12 ou 156 litres, ou $1^k,56$. Le boisseau se subdivisait en 16 litrons; chaque litron valait par conséquent la 16^e partie de 13 litres, ou $0^k,8125$. On employait aussi la pinte, qui, à Paris, avait une valeur de $9^k,9313$; et le muids, qui valait $2^h,6822$.

VIII. L'ancienne unité de poids était la livre; elle se divisait en 2 marcs, chaque marc en 8 onces, chaque once en 8 gros, chaque gros en 72 grains. Les mesures précises effectuées à l'occasion de l'établissement du système métrique ont donné, pour la valeur du kilogramme exprimé en poids anciens, $18827^k,15$. D'ailleurs, d'après les relations ci-dessus indiquées, la livre vaut 9216^g ; la valeur de la livre en kilogrammes est donc le quotient de 9216 par $18827,15$, c'est-à-dire

$0^k,489505847$ ou à peu près $0^k,489506$.

On en déduit pour la valeur du marc, moitié de la livre,

$0^k,244753$;

pour la valeur de l'once, 8^e du marc,

$0^k,030594$;

pour la valeur du gros, 8^e de l'once,

$0^k,003824$;

pour la valeur du grain, 72^e du gros,

$0^k,000053$.

A l'aide de ces valeurs on forme le tableau suivant pour convertir les livres, marcs et onces en kilogrammes ou en grammes.

LIVRES.	KILOGRAMMES.	MARCS.	KILOGRAMMES.	ONCES.	GRAMMES.
1	0,48951	1	0,244753	1	30,59
2	0,97901	2	0,489506	2	61,19
3	1,46852	3	0,734259	3	91,78
4	1,95802	4	0,979012	4	122,38
5	2,44753	5	1,223765	5	152,97
6	2,93703	6	1,468518	6	183,56
7	3,42654	7	1,713270	7	214,16
8	3,91605	8	1,958023	8	244,75
9	4,40555	9	2,202776	9	275,35
10	4,89506	10	2,447529	10	305,94

TABLE DE CONVERSION DES GROS ET GRAINS EN GRAMMES.

GROS.	GRAMMES.	GRAINS.	GRAMMES.
1	3,82	1	0,531
2	7,65	2	1,062
3	11,47	3	1,593
4	15,30	4	2,124
5	19,12	5	2,655
6	22,94	6	3,186
7	26,77	7	3,717
8	30,59	8	4,248
9	"	9	4,779
10	"	10	5,310

Réciproquement, puisque le kilogramme vaut $18827^k,15$ et que la livre vaut 9216 grains, on aura la valeur du kilogramme en livres, en divisant le premier nombre par le second, ce qui donne

$2^k,042876519$.

On en déduit pour la valeur du gramme

$0^k,002042876$...

Pour réduire un nombre de kilogrammes ou de grammes en livres, il suffit de multiplier la valeur du kilogramme ou du gramme par le nombre donné. Si, par exemple, on demande de convertir $2^k,825$ en livres, on aura à multiplier $2^k,0428765$ par $2,825$, ce qui donne

$5^k,771126$... ou $5^k - 1^m - 4^c - 2^g - 50^g,7$.

(Voy. dans les Traités d'arithmétique le calcul des nombres complexes.)

On employait dans le commerce deux autres unités de poids : le quintal, qui valait 100 livres; sa valeur en kilogrammes est donc $48^k,951$; et le tonneau de mer, évalué à 2000 livres; sa valeur en kilogrammes est donc $0^k,48951 \times 2000$ ou $979^k,02$, ou à très-peu près 979 kilogrammes. (Ce tonneau de mer représentait, suivant une ordonnance de 1681, un volume de 42 pieds cubes ou $1^m,439634$.)

IX. L'ancienne unité monétaire était la livre

tournois; elle se divisait en 20 sous, et chaque sou en 12 deniers. La loi du 25 germinal an IV (14 avril 1795) a fixé à 5 livres, 1 sou 3 deniers la valeur de la pièce de 5 francs. Il en résulte que 80^l, c'est-à-dire 16 fois 5^l, font 16 fois 5^l—1^s—3^d, ou exactement 81 livres. La valeur de la livre en francs s'obtiendra donc en divisant 80 par 81, ce qui donne 0^l,98765432....

La valeur du sou en est la 20^e partie, c'est-à-dire 0^l,04938271....

et la valeur du denier est le 12^e de ce nombre, ou 0^l,00411522....

Ces rapports servent à convertir en francs une somme donnée en livres, sous et deniers. On peut encore remarquer que pour convertir des livres en francs il suffit de diminuer le nombre de livres donné de sa 81^e partie. Et réciproquement, pour convertir en livres un nombre donné de francs, il suffit d'augmenter le nombre de sa 80^e partie. Si, par exemple, on veut convertir en livres une somme de .000^l, on prendra la 80^e partie de 1000, qui est 12,5; et on l'ajoutera à 1000, ce qui donnera 1012^l,5 ou 1012 livres 10 sous.

Les anciennes monnaies ont cessé d'avoir cours à dater du 1^{er} octobre 1834.

10. PAYS ÉTRANGERS. Nous donnons ici, d'après l'Annuaire du bureau des longitudes, les valeurs des principales mesures étrangères, exprimées en mesures françaises.

	MESURES DE LONGUEUR.	m.
	Yard impérial.....	0,91438
	Foot, pied, ou tiers du yard.....	0,30479
ANGLETERRE...	Inch, pouce, douzième du pied.....	0,02540
	Fathom, 2 yards.....	1,82876
	Pole, ou perche, 5 yards $\frac{1}{2}$	5,02911
	Furlong, 220 yards.....	201,16437
AUTRICHE....	Pied.....	0,31611
BAVIÈRE....	Pied.....	0,29100
BELGIQUE....	Mètre.....	1,00000
	Braça, 10 palmos.....	2,20000
BRÉSIL.....	Vara, 5 palmos.....	1,10000
	Palmo, légal.....	0,22000
	Pe, 12 pollegados.....	0,33000
CHINE.....	Pied mathématique.....	0,3331
	Pied d'architecte.....	0,3228
DANEMARK....	Pied.....	0,31385
ÉGYPTE.....	Pic.....	0,6806
	Mètre.....	1,00000
	Pied.....	0,2826
	Pouce, douzième du pied.....	0,02355
ESPAGNE....	Doigt, seizième du pied.....	0,01766
	Petit palme, de 4 doigts.....	0,07064
	Grand palme, de 12 doigts.....	0,21192
	Estadal ou perche, de 11 pieds.....	3,1086
HANOVRÉ....	Pied.....	0,2921
HOLLANDE....	Mètre.....	1,00000
NAPLES....	Palme.....	0,2635
PIÉMONT....	Pied liprando.....	0,5156
POLOGNE....	Pied.....	0,2880
	Pied.....	0,328
	Palme.....	0,219
PORTUGAL....	Corado, ou 3 palmes.....	0,657
	Vara, ou 5 palmes.....	1,095

PRUSSE.....	Pied.....	m.	0,31385
	Ruthe, ou perche, de 2 toises, ou 12 pieds.....		3,7662
	Pied anglais.....		0,30479
	Sagène, 7 pieds.....		2,13356
RUSSIE.....	Archine, tiers de sagène.....		0,71119
	Verchoc, $\frac{1}{16}$ d'archine....		0,04445
SARDAIGNE....	Palme.....		0,2483
SAXE.....	Pied.....		0,2833
SICILE.....	Palme.....		0,2586
	Pied.....		0,2969
	Pouce, dixième du pied..		0,02969
	Ligne, dixième du pouce..		0,00297
SUÈDE.....	Ell ou aune, de 2 pieds..		0,5938
	Famn ou toise, de 6 pieds.		1,7814
	Ruthe ou perche, de 16 pieds.....		4,75
	Toise, 6 pieds.....		1,80000
	Pied, unité principale...		0,30000
	Pouce, $\frac{1}{10}$ de pied.....		0,03000
SUISSE.....	Ligne, $\frac{1}{10}$ de pouce.....		0,00300
	Aune, 4 pieds.....		1,20000
	Brache, demi-aune.....		0,60000
	Archinn.....		0,75774
	Pouce, $\frac{1}{24}$ d'archinn....		0,03157
	Ligne, $\frac{1}{12}$ de pouce.....		0,00263
TURQUIE....	Archim endaxé, ou pic, pour les étoffes.....		0,6800
	Roup, $\frac{1}{8}$ d'endaxé.....		0,0850
	Ghnirat, demi-roup.....		0,0425
WURTEMBERG.	Pied.....		0,2864

	MESURES ITINÉRAIRES.	kilom.
ALLEMAGNE...	Meile, lieue de 15 au degré.	7,408
	(Mile, 1760 yards.....)	1,609
ANGLETERRE...	Mille marin de 60 au degré.	1,852
	(Lieue marine de 20 au degré.)	5,556
ARABIE.....	Mille.....	1,964
AUTRICHE....	Mille de poste.....	7,586
BELGIQUE....	Mille métrique.....	1,000
BRÉSIL.....	Legua.....	6,173
	Milha.....	1,852
CHINE.....	Li.....	0,577
DANEMARK....	Mille.....	7,538
ÉCOSSE.....	Mille.....	1,609
ESPAGNE....	Lieus de 20 000 pieds.....	5,573
HAMBOURG....	Mille.....	7,538
	Mille de 15 au degré.....	7,408
HOLLANDE....	Mille nouveau.....	1,000
HONGRIE....	Mille.....	7,586
IRLANDE....	Mille.....	1,609
	Mille de 60 au degré.....	1,000
ITALIE.....	Mille métrique.....	1,000
NAPLES....	Mille.....	1,852
PIÉMONT....	Mille.....	2,466
	Mille de 20 au degré.....	5,556
POLOGNE....	Mille nouveau, 8 wersts..	8,534
PORTUGAL....	Lieue de 18 au degré.....	6,173
PRUSSE.....	Mille du Rhin.....	7,532
ROME.....	Mille géographique.....	1,852

		kilom.
RUSSIE.....	<i>Werst</i> , 500 saènes.....	1,067
SUÈDE.....	Mille.....	10,688
SUISSE.....	<i>Lieue</i> , 16 000 pieds.....	4,800
TOSCANE.....	Mille.....	1,653
TURQUIE.....	<i>Berri</i>	1,476

BRASSES DES CARTES MARINES.

		m.
ANGLETERRE.....	<i>Fathom</i>	1,829
DANEMARK.....	<i>Faun</i>	1,883
ESPAGNE.....	<i>Braça</i>	1,696
HOLLANDE.....	<i>Wdam</i>	1,883
RUSSIE.....	<i>Sagène</i>	2,134
SUÈDE.....	<i>Fannar</i>	1,783
FRANCE.....	<i>Brasse</i> , 5 pieds.....	1,624

MESURES AGRAIRES.

		ares.
ANGLETERRE.....	<i>Rod</i>	0,2529
	<i>Rood</i> , 1210 yards carrés.....	10,117
	<i>Acre</i> , 4 roods.....	40,467
AUTRICHE.....	<i>Joch</i> , carré de 40 toises.....	57,598
BELGIQUE.....	<i>Are</i>	1,000
	<i>Hectare</i>	100,000
BRÉSIL.....	<i>Braça</i> carrée.....	0,048
	<i>Yara</i> carrée.....	0,012
	<i>Estadal</i> , perche de 12 pieds de côté.....	0,112
ESPAGNE.....	<i>Fanega</i> , de 24 perches de côté.....	64,400
HANOVRE.....	<i>Morgen</i>	25,918
NAPLES.....	<i>Moggia</i>	33,426
PORTUGAL.....	<i>Geira</i>	58,275
PRUSSE.....	<i>Morgen</i> , de 180 ruthe carrés.....	25,526
	<i>Huffe</i> , de 30 morgen.....	765,78
ROME.....	<i>Pezza</i>	26,406
RUSSIE.....	<i>Deciatine</i> , 2400 sagènes carrées.....	109,250
SAXE.....	<i>Acre</i>	55,098
SUÈDE.....	<i>Tuneland</i>	49,329
	<i>Perche carrée</i> , 100 pieds carrés.....	0,090
SUISSE.....	<i>Arpent</i> , 400 perches.....	36,000
TOSCANE.....	<i>Quadrato</i>	34,062

MESURES DE CAPACITÉ.

1° Pour les liquides.

		lit.
	<i>Gallon impérial</i>	4,543
	<i>Quart</i> , $\frac{1}{4}$ de gallon.....	1,1359
	<i>Pint</i> , $\frac{1}{8}$ de gallon.....	0,5679
ANGLETERRE.....	<i>Peck</i> , 2 gallons.....	9,0869
	<i>Bushel</i> , 8 gallons.....	36,3477
	<i>Sack</i> , 3 bushels.....	109,043
	<i>Quarter</i> , 8 bushels.....	290,781
	<i>Chaldron</i> , 12 sacks.....	1308,516
	<i>Eimer</i>	56,564
AUTRICHE.....	<i>Viertel</i> , quart d'eimer.....	14,141
	<i>Maas</i> , dixième du Viertel.....	1,414
	<i>Seitel</i> , quart de maas.....	0,3535
BELGIQUE.....	<i>Litre</i>	1,000
	<i>Hectolitre</i>	100,000
	<i>Pipas</i> , 50 potes.....	423,75
BRÉSIL.....	<i>Pote</i> , 6 canadas.....	8,475
	<i>Canada</i>	1,412

		Ht.
ESPAGNE.....	<i>Cantara</i>	16,133
	<i>Açumbre</i> , huitième de cantara.....	2,016
POLOGNE.....	<i>Garniec</i>	1,59
	<i>Almude</i>	16,54
PORTUGAL.....	<i>Cantara</i> , moitié de l'almude.....	8,27
	<i>Cavada</i> , douzième de l'almude.....	1,38
	<i>Eimer</i>	68,69
	<i>Scheffel</i> , ou $\frac{4}{5}$ d'eimer.....	52,952
	<i>Anker</i> , moitié de l'eimer.....	34,345
PRUSSE.....	<i>Maas</i> , trentième de l'anker.....	1,1448
	<i>Ohm</i> , ou double eimer.....	137,38
	<i>Oxhofs</i> , ou triple de l'eimer.....	206,07
	<i>Tonneau</i> de 100 maas, pour la bière.....	114,48
	<i>Vedro</i>	12,299
	<i>Stof</i> , $\frac{1}{8}$ de vedro.....	1,537
RUSSIE.....	<i>Crouchka</i> , $\frac{1}{10}$ de vedro.....	1,230
	<i>Charkey</i> , $\frac{1}{100}$ de vedro.....	0,123
SUÈDE.....	<i>Kanna</i> , dixième du pied cube.....	2,615
	<i>Pot</i> , 3 livres d'eau pure.....	1,50
SUISSE.....	<i>Setier</i> (brente), 25 pots.....	37,50
	<i>Muid</i> , 100 pots.....	150,00
	<i>2° Pour les grains.</i>	
ANGLETERRE.....	<i>Bushel</i> , 8 gallons.....	36,348
	<i>Metze</i>	61,50
	<i>Muthmassel</i> , seizième de metze.....	3,844
AUTRICHE.....	<i>Becker</i> , 8° de muthmassel.....	0,4805
	<i>Muth</i> , de 30 metze.....	18°,45
	<i>Litre</i>	1,00
BELGIQUE.....	<i>Hectolitre</i>	100,00
	<i>Moio</i> , 15 fangas.....	828,00
	<i>Fanga</i> , 16 quartas.....	55,20
BRÉSIL.....	<i>Oitara</i> , $\frac{1}{2}$ quarta.....	1,725
	<i>Fanega</i> , 12 celemines.....	55,50
ESPAGNE.....	<i>Cahiz</i> , de 12 fanega.....	666,00
POLOGNE.....	<i>Korzec</i>	51,137
	<i>Alquière</i>	13,667
PORTUGAL.....	<i>Fanego</i> , ou 4 alquières.....	54,666
	<i>Moio</i> , ou 60 alquières.....	820,000
	<i>Scheffel</i> , ou les $\frac{16}{9}$ du pied cube.....	54,952
PRUSSE.....	<i>Metze</i> , ou seizième de scheffel.....	3,434
	<i>Tchetvert</i> , 8 tchetvérics.....	209,817
	<i>Osmine</i> , 4 tchetvérics.....	104,908
RUSSIE.....	<i>Tchetvéric</i>	26,227
	<i>Garnitz</i> , $\frac{1}{8}$ de tchetvéric.....	3,278
SARDAIGNE.....	<i>Starello</i>	38,961
	<i>Salma grossa</i>	344,33
SICILE.....	<i>Salma generale</i>	276,69
	<i>Tunna</i> de 32 kappar.....	146,490
SUÈDE.....	<i>Kann</i>	2,615

		lit.
SUISSE.....	Quarteron (boisseau)....	15,00
	Sac, 10 quarterons.....	150,00
WURTEMBERG.	Scheffel.....	178,44

POIDS A L'USAGE DU COMMERCE.

ALLEMAGNE...	Marc de l'association douanière.....	233 ^e ,855
	Livre troy, de 12 onces.	373 ,242
ANGLETERRE..	Livre avoir du poids, de 16 onces.....	453 ,593
	Quintal, de 112 livres avoir du poids.....	50 ^e ,80
	Livre.....	560 ^e ,010
	Once, seizième de la livre	35 ,000
	Loth, demi-once.....	17 ,500
	Quintin, huitième de loth.....	2 ,1845
AUTRICHE ...	Pfenning, quart de quintin.....	0 ,5461
	Stone, de 20 livres....	11 ^k ,100
	Quintal, de 100 livres..	56 ,001
	Saum, de 275 livres... .	154 ,003
	Karch, de 400 livres..	224 ,004
BAVIÈRE.....	Livre.....	560 ^e ,000
BELGIQUE....	Gramme.....	1 ,000
	Kilogramme.....	1000 ,000
	Tonellada.....	793 ^k ,029
BRÉSIL.....	Quintal, 4 arrobas....	58 ,743
	Libra, 2 marcos, 16 onças	459 ^e ,000
DANEMARK... .	Marc.....	235 ,389
	Livre.....	460 ,09
ESPAGNE....	Arroba, de 25 livres... .	11 ^k ,502
HANOYRE....	Livre.....	486 ^e ,652
	Livre, de 10 onces....	1000 ,000
	Onces, 100 looden, ou gros.....	100 ,000
HOLLANDE....	Wigte, ou esterling... .	1 ,00
	Korrel.....	0 ,10
PIÉMONT....	Libra.....	368 ,875
	Arratel ou livre.....	453 ,921
PORTUGAL... .	Arroba, de 32 livres... .	14 ^k ,685
	Tonneau, de 54 arroba.	793 ,000
	Marc.....	233 ^e ,855
	Livre.....	467 ,702
PRUSSE.....	Loth, seizième de la livre.....	29 ,231
	Livre, 9216 doli.....	409 ,512
RUSSIE.....	Solotnic, 96 doli.....	4 ,266
	Doli.....	0 ,044
	Pud, de 40 livres.....	16 ^k ,38
SAXE.....	Livre.....	467 ^e ,141
	Livre.....	425 ,2
	Once, ou seizième de livre.....	26 ,575
SUÈDE.....	Lispund, de 20 livres..	8 ^k ,504
	Quintal de 120 livres... .	51 ,00
	Livre, unité principale..	500 000
SUISSE.....	Once, $\frac{1}{16}$ de livre... .	31 ,25
	Gramme, poids scientifique.....	1 ,000
WURTEMBERG.	Livre.....	467 ,738

Pour l'évaluation des diamants et des perles fines, on fait généralement usage d'une unité de poids particulière appelée karat, qui varie très-peu d'un pays à l'autre (Voy. KARAT).

POIDS SPÉCIFIQUE, poids de l'unité de volume d'un corps. D'après cette définition, le poids spécifique d'un corps serait le poids du mètre cube de ce corps; cependant, pour la plupart des corps on est dans l'habitude de prendre pour unité de volume le décimètre cube; ainsi le tableau suivant donne, en kilogrammes, le poids du décimètre cube de différentes substances. Les nombres inscrits dans ce tableau, considérés comme des nombres abstraits, expriment en même temps le rapport entre le poids de chaque substance et le poids d'un égal volume d'eau.

Substances.	Poids du décimètre cube.
Platine laminé.....	22 ^k ,6690
Platine purifié.....	19,5000
Or forgé.....	19,3617
Or coulé.....	19,2581
Plomb coulé.....	11,3523
Argent coulé.....	10,4743
Cuivre en fil.....	8,8785
Cuivre rouge coulé.....	8,7880
Acier non écroui.....	7,8163
Fer en barre,.....	7,7880
Étain coulé.....	7,2914
Fer fondu.....	7,2070
Zinc coulé.....	6,8610
Verre blanc de Saint-Gobain...	2,4882
Houille compacte.....	1,3292
Chêne le plus pesant (cœur) ..	1,1700
Hêtre.....	0,8520
Chêne le plus léger (sec).....	0,8500
Orme.....	0,8000
Frêne.....	0,7450
Sapin jaune.....	0,6570
Tilleul.....	0,6040
Peuplier.....	0,3830
Liège.....	0,2400
Glace.....	0,9300
Mercurio.....	13,5980
Eau de mer.....	1,0263
Eau distillée.....	1,0000
Alcool absolu.....	0,7920
Éther sulfurique.....	0,7155

Pour les pierres, les briques, le sable, les terres, etc., qui entrent dans les constructions, on adopte le mètre cube; ainsi les nombres suivants donnent, en kilogrammes, le poids du mètre cube de ces diverses substances :

Substances.	Poids du mètre cube.
Pierre à plâtre ordinaire.....	2168 ^k
Gypse ou plâtre fin.....	2264
Pierre meulière.....	2484
Marbre noir et blanc.....	2717
Briques les plus cuites.....	2200
Briques les moins cuites... .	1500
Tuiles ordinaires.....	2000
Sable pur.....	1900
Sable terreux.....	1700
Terre végétale légère.....	1400
Terre argileuse.....	1600
Terre glaise.....	1900
Moellons les plus denses.....	2300
— les moins denses.....	1700

Si V désigne le volume d'un corps, Π son poids spécifique, et P son poids total, on a entre ces quantités la relation

$$P = \Pi V,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{P}{\Pi} \quad \text{et} \quad \Pi = \frac{P}{V},$$

relations d'un usage continu. Mais il faut bien se rappeler que si V est rapporté au mètre cube, Π est le poids du mètre cube; et que si V est rapporté au décimètre cube, Π est le poids du décimètre cube ou du litre; dans les deux cas, le poids Π est exprimé en kilogrammes, et il en est par conséquent de même pour P .

EXEMPLES. I. *Quel est le poids d'un mur en briques légères, de 3 mètres de hauteur, sur 5 mètres de longueur et 0^m,4 d'épaisseur?* Le volume est ici

$$V = 3.5.0,4 = 6^{\text{m}^3};$$

on a donc

$$P = 1500^{\text{k}}.6 = 9000^{\text{k}}.$$

II. *Quel est le diamètre d'un boulet de fonte de 12 kilogrammes?* Le volume V sera donné en décimètres cubes par la relation

$$V = \frac{12^{\text{k}}}{7,207}.$$

Or si x est le diamètre demandé, on a

$$V = \frac{1}{6} \pi x^3,$$

on a donc

$$\frac{1}{6} \pi x^3 = \frac{12}{7,207}, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6}{\pi \cdot 7,207}}.$$

En effectuant les calculs on trouve

$$x = 0^{\text{m}}, 147.$$

III. *Quel est le poids spécifique d'une pierre dont le volume est de 2^d,25 et qui pèse 4^k,815?* On a ici

$$\Pi = \frac{4,815}{2,25} = 2,14;$$

ainsi le décimètre cube de cette pièce pèse 2^k,14.

POINÇON, pièce de charpente verticale sur laquelle reposent les têtes des arbalétriers d'une ferme, et qui soutient elle-même soit le tirant, soit l'entrait (*Voy. FERMES*). C'est dans le poinçon que s'assemble le FAITAGE, qui forme l'arête supérieure du COMBLE (*Voy. ces mots*).

POINT (FAIRE LE), terme de marine par lequel on désigne la solution du second PROBLÈME DES ROUTES (*Voy. ces mots*): « Étant donnés les coordonnées géographiques du point de départ, le rumb de vent suivi, et le nombre de milles parcourus, trouver le point d'arrivée. » Cette dénomination vient de ce que, lorsqu'on a résolu ce problème, on marque sur la carte, par un point, la position à laquelle le navire est parvenu.

POINT BRILLANT, image d'un point lumineux sur une surface réfléchissante. Désignons par L le point lumineux, par O l'œil du spectateur, par M le point brillant; d'après les lois de la réflexion, le point M sera déterminé par la condition que la normale, en ce point à la surface réfléchissante, fasse des angles égaux avec les droites LM et OM , et soit dans un même plan avec ces deux droites. On remarque que si l'on conçoit un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers les points L et O , en faisant varier son grand axe on l'amènera à toucher

la surface réfléchissante; le point de contact M sera le point brillant; car les deux surfaces auront alors une normale commune, et, d'après les propriétés de la normale à l'ellipse, elle remplira la condition énoncée ci-dessus. — Le point brillant est donc le pied d'une normale abaissée d'un certain point de la droite LO ; en sorte que si de tous les points de cette droite on mène des normales à la surface réfléchissante, le lieu des pieds de ces normales contiendra le point brillant. D'un autre côté, il est facile de déterminer sur chacune de ces normales un point N tel que la normale fasse des angles égaux avec les droites NL et NO ; c'est un problème de Géométrie élémentaire des plus simples. Si l'on détermine le lieu des points N , il passera aussi par le point brillant. Ce point s'obtiendra donc par l'intersection des deux lieux géométriques dont il vient d'être parlé. C'est la méthode qui a été donnée par Hachette.

Suivant la nature de la surface, il peut y avoir un ou plusieurs points brillants. Mais, pour qu'un point M soit réellement un point brillant, il faut que les droites qui joignent ce point aux points L et O ne traversent pas le corps réfléchissant. M , de la Gournerie appelle points *virtuels* ceux qui, offrant le même caractère géométrique que les points brillants réels, ne remplissent pas cette dernière condition. Ainsi le point brillant sur une surface sphérique concave, deviendrait virtuel si, la sphère étant supposée pleine, la surface convexe devenait la surface réfléchissante.

Lorsqu'on marque le point brillant sur un dessin en projection, on suppose ordinairement l'œil du spectateur placé à une distance infinie du plan du dessin; les rayons visuels sont alors parallèles; en même temps on suppose le point lumineux placé également à l'infini, d'où il résulte que les rayons lumineux sont parallèles aussi. La direction de la normale qui doit diviser en deux parties égales l'angle de ces deux directions, est donc connue à l'avance; et tout se réduit à trouver sur la surface réfléchissante le point où la normale est parallèle à une direction donnée, ou, ce qui revient au même, le point où le plan tangent est parallèle à un plan donné, problème que l'on sait résoudre directement dans la plupart des cas (*Voy. PLANS TANGENTS*). Si, par exemple, la surface réfléchissante est une sphère, on mènera par un point quelconque de l'espace une parallèle aux rayons visuels et une parallèle aux rayons lumineux; on divisera en deux parties égales l'angle de ces deux droites; puis par le centre de la sphère on mènera une parallèle à la bissectrice; le point où elle percera la surface sphérique sera le point brillant. (Elle la percera en deux points; mais il sera toujours facile de distinguer le point brillant réel du point brillant virtuel.)

POINT DE DISTANCE, terme de Perspective; point situé sur la ligne d'horizon, à une distance du point de vue égale à la distance de l'œil au plan du tableau, à droite ou à gauche du point de vue.

POINT DE PARTANCE, point que choisit le navigateur pour point de départ de son voyage. Ce point n'est presque jamais celui où l'on a levé l'ancre. Afin de ne pas avoir à tenir compte des bordées qu'il faut courir pour éviter les écueils et prendre le large, on choisit comme point de **p**:r-

tance celui d'où l'on est près de perdre la côte de vue. Pour le déterminer, on choisit sur la côte deux points A et B (fig. 1), visibles du point C où l'on se trouve, et qui soient marqués sur la carte. A

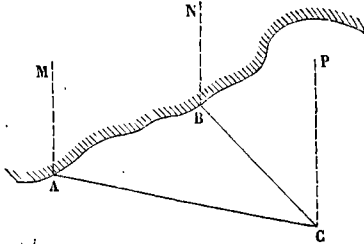


Fig. 1.

l'aide du *compas de variation* (boussole portative à pinnules) on vise l'un de ces points A; et l'on mesure l'angle que le rayon visuel ainsi mené fait avec la ligne nord et sud de la boussole; on corrige cet angle de la *variation*, c'est-à-dire de la déclinaison de l'aiguille aimantée; et l'on a l'angle ACP que fait le rayon visuel avec la ligne nord et sud vraie CP. On opère de même pour le point B; et l'on a l'angle que le rayon visuel CB fait avec la ligne CP. Cela fait, on opère sur la carte. Par le point A, on mène une droite AC, faisant avec la ligne nord et sud AM un angle MAC supplément de l'angle ACP mesuré de C; de même, on mène par le point B une droite BC faisant avec la ligne nord et sud BN un angle NBC supplément de l'angle BCP mesuré de C; le point C où les deux droites ainsi menées se rencontrent, est le point de la carte qui représente le point de portance.

Il peut arriver que l'on n'ait en vue qu'un seul objet terrestre qui soit marqué sur la carte; dans ce cas on opérera de la manière suivante.

Soit A (fig. 2) le point visible marqué sur la

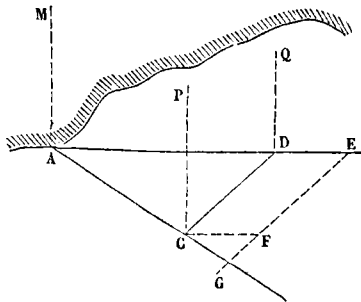


Fig. 2.

carte, et C le point de portance. On mesurera comme il a été dit ci-dessus l'angle ACP que fait le rayon visuel mené au point A, avec la ligne nord et sud CP. On courra une bordée dans une direction quelconque CD, en ayant soin d'observer exactement le rumb de vent que l'on suit et la vitesse du navire (Voy. RUMBS, LOCA); arrivé en un point D dont la distance au point C a été mesurée à l'aide de la vitesse du navire et du temps employé à aller de C en D, on mesurera l'angle ADQ que fait le rayon visuel mené au point A avec la ligne nord et sud DQ. Cela fait, on opérera sur la

carte; par le point A on mènera une première droite faisant avec la ligne nord et sud AM l'angle MAC, supplément de l'angle ACP mesuré de C, et une seconde droite AD faisant avec AM l'angle MAD supplément de l'angle ADQ, mesuré au point D. Par un point quelconque E de la droite AD on mènera ensuite une droite EG dans une direction parallèle au rumb de vent que l'on a suivi, mais de sens contraire; et sur cette droite on prendra à partir de E une longueur EF, représentant à l'échelle de la carte le nombre de milles que l'on a parcourus; puis on mènera FC parallèle à AD, jusqu'à la rencontre de AC. Le point C ainsi déterminé représentera sur la carte le point de portance.

Enfin, si le temps ne permettait pas de se transporter ainsi en un point D pour y faire une seconde observation, et qu'il fallût se contenter de celle qui a été faite en C, on apprécierait à vue la distance AC; on mènerait sur la carte la droite AC faisant avec AM l'angle MAC supplément de l'angle ACP mesuré en C; et l'on porterait sur cette droite, de A en C, une longueur AC représentant à l'échelle de la carte la distance des points A et C; le point C ainsi obtenu serait approximativement celui qui représente sur la carte le point de portance.

POINT DE VUE, terme de Perspective, point où vont concourir en perspective les perpendiculaires au plan du tableau; ce point n'est autre chose que le pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil du spectateur sur le plan du tableau.

On nomme *point de vue accidentel* le point où une ligne menée de l'œil du spectateur, parallèlement à un faisceau de droites parallèles, va rencontrer le plan du tableau.

POINT D'IMPACT, point où la trajectoire du centre d'un projectile rencontre la cible. On nomme *point d'impact moyen*, le point qui a pour coordonnées les moyennes entre les coordonnées des divers points d'impact obtenus dans une série de coups; il jouit de la propriété que la somme des carrés de ses distances à ces divers points d'impact particuliers est un minimum; et c'est au point d'impact moyen qu'on rapporte les *écarts* des différents coups (Voy. PROBABILITÉ DU TIR).

POINT MATÉRIEL, corps dont les dimensions sont supposées infiniment petites, mais qui reste doué des propriétés générales de la matière, telles que la pesanteur, l'impenétrabilité.

POINT VÉLIQUE, point où la résultante des actions du vent sur les voiles rencontre la verticale du centre de gravité du navire (Voy. VOILES, STABILITÉ sous VOILES). Il ne faut point confondre ce point avec le *centre vélique* ou **CENTRE DE VOILURE** (Voy. ce mot).

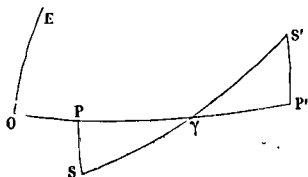
POINT VERNAL (du latin *vernalis*, dérivé de *ver*, printemps), ou **ÉQUINOXE DU PRINTEMPS**, l'un des points d'intersection de l'équateur avec l'écliptique; celui qui répond à l'instant où le soleil passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal.

Ce point sert d'origine aux **ASCENSIONS DROITES** et aux **LONGITUDES** (Voy. ces mots). L'instant de son passage au méridien du lieu est celui à partir duquel on compte l'**HEURE SIDÉRALE**.

Ce point n'est pas directement observable; mais on le détermine chaque année, et l'on en conclut

sa distance aux cercles horaires des principales étoiles, afin d'obtenir l'heure sidérale en observant l'instant du passage d'une de ces étoiles au méridien.

Pour déterminer le point vernal, on observe deux fois le soleil à son passage au méridien, à 24 heures de distance : savoir avant l'équinoxe et après, c'est-à-dire lorsque sa déclinaison était encore australe et lorsqu'elle est devenue boréale, les ascensions droites étant provisoirement rapportées au méridien d'une certaine étoile déterminée. Soient $OP = t$ et $OP' = t'$ ces ascensions droites



provisoires, exprimées en temps, $O\gamma = \theta$ l'ascension droite du point vernal exprimée de la même manière, $SP = d$ la déclinaison australe et $S'P' = d'$ la déclinaison boréale observées.

L'arc SS' d'écliptique parcouru par le soleil dans l'intervalle des deux observations étant très-petit, et les déclinaisons variant à cette époque d'une manière uniforme, on peut admettre qu'on a

$$\frac{P\gamma}{PS} = \frac{P'\gamma}{P'S'} = \frac{PP'}{PS + P'S'}$$

ou

$$\frac{O\gamma - OP}{PS} = \frac{OP' - OP}{PS + P'S'}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\theta - t}{d} = \frac{t' - t}{d + d'}$$

d'où l'on tire

$$\theta = t + (t' - t) \cdot \frac{d}{d + d'}$$

On a ainsi le temps qui doit s'écouler entre le passage de l'étoile et celui du point vernal au même méridien, c'est-à-dire que le point vernal se trouve déterminé.

POINTS CARDINAUX, points où l'horizon est coupé par la trace du méridien et par celle du premier vertical. Les deux premiers portent les noms de *Nord* et *Sud*; les deux derniers, ceux d'*Est* et *Ouest*. Ces quatre noms sont quelquefois remplacés par ceux de *Septentrion*, *Midi*, *Orient* et *Occident*.

POINTS MORTS, positions où se trouve le bouton d'une manivelle quand la bielle avec laquelle elle est articulée passe par le centre du cercle décrit. Ils sont ainsi nommés parce que, dans ces positions, la vitesse de la bielle est instantanément nulle (*Voy. BIELLE ET MANIVELLE, BALANCIER, BIELLE ET MANIVELLE*).

POINTAGE, opération qui consiste à diriger l'axe d'une arme à feu, ou d'une bouche à feu, de manière à atteindre un but déterminé.

I. Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse d'un canon ou d'un obusier; et, pour plus de simplicité, nous admettrons que, le plan du terrain étant horizontal, l'axe des tourillons est lui-même parallèle à l'horizon; c'est ce qui a toujours lieu pour les pièces de siège, et le plus souvent aussi pour les pièces de campagne. La première chose à faire est de faire tourner la pièce jusqu'à ce que le plan

vertical contenant son axe aille passer par le point qu'on veut atteindre. Pour que cela soit possible, la pièce porte à sa partie supérieure deux crans nommés *crans de mire*, placés l'un à la culasse, l'autre près de la bouche, et dans le plan mené par l'axe de la pièce, perpendiculairement à l'axe des tourillons; il suffit alors d'amener la droite qui joint les crans de mire dans la verticale du point à battre. La seconde opération consiste à faire tourner la pièce autour de ses tourillons, de manière à faire faire à l'axe avec l'horizontale l'angle déterminé par les règles de la BALISTIQUE (*Voy. ce mot*). Connaissant la distance et la hauteur du but, ainsi que la vitesse initiale que prendra le projectile avec la charge dont on fait usage, les formules de balistique font connaître l'angle de tir, c'est-à-dire l'inclinaison que l'axe de la pièce doit prendre par rapport à l'horizon; il s'agit donc de lui faire prendre cette inclinaison; et c'est en cela que consiste à proprement parler l'opération du pointage. On se servait autrefois pour cela d'un fil à plomb et d'un arc de cercle porté par un cadre en bois, soit rectangulaire, soit triangulaire, que l'on appliquait sur la pièce dans la direction des crans de mire. Cet arc était primitivement divisé en 12 parties nommées points; d'où les expressions de *pointer* et de *pointage*. Plus tard on a divisé l'arc en degrés. Mais son rayon étant nécessairement très-limité, on ne pouvait obtenir très-exactement la direction voulue. A ce procédé imparfait, on en a substitué un autre, dans lequel la longueur même de la bouche à feu sert de rayon, et qui offre à la fois plus d'exactitude et plus de célérité. A la partie supérieure de la plate-bande de culasse, et perpendiculairement à l'axe de la pièce, est placée une petite règle divisée, à laquelle on donne le nom de *hausse*, et qui peut glisser suivant sa longueur dans une coulisse fixée à la culasse. Si par l'extrémité de la hausse on mène un rayon visuel tangent au bourrelet dans les canons, ou à la plate-bande de la bouche dans les obusiers, on a la véritable *ligne de mire*, qui doit passer par le point à atteindre; on fait tourner la pièce autour de ses tourillons, à l'aide d'une vis placée sous la culasse, jusqu'à ce que cette condition soit remplie. A l'aide de ce système, les deux mouvements à donner à la pièce peuvent s'exécuter en même temps; et le pointage est plus précis et plus rapide. Voici comment la longueur à donner à la hausse est liée à l'angle de tir. Soit OA (fig. 1) l'axe de la bouche à feu, OX l'intersection du plan horizontal passant par le centre de la bouche avec le plan vertical mené par l'axe de la pièce. Soient aa' et bb' les diamètres $2R$ et $2r$ de la plate-bande de culasse et du bourrelet, ou de la plate-bande de la bouche; soit ah la hausse, que nous désignerons par h ; soit l la longueur de la pièce ou la distance CO. La ligne de visée, dirigée vers le but B, sera hbB . Cette ligne rencontre l'axe de la pièce en un point I; joignons OB. L'angle $AOX = \alpha$ est donné; c'est l'angle de tir déterminé par les formules de balistique. L'angle $BOX = \beta$ est donné aussi; il a pour tangente le quotient des coordonnées rectangulaires du point B rapportées au point O, et dirigées l'une verticalement et l'autre horizontalement. L'angle $IBO = \delta$ est celui sous lequel le rayon Ob est vu du point B; sa tangente

est sensiblement égale à $\frac{r}{X}$, en appelant X l'abscisse du point B. Enfin l'angle AIB = $\omega = hIC$ dépend de la hausse h; on voit aisément que sa tangente a

pour valeur $\frac{h + (R - r)}{l}$. Or le triangle OIB donne la relation
 $AIB = AOB + IBO = AOX - BOX + IBC,$

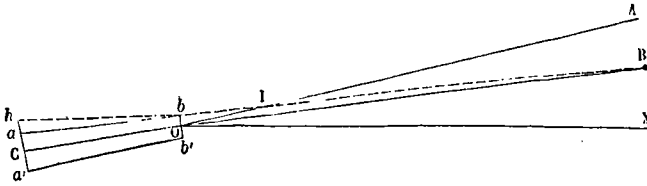


Fig. 1.

ou $\omega = \alpha - \beta + \delta.$ [1] Ces angles étant généralement petits, 15 à 16 degrés au plus pour l'obusier, on peut substituer aux angles leurs tangentes, et écrire

$$\text{tang } \omega = \text{tang } \alpha - \text{tang } \beta + \text{tang } \delta.$$

Or, les formules de balistique (Voy. BALISTIQUE, formule 28) donnent

$$\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta = \frac{gX}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \vartheta b.$$

En substituant à tang ω et tang δ leurs valeurs, on aura donc

$$\frac{h + (R - r)}{l} = \frac{gX}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \vartheta b + \frac{r}{X},$$

d'où

$$h = \frac{glX}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \vartheta b - (R - r) + \frac{rl}{X}, [2]$$

relation qui servira à calculer les hausses. Le dernier terme sera généralement négligeable. (Voy TABLES DE TIR.)

Lorsque la hausse doit être nulle, c'est-à-dire lorsque la ligne de visée est la droite ab (fig. 2), on dit que l'on tire *de but en blanc*; la ligne ab s'appelle la *ligne de visée naturelle*. La trajectoire, après avoir coupé la ligne de visée une première fois en I, la coupe une seconde fois en B, au but même; la distance bB est ce que l'on appelle la

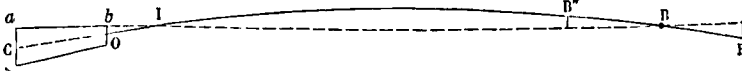


Fig. 2.

portée de but en blanc. On voit que si le but est en B', plus loin que la portée de but en blanc, il faut viser plus haut pour l'atteindre; si le but est en B'', plus près que la portée de but en blanc, il faut au contraire viser plus bas. La portée de but en blanc dépend, pour une charge donnée et un projectile donné, du rapport entre la différence des rayons R et r, et la longueur l de la pièce. On règle ordinairement ces dimensions de manière que la portée de but en blanc coïncide avec la distance de combat la plus ordinaire (de 450 mètres à 600 mètres pour les canons, suivant leur calibre). Mais il arrive alors que pour des distances moindres, il faudrait employer des hausses négatives, ce qui oblige à viser au-dessous du but, d'une quantité qui est de 2^m,60 avec les canons de campagne à âme lisse, et de 4 mètres à 5 mètres avec les canons de siège. Cette obligation rend le tir très-difficile et très-incertain quand il faut atteindre des fantassins ou des cavaliers, ou des épaulements d'une faible hauteur. On remédie à cet inconvénient en réglant la portée de but en blanc de manière qu'on n'ait jamais à viser au-dessous du but d'une quantité plus grande que la hauteur du but lui-même. Il n'en résulte d'autre inconvénient que de rendre les hausses plus grandes.

Lorsqu'on a un certain nombre de coups à tirer sur un même but, on peut éviter l'obligation de viser à chaque coup. Pour cela, après avoir pointé avec soin une première fois, on mesure avec une règle divisée la distance du sol à l'extrémité du

bouton de culasse, et l'on se contente de vérifier cette distance à chaque coup. Ce procédé est surtout commode dans les feux de nuit lorsqu'un premier pointage a été exécuté de jour.

Nous avons supposé que l'axe des tourillons était horizontal. Si cette condition n'est pas remplie, il y a une correction à faire dans le pointage. Supposons que par un moyen quelconque on ait donné à l'axe de la pièce la direction qu'il doit avoir pour atteindre le but; imaginons un moment qu'on fasse tourner la pièce autour de son axe jusqu'à ce que la hausse vienne se placer dans le plan vertical de l'axe à la partie supérieure de la pièce, et qu'on règle la hausse dans cette position, de manière que la ligne de mire aille passer par le point à battre; puis concevons que par un mouvement de rotation en sens inverse on ramène la hausse à sa place primitive. La ligne de mire coupera tou-

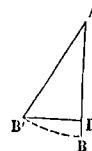


Fig. 3.

jours l'axe au même point, mais elle ne passera plus par le point à battre. Si l'on imagine que ce point, B (fig. 3), ait été entraîné avec la pièce dans

sa seconde rotation, il sera venu prendre une nouvelle position B', en décrivant autour de l'axe un arc de cercle BB' dont le plan est perpendiculaire à cet axe et a son centre en A sur cet axe même.

C'est donc le point B' qu'il faut viser avec la hausse, et non plus le point B. Il s'agit de déterminer ce point B'. D'abord l'angle BAB' dont la pièce a tourné, est précisément l'inclinaison i de l'axe des tourillons par rapport à l'horizon, puisque, dans le mouvement, cet axe qui était incliné est venu prendre la position horizontale. On a donc, en abaissant B'D perpendiculaire sur AB,

$$B'D = AB' \sin i = AB \sin i,$$

et

$$BD = AB (1 - \cos i) = 2 AB \sin^2 \frac{i}{2}. \quad [3]$$

En second lieu soient A, B, D (fig. 4) la position

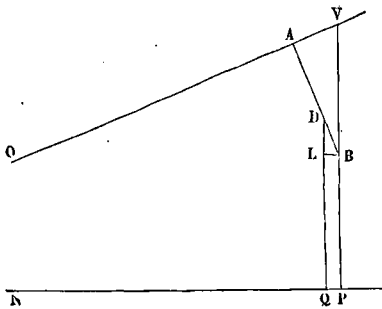


Fig. 4.

des points correspondants de la figure 3, dans le plan vertical de l'axe OA. Menons par les points B et D les verticales VP et DQ; puis l'horizontale BL. Le point D étant la projection du point B' sur le plan vertical de l'axe OA, on voit que ce point est au-dessus du point B d'une quantité égale à DL, et en avant de ce même point d'une quantité égale à BL ou PQ. Or, l'angle ABV n'est autre chose que l'angle de tir α , on a donc

$$DL = BD \cos \alpha \quad \text{et} \quad BL = BD \sin \alpha,$$

ou bien

$$DL = 2 AB \sin^2 \frac{i}{2} \cos \alpha,$$

$$BL = 2 AB \sin^2 \frac{i}{2} \sin \alpha.$$

Mais $AB = BV \cos \alpha$; et BV n'est autre chose que la quantité dont le projectile s'est abaissé dans le sens vertical sous l'action de la pesanteur; c'est le second terme du second membre dans l'équation de la trajectoire (Voy. BALISTIQUE, équation 20),

c'est-à-dire $\frac{gX^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \vartheta$, en appelant X la distance horizontale du but à la bouche à feu. On aura donc en définitive

$$B'D = \frac{gX^2 \sin i}{2v_0^2 \cos \alpha} \vartheta; \quad DL = \frac{gX^2 \sin^2 \frac{i}{2}}{v_0^2} \vartheta;$$

$$BL = \frac{gX^2 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \text{tang } \alpha}{v_0^2} \vartheta.$$

Ces trois quantités, qui sont en quelque sorte les

coordonnées rectangulaires du point B' par rapport au point B, fixeront la position du point qu'il faut viser avec la hausse pour atteindre le but. La première de ces trois quantités est la plus considérable; elle peut aller jusqu'à plus de 1^m,50 dans le tir de la pièce de campagne de 12 (lisse), à la distance du but en blanc, l'inclinaison i de l'axe des tourillons étant supposée de 10 degrés. On voit aisément que cette déviation latérale de la ligne de mire doit toujours avoir lieu du côté du tourillon le plus élevé. Mais les corrections dont nous venons de parler ne sont utiles à connaître que comme indication générale; il est évident que les circonstances dans lesquelles on fait usage des pièces de campagne à la guerre permettraient rarement d'y avoir égard d'une manière précise.

II. Le pointage des mortiers ne saurait s'exécuter d'une manière très-rigoureuse. En premier lieu, la bouche à feu est placée derrière un épaulement qui cache le but à atteindre; et l'on ne connaît le plan vertical du tir que par des fiches placées dans cet alignement sur l'épaulement même. En second lieu, l'inclinaison se mesure avec un fil à plomb et un arc de cercle, comme nous l'avons dit en commençant; et ce moyen offre peu de précision. Néanmoins les erreurs provenant du pointage sont ordinairement négligeables vis-à-vis des déviations provenant d'autres causes, et qu'on n'est pas maître d'éviter. Le tir des bombes se fait généralement sous un angle compris entre 30 degrés et 60 degrés; on emploie cette dernière inclinaison quand il s'agit d'enfoncer des voûtes ou de forts blindages; on tire sous le premier de ces angles quand on veut surtout produire des effets meurtriers par les éclats de la bombe, sans qu'elle s'enfonce dans le terrain.

Quelquefois cependant on tire la bombe comme un obus sous un angle de 10 degrés à 15 degrés. L'inclinaison la plus utile est 45 degrés, ou un angle un peu inférieur qui, pour la même charge, produit le maximum de portée.

III. Le pointage du fusil se fait ordinairement sans le secours d'une hausse. La portée de but en blanc étant de 150 mètres dans le modèle adopté en 1840, on n'a jamais besoin de viser plus bas que les pieds ni plus haut que la coiffure. Mais les carabines à grande portée ont une hausse particulière fixée à l'arme. (Voy. le *Traité de Balistique* de M. Didion, et le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert. Voy. aussi l'article ARMES RAYÉES.)

POINTÉ, ou *collimation*, opération qui consiste à assurer la direction d'un rayon visuel vers un signal. L'erreur inévitable du résultat porte le nom d'*erreur de pointé* (Voy. ERREURS [Théorie des]).

POISSONS, le douzième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

POITRAIL, forte poutre horizontale qui joue le rôle de sablière haute à l'étage inférieur d'une maison, et qui sert à recouvrir de larges espaces, comme une porte cochère ou un magasin. Cette poutre est ordinairement disposée comme il suit: on refend dans sa longueur une poutre brute grossièrement équarrie, on rapproche ensuite les deux parties en tournant vers l'extérieur les faces mises à nu par la scie; et on relie ces deux parties par des brides en fer. Cette méthode, qui n'ôte rien à

la résistance de la poutre, permet d'utiliser des bois dont la surface offre des parties défectueuses.

Depuis quelque temps on remplace les poutres en bois par des poutres en fer à section double T; deux ou trois de ces poutres, assemblées parallèlement par des brides en fer forment une poitrail qu'on substitue avantageusement au bois.

Pour déterminer les dimensions transversales d'un poitrail, on le considère comme un pièce posée sur deux appuis et chargée d'un poids uniformément réparti. Mais comme la pièce éprouve à ses extrémités un effort vertical qui peut tenir lieu d'une sorte de demi-encastrement, les constructeurs, au lieu d'adopter la formule (Voy. FLEXION PLANE)

$$\mu = \frac{1}{8} pa^2$$

qui convient au cas d'une pièce simplement posée sur des appuis, ou la formule

$$\mu = \frac{1}{12} pa^2$$

qui se rapporte au cas d'une pièce encastree par les deux bouts, se servent de la formule empirique

$$\mu = \frac{1}{10} pa^2,$$

dans laquelle le coefficient $\frac{1}{10}$ est intermédiaire entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$.

Considérons, par exemple, un poitrail de 3 mètres de long, destiné à soutenir trois étages de murs, d'une épaisseur moyenne de 0^m,35 et d'une hauteur totale de 12 mètres, plus la charge du comble et des planchers. Le poids du mètre cube de pierre étant d'environ 2000 kilogrammes, on aura d'abord pour le poids du mur par mètre courant

$$12 \cdot 0,35 \cdot 2000 \text{ ou } 8400^k;$$

ajoutant 2000 kilogrammes pour la charge par mètre provenant du comble et des planchers, on trouve

$$p = 10400^k.$$

On a d'ailleurs

$$a = 3^m;$$

il vient donc

$$\mu = \frac{1}{10} \cdot 10400 \cdot 9 = 9360.$$

On appliquera ensuite la formule

$$R = \frac{e\mu}{I}.$$

Si le poitrail est en chêne, à section carrée, ayant pour côté x , on aura, en prenant $R = 800000$, attendu qu'un poitrail se fait ordinairement en bois de choix,

$$800000 = \frac{6 \cdot 9360}{x^3},$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 9360}{800000}} = 0^m,4125,$$

ou environ 0^m,41.

Si le poitrail est formé de deux poutres en fer double T, chacune d'elles étant supposée supporter la moitié du poids total, on aura

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 9360 = 4680;$$

par suite, en prenant $R = 6000000$, on trouvera

$$6000000 = \frac{v}{I} 4680, \text{ d'où } \frac{1}{v} = 0,00078.$$

En consultant la table de M. Bourdais, rapportée à l'article PLANCHERS, on trouve que la poutre pour laquelle $\frac{1}{v}$ approche le plus de cette valeur est une poutre de la Providence dont les dimensions sont les suivantes :

Hauteur de la poutre.....	0 ^m ,300
Largeur des semelles.....	0 ^m ,120
Épaisseur de chaque semelle..	0 ^m ,018
Épaisseur de l'âme.....	0 ^m ,016

ce qui donne $\frac{1}{v} = 0,0007330$. Il est probable, en raison de la liaison des deux poutres, qui tend à augmenter leur résistance, que cette poutre résisterait à l'effort qu'elle doit supporter. Pour avoir une poutre dont les dimensions répondissent exactement à la question, il suffirait d'augmenter l'épaisseur de l'âme dans le rapport de 0,0007330 à 0,0007800; on devrait donc avoir, en nommant e cette épaisseur,

$$e : 0,016 = 0,0007800 : 0,0007330,$$

d'où

$$e = 0^m,01702,$$

ou environ 0^m,017, les autres dimensions restant les mêmes.

PÔLE INSTANTANÉ, point d'une surface sphérique autour duquel s'effectue la rotation instantanée d'une figure sphérique qui se meut d'une manière quelconque sur cette sphère (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ).

PÔLES DU MONDE, points où l'axe du monde perce la SPHERE CÉLESTE (Voy. ce mot). Celui des deux pôles qui est visible dans l'hémisphère où l'on se trouve s'appelle quelquefois le *pôle élevé*. On appelle *pôle boréal* le pôle placé dans l'hémisphère boréal, et *pôle austral* le pôle placé dans l'hémisphère austral.

POLHODIE (du grec *πόλος*, pôle, et *δῶς*, chemin; *route du pôle*), nom donné par M. Poinsoit à la courbe formée sur l'*ellipsoïde central* par la série des points de contact de cet ellipsoïde avec un plan fixe parallèle au plan du couple qui a imprimé à un corps solide un mouvement initial de rotation, soit autour de son centre de gravité s'il est libre, soit autour d'un point fixe s'il y en a un dans le système (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ). Voy. la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, par M. Poinsoit.

POLYGONE DES CHEMINS. Voy. COMPOSITION DES CHEMINS.

POLYGONE DES FORCES. Voy. COMPOSITION DES FORCES.

POLYGONE DES VITESSES. Voy. COMPOSITION DES VITESSES.

POLYGONE EXTÉRIEUR, polygone qui a pour sommets les saillants des bastions d'une enceinte fortifiée. Ce polygone sert de base au tracé de l'enceinte (Voy. FORTIFICATION).

POLYGONE FUNICULAIRE (du latin *funiculus*, corde), machine formée d'une corde en divers points de laquelle sont appliquées des forces. On suppose la corde parfaitement flexible et très-peu extensible.

1. Considérons d'abord une corde qui n'est sollicitée que par des forces appliquées à ses extrémités. Si l'on fait abstraction de son poids, on voit que

l'équilibre n'est possible qu'autant que les forces considérées se réduisent à deux résultantes égales et contraires appliquées aux deux extrémités dans la direction même de la corde; et il faut de plus que le sens de ces forces soit tel qu'elles tendent à allonger la corde. Soient F et F' (fig. 1) ces deux



Fig. 1.

forces maintenant en équilibre un fil ou une corde AB. Un élément quelconque MM' de la corde devant être lui-même en équilibre, il faut qu'il soit aussi sollicité à ses extrémités M et M' par deux forces égales et opposées, que nous nommerons T et T'. On aura donc $T = T'$. Mais si l'on considère l'équilibre de la portion MB de la corde, on doit avoir $T = F'$; si l'on considère de même l'équilibre de la portion M'A on doit avoir $T' = F$. Par conséquent la force T est égale à F : c'est ce qu'on nomme la tension de la corde au point M; de même la force T' est la tension au point M'.

Ici la tension est la même dans toute l'étendue de la corde; il n'en serait pas de même si l'on avait égard au poids de la corde. Si p désigne le poids par mètre courant de cette corde supposée verticale, on aura $F = F' + AB.p$; de même $T = F' + MB.p$, quantité qui varie avec la position du point M; elle est égale à F' au point B, et à F au point A. La tension est donc en général variable aux différents points d'une même corde en équilibre.

II. Considérons maintenant l'équilibre d'une corde sollicitée par des forces T et T' à ses extrémités et par une force F en un point déterminé M de sa longueur (fig. 2). Il faut pour l'équilibre que ces

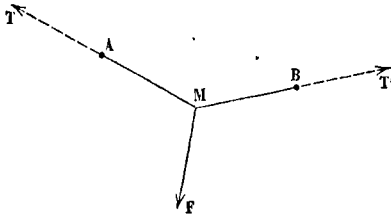


Fig. 2.

trois forces soient dans un même plan (Voy. ÉQUILIBRE) et que chacune d'elles soit égale et opposée à la résultante des deux autres. Le plan des trois forces est donc celui des trois points A, B, M. Il faut que la force T soit dirigée suivant MA; car autrement ce brin qui est flexible changerait de forme; de même la force T' doit être dirigée suivant MB. On doit avoir de plus, en désignant par (TT'), (TF), (T'F) les angles que les forces T et T' font entre elles et avec la force F (Voy. COMPOSITION DES FORCES)

$$\frac{T}{F} = \frac{\sin(T'F)}{\sin(TT')} \quad \text{et} \quad \frac{T'}{F} = \frac{\sin(TF)}{\sin(TT')}.$$

On peut conclure de ces relations que la corde AMB ne saurait être en ligne droite; car, si l'angle (TT') atteignait 180° , son sinus serait nul et l'on aurait $T = \infty$ et $T' = \infty$. Plus l'angle (TT') s'approche

de 180° et plus les tensions T et T' sont considérables pour une même valeur de F.

III. Si plusieurs cordes réunies par un même nœud sont en équilibre sous l'action d'autant de forces qui les sollicitent par leur extrémité libre, les conditions sont les mêmes que pour un système de forces concourantes. Chacune de ces forces doit être égale et opposée à la résultante de toutes les autres; c'est-à-dire que si l'on forme le polygone des forces (Voy. COMPOSITION DES FORCES), en considérant toutes les forces moins une, la ligne qui fermera le polygone représentera la dernière force.

IV. Considérons enfin un polygone funiculaire, c'est-à-dire une corde aBCDD (fig. 3) en équilibre

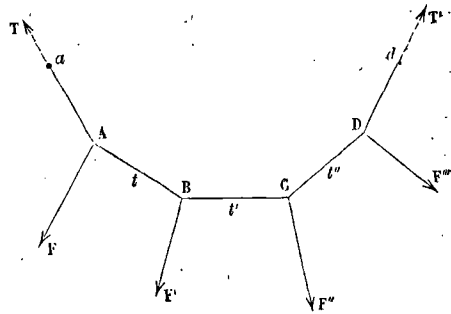


Fig. 3.

sous l'action des tensions T et T' des cordons extrêmes Aa et Dd, et d'un nombre quelconque de forces extérieures F, F', F'', F''', appliquées aux sommets de la ligne brisée qu'affecte la corde. Soient t, t', t'' les tensions des cordons intermédiaires AB, BC, CD. Ce système doit satisfaire aux 6 conditions d'équilibre d'un corps solide, car on ne troublerait pas l'équilibre en le solidifiant; mais ces 6 conditions sont insuffisantes, parce que le système peut varier de forme.

L'équilibre ayant lieu pour le polygone considéré dans son ensemble, a aussi lieu pour chaque sommet et pour chaque côté considéré séparément. Ainsi chaque sommet est en équilibre sous l'action des trois forces qui y sont appliquées; et chaque côté est en équilibre sous l'action des 4 forces qui le sollicitent. On en tire diverses conséquences. 1° La tension t est égale et opposée à la résultante des forces T et F; cette même tension, considérée comme appliquée en B, pourrait donc être remplacée par les forces T et F transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. 2° La tension t' est égale et opposée à la résultante des forces T, F et F' supposées appliquées en B; cette même tension, considérée comme appliquée en C, peut donc être remplacée par les forces T, F et F' transportées parallèlement à elles-mêmes au point C; et ainsi de suite. 3° On conclut aisément de ce qui vient d'être dit, que la tension de chaque côté est la même que si l'on transportait à chacune de ses extrémités toutes les forces situées au-delà; par exemple, la tension t' est la même que si l'on appliquait en B les forces T, F et F' et en C les forces F'', F''' et T'. 4° On verrait de même que toutes les forces transportées ainsi en un même sommet doivent s'y faire équilibre, ce que montrent d'ailleurs directement les trois premières équations d'équi-

libre, puisqu'elles expriment que la résultante de translation est nulle.

V. Le problème que l'on a le plus fréquemment à résoudre à l'occasion du polygone funiculaire est le suivant : *Trouver la figure du polygone, connaissant les longueurs de tous ses côtés, les forces $F, F', F'', \text{ etc.}$, en grandeur et en direction, et les tensions extrêmes T et T' en grandeur ou en direction.* Si l'on transporte en un point de l'espace les forces $F, F', F'', \text{ etc.}$, elles s'y composeront en une seule R , qui devra être égale et opposée à la résultante des forces T et T' ; pour trouver les directions de ces deux forces, si les intensités seules sont connues, on aura à résoudre un triangle connaissant les trois côtés (*Voy. DECOMPOSITION DES FORCES*); si les directions de ces deux forces sont données et qu'on cherche leurs intensités, on aura à résoudre un triangle connaissant un côté et les angles. Dans les deux cas, les forces T et T' seront complètement déterminées. On aura ainsi la direction du côté Aa . La direction du côté AB sera celle de la résultante des forces T et F ; et cette résultante elle-même donnera la valeur de la tension t . La direction du côté BC sera celle de la résultante des forces t et F' ; et cette résultante elle-même donnera la valeur de la tension t' . En continuant ainsi on obtiendra successivement la direction de tous les côtés, et la valeur de toutes les tensions intermédiaires. L'équilibre du dernier sommet D servira de vérification.

Si toutes les forces données sont dans un même plan, le problème peut être promptement résolu par une construction graphique. Après avoir adopté une échelle de longueur pour représenter les forces, construisez la ligne brisée $mnpqr$ (fig. 4) dont les

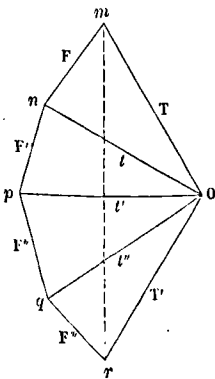


Fig. 4.

côtés successifs représentent respectivement en grandeur et en direction les forces F, F', F'', F''' ; la ligne mr qui ferme le polygone représentera leur résultante de translation R . Si T et T' sont données en direction, menez par le point m une parallèle à T et par le point r une parallèle à T' ; ces deux droites se couperont en un point O , et les côtés Om et Or représenteront les tensions T et T' en intensité aussi bien qu'en direction. Si les tensions T et T' sont données en intensité, décrivez des points m et r comme centres, avec T et T' pour rayons, deux arcs de cercle qui se couperont en un point O , les droites mO et rO représenteront T et T' en direction comme en intensité. Cela fait, joignez

On, Op, Oq ; ces droites seront les directions des côtés intermédiaires du polygone, et elles représenteront en grandeur les tensions t, t' et t'' .

VI. Si toutes les forces $F, F', F'', \text{ etc.}$, sont verticales, la ligne brisée $mnpqr$ devient une droite verticale (fig. 5). La construction est du reste la même

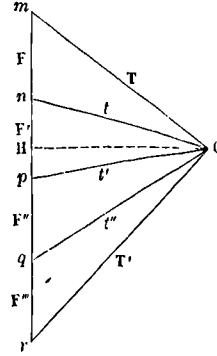


Fig. 5.

que dans le cas précédent; mais le polygone jouit de propriétés particulières que la figure met en évidence, et qu'on peut d'ailleurs démontrer par les principes de l'équilibre. Voici ces propriétés : 1° *Le polygone est dans un plan vertical*; 2° *les projections horizontales ($OH = T_0$) de toutes les tensions sont égales*; 3° *la somme algébrique des projections verticales de deux tensions quelconques est égale à la somme de toutes les forces extérieures intermédiaires.*

La première proposition est évidente; le plan du polygone est le plan mOr . La deuxième n'est pas moins évidente : si l'on abaisse OH perpendiculaire sur mr , et par conséquent horizontal, ce sera la projection horizontale d'une quelconque des droites Om, On, Op, Oq , ou Or . Pour démontrer la troisième, considérons par exemple les tensions T et t'' . La projection verticale de la première est mH , et la projection verticale de la seconde est qH ; la somme de ces projections est mq , portion de la verticale comprise entre les extrémités des droites Om et Oq qui représentent les tensions considérées; or, cette longueur mq est, par la construction même, la somme des forces extérieures F, F' et F'' comprises entre les tensions T et t'' .

VII. Lorsque les forces $F, F', F'', \text{ etc.}$, sont des poids suspendus aux sommets du polygone, la figure jouit d'une dernière propriété : c'est que *le point d'intersection des directions de deux tensions quelconques est situé sur la verticale du centre de gravité* (*Voy. CENTRE DE GRAVITÉ*) *du système formé par les poids compris entre ces deux tensions.* Soient, en effet, pour fixer les idées, les deux tensions T et t'' (fig. 6) dont les directions se coupent en un point I . La portion ABC de la corde est en équilibre sous l'action des tensions T, t'' et des poids intermédiaires P, P', P'' ; il faut donc que la résultante des forces P, P', P'' soit égale et opposée à celle des forces T et t'' . Or la résultante de ces poids est une force verticale égale à leur somme, et passant par le centre des forces parallèles ou par le centre de gravité du système formé par ces poids; la résultante des forces T et t'' passe par le point I ; et elle

doit être directement opposée à celle des poids P, P', P''; il faut donc que le point I soit sur la verticale du centre de gravité de ces poids.

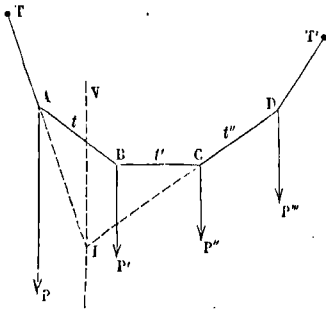


Fig. 6.

Tout ce qui précède est applicable à un polygone formé par un fil ou par un câble métallique, suffisamment flexible.

(Voy. CHAÎNETTES, PONTS SUSPENDUS.)

POLYGONE INTÉRIEUR, polygone formé par les courtines d'une enceinte bastionnée. Quelques ingénieurs ont pris ce polygone pour base de leur tracé, parce qu'il est immédiatement déterminé par l'emplacement que la ville occupe. Mais l'emploi du **POLYGONE EXTÉRIEUR** (Voy. ce mot) a prévalu, à cause de l'importance qu'il y a, au point de vue de la défense, à déterminer à l'avance la position des saillants des bastions (Voy. FORTIFICATION).

POLYGONE TOPOGRAPHIQUE, polygone dont la considération sert de base au lever d'un plan (Voy. LEVER DES PLANS); ses sommets doivent être choisis sur le contour du terrain, ou près de ce contour, de manière que de chacun d'eux on aperçoive le sommet qui précède et le sommet qui suit, et que la distance horizontale de deux sommets consécutifs puisse être facilement mesurée. On plante, à chaque sommet du polygone un **JALON** (Voy. ce mot), dont on a soin de déterminer exactement la position par rapport aux objets environnants si l'opération doit être interrompue et reprise.

POLYTROPE (du grec πολύτροπος, nombreux, et τρέπω, tourner), appareil imaginé par M. George Sire pour reproduire les expériences que l'on fait avec le **GYROSCOPE**, la **BALANCE GYROSCOPIQUE**, le **CULBUTEUR HARDY**, l'**APPAREIL DE BOHNENBERGER**, etc. (Voy. ces mots). Il se compose d'un gyroscope établi à l'extrémité d'un rayon mobile d'un cercle vertical, susceptible lui-même de tourner autour d'un axe vertical. (Voy. le Mémoire présenté par M. Sire à la Société d'émulation du Doubs). Le cercle vertical figure le méridien; et à l'aide du rayon mobile, on peut placer le gyroscope à diverses latitudes.

POMPES, appareils destinés à élever les eaux. Une pompe se compose le plus ordinairement d'un tuyau cylindrique, appelé **corps de pompe**, dans lequel se meut un **PISTON** (Voy. ce mot) qui en augmente ou en diminue tour à tour la capacité, et de **SOUAPES** (Voy. ce mot) destinées à établir ou à fermer alternativement la communication entre le corps de pompe et les autres tuyaux dans les-

quels l'eau doit se mouvoir. Cependant il existe des appareils auxquels on donne aussi le nom de pompes, et qui sont construits sur un principe différent. La disposition des pompes varie pour ainsi dire à l'infini, et leur description complète exigerait un traité spécial; mais elles se réduisent, en définitive, à un petit nombre de types qu'il suffit d'étudier pour être en état de les comprendre toutes; ces types sont : les **pompes aspirantes et élévatoires**, les **pompes aspirantes et foulantes**, les **pompes à double effet**, les **pompes oscillantes**, les **pompes rotatives**, la **pompe spirale**, les **pompes à force centrifuge**, les **pompes à hélice**.

I. **POMPES ASPIRANTES ET ÉLEVATOIRES**. Le corps de pompe AA' (fig. 1) est situé au-dessus du réservoir

inférieur ou **puisard**, auquel il communique par un tuyau d'un plus petit diamètre AB, appelé **tuyau d'aspiration**; à la partie supérieure du corps de pompe est adapté un autre tuyau CD, d'un diamètre ordinairement moindre, et qui se recourbe pour prendre la direction verticale; c'est le **tuyau d'ascension**. Le piston est à soupape, et sa tige traverse une boîte à étoupe adaptée à la base supérieure du corps de pompe. Une soupape fixe A, appelée **soupape dormante**, sépare le tuyau d'ascension du corps de pompe, et s'ouvre de bas en haut, comme la soupape du piston. Voici d'abord le

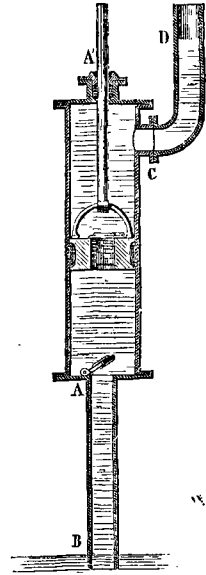


Fig. 1.

jeu de l'appareil. Supposons la pompe remplie d'air, et le piston au bas de sa course, en A. Quand le piston s'élèvera, sa soupape se fermera par l'effet de la pression atmosphérique qui agit au-dessus; l'air compris entre la soupape dormante et le niveau B de l'eau dans le tuyau d'aspiration, exerçant sur cette soupape une pression de bas en haut égale à la pression atmosphérique, tandis que dans la capacité comprise entre le piston et le fond du corps de pompe la pression est nulle ou très-faible, la soupape dormante s'ouvrira, et l'air passera du tuyau d'aspiration dans le corps de pompe. Mais comme il occupera alors un plus grand espace, la pression diminuera; et la pression atmosphérique qui agit sur le niveau de l'eau dans le puisard, fera monter ce liquide dans le tuyau d'aspiration. — Quand le piston redescendra, la soupape dormante retombera par son propre poids; la pression de l'air situé au-dessous du piston dans le corps de pompe ira en augmentant, deviendra supérieure à la pression atmosphérique, fera ouvrir la soupape du piston, et cet air passera au-dessus du piston. Les choses se trouveront alors rétablies dans l'état où elles étaient d'abord, avec cette différence que l'eau du puisard sera élevée d'une certaine hau-

teur dans le tuyau d'aspiration. — Pendant les alternatives suivantes du piston, l'eau continuera à monter dans ce tuyau, franchira la soupape dormante, puis la soupape du piston, et s'écoulera par le tuyau d'ascension. En effet, à chaque descente du piston, la soupape dormante se fermera, la soupape du piston s'ouvrira, et l'eau située au-dessous du piston dans le corps de pompe passera au-dessus. A chaque montée du piston, sa soupape se fermera, la soupape dormante s'ouvrira; l'eau située au-dessus du piston sera élevée et s'écoulera par le tuyau d'ascension, tandis qu'une quantité d'eau égale s'élèvera, par l'effet de la pression atmosphérique, dans le tuyau d'aspiration, et de là dans le corps de pompe.

II. Toutefois, pour que la soupape se remplisse et puisse fonctionner, certaines conditions doivent être satisfaites. Lorsque le piston est au bas de sa course, il existe toujours entre sa face inférieure et le fond du corps de pompe un petit espace que l'on a appelé l'espace nuisible; désignons par v son volume; soit V le volume décrit par la base du piston dans sa course, h la hauteur de la soupape dormante au-dessus du puisard, z la hauteur du niveau de l'eau dans le tuyau d'aspiration après un certain nombre de coups de piston, au-dessus de ce même puisard, et H la hauteur d'eau (10^m,334) qui représente la pression atmosphérique. Le piston étant au bas de sa course, s'il s'élève complètement, l'air situé au-dessous, et qui occupait le volume v , vient occuper l'espace $V + v$; sa pression qui était la pression atmosphérique, et que nous pouvons représenter par H , devient donc, en vertu de la loi de Mariotte,

$$H \cdot \frac{v}{V + v}$$

D'un autre côté, la pression de l'air situé dans le tuyau d'aspiration au-dessous de la soupape dormante est exprimée par $H - z$. Pour que la soupape s'ouvre, il faut que cette dernière pression l'emporte sur celle de l'air contenu dans le corps de pompe; on doit donc avoir

$$H - z > H \cdot \frac{v}{V + v}, \text{ d'où } z < H \cdot \frac{V}{V + v}$$

et, comme z ne peut être supérieur à h , il faut qu'on ait

$$h < H \cdot \frac{V}{V + v}, \quad [1]$$

ce qui limite la hauteur de la soupape dormante au-dessus du puisard. — On voit par la valeur de cette limite, qu'il y a intérêt à diminuer autant que possible l'espace nuisible v , afin de pouvoir placer la soupape dormante plus haut. Toutefois, à cause des fuites inévitables, on place rarement cette soupape à plus de 8^m au-dessus du puisard.

Il ne suffit pas que l'eau franchisse la soupape dormante; il pourrait arriver que le volume d'air compris entre le niveau de l'eau arrivée dans le corps de pompe et la face inférieure du piston au bas de sa course formât un espace nuisible suffisant pour empêcher l'aspiration. Mais on évitera toujours cet accident en faisant en sorte que la face inférieure du piston au bas de sa course soit à une hauteur au-dessus du puisard au plus égale au second membre de l'inégalité [1].

Il est bon de remarquer que ce qui vient d'être dit suppose l'eau à la température ordinaire, auquel

cas la vapeur dégagée par l'eau, et qui vient remplir et saturer l'espace raréfié, peut ne pas être prise en considération. Il n'en serait plus de même si l'eau était chaude; et avec de l'eau bouillante toute aspiration deviendrait impossible. Dans ce cas on place le corps de pompe dans le puisard même, et la pompe devient *simplement élévatoire*.

III. Lorsqu'on s'est assuré du remplissage de la pompe, il faut étudier l'équilibre des forces qui la sollicitent pendant le mouvement lent du piston. Considérons le piston pendant la montée, et soit z la hauteur de sa face inférieure au-dessus du puisard. La pression qu'il éprouve de bas en haut est, en appelant Ω sa surface,

$$\Pi \Omega (H - z).$$

Soit Z la hauteur du niveau dans le tuyau d'ascension, au-dessus de celui du puisard; la pression éprouvée par le piston sur sa face supérieure est

$$\Pi \Omega (H + Z - z)$$

en négligeant l'épaisseur du piston. La différence de ces deux pressions est donc

$$\Pi \Omega Z.$$

Soit F la force verticale de bas en haut qui sollicite la tige du piston; elle devra, pour l'équilibre, être égale à cette différence, augmentée du frottement φ du piston contre les parois du corps de pompe, et du poids P du piston et de la tige, diminués du poids p d'eau qu'ils déplacent. On devra donc avoir

$$F = \Pi \Omega Z + \varphi + P - p. \quad [2]$$

Considérons maintenant le piston pendant sa descente. La pression sur les deux faces du piston est la même, puisque, la soupape du piston étant ouverte, le liquide placé au-dessus et celui qui est au-dessous communiquent. En appelant F' la force verticale de haut en bas qui agit sur la tige du piston, et φ' le frottement, qui peut ne pas être le même que dans la montée, on doit avoir

$$F' = \varphi' - P + p. \quad [3]$$

IV. Les quantités φ et φ' sont assez difficiles à calculer exactement. Si le piston est garni d'un cuir embouti, on peut admettre que le frottement est proportionnel à la pression exercée par l'eau; en sorte que si h désigne la hauteur d'eau qui mesure la différence des pressions au-dessus et au-dessous du piston, λ la hauteur du cuir qui frotte, D le diamètre du piston, Π le poids du mètre cube d'eau, et f un coefficient donné par l'expérience, on peut écrire

$$\varphi = f \cdot \Pi D \lambda h \quad [4]$$

et prendre $f = 0,29$ pour une garniture de cuir frottant dans un corps de pompe en chêne, $f = 0,36$ pour une garniture de cuir mouillé, mais non graissé, frottant dans un corps de pompe en fonte, $f = 0,23$ pour une garniture de cuir mouillé et onctueux frottant dans un corps de pompe en fonte.

Si le piston est garni de chanvre ou de rondelles de cuir superposées, on emploie la formule empirique suivante, due à Eytelwein,

$$\varphi = K D h, \quad [5]$$

dans laquelle on prendra, d'après Langsdorff :

$K = 7^k$ pour un piston et un corps de pompe en laiton, bien poli;

$K = 15^k$ pour un piston et un corps de pompe en fonte;

$K = 25^k$ pour un corps de pompe en bois bien uni;

$K=50^k$ pour un corps de pompe en bois, dégradé par l'usage.

V. Il s'agit maintenant d'évaluer le travail moteur qu'il faut appliquer à la tige du piston. Le travail élémentaire de la force F pour un petit déplacement dx du piston est exprimé par Fdx ; le travail élémentaire de la force F' pour un déplacement égal en sens contraire répondant à la même valeur de x est $F'dx$; la somme de ces deux travaux est $(F + F')dx$; ou, en mettant pour F et F' leurs valeurs,

$$(\Pi\Omega Z + \varphi + \varphi')dx.$$

Si l'on fait la somme de tous les couples de travaux élémentaires analogues pendant une course entière l du piston, on obtient donc un travail total exprimé par

$$(\Pi\Omega Z + \varphi + \varphi')l. \quad [6]$$

On peut remarquer que le premier terme

$$\Pi\Omega Z \text{ ou } \Pi\Omega l Z$$

est le poids d'eau introduit à chaque double course du piston, multiplié par la hauteur Z à laquelle l'eau est élevée, c'est-à-dire le travail utile; en sorte que le travail exprimé par la formule ci-dessus se compose du travail utile augmenté du travail des frottements, résultat qu'on pouvait prévoir.

Pour obtenir le travail moteur à appliquer à la machine, il faudrait encore ajouter à celui qu'on vient de calculer : le travail dû au frottement de l'eau dans les divers tuyaux qu'elle traverse, le travail perdu par les changements brusques de section, le travail consommé par le choc des soupapes, enfin le travail perdu représenté par la puissance vive que possède l'eau en s'écoulant par l'extrémité du tuyau d'ascension. — On emploie généralement pour calculer le frottement de l'eau dans les pompes les formules ordinaires relatives au frottement de l'eau dans les conduites (Voy. ce mot), en prenant pour vitesse la vitesse moyenne du piston. Il est douteux qu'on obtienne ainsi un résultat exact, attendu que dans les pompes le mouvement n'est point permanent. On peut faire une observation analogue relativement au calcul de la perte de puissance vive due aux CHANGEMENTS BRUSQUES DE SECTION (Voy. ce mot). Le travail consommé par le choc des soupapes ne peut être évalué. La perte de travail due à la puissance vive que l'eau conserve en sortant du tuyau d'ascension peut être calculée pour une montée du piston quand on connaît la loi de variation de sa vitesse. Soit, en effet, v la vitesse du piston à un certain moment, et u la vitesse correspondante de l'eau dans le tuyau d'ascension, en nommant A la section de celui-ci on aura

$$\Omega V = Au, \text{ d'où } u = \frac{\Omega}{A} v.$$

Si le piston se déplace d'une fraction infiniment petite dl de sa course, il engendre un volume Ωdl , représentant une masse d'eau déplacée

$$\frac{\Pi\Omega dl}{g}.$$

La puissance vive d'une masse d'eau égale sortant du tuyau d'ascension est

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi\Omega dl}{g} \cdot u^2 \text{ ou } \frac{\Pi\Omega^3}{2gA^2} v^2 dl.$$

Si v est connu pour chaque position du piston, on pourra en intégrant cette expression depuis 0

jusqu'à l , par la méthode approximative de Th. Simpson (Voy. QUADRATURES), obtenir la valeur de la puissance vive de l'eau écoulée pendant une montée du piston.

VI. POMPES ASPIRANTES ET FOULANTES. Le tuyau d'aspiration AB (fig. 2) plonge dans le puisard

comme pour la pompe aspirante et élévatoire; le tuyau d'ascension CD prend naissance au bas du corps de pompe. Le piston est un piston plein. Sur la figure c'est un piston plongeur traversant, dans une boîte à étoupes la base supérieure du corps de pompe. Quand le piston est un piston à garniture, il devient inutile de fermer le corps de pompe par le haut. Les deux soupapes A et C sont dormantes. La première sert de communication entre le tuyau d'aspiration et le corps de pompe, la seconde entre le corps de pompe et le tuyau d'ascension. La soupape A s'ouvre de bas en haut; la soupape C s'ouvre de dedans en dehors, par rapport au corps de pompe. — L'aspiration se fait, comme dans la pompe aspirante et élévatoire, à chaque montée du piston; mais c'est pendant sa descente que l'eau s'élève dans le tuyau d'ascension. Quand le piston descend, la soupape A se ferme par son propre poids; l'eau du corps de pompe, refoulée par le piston, fait ouvrir la soupape C, et passe dans le tuyau d'ascension. Quand le piston remonte, la soupape C se ferme par l'effet de la pression atmosphérique et du poids de l'eau contenue dans le tuyau d'ascension; et la pression atmosphérique qui agit sur la surface de l'eau du puisard, la fait monter dans le tuyau d'aspiration et de là dans le corps de pompe en faisant ouvrir la soupape A.

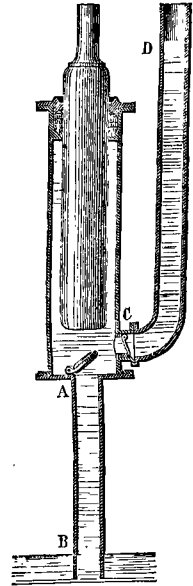


Fig. 2.

VII. La condition de remplissage est la même que pour la pompe aspirante et élévatoire.

Examinons les conditions de l'équilibre. Considérons le piston pendant la montée; en conservant les notations adoptées plus haut, nous aurons pour la pression sur la face supérieure du piston

$$\Pi\Omega H$$

et sur la face inférieure

$$\Pi\Omega (\Pi - z),$$

pressions dont la différence est $\Pi\Omega z$; on devra donc écrire

$$F = \Pi\Omega z + \varphi. \quad [7]$$

Considérons le piston dans la descente; nous trouverons pour la pression sur la face supérieure

$$\Pi\Omega H$$

et sur la face inférieure

$$\Pi\Omega (H + Z - z),$$

différence $\Omega\Pi (Z - z)$;

nous devons donc écrire

$$F' = \Pi\Omega (Z - z) + \varphi', \quad [8]$$

φ et φ' désignant toujours le frottement du piston

soit contre la boîte à étoupes, si c'est un piston plongeur, soit contre le corps de pompe, si c'est un piston à garniture.

En opérant comme plus haut, on trouvera que le travail principal consommé dans une course du piston est exprimé par

$$(F + F')l$$

ou, en mettant pour F et F' leurs valeurs [7] et [8]

$$(H\Omega Z + \varphi + \varphi')l,$$

expression identique à l'expression [6] obtenue dans le cas de la pompe aspirante et élévatoire. Les autres considérations relatives à ce genre de pompes s'appliquent également aux pompes aspirantes et foulantes.

Quelquefois on place directement le corps de pompe dans le puisard et la pompe devient *simple-ment foulante*, attendu qu'il n'y a plus d'aspiration nécessaire pour remplir le corps de pompe.

VIII. Les deux classes de pompes dont il vient d'être question sont celles que l'on emploie le plus fréquemment, sous les formes et dans les circonstances les plus diverses; depuis les pompes ménagères qui élèvent l'eau à une médiocre hauteur, jusqu'à la pompe actuelle de Marly qui élève l'eau d'un seul jet à une hauteur de 155^m; depuis les pompes servant au jardinage, jusqu'aux pompes à épuisement employées dans les mines. Dans cette dernière circonstance, comme la hauteur à laquelle il faut élever les eaux est quelquefois considérable, on la divise en plusieurs étages à chacun desquels on établit une pompe, la pompe de chaque étage puisant l'eau dans un réservoir où elle a été versée par la pompe de l'étage inférieur; une même tige principale, à laquelle sont adaptées des tiges secondaires latérales, fait mouvoir à la fois toutes les pompes.

Le rendement des pompes aspirantes élévatoires ou des pompes aspirantes et foulantes varie beaucoup suivant le soin avec lequel elles sont exécutées. Dans les pompes les mieux construites l'effet utile peut aller jusqu'à 0,88 ou même 0,90 du travail moteur; le plus ordinairement on n'obtient que 0,70 à 0,75; et dans les pompes ménagères, le rendement peut descendre jusqu'à 0,40 et même 0,30, surtout si la machine n'est pas dans un parfait état d'entretien.

Il est important, au point de vue du rendement, de ne donner au piston qu'une vitesse de 0^m,20 à 0^m,30 au plus; les frottements, les pertes dues aux étranglements, la perte due à la puissance vive que l'eau conserve au sommet du tuyau d'ascension, etc., croissent très-rapidement avec la vitesse, en sorte qu'il y a intérêt à la maintenir dans de faibles limites. Ces pertes sont d'ailleurs à peu près indépendantes de la hauteur à laquelle l'eau est élevée, ce qui explique pourquoi le rendement augmente pour une même pompe avec la hauteur d'élévation; ces pertes prennent, en effet, une importance d'autant plus grande que l'effet utile est plus petit, c'est-à-dire que la hauteur d'élévation est moindre.

IX. Il est important de faire en sorte que l'eau s'élève d'un mouvement à peu près uniforme dans le tuyau d'ascension. Si, en effet, ce tuyau a une hauteur considérable, le frottement de l'eau contre ses parois constitue la plus grosse part des pertes dont il a été question tout à l'heure; or, le travail dû

à ce frottement variant à peu près comme le cube de la vitesse, ou comme $(au + bw^2)u$, on obtient une perte moindre avec une vitesse moyenne constante u , qu'avec des vitesses variables, les unes au-dessous de u , et les autres au-dessus. En outre, toutes les fois que la vitesse augmente, il faut un certain travail moteur pour vaincre l'inertie du fluide. Il y a donc avantage à rendre la vitesse aussi constante que possible. On peut employer pour cela plusieurs moyens. L'un des plus usités consiste à employer 3 pompes simples, égales, communiquant avec un même tuyau d'ascension, et dont les tiges sont mises en mouvement à l'aide d'une MANIVELLE TRIPLE (Voy. ce mot). Soient A, B, C (fig. 3) les points d'articulation des trois tiges avec les trois manivelles, dont les rayons OA, OB, OC font entre eux des angles de 120°. Nous supposons les tiges assez longues pour qu'on puisse les considérer comme demeurant sensiblement verticales. Soit v la vitesse, supposée constante, de chacun des points A, B, C; les vitesses des trois pistons seront les projections verticales des vitesses de ces trois points, et la vitesse de l'eau dans le tuyau d'ascension sera proportionnelle à la somme des vitesses des pistons *ascendants*. A certains instants, il y a un seul piston qui monte, tandis que les deux autres descendent; cela a lieu pour le piston correspondant à A, depuis l'instant où OA fait avec l'horizontale HH' un angle de -30° jusqu'à l'instant où cet angle devient égal à $+30^\circ$. Dans cet intervalle la vitesse du piston A est $v \cos \alpha$, en appelant α l'angle AOH; la vitesse de l'eau dans le tuyau d'ascension est donc proportionnelle à cette quantité, qui varie de 0,866 v à v , quand α varie de -30° à 0; puis de v à 0,866 v quand α varie de 0 à $+30^\circ$. A d'autres instants, il y a deux pistons qui montent pendant que le troisième descend; cela a lieu pour les pistons répondant à A et à C, depuis l'instant où OA fait avec OH un angle $\alpha = +30^\circ$ jusqu'à l'instant où cet angle α atteint 90° . La somme des vitesses des pistons A et C est alors

$$v [\cos \alpha + \cos (\alpha + 240^\circ)]$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{2} v (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)$$

et cette quantité, proportionnelle à la vitesse de l'eau dans le tuyau d'ascension, varie encore de 0,866 v à v , quand α varie de $+30^\circ$ à $+60^\circ$, puis elle varie de v à 0,866 v quand α varie de 60° à 90° . Si α dépasse 90° , c'est le piston C qui monte seul pendant que les deux autres descendent, et l'on retombe, pour la vitesse dans le tuyau d'ascension, sur des valeurs déjà obtenues. Cette vitesse reste donc comprise entre des valeurs proportionnelles à 0,866 et à l'unité. Le mouvement approche donc beaucoup d'être uniforme.

Un autre moyen consiste à placer vers le bas du tuyau d'ascension une capacité en partie occupée par de l'air, et que l'on nomme pour cette raison RÉSERVOIR D'AIR (Voy. ce mot). L'eau sortant du

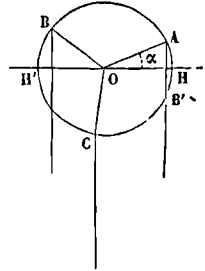


Fig. 3.

corps de pompe est versée dans ce réservoir, et y comprime l'air contenu; la pression du gaz s'exerçant sur la surface du liquide, dans lequel plonge le tuyau d'ascension, oblige l'eau à s'élever par cette voie. Si la capacité du réservoir d'air est assez grande, les variations de vitesse de l'eau affluente ne produisent que de très-faibles variations dans la pression de l'air; et par suite l'élévation de l'eau dans le tuyau d'ascension a lieu sous une pression à peu près constante, et par conséquent d'un mouvement sensiblement uniforme.

X. Cette disposition est adoptée dans les pompes à incendie (fig. 4). Un appareil de ce genre se compose de deux pompes foulantes A et A' dont les tiges sont articulées à un balancier BB', mobile autour d'un axe horizontal O. Entre les deux corps de pompes est établi un réservoir d'air, qui reçoit l'eau refoulée alternativement par chaque pompe. Dans le liquide qui remplit en partie ce réservoir plonge l'extrémité inférieure du tuyau d'ascension

DD, dont l'autre extrémité reçoit le tuyau flexible qui sert à diriger le jet. — Le rendement de ces pompes n'est guère que de 0,32, et peut descendre au-dessous de 0,20 suivant M. Morin.

XI. POMPES A DOUBLE EFFET. Dans les pompes dont il a été question jusqu'ici, l'eau n'est élevée que pendant une demi-oscillation du piston: pendant la montée, s'il s'agit d'une pompe élévatoire, pendant la descente, s'il s'agit d'une pompe foulante. — On a cherché à disposer les pompes de manière que l'eau fût élevée aussi bien dans la montée que dans la descente; les pompes dans lesquelles ce résultat est obtenu portent le nom de pompes à double effet. Le corps de pompe VV (fig. 5) est muni de deux soupapes A et B à la partie inférieure, et de deux autres A' et B' à la partie supérieure; les soupapes A et B', s'ouvrant de dehors en dedans par rapport au corps de pompe, communiquent avec le tuyau d'aspiration CA ou CB'; les soupapes B et A', s'ouvrant du dedans au de-

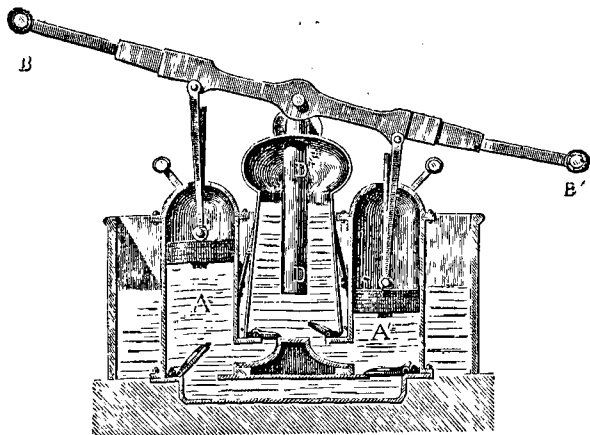


Fig. 4.

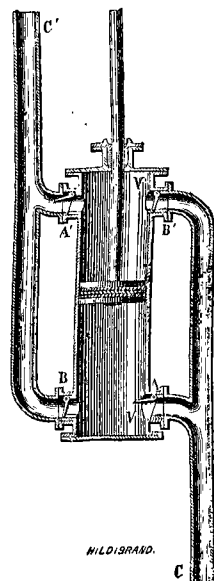


Fig. 5.

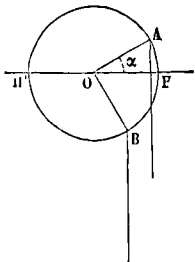
nors, communiquent avec le tuyau d'ascension BC' ou A'C'. Dans l'intérieur du corps de pompe se meut un piston plein, dont la tige traverse la base supérieure au moyen d'une boîte à étoupes.

Pour le jeu de cette pompe, il faut concevoir qu'elle ait été amorcée, c'est-à-dire remplie d'eau par des orifices spéciaux que l'on ferme ensuite. Ceci étant admis, supposons que le piston s'élève; les soupapes A et A' s'ouvriront; l'eau du puisard montera par le tuyau d'aspiration et pénétrera dans le corps de pompe en traversant l'orifice A; et l'eau située au-dessus du piston sera élevée dans le tuyau d'ascension en traversant l'orifice A', les soupapes B et B' resteront fermées. — Supposons au contraire que le piston descende; les soupapes A et A' se fermeront; les soupapes B et B' s'ouvriront; l'eau du puisard s'introduira dans le corps de pompe en traversant l'orifice B'; l'eau placée au-dessous du piston sera refoulée dans le tuyau d'as-

cension en traversant l'orifice B. Ainsi il y aura une même quantité d'eau élevée à chaque demi-oscillation du piston, ce qui contribuera à la régularité du mouvement ascensionnel de l'eau. Mais c'est là, à peu près, le seul avantage de ce dispositif. Il est clair, en effet, que s'il produit un effet utile double, il exige par contre un travail moteur double aussi; et la complication du système rend la surveillance et l'entretien de la machine plus difficiles. Aussi ce système est-il rarement employé. On préfère accoupler deux pompes dont les pistons sont liés à un balancier de manière à marcher toujours en sens contraire; et réunir en un seul les tuyaux d'aspiration, en y ajoutant au besoin un réservoir d'air. Cet accouplement de deux pompes est particulièrement employé dans les pompes destinées aux épuisements, parce que le travail continu que ces épuisements nécessitent, s'effectue plus aisément à l'aide d'un balancier, aux extré-

mités duquel on peut appliquer plusieurs manœuvres.

Les conditions de régularité indiquées au n° IX pourraient être remplies d'une manière satisfaisante avec deux pompes à double effet, égales, dont les tiges seraient mises en mouvement à l'aide d'une MANIVELLE DOUBLE (Voy. ce mot). Mais dans ce cas il est avantageux de placer les deux manivelles à angle droit, comme l'indique la figure 3 bis en OA et OB. Si α représente l'angle de l'une de ces manivelles avec l'horizontale, on reconnaît aisément, en raisonnant comme au numéro cité, que le produit des pompes est proportionnel à



3 bis.

$$\sin \alpha + \cos \alpha$$

ou à

$$2 \sin 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - \alpha)$$

c'est-à-dire, en définitive, à

$$\cos (45^\circ - \alpha),$$

quantité qui ne varie que de 0,707 à l'unité, quand α varie de 90°. On obtiendrait donc ainsi une régularité générale

suffisante. Mais, pour les raisons indiquées ci-dessus, on a rarement recours à ce dispositif, et l'on préfère employer trois pompes à simple effet.

XII. POMPES OSCILLANTES. Elles sont ainsi nommées parce que l'organe qui joue le rôle de piston oscille autour d'un axe entre certaines positions. Le modèle le plus remarquable de ce genre d'appareil est la pompe de Bramah (fig. 6). Le corps de

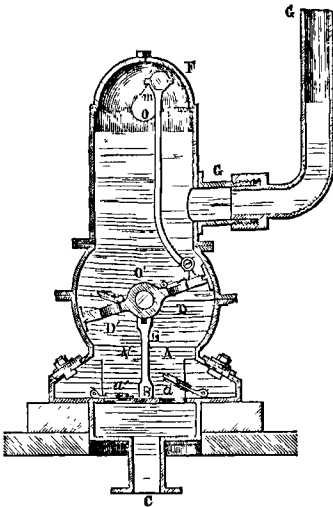


Fig. 6.

pompe est un cylindre horizontal. AA', divisé dans sa partie inférieure, et à partir de son axe, en deux capacités distinctes A, A' par une cloison verticale BB. Chacune de ces capacités peut être mise en communication avec le tuyau d'aspiration C, au moyen de deux soupapes a, a'. L'organe qui joue le rôle de piston est une pièce rectangulaire, dont on ne voit que la coupe DD' sur la figure, et qui peut tourner autour d'un axe O' placé au sommet

de la cloison BB. Ce piston est muni de soupapes qui s'ouvrent de bas en haut. Il est relié par une bielle EE à un arbre coudé mO formant manivelle et tournant autour d'un axe horizontal O; en sorte que le piston prend un mouvement circulaire alternatif autour de son axe O', lorsque la manivelle tourne autour de l'axe O. Ses bords sont munis d'une garniture en cuir qui empêche l'eau de passer entre le piston et le corps de pompe. Si le côté D s'élève, la soupape D se ferme, la soupape a s'ouvre, et l'eau est aspirée dans la capacité A; en même temps, la soupape D' s'ouvre, la soupape a' se ferme, et l'eau contenue dans la capacité A' passe au-dessus du piston. L'inverse a lieu quand le côté D redescend. On voit donc que l'appareil fonctionne comme une pompe aspirante et foulante à double effet. L'eau qui a passé au-dessus du piston, se rend dans un réservoir d'air FF situé au-dessus du corps de pompe, et de là s'écoule par le tuyau d'ascension GG. L'axe de la manivelle est muni d'un volant, dont l'un des bras porte la manette qui sert à faire mouvoir tout l'appareil. — Le principal défaut de cette machine ingénieuse consiste en ce que les oscillations du piston ont trop peu d'amplitude, et qu'il reste trop éloigné de la cloison verticale BB pour produire une aspiration énergique. M. Vasselle, constructeur français, a cherché à remédier à ce défaut, en remplaçant la cloison BB par deux cloisons inclinées portant les soupapes a et a', et dont le piston peut s'approcher très-près dans ses oscillations. La pompe de M. Vasselle a donné un rendement de 0,33; et une pompe à incendie construite sur le même principe a donné 0,50, résultat supérieur à celui de la plupart des pompes à incendie. M. Gray, constructeur anglais, a construit une pompe oscillante qui ne diffère essentiellement de la pompe de Bramah qu'en ce que le corps de pompe est sphérique, et que le piston est un cercle; elle a donné un rendement de 0,40 à 0,44. Le vice général des pompes oscillantes est la difficulté de les démonter pour visiter les soupapes ou remplacer les garnitures.

XIII. POMPES ROTATIVES. Le principe de ces pompes est fort ancien, et l'on trouve, dans un recueil d'A. Ramelli, daté de 1588, la description d'un appareil de ce genre. Quoi qu'il en soit, l'idée de remplacer le mouvement de va-et-vient du piston des pompes ordinaires par un mouvement de rotation continue a repris faveur depuis quelques années, particulièrement en Amérique, et a donné naissance aux pompes rotatives actuelles. La plus répandue est celle de M. Stolz que représente la figure 7. Le corps de pompe est une boîte cylindrique BBB à axe horizontal, communiquant d'une part avec le tuyau d'aspiration C, de l'autre avec le tuyau d'ascension C'. Dans cette boîte se meut, d'un mouvement de rotation continue un anneau concentrique AAA. A cet anneau sont adaptées les pièces pppp qui jouent le rôle de pistons. Ces pièces peuvent glisser à coulisse dans le sens du rayon de l'anneau. Du côté de l'orifice d'admission et du côté de l'orifice de sortie de l'eau, le paroi de la boîte cylindrique est remplacée par des parois à claire-voie ab, a'b', qui viennent se raccorder en a et a' avec le contour extérieur de l'anneau. Il s'ensuit que lorsqu'une des pièces p est arrivée en b', elle est peu à peu repoussée vers le centre de l'anneau. Mais

elle reste en contact de ce côté avec le contour *mn'm'* d'une sorte de disque fixe, réglé de telle sorte que sa distance avec le contour *ba'a'b'*, comptée dans le sens du rayon de l'anneau, soit partout

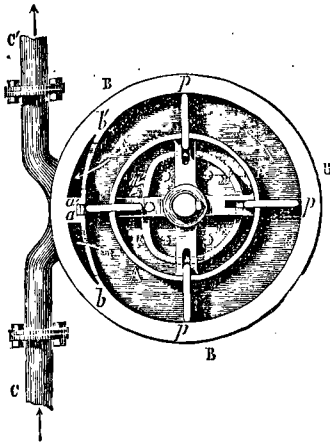


Fig. 7.

le même, et égale à la longueur de l'un des pistons *p*. Si l'on suit un de ces pistons dans sa marche depuis le point *a* jusqu'au point *a'*, on voit qu'au point *a* il est entièrement rentré dans l'anneau, qu'il ressort peu à peu en s'approchant du point *b*; qu'il demeure dans cette position jusqu'au point *b'*, puis, qu'il rentre de nouveau en allant du point *b'* au point *a'*. Ceci compris, on voit que lorsque le piston est arrivé en *b*, il ferme l'espace annulaire compris entre l'anneau *AAA* et la boîte *BBB*; en continuant à marcher dans le sens de la flèche, il produit donc une aspiration, en vertu de laquelle l'eau du tuyau *C* monte dans l'espace annulaire. Elle s'y trouve bientôt enfermée par le piston qui suit, et circule ainsi dans cet espace jusqu'à ce que le premier piston considéré soit arrivé en *b'*. Là il commence à rentrer vers le centre de l'anneau, et livre passage à l'eau qui, poussée par le piston suivant, est refoulée dans le tuyau d'ascension. Il y a ainsi à chaque tour quatre aspirations et quatre refoulements, d'où résulte dans le tuyau d'ascension un mouvement sensiblement régulier. Cette pompe fonctionne donc comme une pompe aspirante et foulante à double et même à quadruple effet. Essayée au Conservatoire des arts et métiers, elle a donné un rendement de 0,43. Ces pompes sont d'une construction délicate, et se dérangent facilement.

XIV. On pourrait rattacher aux pompes rotatives l'appareil connu sous le nom de *pompe spirale*, et qui paraît avoir été imaginé en Hollande en 1746. Elle est représentée par la figure 8. Elle se compose d'un tuyau cylindrique en cuivre *AB*, enroulé en hélice autour d'un tambour horizontal et venant se raccorder avec un tuyau formant l'axe du tambour; ce dernier tuyau tourne dans un coude horizontal *CD* dépendant du tuyau d'aspiration *DD'*. Le tambour est mis en mouvement à l'aide d'une manivelle *m*. Il plonge dans le puisard jusqu'à la hauteur de son axe, ou jusqu'à une petite distance de cet axe. A chaque tour du tambour, l'extrémité *A*

du tuyau hélicoïde plonge dans le courant; pendant une demi-révolution la première spire se remplit d'eau; pendant la seconde elle se remplit d'air; en sorte qu'au bout d'un nombre de révolutions éga-

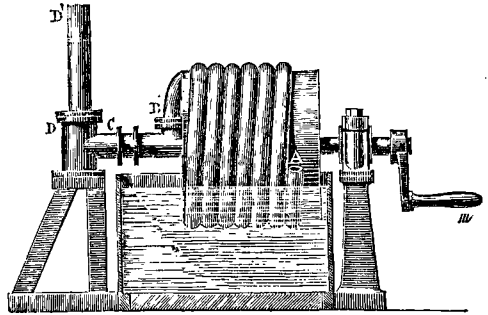


Fig. 8.

au nombre des spires, elles ont toutes leur partie inférieure remplie d'eau et leur partie supérieure remplie d'air; l'eau s'introduit alors par l'axe dans le coude *CD* et s'élève de là dans le tuyau d'ascension *DD'*. L'ascension a nécessairement un terme, parce qu'à mesure que l'eau s'élève ainsi dans le tuyau *DD'*, la pression qu'exerce la colonne élevée fait monter le niveau de l'eau dans la spire la plus voisine en y comprimant l'air; et lorsqu'elle a atteint le sommet de cette spire, elle tombe dans la spire qui précède; les spires se trouveraient bientôt ainsi successivement remplies, et l'eau dégorgerait par l'orifice *A* du tuyau. D'après les expériences faites au Conservatoire des arts et métiers sur un modèle de pompe spirale de l'Institut agronomique de Versailles, cet appareil peut donner un rendement de 0,63 quand la hauteur d'élévation atteint son maximum, qui dans ces expériences était de 5^m,54; mais il baisse avec la hauteur d'élévation, et peut descendre jusqu'à 0,18; la vitesse à la circonférence du tambour ne doit pas dépasser 0^m,30 à 0^m,40. Cette machine a été jusqu'ici peu étudiée, et peu employée. Elle a l'inconvénient de donner autant d'air que d'eau. Cependant, à cause de sa simplicité et de la facilité de son installation, elle peut rendre des services à l'agriculture.

XV. POMPE À FORCE CENTRIFUGE. On donne ce nom à divers appareils dans lesquels l'eau est élevée par l'intervention de la force centrifuge, bien que ce ne soient pas à proprement parler des pompes. Celui qui paraît produire les meilleurs résultats est la pompe de M. Appold, constructeur anglais. Cette pompe est représentée en coupe figure 9 et en élévation figure 10.

L'organe principal est une petite roue à aubes courbées *AA* mobile autour d'un axe horizontal *BB*, auquel on donne le mouvement à l'aide d'une courroie sans fin passant sur une poulie *C* montée sur cet axe. La roue est divisée en deux parties par une cloison verticale *DD*; et les couronnes dans lesquelles les aubes sont emboîtées présentent de chaque côté de la roue un large orifice circulaire communiquant chacun avec un tuyau d'aspiration *EE*, et par lesquels l'eau peut arriver sur les aubes. Lorsque la roue est animée d'un mouvement de rotation rapide, elle entraîne dans son mouvement l'eau en contact avec les aubes, et, par l'effet

de la force centrifuge, ce liquide est projeté du centre vers la circonférence, et refoulé ainsi, dans l'espace annulaire FF qui entoure la roue, et de là dans le tuyau d'ascension qui communique avec cet

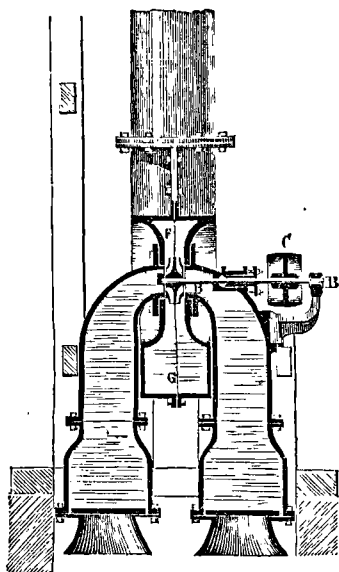


Fig. 9.

espace annulaire. En même temps que la rotation de la roue projette l'eau vers la circonférence, elle produit du côté du centre une aspiration qui fait

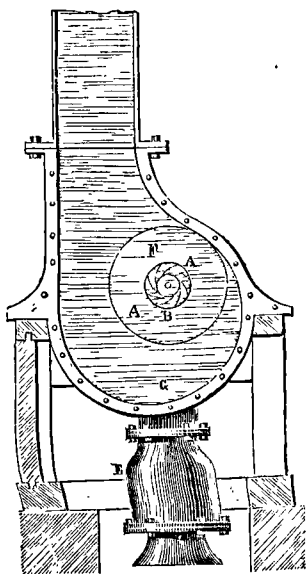


Fig. 10.

monter l'eau du puisard sur la roue par les tuyaux E, E. La roue est immergée au-dessous du niveau du puisard. Elle est très-petite par rapport à la distance des deux bassins. Les aubes sont tracées de

manière qu'en donnant à la roue une vitesse angulaire déterminée, l'eau entre sans choc sur ces aubes. Cet appareil est analogue à un ventilateur aspirant (Voy. VENTILATEURS).

M. Bresse en a donné, dans son *Cours de Mécanique appliquée* à l'École des ponts et chaussées, une théorie simplifiée qui suffit pour l'appréciation des effets de la machine, et que nous reproduirons en l'abrégeant. La simplification introduite par M. Bresse consiste à traiter la question comme si l'eau pénétrait sur la roue par son axe; il admet en outre qu'on puisse évaluer les pressions comme dans l'état hydrostatique depuis le puisard jusqu'au point d'entrée, et du point de sortie jusqu'au bassin supérieur. D'après ces hypothèses, si l'on désigne par \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique, par \mathcal{P} la pression par mètre au point d'entrée, par \mathcal{P}' la pression au point de sortie, par H la différence de niveau des deux bassins, et par h la distance du niveau inférieur au-dessus de l'axe de la roue, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}_0 + \Pi h, \\ \mathcal{P}' &= \mathcal{P}_0 + \Pi (H + h), \end{aligned}$$

Π désignant le poids du mètre cube du liquide. De là on tire

$$\frac{\mathcal{P}' - \mathcal{P}}{\Pi} = H. \quad [1]$$

On applique ensuite au mouvement du liquide depuis son entrée jusqu'à sa sortie de la roue le THÉORÈME DE BERNOULLI (Voy. ce mot) modifié pour le rendre applicable au mouvement relatif (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS). En appelant u la vitesse de la roue à sa circonférence extérieure, w la vitesse relative de l'eau à sa sortie, v la vitesse absolue, et remarquant que la vitesse relative au point d'entrée, c'est-à-dire près de l'axe, est nulle, on trouve

$$w^2 = u^2 + 2g \left(\frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}'}{\Pi} \right)$$

ou, en vertu de l'équation [1],

$$w^2 = u^2 - 2gH, \quad [2]$$

ce qui fait connaître la vitesse w , attendu que u est donné.

Connaissant la vitesse w , on peut calculer le volume d'eau Q débité par la roue dans l'unité de temps. Si r est le rayon extérieur, e l'épaisseur de la roue dans le sens de son axe, et α l'angle des aubes avec la circonférence extérieure, on trouve, comme dans la théorie des TURBINES (Voy. ce mot),

$$Q = 2\pi r \cdot e w \sin \alpha. \quad [3]$$

On peut ensuite évaluer le rendement de la roue. Le travail utile est exprimé par $\Pi Q H$; et le travail moteur doit surpasser l'effet utile, du travail ou de la puissance vive due à la vitesse v que l'eau conserve à sa sortie. Le rendement a donc pour expression, en négligeant les autres pertes,

$$\frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_m} = \frac{\Pi Q H}{\Pi Q H + \Pi Q \cdot \frac{v^2}{2g}} = \frac{2gH}{2gH + v^2}. \quad [4]$$

Mais, entre les trois vitesses u , v , w et l'angle α , on a la relation

$$v^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos \alpha$$

ou, en mettant pour w^2 sa valeur [2],

$$v^2 = 2u^2 - 2gH - 2ucos \alpha \sqrt{u^2 - 2gH}. \quad [5]$$

Pour rendre le rendement maximum, il faut rendre v minimum. Si l'on égale à zéro la dérivée du

second membre par rapport à u , en est conduit à l'équation

$$u^2 \sin^2 \alpha - 2hHu^2 \sin^2 \alpha = g^2 H^2 \cos^2 \alpha. \quad [6]$$

On ne peut donner à α une valeur inférieure à 30° pour qu'il n'y ait pas d'engorgement au sortir de la roue; si l'on adopte cette valeur, on trouve

$$u = \sqrt{3gH}.$$

(M. Bresse traite d'une autre manière la question du maximum; mais celle-ci nous a paru plus simple.) On a ensuite

$$v = \sqrt{gH}.$$

Avec les valeurs de α et de u adoptées on trouve pour l'expression du rendement

$$\frac{C_u}{C_m} = \frac{2}{3}.$$

On peut augmenter le rendement en faisant α plus petit; mais alors le débit diminue. Connaissant u , on aurait la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{u}{r}.$$

La pompe à force centrifuge d'Appold expérimentée au Conservatoire des arts et métiers a donné un rendement qui s'est élevé jusqu'à 0,68. Avec des aubes planes le rendement est beaucoup moindre.

XVI. POMPE À HÉLICE. Elle se compose d'un tuyau vertical plongeant dans l'eau du réservoir inférieur, et dans lequel est installée, vers le bas, une hélice ayant le même axe. On donne à cette hélice un mouvement rapide de rotation par le moyen d'un engrenage; cette hélice en tournant oblige l'eau à monter sur la surface, et la refoule ainsi dans le tuyau d'ascension. Cette machine ne donne qu'un faible rendement de 0,194 avec une vitesse de 17 tours $\frac{1}{2}$ par seconde.

On trouvera d'autres détails intéressants sur les appareils proposés à diverses époques pour élever les eaux, dans l'ouvrage de M. Morin ayant pour titre : *Des machines et appareils destinés à l'élevation des eaux*. (Voy. aussi le *Cours d'Hydraulique* de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures; et le *Cours élémentaire de Mécanique* de M. Delaunay.)

POMPE À AIR, pompe employée, dans les machines à vapeur à condensation, à extraire l'eau et l'air contenus dans le condenseur. Dans les machines à balancier cette pompe est à simple effet, et la course de son piston est ordinairement la moitié de celle du piston à vapeur. On détermine par les considérations suivantes le diamètre du piston de la pompe à air. Soit u le volume que doit engendrer le piston de cette pompe pour extraire l'eau et l'air provenant de la condensation de 1^k de vapeur (Voy. CONDENSATION). Soit V le volume de vapeur dépensé par course du piston moteur, et Π le poids du mètre cube de vapeur à la pression sous laquelle la machine travaille (Voy. TENSION DE LA VAPEUR); le poids de vapeur dépensé à chaque double course sera $2\Pi V$; et si x désigne le volume que doit décrire le piston de la pompe à air à chaque course, on devra avoir :

$$1^k : 2\Pi V = u : x, \text{ d'où } x = 2\Pi V u.$$

Soit d le diamètre du piston de la pompe à air, c sa course, D le diamètre du piston à vapeur et C sa course, on aura

$$x = \frac{1}{4} \pi d^2 c \text{ et } V = \frac{1}{4} \pi D^2 C;$$

il viendra donc en substituant et simplifiant

$$d^2 c = 2\Pi u D^2 C, \text{ d'où } d = D \sqrt{2\Pi u \frac{C}{c}}.$$

Quand on applique cette formule, il est nécessaire d'augmenter u d'un tiers environ pour tenir compte des pertes inévitables qui réduisent le rendement de la pompe, et d'augmenter C d'un vingtième au moins pour avoir égard à l'espace nuisible dans le cylindre. Ceci revient à multiplier sous le radical par $\frac{4}{3}$ et par $\frac{21}{20}$, c'est-à-dire par 1,75; ou hors du radical par la racine de ce nombre ou 1,32. On écrira donc

$$d = 1,32 D \sqrt{2\Pi u \frac{C}{c}}. \quad [1]$$

Si par exemple, il s'agit d'une machine de Watt à basse pression travaillant à une pression de 1 atm. $\frac{1}{4}$, on trouvera $\Pi = 0^k,72$; et si l'on admet dans le condenseur une température de 38° , on aura (Voy. CONDENSATION)

$$u = 0^m,04055.$$

Admettant d'ailleurs $C = 2c$, on obtiendra $d = 0,45 D$.

Watt donnait au corps de pompe de la pompe à air une capacité égale aux $\frac{2}{9}$ de celle du cylindre; ce qui revient à prendre pour le diamètre du piston de la pompe à air les $\frac{2}{3}$ du diamètre du piston moteur. On s'est peu écarté de cette règle; la capacité du corps de pompe de la pompe à air est généralement comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ de celle du cylindre. M. Jullien conseille de prendre

$$d = 0,6 D.$$

Cette valeur est notablement supérieure à celle que donne la formule [1]; mais il faut tenir compte des imperfections d'exécution (Voy. MACHINES À VAPEUR).

POMPE À EAU, pompe employée, dans les machines à vapeur, à verser dans la bêche l'eau nécessaire à la condensation. Cette pompe est généralement à simple effet, mais elle peut être aspirante et élévatoire ou aspirante et foulante (Voy. POMPES). Pour déterminer la section de son piston, on emploie les considérations suivantes. Soit p le poids d'eau froide nécessaire pour condenser 1^k de vapeur, le volume que doit décrire le piston de la pompe à eau devra être p fois plus grand que celui que décrit la POMPE À AIR (Voy. ce mot). En nommant donc d le diamètre de la pompe à air, c sa course, d' le diamètre de la pompe à eau, c' sa course, on devra avoir

$$\frac{1}{4} \pi d'^2 c' = p \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 c,$$

d'où

$$d' = d \sqrt{p \frac{c}{c'}}.$$

Si, par exemple, il s'agit d'une machine de Watt, et que la température du condenseur soit de 38° , on aura $p = 22^k$ (Voy. le tableau donné à l'art. CONDENSATION). Afin de ne pas être au-dessous des besoins de la machine, on pourra prendre $p = 25^k$.

comme le fait M. Jullien, et écrire en conséquence

$$d' = 5d \sqrt{\frac{c}{c'}}$$

Les courses c et c' sont données par la disposition du mécanisme.

POMPE ALIMENTAIRE, pompe employée dans les machines à vapeur à fournir au générateur l'eau qui lui est nécessaire. Dans les machines à condensation, c'est ordinairement l'eau extraite du condenseur par la pompe à air, et versée dans une bêche spéciale, qui sert à l'alimentation. La pompe alimentaire est toujours aspirante et foulante; le plus souvent elle est à piston plongeur (*Voy. POMPES*). On détermine la section du piston de la pompe alimentaire par cette condition que le poids d'eau à introduire dans la chaudière doit être égal au poids de vapeur qui en sort, augmenté de l'eau entraînée. Soit D le diamètre du piston, C sa course, Π le poids du mètre cube de vapeur à la pression sous laquelle la machine travaille (*Voy. TENSION DE LA VAPEUR*), le poids de vapeur sortant du cylindre à chaque double course du piston sera

$$2 \Pi \cdot \frac{1}{4} \Pi D^2 C.$$

Pour tenir compte de l'eau entraînée, il convient de multiplier au moins par 1,5, ce qui donne

$$0,75 \Pi \pi D^2 C.$$

Soit d le diamètre du piston de la pompe alimentaire, et c sa course; le poids du mètre cube d'eau étant de 1000^k , le poids d'eau à fournir à chaque double course du piston sera

$$1000^k \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 c.$$

Pour tenir compte des pertes qui diminuent nécessairement le rendement de la pompe, il convient de multiplier cette expression par 0,75. Égalant les deux poids ainsi obtenus on a donc

$$0,75 \cdot 1000^k \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 c = 0,75 \Pi \pi D^2 C,$$

d'où
$$d = 2D \sqrt{\frac{\Pi}{1000} \cdot \frac{C}{c}}.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une machine de Watt à basse pression, travaillant à

$$1 \text{ atm.} \cdot \frac{1}{2},$$

on trouvera

$$\Pi = 0^k,72 \text{ et } C = 2c,$$

ce qui donnera

$$d = 0,076 D.$$

PONCEAU, pont d'une seule arche ou d'une seule travée, jeté sur un ruisseau. La construction des ponceaux, quoique plus simple que celle des ponts, est soumise néanmoins aux mêmes règles. (*Voy. DÉBOUCHÉ, PONTS EN PIERRE, PONTS EN CHARPENTE.*)

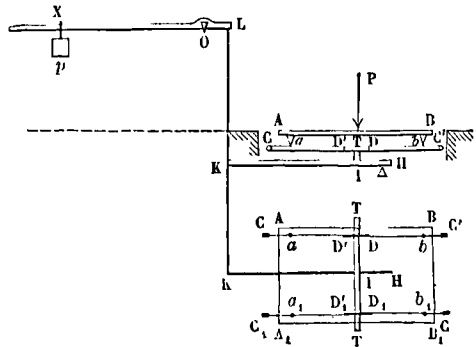
PONT, voie de communication qui réunit deux parties d'un territoire séparées par une rivière, un ruisseau, un ravin, une vallée; dans ce dernier cas il prend le nom de *viaduc*. On nomme *ponts-aqueducs* ceux qui servent à faire passer un cours d'eau au-dessus d'un chemin, d'une rivière ou d'un vallon, et *pont-canal* un pont sur lequel passe un canal destiné à la navigation. Un pont qui à moins de 4 mètres de long se nomme un *ponceau*. Les ponts peuvent être construits en pierre, en bois ou en métal. Les appuis extrêmes d'un pont se nomment ses *culées*; les appuis inter-

médiaires, construits entre les deux rives, se nomment *piles* si le pont est en pierre, ou *palées* s'il est en bois ou en métal. Les ouvertures comprises entre les piles ou palées, ou entre celles-ci et les culées, se nomment *arches* dans les ponts en pierre, ou *travées* dans les ponts en bois ou en métal. Les petites arches prennent le nom d'*arceaux*.

L'emplacement d'un pont est ordinairement déterminé par des considérations d'intérêt public. Lorsque l'emplacement est choisi, il faut s'occuper du *débouché*, c'est-à-dire de l'intervalle des culées; il se déduit du volume d'eau que la rivière débite (*Voy. DÉBOUCHÉ*), si le pont doit franchir une rivière; cet intervalle peut être fixé arbitrairement s'il s'agit d'un viaduc. Quels que soient les matériaux qui doivent entrer dans la construction d'un pont, les dimensions de ses différentes parties se déterminent par des considérations tirées de l'équilibre et de la stabilité. (*Voy. PONTS EN PIERRE, PONTS EN CHARPENTE, PONTS EN MÉTAL, PONTS SUSPENDUS, PONTS BLAIS.*)

PONT À BASCULE, appareil employé au pesage des voitures. Le tablier AB, sur lequel on amène la voiture, repose par quatre pieds a, b, a_1, b_1 sur autant de leviers CD, C'D', C₁D₁, C'₁D'₁ mobiles respectivement autour des points C, C', C₁, C'₁; et qui s'appuient par leur extrémité libre D, D', D₁, ou D'₁ sur une traverse TT, laquelle s'appuie elle-même au point I sur un levier HK, mobile autour du point H. L'extrémité K de ce levier est liée par une tringle verticale KL au plus petit bras d'une balance romaine, mobile autour du point O, et portant sur son plus long bras un poids curseur p . La distance OX = x à laquelle il faut placer le curseur pour que le fléau demeure horizontal donne la mesure du poids P de la voiture.

Les points C, C', C₁, C'₁ sont également distants de la traverse T; il en est de même des points



a, b, a_1, b_1 où posent les quatre pieds du tablier. Il en résulte d'abord que, dans toutes les positions de l'appareil, le tablier demeure horizontal. Supposons, en effet, que le rapport de Ca à CD soit celui de 1 à n ; si la traverse s'abaisse d'une quantité h , chacun des points a, b, a_1, b_1 s'abaissera de $\frac{h}{n}$; le tablier demeurera donc horizontal, et se sera abaissé de $\frac{h}{n}$. Supposons maintenant que le rapport HI à HK soit celui de 1 à n' , le point I s'abaissant de h , le point K s'abaissera de $n'h$; et il en sera de même

du point L. Dès lors le point X s'élèvera d'une quantité marquée par $n'h \frac{OX}{OL}$ ou $n'h \frac{x}{l}$, en appelant l la distance OL. Cela posé, appliquons au système le principe des travaux virtuels (Voy. TRAVAIL VIRTUEL, ÉQUILIBRE). Le travail virtuel du poids P est $+ \frac{Ph}{n}$. Le

travail virtuel du poids p est $- p \cdot n' \cdot h \cdot \frac{x}{l}$. Les travaux virtuels des réactions des points d'appui O, H, C, C', C₁, C'₁ sont nuls si l'on néglige le frottement, comme cela est permis quand le contact s'effectue partout par une arête de couteau. D'ailleurs les autres forces qui agissent sur le système sont des forces mutuelles, deux à deux égales et de signe contraire, et dont les travaux virtuels disparaissent quand on en fait la somme. Il restera donc :

$$\frac{Ph}{n} - pn'h \frac{x}{l} = 0,$$

d'où

$$P = p \cdot nn' \cdot \frac{x}{l}.$$

Si, par exemple, on a $n = n' = 10$, et $p = 1^k$, il en résultera

$$P = 100^k \frac{x}{l}.$$

Les ponts à bascule ont été supprimés en France par la loi du 30 mai 1851; mais ils sont encore en usage dans quelques pays étrangers.

L'appareil qui fait l'objet de cet article porte aussi le nom de *balance de Sanctorius*, du nom d'un célèbre médecin italien auquel on en attribue l'invention.

PONT-CANAL, pont sur lequel un canal peut franchir une rivière. Ce genre de ponts donne lieu aux mêmes calculs que les ponts ordinaires; mais le poids de l'eau doit évidemment entrer dans le calcul de la poussée des arches (Voy. POUSSÉE DES VOÛTES).

PONT-LEVIS, pont qui peut se lever ou s'abaisser. Ce genre de pont se rencontre dans les places fortes au passage de tous les fossés. Un pont fixe s'avance depuis la contrescarpe jusqu'à une petite distance de l'escarpe; mais la dernière travée est formée par un pont-levis.

I. Il se compose d'un tablier AO (fig. 1) mobile

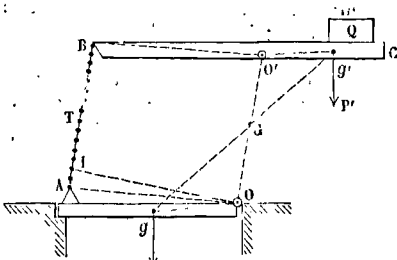


Fig. 1.

autour d'un axe horizontal O au moyen de forts tourillons, dont les coussinets sont fixés du côté de l'escarpe. Deux chaînes, dont une seule AB se voit sur la figure, attachent la partie antérieure du tablier à deux flèches BC, mobiles autour d'un axe horizontal O', réunies entre elles par des traverses et par une croix de Saint-André, et portant à l'ar-

rière une charge Q, ordinairement en pierre. L'appareil est disposé de telle sorte, que si l'on joint les points d'attache A et B de la chaîne aux points O et O', on obtient un parallélogramme ABO'O, articulé à ses quatre sommets, et qui ne cesse pas d'être un parallélogramme lorsque le tablier se déplace, attendu que ses côtés opposés restent égaux.

De plus, si g est le centre de gravité du tablier, et g' celui du système formé par les flèches et leur charge, on a disposé du poids Q et de sa position de manière qu'en joignant gO et $g'O'$ on ait deux droites parallèles; ces droites restent parallèles quand le tablier se déplace, attendu qu'elles font des angles égaux avec AO et BO' qui restent parallèles. Enfin le poids P du tablier et le poids P' du système des flèches et de leur charge sont réglés de telle sorte qu'il y ait équilibre dans toutes les positions du pont-levis. Pour cela, soit T la tension de l'une des chaînes, et soit α l'angle que les deux droites gO et $g'O'$ font avec l'horizon dans une position quelconque du système. Le tablier est un levier du second genre (Voy. LEVIER) soumis aux forces T, à la force P, et à la réaction R exercée sur l'axe O; en prenant les moments de ces forces par rapport à cet axe et négligeant le frottement on devra donc avoir

$$2T \cdot T = P \cdot gO \cdot \cos \alpha,$$

la caractéristique $2T$ désignant le moment de la force T (Voy. MOMENT). Les flèches forment un levier du premier genre qui donne de même

$$2T \cdot T' = P' \cdot g'O' \cdot \cos \alpha. \quad [2]$$

En comparant les relations [1] et [2] on obtient

$$P \cdot gO = P' \cdot g'O', \text{ d'où } \frac{P'}{P} = \frac{gO}{g'O'}, \quad [3]$$

relation indépendante de l'angle α , et qui aura lieu par conséquent dans une position quelconque du pont-levis, pourvu qu'elle ait lieu dans une position particulière, par exemple dans la position pour laquelle le tablier est horizontal, ou pour $\alpha = 0$.

L'une quelconque des relations [1] ou [2] donnera la tension T; il suffira d'y faire $\alpha = 0$, et de remplacer $2T$ par $T \cdot OI$, le facteur OI étant la perpendiculaire abaissée du point O, ou du point O', sur la direction AB. On aura ainsi

$$2T \cdot OI = P \cdot gO, \text{ d'où } T = \frac{1}{2} P \cdot \frac{gO}{OI}.$$

Les réactions sur les axes O et O' s'obtiendront comme pour le levier, c'est-à-dire en y transportant les forces T et P, ou T et P'; composant ces deux forces par la règle du parallélogramme, et prenant la résultante en sens contraire

II. On peut remarquer que si l'on joint gg' , le point G où cette droite rencontrera OO' sera le centre de gravité du système des poids P et P'. Car, les triangles gOG et $g'O'G$ étant semblables par suite du parallélisme des droites gO et $g'O'$, on a

$$\frac{Gg}{G'g} = \frac{gO}{g'O'} = \frac{P'}{P}. \quad [4]$$

Le point G reste immobile dans toutes les positions du tablier; car les mêmes triangles donnent

$$\frac{GO}{G'O'} = \frac{gO}{g'O'}. \quad [5]$$

III. La disposition qui a été décrite ci-dessus était connue dès le temps de la féodalité. Dans quelques places modernes on a adopté une autre disposition

imaginée par M. Delille, capitaine du génie, et qui est fondée sur un principe différent. Les chaînes sont remplacées par des tiges rigides AC (fig. 2)

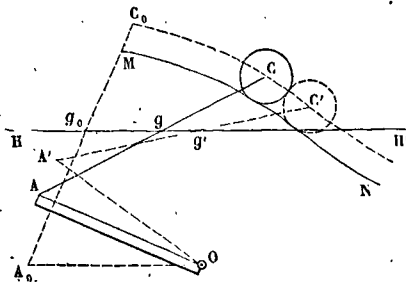


Fig. 2.

qui vont s'attacher aux extrémités de l'axe d'un rouleau cylindrique horizontal, que l'on fait mouvoir sur des courbes MN dont nous donnerons la définition tout à l'heure. Supposons que l'on ait décomposé le poids P du tablier en deux forces parallèles $\frac{1}{2}P$ appliquées l'une en A et l'autre en O. Soit P' le poids du rouleau, et soit g le point d'application de la résultante des forces $\frac{1}{2}P$ et P', ou, ce qui revient au même, le centre de gravité du système des poids $\frac{1}{2}P$ et P'. On trace les courbes MN de telle sorte que, dans le mouvement du pont-levis, le point g décrive une horizontale HH'; il en résulte que le système est en équilibre dans toutes les positions. En effet, le travail virtuel de la force $\frac{1}{2}P$ appliquée en O et de la réaction qui s'exerce sur cet axe, est nul puisque leur point d'application ne se déplace pas; le travail virtuel de la réaction exercée sur le rouleau par les courbes MN est nul parce que cette réaction étant normale aux courbes est perpendiculaire au chemin élémentaire décrit par son point d'application. Il reste le travail virtuel des forces $\frac{1}{2}P$ et P' appliquées l'une en A et l'autre en C, ou, ce qui revient au même, le travail de leur résultante appliquée en g. Or cette résultante est verticale, tandis que le chemin élémentaire décrit par le point g est horizontal; son travail est donc constamment nul. Ainsi la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées au système reste nulle dans une position quelconque du pont-levis; donc le système est constamment en équilibre.

Pour tracer les courbes MN, on commence par déterminer le point g pour une position déterminée du tablier. Par ce point g on mène l'horizontale HH'. On donne alors au tablier une nouvelle position quelconque OA'; du point A' comme centre avec un rayon égal à Ag on décrit un arc de cercle qui coupe HH' en un point g'; on joint A'g'; on prend sur cette droite une longueur A'C' égale à AC. Le lieu des points C' ainsi obtenus est une courbe de 4° degré mn, que l'on pourrait tracer à l'aide de son équation, mais qu'il est plus simple de déterminer comme nous venons de le dire. Cela

fait, de chacun des points C comme centre, avec le rayon que l'on veut donner au rouleau, on décrit un cercle; puis on mène une courbe MN tangente à tous les cercles ainsi décrits; c'est la courbe demandée. Les courbes MN s'exécutent en fer, et forment le bord inférieur d'une cavité ménagée dans le mur de chaque côté du passage et dans lesquelles s'engagent les extrémités du rouleau. D'après la manière dont ces courbes ont été obtenues, lorsque ce cylindre roule sur ces courbes, les extrémités de son axe décrivent les courbes mn, et le point g décrit l'horizontale HH'.

On a aussi employé une autre disposition qui est due à Bélidor. La chaîne qui soutient le tablier s'enroule sur une poulie P (fig. 3), et vient s'atta-

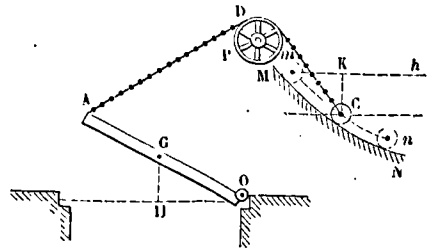


Fig. 3.

cher par son extrémité à un rouleau C formant contre-poids, et assujéti à rouler sur une courbe fixe MN. Cette courbe se détermine de la manière suivante. Soit m la position initiale de l'axe du rouleau, répondant à la position horizontale du tablier; on mène par le point m une horizontale mh. On place ensuite le tablier dans une position quelconque, et l'on mesure la distance verticale GI parcourue par son centre de gravité. Si P est le poids du tablier, P.GI est le travail négatif de la pesanteur sur le tablier. Soit p le poids du rouleau, et CK la distance du point C à l'horizontale mh; p.CK sera le travail positif de la pesanteur sur le rouleau. En négligeant les frottements on devra donc avoir pour l'équilibre

$$P.GI = p.CK,$$

ce qui fera connaître CK, et par conséquent l'horizontale passant par le point C. D'un autre côté, la longueur de la chaîne étant connue, si l'on en retranche AD, et qu'on trace la développante décrite par l'extrémité C quand le reste de la chaîne s'enroule sur la poulie à partir du point D, on aura une courbe qui devra contenir le point C. Ce point sera donc déterminé par l'intersection de cette courbe et de l'horizontale menée à la distance CK de mh. On déterminera de la même manière autant de points qu'on voudra de la courbe mn décrite par le centre du rouleau. La courbe MN s'en déduira en traçant l'enveloppe des cercles décrits des divers points de mn comme centre avec le rayon du rouleau. M. Haton de la Goupillière a donné l'équation de cette courbe dans l'hypothèse où la poulie se réduit à un point; cette équation assez compliquée d'ailleurs ne peut être d'aucun usage dans la pratique.

PONTS, planchers qui servent de liaison à la membrure d'un navire et le divisent en divers étages (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

PONTS BIAIS, ponts dans lesquels l'axe de la

voûte rencontre obliquement les plans de tête. Les chemins de fer ont multiplié les ponts de ce genre parce que le tracé oblige fréquemment à faire passer la voie sur une route ou sur un canal qu'elle coupe sous un angle plus ou moins aigu. Mais on n'emploie pas pour la construction de ces ponts la voûte conoïde du **BIAIS PASSÉ** (Voy. ce mot). Par des motifs d'économie faciles à comprendre, on ne construit en pierre de taille que les arcs de tête et les assises de naissance; le corps de la voûte se construit en matériaux d'un faible échantillon, souvent en briques, comme en Angleterre. Ces motifs ont conduit les ingénieurs à rechercher un mode d'appareil approprié à ce genre de construction. Trois systèmes principaux sont aujourd'hui en usage dans la con-

struction des ponts biais : l'**appareil hélicoïdal**, qui est né en Angleterre, l'**appareil orthogonal**, imaginé en France, et les **arcs droits en retraite**, système fort ancien remis en lumière il y a peu de temps. Nous les décrirons successivement. Dans chacun des deux premiers systèmes, la voûte est un **BERCEAU** (Voy. ce mot); c'est le mode de subdivision en voussoirs qui les distingue des berceaux ordinaires.

I. APPAREIL HÉLICOÏDAL. Cet appareil est ainsi nommé parce que les arêtes de douelle (Voy. VOÛTES) sont des hélices, et que les joints de lits, ainsi que les joints montants, sont des surfaces hélicoïdes de vis à filet carré. Voici comment on détermine cet appareil. Soient EK et FJ (fig. 1) les lignes de naissance

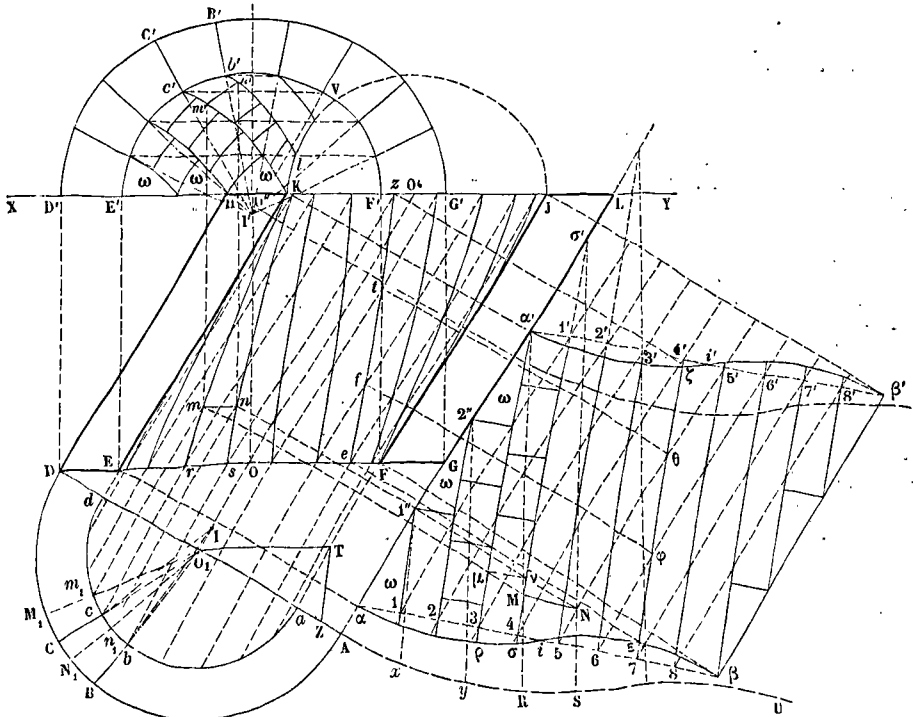


Fig. 1.

de l'intrados, DH et GL celles de l'extrados; HL et DG les traces horizontales des plans de tête; soient E'V'F' et KVJ les projections verticales des intersections de ces plans de tête avec l'intrados; soit D'C'B'G' la projection de l'intersection de l'extrados par le plan DG; enfin, soient *abcd* et ABCD les sections droites de l'intrados et de l'extrados, rabattues sur le plan de naissance, qui est ici le plan horizontal. Nous supposons que ces sections droites sont des cercles. On commencera par construire en $\alpha\beta\beta'\alpha'$ le développement de l'intrados (Voy. DÉVELOPPEMENT, BERCEAU); on mènera les cordes $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, que l'on divisera en un même nombre de parties égales, aux points 1, 2, 3, etc.; 1', 2', 3', etc. On joindra un point de division quelconque de $\alpha'\beta'$ avec un point de division de $\alpha\beta$, choisi de telle manière que la ligne de jonction diffère aussi peu que possible d'une perpendiculaire commune aux deux cordes

$\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$. Ici l'on voit, par exemple, que pour remplir cette condition, il faut joindre le point 4' au point 7; on joindra de même le point 3' au point 6, le point 2' au point 5, etc.; le point 5' au point 8, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une série de droites parallèles et équidistantes. Le nombre des divisions de $\alpha\beta$ ou de $\alpha'\beta'$ devra être réglé de manière que la distance de deux parallèles consécutives soit égale à l'épaisseur des matériaux que l'on se propose d'employer pour le corps de la voûte, ou n'exède cette épaisseur que de très-peu. Si l'on imagine que l'on enroule la figure $\alpha\beta\beta'\alpha'$ sur le cylindre d'intrados, les parallèles dont il s'agit deviendront des hélices parallèles. Ce sont ces hélices que l'on prend pour arêtes de douelles. On obtiendra de la manière suivante les projections de ces hélices. D'abord, si par les points de division de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$ qui occupent le même rang, on mène des droites.

elles seront parallèles à l'axe OO' de la voûte, et ne seront autre chose que des génératrices de l'intrados. Pour obtenir les projections de ces génératrices, on divisera la demi-circonférence $abcd$ en autant de parties égales que $\alpha\beta$; et, par les points de division on mènera des parallèles à OO' ; ce seront les projections horizontales des génératrices. Par les points où ces projections rencontrent la droite EF , on mènera des perpendiculaires à la ligne de terre XY ; les points où ces perpendiculaires rencontreront la demi-ellipse $E'V'F'$ appartiendront aux projections verticales des génératrices correspondantes; et, en menant par ces derniers points des parallèles à XY , on aura ces projections verticales elles-mêmes. Cela posé, si l'on veut obtenir, par exemple, la projection horizontale de la génératrice $4'.7$, on marquera les points $\epsilon, \varphi, \theta, \tau$, où elle rencontre successivement la courbe de tête $\alpha\beta$, la génératrice $6.6'$, la génératrice $5.5'$, et la courbe de tête $\alpha'\beta'$; par ces points, on mènera des perpendiculaires à OO' , terminées respectivement à la droite EF , à la projection horizontale de la génératrice $6.6'$, à celle de la génératrice $5.5'$, enfin à la droite KJ ; on obtiendra ainsi quatre points e, f, t, x , de la projection demandée, et il sera facile de tracer cette projection. On obtiendra de la même manière les projections horizontales des autres hélices; elles sont marquées en lignes pleines dans le quadrilatère $EFJK$. Pour obtenir la projection verticale d'une hélice, il faut marquer les points où sa projection horizontale rencontre les projections horizontales des diverses génératrices du cylindre, et, par ces points, mener des perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à la rencontre des projections verticales des mêmes génératrices; c'est ainsi qu'on obtient les courbes $c'h, b'l$, et ainsi de suite.

II. On prend pour joints de lits des surfaces hélicoïdes de vis à filet carré; c'est-à-dire que chacun de ces joints est engendré par une droite assujettie à rester parallèle au plan de la section droite du cylindre, et à s'appuyer constamment sur l'axe OO' de ce cylindre et sur l'hélice qui forme l'arête de douelle correspondante au joint considéré. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de déterminer l'intersection de ces joints hélicoïdes par les plans de tête. L'intersection d'une surface hélicoïde par un plan peut se construire à l'aide des procédés ordinaires de la Géométrie descriptive (*Voy. SECTIONS PLANES*). Supposons, pour fixer les idées, que la verticale OI (fig. 2) soit l'axe de la surface; supposons que l'hélice directrice ait pour projection horizontale la circonférence OA , et pour projection verticale la sinusoïde $AB'A'$...; et soit PQ la trace verticale du plan coupant, supposé perpendiculaire au plan vertical de projection. On mènera un plan auxiliaire horizontal quelconque KH ; ce plan auxiliaire coupera la surface hélicoïde suivant une horizontale qui se projettera verticalement sur KH , et horizontalement suivant un rayon ON que l'on déterminera par la condition que l'arc ADN soit à la circonférence entière dans le rapport de AH au pas AA' . Le même plan auxiliaire coupera le plan PQ suivant une perpendiculaire au plan vertical, qui se projette verticalement suivant le point M' , et horizontalement suivant une perpendiculaire mM à la ligne de terre. Le point M, M' appartenant à la fois à la génératrice IH, ON , et à l'intersection du plan auxiliaire et du

plan coupant, est un point de l'intersection du plan PQ avec la surface hélicoïde. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de cette intersection. Pour la facilité de l'exécution, il

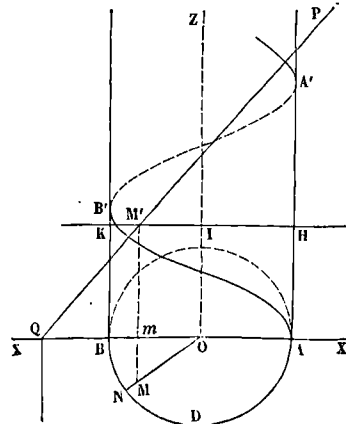


Fig. 2.

sera commode de diviser la circonférence AB et le pas AA' en un même nombre de parties égales à partir du point A , les points de division de même rang donneront le rayon analogue à ON et le plan horizontal analogue à KH qui détermineront un point de la ligne cherchée. Ayant les projections de l'intersection demandée, on l'obtiendra en vraie grandeur en rabattant le plan PQ autour de sa trace verticale.

Pour résoudre le même problème, on peut aussi employer le calcul. Si l'on prend pour axe des x l'axe OI de la surface, pour axe des y un rayon perpendiculaire, en nommant h le pas AA' de l'hélice directrice, on trouvera pour l'équation de la surface hélicoïde

$$z = \frac{h}{2\pi} \cdot \text{arc tang } \frac{y}{\alpha}. \quad [1]$$

Si α désigne l'angle de PQ avec l'axe des x , et b la distance OC , on aura pour l'équation du plan coupant

$$z = x \text{ tang } \alpha + b. \quad [2]$$

Éliminant z entre ces deux équations on obtient l'équation de la projection de l'intersection cherchée sur le plan des xy , savoir

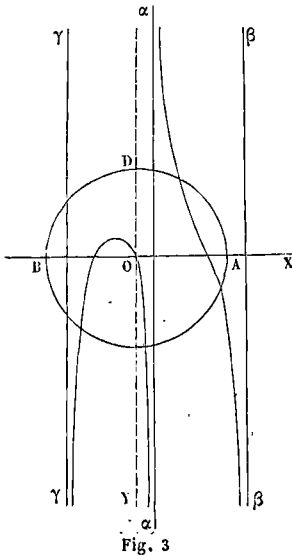
$$\frac{h}{2\pi} \text{aro tang } \frac{x}{y} = x \text{ tang } \alpha + b,$$

d'où
$$y = x \cdot \text{tang } \frac{2\pi}{h} (x \text{ tang } \alpha + b), \quad [3]$$

courbe que l'on construira par points. L'intersection du plan coupant avec le cylindre vertical qui a cette courbe pour base sera l'intersection de ce même plan coupant avec la surface hélicoïde.

Quelle que soit celle des deux méthodes que l'on emploie, on trouvera que la courbe qui a pour équation la relation [3] a une forme analogue à celle qui est indiquée par la figure 3. Elle se compose de deux branches qui ont une asymptote commune $\alpha\alpha$ et deux autres asymptotes particulières $\beta\beta, \gamma\gamma$, toutes trois parallèles à l'axe des y . On obtiendrait d'autres branches et d'autres asymptotes si l'on

avait égard à la partie indéfinie de la surface hélicoïde qui s'étend hors du cylindre dont la base est le cercle ADB; mais cette considération est inutile dans la question qui nous occupe. Si l'on imagine



un cylindre vertical ayant pour base la courbe à deux branches de la figure 3; nous avons vu que son intersection par le plan coupant, PQ (fig. 2), sera en même temps l'intersection du plan coupant avec la surface hélicoïde. Cette intersection aura évidemment une forme analogue à la courbe de la figure 3.

Il faudrait pour chaque joint hélicoïde construire une courbe analogue, si l'on voulait avoir exactement son intersection par le plan de tête. Mais, lorsque la section droite de la voûte à un grand rayon, comme cela arrive d'ordinaire, les intersections des joints par le plan de tête n'ont qu'une très-faible courbure et peuvent, sans erreur sensible, être considérés comme des lignes droites; on peut alors, pour construire ces droites, profiter d'une propriété remarquable des courbes dont il s'agit, qui a été démontrée par M. de la Gournerie dans les *Annales des ponts et chaussées*. Elle consiste en ce que si par les points tels que *b'* et *c'* (fig. 1), où les intersections des joints hélicoïdes avec le plan de tête rencontrent la courbe d'intrados *E'c'b'F'*, on mène des tangentes à ces intersections, toutes ces tangentes vont concourir en un même point *I'*, situé sur la verticale du centre *O''*. Considérons, en effet, l'équation [3]; en prenant les dérivées des deux membres on obtient

$$y' = \tan \frac{2\pi}{h} (x \tan \alpha + b) + \frac{x \cdot \frac{2\pi}{h} \tan \alpha}{\cos^2 \frac{2\pi}{h} (x \tan \alpha + b)}$$

Or, l'ordonnée *Y* du point où la tangente à cette courbe rencontre l'axe des *y* a pour valeur *y - y'x*; en mettant pour *y* et *y'* leurs valeurs et réduisant, on obtient donc

$$Y = - \frac{2\pi \tan \alpha}{h} \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \frac{2\pi}{h} (x \tan \alpha + b)}$$

Mais l'équation de la courbe donne

$$\tan \frac{2\pi}{h} (x \tan \alpha + b) = \frac{y}{x}$$

d'où l'on tire

$$\cos^2 \frac{2\pi}{h} (x \tan \alpha + b) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Substituant dans *Y* il vient

$$Y = - \frac{2\pi \tan \alpha}{h} (x^2 + y^2)$$

Si l'on considère en particulier le point de la courbe qui se trouve sur la circonférence *OA* (fig. 2) dont nous représenterons le rayon par *r*, on pourra écrire

$$Y = - \frac{2\pi \tan \alpha}{h} \cdot r^2, \quad [4]$$

expression qui est indépendante de *b*; c'est-à-dire que la distance *Y* resterait la même si l'on transportait le plan coupant *PQ* parallèlement à lui-même, ou, ce qui revient au même, si l'on faisait glisser la surface hélicoïde parallèlement à son axe. Remarquons maintenant que toutes les droites qui, en s'enroulant sur le cylindre d'intrados, sont devenues les arêtes de douelle, étant des droites parallèles, ces arêtes de douelle sont des hélices égales, les surfaces de joints qui ont ces hélices pour directrices sont donc égales elles-mêmes; et on les amènerait à coïncider en les faisant glisser d'une quantité convenable parallèlement à l'axe de l'intrados. Il en résulte qu'au lieu de couper toutes les surfaces de joints par le plan de tête, on obtiendrait les mêmes intersections en coupant l'une d'elles seulement par des plans parallèles au plan de tête convenablement distants de ce plan de tête. Les projections des courbes d'intersection sur le plan de la section droite seraient donc aussi les mêmes; c'est-à-dire que pour les obtenir il suffit de faire varier *b* convenablement dans l'équation [3]. Mais la distance *Y* est indépendante de *b*; donc si par les points où les diverses courbes projections des intersections des surfaces de joints par le plan de tête, rencontrent la circonférence *abd* (fig. 1), on mène des tangentes à ces courbes, elles iront concourir en un point *I* situé sur l'axe *OO'* à une distance du centre marquée par l'expression de *Y*. Mais on sait que la projection de la tangente à une courbe est elle-même tangente à la projection de cette courbe. Si donc les lignes *Bb*, *Cc*, etc. (fig. 1), sont les projections des lignes *B'b'*, *C'c'*, etc., sur le plan de la section droite, les tangentes en *b*, en *c*, etc., sont les projections des tangentes en *b'*, en *c'*, etc. Or, les tangentes en *b*, en *c*, etc., concourent en un même point *I*; donc les plans projetants dont ces tangentes sont les traces, et qui sont tous parallèles à l'axe *OO'*, se coupent suivant une parallèle à cet axe passant par le point *I*. Cette parallèle rencontre le plan de tête en un point de la verticale du point *O*, qui se projette en *I'* à une distance de *O''* égale à *O₁I*; donc enfin les tangentes aux points *b'*, *c'*, etc., vont toutes concourir au point *I'*.

La distance *O''I'*, ou *Y* en valeur absolue, est facile à construire. Par le centre *O₁* de la section droite on mènera une parallèle à la trace *EF* du plan de tête, jusqu'à sa rencontre en *T* avec le prolongement *aF* de la ligne de naissance; et, par le point *T* on mènera *TZ* parallèle aux droites *4'.7* ou *3'.6*, etc., qui sont le développement des arêtes de

double; la distance aZ sera la distance cherchée. En effet, nous avons appelé α l'angle GDA que le plan de tête fait avec l'axe de l'intrados; appelons i l'angle aTZ égal à l'angle $\alpha\alpha'3$ que fait l'hélice développée avec une parallèle à l'axe; il en résulte

$$\text{tang } i = \frac{2\pi r}{h}.$$

Or le triangle O_1Ta donne

$$Ta = O_1 a. \text{ tang } \alpha = r \text{ tang } \alpha$$

et le triangle Taz donne

$$aZ = Ta \text{ tang } i = r \text{ tang } \alpha \text{ tang } i = r \text{ tang } \alpha \cdot \frac{2\pi r}{h},$$

quantité égale à Y en valeur absolue.

M. de la Gournerie a donné de la propriété que nous venons d'établir une démonstration géométrique qui a été reproduite avec de légères différences dans le *Traité de la coupe des pierres* de M. J. Adhémar, pages 339 et suiv. L'usage de cette propriété pour l'objet qui nous occupe est facile à saisir: on joindra les points $b', c', \text{ etc.}$, au point I' ; les prolongements $B'b', C'c', \text{ etc.}$, des lignes de jonction seront les tangentes en $b', c', \text{ etc.}$, aux intersections des surfaces de joints par le plan de tête, et pourront être pris pour ces intersections elles-mêmes dans les circonstances ordinaires où ces courbes n'ont qu'une courbure insensible.

III. Pour déterminer les joints montants, on mène des droites telles que $\mu\nu$ (fig. 1) perpendiculaires aux droites $\rho\alpha', \sigma 1', \text{ etc.}$, qui sont le développement des arêtes de douelle. On n'a marqué sur l'épure qu'un petit nombre de ces perpendiculaires. Lorsqu'on enroule la figure $\alpha\beta\beta'\alpha'$ sur le cylindre d'intrados, les perpendiculaires dont il s'agit deviennent des arcs d'hélices, tels que celui qui est projeté en mn , normaux aux arêtes de douelle. On prend pour joints montants des surfaces hélicoïdes de vis à filet carré ayant ces hélices pour directrices. La voûte se trouve ainsi divisée en voussoirs par des surfaces normales à la douelle et perpendiculaires entre elles, ce qui est la condition essentielle de l'appareil d'une voûte. Pour obtenir un point intermédiaire de l'hélice projetée en mn , on prendra un point intermédiaire sur la droite $\mu\nu$, par exemple celui qui se trouve sur la génératrice 3.3'; en menant de ce point une perpendiculaire à OO' jusqu'à la rencontre de la projection horizontale de la génératrice correspondante à 3.3' on aura la projection horizontale du point cherché. Pour avoir les projections verticales qui correspondent à m et n , il suffira de mener par ces points des perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à la rencontre en m' et n' des lignes $c'k$ et $b'l$ projections verticales des génératrices dont $rm..$ et $sn..$ sont les projections horizontales. Quant au point intermédiaire entre m et n , on mènera par ce point une perpendiculaire à AD et une perpendiculaire à XY ; on prendra la portion de la première comprise entre AD et le cercle $abcd$, et on la portera sur la seconde à partir de XY ; on aura ainsi un point intermédiaire sur la projection $m'n'$. On opérera de même pour les autres joints montants.

On a en $\mu\nu\sigma\rho$ le développement du panneau de douelle correspondant à la portion d'intrados comprise entre le joint mn et le plan de tête. Les surfaces de joints vont couper l'extrados suivant des hélices ayant respectivement le même pas; et cette considération fournit le moyen d'obtenir le déve-

loppement du panneau d'extrados qui correspond au panneau $\mu\nu\sigma\rho$ de l'intrados. En effet, les deux joints de lit et le joint montant qui servent de limites au voussoir correspondant à $mnsr$, se coupent suivant deux droites passant par les points m, m' et n, n' et qui, étant des génératrices des deux joints de lit, sont parallèles à la section droite de l'intrados et rencontrent l'axe OO' . Leurs projections horizontales seront donc dirigées suivant les perpendiculaires à OO' menées par les points m et n ; et si l'on développe l'extrados, les points où cette surface est rencontrée par les deux génératrices dont il s'agit viendront se placer en des points M et N situés sur le prolongement des droites $m\mu$ et $n\nu$. D'un autre côté, si AU est le développement de l'arc de tête de l'extrados, supposé obtenu par les mêmes procédés que pour l'intrados, le point projeté en C' viendra en R , et le point projeté en B' viendra en S . Les hélices de l'extrados qui passent par ces deux points ayant le même pas que celles de l'intrados qui passent par les points ρ et σ , donneront, dans le développement, des droites qui iront concourir aux mêmes points de la ligne de αL , à partir de laquelle on a opéré les deux développements; c'est-à-dire que l'hélice correspondante au point R donnera la droite $R\alpha'$, qui concourt avec $\rho\alpha'$ au même point α' ; et que l'hélice correspondante au point S donnera la droite $S\sigma'$, qui concourt avec $\sigma\sigma'$ au même point σ' de la ligne αL . Ces droites $R\alpha'$ et $S\sigma'$ détermineront les points M et N ; et l'on aura en $MNSR$ le développement du panneau d'extrados correspondant au panneau $\mu\nu\sigma\rho$ de l'intrados.

IV. Avant de procéder à la taille du voussoir, il faut encore se procurer sa projection sur le plan de la section droite. Pour cela, on mènera par les points m et n des perpendiculaires à AD jusqu'à la rencontre de la circonférence $abcd$ en m_1 et n_1 ; puis, par le centre O_1 on fera passer les rayons $m_1 M_1$ et $n_1 N_1$; ce seront les projections des génératrices de joints qui passent par les points m, m' et n, n' . On a déjà les droites Bb et Cc qui concourent au point I ; la projection du voussoir considéré sera comprise entre les droites Bb et $M_1 n_1$.

Pour appliquer le trait sur la pierre, on préparera un prisme ayant pour base le quadrilatère curviligne $Bbm_1 M_1$, et pour hauteur la distance des points r et n comptée parallèlement à OO' . Après avoir marqué sur les deux bases les points $b, c, m_1, n_1, B, C, M_1, N_1$, on joindra les points correspondants par des droites, qui seront des génératrices des cylindres d'intrados et d'extrados. Sur la surface cylindrique concave on appliquera le panneau flexible $\mu\nu\sigma\rho$, de manière que le point ν tombe en n_1 , sur l'une des bases, le point ρ en c sur l'autre base, le point σ sur la génératrice qui passe en b , et le point μ sur la génératrice qui passe en m_1 . On appliquera sur la surface cylindrique convexe le panneau flexible $MNSR$, de manière que le point N tombe en N_1 , sur l'une des bases, le point R en C sur l'autre base, le point S sur la génératrice qui passe en B , et le point M sur la génératrice qui passe en M_1 . À l'aide de ces deux panneaux on tracera les hélices qui répondent aux droites $\mu\rho, \nu\sigma, \mu\nu, MR, NS, MN$, et les arcs d'ellipses qui correspondent aux courbes $\rho\sigma$ et RS . Ces deux derniers arcs détermineront le plan de la face de tête, et permettront de tailler cette face. Quant

aux joints hélicoïdes, on les taillera en se servant d'une règle que l'on fera passer par des points de repère marqués à l'avance sur les droites $\mu\rho$ et MR , sur les droites $\nu\sigma$ et NS , et sur les droites $\mu\nu$ et MN . Ces points de repère s'obtiennent de la manière la plus facile en divisant en un même nombre de parties égales les droites correspondantes sur lesquelles ils doivent être marqués. On taillera de la même manière tous les voussoirs appartenant aux arcs de tête.

En supposant la voûte construite entièrement en pierres de taille, on pourrait tailler d'une manière analogue tous les voussoirs courants. On pourrait aussi les obtenir par des procédés tout à fait semblables à ceux auxquels on a recours pour tailler les pierres d'un limon d'escalier à vis (*Voy. LIMON*). Mais le plus ordinairement le corps de la voûte se construit, comme nous l'avons dit, en matériaux de petite dimension, en briques par exemple. Les pierres qui doivent entrer dans cette construction sont alors identiques entre elles; et pour les mettre en place, on dispose sur les couchis qui doivent porter provisoirement la voûte une aire en plâtre, formant un cylindre égal à l'intrados; sur cette aire on trace les hélices qui forment les arêtes de douelle; elles sont distantes entre elles de l'épaisseur des pierres qu'on veut employer; on n'a donc qu'à placer celles-ci dans l'intervalle des hélices, de manière que la face qui doit former la douelle coïncide avec l'aire en plâtre; et on les relie entre elles par du ciment.

Indépendamment des voussoirs appartenant aux arcs de tête, on construit encore en pierres de taille l'assise supérieure des piédroits, et les voussoirs triangulaires marqués par la lettre ω sur la figure 1, et que l'on nomme les *coussinets*. Ces coussinets doivent être solidement établis afin de résister à l'effort des assises qui tendent à glisser le long des joints de lits, très-inclinés vers les naissances. C'est pourquoi on taille les coussinets de manière à faire corps avec les pierres de l'assise supérieure des piédroits. Ces coussinets ont une face cylindrique concave à l'intrados, une face cylindrique convexe à l'extrados, une face hélicoïde faisant partie d'un joint de lit, et une face hélicoïde formant joint montant. On les taillera, comme les voussoirs de tête, au moyen des panneaux de développement des faces d'intrados et d'extrados; les figures $\alpha 1^{\text{er}}$ et $A 1^{\text{er}}$ (fig. 1) représentent ces deux développements pour le premier coussinet de gauche.

V. Le défaut de l'appareil hélicoïdal est dans la tendance de certaines assises à glisser vers l'extérieur; ainsi l'assise projetée en $b'c'h'l$ (fig. 1) tend à glisser vers l'arrière de la voûte. Pour éviter ce défaut, on peut limiter l'appareil hélicoïdal à la portion de la voûte comprise entre le plan de tête et une section droite voisine. Si, par exemple, AB et CB (fig. 4) représentent les traces horizontales des plans de tête, et MN et OP celles de deux sections droites voisines, on pourra n'employer l'appareil hélicoïdal que pour les portions $ABNM$ et $CDPO$ de la voûte, et appareiller comme un berceau ordinaire la portion $MNPO$. Les assises qui tendaient à glisser vers l'extérieur, en C et en B , se trouvent ainsi supprimées, ou du moins réduites au voussoir de tête. C'est surtout dans le cas où la voûte

doit avoir une grande longueur qu'il peut être utile d'adopter cette disposition.

On a reproché également à l'appareil hélicoïdal la tendance qu'auraient les assises à éprouver un

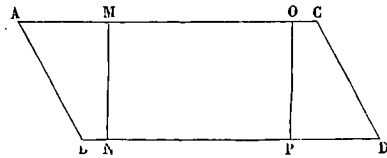


Fig. 4.

mouvement de torsion lorsqu'on opère le décentrement de la voûte avant que les mortiers aient acquis une consistance suffisante. On a proposé pour y remédier de remplacer les joints montants hélicoïdes par des joints plans parallèles aux plans de tête. Mais, dans cette hypothèse, il serait préférable d'adopter l'*appareil orthogonal*, imaginé par les ingénieurs des chemins de fer de Versailles et de Saint-Germain, et dont nous avons maintenant à parler.

VI. APPAREIL ORTHOGONAL. On sait qu'on appelle *trajectoire orthogonale* d'une famille de courbes, une ligne qui rencontre normalement toutes ces courbes. Dans l'appareil dont il s'agit, les joints montants sont des plans verticaux parallèles aux plans de tête; ces plans coupent l'intrados suivant des courbes égales aux arcs de tête, des ellipses par exemple; les arêtes de douelles sont les trajectoires orthogonales de ces courbes égales; et l'appareil devrait s'appeler *appareil à trajectoires orthogonales*.

On construira de la manière suivante les projections de ces trajectoires. Soient AC et BD (fig. 5) les lignes de naissance de la voûte; nous prendrons le plan de naissance pour plan horizontal de projection, et le plan de tête AB pour plan vertical. Pour fixer les idées, nous supposons, ce qui d'ailleurs a lieu le plus souvent, que les courbes de tête sont des cercles. Soient xx, yy, zz, uu , les traces des plans parallèles aux plans de tête et qui déterminent les joints montants; soient $0, 1', 2', 3', 4', 5'$ les centres des cercles suivant lesquels se projettent les intersections de ces plans avec l'intrados. On remarquera d'abord que chacune des trajectoires cherchées se projette sur le plan vertical suivant une courbe qui est elle-même une trajectoire orthogonale des cercles dont les centres sont $0, 1', 2', 3', 4', 5'$. Car, si l'on considère en particulier l'une des trajectoires cherchées, au point où elle rencontre l'un des cercles xx, yy , etc., sa tangente est perpendiculaire à la tangente à ce cercle, laquelle est parallèle au plan vertical; or, lorsqu'un angle droit a l'un de ses côtés parallèles à l'un des plans de projection, on sait qu'il se projette sur ce plan suivant un angle droit; la tangente à la trajectoire considérée se projette donc verticalement suivant la normale à la projection du cercle considéré, et, comme on en peut dire autant pour tous les cercles analogues, il en résulte que la projection de la trajectoire rencontre normalement tous ces cercles, et qu'elle est par conséquent leur trajectoire orthogonale.

Cette trajectoire des cercles $0, 1', 2'$, etc., peut

être déterminée exactement par le calcul. L'un quelconque de ces cercles a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2. \quad [5]$$

R désignant le rayon et α l'abscisse du centre

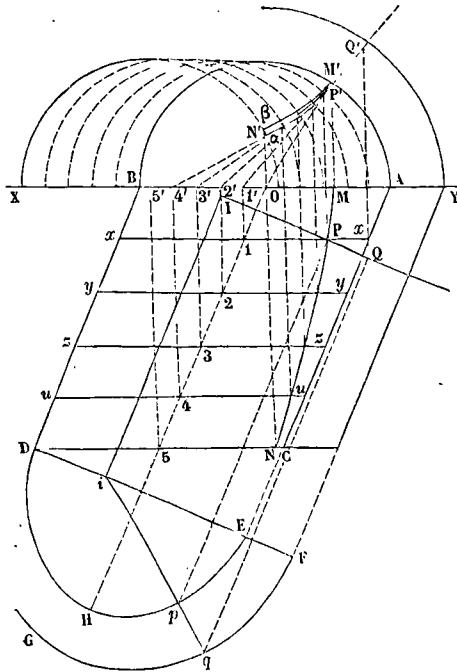


Fig. 5.

comptée sur XY à partir d'une origine quelconque, à partir du point A par exemple. On démontre, dans le calcul infinitésimal, que, pour obtenir la trajectoire orthogonale d'une famille de courbes, il faut poser l'équation

$$1 + y' \frac{dy}{dx} = 0, \quad [6]$$

dans laquelle y' représente le coefficient angulaire de la tangente à l'une des courbes proposées, et éliminer entre cette relation et l'équation générale de ces courbes le paramètre variable qui caractérise chaque courbe. De l'équation [5] on tire

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y},$$

par conséquent on doit avoir

$$1 - \frac{(x - \alpha)}{y} \frac{dy}{dx} = 0;$$

éliminant α entre cette relation et l'équation [5], puis intégrant, on obtient pour l'équation de la trajectoire demandée

$$x = \log' \frac{R - \sqrt{R^2 - y^2}}{y} + \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R} + \text{const.} \quad [7]$$

On voit que toutes les trajectoires orthogonales des cercles 0, 1', 2', 3', etc., sont des courbes égales, et que, l'une d'elles étant obtenue, on aura toutes les autres en faisant glisser la première parallèlement à l'axe XY. Si, par exemple, on suppose la constante arbitraire nulle, on trouvera pour

x et y les valeurs correspondantes inscrites dans le tableau suivant :

Valeurs de $\frac{y}{R}$	Valeurs de $\frac{x}{R}$
1	0,000
0,9	-0,031
0,8	-0,092
0,7	-0,183
0,6	-0,298
0,5	-0,460
0,4	-0,649
0,3	-0,918
0,2	-1,310
0,1	-1,993
0,0	$-\infty$

Ces valeurs correspondent à une courbe ayant la forme indiquée par la figure 6. Si les sections pa-

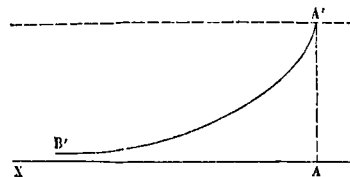


Fig. 6.

rallèles aux plans de tête étaient des ellipses ayant pour demi-axes a et b , on trouverait de même pour l'équation de la trajectoire orthogonale de leurs projections sur le plan vertical

$$x = \frac{b^2}{a} \left[\log' \frac{b - \sqrt{b^2 - y^2}}{y} + \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \right] + \text{const.}$$

Au lieu d'avoir recours au calcul, on peut construire approximativement la courbe par la propriété qui lui sert de définition. Soit, par exemple, M' (fig. 5) le point par lequel on veut faire passer une trajectoire orthogonale des cercles 0, 1', 2', 3', etc. Si par le point M' on mène une droite dirigée vers le point 0, jusqu'à la rencontre du cercle 1'; par le point de rencontre une droite dirigée vers 1'; jusqu'à la rencontre du cercle 2'; par le nouveau point de rencontre une droite dirigée vers 2', jusqu'à la rencontre du cercle 3', et ainsi de suite; on obtiendra une ligne brisée $M'A'$ qui différera d'autant moins de la courbe cherchée que les sections xx, yy, zz , etc., seront plus rapprochées. Mais elle sera placée un peu plus bas que cette courbe, attendu que ses côtés successifs ne sont normaux qu'au cercle qui passe par leur extrémité supérieure. Si au contraire on joint M' au point 1', en arrêtant la ligne de jonction au cercle 1', que par le point de rencontre on mène une droite dirigée vers le point 2', jusqu'à la rencontre du cercle 2'; et ainsi de suite; on aura une seconde ligne brisée $M'\beta$ qui différera aussi très-peu de la trajectoire cherchée, mais qui sera placée un peu plus haut, parce que ses côtés ne sont normaux qu'au cercle qui passe par leur extrémité inférieure. Si donc on forme une ligne brisée $M'N'$, en joignant les milieux des arcs de cercles interceptés par les deux lignes $M'\alpha$ et $M'\beta$, la ligne ainsi tracée différera moins encore que les deux précédentes de la courbe qu'on veut obtenir.

La projection $M'N'$ de la trajectoire qui doit servir d'arête de douelle étant obtenue par l'un des

procédés ci-dessus, on en déduira aisément sa projection horizontale; pour cela, par les points où $M'N'$ rencontre les cercles 0, 1', 2', 3', 4', 5', on abaissera des perpendiculaires à la ligne de terre, terminées aux droites AB , xx , yy , zz , uu . CD , projections horizontales de ces cercles; et, en joignant par une courbe continue les points ainsi déterminés, on aura la projection MN de la trajectoire sur le plan horizontal.

VII. On prend pour le joint de lit correspondant à chaque arête de douelle la surface gauche formée par les normales à l'intrados menées par les différents points de cette ligne. Pour obtenir la normale à l'intrados en un point quelconque de la trajectoire MN , $M'N'$, au point P , P' par exemple, on remarquera que cette normale est perpendiculaire à la tangente au cercle xx ; et, comme celle-ci est parallèle au plan vertical, la normale, par la raison que nous avons déjà donnée, se projettera verticalement suivant une perpendiculaire à la tangente en P' au cercle 1', c'est-à-dire suivant la normale $P'Q'$ à ce cercle. D'ailleurs la normale à l'intrados étant contenue dans le plan de la section droite, elle se projettera horizontalement sur la trace horizontale de cette section, c'est-à-dire perpendiculairement à l'axe de la voûte, ou suivant PQ perpendiculaire à AC . On opérera de même pour toutes les autres normales; le joint de lit se trouve donc déterminé par ses génératrices rectilignes.

Il est nécessaire de déterminer son intersection avec l'extrados. Soit DHE la section droite de l'intrados, et FG celle de l'extrados, rabattues sur le plan horizontal. Pour avoir le point de rencontre de la normale PQ , $P'Q'$ avec l'extrados, on mènera d'abord par le point P une parallèle à l'axe de la voûte, jusqu'à sa rencontre en p avec la section EHD ; puis, après avoir déterminé la trace horizontale I de la normale, on la projettera en i sur DE ; joignant alors ip , on aura la projection de la normale sur le plan de la section droite; on la prolongera jusqu'à sa rencontre en q avec la courbe d'extrados FG ; par le point q on mènera une perpendiculaire à DE , ce qui déterminera le point Q , ou peut une perpendiculaire à XY , ce qui déterminera le point Q' . On opérera de même pour les autres normales, et l'on obtiendra les projections de l'intersection du joint de lit considéré avec la surface d'extrados; on opérera de même pour les autres joints de lit.

On développera, par les procédés ordinaires, la surface d'intrados et la surface d'extrados avec les courbes qui y sont tracées; et l'on aura le développement des panneaux de douelle et les panneaux correspondants de l'extrados.

VIII. En supposant la voûte entièrement construite en pierres de taille, on taillerait chaque voussoir par un procédé analogue à celui qui a été expliqué à l'occasion de l'appareil hélicoïdal. Les quatre normales qui forment les angles du voussoir ayant été projetées sur le plan de la section droite, on a la projection du voussoir sur ce plan. Sur cette projection on construira un prisme droit ayant pour hauteur la distance des deux joints plans, la distance des droites xx et yy par exemple. Sur la face cylindrique concave on appliquera le panneau de douelle, et sur la face convexe le panneau correspondant de l'extrados; les deux joints gauches se

tailleront à l'aide d'une règle qu'on fera passer par des points de repère déterminés à l'avance sur chaque arête de douelle et sur l'arête courbe qui correspond à l'extrados. — Mais le plus ordinairement le corps de la voûte étant construit en moellons ou en briques, on préparera une aire en plâtre coïncidant avec l'intrados; sur cette aire on tracera, à l'aide du développement de l'intrados, les trajectoires orthogonales, entre lesquelles on n'aura plus qu'à disposer les pierres qui doivent former la voûte. Il y aura ici une petite difficulté de plus que dans l'appareil hélicoïdal: c'est que les trajectoires, bien que toutes égales entre elles, ne sont point équidistantes, et qu'il faudra par conséquent faire varier l'épaisseur de la pierre employée, suivant la distance des deux courbes entre lesquelles elle doit être placée. — Quant aux voussoirs de têtes, ils forment une sorte de voûte indépendante de la voûte principale; il résulte en effet du défaut de parallélisme des arêtes de douelle qu'on ne pourrait prolonger les joints de lits jusqu'aux plans de têtes sans établir entre les largeurs des voussoirs de tête des inégalités qui seraient choquantes à la vue; on taille donc ces voussoirs d'une manière indépendante, en faisant les joints de lits normaux aux plans de tête. La taille de ces voussoirs n'offre donc aucune difficulté; on exécute les faces planes; les surfaces cylindriques se taillent ensuite au moyen d'une règle posée sur des points de repère choisis à l'avance.

On a proposé dans la construction de la voûte qui nous occupe une simplification importante, c'est de remplacer les joints de lits gauches par les surfaces cylindriques qui projettent les trajectoires sur les plans de tête, surfaces qui diffèrent en effet très-peu des premières; et qui offrent en outre l'avantage de ne fournir que des réactions situées dans des plans parallèles aux plans de tête, et de ne donner par conséquent aucune composante perpendiculaire à ces plans; c'est-à-dire de ne pas donner lieu à ce qu'on appelle une *poussée au vide*.

Lorsque la voûte doit avoir une grande longueur, on peut, comme l'indique la figure 4, appareiller comme un berceau ordinaire la portion de la voûte comprise entre les sections droites MN et OP , et n'employer l'appareil orthogonal que pour les portions $ABNM$ et $CDPO$. Mais, au lieu de joints montants parallèles aux têtes, on emploie des plans verticaux qui convergent, les uns vers le point de rencontre des droites AB et MN , les autres vers le point de rencontre des droites CD et OP . Les arêtes de douelle sont les trajectoires orthogonales des sections verticales de l'intrados ainsi obtenues; leur tracé est nécessairement plus compliqué. Ce système est ce qu'on appelle l'*appareil orthogonal convergent*. Ses avantages ne paraissent pas compenser les difficultés de l'exécution et l'aspect peu gracieux de la voûte.

ARCS PARALLÈLES EN RETRAITE. Enfin, on a formé des ponts biais d'une série d'arcs droits égaux et parallèles, mais placés en retraite les uns par rapport aux autres comme l'indique la figure 7 en projection horizontale. Ces arcs sont des berceaux droits ordinaires, mais d'une faible longueur, AB , AB , etc., dont les centres O , O , etc., sont placés sur l'axe de la voûte biaise. Ils sont reliés entre eux

par d'autres berceaux MN, MN, etc., dont les voussoirs s'engagent d'une quantité plus ou moins grande dans l'épaisseur des arcs principaux. Ce système manque d'élégance, mais il présente une

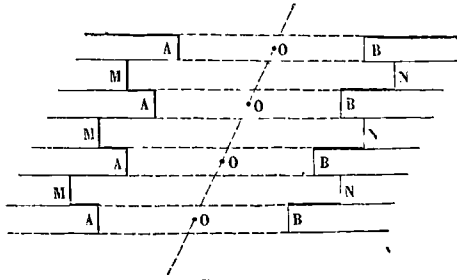


Fig. 7.

solidité et une stabilité remarquables. Il en existait un modèle à Amiens, datant de plusieurs siècles, et qui a été démoli en 1845. Le même principe a été appliqué à la construction d'un tunnel en maçonnerie dépendant de la gare du chemin de fer de Versailles, rive droite. Enfin M. Boucher a fait construire à Chartres, d'après le même système, un pont biais en pierre de taille. Ce système convient surtout aux chemins de fer, parce qu'on peut placer un des arcs principaux sous chaque rail.

On peut consulter sur les ponts biais le *Traité des ponts biais* de M. Buck, ingénieur anglais, traduit dans le *Manuel des ponts et chaussées*; le *Mémoire* de M. de la Gournerie, inséré dans les *Annales des ponts et chaussées* (en 1851); le *Mémoire* de M. Lefort sur l'appareil orthogonal, même recueil, mai et juin 1839; le *Traité de la coupe des pierres*, de M. J. Adhémar, etc.

PONTS BIAIS (Charpente). On construit des ponts biais en bois; mais ils sont tous établis sur le type des arcs droits en retraite (*Voy. PONT BIAIS* [Coupe des pierres]); c'est-à-dire qu'ils se composent d'un certain nombre de fermes égales et parallèles, placées en retraite les unes par rapport aux autres, de manière que leurs points homologues soient situés sur des droites parallèles à l'axe du pont, ou à la direction des piles. La figure 1 représente en pro-

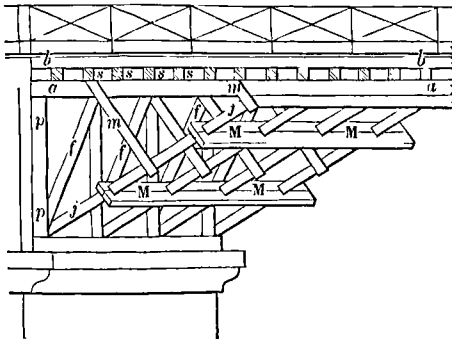


Fig. 1.

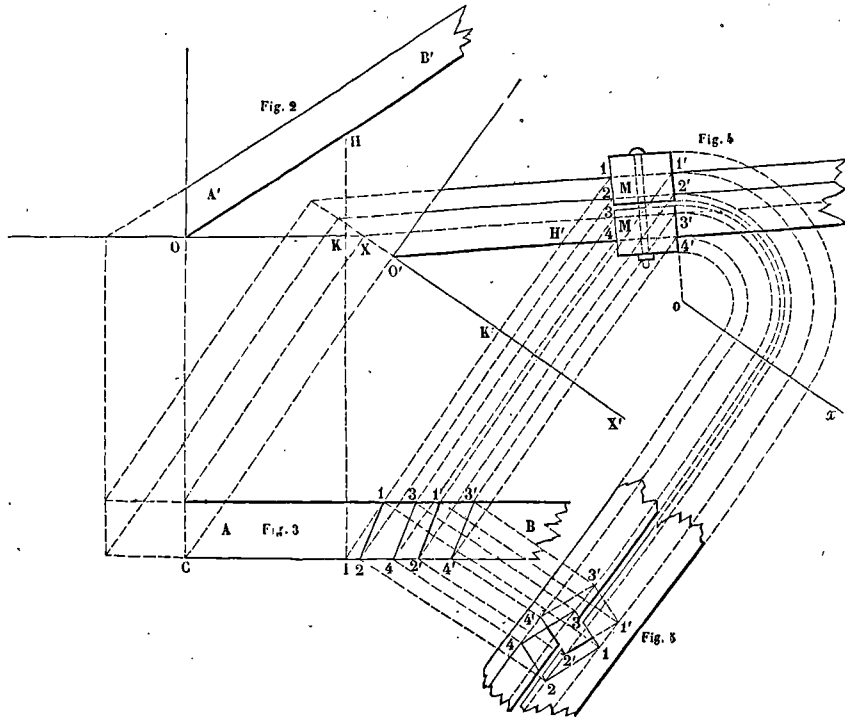
jection verticale une demi-arche d'un semblable pont. Chaque ferme se compose d'une poutre horizontale ou *longeron aa* soutenue par un poteau vertical *pp*, par une jambe de force *jj*, et une con-

refiche *f*. Ces diverses pièces sont en outre reliées par des moises pendantes *m, m*. Sur ces fermes sont posées les solives *ssss* qui portent le tablier *bb* du pont. Dans l'exemple de la figure 1, le nombre des fermes est de quatre. — La difficulté principale de ce genre de construction réside dans le procédé adopté pour relier entre elles les différentes fermes, afin de former de leur ensemble un système rigide. — Le mode le plus fréquemment employé consiste à réunir toutes les fermes par des moises horizontales *MM*, qui sont alors parallèles à la direction des piles. Mais les jambes de force pénétrant obliquement dans les moises, il est nécessaire de déterminer par une épure les entailles qu'il faut pratiquer dans ces moises. Soient (fig. 2 et 3) *AB* et *A'B'* les projections d'une des jambes de force, rapportée à un plan horizontal passant par son point le plus bas *O*. Il faut, avant tout, pour fixer les dimensions transversales des moises, projeter la jambe de force sur un plan vertical perpendiculaire à la direction des piles. Soit *CO'* cette direction, et soit *O'X'*, perpendiculaire à *CO'*, la nouvelle ligne de terre. On prendra sur la projection horizontale de l'arête qui passe au point *C* un point quelconque *I*, que l'on projettera en *K* sur *OX* et en *K'* sur *O'X'*. On prolongera les perpendiculaires; on prendra sur la seconde une longueur *K'H'* égale à la distance *KH*, et l'on joindra *O'I'*, qui sera la nouvelle projection verticale de l'arête passant en *C*. Les projections des autres arêtes s'en déduiront sans difficulté comme l'indique la figure. — Ayant obtenu ainsi (fig. 4) la projection verticale de la jambe de force sur un plan vertical perpendiculaire à la direction des moises, on pourra déterminer les sections droites *M, M*, de ces moises. On marquera les points 1, 2, 3, 4 et 1', 2', 3', 4' où leurs faces perpendiculaires au nouveau plan vertical rencontrent les arêtes de la jambe de force; et on projettera ces points (fig. 3) sur les projections horizontales correspondantes de ces arêtes. On pourra tracer ainsi les parallélogrammes 1.2.4.3 et 1'.2'.4'.3' suivant lesquels la jambe de force pénètre dans les faces latérales des moises. Prenant alors dans l'une de ces faces un point *o* par lequel on concevra une horizontale parallèle à la direction des piles, on imaginera que les moises tournent autour de cette horizontale, jusqu'à ce que les faces latérales dont nous venons de parler soient venues prendre une direction horizontale, et que, dans cette position, on projette leurs différents points sur le plan horizontal de projection primitif. Puis, des sommets des parallélogrammes 1.2.3.4 et 1'.2'.4'.3' on abaissera des perpendiculaires sur la direction des arêtes des moises. En marquant (fig. 5) les intersections de ces perpendiculaires avec les perpendiculaires à *ox* qui répondent aux mêmes chiffres, on obtiendra les traces supérieures et inférieures des entailles qu'on veut déterminer, telles qu'elles devront être tracées sur les faces mêmes des moises pour l'exécution de ces entailles. Il faut remarquer seulement que, par suite du mouvement de rotation imprimé aux moises, c'est la moise supérieure qui se trouve placée à droite sur la figure 5, et la moise inférieure qui se trouve placée à gauche. — On opérerait de la même manière pour les autres entailles; mais on peut remarquer qu'elles

ont leurs faces respectivement parallèles, ce qui abrégera les opérations.

Au lieu de relier entre elles les jambes de force, on relie quelquefois les moises pendantes par des

moises horizontales. Cette disposition donnerait lieu à des opérations analogues aux précédentes. On a quelquefois donné aux moises qui relient les différentes fermes une direction différente de la



direction horizontale. Au pont d'Asnières, construit par M. Clapeyron, et qui a été remplacé par un pont en fer, les moises reliant entre elles les moises pendantes des fermes consécutives étaient placées dans des plans verticaux perpendiculaires aux plans des fermes. (Voy. pour plus de détails, le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, n° 760 et suiv.)

PONTS EN CHARPENTE. Ces ponts peuvent être établis sur piles et culées en pierre, ou sur culées en pierre et palées, ou sur culées en bois et palées (V. CULÉES, PALÉES).

Le tablier repose sur plusieurs fermes, le plus souvent équidistantes. L'intervalle entre deux points d'appui consécutifs forme une travée.

La disposition des fermes varie à l'infini; nous ne citerons que les systèmes les plus généralement employés.

I. Quand l'intervalle entre deux points d'appui consécutifs ne dépasse pas 5^m, les fermes se réduisent à des poutres horizontales posées sur ces appuis; c'est sur ces poutres que sont posées transversalement les entretoises ou *pièces de pont* qui reçoivent le tablier et la chaussée. Si la travée doit avoir de 5^m à 8^m, on pose sur les palées des *sous-poutres* AA (fig. 1) que l'on fait saillir de 2^m, et que l'on soutient par des contre-fiches *f, f*. (La figure montre en outre les têtes *m, m* des moises horizontales reliant les pieux qui forment la palée, et la tête *M* de la pièce horizontale formant le chapeau de cette palée.)

Pour des travées de 8^m à 12^m, on ajoute un se-

cond rang de contre-fiches *f', f'* (fig. 2), butant contre une autre sous-poutre B, placée au milieu de

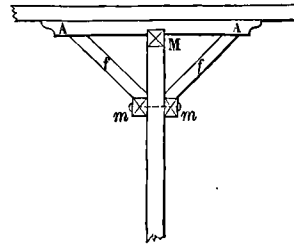


Fig. 1.

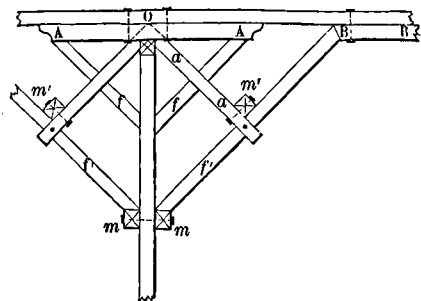


Fig. 2.

cond rang de contre-fiches ont une longueur supérieure à 12 fois leur équarrissage, on les

soutient par des moises pendantes inclinées a, a , que l'on relie elles-mêmes d'une ferme à l'autre par des moises horizontales m', m' .

Pour des travées plus grandes on peut faire usage de plusieurs étages de contre-fiches ou d'arbalétriers reliés entre eux par des moises pendantes verticales. Il y a en Suisse plusieurs exemples remarquables de ce genre de construction. Quand la travée prend une longueur considérable, on emploie des POUTRES ARMÉES (Voy. ce mot). On cite comme le plus surprenant ouvrage de cette espèce le pont de Wittingen sur la Limmat, formé d'une seule travée de 118^m,90. Il se compose de plusieurs étages de poutres armées, reliées par des moises pendantes verticales, et soutenues par plusieurs systèmes de contre-fiches ou d'arbalétriers diversement inclinés, et dont le plus bas est une poutre armée.

II. Dans les divers cas que nous venons d'indiquer, les dimensions d'une poutre se calculent comme si elle était simplement posée sur les appuis. On calcule le poids total d'une travée du tablier et de la chaussée; on le divise par le nombre des poutres, et l'on a le poids uniformément réparti sur la longueur d'une poutre. Si le pont est destiné au passage d'une route ordinaire, le contrôle des Ponts et chaussés prescrit d'ajouter une charge d'épreuve de 400^k par mètre carré de chaussée et de 200^k par mètre carré de trottoir. Si le pont est destiné au passage d'un chemin de fer, la surcharge doit être de 5000^k par mètre courant de simple voie pour les travées moindres que 20^m, et de 4000^k pour des portées plus grandes. Cette surcharge doit évidemment entrer dans le poids uniformément réparti sur les poutres. Si le pont est exposé à des surcharges accidentelles considérables, il faut y avoir égard : tel est, sur une route ordinaire, le passage d'une voiture représentant un poids de 6000^k, ou, sur une voie ferrée, le passage d'une locomotive pesant 60 000^k, ce qui donne 30 000^k pour une poutre, attendu qu'on en place ordinairement une sous chaque rail. Soit a la longueur de la travée, p le poids par mètre courant uniformément réparti sur la poutre en temps ordinaire, p' le poids par mètre courant de surcharge réglementaire, P le poids accidentellement appliqué au milieu de la travée, on devra satisfaire aux deux égalités (Voy. FLEXION PLANE)

$$R = \frac{1}{8}v(p + p')a^2 = \frac{3}{4bh^2}(p + p')a^2 \quad [1]$$

et

$$R = \frac{v}{1} \left(\frac{1}{8}pa^2 + \frac{1}{4}Pa \right) = \frac{6}{bh^2} \left(\frac{1}{8}pa^2 + \frac{1}{4}Pa \right), [2]$$

en appelant b la dimension horizontale de la section droite de la poutre, et h sa dimension verticale. On prendra R égal au plus à 600 000 pour le chêne ou 800 000 pour le sapin, soit 60^k par centimètre carré dans le premier cas et 80^k dans le second; on se donnera le rapport de h à b , et l'on déduira h de ces deux formules; on devra adopter la plus grande des deux valeurs obtenues. On pourra alors évaluer le poids de la poutre, pour le faire entrer dans p , et calculer une valeur de h plus approchée.

Lorsqu'une même poutre forme plusieurs travées, ou même la longueur totale du pont, on la considère comme une pièce posée sur des appuis, correspondants aux piles et aux culées, et on appli-

que la FORMULE DE CLAPEYRON (Voy. ce mot, et l'article FLEXION PLANE). On détermine ainsi le moment fléchissant correspondant à chaque point d'appui, et par suite le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre, le maximum de ce moment, et par conséquent les dimensions transversales de la poutre. On déduit du même calcul les réactions des appuis, et par contre la charge que ces points supportent, d'où l'on conclut l'équarrissage des palées.

Les dimensions des pièces de pont devraient se calculer comme pour le cas d'une pièce posée sur un certain nombre d'appuis (qui sont ici les poutres), chargée d'un poids uniformément réparti, et en outre d'un poids appliqué au milieu de l'intervalle de deux poutres, et représentant la surcharge accidentelle causée par le passage d'une voiture. Mais comme ce calcul est très-long, on préfère employer une marche moins rigoureuse, mais plus rapide. On calcule les dimensions de la pièce de pont : 1° comme si la portion de cette pièce comprise entre deux poutres formait une pièce isolée posée sur deux appuis; 2° comme si elle était encastree aux deux points d'appui : dans le premier cas le maximum du moment fléchissant est donné par la formule

$$\mu = \frac{1}{8}pa^2 + \frac{1}{4}Pa,$$

en nommant a la distance de deux poutres, p le poids uniformément réparti sur chaque pièce de pont et P la charge accidentelle; dans le second cas on aurait

$$\mu = \frac{1}{12}pa^2 + \frac{1}{8}Pa.$$

On adopte la moyenne entre les valeurs de μ données par ces deux formules. Lorsque le pont n'a à supporter accidentellement que le poids d'une charrette ne dépassant pas 4000^k, on peut espacer les pièces de pont de 0^m,50; il faut les rapprocher davantage si la charge accidentelle doit être plus considérable. Mais il est bon de remarquer que lorsqu'il ne s'agit que d'une surcharge momentanée, on peut faire supporter aux bois une tension plus grande que celle qui a été indiquée plus haut, et qu'il est permis de la porter alors à 100^k ou 120^k par centimètre carré.

Pour calculer l'équarrissage des contre-fiches, on supposera chaque poutre posée sur les appuis que forment les extrémités des palées et des contre-fiches, et l'on déterminera les réactions de ces points d'appui; pour les contre-fiches analogues à celle qui aboutit au point A (fig. 2), on prendra la composante de la réaction dans le sens de la longueur de cette pièce; il faudra que cette composante, divisée par la section transversale de la contre-fiche donne un quotient au plus égal à 60 ou 80 kilogrammes par centimètre carré, selon l'essence du bois; pour les contre-fiches analogues à celle qui aboutit au point B, on décomposera la réaction suivant la direction de la contre-fiche et suivant l'horizontale; et l'on se servira de ces deux composantes pour déterminer de même les dimensions transversales de la contre-fiche et de la sous-poutre.

III. Pour les ponts à grande portée, on emploie depuis plus de 50 ans, en France, un système qui consiste à soutenir les poutres et le tablier par un

arc formé d'un certain nombre d'arbalétriers courbes, assemblés par des étriers en fer, et liés au tablier par des moises pendantes dirigées normalement à l'arc. La figure 3 représente une travée

Les constructeurs emploient souvent une méthode plus simple encore et qui donne des résultats suffisamment approchés. Elle consiste à regarder l'arc proposé comme un arc de parabole, chargé de

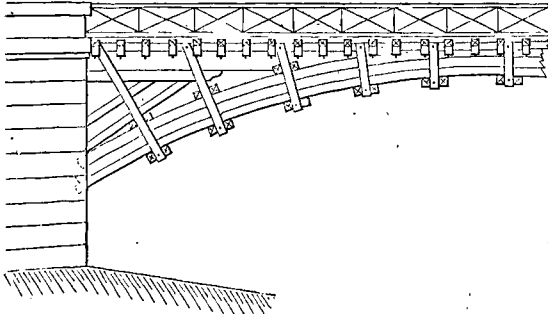


Fig. 3.

du pont d'Ivry-sur-Seine construit dans ce système par M. Emmerly. L'arc à 22^m,50 d'ouverture et 3^m,48 de flèche. Le tablier repose directement sur le sommet de l'arc; et les poutres sont entaillées pour se raccorder avec cet arc. Le poids du tablier est en outre transmis à l'arc par l'intermédiaire des moises. Les fermes sont liées entre elles, non-seulement par des moises horizontales parallèles à l'axe du pont, mais encore par des pièces horizontales en écharpe qui contribuent à contreventer le système.

Pour calculer les dimensions transversales de l'arc, il faudrait à la rigueur considérer le tablier comme posé sur les moises pendantes, déterminer les réactions de ces appuis, les prendre en sens contraire pour avoir les réactions des moises sur l'arc, et en déterminer la composante normale; on aurait ainsi les forces qui agissent sur l'arc, indépendamment de son poids. Mais on obtiendra des résultats suffisamment approchés en regardant le poids du tablier comme réparti uniformément sur la projection horizontale de l'arc (Voy. PIÈCES COURBES [Résistance des]). On se sert ordinairement pour le cas qui nous occupe de la formule

$$bh^2 = \frac{P}{R} \left(\frac{h}{\alpha} + \frac{\rho \alpha^3}{4} \right),$$

dans laquelle b est la dimension transversale de l'arc dans le sens horizontal, h son épaisseur dans

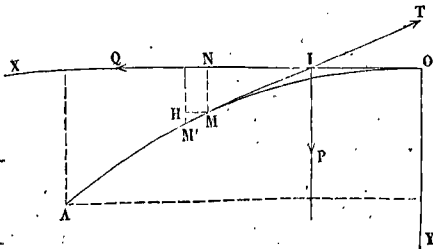


Fig. 4.

le sens vertical, P le poids total du pont, ρ le rayon moyen de l'arc, α la longueur de l'arc de rayon 1 semblable à l'arc considéré, et R un coefficient qu'il convient de prendre égal à 300 000.

l'arc proposé comme un arc de parabole, chargé de poids proportionnels à la projection horizontale de ses éléments. Soit OM (fig. 4) une portion de l'arc, comptée à partir du sommet. Prenons pour axe des x la tangente au sommet, pour axe des y l'axe même de la courbe. Menons la tangente en M ; d'après une propriété connue de la parabole, cette tangente coupera OX au milieu I de l'abscisse ON du point M . Soit M' un point infiniment voisin du point M ; menons l'horizontale $M'H$ et la verticale $M'I$. L'arc OM est en équilibre, sous l'action du poids P , porté par l'arc et qui passe par le milieu I de ON , de la tension Q qui s'exerce en O suivant OX , et de la tension T qui s'exerce en M suivant MI . Ces trois forces sont donc proportionnelles

aux trois côtés du triangle MIN , ou du triangle $MM'H$ qui lui est semblable. On a donc

$$\frac{M'I}{M'H} = \frac{P}{Q} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{px}{Q},$$

en désignant par p le poids par mètre courant que supporte l'arc. Intégrant, et remarquant que pour $x=0$ on doit avoir $y=0$, on obtient pour l'équation de la courbe

$$y = \frac{p}{2Q} \cdot x^2.$$

Cette équation doit être satisfaite par les coordonnées des naissances; si donc a est la demi-ouverture de l'arc et f sa flèche, on doit avoir

$$f = \frac{p}{2Q} \cdot a^2 \text{ d'où } Q = \frac{pa^2}{2f}.$$

On aura ensuite

$$T = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{p^2 x^2 + \frac{p^2 a^4}{4f^2}} = p \sqrt{x^2 + \frac{a^4}{4f^2}}.$$

Le maximum de T répond à $x=a$ et a pour valeur

$$T = pa \sqrt{1 + \frac{a^2}{4f^2}}.$$

C'est cette valeur maximum qui servira à déterminer les dimensions transversales de l'arc.

L'arc étant supposé ne résister que par compression, il faudra que la tension maximum T divisée par l'aire de la section transversale donne un quotient au plus égal à 60^k par centimètre carré pour le chêne, ou 80^k pour le sapin. On posera donc, en appelant b la dimension horizontale et h la dimension verticale,

$$\frac{T}{bh} = 0,6.$$

Si l'on prend le millimètre pour unité, on se donnera b , et l'on en déduira

$$h = \frac{T}{0,6 \cdot b}.$$

IV. Depuis un certain nombre d'années on construit en Amérique des ponts en charpente d'après un système tout différent. Ils ont été imaginés pour faire franchir aux chemins de fer des cours d'eau considérables. On les nomme *ponts en treillage* parce qu'ils en ont effectivement l'aspect. La figure 5 représente une portion d'un pont de ce genre

construit à Richmond par M. Robinson, d'après le système de M. Town. Les fermes, qui ont 5^m,125 de hauteur, sont formées de madriers disposés en losanges, appliqués à plat sans entaille et réunis par

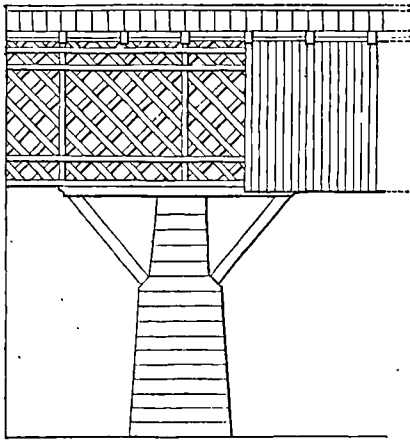


Fig. 5.

des chevilles en chêne. Ils sont reliés par plusieurs cours de moises horizontales dans le sens de la longueur du pont, et par un certain nombre de moises verticales. Deux fermes pareilles sont accolées de chaque côté du pont. Ces deux couples de fermes laissent entre eux un intervalle de 3^m,20. Elles sont réunies à la partie inférieure et à la partie supérieure par des traverses dont les intervalles sont remplis par des croix de Saint-André. D'autres croix de Saint-André, placées verticalement suivant les sections transversales, achèvent de contreventer le système. Les côtés extérieurs sont revêtus de planches pour garantir la construction des intempéries, comme l'indique le côté droit de la figure. Cette construction affecte, comme on voit, la forme d'un long tube à section rectangulaire; il repose sur des culées et des piles en pierre distantes de 45^m; et c'est sur ce tube que sont établies les poutres qui portent le tablier du pont. Ces ponts peuvent porter un grand poids; mais ils se déforment aisément; leur grande hauteur masque la vue; et on ne peut leur donner que la largeur strictement nécessaire pour le passage des trains, vu la difficulté qu'il y aurait à contreventer convenablement cette charpente si elle avait la largeur de nos ponts ordinaires.

Pour apprécier sommairement la résistance d'une pareille construction, on peut considérer chaque ferme comme un solide posé sur deux appuis, chargé d'un poids uniformément réparti, et d'une surcharge égale au poids de deux locomotives appliqué au milieu de la travée. Mais comme les vides forment ici environ les deux tiers du volume total, il convient de réduire au tiers le coefficient R de la résistance, c'est-à-dire à 20^k par centimètre carré pour le chêne, ou 27^k pour le sapin. En désignant par R' ce coefficient ainsi réduit, par p le poids du pont par mètre courant, par P la surcharge appliquée au milieu de la travée, par a la longueur de cette travée, par b l'épaisseur totale de toutes les

moises dans le sens horizontal, et par h la hauteur de chaque ferme, on aura à appliquer la formule déjà rappelée au commencement de cet article :

$$R' = \frac{6}{bh^2} \left(\frac{1}{8} pa^2 + \frac{1}{4} Pa \right).$$

M. Bresse, dans son *Cours de Mécanique appliquée*, à l'École impériale des Ponts et chaussées, a cherché à apprécier d'une manière plus précise les efforts supportés par chacune des pièces qui composent ces fermes ou *poutres en treillis*. Il considère d'abord le cas simple où le système se réduirait, comme le montre la figure 6, à deux cours de

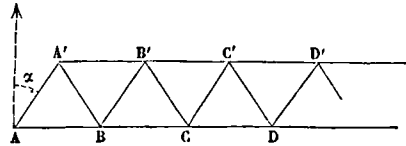


Fig. 6.

tiges horizontales ABCD... A'B'C'D'..., articulés avec des tiges inclinées AA', BB', CC', DD'..., d'une part, et A'B, B'C, C'D, ... de l'autre; et il suppose en premier lieu que la poutre ainsi définie ne porte qu'un poids unique 2P appliqué en son milieu. Il en résulte immédiatement que la poutre reçoit de la culée ou de la pile sur laquelle elle repose, une réaction verticale P appliquée en son extrémité A. Soit α l'angle aigu que les tiges inclinées font avec la verticale. Il doit y avoir équilibre entre la force P appliquée en A, et les tensions ou pressions des tiges AB et AA'; on trouve donc aisément, par la règle du parallélogramme, que la tige AB éprouve une tension égale à P tang α; et que la tige AA'

éprouve une pression égale à $\frac{P}{\cos \alpha}$. Si l'on considère ensuite l'équilibre du point A', on trouve par le même moyen, que les forces qui s'exercent suivant A'B et suivant le prolongement de AA' doivent être égales; et que la tension de A'B' a pour valeur

$2 \frac{P}{\cos \alpha} \sin \alpha$ ou $2P \tan \alpha$. L'équilibre du point B

fait voir, en projetant les forces verticalement, que les pressions de A'B et de BB' sont égales; et, en projetant horizontalement, que la tension de BC est

égale à $P \tan \alpha + 2 \cdot \frac{P}{\cos \alpha} \sin \alpha$, c'est-à-dire à

$3P \tan \alpha$. En opérant de même pour le point B', on trouve que la pression de B'C est égale à celle de BB', et que la tension de B'C' a pour expression

$2P \tan \alpha + 2 \cdot \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha$, c'est-à-dire $4P \tan \alpha$.

En continuant ainsi, on reconnaît que toutes les tiges inclinées supportent des pressions égales à

$\frac{P}{\cos \alpha}$; que les tiges horizontales inférieures sup-

portent des tensions successives exprimées par

$P \tan \alpha$, $3P \tan \alpha$, $5P \tan \alpha$, $7P \tan \alpha$, et ainsi de suite; et les tiges horizontales supérieures des tensions exprimées par

$2P \tan \alpha$, $4P \tan \alpha$, $6P \tan \alpha$, $8P \tan \alpha$, et ainsi de suite jusqu'au milieu de la travée. À

partir de ce point, les mêmes tensions se reproduisent en sens inverse à cause de la symétrie. Si le nombre des tiges horizontales inférieures est im-

pair, c'est la tige du milieu qui supportera la plus grande tension, et, en nommant $2n + 1$ le nombre total de ces tiges, la tension maximum sera exprimée par $(2n + 1) P \tan \alpha$. Si le nombre de tiges horizontales inférieures est pair, c'est la tige horizontale supérieure occupant le milieu, qui sera la plus tendue, et si $2n$ est le nombre des tiges inférieures, cette tension maximum sera exprimée par $2n P \tan \alpha$.

L'auteur considère, en second lieu, le cas où la poutre en treillis serait chargée d'un poids $2p$ à chacune des articulations intermédiaires B, C, D, etc., du cours de tiges inférieur. Si n est le nombre de ces articulations intermédiaires, np représente la réaction verticale qui s'exerce au point A. En considérant de proche en proche l'équilibre des points d'articulation inférieurs et supérieurs, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Les côtés parallèles à AA' supportent des pressions ayant successivement pour valeur $\frac{np}{\cos \alpha}$, $\frac{(n-2)p}{\cos \alpha}$, $\frac{(n-4)p}{\cos \alpha}$, $\frac{(n-6)p}{\cos \alpha}$, etc.

2° Deux tiges inclinées aboutissant à un même point d'articulation supérieure sont l'une comprimée, l'autre tendue, par deux forces de même intensité ;

3° Les pressions des tiges horizontales supérieures ont pour valeurs

$$2np \tan \alpha, \quad 4(n-1)p \tan \alpha, \quad 6(n-2)p \tan \alpha, \quad 8(n-3)p \tan \alpha, \quad \text{etc.}$$

4° Les tensions des tiges horizontales inférieures sont exprimées par

$$np \tan \alpha, \quad [n + 2(n-1)]p \tan \alpha, \quad [n + 4(n-2)]p \tan \alpha, \quad [n + 6(n-3)]p \tan \alpha, \quad \text{etc.}$$

En nommant i le rang d'une tige horizontale dans chacune de ces séries, on a donc pour la pression d'une tige supérieure

$$2i(n-i+1)p \tan \alpha, \quad \text{et pour la tension d'une tige inférieure} \\ [n + 2(i-1)(n-i+1)]p \tan \alpha.$$

Le maximum de la première expression répond à $i = \frac{n+1}{2}$, et celui de la seconde à $i = \frac{n+2}{2}$;

si ces nombres ne sont pas entiers, le maximum ne se produira pas rigoureusement, mais approximativement pour peu que n soit grand, comme cela a lieu d'ordinaire. On trouve pour la valeur du maximum

$$\frac{1}{2} p \tan \alpha \cdot (n + 1)^2$$

dans le premier cas, et

$$\frac{1}{2} p \tan \alpha [(n + 1)^2 - 1]$$

dans le second. En sorte qu'en nommant N le nombre de fois que AB est contenu dans la longueur de la travée, le maximum de pression ou de tension des tiges horizontales est exprimé par $\frac{1}{2} p N^2 \tan \alpha$.

Pour passer de ce système idéal au système réel des poutres en treillis, M. Bresse admet qu'on peut remplacer approximativement chaque tige par un groupe de pièces parallèles et équidistantes, ayant le même équarrissage total, chacune de ces pièces jouant en quelque sorte le rôle d'une fibre élémentaire par rapport au groupe dont elle fait partie, sans que les tensions et pressions totales soient notablement altérées.

Les résultats auxquels on est conduit par l'application de cette théorie ne diffèrent pas au reste sensiblement de ceux que fournit le procédé approximatif indiqué d'abord.

V. On a construit en Bavière des ponts en charpente qui ne diffèrent du système américain qu'en ce que les abouts de toutes les pièces sont réunis par des sabots en fonte, et que les fermes pénètrent dans les culées, évidées à cet effet, et où le pont est maintenu latéralement sans y être encastré.

On a aussi appliqué en Amérique un autre système fondé sur l'emploi des arcs courbes. Tel est le pont de Trenton sur la Delaware, représenté en partie par la figure 7. Les fermes sont au nombre de 5 ; dans chacune, la pièce principale est un arc de cercle, formé de 8 planches superposées ; il re-

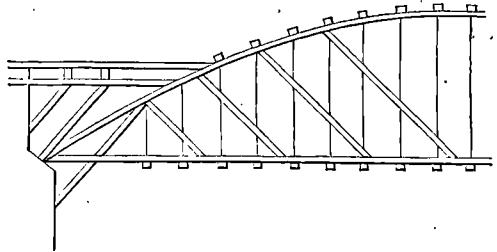


Fig. 7.

pose par les extrémités sur les piles, et supporte le tablier à l'aide de tiges de suspension en fer. L'arc est en outre rattaché au tablier par des liens pendants inclinés à 45°. Toute la charpente est recouverte par un toit, et abritée latéralement par des planches. Les arcs de deux travées consécutives se contre-butent mutuellement au moyen d'une charpente qui passe sur la pile et s'élève aux deux tiers de la hauteur des arcs.

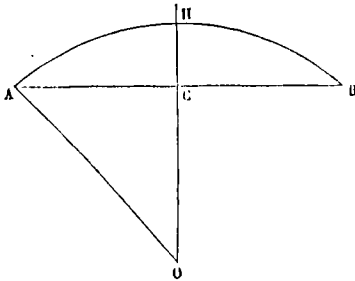
Enfin on a construit à Liep, dans le comté d'Yorck, un pont du même genre, mais dans lequel le tablier, au lieu de former la corde de l'arc, est placé à mi-hauteur entre cette corde et le sommet ; de telle sorte que le tablier est suspendu au-dessous de la partie supérieure de l'arc, tandis qu'il s'appuie sur les parties inférieures. Ce système, où le pont forme entrait, paraît offrir plus de résistance. (Voy. le *Cours de routes et ponts* professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Mary.)

PONTS EN PIERRE. Lorsqu'on a fixé le débouché (Voy. ce mot), on a à déterminer la dimension et la forme des arches. Si la rivière n'est point navigable, si elle n'est sujette ni à des crues considérables, ni à des débâcles dangereuses, on peut employer de petites arches, dont la construction est moins coûteuse. Dans le cas contraire, il faut employer des arches élevées, et d'autant plus larges que la rivière est plus rapide, afin d'éviter les accidents qui pourraient résulter du choc des bateaux contre les piles. Quand le débouché a moins de 25^m, on ne fait qu'une seule arche ; si le débouché est plus considérable, on fait un nombre impair d'arches ; leur nombre se règle de manière à ne pas trop multiplier les piles, sans cependant agrandir trop les arches ; car l'un ou l'autre excès pourrait entraîner à des dépenses considérables.

La distance entre les faces internes des deux piles

où culées sur lesquelles l'arche s'appuie est ce que l'on appelle l'ouverture de l'arche; la différence de niveau entre la ligne des naissances de l'arche et le sommet de l'intrados est ce que l'on appelle la montée.

On donne aux arches de pont trois formes principales: le plein cintre, l'anse de panier et l'arc de cercle. Le plein cintre est une demi-circonférence, la montée est alors la moitié de l'ouverture. L'anse de panier est une courbe à plusieurs centres qui se rapproche de l'ellipse (Voy. ANSE DE PANIER); la montée se rapproche assez souvent du tiers de l'ouverture. L'arc de cercle a son centre dans la verticale du sommet de l'intrados, mais au-dessous de la ligne des naissances. Il y a une relation très-simple entre l'ouverture d'une arche en arc de cercle, sa montée ou flèche, et le rayon du cercle auquel l'arc appartient. Si $2c$ représente l'ouverture, ou la corde AB de l'arc, f la flèche HC, et R le



rayon OA, la demi-corde AC étant moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre auquel elle est perpendiculaire, on a

$$c^2 = f(2R - f), \text{ d'où } R = \frac{c^2 + f^2}{2f}. \quad [1]$$

Si l'on veut avoir en degrés le demi-arc AH, ou l'angle au centre AOH, on remarque qu'il a pour sinus le rapport $\frac{AC}{AO}$ ou $\frac{c}{R}$; en désignant par α cet angle, on a donc

$$\sin \alpha = \frac{2fc}{c^2 + f^2} = \frac{2 \cdot \frac{f}{c}}{1 + \frac{f^2}{c^2}}. \quad [2]$$

On ne donne pas en général au rapport $\frac{f}{c}$ une valeur inférieure à $\frac{1}{4}$, ce qui suppose une montée égale au 8^{ième} de l'ouverture, et donne $\sin \alpha = 28^\circ 4' 20''$ environ. Cependant on a quelquefois, dans des cas exceptionnels, fait descendre ce rapport jusqu'à $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$. Pour compléter les notions relatives à la forme des arches, nous devons ajouter que l'on commence à prendre pour courbe d'intrados des ellipses, et que d'un autre côté M. Yvon Villarceau, dans son *Mémoire sur l'établissement des arches de pont*, a proposé des courbes peu différentes de celles qu'on emploie d'ordinaire, mais d'une nature plus complexe, et jouissant selon ce savant de propriétés particulières.

L'appareil d'une arche de pont est celui d'une voûte en berceau (Voy. BERCEAU); ce n'est que dans

les PONTS BIAIS (Voy. ce mot) qu'on est obligé d'avoir recours à des appareils différents. On trouvera à l'article POUSSÉE DES VOÛTES tous les détails relatifs à l'équilibre et à la stabilité des arches de pont; et aux articles CULÉES, PILES, ce qui concerne l'équilibre de ces parties importantes des ponts en pierre. Nous renverrons aux ouvrages spéciaux, et en particulier au *Cours de routes et ponts* professé par M. Mary à l'École centrale, pour toutes les parties accessoires, ainsi que pour les détails de construction qui ne sont point du domaine des mathématiques. (Voy. toutefois les articles CINTRE, DÉCINTREMENT.)

PONTS MÉTALLIQUES, ponts dont toutes les pièces sont en fer ou en fonte. C'est en Angleterre qu'a été construit, vers 1779, le premier pont en fonte: le pont de Coalbrookdale sur la Severn. Il en a été élevé deux à Paris, de 1800 à 1806: le pont des Arts et le pont d'Austerlitz. Le pont du Carrousel a été établi beaucoup plus tard. Mais les premiers ponts en fonte étaient loin d'offrir des garanties de durée suffisantes; lorsqu'on a démolì le pont d'Austerlitz, on a constaté dans ses diverses parties plus de 6000 ruptures. Le pont du Carrousel lui-même est sujet à des vibrations qui peuvent à la longue compromettre sa solidité. Ce n'est que depuis l'établissement des chemins de fer que, le prix de la fonte s'étant abaissé d'une manière notable, l'emploi des ponts métalliques s'est généralisé, et que, à la suite de nombreux essais, on a pu s'arrêter à des dispositions qui présentent toutes les conditions de sécurité désirables.

On emploie aujourd'hui deux systèmes pour la construction des fermes qui forment la charpente des ponts métalliques: les arcs en fonte, et les poutres droites en fer et en tôle.

I. Comme exemple du premier système, nous prendrons le pont de Solferino (fig. 1), dont les arcs ont 40^m d'ouverture et 4^m,02 de flèche. Ils sont formés de voussoirs en fonte, qui sont évidés dans les arcs de tête et pleins dans les arcs intermédiaires. La figure 2 représente l'élévation et la coupe transversale du premier voussoir d'un arc intermédiaire. On voit que la section présente un double T, avec une nervure centrale. — Les tympans, c'est-à-dire l'espace compris entre l'arc et le tablier, sont remplis par des plaques évidées de forme trapézoïde. La figure 3 représente une de ces plaques. (Pour l'assemblage des feuilles de tôle, Voy. l'article RIVETS.)

Les formes sont reliées entre elles par trois systèmes d'entre-toises placées, les unes au-dessus de la nervure d'intrados, les autres au-dessous de la nervure d'extrados, les dernières sur les nervures qui couronnent les tympans. Ces dernières entre-toises, distantes de 1^m,30, servent en outre à soutenir des voûtes en briques et ciment romain sur lesquelles la chaussée et les trottoirs sont établis. — Dans ce système d'arcs formés de voussoirs, la fonte n'est soumise qu'à des efforts de compression; les seules pièces exposées à l'extension sont les entre-toises, mais comme elles sont peu nombreuses, on peut les exécuter en fer. — Les pressions auxquelles les voussoirs sont soumis peuvent se calculer comme pour les voûtes en pierre (Voy. POUSSÉE DES VOÛTES), en construisant la courbe des pressions. Mais les inégalités de charge ont ici beaucoup plus

d'importance que dans les ponts en pierre; il convient donc d'y avoir égard. On supposera qu'une moitié de la travée porte la surcharge maximum de 400^k par mètre carré, tandis que l'autre ne porte

que son poids; et l'on déterminera dans cette hypothèse la direction et l'intensité de la poussée à la clef. Soient P et P' (fig. 4) les poids supportés par les deux demi-travées, H le point d'application de

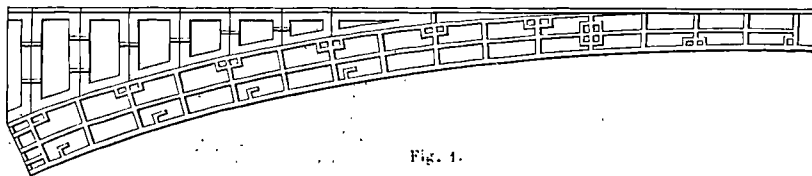


Fig. 1.

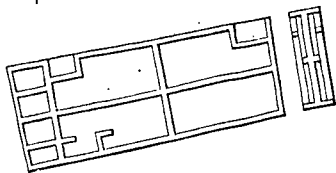


Fig. 2.



Fig. 3.

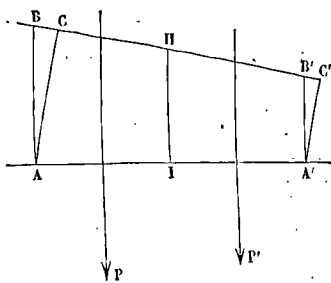


Fig. 4.

la réaction N des deux moitiés de l'arc, et BC la direction oblique de cette réaction.

Abaissons des naissances A et A' sur cette direction les perpendiculaires AC et A'C', et élevons les verticales AB et A'B'. Soient p et p' les distances des forces P et P' aux points A et A'. On aura pour l'équilibre de la première moitié de l'arc la condition (Voy. MOMENTS):

$$N \cdot AC = P \cdot p,$$

et pour l'équilibre de la seconde moitié

$$N \cdot A'C' = P' \cdot p';$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{Pp}{P'p'}.$$

Mais les triangles ABC et A'B'C' étant semblables, le premier membre peut être remplacé par le rapport de AB à A'B', ce qui donne

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{Pp}{P'p'}, \text{ d'où } \frac{AB}{AB + A'B'} = \frac{Pp}{Pp + P'p'}.$$

Or, en appelant H la hauteur IH, on a

$$AB + A'B' = 2H,$$

par conséquent il vient

$$AB = 2H \cdot \frac{Pp}{Pp + P'p'},$$

ce qui fera connaître la direction de la force N, puis la distance AC, et par suite l'intensité de la poussée N.

Ayant ainsi déterminé la réaction à la clef, on obtiendra, par la courbe des pressions, la réaction de deux voussoirs consécutifs quelconques; ce qui permettra d'en déterminer les dimensions en considérant chaque voussoir comme une pièce prismatique soumise à un effort généralement oblique, qui produit à la fois une compression et une flexion (Voy. FLEXION PLANE). Nous rappellerons que, pour la fonte, la tension par millimètre carré ne doit pas dépasser 2^k, tandis que la pression peut aller jusqu'à 10^k sans inconvénient. Mais la pression réelle

est ordinairement beaucoup moindre. La plus forte pression observée sur des ponts en fonte formés de voussoirs ou plaques à section double T est celle du viaduc du Rhône sur le chemin de fer d'Avignon à Marseille; elle n'est que de 3^k,36 par millimètre carré, sous une surcharge de 6000^k par mètre courant de pont.

Au lieu d'arcs formés de voussoirs; on a quelquefois employé des arcs continus à section elliptique évidée; le pont du Carrousel en offre un exemple. Ces arcs peuvent alors être reliés au tablier de diverses manières; au pont du Carrousel, la liaison est établie par des anneaux en fonte dont le rayon va en diminuant depuis la naissance jusqu'à la clef. Les dimensions transversales des arcs de ce genre se calculent comme dans les PONTS EN CHARPENTE (Voy. ce mot), soit en appliquant la théorie de la résistance des PIÈCES COURBES (Voy. ce mot), soit à l'aide d'une méthode approximative.

II. Le plus remarquable exemple de pont à poutres droites en fer est le pont Britannia, construit, en 1850, au détroit de Menay, par M. Robert Stephenson, sur le chemin de fer de Chester à Holyhead. Ce pont traverse un bras de mer à 33 mètres au-dessus des hautes marées, au moyen de quatre travées, dont deux n'ont pas moins de 140 mètres. Ce pont a la forme d'un long tube à section rectangulaire de 9^m,144 de haut sur 4^m,50 de large. Sa paroi supérieure est formée elle-même de 8 tubes égaux, accolés les uns aux autres, à section carrée de 0^m,533 de côté; et son plancher est formé de 6 tubes analogues de 0^m,533 de haut sur 0^m,711 de large. Les parois latérales sont pleines, et reliées tant au plafond qu'au plancher, par des goussets triangulaires de 1^m,22 de haut sur 0^m,533 de large. Depuis ce gigantesque travail, les ponts à poutres droites en tôle se sont considérablement multipliés. Dans les ponts

de petites dimensions, la poutre se compose d'une lame de tôle, engagée en bas et en haut dans des plates-bandes avec cornières en fer; la figure 5 donne la section de cette poutre. Elle est renforcée

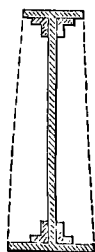


Fig. 5.

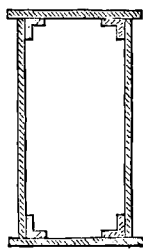


Fig. 6.

de distance en distance par des plaques transversales ayant la même hauteur que la poutre, et vers le haut la même largeur que la plate-bande supérieure, tandis que vers le bas elles peuvent avoir une largeur plus grande. Cette forme est représentée en lignes ponctuées sur la figure 5. Dans les ponts plus importants, la poutre est un tube à section rectangulaire, formé de 4 plaques de tôle assemblées avec cornières en fer; la figure 6 est la section d'une poutre de ce genre. On a varié d'un grand nombre de manières la disposition de ces poutres; celles que nous venons de décrire sont les plus usitées. Sur les chemins de fer, les poutres analogues à celle des figures 5 et 6 sont ordinairement placées au-dessus du tablier qui s'appuie sur les nervures inférieures; ces poutres ont un nombre de trois, et c'est dans les intervalles que les trains passent. Il en résulte, lorsque le pont a de grandes dimensions, et que les poutres ont par conséquent une grande hauteur, que la vue est complètement masquée au passage des fleuves, c'est-à-dire sur les points les plus pittoresques. Pour obvier à cet inconvénient, les ingénieurs allemands ont essayé de remplacer les parois pleines des poutres par des parois en treillis; mais cette disposition, dans laquelle l'un des systèmes de barres formant le treillis s'allonge pendant que l'autre se comprime, ne paraît pas offrir une solidité suffisante; ou du moins la lumière n'est pas encore complètement faite sur ce point.

III. Pour déterminer les dimensions transversales des poutres droites, on les considère comme des pièces prismatiques posées sur deux appuis, chargées d'un poids uniformément réparti, et d'une surcharge appliquée au milieu de la travée. Si p désigne le poids par mètre réparti uniformément, P la surcharge appliquée au milieu de la travée, a la longueur de cette travée, R la limite de tension qu'on ne veut pas dépasser, h la hauteur de la poutre et I le moment d'inertie de sa section droite par rapport à l'horizontale menée dans cette section par son milieu, ou plus exactement par son centre de gravité, on aura à appliquer la formule (Voy. FLEXION PLANE).

$$R = \frac{1}{I} h \left(\frac{1}{8} p a^2 + \frac{1}{4} P a \right).$$

Mais il faut remarquer ici, comme pour les ponts

en charpente, que si la surcharge accidentelle est le poids de deux locomotives se croisant au milieu de la travée, comme c'est là une charge exceptionnelle, on pourra admettre que la tôle, au lieu de n'avoir à supporter, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire, que le 10^e de la tension correspondante à sa limite d'élasticité, en supporte momentanément le 5^e; c'est-à-dire qu'au lieu de prendre pour R , 6 kilogrammes par mètre carré, on pourra prendre 12 kilogrammes. Sans cette considération on serait généralement conduit à des dimensions exagérées.

Si une même poutre occupait toute la longueur du pont, on la considérerait comme une pièce prismatique posée sur des appuis; et à l'aide de la FORMULE DE CLAPEYRON (Voy. ce mot, et l'art. FLEXION PLANE), on déterminerait le moment fléchissant correspondant à chaque point d'appui, le moment fléchissant pour une section quelconque, par suite le maximum de cette quantité, d'où l'on déduirait les dimensions transversales de la poutre. Le même calcul ferait connaître la charge des points d'appuis.

IV. On a aussi employé la tôle pour construire des fermes de ponts en arc de cercle. Le pont d'Arcole a été exécuté en 1865 d'après ce système. Ce pont, qui n'a qu'une travée de 80 mètres, repose sur 11 fermes en arc de cercle, de 6^m,72 de flèche. Les arcs n'ont que 0^m,38 d'épaisseur à la clef; ils ont 1^m,40 aux naissances; ils sont formés d'une âme verticale pleine, en tôle de 1 centimètre, taillée suivant la courbure adoptée pour l'intrados et l'extrados, et de feuilles de tôle de 0^m,53 de large, superposées à plat au nombre de 2 à l'extrados et à l'intrados sur les parties inférieures de l'arc, et de 3 à l'extrados, à 6 mètres de part et d'autre de la clef. Les tympans sont formés de fers à rebord, entre-croisés, et reliés entre eux par une pièce en fer, de même nature, formant un arc intermédiaire entre l'extrados et les longerons horizontaux qui supportent le tablier. Les fermes sont reliées, au-dessus et au-dessous des arcs, par des fers à T distants de 3^m,10; elles sont en outre contre-ventées par de doubles feuilles de tôle disposées en croix et fortifiées par des cornières. Pour déterminer les dimensions transversales des différents voussoirs formant les arcs, on pourra procéder comme pour les arcs en fonte.

(Voy. pour plus de détails relatifs à la disposition et à l'exécution des ponts métalliques le *Cours de routes et ponts* professé à l'École centrale par M. Mary.)

V. Dans les ponts métalliques en arcs, les poutres qui soutiennent le plancher sont ordinairement en fonte à double T. Mais quelquefois on s'impose la condition que la résistance soit la même dans toutes les sections transversales, au moins sur une certaine étendue à partir de la clef. Pour cela on fait varier la distance entre les arêtes internes des nervures. Si, par exemple, h désigne la distance entre les sommets A et C (fig. 7), b la distance entre les points A et B, h' la distance entre les points A' et C', et b' le double de la distance A'I, on fait varier h' de manière que la résistance occasionnée par le poids uniformément réparti soit la même dans chaque section, entre certaines limites.

Soit p le poids uniformément réparti, et a la longueur de la travée; chaque point d'appui exercera

une réaction égale à $\frac{1}{2} pa$; le moment des forces qui agissent sur la travée, depuis le point qui a pour abscisse x , compté à partir d'une des extrémités, jusqu'à l'autre extrémité, aura donc pour valeur

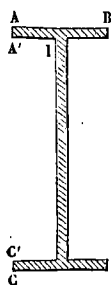


Fig. 7.

$$\mu = p(a-x) \cdot \frac{1}{2}(a-x) - \frac{1}{2} pa(a-x);$$

ou

$$\mu = -p(ax - x^2).$$

Le moment d'inertie de la section par rapport à l'horizontale passant par son centre de gravité est d'ailleurs (Voy. MOMENT D'INERTIE)

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3);$$

enfin l'ordonnée de la fibre la plus éloignée de l'axe est $v = \frac{1}{2} h$. En appelant R la limite de tension qu'on ne veut pas dépasser, on aura donc, en prenant que la valeur absolue de μ ,

$$R = \frac{v\mu}{I} = \frac{6p(ax - x^2)}{bh^3 - b'h'^3},$$

formule qui donnera les valeurs de h' correspondantes aux valeurs de x . Mais comme il ne faut pas que l'épaisseur AA' soit inférieure à l'épaisseur de l'âme verticale, dès que h' a atteint la valeur qui donne cette épaisseur, on cesse de faire croître h' ; et l'on diminue h jusqu'à une limite qu'on se donne à l'avance. Au chemin d'Auteuil, par exemple, on a, d'après M. Claudel, $p = 1600^k$, $h = 0^m,60$, $b = 0^m,28$, $b' = 0^m,26$, $a = 8^m$;

et, en prenant

$$R = 6\,000\,000,$$

on trouve pour la valeur de x correspondante à la clef, c'est-à-dire pour $x = \frac{1}{2} a$

$$h' = 0^m,52,$$

ce qui donne $0^m,08$ pour l'épaisseur des deux nervures réunies, ou $0^m,04$ pour chacune d'elles. On trouve que pour $x = 1^m,44$ environ, l'épaisseur de chaque nervure est réduite à $0^m,02$ qui est l'épaisseur de l'âme; on fait alors diminuer h et h' , d'une même quantité sans diminuer l'épaisseur de la nervure, jusqu'à ce qu'on ait atteint $h = 0^m,40$, hauteur limite fixée à l'avance.

Les entretoises sont ordinairement aussi à section double T. Au chemin d'Auteuil on a $a = 2^m$, $h = 0^m,30$, $b = 0^m,20$, $b' = 0,188$, d'où l'on déduit $0^m,014$ pour l'épaisseur de l'âme et des nervures.

PONTS SUSPENDUS, ponts dont le tablier est soutenu, au moyen de tiges de suspension, par des chaînes ou des câbles, attachés eux-mêmes par leurs extrémités à des points fixes. Le plus ordinairement les chaînes passent sur des piliers en maçonnerie, et vont s'amarrer dans le sol. Quelquefois les piliers en maçonnerie sont remplacés par des colonnes oscillantes en fonte, comme nous l'expliquerons plus loin. Ce genre de construction offre des avantages, au point de vue de l'économie, sur les ponts en pierre, ou sur les ponts métalliques; mais il ne présente pas toujours les mêmes

garanties au point de vue de la durée, et ce motif explique pourquoi, après avoir été longtemps l'objet d'un engouement général, les ponts suspendus sont aujourd'hui tombés en défaveur. Néanmoins on en construit encore, et c'est un moyen de communication précieux quand on ne dispose pas de ressources financières suffisantes pour établir un pont en pierre, en fonte ou en tôle.

Le principe sur lequel se fonde la construction des ponts suspendus est fort anciennement connu. Les Espagnols trouvèrent au Mexique, à l'époque de la conquête, des ponts formés de poutrelles posées sur des lianes tendues d'une rive à l'autre. Il a existé de temps immémorial des ponts de ce genre en Chine, au Thibet et dans l'Indoustan. La plus ancienne mention d'un pont suspendu proprement dit remonte à 1625; elle se trouve dans un ouvrage en cinq langues, latin, français, allemand, italien et espagnol, attribué à un certain Faustus Verantius. Le pont dont il s'agit est suspendu, par l'intermédiaire de doubles cordes passant sur des poulies, à des câbles ou cinquenelles fixées elles-mêmes par leurs extrémités à des montants en bois. A une époque plus rapprochée de nous, en 1814, M. Labadie, capitaine d'artillerie, construisit sur la Moselle un pont en cordages, offrant cette particularité qu'il existait au-dessous du tablier un second système d'attaches analogue à celui du dessus. La première application en grand des ponts suspendus, tels que nous les concevons aujourd'hui, a été faite en 1796 par James Finley, qui construisit, sur le Jacobs-creek, un pont de 21^m,3. En 1820, le capitaine Brown construisit sur le Tweed, près du port de Berwick, un pont suspendu de 110 mètres. Depuis cette époque, ce genre de construction s'est fort répandu; c'est aux frères Séguin que sont dus les principaux perfectionnements que ces voies de communication ont reçus en France.

Le travail le plus gigantesque et le plus hardi en ce genre est le pont de *Fribourg*, qui a 246^m,26 de longueur, et dont le tablier est à 51 mètres au-dessus du niveau de l'eau.

I. Le premier objet d'étude dans les ponts suspendus est la détermination du lieu géométrique des sommets du polygone formé par les points d'attache des tiges de suspension. — On remarquera d'abord que chaque couple de tiges se correspondant des deux côtés du tablier peut être considéré comme portant la moitié du poids de chacune des deux travées comprises entre ce couple de tiges et le précédent ou entre ce couple et le suivant. Si les tiges sont équidistantes, elles portent par conséquent des poids égaux. — Si les tiges étaient en nombre infini et infiniment rapprochées, chaque couple porterait un élément de tablier, et une portion quelconque de la chaîne porterait un poids proportionnel à sa projection horizontale. Dans cette hypothèse il est facile de reconnaître qu'en négligeant le poids des tiges la chaîne affecterait la forme d'une parabole à axe vertical, dont il est aisé de déterminer l'équation. Soit A (fig. 1) le point le plus bas de la chaîne; en ce point s'exerce une tension horizontale que nous représenterons par Q. Prenons pour axe des y la verticale du point A, et pour axe des x une horizontale OX menée à la hauteur du tablier. Soient M

et M' deux points de la chaîne infiniment voisins; soit T la tension de la chaîne au point M , force qui s'exerce suivant la tangente en ce point. Si α désigne l'angle de cette tangente avec l'horizon, les

forces T , T' et P seront proportionnelles aux trois côtés du triangle $M'M''K$, qui leur sont respectivement parallèles; si donc on représente la tension T par le côté MM' , ou par son égal $M'K$, la tension

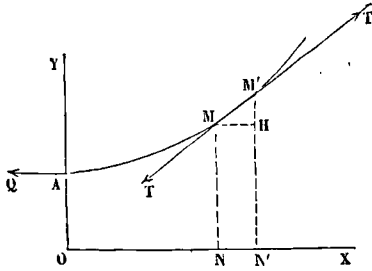


Fig. 1.

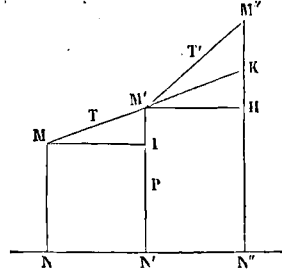


Fig. 2.

composantes horizontale et verticale de T seront $T \cos \alpha$ et $T \sin \alpha$. En passant du point M au point M' ces composantes deviendront

$T \cos \alpha + d.T \cos \alpha$ et $T \sin \alpha + d.T \sin \alpha$. Soit $2p$ le poids par mètre courant du pont, $2pdx$ sera le poids d'un élément de ce pont, et pdx sera le poids de la portion NN' du pont supportée par une tige qui s'articulerait au milieu de l'élément MM' . Cet élément étant en équilibre sous l'action de ce poids et des deux tensions déjà considérées, on aura, en prenant la somme des composantes horizontales,

$$(T \cos \alpha + d.T \cos \alpha) - T \cos \alpha = 0$$

ou

$$d.T \cos \alpha = 0,$$

d'où

$$T \cos \alpha = \text{const.} = Q, \quad [1]$$

et, en prenant la somme des composantes verticales,

$$(T \sin \alpha + d.T \sin \alpha) - T \sin \alpha - pdx = 0$$

ou

$$d.T \sin \alpha = pdx,$$

et en mettant pour T sa valeur $\frac{Q}{\cos \alpha}$,

$$d.Q \tan \alpha = pdx \quad \text{ou} \quad Q dy' = pdx,$$

en appelant y' le coefficient angulaire de la tangente en M . Intégrant et remarquant que le point A étant le point le plus bas, on a $y' = 0$ pour $x = 0$, on obtient

$$Q y' = px \quad \text{ou} \quad dy = \frac{p}{Q} x dx.$$

Intégrant de nouveau et désignant par y_0 l'ordonnée du point A , on trouve

$$y - y_0 = \frac{p}{2Q} x^2, \quad [2]$$

équation d'une parabole qui a pour axo l'axe des y .

II. Sans supposer les tiges en nombre infini, si on les suppose équidistantes, comme cela a lieu d'ordinaire, et que l'on néglige leurs poids, on démontre par des considérations très-simples que les sommets du polygone formé par la chaîne sont sur une parabole. Soient M, M', M'' (fig. 2), trois sommets consécutifs de la chaîne; soient T et T' les tensions des côtés MM' et $M'M''$, et P le poids supporté par la tige $M'N'$. Le point M' étant en équilibre sous l'action de ces trois forces, la somme de leurs composantes horizontales est égale à zéro, c'est-à-dire que la projection horizontale de la tension d'un côté quelconque est une quantité constante; nous la désignerons comme plus haut par Q . Prolongeons le côté MM' jusqu'en K ; les trois

T' sera représentée par $M'M''$, et le poids P par $M''K$. Or le poids porté par chaque tige est une quantité constante puisque les tiges sont équidistantes; la longueur $M'K$ est donc constante aussi. Menons les horizontales MI et $M'H$. La longueur $M'I$, ou son égale KH étant la différence première de l'ordonnée MN , c'est-à-dire la différence entre $M'N'$ et MN , et $M''H$ étant la différence première de l'ordonnée $M'N'$, c'est-à-dire la différence entre $M''N''$ et $M'N'$, la longueur $M''K$, qui est la différence de ces deux différences premières, n'est autre chose que la différence seconde de MN . La courbe lieu des sommets de la chaîne jouit donc de cette propriété que la différence seconde de l'ordonnée est constante; c'est donc une courbe dont l'équation est de la forme

$$y = a + bx + cx^2,$$

c'est-à-dire que c'est une parabole dont l'axe est parallèle aux ordonnées.

III. Enfin M. Bélanger a démontré, en négligeant toujours le poids des tiges, que, quels que soient les écartements successifs des tiges, les sommets de la chaîne sont toujours sur une parabole. En effet, soient $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$ (fig. 3), des sommets

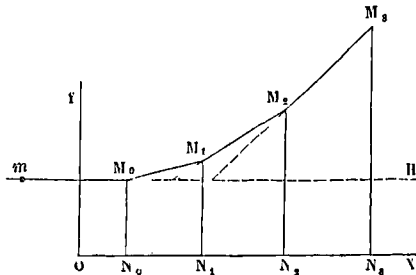


Fig. 3.

consécutifs de la chaîne; $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, leurs coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires, l'un vertical passant par le milieu du côté horizontal mM_0 , et l'autre horizontal; $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$, les poids supportés par les tiges correspondantes, T_1, T_2, T_3, \dots , les tensions des côtés consécutifs, Q leur projection horizontale commune (il suffit, en effet, de considérer l'équilibre d'un sommet quelconque et d'égaliser à zéro la somme des

projections horizontales des forces qui le sollicitent, pour voir que toutes ces tensions ont des projections horizontales égales en valeur absolue). — Considérons l'équilibre du point M_0 ; le poids P_0 appliqué en ce point a pour expression

$$P_0 = p \left(x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2} \right) = \frac{1}{2} p (x_1 + x_0), \quad [3]$$

en désignant par p le poids par mètre courant supporté par la chaîne (c'est la moitié du poids par mètre courant du tablier). En égalant à zéro la somme des projections horizontales des forces Q , T_1 et P_0 , on obtient

$$Q = T_1 \cos M_1 M_0 \quad H = T_1 \frac{x_1 - x_0}{M_0 M_1}.$$

En égalant à zéro la somme des composantes verticales des mêmes forces, on trouve

$$\frac{p}{2} (x_1 + x_0) = T_1 \sin M_1 M_0 \quad H = T_1 \frac{y_1 - y_0}{M_0 M_1}.$$

Si l'on divise membre à membre les deux relations qui viennent d'être établies, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{p}{Q} (x_1 + x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

d'où

$$y_1 - y_0 = \frac{p}{2Q} (x_1^2 - x_0^2). \quad [4]$$

Si nous considérons maintenant l'équilibre du point M_1 , nous trouverons de même

$$Q = T_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{M_1 M_2} \quad \text{et} \quad \frac{p}{2} (x_2 + x_1) = T_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{M_1 M_2},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{p}{2Q} (x_2 + x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ou } y_2 - y_1 = \frac{p}{2Q} (x_2^2 - x_1^2). [5]$$

En opérant de même pour tous les autres sommets, on obtiendra des relations analogues, et si x_{n-1} , y_{n-1} et x_n , y_n représentent les coordonnées de deux sommets consécutifs quelconques, on aura

$$y_n - y_{n-1} = \frac{p}{2Q} (x_n^2 - x_{n-1}^2). \quad [6]$$

Ajoutant membre à membre toutes les relations ainsi obtenues, et réduisant, on trouve

$$y_n - y_0 = \frac{p}{2Q} (x_n^2 - x_0^2),$$

en sorte qu'en supprimant l'indice n on a pour un sommet quelconque dont x et y sont les coordonnées,

$$y - y_0 = \frac{p}{2Q} (x^2 - x_0^2), \quad [7]$$

c'est l'équation d'une parabole dont l'axe est vertical, et qui a pour sommet le point de l'axe des y ayant pour ordonnée $y_0 - \frac{p}{2Q} x_0^2$.

Si la chaîne n'avait point de côté horizontal, on ferait passer l'axe des y par le sommet le plus bas M_0 ; on aurait alors $x_0 = 0$, et en opérant de la même manière, on verrait que l'équation de la parabole est $y - y_0 = \frac{p}{2Q} x^2$. [8]

IV. Ayant l'équation de la courbe, on en déduit aisément la composante horizontale Q des tensions des côtés. En effet, le point où la chaîne rencontre la verticale élevée à l'extrémité du tablier peut être regardé comme un sommet de la chaîne; or, ce point est toujours donné. Si la chaîne est symétrique par rapport au point le plus bas, les coordonnées de ce point d'attache fictif sont la demi-

ouverture a du pont, et la hauteur h de ce point au-dessus de l'axe x ; on devra donc avoir, dans le cas de la formule [7],

$$h - y_0 = \frac{p}{2Q} (a^2 - x_0^2), \text{ d'où } Q = \frac{1}{2} p \cdot \frac{a^2 - x_0^2}{h - y_0}.$$

Dans le cas de la formule [8] on aurait

$$Q = \frac{1}{2} p \cdot \frac{a^2}{h - y_0}.$$

Ainsi en se donnant le point d'attache fictif et le point M_0 , on détermine l'ordonnée d'un point de la chaîne correspondant à une abscisse quelconque, et par conséquent le sommet correspondant à une tige quelconque, ainsi que la tension horizontale de la chaîne.

Le point d'attache réel est toujours situé au delà du point que nous avons nommé point d'attache fictif; il en sera question plus loin.

Il est facile de déduire de ce qui précède la tension d'un côté quelconque du polygone formé par la chaîne. Soient en effet M_{n-1} et M_n (fig. 4) deux

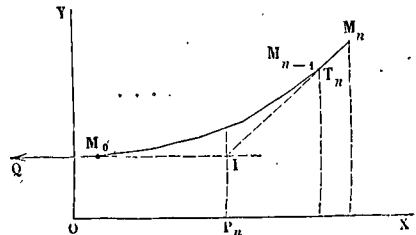


Fig. 4.

sommets consécutifs quelconques et T_n la tension du côté $M_{n-1} M_n$. La portion de chaîne comprise depuis le point M_0 jusqu'au point M_{n-1} porte le poids du tablier compris entre l'axe des y et la verticale passant par le milieu de $M_{n-1} M_n$; ce poids a donc pour valeur

$$P_n = p \left(x_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right) = \frac{1}{2} p (x_{n-1} + x_n).$$

Cette portion de la chaîne est en équilibre sous l'action de son poids et des forces Q et T_n ; en appelant α_n l'angle du côté $M_{n-1} M_n$ avec l'horizon, et égalant à zéro la somme des composantes horizontales et celle des composantes verticales de ces trois forces, on obtient

$$T_n \cos \alpha_n = Q \quad \text{et} \quad T_n \sin \alpha_n = P_n,$$

d'où, en élevant au carré, ajoutant, et extrayant la racine carrée,

$$T_n = \sqrt{Q^2 + P_n^2}. \quad [9]$$

Cette tension augmente avec P_n ; ainsi le maximum de tension a lieu pour le dernier côté. Afin de la calculer plus aisément, on peut supposer que le point le plus bas de la chaîne est le sommet de la parabole, c'est-à-dire se placer dans le cas de la formule [8]; et si l'on appelle b la différence $h - y_0$ ou la hauteur du point d'attache au-dessus du point le plus bas, on a

$$Q = \frac{1}{2} p \frac{a^2}{b}.$$

D'ailleurs on a alors $P = pa$; par conséquent, en appelant T la tension maximum, il vient

$$T = \sqrt{p^2 a^2 + \frac{1}{4} p^2 \frac{a^4}{b^2}} \quad \text{ou} \quad T = pa \sqrt{1 + \frac{a^2}{4b^2}}. \quad [10]$$

La tension horizontale et celle des différents cô-

tés de la chaîne peuvent aussi être déterminées par des considérations géométriques quand on connaît l'inclinaison du dernier côté. Pour fixer les idées, nous prendrons le cas où il y a un côté horizontal. Sur une verticale indéfinie portons les longueurs IA, AB, BC,, DH (fig. 5) proportionnelles

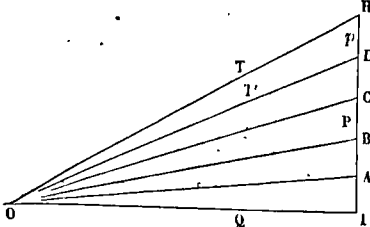


Fig. 5.

aux poids successifs que portent les différentes tiges, c'est-à-dire à la demi-somme des poids des deux travées adjacentes. Par le point I menons une horizontale, et par le point extrême H une droite ayant l'inclinaison donnée du dernier côté de la chaîne. Ces deux droites se rencontrent en un point O; tirons OA, OB, OC,, OD. La droite IH représentant le poids porté par les tiges, OI représentera la tension horizontale Q, et les lignes OA, OB, OC...etc., représenteront les tensions des côtés successifs de la chaîne; OH représentera la tension du dernier côté, c'est-à-dire la tension maximum. En effet, si l'on considère d'abord la portion de chaîne comprise entre la première tige et la dernière, on voit qu'elle est en équilibre sous l'action de la tension horizontale Q, de la tension T du dernier côté, et du poids P du tablier porté par ces tiges. Or, ces trois forces étant parallèles aux trois côtés du triangle OIH, elles sont proportionnelles à ces côtés; et puisque P est représenté par IH, il en résulte que Q est représenté par OI et T par OH. Considérons maintenant le point d'attache de la dernière tige : il est en équilibre sous l'action du poids p suspendu à la tige, de la tension T du dernier côté, et de la tension T' du côté précédent; or, les deux premières forces étant représentées en grandeur et en direction par les deux côtés DH et OH du triangle ODH, la troisième force T' doit être représentée en grandeur et en direction par le troisième côté OD de ce triangle. On démontrerait ainsi de proche en proche que OC, OB, OA, etc., représentent en grandeur et en direction les tensions successives des autres côtés. On ferait un raisonnement analogue pour le cas où il n'y a pas de côté horizontal. Dans les deux cas la force Q est la projection horizontale commune de toutes les tensions, comme cela devait être.

Y. Il est nécessaire de déterminer la longueur de la chaîne. On peut pour cela calculer successivement chacun de ses côtés au moyen des coordonnées de ses extrémités. Mais cette méthode est très-labourieuse; et l'on obtient une approximation suffisante en substituant au polygone la parabole circonscrite, dont on a l'équation. On prend pour cela l'équation [8] dans laquelle on supprime y_0 , ce qui revient à faire passer l'axe des x par le point le plus bas; on a ainsi

$$y = \frac{p}{2Q} x^2$$

ou, en mettant pour Q sa valeur $\frac{1}{2} p \cdot \frac{a}{b}$,

$$y = b \cdot \frac{x^2}{a^2} \tag{11}$$

En appelant s la longueur de l'arc de la courbe comptée à partir du sommet, on a

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2};$$

mais

$$y' = 2b \cdot \frac{x}{a^2},$$

par conséquent

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{4b^2x^2}{a^4}}.$$

Dans les applications ordinaires, b est petit par rapport à a ; d'ailleurs x est au plus égal à a , la fraction sous le radical est donc très-petite; et l'on peut, sans erreur sensible, ajouter sous le radical $\frac{4b^2x^2}{a^4}$; la quantité sous le radical devient alors un carré parfait, et en extrayant la racine on obtient

$$ds = dx \left(1 + \frac{2b^2x^2}{a^4} \right).$$

Intégrant, et remarquant que pour $x=0$ on doit avoir $s=0$; on trouve

$$s = x + \frac{2}{3} \frac{b^2x^3}{a^4},$$

et pour $x=a$,

$$s = a + \frac{2}{3} \frac{b^2}{a} = a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{b^2}{a^2} \right), \tag{12}$$

c'est la longueur de la parabole depuis le point le plus bas jusqu'au point qui correspond à l'extrémité du tablier.

Cette longueur de la chaîne est sa longueur définitive, sous l'action de la charge qu'elle supporte; elle surpasse sa longueur primitive s_0 de l'allongement produit par la tension. Soit θ une moyenne entre la tension maximum calculée plus haut et la tension horizontale Q; l'allongement du fer par mètre de longueur étant de 0^m,0005 pour une tension d'un kilogramme par millimètre carré de section, on aura, en appelant ω la section de la chaîne exprimée en millimètres carrés,

$$s - s_0 = s_0 \cdot \frac{\theta}{\omega} \cdot 0,0005,$$

d'où

$$s_0 = \frac{s}{1 + \frac{\theta}{\omega} \cdot 0,0005}.$$

La longueur s peut varier avec la température; le coefficient de dilatation du fer est 0,000122, en sorte qu'en passant de 0 à la température t , la longueur s devient $s' = s (1 + 0,000122 \cdot t)$. Il en résulte un accroissement de flèche qu'il est nécessaire de savoir calculer. Or si dans la formule [12] on fait varier s et b , on trouve

$$ds = \frac{4}{3} \frac{b}{a} db.$$

Pour des dilatations peu considérables, on peut admettre que les accroissements finis de s et de b sont sensiblement proportionnels aux accroissements infiniment petits; on écrit donc en conséquence

$$\Delta s = \frac{4}{3} \frac{b}{a} \Delta b, \text{ d'où } \Delta b = \frac{3}{4} \frac{a}{b} \Delta s, \tag{13}$$

formule qui donnera l'accroissement de flèche Δb répondant à un accroissement de longueur Δs de

la chaîne. On trouve ainsi que pour un pont de 100^m d'ouverture, auquel cas $\alpha = 50^\circ$, et de 5^m de flèche, celle-ci augmente de 0^m,135 quand la température s'élève de 0 à 30°.

VI. On calcule aisément la section des tiges d'après le poids qu'elles ont à porter. On évalue le poids du tablier que doit porter la tige, on y ajoute, conformément aux règlements administratifs, une surcharge de 200^k par mètre carré; on divise la somme par 12^k s'il s'agit de fers en barre, ou par 18^k s'il s'agit de tiges en fils de fer; le quotient exprime en millimètres carrés la section de la tige.

La section de la chaîne se détermine d'après la tension maximum qu'elle doit supporter. On détermine cette tension en ne tenant compte d'abord que du poids du tablier, de sa surcharge, et du poids des tiges. On obtient ainsi pour la section de la chaîne une valeur approchée, d'où l'on déduit le poids approximatif de la chaîne elle-même. On recommence le calcul en faisant entrer dans le poids total celui de la chaîne et l'on obtient une nouvelle valeur de la section, qui est en général suffisamment approchée.

Les poutrelles que les tiges soutiennent au moyen d'étriers, peuvent être considérées comme des prismes posés sur deux appuis et chargés du poids des madriers qui forment deux demi-travées, et de la surcharge réglementaire, poids uniformément réparti sur la longueur de la poutrelle (Voy. FLEXION PLANE). Les dimensions des madriers se calculent d'une manière analogue. La surcharge réglementaire de 200^k par mètre carré représente le poids de 3 hommes. Si le pont doit servir à la circulation des voitures, il faut, dans le calcul de la section de la chaîne et de celle des tiges, tenir compte du poids de deux voitures au moins; et considérer l'instant où elles se croisent sur une même travée. Il faut aussi avoir égard à cette circonstance dans le calcul des poutrelles et des madriers; indépendamment d'un poids uniformément réparti, on a alors à considérer un poids appliqué en un point déterminé, au milieu par exemple, ce qui est le cas le plus défavorable.

VII. On a besoin de calculer la somme des longueurs des tiges. Si elles ne sont pas équidistantes, on calculera chacune de ces longueurs au moyen de l'équation de la parabole, et l'on fera la somme. Mais le calcul se simplifie quand les tiges sont équidistantes. Considérons d'abord le cas où il n'y a pas de côté horizontal; on a vu que l'équation de la parabole, rapportée à son sommet, est alors

$$y = b \cdot \frac{x^2}{a^2}.$$

Désignons par λ la largeur d'une travée : les longueurs successives des tiges, comptées à partir de l'axe des x , c'est-à-dire de l'horizontale qui passe par le point le plus bas, auront pour valeurs respectives

$$\frac{b \cdot \lambda^2}{a^2}, \frac{b \cdot 4\lambda^2}{a^2}, \frac{b \cdot 9\lambda^2}{a^2}, \dots, \frac{b \cdot n^2\lambda^2}{a^2},$$

en appelant n le nombre des tiges. La somme Σ de ces tiges sera donc

$$\Sigma = \frac{b\lambda^2}{a^2} (1 + 4 + 9 + \dots + n^2).$$

Or, la somme des carrés des nombres consécutifs depuis 1 jusqu'à n a pour valeur

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on aura donc

$$\Sigma = \frac{b\lambda^2 \cdot n(n+1)(2n+1)}{6a^2}.$$

On peut simplifier encore cette expression en remarquant qu'on a

$$a = (n+1)\lambda, \text{ d'où } \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{n+1}.$$

Mettant pour $\frac{\lambda}{a}$ cette valeur et réduisant, on trouve

$$\Sigma = b \cdot \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

ou

$$\Sigma = \frac{1}{3} bn \cdot \frac{2n+1}{2n+2}. \quad [14]$$

S'il y a un côté horizontal, le plus simple est de rapporter encore la parabole à son sommet, auquel cas l'équation [8], se réduit encore à la forme

$$y = \frac{p}{2Q} x^2 = b \cdot \frac{x^2}{a^2},$$

puisque le transport de l'axe des x ne change pas le paramètre. Mais les abscisses des points d'attache des tiges sont alors, en désignant par ϵ la demi-travée,

$$\epsilon, 3\epsilon, 5\epsilon, 7\epsilon, \dots, (2n-1)\epsilon,$$

n désignant toujours le nombre des tiges. On a donc dans ce cas

$$\Sigma = \frac{b\epsilon^2}{a^2} [1 + 9 + 25 + 49 \dots + (2n-1)^2].$$

Or la somme des carrés des n premiers nombres impairs a pour valeur

$$\frac{(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{6},$$

il vient donc

$$\Sigma = \frac{b\epsilon^2}{a^2} \cdot \frac{(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{6}.$$

Cette expression se simplifie, en remarquant qu'on a

$$a = \epsilon(2n+1),$$

d'où

$$\frac{\epsilon}{a} = \frac{1}{2n+1}.$$

Substituant et réduisant, on obtient en définitive

$$\Sigma = b \cdot \frac{(2n-1) \cdot 2n}{6(2n+1)} = \frac{1}{3} bn \cdot \frac{2n-1}{2n+1}. \quad [15]$$

On peut remarquer que les valeurs de Σ données par les formules [14] et [15] diffèrent très-peu de $\frac{1}{3} b \cdot n$; en sorte que lorsqu'il ne s'agira que d'une

appréciation sommaire, on aura la somme des longueurs des tiges en multipliant le tiers de la plus grande par le nombre de ces tiges.

Les formules [14] et [15] ne donnent la somme des longueurs des tiges que jusqu'à la tangente au sommet de la parabole circonscrite à la chaîne. Il faut y ajouter encore les longueurs des portions de tiges comprises entre cette tangente et le tablier. Si le tablier est horizontal, en appelant δ la distance du sommet de la courbe au tablier, il faudra ajouter $n\delta$ à la somme précédemment calculée. Quelquefois on donne au tablier une forme légèrement parabolique, la convexité étant tournée vers le haut; dans ce cas il faudrait à la somme dont nous parlons ajouter encore la somme des ordonnées de cette nouvelle parabole correspondantes aux mêmes abscisses; elle se calculerait comme la première somme.

VIII. Nous avons supposé jusqu'ici que la chaîne

était composée de deux parties symétriques, son sommet correspondant au milieu du tablier; il n'en est pas toujours ainsi; mais connaissant les hauteurs h et h' (fig. 6) des points d'attache fictifs H

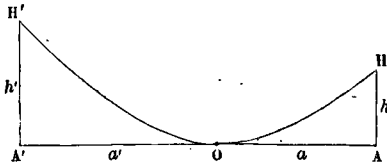


Fig. 6.

et H' au-dessus de la tangente au sommet, et la longueur AA' = L du tablier, il est facile de déterminer les distances a et a' du sommet de la parabole aux extrémités de ce tablier. Car on a d'abord

$$a + a' = L.$$

On a ensuite, puisque les points H et H' sont sur la parabole,

$$h = \frac{p}{2Q} a^2 \quad \text{et} \quad h' = \frac{p}{2Q} a'^2,$$

d'où

$$\frac{h}{h'} = \frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h'}}.$$

On tire des deux relations entre a et a' les valeurs

$$a = L \frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{h} + \sqrt{h'}} \quad \text{et} \quad a' = L \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} + \sqrt{h'}},$$

qui déterminent la position du point O. Ce point étant connu, on peut appliquer à chacune des branches OA et OA' les calculs et les formules relatives au cas où le point O était supposé au milieu du tablier.

Nous avons supposé aussi qu'il n'y avait de chaque côté du pont qu'une seule chaîne; il y en a en général plusieurs; mais les projections de leurs sommets sur un plan vertical parallèle à la direction du pont sont sur une même parabole. Les calculs se font comme si tous ces sommets appartenaient à une même chaîne. S'il y en a 4, la première porte les tiges 1, 5, 9, etc., la seconde les tiges 2, 6, 10, etc, la troisième les tiges 3, 7, 11, etc.; la quatrième les tiges 4, 8, 12, etc.

IX. Les chaînes ou câbles reposent sur les piles et culées par l'intermédiaire de supports fixes ou de supports mobiles. Dans le premier cas, ces supports sont des portiques en maçonnerie ou des piliers en fonte. Les chaînes n'y sont point fixées; elles pas-

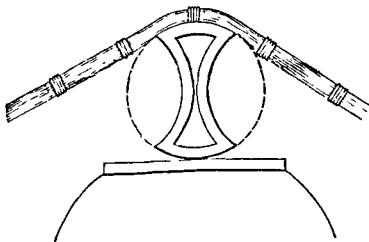


Fig. 7.

sent sur des rouleaux, ou portions de rouleaux appelées *secteurs oscillants* (fig. 7) reposant eux-mêmes sur une surface plane. Le but de cette disposition est de répartir plus également la pression

entre les diverses parties d'une même chaîne; et d'empêcher la rupture qui pourrait résulter d'une inégalité de tension entre deux portions consécutives de cette chaîne. Quelquefois même on fait passer la chaîne sur 3 rouleaux, dont un, celui du milieu, placé plus haut que les autres, afin de diminuer l'angle de flexion de la chaîne (fig. 8).

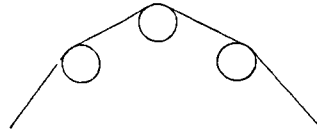


Fig. 8.

Les supports mobiles sont des colonnes ou de grandes bielles en fonte, reposant sur un support fixe, par l'intermédiaire d'une arête horizontale arrondie. Cette disposition, imaginée par M. Seguin, a le même but que l'emploi des rouleaux ou des secteurs oscillants. La tension se répartit également entre les deux brins du câble, et la résultante des deux tensions égales est dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les deux brins; elle s'incline d'un côté ou de l'autre de la verticale suivant l'inégalité de charge des deux tabliers. On comprend, en effet, que si, par l'effet d'une surcharge accidentelle sur l'un de ces deux tabliers, la tension de la chaîne augmente, la chaîne est entraînée de ce côté, et entraîne par adhérence le pilier mobile, en le faisant tourner autour de son point d'appui O (fig. 9) jusqu'à ce que la tension diminue de ce même côté et augmentant de l'autre soit devenue égale pour les deux brins.

La base de la pile doit être réglée de telle sorte qu'en composant la résultante des deux tensions, avec le poids de la pile et de la colonne oscillante, on obtienne une résultante totale qui rencontre la base de la pile dans l'intérieur de cette base, assez loin de l'arête la plus voisine pour qu'il n'y ait pas écrasement de la pierre (Voy. COMPRESSION [Résistance à la]), et qui fasse en outre avec la verticale un angle inférieur à l'angle du frottement de la pierre sur la pierre, c'est-à-dire inférieur à 37° environ.

Chacune des extrémités de la chaîne, après avoir passé sur le support fixe ou mobile qui correspond à la culée, va se fixer dans le sol en pénétrant dans un massif de maçonnerie spécial, lié à la pile, et qui porte le nom de *massif d'amarre*. La figure 10 montre cette disposition; la chaîne, après avoir passé sur le support, prend la direction AB généralement plus rapprochée de la verticale que le dernier côté TA; en B sa direction s'infléchit, afin qu'on ne soit pas obligé de donner au massif d'a-

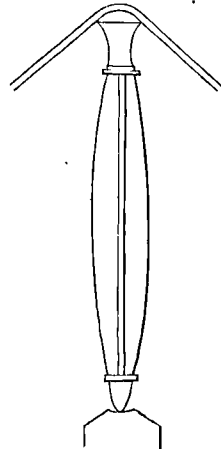


Fig. 9.

marre des dimensions trop considérables; au point d'inflexion correspond d'ordinaire un petit support oscillant; la chaîne descend ensuite suivant la di-

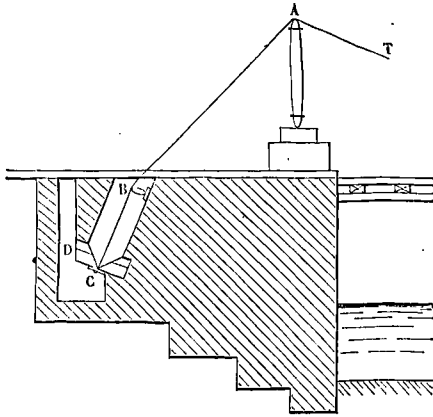


Fig. 10.

rection BC dans un conduit incliné qui se termine par une ouverture étroite fermée par une plaque

en fonte à laquelle la chaîne est fixée; au-dessous se trouve le puits d'amarre C, dans lequel on descend par la cheminée D pour visiter le point d'attache. La même cheminée sert ordinairement d'accès aux deux puits d'une même rive communiquant entre eux par une galerie voûtée. Il faut pour l'équilibre et la stabilité du système, qu'en composant la tension suivant AB avec le poids du massif d'amarre, on obtienne une résultante qui rencontre la masse du massif dans son intérieur, à une distance suffisante de l'arête la plus voisine, et qui fasse avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement considéré ci-dessus. On règle en conséquence les dimensions et par suite le poids du massif.

On donne ordinairement peu de hauteur aux supports, soit fixes, soit mobiles; il en résulte que la tension horizontale Q est assez considérable, car elle varie en raison inverse de cette hauteur; mais il y a moins d'inconvénients, au point de vue économique, à augmenter un peu la section des chaînes, qu'à élever la hauteur des supports, ce qui aurait d'ailleurs pour effet de diminuer la stabilité. Quand on est obligé de donner une grande hauteur aux supports, on les relie par des haubans AB, CD (fig. 11), qui s'attachent au sommet de l'un

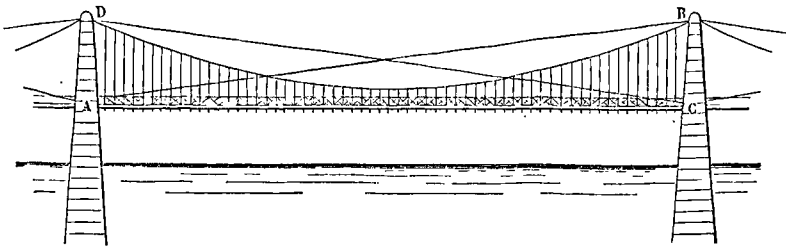


Fig. 11.

et vont se fixer au pied de l'autre; la figure montre cette disposition.

X. Nous avons dit que le point d'attache réel des chaînes ne coïncide pas avec celui que nous avons nommé le point d'attache fictif, et qui est sur la verticale de l'extrémité du tablier. Ces deux points sont souvent distants de plus de 10^m. Dans cet intervalle, la chaîne n'ayant à porter son propre poids, affecte la forme d'un arc de CHAÎNETTE (Voy. ce mot) qui se raccorde avec la parabole circonscrite à la chaîne; mais les deux courbes diffèrent alors si peu l'une de l'autre que l'on peut, sans erreur appréciable, considérer l'arc de chaînette comme le prolongement de la parabole.

Enfin, les théories qui précèdent ne tiennent pas compte des chocs que le tablier peut recevoir dans le sens vertical et des oscillations qui peuvent en résulter; ces chocs et ces oscillations peuvent avoir les conséquences les plus fâcheuses, et entraîner la rupture des tiges. Supposons qu'un poids, que nous représenterons par 2Q, tombe d'une hauteur h sur le tablier, au milieu d'une poutrelle suspendue à deux tiges de longueur l; soit x l'allongement que les tiges auront pris au bout d'un certain temps très-court, et α l'allongement maximum; désignons par 2p le poids de la travée, par ω la section d'une

tige, et par E le coefficient d'élasticité du fer. Au moment où l'allongement de la tige atteint son maximum α, la vitesse du corps choquant étant devenue nulle la somme des travaux développés depuis l'instant du choc par le poids 2Q et par l'élasticité des tiges est égale à la puissance vive du poids 2Q au moment du choc, on a donc pour l'une des tiges

$$0 - Qh = Q\alpha + p\alpha - \int_0^\alpha \frac{E\omega}{l} x dx$$

ou

$$Q(h + \alpha) + p\alpha = \frac{E\omega\alpha^2}{l},$$

ou encore

$$Q \left(\frac{h}{l} + \frac{\alpha}{l} \right) + p \frac{\alpha}{l} = E\omega \left(\frac{\alpha}{l} \right)^2. \quad [16]$$

Faisons $\frac{\alpha}{l} = 0,0006$, allongement proportionnel au delà duquel l'élasticité du fer peut être altérée (Voy. ALLONGEMENT DES PRISMES); supposons

$l = 5^m$, $h = 0^m,05$, $\omega = 0^m^2,000001$; et $p = 2^k$, ce qui répond à la charge permanente ordinaire par millimètre carré; enfin mettons pour E sa valeur $20 \cdot 10^9$, la formule [16] donnera

$$Q = 0^k,566.$$

Ainsi il suffirait qu'un poids égal au quart environ de la charge permanente tombât sur le tablier d'une hauteur de 5 centimètres pour que l'élasticité des tiges fût compromise. Si un pareil choc se renouvelait au moment où, par l'effet de l'oscillation résultant du premier choc, la tige est arrivée à son allongement maximum, l'effet serait plus dangereux encore; et il suffirait d'un petit nombre de coïncidences pareilles pour amener la rupture des tiges. Ceci explique comment le passage d'une troupe d'infanterie marchant au pas a pu quelquefois occasionner la chute d'un pont suspendu qui avait résisté aux charges d'épreuve. (Voy. pour tout ce qui se rapporte aux oscillations, le savant *Mémoire* de Navier sur les ponts suspendus).

Indépendamment du danger résultant des chocs et des oscillations, les ponts suspendus présentent l'inconvénient de ne pouvoir être *contreventés*, c'est-à-dire garantis contre les forces latérales; en sorte que dans les ouragans ces voies de communication peuvent être détruites par le soulèvement et même le retournement complet du tablier. — Enfin l'élasticité du fer paraît s'altérer à la longue par l'effet des variations de température. De plus ces ponts, nécessairement légers, exigent des réparations continuelles. Ce sont là les raisons principales de la défaveur dont ils sont aujourd'hui l'objet. (Voy. le *Cours de routes et ponts* professé à l'École centrale par M. Mary; et les cours de M. Bélanger à cette École et à l'École des ponts et chaussées.)

POPULATION (QUESTIONS RELATIVES à la). On entend par *population* d'un État, d'un département, d'une ville, le nombre des habitants de cet État, de ce département ou de cette ville. Ainsi, en 1861, la population de la France était de 37382225 habitants; la population du département de la Seine était de 1953660 habitants; et la population de la ville de Paris était de 1696141 habitants.

I. On entend par *population spécifique* le quotient de la population par le nombre de kilomètres carrés qu'elle occupe. Ainsi, la superficie de la France, à l'époque indiquée, étant de 543051^a,41, la population spécifique de la France était : $\frac{37382225}{543051,41}$, c'est-à-dire 68,837 ou près de 69 habitants.

De même, la superficie du département de la Seine étant de 475^a, sa population spécifique en 1861 était : $\frac{1953660^b}{475}$, c'est-à-dire 4108^b,64 ou près de 4109 habitants.

(Il y a à cet égard une erreur de division dans l'annuaire de 1865.)

Le département des Basses-Alpes est celui dont la population spécifique est la plus faible; elle n'est que de 21,05 habitants. Le département de l'Oise est celui dont la population spécifique s'approche le plus de celle de la France entière; elle est de 68,56 habitants.

II. Le relevé des naissances montre qu'elles forment annuellement en France, à l'époque où nous sommes, $\frac{1}{35}$ environ de la population; et le relevé des décès prouve qu'ils s'élèvent à peu près à $\frac{1}{42}$ de la population. Il en résulte que la popu-

lation s'accroît annuellement d'une fraction *r* de sa valeur exprimée par $\frac{1}{35} - \frac{1}{42}$ ou $\frac{1}{210}$.

Si ce rapport était constant, et que, par conséquent, la population augmentât en progression géométrique, il serait facile de calculer en combien d'années la population atteindrait un chiffre déterminé. Si l'on voulait connaître, par exemple, le nombre *n* d'années au bout desquelles la population *P* serait doublée, on aurait à résoudre l'équation exponentielle :

$$P \left(1 + \frac{1}{210} \right)^n = 2P,$$

$$\text{d'où } n = \frac{\log 2}{\log \left(1 + \frac{1}{210} \right)} = \frac{\log 2}{\log .211 - \log .210},$$

$$\text{ou } n = \frac{0,30203000}{0,00206317} = 146,3 \text{ ou un peu plus de } 146 \text{ ans.}$$

Mais les faits ne permettent pas d'admettre que la population augmente en progression géométrique; et il est vraisemblable que l'accroissement *relatif* de la population diminue à mesure que la population augmente. On remarque d'ailleurs d'assez grandes inégalités d'une année à l'autre.

III. Le relevé des naissances en France montre que le rapport des naissances masculines aux naissances féminines est à très-peu près constant et égal à $\frac{17}{16}$. Le relevé des décès montre de même que le rapport des décès masculins aux décès féminins est à peu près constant et égal à $\frac{73}{72}$.

On peut se demander quel devrait être le rapport de la population masculine à la population féminine pour que ce rapport demeurât lui-même constant.

Soit *p* la population masculine, *p'* la population féminine, *P* la population totale. Le nombre des naissances annuelles sera $P \cdot \frac{1}{35}$; et celui des naissances masculines sera $P \cdot \frac{1}{35} \cdot \frac{17}{17+16}$ ou $P \cdot \frac{17}{35 \cdot 33}$.

D'un autre côté, le nombre des décès annuels sera $P \cdot \frac{1}{42}$; et le nombre des décès masculins sera $P \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{73}{73+72}$ ou $P \cdot \frac{73}{42 \cdot 145}$.

La population masculine sera donc devenue

$$p + P \left(\frac{17}{35 \cdot 33} - \frac{73}{42 \cdot 145} \right).$$

De même, le nombre des naissances féminines sera $P \cdot \frac{16}{35 \cdot 33}$; le nombre des décès féminins sera $P \cdot \frac{72}{42 \cdot 145}$. La population féminine sera donc devenue :

$$p' + P \left(\frac{16}{35 \cdot 33} - \frac{72}{42 \cdot 145} \right).$$

Pour que le rapport des deux populations masculine et féminine n'ait pas changé, il faut qu'on ait

$$\frac{p + P \left(\frac{17}{35 \cdot 33} - \frac{73}{42 \cdot 145} \right)}{p' + P \left(\frac{16}{35 \cdot 33} - \frac{72}{42 \cdot 145} \right)} = \frac{p}{p'}$$

d'où l'on conclut, en retranchant les deux fractions terme à terme et divisant ensuite les deux termes du résultat par P,

$$\frac{\frac{17}{35.33} - \frac{73}{42.145}}{\frac{16}{35.33} - \frac{72}{42.145}} = \frac{p}{p'}$$

résultat auquel on aurait pu, au reste, parvenir directement. Si l'on multiplie les deux termes par le produit 35.33.42.145, on obtient

$$\frac{p}{p'} = \frac{17.42.145 - 73.35.33}{16.42.145 - 72.35.33} = \frac{183}{136}$$

Ce rapport est sensiblement égal à $\frac{4}{3}$. Il faudrait donc que le rapport des populations masculine et féminine fût celui de 4 à 3 pour que ce rapport pût se maintenir, les autres rapports considérés demeurant constants, et respectivement égaux aux nombres admis ci-dessus.

Mais le rapport des naissances des deux sexes n'est pas rigoureusement constant; il en est de même de celui des décès; ces deux rapports vont en se rapprochant graduellement de l'unité. Il en résulte que le rapport de la population masculine à la population féminine ne peut demeurer constant; et l'on reconnaît en effet que ce rapport se rapproche lui-même à peu près de l'unité.

IV. Si la population était stationnaire, c'est-à-dire si le nombre des décès égalait constamment le nombre des naissances, la population serait égale au nombre des naissances annuelles multiplié par la durée moyenne de la vie; en sorte qu'en nommant P la population, N le nombre des naissances annuelles, et V la durée de la vie moyenne, on aurait

$$P = NV$$

On tire de cette relation $V = \frac{P}{N}$; or, on a vu que le rapport de N à P était d'environ $\frac{1}{35}$; on aurait donc $V = 35$, c'est-à-dire que la durée moyenne de la vie serait de 35 ans. En réalité, cette durée moyenne est variable; elle croît avec l'aisance de la vie et avec toutes les améliorations que la civilisation introduit dans le sort des hommes. Elle s'est élevée, depuis 1817, de 34 à 37, et même 37,7, si l'on prend pour calculer le rapport des naissances annuelles à la population les résultats du recensement de 1861, et jusqu'à 39,5 environ d'après les tables de mortalité (Voy. MORTALITÉ).

V. Concevons que, dans une population stationnaire, le nombre des naissances annuelles soit de 1286 (nombre des naissances qui sert de base à la table de Deparcieux). Si toutes ces naissances avaient lieu le même jour, chaque année la somme des survivants de chaque âge, c'est-à-dire la somme des nombres inscrits dans la table de mortalité, exprimerait la population totale. Mais les naissances, ainsi que les décès, devant être supposés uniformément répartis dans le cours de chaque année, le nombre des enfants de 0 à 1 an est la moyenne arithmétique entre le nombre N des naissances et le nombre v_1 des survivants de 1 an; le nombre des enfants de 1 à 2 ans est la moyenne arithmétique entre le nombre v_1 des survivants de 1 an et le nombre v_2 des survivants de 2 ans; en général, le nombre des individus de l'âge n est la moyenne arithmétique entre le nombre v_n des survivants de l'âge n et le

nombre v_{n+1} des survivants de l'âge n + 1. La somme de toutes ces moyennes forme la population totale. Cette population totale a donc pour expression :

$$\frac{1}{2}(N + v_1) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 + v_3) + \dots + \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1}) + \dots$$

cette expression étant prolongée jusqu'à la limite de la table. Cette somme peut s'écrire :

$$N + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + \dots - \frac{1}{2}N,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme de tous les nombres inscrits dans la table, diminuée de la moitié du nombre des naissances annuelles. Dans la table de Deparcieux, la somme des nombres inscrits, que l'on désigne sous le nom de somme des vivants, à partir de la naissance, est 51467; la population totale est donc exprimée par

$$51467 - \frac{1}{2}1286 \text{ ou } 50824.$$

D'après cela, dans une population stationnaire, étant donné le nombre des naissances annuelles, on pourrait en déduire approximativement la population totale par une simple proportion. Ainsi, en 1861, le nombre des naissances, en France, a été de 1005078; en appelant P la population totale de la France, on aurait donc

$$1286 : 50824 = 1005078 : P,$$

d'où l'on tire $P = 39721681$.

Mais ce nombre n'est qu'approché, et l'on peut reconnaître qu'il est beaucoup trop fort, ce qui infirme l'hypothèse d'une population stationnaire, et la légitimité de l'emploi de la table de Deparcieux. Avec la table de Duvillard, qui suppose 1000000 de naissances annuelles, on trouve pour la population totale 29263216. La population totale de la France en 1861 serait alors donnée par la proportion

$$1000000 : 29263216 = 1005078 : P,$$

d'où l'on tire $P = 29411809$,

nombre moins approché encore que le premier, mais qui s'écarte de la vérité en sens contraire. Ces nombres suffisent pour montrer le degré de confiance que l'on doit accorder aux tables de mortalité dans les calculs relatifs à la population.

VI. On calcule d'une manière analogue, mais avec une approximation du même ordre, la population de chaque âge. En supposant une population stationnaire et 1286 naissances annuelles, la population de l'âge n est la moyenne arithmétique entre le nombre v_n des survivants de l'âge n et le nombre v_{n+1} des survivants de l'âge n + 1. Si donc N désigne le nombre des naissances annuelles dans une population stationnaire, et p_n la population de l'âge n, on doit avoir

$$1286 : \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1}) = N : p_n,$$

d'où

$$p_n = \frac{\frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})}{1286} \cdot N.$$

Si, par exemple, on demandait la population de 20 à 21 ans en France en 1861, on aurait $v_{20} = 814$,

$v_{21} = 806$, $\frac{1}{2}(v_n + v_{n+1}) = 810$; par conséquent

$$p_{20} = \frac{810}{1286} \cdot 1005078, \text{ ou } p_{20} = 633058.$$

L'Annuaire du Bureau des longitudes donne une table des populations de chaque âge pour 1000000 d'habitants; elle suppose 27825 naissances annuelles, ce qui établit entre les naissances et la population totale le rapport de 1 à 35,9.

Voici cette table :

POPULATION DE CHAQUE AGE EN FRANCE
POUR UN MILLION D'HABITANTS.

AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.
de 0 à 1	24536	25 à 26	16288	50 à 51	10176	75 à 76	2863
1 — 2	22604	26 — 27	16020	51 — 52	9926	76 — 77	2565
2 — 3	21518	27 — 28	15754	52 — 53	9673	77 — 78	2274
3 — 4	20842	28 — 29	15494	53 — 54	9418	78 — 79	1994
4 — 5	20423	29 — 30	15231	54 — 55	9161	79 — 80	1722
5 — 6	20090	30 — 31	14972	55 — 56	8900	80 — 81	1462
6 — 7	19820	31 — 32	14715	56 — 57	8641	81 — 82	1222
7 — 8	19581	32 — 33	14463	57 — 58	8381	82 — 83	1005
8 — 9	19369	33 — 34	14180	58 — 59	8121	83 — 84	816
9 — 10	19179	34 — 35	13975	59 — 60	7858	84 — 85	652
10 — 11	19012	35 — 36	13728	60 — 61	7593	85 — 86	514
11 — 12	18867	36 — 37	13491	61 — 62	7319	86 — 87	400
12 — 13	18731	37 — 38	13250	62 — 63	7035	87 — 88	308
13 — 14	18601	38 — 39	13005	63 — 64	6743	88 — 89	241
14 — 15	18472	39 — 40	12768	64 — 65	6445	89 — 90	191
15 — 16	18341	40 — 41	12531	65 — 66	6141	90 — 91	147
16 — 17	18200	41 — 42	12295	66 — 67	5828	91 — 92	110
17 — 18	18046	42 — 43	12060	67 — 68	5506	92 — 93	80
18 — 19	17883	43 — 44	11826	68 — 69	5175	93 — 94	58
19 — 20	17710	44 — 45	11593	69 — 70	4837	94 — 95	41
20 — 21	17527	45 — 46	11361	70 — 71	4496	95 — 96	26
21 — 22	17361	46 — 47	11129	71 — 72	4157	96 — 97	16
22 — 23	17087	47 — 48	10897	72 — 73	3820	97 — 98	9
23 — 24	16829	48 — 49	10662	73 — 74	3495	98 — 99	4
24 — 25	16558	49 — 50	10422	74 — 75	3173	"	"

D'après cette table, la population totale de la France étant, en 1861, de 37 382 225, la population de 20 à 21 ans serait donnée par la proportion $1000\ 000 : 17\ 527 = 37\ 382\ 225 : x$, d'où $x = 655\ 198$. La moitié de ce nombre, ou 327 599, représenterait approximativement le nombre des jeunes gens appelés au tirage pour le recrutement, si le nombre des individus des deux sexes était le même; mais il y a beaucoup d'inégalités à cet égard. En 1856, par exemple, la population de 20 à 21 ans, évaluée comme nous venons de le dire, était de 574 342 habitants, et le nombre des jeunes gens inscrits sur la liste du recrutement a été de 305 500.

VII. La population majeure, c'est-à-dire de 21 ans et au-dessus, se déduit de la table précédente, en faisant la somme de tous les nombres inscrits, à partir de 21 à 22. On trouve ainsi 590 683. On aurait donc la population majeure en France en 1861 en posant la proportion

$$1000\ 000 : 590\ 683 = 37\ 382\ 225 : x,$$

d'où $x = 22\ 081\ 045$.

La moitié de ce nombre, ou 11 040 527, exprimerait approximativement le nombre des électeurs compris dans le suffrage universel, en supposant que dans la population majeure les deux sexes figurent chacun pour moitié.

On obtiendrait d'une manière analogue la population comprise entre deux âges déterminés. Supposons, par exemple, qu'on veuille connaître la population en état de porter les armes, c'est-à-dire la population mâle de 20 à 55 ans.

Il faudra d'abord déterminer la population totale de 20 à 55 ans. Pour cela il faudra faire la somme de tous les nombres inscrits dans la table ci-dessus depuis 20 à 21 jusqu'à 54 à 55. On trouve ainsi 448 299. La moitié de ce nombre, ou 224 149, exprimerait donc, sur un million d'habitants, combien il y a d'hommes en état de porter les armes. Pour avoir le nombre correspondant à la population totale de la France en 1861, on posera donc la proportion

$$1\ 000\ 000 : 224\ 149 = 37\ 382\ 225 : x,$$

d'où $x = 8\ 379\ 188$

Mais il est important de ne pas perdre de vue que ces calculs ne peuvent donner qu'une approximation, et que les résultats auxquels ils conduisent sont toujours entachés d'erreurs plus ou moins considérables.

(Les résultats du recensement exécuté en France en 1866 n'étaient point encore publiés au moment de l'impression de cet article.)

PORTE (Architecture), ouverture pratiquée dans un mur, au niveau du sol, ou au niveau d'un plancher, pour donner accès dans un édifice ou dans un appartement. La forme la plus ordinaire de cette ouverture, ou *baie*, est celle d'un rectangle dont la hauteur est double de la largeur. Dans les petites portes intérieures des appartements, la hauteur est

quelquefois égale à 2 fois $\frac{1}{2}$ la largeur. Dans les portes charretières, au contraire, la hauteur peut s'abaisser à 1 fois $\frac{1}{2}$ la largeur.

Quelques auteurs indiquent, pour la hauteur d'une porte, les proportions suivantes, selon l'ordre auquel elle appartient :

- Ordre toscan..... 1 fois $\frac{11}{12}$ la largeur,
- dorique... .. 2 fois —
- ionique..... 2 fois $\frac{1}{12}$ —
- corinthien et composite. 2 fois $\frac{1}{6}$ —

Mandar donne aux portes d'appartement à 1 vantail, de 2 fois $\frac{2}{3}$ à 2 fois $\frac{3}{4}$ leur largeur, et aux portes à 2 vantaux, de 1 fois $\frac{3}{4}$ à 1 fois $\frac{4}{5}$ leur largeur.

La baie d'une porte rectangulaire est limitée latéralement par deux *jambages* ou *piédroits* verticaux; à la partie supérieure par une pièce horizontale, en bois ou en pierre, appelée *linteau*; et à la partie inférieure par une autre pièce horizontale à laquelle on donne le nom de *seuil*. — On distingue dans un jambage de porte, le *parement*, le *tableau*, la *feuillure* et l'*ébrasement*. Le *parement* est la face du mur dans lequel la porte est pratiquée. Le *tableau* est la paroi interne du jambage, dirigée perpendiculairement au *parement*. La *feuillure* est une entaille à angle droit creusée dans l'épaisseur du jambage, pour y loger les *vantaux* de la porte, pièces mobiles qui servent à fermer ou à ouvrir la baie. L'*ébrasement* est une paroi oblique qui va de la feuillure au *parement*, et qui a pour but de favoriser l'entrée de la lumière, ainsi que le mouvement des vantaux. Quand le mur a une épaisseur

ordinaire, on en donne un tiers au tableau, et les deux autres à la feuillure et à l'ébrasement. La feuillure est assez souvent le tiers du tableau.

L'ornement le plus simple que l'on puisse donner à une porte, consiste dans ce que l'on appelle le *chambranle* : c'est une large moulure composée (Voy. MOULURES) qui suit le contour formé par les jambages et le linteau ; sa largeur est généralement comprise entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$ de celle de la baie. Les détails

d'un chambranle sont presque toujours ceux d'une ARCHITRAVE (Voy. ce mot) avec un peu moins de saillie. Quelquefois même le chambranle est creusé, à l'exception du filet qui le termine extérieurement, dans l'épaisseur même du jambage ; on le désigne alors sous le nom de *chambranle rentrant*. On lui donne aussi un autre genre d'ornement qui consiste dans un retour d'équerre que la partie verticale du chambranle éprouve en arrivant à la hauteur du linteau ; c'est-à-dire qu'il s'éloigne de la baie en se brisant à angle droit, pour revenir ensuite au-dessus du linteau ; cette brisure est ce qu'on appelle une *crosette*.

Lorsque le linteau est formé d'une plate-bande en pierre, ou voûte plate, la *clef*, ou le claveau qui ferme la voûte, est ordinairement ornée conformément au style général de l'édifice.

Quelquefois on place une corniche immédiatement au-dessus de la partie horizontale du chambranle ; cette corniche est dite *architrave*.

D'autres fois on laisse une frise entre le chambranle et la corniche. La partie horizontale du chambranle devient alors une véritable architrave ; et l'ensemble de la corniche, de la frise et de l'architrave forme un véritable *entablement*, soumis, quant à ses proportions, aux lois qui régissent les ORDRES (Voy. ce mot).

La corniche est quelquefois couronnée par un FRONTON (Voy. ce mot) triangulaire ou circulaire ; et ses extrémités sont souvent supportées par des *consoles*, qui descendent jusqu'à l'ouverture de la baie, et même un peu plus bas. Ces consoles sont un peu moins larges par le bas que par le haut. Dans ces circonstances les parties verticales du chambranle sont souvent accompagnées par une moulure, moins large et moins saillante, appelée le *contre-chambranle*, qui s'élève depuis le sol jusqu'à la hauteur des consoles, et peut recevoir divers ornements.

Dans les constructions modernes, le linteau horizontal, ou la plate-bande, sont parfois remplacés par une petite voûte en arc de cercle, dont le centre est au quart ou à la moitié de la hauteur de la baie, à partir du bas. Le mode d'ornementation est d'ailleurs le même.

Les portes cochères ont souvent la forme d'une arcade à plein cintre (Voy. ARCADE). Les portes monumentales des palais, des arcs de triomphe, etc., sont des arcades à plein cintre avec archivolte, imposte, piédroits ornés de colonnes ou de pilastres, etc. (Voy. PORTIQUE), et sont soumises aux proportions des ordres d'architecture.

On cite, parmi les portes pouvant être données comme modèles : la porte du palais de la Chancellerie, d'après Vignole ; la porte de l'église Saint-Laurent *in Damaso* et la porte de Salon du palais Farnèse, d'après le même ; la porte cintrée du palais

de Caprarole, toujours d'après Vignole ; l'arc de Titus, à Rome, la porte Saint-Denis, à Paris, etc. Les portes sont un des sujets sur lesquels le goût et l'imagination des architectes anciens et modernes se sont le plus exercés.

Les anciens appelaient *atticurgues* les portes dont les piédroits, au lieu d'être verticaux, allaient en s'écartant vers le bas. Cette disposition ne peut s'accorder avec les besoins de l'architecture moderne.

PORTE (Coupe des pierres), nom que prend un BERCEAU (Voy. ce mot) lorsqu'il n'a qu'une faible longueur dans le sens de son axe. Une porte peut être droite, biaise, en talus ; elle peut être pratiquée dans une tour ronde, dans un mur conique, dans une voûte sphérique ; chacun de ces cas donne lieu à une épure particulière.

PORTE DROITE. Elle est pratiquée dans un mur vertical perpendiculaire à son axe. On peut adopter pour l'appareil la même disposition que pour un berceau ordinaire ; mais quand la porte est percée dans la façade d'un monument, on prolonge les joints des voussoirs jusqu'à la rencontre des lits de pose des assises du mur, de manière à contribuer à la décoration extérieure, en ajoutant à la solidité de l'appareil. La figure 1 montre cette disposition.

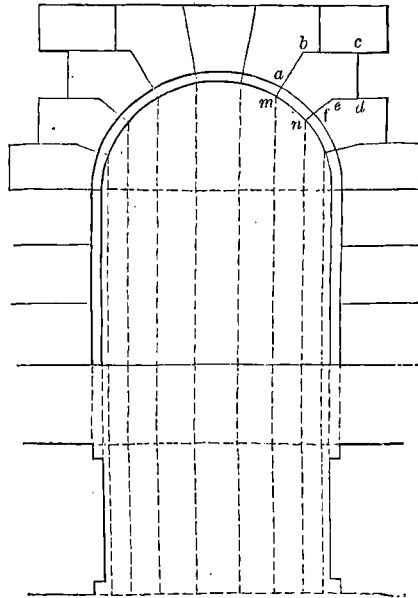


Fig. 1.

Elle fait voir aussi la *feuillure*, petit renfoncement pratiqué tout autour de la porte, dans l'épaisseur du mur, pour pouvoir loger les *vantaux*. La figure 2 représente l'un des voussoirs, et indique comment on procède pour le tailler. Après avoir choisi un bloc capable du volume du voussoir, et dressé deux faces planes parallèles, à une distance égale à l'épaisseur de la porte, on applique sur ces deux faces le *panneau de tête mabcdefn*, de manière que les deux contours se correspondent, c'est-à-dire que les sommets *a* et *a'*, *b* et *b'*, etc., soient sur des per-

perpendiculaires aux deux faces parallèles. On fait alors sauter l'excédant de pierre, sans s'occuper d'abord de la feuillure; les faces $abb'a$, $bcc'd$, etc., doivent être planes et perpendiculaires aux faces

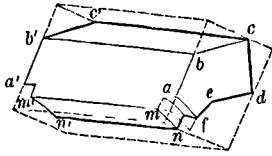


Fig. 2.

$mabcdefn$ et $m'a'b'c'd'e'f'n'$; la face $mn n'm'$ doit être cylindrique; on l'obtient en divisant les arcs mn et $m'n'$ en un même nombre de parties égales, et en enlevant la pierre de manière qu'une règle posée sur deux points de division correspondants s'applique toujours sur la surface. Quand la pierre est ainsi taillée, il reste à pratiquer la feuillure. Pour cela, on trace sur le plan de tête l'arc af , en faisant mouvoir une pointe de compas sur l'arc mn tandis que l'autre pointe, écartée de la première d'une distance égale à am , et dans le sens normal à mn , trace sur la pierre la courbe demandée; on trace par un moyen analogue l'arc MN sur la douelle, c'est-à-dire sur la surface cylindrique, puis on enlève la pierre, en menant suivant af une surface cylindrique perpendiculaire au plan de tête, et suivant MN un plan normal à la douelle; on opère de même pour l'autre feuillure. L'appareil serait analogue, et l'application du trait sur la pierre se

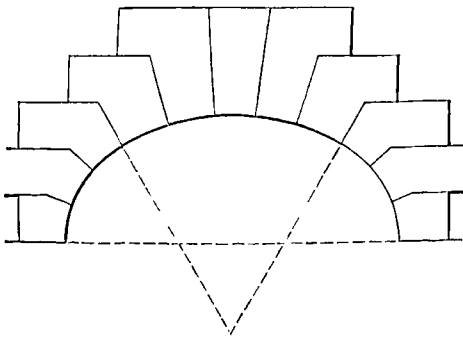


Fig. 3.

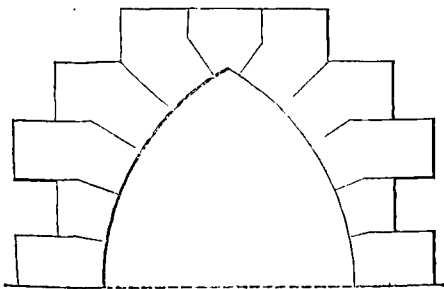


Fig. 4.

ferait d'une manière semblable, si la porte, au lieu d'être à plein cintre comme dans la figure 1, était surbaissée comme l'indique la figure 3, ou ogivale comme l'indique la figure 4.

PORTE BIAISE. Elle est pratiquée dans un mur vertical dont une face au moins n'est pas perpendiculaire à son axe. On trace l'appareil comme pour une porte droite; mais on détermine l'intersection de la surface cylindrique et des divers plans de joint avec la face biaise du mur. Pour pouvoir appliquer le trait sur la pierre, il est nécessaire que l'épure donne le développement de la douelle, et tous les panneaux de joint. Soit AMB (fig. 5) la

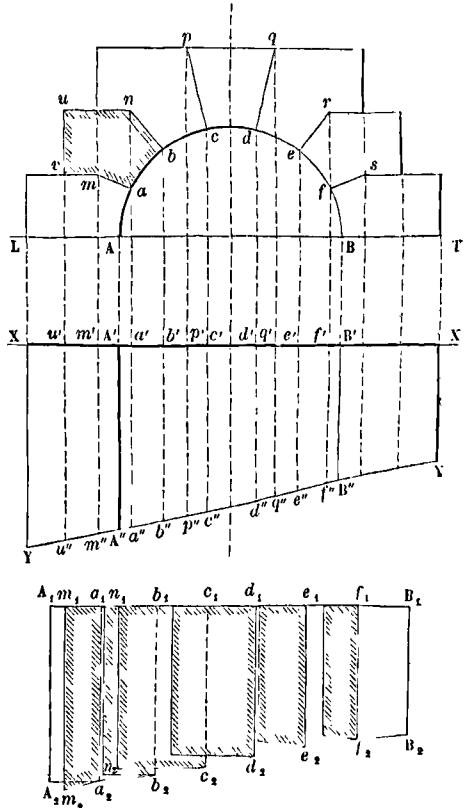


Fig. 5.

section droite de la porte, que nous supposons à plein cintre pour fixer les idées. Concevons le tracé de l'appareil effectué comme il a été dit ci-dessus. Soient XX et YY les traces horizontales des deux faces verticales du mur. Par les points de division a, b, c, d, e, f de la demi-circonférence AMB , et par les points m, n, p, q, r, s extrémités des traces verticales des plans de joint, on mènera des perpendiculaires à la ligne de terre LT , et l'on déterminera leurs intersections avec XX et YY . Cela fait, on développera la demi-circonférence AMB suivant une droite $A_1 B_1$; les points de division a, b, c , etc., seront représentés par les points a_1, b_1, c_1 , etc., équidistants entre eux. Par chacun de ces derniers, on élèvera sur $A_1 B_1$ les perpendiculaires $A_1 A_2, a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$, etc., respectivement égales à $A' A'', a' a'', b' b'', c' c''$, etc.; et, par les points A_2, a_2, b_2, c_2 , etc., on fera passer une courbe, qui sera le développement de l'arc d'ellipse, intersection du berceau par le plan qui a pour trace horizontale YY . On aura

ainsi en $A_1 B_1 B_2 A_2$ le développement de la douelle. Il s'agit d'obtenir les panneaux de joint. Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de celui qui a pour trace verticale am . On prendra sur $A_1 B_1$ une longueur $a_1 m_1$ égale à am ; au point m_1 , on élèvera la perpendiculaire $m_1 m_2$ égale à $m'm''$, et l'on joindra $m_2 a_2$; la figure $a_1 m_1 m_2 a_2$ représentera le panneau demandé; on opérera de la même manière pour obtenir les autres. L'épure fournira alors toutes les données nécessaires.

Pour tailler un voussoir, par exemple celui qui a pour panneau de tête $abnum$, on opérera d'abord comme s'il s'agissait d'une porte droite ayant l'épaisseur $v'v''$. On appliquera sur la surface cylindrique le panneau de douelle $a_1 b_1 b_2 a_2$ en faisant coïncider $a_1 b_1$ avec ab ; et l'on tracera l'arc d'ellipse correspondant à $b_1 b_2$. On appliquera ensuite sur les faces am et bn les panneaux de joint $a_1 m_1 m_2 a_2$ et $b_1 n_1 n_2 b_2$, en faisant coïncider $a_1 m_1$ avec am et $b_1 n_1$ avec bn ; et l'on tracera les droites correspondantes à $a_2 m_2$ et à $b_2 n_2$. On aura alors plus de données qu'il n'est nécessaire pour dresser la face plane correspondante à YY , puisqu'on aura une courbe et deux droites appartenant à cette face. Les autres voussoirs se tailleront de la même manière.

PORTE BIAISE EN TALUS. Elle est pratiquée dans un mur dont une face est inclinée à l'horizon et oblique par rapport à l'axe du berceau. Dans ce cas on détermine encore l'appareil comme pour une porte droite, et, par les points $a, b, c, \text{etc.}, m, n, p, \text{etc.}$ (fig. 6), on mène encore des perpendiculaires à la ligne de terre LT ; ce sont les projections horizontales des droites menées par ces divers points parallèlement à l'axe du berceau. Si l'on considère les portions de ces parallèles comprises entre les deux faces du mur, leurs extrémités postérieures se projettent sur XX , mais leurs extrémités antérieures se projettent sur des parallèles à YY qui varient suivant la hauteur des points considérés. Pour les obtenir, on prolongera la verticale du point K jusqu'à la rencontre du prolongement de pq en I ; et l'on mènera la droite IH faisant avec IK l'angle que fait la ligne de plus grande pente de la face inclinée du mur avec la verticale; c'est-à-dire que IH exprimera le talus du mur. Parallèlement à YY , et à une distance égale à HK , on mènera la droite OO' ; c'est sur cette droite que se projettent les extrémités antérieures des parallèles à l'axe du berceau menées par les points p et q . On mènera Ox perpendiculaire à YY , et Oz parallèle à la ligne de terre. On projettera les points $a, b, c, \text{etc.}, m, n, p, \text{etc.}$, sur IH , par des parallèles à la ligne de terre; puis on jettera les points obtenus sur Ox par des perpendiculaires à LT ; on ramènera ces derniers sur Oz par des arcs de cercles décrits du point O ; et enfin, par les points de Oz ainsi obtenus on mènera des parallèles à YY ; c'est sur ces parallèles que se projettent respectivement les extrémités antérieures des parallèles à l'axe du berceau menées par les points $a, b, c, \text{etc.},$

$m, n, p, \text{etc.}$ Ces projections se trouveront donc déterminées par l'intersection de ces droites respectives avec celles qui ont été menées au début perpendiculairement à la ligne de terre. On obtiendra

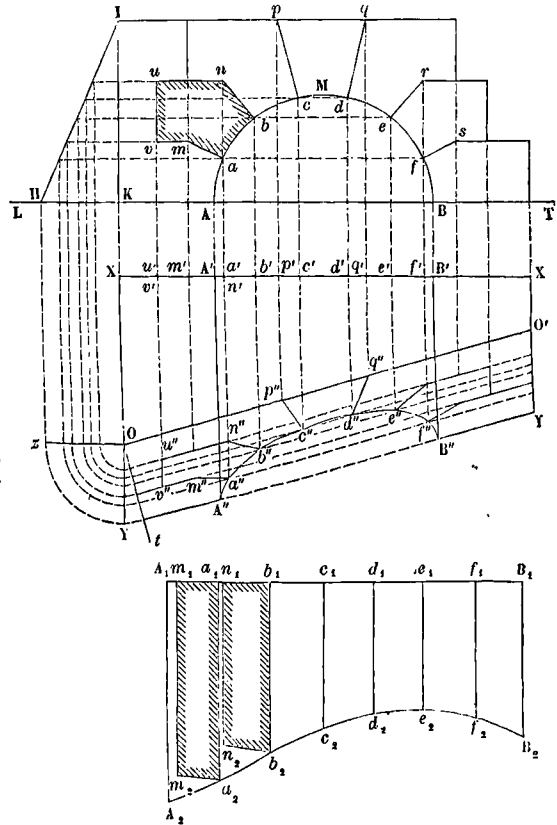
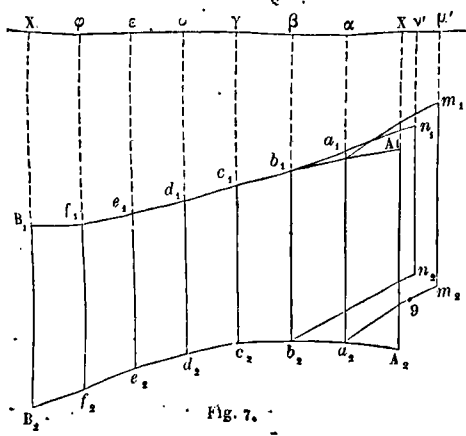
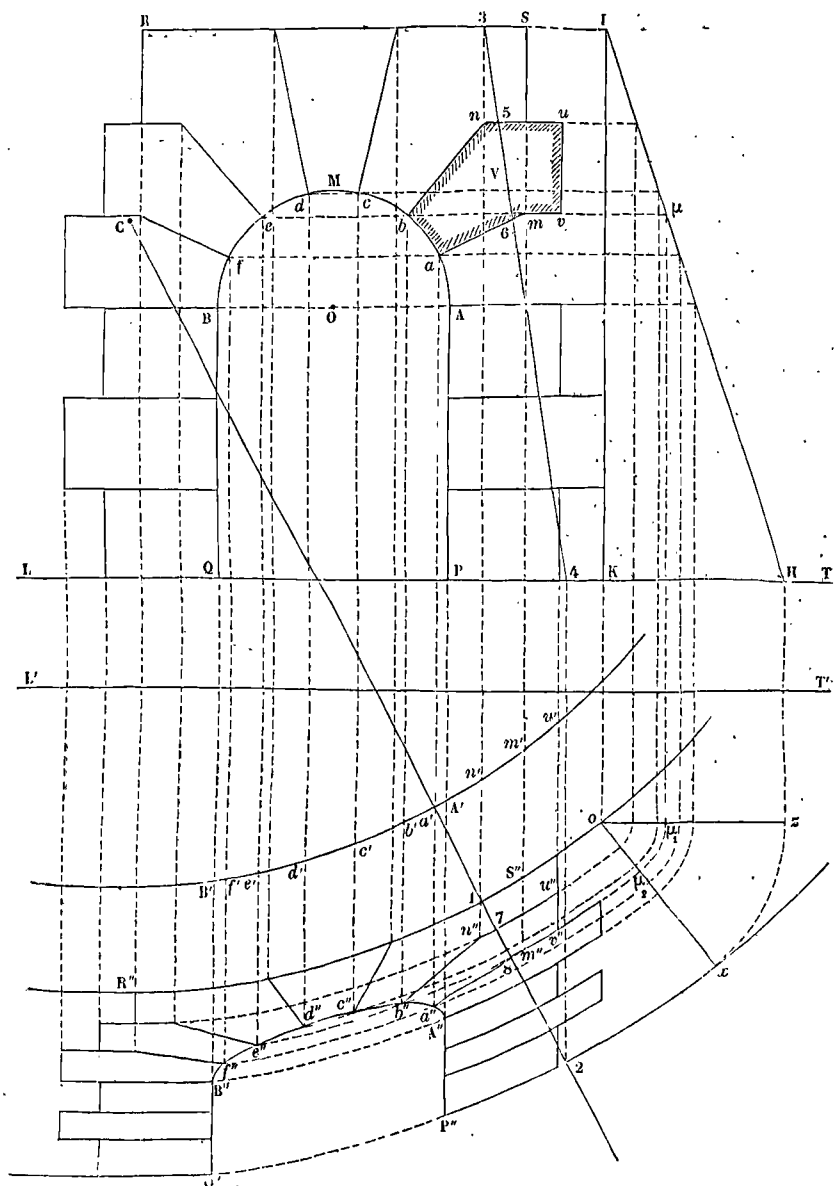


Fig. 6.

ainsi la projection horizontale de la face antérieure de la porte. — Cela fait, on développera la demi-circconférence AMB suivant la droite $A_1 B_1$; par les points de division $a_1, b_1, c_1, \text{etc.}$, on élèvera des perpendiculaires respectivement égales aux longueurs $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc., et par les extrémités de ces perpendiculaires on fera passer la courbe $A_2 a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 B_2$; et l'on aura le développement de la douelle. Il restera à construire les panneaux de joint. Pour cela, on prendra, par exemple, $a_1 m_1$ égal à am , on élèvera la perpendiculaire $m_1 m_2$ égale à $m'm''$, et l'on joindra $m_2 a_2$; on aura ainsi le panneau de joint dont am est la trace verticale. On prendra de même $b_1 n_1$ égal à bn ; on élèvera la perpendiculaire $n_1 n_2$ égale à $n'n''$; et l'on joindra $n_2 b_2$; on aura le panneau de joint dont la trace est bn . Les autres panneaux de joint se construiront de la même manière, et l'on aura toutes les données nécessaires pour appliquer le trait sur la pierre. On procédera comme dans le cas d'une porte biaise sans talus; s'il s'agit, par exemple, de tailler le voussoir dont la projection verticale est $abnum$, on taillera d'abord la pierre comme s'il s'agissait d'une porte droite; sur la surface cylindrique on appli-



quera le panneau de douelle $a_1 b_1 b_2 a_2$; et sur les faces planes adjacentes on appliquera les panneaux de joint $a_1 m_1 m_2 a_2$ et $b_1 n_1 n_2 b_2$; la face plane à tailler sera déterminée par une courbe et deux droites; on aura donc plus de données qu'il n'est nécessaire pour guider l'ouvrier; elles se serviront mutuellement de vérification.

PORTE BIAISE EN TOUR RONDE, AVEC TALUS. Elle est pratiquée dans un mur circulaire dont la paroi intérieure est un cylindre à génératrices verticales, et dont la paroi extérieure est un cône de révolution ayant même axe que le cylindre. Sur un plan perpendiculaire à l'axe de la porte, on trace l'appareil comme s'il s'agissait d'une porte droite; la figure 7 montre ce tracé. La trace horizontale de la paroi cylindrique du mur est le cercle $A'B'$, décrit d'un certain point C comme centre; la trace horizontale du cône est un cercle $Q''P''x$ décrit du

même centre; le parallèle, intersection du plan horizontal RS avec le cône, se projette en vraie grandeur suivant un nouveau cercle $R''S''$ concentrique aux deux premiers. Si l'on conçoit un plan αx mené par l'axe du cône, il coupera la surface conique suivant une génératrice dont l'inclinaison sera celle du talus. Pour l'obtenir on fera tourner le plan vertical qui la contient autour de la verticale du point o , jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection; sa trace horizontale sera alors αx ; la génératrice considérée se projettera alors parallèlement à elle-même sur le plan vertical; et on obtiendra ses extrémités en menant deux perpendiculaires à la ligne de terre, l'une par le point o jusqu'à la rencontre du prolongement de RS en I, l'autre par le point x , jusqu'à la rencontre de la ligne de terre en H.

Cela posé, pour obtenir toutes les données nécessaires à l'application du trait sur la pierre, il faut concevoir par chacun des points de la projection verticale de la porte, des droites perpendiculaires au plan vertical de projection; et déterminer les points où elles rencontrent les deux parois du mur. Pour cela, par le point m , par exemple, on mènera une parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la droite IH, en μ ; et par le point μ une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de αx en μ_1 ; du point o comme centre avec $o\mu_1$ pour rayon on décrira un arc de cercle jusqu'à la rencontre de αx en μ_2 ; enfin du point C comme centre, avec $C\mu_2$ pour rayon, on décrira un cercle, qui sera la projection horizontale du parallèle sur lequel se trouve l'extrémité antérieure de la droite menée par le point m perpendiculairement au plan vertical de projection. En menant donc par le point m une perpendiculaire à la ligne de terre, on aura en m' sur le cercle $A'B'$, et en m'' sur le parallèle qu'on vient de déterminer, les projections des extrémités de la droite considérée. On opérera de la même manière pour tous les autres points qui déterminent le tracé de l'appareil.

La surface cylindrique de l'intrados coupera les parois du mur suivant des courbes à double courbure dont l'une se projettera horizontalement suivant l'arc de cercle $A'B'$, et l'autre suivant la courbe $A''a''b''c''d''e''f''B''$. Les faces verticales des piédroits couperont les mêmes parois suivant des verticales qui se projettent horizontalement aux points A' et B' , et suivant des arcs d'hyperbole qui se projettent en $A''P''$ et $B''Q''$. Les plans de joint couperont ces parois suivant des arcs d'ellipses qui se projettent sur le cercle $A'B'$ pour le cylindre, et en $a''m''$, $b''n''$, etc., pour le cône. Ces derniers arcs différeront généralement peu d'une ligne droite; mais pour obtenir plus exactement leur projection horizontale, il faudrait déterminer sur chacun d'eux au moins un point intermédiaire, en suivant la marche qu'on a suivie pour le point m .

Il s'agira ensuite d'obtenir le développement de la douelle, et les panneaux de joint. Pour cela, on développera la demi-circonférence $AabcdefB$ suivant une ligne droite $X\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\phi Y$. Par ses extrémités et par les points de division on élèvera des perpendiculaires sur lesquelles on portera les distances de la ligne $L'T'$ aux points A' , a' , b' , etc., d'une part, et aux points A'' , a'' , b'' , etc., de l'autre. On obtiendra ainsi les deux courbes $A_1 a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 B_1$

et $A_2 a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 B_2$, qui seront le développement des courbes à double courbure dont on a parlé plus haut; et la figure $A_1 A_2 B_1 B_2$ sera le développement de la douelle. Pour obtenir le panneau de joint qui correspond à am , on prendra sur XY une longueur $\alpha'\mu'$ égale à am ; par le point μ' on mènera une perpendiculaire à XY , et on y portera les longueurs $\mu'm_1$, $\mu'm_2$ respectivement égales aux distances des points m' et m'' à la ligne $L'T'$; on joindra $a_1 m_1$ et $a_2 m_2$ et l'on aura le panneau de joint: $a_1 m_1 m_2 a_2$. Si l'on veut obtenir les arcs $a_1 m_1$ et $a_2 m_2$ avec plus d'exactitude, on déterminera sur chacun d'eux un point intermédiaire. On obtiendra de même le panneau de joint $b_1 n_1 n_2 b_2$, et tous les autres. Enfin, en menant par les points n et u des perpendiculaires à la ligne de terre, on obtiendra en $n'n''u''u'$ la forme du panneau horizontal qui correspond au lit de pose nu . On déterminera de même le panneau horizontal qui répond à mv . On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour procéder à la taille des voussoirs.

S'il s'agit, par exemple, du voussoir V, on le taillera d'abord d'après le panneau de tête $amvumb$ comme si la porte était droite. Sur la surface cylindrique on appliquera le développement $a_1 b_1 b_2 a_2$ de la douelle, et l'on y tracera les arcs correspondants à $a_1 b_1$ et à $a_2 b_2$. Sur les deux faces planes adjacentes, on appliquera les panneaux de joint $a_1 m_1 m_2 a_2$ et $b_1 n_1 n_2 b_2$; et l'on y tracera arcs correspondants à $a_1 m_1$, $a_2 n_2$, $b_1 n_1$, $b_2 n_2$; enfin sur la face plane correspondante à nu on appliquera le panneau horizontal $n'n''u''u'$ et sur la face correspondante à mv on appliquera le panneau $m'm''u''u'$. Il ne restera plus qu'à tailler la face qui correspond à la paroi cylindrique et celle qui correspond à la paroi conique. A cet effet, on doit avoir marqué à l'avance, sur le contour de ces divers panneaux, les points où ce contour est rencontré par un certain nombre de génératrices, soit du cylindre, soit du cône, suivant celle des deux parois à laquelle répond la partie du contour considérée. Concevons, par exemple, par l'axe du cône un plan dont la trace horizontale sera C.1.2; cette trace sera en même temps la projection horizontale d'une des génératrices du cône. Par le point 1, où elle coupe le cercle $R''S''$ menons une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de RS, au point 3; par le point 2, où cette même trace rencontre le cercle $P''Q''$ menons une nouvelle perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de cette ligne au point 4; la droite 3.4 sera la projection verticale de la génératrice dont C.1.2 est la projection horizontale. La ligne 3.4 rencontre le contour du panneau V aux points 5 et 6; si l'on opère pour ces points comme on a opéré pour le point m , on obtiendra un point 7 de l'arc $b''u''$ et un point 8 de l'arc $a''m''$ correspondants à une même génératrice du cône, par suite un point 7 de l'arc $b''u''$ et un point 9 de l'arc $a_2 m_2$ correspondants à cette même génératrice. Quand les panneaux seront appliqués sur la pierre, il faudra donc qu'une règle posée sur les points 7 et 9 s'applique exactement sur la surface; et, en multipliant suffisamment ces vérifications, on pourra tailler la surface conique avec toute l'exactitude désirable. On pourra opérer de même pour la surface cylindrique appartenant à la paroi interne du mur circulaire; mais on pour

aussi tailler cette face cylindrique au moyen d'une CERCE (*Voy.* ce mot) à laquelle on aura donné à l'avance la courbure de l'arc $b'u'$, qui est la directrice de cette surface cylindrique.

Nous avons dit que les plans verticaux dont AP et BQ sont les traces verticales coupent le cône suivant des arcs d'hyperbole. On pourrait obtenir ces courbes rabattues sur le plan vertical en les faisant tourner autour des verticales des points A'' et B'' ; mais ces courbes offrent, en général, si peu de courbure, surtout dans l'intervalle d'une assise à la suivante, qu'on peut sans erreur sensible les traiter comme des lignes droites.

Lorsque la porte a beaucoup de biais, c'est-à-dire lorsque les perpendiculaires à la ligne de terre, dont on est obligé de faire usage, rencontrent les cercles $A'B'$, $R''S''$, etc., sous des angles très-aigus, ce qui serait un inconvénient au point de vue de la solidité de la construction, au lieu de terminer la-

léralement les voussoirs ou les pierres des piédroits par des plans perpendiculaires à la ligne de terre, on les termine par des plans menés suivant l'axe du cône. Il n'en résulte aucune modification importante dans l'épure ni dans l'application du trait sur la pierre (*Voy.* le *Traité de la coupe des pierres*, de J. Adhémar, planche 31, fig. 246).

Si la paroi extérieure du mur au lieu d'être en talus était un cylindre droit, les cercles $R''S''$, $P''Q''$ et tous les intermédiaires se confondraient en un seul, et l'épure offrirait des simplifications que le lecteur apercevra aisément.

PORTE BIAISE RACHETANT UN BERCEAU EN MAÇONNERIE. La porte est pratiquée dans un mur que nous supposons vertical, mais oblique par rapport à l'axe de la porte; et elle *rachète*, c'est-à-dire rejoint, un berceau dont nous supposons le plan de naissance à la même hauteur, mais dont les piédroits ne sont point parallèles à la face extérieure du mur. Nous ferons abstraction des piédroits et nous prendrons le plan de naissance pour plan horizontal de projection. L'appareil est toujours tracé comme s'il s'agissait d'une porte droite; la figure 8 montre ce tracé en $AabcdefB$, etc.

MN est la trace horizontale de la face biaise du mur; HK est la trace horizontale de l'un des piédroits du berceau. D'un point pris sur la ligne de terre à une distance du point P égale au rayon de la section droite du berceau (nous la supposons à plein cintre) on trace un arc de cercle PQ. — Pour déterminer les données nécessaires à l'application du trait sur la pierre, il faut, comme dans les

exemples précédents, mener par les différents points de la projection verticale de la porte des perpendiculaires au plan vertical de projection, et trouver les points où elles rencontrent d'une part

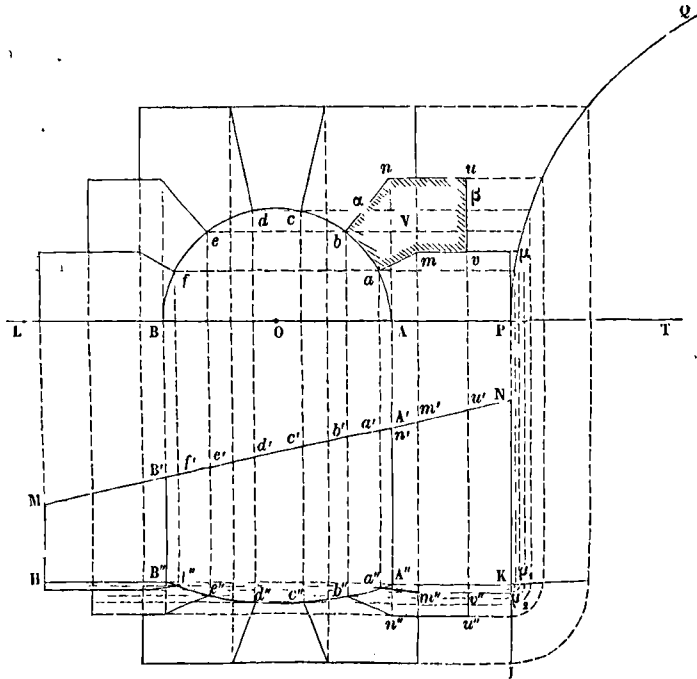


Fig. 8.

le mur dont la trace est MN, de l'autre la surface cylindrique du berceau. Supposons qu'il s'agisse du point m ; on mènera d'abord par ce point une perpendiculaire à la ligne de terre; le point m' où elle rencontrera MN sera la projection horizontale de l'extrémité postérieure de la droite considérée. Pour avoir son extrémité antérieure, on mènera par le point m une parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de l'arc PQ en μ ; on projettera le point μ en μ_1 sur le prolongement de HK; et, par un arc de cercle décrit du point K, on ramènera μ_1 en μ_2 sur une perpendiculaire à HK; enfin, par le point μ_2 on mènera une parallèle à HK; ce sera la projection horizontale de la génératrice du berceau sur laquelle se trouve l'extrémité cherchée; le point m'' où elle rencontrera le prolongement de mm' sera la projection horizontale de cette extrémité. Il en résulte que $m'm''$ sera la longueur de la portion de la droite considérée comprise entre le mur MN et le berceau. On opérera de la même manière pour tous les points de la projection verticale de la porte; et l'on obtiendra ainsi en $A''a''b''c''d''e''f''g''h''i''j''k''l''m''n''o''p''q''r''s''t''u''v''w''x''y''z''$, etc., la projection horizontale de la tête de la porte du côté du berceau. La surface cylindrique de l'intrados de la porte coupe la surface cylindrique du berceau suivant une courbe à double courbure, qui se projette en $A''a''b''c''d''e''f''g''h''i''j''k''l''m''n''o''p''q''r''s''t''u''v''w''x''y''z''$. Les plans de joint coupent le berceau suivant des arcs d'ellipses tels que $a''m''$, $b''n''$, etc.; on les détermine au moyen d'un ou deux points intermédiaires. Les lits de pose, tels que nu , mv coupent le berceau suivant des

génératrices. Les plans verticaux tels que uv coupent cette surface suivant les arcs de cercle faisant partie de la section droite du berceau.

Il est facile, à l'aide de ce qui précède, d'obtenir le développement de la douelle et les panneaux de joint, en procédant comme dans l'exemple précédent. Pour tailler un voussoir, le voussoir V par exemple, on procédera d'abord comme s'il s'agissait d'une porte droite ayant pour épaisseur $u'u''$. Sur la surface cylindrique du voussoir ainsi préparé on appliquera le panneau de douelle, et sur les deux faces planes adjacentes les deux panneaux de joint; les faces suivant nu, mv, uv sont planes, et leurs dimensions sont données par l'épure; on pourra donc tailler le voussoir définitivement enlevant l'excédant de pierre. La face postérieure sera plane. Quant à la face antérieure, qui correspond au berceau, elle devra être cylindrique. Pour cela on a soin de tracer à l'avance sur la base $abnum$ du prisme dont on tire le voussoir un certain nombre de parallèles à nk ; elles sont en même temps parallèles aux génératrices du berceau. Chacune d'elles donne sur le contour de la base du prisme deux points de repère tels que α et β que l'on reporte sur le contour de la face antérieure par des perpendiculaires à la base $abnum$; une règle posée sur ces deux nouveaux points de repère devra s'appliquer exactement sur la surface; un petit nombre de couples de points de repère analogues suffira pour tailler cette surface avec une exactitude suffisante.

On a supposé que le berceau était construit en maçonnerie. S'il était construit en pierres de taille, les voussoirs de la porte devraient être en même temps des voussoirs du berceau, et cette condition entraînerait des modifications importantes dans la forme de ces voussoirs (Voy. LUNETTE).

La face extérieure du mur pourrait être en talus; il faudrait alors combiner les procédés de la figure 8 avec ceux de la figure 6 (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, planche 36).

PORTE BLAISE RACHETANT UNE VOUTE SPHÉRIQUE EN MAÇONNERIE. La porte pénètre dans un mur circulaire dont nous supposerons la paroi extérieure cylindrique, mais dont l'axe ne rencontre pas celui de la porte; et celle-ci rachète une surface sphérique à laquelle le mur circulaire sert

de soutien. L'appareil de la porte est tracé comme pour une porte droite. On suppose le plan de naissance le même pour l'intrados de la porte et pour la voûte sphérique; et l'on prend ce plan de

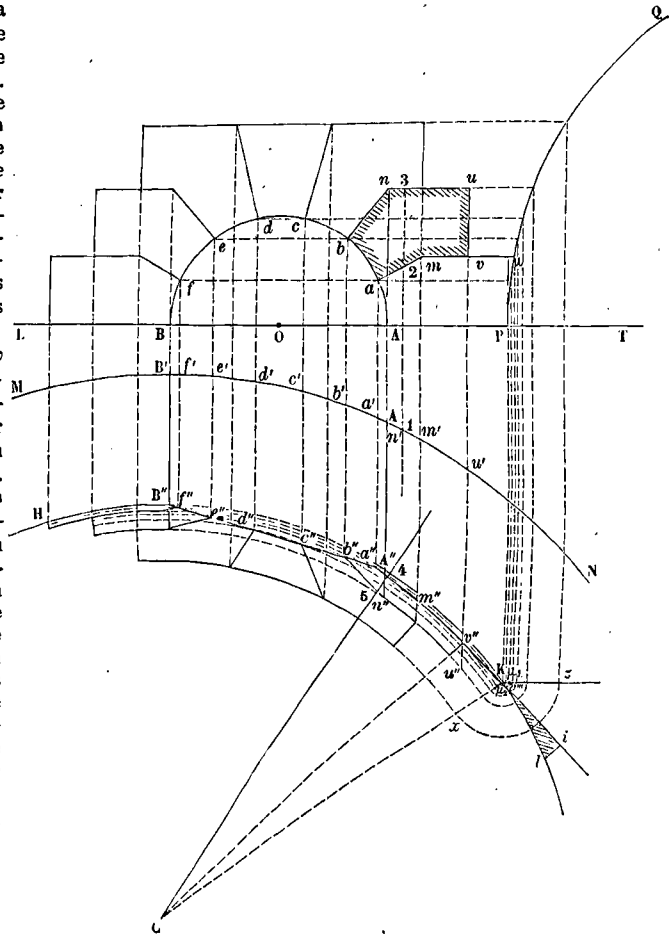


Fig. 9.

naissance pour plan horizontal de projection. MN (fig. 9) est la trace horizontale de la paroi extérieure du mur circulaire; HK est la trace de la paroi intérieure. Le rayon de ce cercle est celui de la voûte sphérique. Avec ce rayon, et d'un point pris sur la ligne de terre, on trace l'arc de cercle PQ, qui représente un des méridiens de la sphère. Le problème consiste toujours principalement à mener par les différents points de la projection verticale de la porte des perpendiculaires au plan vertical de projection, et à déterminer leurs points de rencontre avec le cylindre extérieur d'une part, et avec la sphère de l'autre. Supposons qu'il s'agisse du point m . On mènera d'abord par ce point une perpendiculaire à la ligne de terre; le point m' où elle rencontrera le cercle MN sera la projection horizontale du point où la droite considérée perce le cylindre extérieur. Par le même point m on mènera ensuite une parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de l'arc PQ au point u ; en

projettera ce point en μ_1 sur une parallèle à la ligne de terre menée par le point K, puis, au moyen d'un arc de cercle décrit du point K, on ramènera μ_1 en μ_2 sur le rayon du cercle HK qui aboutit au point K; enfin on fera passer par le point μ_2 un cercle concentrique à HK; ce sera la projection du parallèle de la sphère sur lequel se trouve le point d'intersection cherché; sa projection horizontale sera donc en m'' ; et $m'm''$ exprimera la longueur de la portion de la droite considérée comprise entre le cylindre extérieur et la sphère. On opérera de la même manière pour tous les autres points de la projection verticale de la porte; et l'on aura en $A''a''b''c''d''e''f''B''$, etc., la projection horizontale de la face de tête de la porte du côté de la sphère. L'intrados de la porte coupe la sphère suivant une courbe à double courbure qui se projette en $A''a''b''c''d''e''f''B''$. On démontre aisément que cette projection est une parabole. Les plans de joint, tels que am , bn , coupent la sphère suivant des arcs de cercle $a''m''$, $b''n''$ que l'on déterminera par trois points chacun. Les plans nu , mv coupent aussi la sphère suivant des arcs de cercles $n''u''$, $m''v''$ concentriques à HK. On aura ainsi toutes les données nécessaires pour construire le développement de la douelle et les panneaux de joint, en opérant comme dans les exemples précédents.

Les voussoirs se tailleront aussi d'une manière analogue. Supposons qu'il s'agisse du voussoir V; on le taillera d'abord comme si la porte était droite; c'est-à-dire qu'on taillera un prisme droit ayant pour base $amvunb$, et une longueur suffisante pour contenir la projection horizontale $a'a''v''v'$. Toutefois on ne taillera pas la seconde base, qui est destinée à disparaître. Sur la face cylindrique répondant à l'intrados de la porte on appliquera le panneau de douelle $a_1a_2b_2b_1$ (fig. 10);

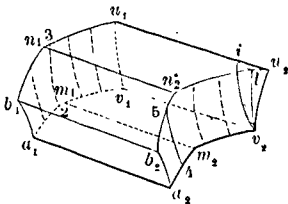


Fig. 10.

sur les faces planes adjacentes en appliquera les panneaux de joint $b_1b_2n_2n_1$, et $a_1a_2m_2m_1$; puis sur les faces planes correspondant à nu et à mv on appliquera les panneaux $n_1n_2u_2u_1$ et $m_1m_2v_2v_1$. Il restera à enlever l'excédant de pierre, en donnant à la face postérieure $a_1m_1v_1u_1n_1b_1$ la forme cylindrique, et à la face antérieure $a_2m_2v_2u_2n_2b_2$ la forme sphérique, ce qu'on obtiendra, pour la face cylindrique, au moyen d'une règle, et, pour la face sphérique, au moyen d'une cerce taillée sur l'arc PQ. Mais, pour diriger le travail de l'ouvrier, il est nécessaire de déterminer à l'avance des points de repère sur lesquels devront être posées soit la règle, soit la cerce. Pour déterminer, par exemple, deux points de repère sur le cylindre, on prendra sur $a'u'$ un point quelconque I, par lequel on élèvera

une perpendiculaire à la ligne de terre; elle rencontrera le contour $amvunb$ en deux points 2 et 3; et il sera facile de reporter ces points sur le contour des panneaux $a_1m_1m_2a_2$ et $n_1u_1u_2n_2$; on obtiendra de la même manière autant de couples de points de repère qu'on voudra. Pour obtenir des points de repère sur la sphère, on mènera par le centre du cercle HK un rayon qui traverse la projection horizontale du voussoir; il coupera, par exemple, son contour aux points 4 et 5; et il sera facile de reporter ces points sur le contour des panneaux $a_1a_2m_2m_1$ et $b_1b_2n_2n_1$; la cerce posée sur ces deux points de repère devra s'appliquer exactement sur la surface pour qu'elle soit sphérique; on se procurera ainsi autant de couples de points de repère qu'on voudra.

Lorsque la porte est très-biaise, les plans menés par les points u , v , etc., perpendiculairement à la ligne de terre coupent la sphère très-obliquement; et, pour la solidité de la construction, il convient de faire disparaître l'angle trop aigu que présenterait le voussoir; pour cela on le coupe par un plan vertical mené par l'axe du cylindre et par le point v'' . Ce plan détermine dans le voussoir une petite face triangulaire qu'il faut obtenir en vraie grandeur pour l'application du trait sur la pierre. Pour cela, on fait tourner le plan sécant autour du rayon passant par le point v'' lequel rayon est sa trace horizontale. Dans ce mouvement, le méridien suivant lequel le plan coupant rencontre la sphère vient se rabattre sur la circonférence HK, prolongée; le point v'' se rabat en v''' , à l'intersection de cette circonférence avec la perpendiculaire au rayon menée par le point v'' ; si donc on prend $v'''I$, égal à uv , et qu'on mène il perpendiculaire à $v'''I$, on aura en $v''il$ le rabattement de la face triangulaire que l'on cherche. La figure 10 montre en v_2il la même face triangulaire dans la position qu'elle occupe à l'égard des autres faces du voussoir.

On a supposé la sphère en maçonnerie; si elle était construite en pierre de taille, les voussoirs de la porte devraient servir en même temps de voussoirs à la voûte sphérique, et leur forme devrait être modifiée (Voy. LUNETTE).

Si la paroi extérieure du mur avait un talus, il faudrait combiner les procédés de la figure 9 avec ceux de la figure 7 (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, planche 37).

Voyez pour les autres détails concernant les portes, les articles BIAIS PASSÉ, ARRIÈRE-VOUS-SURE.

PORTE CONIQUE, voûte conique d'une faible longueur, destinée à traverser un mur rectiligne ou circulaire. Nous prendrons pour premier exemple une porte conique pratiquée dans un mur rectiligne dont une face est en talus. Soient UVU' (fig. 1) les traces de la face verticale du mur, et LIH' les traces de la face en talus, soient S, S' les projections du sommet du cône, et ABCD, le rabattement autour de IL de la courbe intersection de la surface conique avec le talus. On tracera dans ce rabattement l'appareil de la voûte conique; et on cherchera la projection horizontale de la figure, supposée ramenée sur la face en talus. Pour avoir, par exemple la projection horizontale du point B, on mènera par ce point une parallèle à la ligne d

terre; de ce même point on abaissera sur cette même ligne de terre la perpendiculaire B.1; et on ramènera le point 1 sur I, H', en b', par un arc de cercle décrit du point I comme centre; et du

point b' on abaissera une perpendiculaire sur XY; le point b, où elle rencontrera la parallèle à la ligne de terre menée par le point B, sera la projection horizontale correspondante à ce point B. On

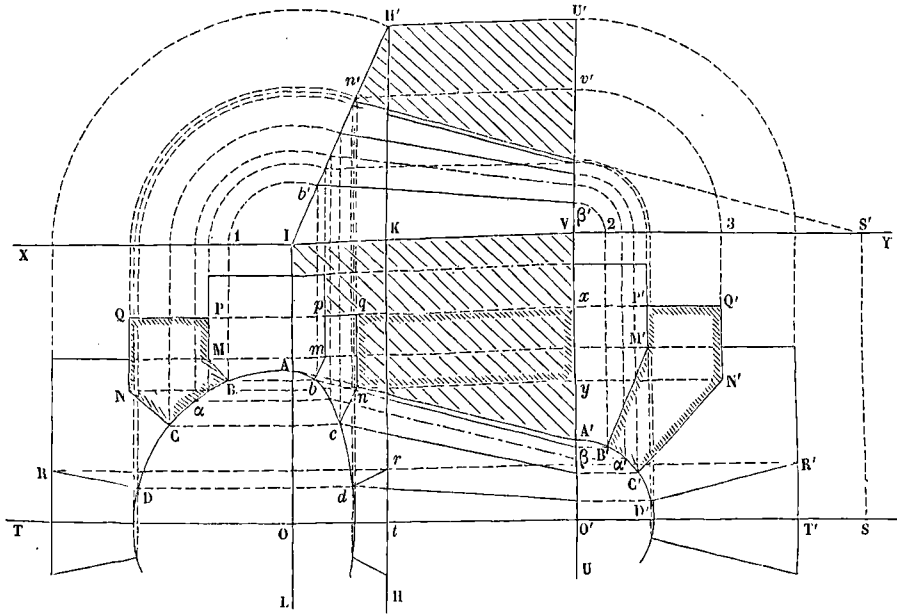


Fig. 1.

opérera de la même manière pour tous les autres points de la figure rabattue. On cherchera ensuite les projections des arêtes de douelle. Pour avoir, par exemple, la projection horizontale de celle qui passe au point B, il suffira de joindre la projection horizontale b au point S, projection horizontale du sommet; et en joignant le point b' au point S' on aura de même la projection verticale de l'arête de douelle considérée. On obtiendra de la même manière les projections de toutes les arêtes de douelle. — Les génératrices du cône sont les seules droites qui, dans l'épure, concourent au sommet S; les intersections des joints BM, CN, etc., par les plans horizontaux tels que NP et NQ, etc., sont des horizontales parallèles à l'axe du cône, et leurs projections sont parallèles à la ligne de terre. Les lignes telles que PQ, parallèles à la ligne de plus grande pente du talus ont aussi pour projections horizontales des parallèles à la ligne de terre.

Cela posé, on construira le rabattement de la face de tête des voussoirs sur la paroi verticale UVU' du mur. Supposons, par exemple, qu'on veuille obtenir le rabattement du point β, β' où la génératrice passant au point B perce la face verticale du mur, on mènera par le point β une parallèle à la ligne de terre; on ramènera le point β' sur XY, en 2, par un arc de cercle décrit du point V, et par le point 2 on élèvera une perpendiculaire à la ligne de terre; le point B' où elle rencontrera la parallèle menée par le point β , sera le rabattement cherché. On obtiendra de même autant de points que l'on voudra du rabattement A'B'C'D', de l'arc de tête. On opérera d'une manière

semblable pour se procurer les autres sommets des panneaux de tête des voussoirs. Pour obtenir, par exemple, le rabattement du point où la parallèle à la ligne de terre menée par le point N perce la face verticale du mur, on prolongera Nn, qui est parallèle à XY; par le point n' projection verticale correspondant à n on mènera n'v' également parallèle à la ligne de terre; on ramènera v' sur XY, en 3, par un arc décrit du point V, et au point 3 on élèvera une perpendiculaire à la ligne de terre; le point N' où elle coupera le prolongement de Nn, sera le rabattement cherché. On obtiendra de la même manière tous les points utiles dans le rabattement considéré; et l'on aura les éléments nécessaires pour appliquer le trait sur la pierre.

Supposons qu'on veuille tailler le voussoir qui a pour panneau de tête la figure B'C'N'Q'P'N'; on préparera un prisme droit sur cette base; sur la face plane correspondante à N'Q' on appliquera le panneau nqxy, pris sur la projection horizontale; par l'arête correspondante à nq on fera passer un plan qui fasse avec nqxy un angle égal à IH'U'; et sur ce plan on appliquera le panneau BCNQP. On achèvera le travail sans difficulté; il faut remarquer en effet qu'on aura dû se procurer des points intermédiaires qui se correspondent sur les arcs BC et B'C'; ces arcs pourront donc servir de directrices pour tailler la douelle conique, en appliquant une règle sur les points intermédiaires qui serviront de repère. Toutes les autres faces sont planes; on les taillera donc aisément, puisque chacune d'elles est déterminée par deux droites. La figure indique les opérations qui donnent deux

points correspondants α et α' sur les arcs BC et B'C. Nous prendrons pour second exemple une porte conique pratiquée dans une tour ronde, ou mur circulaire. Le sommet du cône est à la rencontre

de l'axe de la tour avec le plan horizontal qui sert de plan de naissance à la voûte conique. Soient S, S' (fig. 2) les projections de ce sommet : TU et tu les traces horizontales des faces extérieure et

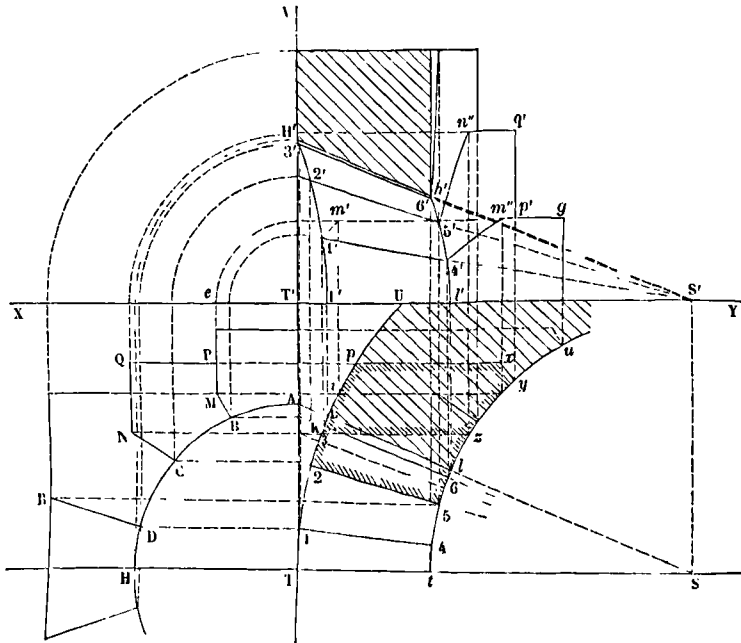


Fig. 2.

intérieure du mur circulaire; $TT'V$ un plan vertical perpendiculaire à l'axe du cône. On prend pour directrice de la surface conique une courbe ABCD, que nous supposons rabattue sur le plan horizontal en tournant autour de TT' ; on fait d'après cette courbe le tracé de l'appareil. Les arêtes de douelle, passant par les points A, B, C, D, sont dirigées vers le sommet du cône; mais les intersections des joints avec les plans horizontaux sont parallèles à l'axe du cône. En abaissant des points B, C, D, des perpendiculaires sur TT' et joignant les pieds de ces perpendiculaires au point S, on obtient les projections horizontales des arêtes de douelle. Pour obtenir leurs projections verticales, on abaisse des mêmes points B, C, D, etc., des perpendiculaires sur la ligne de terre; on ramène les pieds de ces perpendiculaires sur $T'V$ par des arcs de cercles décrits de T comme centre, et l'on joint les nouveaux points obtenus au point S'. On obtient aisément les projections de l'intersection de la surface du cône avec les cylindres extérieur et intérieur. Les projections horizontales ne sont autre chose que les arcs LT et lt , puisque les cylindres ont leurs génératrices verticales; les extrémités extérieures des arêtes de douelle ont pour projections les points 1, 2, 3, où l'arc LT rencontre les projections horizontales de ces arêtes; en abaissant de ces points des perpendiculaires à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre des projections verticales des mêmes arêtes de douelle, on obtiendra en $1', 2', 3'$, des points appartenant à la projection verticale de la courbe projetée sur LT ,

et l'on pourra tracer cette courbe $L'1'2'3'H'$. On obtiendra de la même manière la courbe $V'4'5'6'H'$, projection verticale de l'intersection du cône avec le cylindre intérieur. — Les joints normaux à la douelle coupent les surfaces cylindriques suivant des arcs d'ellipses, qui se projettent horizontalement suivant des arcs d'ellipses que l'on construira par points. Pour obtenir, par exemple, le point qui correspond à M, on abaissera de ce point une perpendiculaire Me sur la ligne de terre; du point T' comme centre on décrira l'arc ef terminé à la rencontre de $T'V$; et par le point f on mènera fg parallèle à la ligne de terre; ce sera la trace verticale d'un plan horizontal passant par le point M. Par ce même point on mènera Mi parallèle à la ligne de terre jusqu'à la rencontre du cercle TU, et du point i on abaissera sur XY une perpendiculaire; le point m' où elle rencontrera fg sera la projection verticale de l'extrémité de l'intersection du joint considéré avec le cylindre extérieur. En faisant les mêmes constructions pour un point intermédiaire entre B et M, on obtiendra un point de la projection demandée $1'm'$, et on pourra la tracer. On tracera de la même manière l'arc $4'm''$ projection verticale de l'intersection du même joint avec le cylindre intérieur; et l'on opérera de même pour les autres joints. Le plan vertical répondant à PQ a pour trace horizontale la droite px , prolongement de QP ; afin d'éviter l'angle aigu que ce plan ferait avec la surface du cylindre intérieur, on ne le prolonge pas jusqu'à ce cylindre; on l'arrête à un

plan vertical mené par l'axe de la tour, et dont la trace horizontale est xy ; on opère de la même manière pour les autres plans verticaux analogues à P Q. Une perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point y fait connaître la projection verticale $p'q'$ de l'intersection du plan vertical xy avec la surface cylindrique extérieure. On trouvera semblablement les verticales qui doivent terminer les projections des faces intérieures de tous les voussoirs.

Pour pouvoir tailler les voussoirs, il est nécessaire de connaître le développement des faces cylindriques extérieure et intérieure. Si l'on veut obtenir, par exemple, le développement de la face extérieure du voussoir correspondant à BCNQPM, on portera sur une droite indéfinie des longueurs 1.2 — 1.3 — 1.4 — 1.5 (fig. 3), respectivement égales au développement des arcs $2k - 2.3 - 2i - 2p$ de la figure 2; par les points 1, 2, 3, 4, 5, on élèvera des perpendiculaires 1.c — 2.n — 3.b — 4.m — 3.p — 5.q, respectivement égales aux hauteurs des points C, N, B, M, P, Q au-dessus du plan horizon-

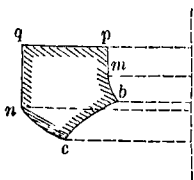


Fig. 3.

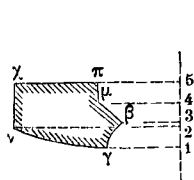


Fig. 4.

tal; on déterminera par un moyen semblable des points intermédiaires s'il est nécessaire, et l'on pourra tracer la figure $bcnqpm$ (fig. 3) qui sera le développement demandé. On construira de la même manière le développement $\beta\gamma\chi\pi\mu$ (fig. 4) de la face cylindrique interne du même voussoir; et l'on procédera d'une manière semblable pour tous les autres. — On pourra alors procéder à l'application du trait sur la pierre. Pour tailler, par exemple, le voussoir BCNQPM, on préparera un prisme droit sur la projection horizontale $2pxy5$ (fig. 2); et sur sa base supérieure on appliquera un panneau taillé sur la figure $3pxyz$; ce panneau est représenté en $v\chi xy n$ sur la figure 5, où les lignes ponctuées re-

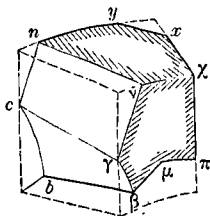


Fig. 5.

présentent les arêtes du prisme de pierre. Sur la face cylindrique concave, on appliquera le panneau $\beta\gamma\chi\pi\mu$ de la figure 4; et sur la face cylindrique convexe le panneau $bcnqpm$ de la figure 3. On aura alors tous les éléments nécessaires pour achever le travail. Les arcs $\beta\gamma$ et bc serviront de directrices pour tailler la douelle conique; en les divisant en

un même nombre de parties égales on se procurera des points de repère pour poser une règle qui devra, dans chaque position, coïncider avec la surface. Toutes les autres faces à tailler sont planes, et déterminées chacune par deux droites; le travail ne présentera donc plus aucune difficulté (Voy. l'art. LUNETTE CONIQUE).

PORTÉE, amplitude du jet d'un projectile, ou distance entre la bouche du canon et le point où la trajectoire du projectile rencontre pour la seconde fois la ligne de mire (Voy. BALISTIQUE, TABLES DE TIR, POINTAGE). La portée de BUT EN BLANC (Voy. ce mot) est celle qui correspond à la ligne de mire naturelle.

PORTIQUE, galerie ouverte sur sa façade par une série d'arcades égales et équidistantes. Ces arcades sont séparées par des *piédroits*, dont la largeur est variable, mais qui sont généralement ornés de colonnes avec ou sans piédestal. C'est sur ces colonnes que porte l'*architrave* formant la partie inférieure de l'*entablement* qui couronne le portique.

L'arc de cercle qui forme à proprement parler l'arcade, est orné de moulures qui sont la répétition de celles de l'architrave, et qui forment ce que l'on appelle l'*archivolte*. L'archivolte repose par chacune de ses extrémités sur l'*imposte*, dernière assise à moulures saillantes qui termine le piédroit correspondant. L'espace triangulaire compris, de chaque côté de l'arcade, entre l'archivolte, l'architrave et le prolongement du piédroit porte le nom de *tympa*n; il est souvent orné de figures allégoriques ou d'ornements de diverses espèces.

Pour tracer le *portique toscan*, sans piédestal, on prend le cinquième de la hauteur totale pour former l'entablement, et le reste pour la colonne. On divise la hauteur de celle-ci en 14 parties égales pour avoir le module. On donne 3 modules de largeur au piédroit, et 6 modules $\frac{1}{2}$ de largeur à l'arcade; sa hauteur totale est le double de sa largeur.

Si les colonnes doivent avoir un piédestal, on divise la hauteur totale du portique en 19 parties; les 3 du haut donnent la hauteur de l'entablement, les 4 du bas donnent la hauteur du piédestal, le reste forme la hauteur de la colonne. On divise ce reste en 14 parties égales pour avoir le module. On donne 4 modules de largeur au piédroit, et 8 modules $\frac{3}{4}$ à l'arcade; sa hauteur est encore le double de sa largeur. Les colonnes qui ornent chaque piédroit s'y engagent des $\frac{3}{8}$ de leur diamètre si elles sont sans piédestal, et du tiers de ce diamètre si elles ont un piédestal. La saillie des impostes ne doit pas dépasser la moitié de l'épaisseur de la colonne. Cette règle est applicable à tous les ordres. L'imposte et l'archivolte ont chacune une épaisseur d'un module.

Pour tracer le *portique dorique* sans piédestal, on prend le cinquième de la hauteur totale pour former l'entablement; le reste est la hauteur de la colonne. On divise cette hauteur en 16 parties égales pour avoir le module. On donne à la largeur du piédroit 3 modules, et à celle de l'arcade 7 modules; sa hauteur est le double de sa largeur.

Si le portique doit avoir des piédestaux, on divise

la hauteur totale en 25 parties et $\frac{1}{3}$; 4 de ces parties donnent la hauteur de l'entablement, $5 \frac{1}{3}$ celle du piédestal, les 16 autres donnent la hauteur de la colonne, l'une de ces parties est le module. On donne à la largeur du piédroit 5 modules, et à celle de l'arcade 10 modules; sa hauteur est encore le double de sa largeur. L'épaisseur de l'imposte et celle de l'archivolte sont chacune d'un module.

Pour tracer le *portique ionique* sans piédestal, on divise la hauteur totale en 22 parties $\frac{1}{2}$, dont 1 forme le module. On donne 4 modules $\frac{1}{2}$ à l'entablement; les 18 autres sont la hauteur de la colonne. On donne au piédroit une largeur de 3 modules et à l'arcade une largeur de 8 modules $\frac{1}{2}$; sa hauteur est toujours double de sa largeur.

Si les colonnes ont un piédestal, on divise la hauteur totale en 19 parties; les 3 du haut donnent la hauteur de l'entablement, les 4 du bas celle du piédestal, les douze autres celle de la colonne. On divise celle-ci en 18 parties, pour avoir le module. On prend pour largeur du piédroit 4 modules, pour celle de l'arcade 11 modules. Sa hauteur est encore double de sa largeur. L'épaisseur de l'imposte et celle de l'archivolte sont toujours de 1 module chacune.

Les proportions générales du *portique corinthien* et du *portique composite* sont les mêmes. S'il est sans piédestal, on divise la hauteur totale en 5 parties; celle du haut donne la hauteur de l'entablement, les 4 autres forment celle de la colonne. On divise celle-ci en 20 parties pour avoir le module. On donne au piédroit une largeur de 3 modules et à l'arcade une largeur de 9 modules. Sa hauteur est double de sa largeur. Cette ordonnance est peu employée à cause de la fragilité des moulures qui forment la base de la colonne reposant sur le sol.

Si les colonnes ont un piédestal, on divise la hauteur totale en 32 parties, dont une sera le module. On en prendra 5 pour la hauteur de l'entablement, et 7 pour la hauteur du piédestal; les 20 autres formeront la hauteur de la colonne. On donnera au piédroit une largeur de 4 modules, et à l'arcade une largeur de 12 modules; on donne à celle-ci une hauteur de 25 modules (un module de plus que le double de la largeur). L'épaisseur de l'imposte et celle de l'archivolte est presque toujours d'un module; cependant on peut donner un peu plus d'importance à l'imposte.

Dans les quatre derniers ordres, les colonnes sont engagées du tiers de leur diamètre dans l'épaisseur du piédroit.

Quand la distance des arcades est plus grande que nous ne l'avons supposée jusqu'ici, on peut orner les piédroits de deux colonnes accouplées (*Voy. COLONNES*). Dans un portique, les colonnes peuvent être remplacées par de simples *pilastres* (*Voy. ce mot*). Les ornements d'un portique sont ceux de l'ordre auquel il appartient (*Voy. ORDRES*). La profondeur d'un portique ne doit pas dépasser la largeur de l'entrecolonnement; à moins qu'il n'y ait plusieurs rangs de colonnes.

POTEAU CORNIER, pièce de charpente verticale

qui, dans les pans de bois, occupe l'angle du bâtiment. Les poteaux corniers s'élèvent ordinairement d'une seule pièce sur toute la hauteur de la maison, ou du moins sur une hauteur de plusieurs étages (*Voy. PANS DE BOIS*).

POTEAU D'HUISSERIE, pièce de charpente verticale qui, dans les pans de bois, forme le piédroit d'une porte ou d'une fenêtre (*Voy. PANS DE BOIS*).

POTEAUX INDICATEURS, poteaux qui, sur les chemins de fer, indiquent les rampes et les paliers, c'est-à-dire les parties inclinées et les parties horizontales de la voie. Chaque poteau porte à son sommet deux planchettes dirigées chacune vers l'un des deux sens dans lesquels la voie est dirigée. Chaque planchette porte deux nombres: le nombre supérieur indique la pente, exprimée en millièmes, et l'inclinaison donnée à la planchette elle-même montre dans quel sens est l'inclinaison; le second nombre exprime en mètres l'étendue de la voie sur laquelle s'étend la pente indiquée par le nombre supérieur. Si, par exemple, la planchette placée à droite du poteau va en s'élevant, et qu'elle porte les deux nombres 0,016 et 218,80 superposés, cela indique que la voie ferrée va en s'élevant vers la droite, que sa pente est de 0,016, et que cette pente s'étend sur une longueur de 218^m,80. Un palier est indiqué par une planchette horizontale, portant aussi deux nombres; le nombre supérieur est alors 0,000 et indique l'horizontalité de la voie; le nombre inférieur exprime en mètres la longueur de cette partie horizontale de la voie, et ainsi de suite. Les indications de ces poteaux préviennent le mécanicien, qui règle sa marche en conséquence.

POTELETS, petites pièces de charpente placées verticalement, dans un pan de bois, pour relier l'appui d'une fenêtre à la sablière de chambrée (*Voy. PANS DE BOIS*).

POUCE D'EAU, ancienne unité adoptée par les fontainiers pour évaluer le produit des pompes et des fontaines. Si l'on imagine que, dans la paroi verticale d'un bassin on ait percé, en mince paroi, un orifice circulaire d'un *pouce* (0^m,02707) de diamètre, dont le centre soit à 7 lignes (0^m,01579) au-dessous du niveau de ce bassin, le volume d'eau écoulé par cet orifice sera ce qu'on appelait le *pouce d'eau*. On voit que le temps n'entre pas dans la définition de cette unité. Cependant il est utile de connaître la valeur du pouce d'eau pour une durée déterminée; en appliquant les formules de l'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES (*voy. ce mot*) par un orifice percé en mince paroi, on trouve qu'en 24 heures le produit du pouce d'eau est de 19^m.^{cu},2. Dire, par conséquent, qu'une pompe ou une fontaine donne un produit équivalent à N pouces d'eau, c'est dire qu'en 24 heures le volume d'eau fourni par cette pompe ou par cette fontaine est de N fois 19^m.^{cu},2. Ainsi 10 pouces d'eau représentent un débit de 192^m.^{cu} en 24 heures.

Le pouce d'eau se subdivisait en 144 lignes de fontainier, dont chacune était équivalente au produit d'un orifice d'une ligne de diamètre, chargé sur son centre d'une hauteur d'eau de 7 lignes, c'est-à-dire percé de manière que son centre fût à 7 lignes au-dessous du niveau du bassin.

On considérait encore d'autres fractions du pouce d'eau: ainsi le *quart de pouce d'eau* représentait le

produit d'un orifice ayant $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre, percé de manière que son centre fût à 7 lignes au-dessous du niveau du bassin.

Le pouce d'eau ancien a été remplacé, lors de l'établissement du système métrique, par une unité de même espèce, à laquelle on a conservé le même nom, mais dont la définition s'exprime en fractions décimales du mètre. M. de Prony, à qui l'on doit le choix de cette unité, suppose que l'on perce dans la paroi verticale d'un bassin un orifice circulaire de 2 centimètres de diamètre, dont le centre soit à 4 centimètres au-dessous du niveau du bassin; mais au lieu de supposer cet orifice percé en mince paroi, on le suppose muni d'un ajutage de 17 millimètres de longueur; le produit de cet orifice est le nouveau pouce d'eau. En appliquant la formule relative à l'écoulement de l'eau par un AJUTAGE CYLINDRIQUE (voy. ce mot), on trouve qu'en 24 heures ce produit est de 20^{m. cub.} Le pouce d'eau nouveau est donc un peu plus grand que le pouce d'eau ancien. Il se subdivise en centièmes.

(Voy. JAUGEAGE DES POMPES.)

POUDRE (PROPRIÉTÉS BALISTIQUES DE LA), propriétés d'où dépendent les effets de la poudre dans les armes à feu. Elles ont été étudiées par divers auteurs, mais plus particulièrement par M. Piobert, qui en a donné la théorie dans le cours professé à l'École d'application de l'artillerie et du génie en 1831 et 1832, et dans un mémoire présenté en 1835 à l'Académie des sciences. Cette théorie a été reproduite dans le second volume du *Traité d'Artillerie* du même auteur. Les propriétés dont il s'agit comprennent : les propriétés physiques de la poudre, les lois de sa combustion et de son inflammation, sa décomposition dans la combustion, la mesure de la force élastique des gaz qu'elle produit, ses effets dans les projectiles creux, enfin ses effets dans l'âme des bouches à feu avant et pendant le mouvement du projectile.

I. On sait que la poudre est un mélange intime de salpêtre, de soufre et de charbon. Le dosage adopté en France est le suivant :

Salpêtre.....	75
Soufre.....	12,5
Charbon.....	12,5
Total	100

C'est la proportion usitée dès le seizième siècle, et dont on s'est toujours peu écarté en France.

Le charbon dont on fait usage est le charbon de bois de bourdaine, obtenu en vases clos à une température de 300 à 400 degrés; le charbon obtenu de cette manière porte le nom de charbon roux, parce que la carbonisation y est moins avancée que dans les charbons ordinaires ou charbons noirs.

Dans la poudre anglaise il n'entre que 10 parties de soufre, mais elle contient 15 parties de charbon. Le dosage varie ainsi chez les différentes puissances; il varie aussi suivant qu'il s'agit de poudre à canon, de poudre à mousquet ou de poudre de chasse. Les diverses proportions sont indiquées avec détail dans le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert, tome II, p. 19.

La dureté de la poudre s'apprécie par la quantité de poussier qu'elle donne quand elle est roulée dans des tonneaux; ce poussier diminue ses propriétés

balistiques. Pour que la poudre ait une dureté convenable, il faut que, roulée ainsi sur un espace de

1000^{m.}, elle ne donne pas plus de $1\frac{1}{2}$ à 2 pour 100 de

poussier. La poudre lissée ne doit pas donner plus de 0,2 p. 100 de poussier.

La grosseur des grains est variable. Sur 10^k de poudre à canon, on trouve :

9^k,0 de grains ayant de 1^{mm},4 à 2^{mm},5 de diamètre, 0,9 — 1^{mm} à 1^{mm},4 —

0,1 de grains plus fins, ou poussier.

Sur 10^k de poudre à mousquet, on trouve de même :

7^k,0 de grains ayant de 1^{mm} à 1^{mm},4 de diamètre,

2,8 — 0^{mm},5 à 1^{mm} —

1,2 de grains plus fins ou poussier.

La grosseur des grains peut encore être exprimée d'une autre manière :

1 gramme de poudre à canon contient en moyenne 350 grains;

1 gramme de poudre à mousquet contient en moyenne 1680 grains;

1 gramme de poudre à mousquet, fine, contient en moyenne 15 160 grains;

1 gramme de poudre de chasse contient en moyenne 36 700 à 56 200 grains suivant la finesse.

La poudre contient peu d'humidité; on n'en trouve pas plus de 0,5 à 0,6 pour 100 dans les magasins secs.

On appelle *densité apparente* ou *densité gravimétrique* de la poudre, le poids de l'unité de volume.

Le poids du décimètre cube a été trouvé :

Pour la poudre à canon à très-gros grains, de 810^{sr} à 836^{sr}, selon le mode de fabrication ;

Pour la poudre à canon ordinaire, de 815^{sr} ;

— à mousquet, de 820^{sr} ;

— de chasse à gros grains, de 825^{sr} à 918^{sr} ;

Pour la poudre de chasse ordinaire, de 830^{sr} à 923^{sr}.

Pour une même poudre, la densité gravimétrique augmente avec la grosseur des grains. Le lissage

augmente la densité gravimétrique de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{18}$ pour

les poudres très-légères, de $\frac{1}{27}$ pour la poudre

de mine, de $\frac{1}{36}$ pour la poudre à canon, de $\frac{1}{60}$ pour

la poudre à mousquet.

La densité des grains de poudre, prise au mercure, à l'aide d'une méthode analogue à celle qui est connue en physique sous le nom de *méthode du flacon*, a été trouvée, en moyenne

de 1,627 pour la poudre à canon ;

— 1,654 — à mousquet ;

— 1,730 à 1,833 pour la poudre de chasse, suivant sa finesse.

Le rapport de la densité des grains à la densité gravimétrique est à peu près de 1,95 pour la poudre de guerre. Mais ce n'est là que la *densité apparente*; car on ne tient pas compte, dans sa détermination, des intervalles laissés entre les matières mélangées. La *densité absolue* des grains de poudre s'obtient par dissolution dans l'eau saturée de salpêtre; on trouve alors

1,940 pour la poudre de guerre, .

1,925 — de chasse.

Le rapport de la densité absolue à la densité gravimétrique diffère peu de 2,35 pour la poudre de guerre. Ces trois densités sont utiles à connaître : la densité gravimétrique donne le volume occupé par un poids déterminé de poudre ; la densité apparente des grains, comparée à la précédente, fait juger de l'espace laissé libre entre eux ; la densité absolue donne une idée du degré de rapprochement des matières mélangées.

II. C'est vers 276° que la poudre de guerre s'enflamme ; la poudre de mine prend feu vers 270°, la poudre de chasse, au contraire, vers 280°. Le pulvérin s'enflamme plus tôt que la poudre. — Pour mesurer la vitesse avec laquelle la combustion se propage dans une masse de poudre, M. Piobert a fait brûler des parallélépipèdes de poudre pressée, appelés *galettes*, dont il enduisait les faces latérales avec du saindoux pour empêcher la combustion de se faire par toutes les faces à la fois ; le feu mis à l'une des faces se propageait alors par couches, d'une base à l'autre, d'une manière très-régulière ; le temps était mesuré à l'aide d'un compteur à pointage de Bréguet. La durée de la combustion totale a toujours été trouvée proportionnelle à la longueur de l'arête latérale du parallélépipède. Ainsi pour des longueurs de

0 ^m ,16	0 ^m ,13	0 ^m ,18
les durées observées ont été		
12 ^s	10 ^s ,2	14 ^s ,1

ce qui confirme la loi énoncée ; et la durée de la combustion a toujours été indépendante de l'étendue de la base. La vitesse moyenne de la propagation déduite de ces expériences est 0^m,0129 ou à très-peu près 13 millimètres par seconde. En opérant avec des galettes de densités différentes, la vitesse a été trouvée en raison inverse de la densité, ce qui revient à dire que pour une même base le poids de matière brûlée est proportionnel au temps. Ce poids est de 1^{sr},947 à 1^{sr},970 par centimètre carré de base et par seconde pour les poudres séchées au soleil, et de 1^{sr},870 pour les poudres séchées à l'étuve. Il varie en sens inverse du temps qui a été employé à la trituration ; si cette trituration, au lieu de durer 24 heures, comme le supposent les nombres ci-dessus, n'a duré que 4 heures, on trouve de 2^{sr},04 à 2^{sr},16 pour le poids de poudre brûlé par centimètre carré de surface de base et par seconde. La combustion est encore plus rapide pour les poudres qui ont été mises *en roche* par l'humidité, et séchées ensuite ; le poids dont il est question peut s'élever alors de 4^{sr},96 à 5^{sr},25.

III. Au moyen de ces données expérimentales, M. Piobert a pu déterminer les lois de la combustion d'un grain de poudre supposé sphérique.

Soit R le rayon d'un grain de poudre (ou de la sphère circonscrite), V son volume, T la durée totale de la combustion, ρ le rayon du noyau au bout du temps t , compté à partir de l'origine de l'inflammation, v le volume de ce noyau. La propagation étant uniforme dans le sens du rayon, on aura

$$\rho : R = T - t : T, \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho}{R} = \left(1 - \frac{t}{T}\right) = \varphi,$$

en désignant par φ la fonction du temps $1 - \frac{t}{T}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{v}{V} = \frac{\rho^3}{R^3} = \varphi^3, \quad \text{d'où} \quad v = V\varphi^3.$$

Le volume brûlé sera donc

$$q = V - v = V(1 - \varphi^3). \quad [1]$$

Si N désigne le nombre de grains contenus dans un gramme, et Q le volume brûlé au bout du temps t dans la combustion de ce poids de poudre, on aura

$$Q = NV(1 - \varphi^3). \quad [2]$$

Pour se servir des formules [1] et [2], on déterminera directement N ; on aura

$$1^{\text{sr}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \delta,$$

en appelant δ la densité d'un grain ; de là on tirera R. On a d'ailleurs $R = uT$, en appelant u la vitesse de propagation de la combustion ; de là on tirera T. Dès lors le second membre des équations [1] et [2] ne contiendra plus que des quantités connues et la variable t . — Le volume du noyau non brûlé est v , s'il s'agit d'un seul grain, et Nv s'il s'agit d'un gramme de poudre.

IV. Soit d la densité moyenne des gaz développés au bout du temps t par la combustion d'un gramme de poudre, dans une capacité déterminée U, on aura

$$d = \frac{Q\delta}{U - Nv} = \frac{NV\delta(1 - \varphi^3)}{U - NV\varphi^3}. \quad [3]$$

Soit D la densité que devrait avoir la poudre pour que le même poids occupe la capacité U, on aura

$$D = \frac{NV\delta}{U}, \quad \text{d'où} \quad NV = U \frac{D}{\delta}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation [3], on obtient

$$d = \frac{D \cdot (1 - \varphi^3)}{1 - \frac{D}{\delta} \varphi^3}. \quad [4]$$

En prenant t pour abscisse et d pour ordonnée, on trouve que cette relation peut être représentée par la courbe OMA (fig. 1), OT représentant la durée

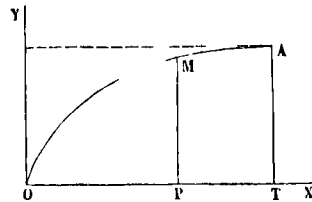


Fig. 1.

totale de la combustion et TA la densité auxiliaire D. La densité d varie très-rapidement dans les premiers instants ; mais à mesure que t approche de T, les variations deviennent de moins en moins rapides ; en sorte que d est sensiblement égal à D longtemps avant que t atteigne la valeur T.

V. Après avoir déterminé les lois de la combustion des grains, M. Piobert a recherché les lois de la propagation de la combustion d'un grain à un autre dans une file de grains placés en ligne droite et équidistants entre eux ; c'est ce qu'il appelle une *trainée de grains*. Ici il est important de distinguer l'inflammation de la combustion proprement dite : l'inflammation est la propagation de l'ignition à la surface du grain, la combustion est la propagation de l'ignition de couche en couche à travers la masse du grain même. Lorsqu'on met le feu à une trainée

de grains, la déflagration produit à l'oreille une série de battements périodiques qu'il est facile de saisir et de compter, lorsque les grains ne sont pas trop rapprochés les uns des autres. Voici l'explication que M. Piobert donne de ce phénomène: « Quand les grains sont suffisamment rapprochés les uns des autres, le troisième de la file est atteint par la flamme du premier, avant que les gaz du second aient pu lui parvenir; mais comme ces gaz arrivés en second lieu se sont développés très-peu de temps après l'arrivée des premiers, dont la course se ralentit à mesure qu'ils s'étendent davantage, ils s'ajoutent à ceux-ci: leur densité augmente ainsi que leur tension; par suite, la rapidité de l'expansion de la flamme s'accroît légèrement du deuxième au troisième grain. Les mêmes effets se reproduisent pour l'inflammation des quatrième et cinquième grains, et pour celle des grains suivants. La période régulière de mouvement ne se renouvelle alors que de deux en deux grains, et présente une mesure composée de deux temps, dont le premier est un peu plus long que le second.... Lorsqu'on rapproche davantage les grains les uns des autres, trois, quatre, cinq, ou un plus grand nombre de grains, sont enflammés dans le trajet des gaz développés par la combustion de ceux qui précèdent immédiatement; la vitesse de transmission du feu augmente de plus en plus... La durée de chaque période régulière augmente avec le nombre des grains qui sont successivement enflammés dans le parcours d'un même jet de flamme. » Les battements peuvent encore être perçus et comptés lorsqu'il s'en produit de 7 à 8 par seconde. C'est sur l'observation de ce nombre de pulsations que M. Piobert a fondé le moyen d'obtenir la durée de l'inflammation d'un grain. Soit n le nombre des grains enflammés par le même flux de gaz, t le temps employé par la flamme pour aller d'un grain au suivant, et θ la durée de l'inflammation d'un grain. Le grain de rang $n+1$ sera atteint au bout du temps nt , et la flamme partira de ce grain au bout du temps $nt + \theta$, qui sera par conséquent la durée d'une pulsation. Soit N le nombre des pulsations dans le temps T , on aura

$$T = N(nt + \theta).$$

Pour une autre trainée, on aura de même

$$T' = N'(n't' + \theta).$$

Si les deux trainées sont de même longueur, on aura $Nnt = N'n't' =$ cette longueur. Il en résulte qu'en retranchant T' de T , on trouvera, après réduction,

$$T - T' = (N - N')\theta, \text{ d'où } \theta = \frac{T - T'}{N - N'}. \quad [5]$$

Ainsi, pour obtenir la durée de l'inflammation d'un grain, il suffira d'observer la durée totale de la transmission du feu dans les deux trainées et de compter le nombre des pulsations dans chacune. On a reconnu ainsi que la durée θ de l'inflammation d'un grain ne dépasse pas $\frac{1}{40}$ de seconde, sur une

dalle en pierre, et $\frac{1}{25}$ de seconde, dans un demi-cylindre creux en fer. Cette valeur étant connue, on peut en déduire celle de t ou de t' ; on trouve

$$t = \frac{T - N\theta}{Nn}. \quad [6]$$

Dans cette formule, le produit Nn exprime le

nombre total des grains composant la trainée; il peut donc être regardé comme connu. La vitesse u de la propagation de la flamme s'obtient en divisant par T la longueur L de la trainée. Si l'on fait l'expérience dans un demi-cylindre creux de $0^m,02$ de diamètre, on trouve que pour des grains de 4,3 à 20 au gramme, n varie de 1 à 24 selon l'écartement; pour des grains de 35 à 240 au gramme, n varie de 2 à 24 ou 25; enfin pour des grains de 1890 au gramme, n est égal à 30. — Quant à la vitesse u , on trouve qu'elle varie de $0^m,29$ à $1^m,30$, selon l'écartement, pour des grains de 4,3 au gramme; de $0^m,94$ à $1^m,27$ pour des grains de 8,3 au gramme; de $0^m,85$ à $1^m,18$ pour des grains de 20 au gramme; de $0^m,83$ à $1^m,17$ pour des grains de 35 au gramme; de $0^m,80$ à $1^m,15$ pour des grains de 65 au gramme; on a $u = 1^m,18$ pour des grains de 240 au gramme, $u = 1^m,20$ pour des grains de 790 au gramme, enfin, $1^m,19$ pour des grains de 1890 au gramme.

VI. La vitesse d'expansion des gaz enflammés produits par la combustion des grains de poudre isolés varie suivant une loi qui peut être déduite des notions précédemment établies. Soit u cette vitesse, et α le rayon de la sphère de gaz considérée au bout du temps t . Le poids des gaz produits au bout de ce temps est

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (1 - \varphi^3) \delta,$$

en appelant δ la densité d'un grain. Le volume occupé par ces mêmes gaz est

$$\frac{4}{3} \pi (x^3 - R^3 \varphi^3);$$

en nommant d leur densité, on a donc

$$d = \frac{R^3 (1 - \varphi^3) \delta}{x^3 - R^3 \varphi^3}.$$

On peut admettre que, pour une couche moyenne du gaz enflammé, la pression p est proportionnelle à la densité, et l'on peut poser en conséquence $p = \alpha d$. On admet en même temps que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse u ; on a alors pour l'équation différentielle du mouvement d'une couche moyenne :

$$d \frac{du}{dt} = \alpha d - \beta u,$$

β étant un coefficient numérique. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{du}{dt} = \alpha - \beta \frac{u}{d}. \quad [7]$$

On remarque que lorsque t est très-petit, x diffère très-peu de R , et que lorsque t prend une valeur comparable à T , on peut négliger le cube de $1 - \frac{t}{T}$, c'est-à-dire φ^3 ; il est donc permis de

prendre pour d le valeur $\frac{\delta R^3}{x^3}$, ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = \alpha - \beta \frac{ux^3}{\delta R^3}.$$

On en tire, en observant qu'on a $dx = u dt$,

$$du = \alpha dt - \frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{x^3 dx}{R^3},$$

et, en intégrant,

$$u = \alpha t - \frac{\beta}{4\delta} \cdot \frac{x^4 - R^4}{R^3}.$$

En prenant le millimètre pour unité, on trouve

que α et β ont les valeurs $\alpha = 36000$, $\beta = 0,183$; et en prenant $\delta = 1,525$, il vient

$$u = 36000 t - 0,03 \frac{x^4 - R^4}{R^3} \quad [8]$$

Pour faire usage de cette formule, on donne à x des valeurs très-rapprochées, telles que R , $2R$, $3R$, etc.; et l'on admet que, dans les intervalles, la vitesse u varie de quantités proportionnelles au temps. En désignant par u_1, u_2, u_3 , etc.; t_1, t_2, t_3 , etc.; les valeurs successives de u et de t , on obtient ainsi la série d'équations suivantes, dans lesquelles nous remettons α au lieu de 36000 pour abrégier l'écriture :

$$x = R, \quad u_1 = 0, \quad t_1 = 0.$$

$$x = 2R \dots u_2 - u_1 = \frac{hR}{\frac{1}{2}(u_2 + u_1)} - 0,03 R (2^4 - 1);$$

$$\dots t_2 - t_1 = \frac{R}{\frac{1}{2}(u_2 + u_1)},$$

$$x = 3R \dots u_3 - u_2 = \frac{hR}{\frac{1}{2}(u_3 + u_2)} - 0,03 R (3^4 - 2^4)$$

$$\dots t_3 - t_2 = \frac{R}{\frac{1}{2}(u_3 + u_2)}$$

$$x = 4R \dots u_4 - u_3 = \frac{hR}{\frac{1}{2}(u_4 + u_3)} - 0,03 R (4^4 - 3^4)$$

$$\dots t_4 - t_3 = \frac{R}{\frac{1}{2}(u_4 + u_3)},$$

et ainsi de suite. C'est à l'aide de ces formules que M. Piobert a calculé les valeurs correspondantes de u et de t relatives à diverses expériences, qu'il a consignées dans le tableau, page 209 du tome II de son *Traité d'Artillerie*. Nous en extrayons les résultats de l'expérience relative à des grains de $1^m \frac{2}{3}$ de rayon :

Valeurs de x .	Valeurs de u .	Valeurs de t .
2 R	0,345	0,0092
3 R	0,486	0,0136
4 R	0,589	0,0167
5 R	0,666	0,0194
6 R	0,719	0,0218
7 R	0,747	0,0240
8 R	0,743	0,0263
9 R	0,701	0,0286
10 R	0,617	0,0311
11 R	0,494	0,0342
12 R	0,335	0,0381
13 R	0,174	0,0447
14 R	0,104	0,0566
15 R	0,092	0,0733

On voit par cet exemple que la vitesse atteint rapidement une valeur maximum et décroît ensuite plus rapidement encore. Le maximum de u répond à des valeurs de x comprises entre 7R et 8R (8R et 9R pour des grains plus petits). Les grains de poudre peuvent être placés à des distances telles que la vitesse d'expansion de la flamme produite par chaque grain arrive à son maximum avant que les gaz provenant de l'inflammation du grain suivant puissent s'ajouter à ceux du premier et accélérer

leur vitesse; dans ce cas la vitesse de propagation du feu dans la traînée, se rapproche beaucoup de la vitesse d'expansion des gaz aux environs de son maximum. Les valeurs de α et de β ont été déterminées d'après cette condition.

VII. Pour étudier l'inflammation des traînées de poudre, on place ces traînées dans des demi-cylindres creux en fer. On observe que la vitesse de propagation qui ne dépasse pas 1^m pour les traînées de grains, varie de $1^m,50$ à 3^m dans les traînées de poudre. L'expérience conduit en outre aux résultats suivants : 1° la vitesse de propagation est à peu près en raison inverse des racines quatrièmes des diamètres des grains; 2° la vitesse est moindre dans les poudres à charbon roux que dans les poudres à charbon noir, dans les poudres lissées que dans les poudres non lissées, dans les poudres denses que dans les poudres légères; 3° elle varie peu avec le dosage et le mode de fabrication; 4° elle augmente quand la traînée est renfermée, et d'autant plus que le tube est plus résistant; 5° elle croît plus rapidement encore lorsqu'il existe dans toute la longueur du tube un passage libre pour la flamme. Dans les armes à feu, la vitesse de propagation de l'inflammation atteint de $5^m, 7$ à $7^m, 1$ pour les poudres à mousquet, et au moins 8^m pour la poudre à canon. La propagation a lieu dans tous les sens également à partir du point où l'on a mis le feu. — La vitesse de propagation de l'inflammation est beaucoup moindre quand le tube est entièrement fermé par un bout.

Enfin la poudre dans laquelle les interstices des grains sont remplis avec du poussier, et qui a été tassée ensuite, est la plus défavorable à la propagation de l'inflammation; cette propagation ne s'y opère qu'avec lenteur; et l'on a profité de cette remarque pour diminuer les dangers de la conservation de grandes masses de poudre en magasin. Il suffit pour rendre à la poudre ses propriétés balistiques, de faire passer le mélange dans un sous-égaliseur qui sépare entièrement la poudre du poussier.

VIII. Les principes précédemment établis permettent d'étudier ce qui se passe dans les armes à feu. Lorsqu'il s'agit de charges très-faibles et dont les grains offrent des interstices assez grands pour permettre à la flamme de se répandre facilement dans toute la masse, le temps de l'inflammation proprement dite peut être négligé vis-à-vis du temps employé à la combustion. Ainsi un grain de poudre met en moyenne $0^s,067$ à brûler, tandis que le feu se propage dans toute l'étendue d'une charge de 4 centimètres de long dans un temps qui peut être évalué à $0^s,004$.

Lorsque les dimensions de la charge ne sont pas très-faibles et quand les grains de poudre sont petits, il est nécessaire de tenir compte du temps employé à la transmission du feu aux parties les plus éloignées du point où a commencé l'ignition; et l'on ne peut plus appliquer les formules [2] et [4] relatives à la combustion des grains. Mais si l'on suppose d'abord que la charge ait une section constante et que tous les grains situés dans une même section aient le même diamètre, la combustion de chacun d'eux passera par les mêmes phases et durera le même temps; on pourra donc appliquer à chaque section les formules obtenues pour les

ains isolés, sauf à tenir compte de la différence de temps entre les origines des inflammations des sections successives. On y parvient aisément par des considérations géométriques.

Soit $AB=L$ (fig. 2) la longueur de la charge;

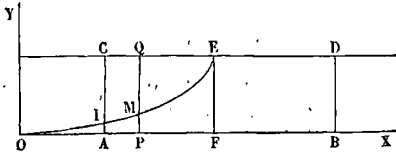


Fig. 2.

$OF = a$ l'espace qui serait parcouru par la flamme dans le temps T de la combustion d'un grain; $AC = h$ l'étendue constante des sections. Si l'on construit la courbe OME ayant pour équation

$$y = h \left(\frac{x}{a} \right)^3,$$

le volume Q de poudre brûlée dans le temps t_1 , au bout duquel la flamme mise en AC est arrivée en EF , sera représenté par la surface $CIME$. En effet, on a

$$MP = h \left(\frac{OP}{OF} \right)^3 = h \left[1 - \frac{OF - OP}{OF} \right]^3 = h \left(1 - \frac{PF}{OF} \right)^3$$

et $MQ = h - MP = h \left[1 - \left(1 - \frac{PF}{OF} \right)^3 \right]$.

Si l'on compare cette équation avec l'équation [2] établie plus haut, on voit que h représentant le volume des grains contenus dans une section, et OF pouvant représenter le temps T , MQ représentera le volume de poudre brûlé dans une section, si PF exprime le temps t , compté à partir de l'inflammation de cette section. Si donc on fait varier t de 0 à t_1 , c'est-à-dire PF de 0 à AF , l'ordonnée MQ décrira l'aire $CIME$, et cette aire représentera le volume total de poudre brûlée dans le temps t_1 .

Or on a $CIME = AFEC - IAFE$,
 $AFEC = AC \cdot AF = h \cdot ut_1$,

en appelant u la vitesse de propagation de la flamme dans l'intérieur de la charge; d'ailleurs

$$IAFE = OFE - OIA;$$

une intégration facile montre que l'aire de la courbe OM est le quart du rectangle construit sur les coordonnées du point extrême; on a donc

$$OFE = \frac{1}{4} \cdot OF \cdot EF = \frac{1}{4} huT$$

et

$$OIA = \frac{1}{4} AI \cdot OA = \frac{1}{4} AI \cdot u(T - t_1),$$

ou

$$OIA = \frac{1}{4} u(T - t_1) \cdot h \left(\frac{OA}{a} \right)^3 = \frac{1}{4} uhT \left(1 - \frac{t_1}{T} \right)^4;$$

par conséquent

$$Q = uh \left[t_1 - \frac{t_1}{4} T + \left(1 - \frac{t_1}{T} \right)^4 \right]. \quad [a]$$

Cette formule est applicable jusqu'à $t_1 = T$. A partir de cet instant le dernier terme disparaît, et il reste

$$Q = uh \left(t_1 - \frac{1}{4} T \right). \quad [b]$$

Lorsque l'inflammation atteint BD , c'est-à-dire au

bout du temps $t = \frac{L}{u}$, la formule change. Le point E (fig. 3) étant alors en avant de D , le volume Q est représenté par l'aire

$$ACDIO = ABDC - IOB = utL - IOB.$$

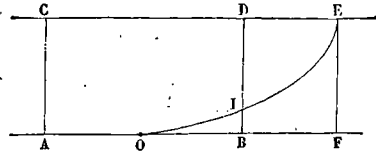


Fig. 3.

Or on a

$$AF + OB = AB + OF,$$

d'où

$$OB = AB + OF - AF = L + uT - ut$$

ou

$$OB = L + u(T - t) = uT \left(1 - \frac{t - \frac{L}{u}}{T} \right);$$

d'ailleurs

$$IB = h \left(\frac{OB}{a} \right)^3 = h \left(1 - \frac{t - \frac{L}{u}}{T} \right)^3;$$

donc

$$IOB = \frac{1}{4} OB \cdot IB = \frac{1}{4} uTh \left[1 - \frac{t - \frac{L}{u}}{T} \right]^4;$$

et par conséquent

$$Q = h \left[L - uT \left(1 - \frac{t - \frac{L}{u}}{T} \right)^4 \right]. \quad [c]$$

Il peut arriver que AB soit moindre que OF ; si l'on suppose, par exemple, que AB est compris dans OF , on a (fig. 4)

$$Q = ICDH = ABDC - IABH = utL - IABH.$$

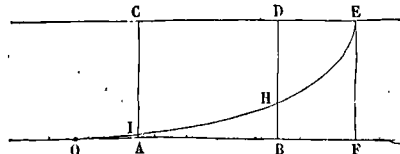


Fig. 4.

Mais

$$IABH = \frac{1}{4} OB \cdot BH - \frac{1}{4} OA \cdot AI;$$

donc, en remarquant que

$$OA = u(T - t)$$

et que

$$IA = h \left(\frac{OA}{a} \right)^3 = h \left(\frac{OA}{uT} \right)^3 = h \left(1 - \frac{t}{T} \right)^3;$$

on trouvera

$$Q = h \cdot \left\{ L + \frac{1}{4} uT \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right)^3 - \left(1 - \frac{t - \frac{L}{u}}{T} \right)^4 \right] \right\} \quad [d]$$

IX. Connaissant le volume Q de poudre brûlée, on en déduit le volume Q' occupé par les gaz, en multipliant par $\frac{D}{\delta}$ les termes qui représentent le volume de poudre non brûlée (ces termes sont ceux

où T figure en multiplicateur). De la valeur [a] par exemple, on déduirait

$$Q' = uh \left[t_1 + \frac{1}{4} T \frac{D}{\delta} \left\{ \left(1 - \frac{t_1}{T} \right)^4 - 1 \right\} \right]; [a']$$

de la valeur [b] on déduirait de même

$$Q' = uh \left(t_1 - \frac{1}{4} T \frac{D}{\delta} \right); [b']$$

et ainsi des autres.

Il est facile alors d'obtenir la densité des gaz développés; on a en appelant d cette densité, rapportée à l'eau,

$$d = D \cdot \frac{Q}{Q'},$$

formule analogue à la formule [4] du paragraphe IV et dans laquelle il n'y aura qu'à mettre pour Q et Q' les valeurs qui correspondent aux diverses phases de l'inflammation de la charge.

Si la charge ne remplit pas complètement la capacité qui la renferme, on tient compte du vide qu'elle laisse, en augmentant fictivement la longueur de la charge, de manière à former un volume équivalent. Si C est la capacité vide, et A la section de la charge, on augmente sa longueur L ou ut_1 de la quantité $\frac{C}{A}$; c'est-à-dire que dans la formule [c] on remplace le premier terme L de la parenthèse par $L + \frac{C}{A}$, et que dans les formules [a], [b], [d] on remplace le premier terme t_1 de la parenthèse par $t_1 + \frac{S}{Au}$. On a égard de cette manière à l'abaissement de densité provenant du vide dont il est question.

X. Généralement, soit τ le temps qui s'écoule depuis le moment où le feu est mis en un point déterminé de la charge jusqu'à celui où il atteint une couche placée à la distance x de ce point, et dont nous représenterons l'aire par S. La vitesse u d'expansion des gaz arrivant promptement à l'uniformité à cause des résistances qu'elle éprouve de la part de l'air et par son passage à travers les interstices des grains, la couche de poudre qui s'enflammera à l'instant t sera située à une distance $x = ut$ de l'origine de l'inflammation, et la couche dont l'inflammation cessera sera située à la distance $u(t - T)$. Soit S l'aire de la couche considérée, dx son épaisseur; son volume sera Sdx , et le volume de gaz qu'elle aura fourni au bout du temps t sera, d'après l'équation [2] du paragraphe III,

$$S \left[1 - \left(1 - \frac{t - \tau}{T} \right)^4 \right] dx,$$

attendu que sa combustion a commencé, non pas à l'instant zéro, mais à l'instant représenté par τ . Cette masse gazeuse occupant tout le volume considéré, ce qui n'avait pas lieu pour les grains de poudre, à cause des interstices qu'ils laissent entre eux, sa densité n'est pas δ mais D, cette lettre ayant la signification indiquée au paragraphe IV; son poids sera donc exprimé par

$$SD \left[1 - \left(1 - \frac{t - \tau}{T} \right)^4 \right] dx.$$

Dans cette expression τ peut être remplacé par sa valeur $\frac{x}{u}$; l'intégrale de cette expression sera le

poids P des gaz développés par la combustion; et l'on aura

$$P = D \int S dx - D \int S \left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right)^4 dx. [10]$$

Pour le premier terme, l'intégrale doit être prise à partir de 0; pour le second, l'intégrale doit être prise à partir de 0 tant que t est moindre que T, et depuis $u(t - T)$ à partir de $t = T$; pour les deux termes, les intégrales doivent avoir pour limite supérieure ut , ou L si ut surpasse L.

L'espace Q occupé par les gaz développés se compose de la capacité E de l'espace libre s'il y en a un, et du volume de la charge, diminués du volume réellement occupé par les noyaux des grains non encore consumés. On a donc

$$Q = E + \int S dx - \frac{D}{\delta} \int S \left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right)^4 dx, [11]$$

expressions dans laquelle les intégrales doivent être prises entre les mêmes limites que dans P.

Par suite la densité d des gaz sera exprimée par

$$d = \frac{P}{Q}. [12]$$

Si l'on effectue les calculs pour le cas d'une charge cylindrique, on retombe sur les formules établies au paragraphe IX par des considérations géométriques. On trouvera dans le *Traité d'Artillerie* de M. Plobert, tome II, p. 272 et suivantes, les formules qui se rapportent aux charges cylindriques enflammées par toute leur surface latérale, aux charges pyramidales, coniques, tronconiques, sphériques. Ces formules, d'ailleurs faciles à obtenir, sont trop compliquées pour trouver place ici.

XI. Nous n'insisterons pas non plus sur la composition des gaz produits par la combustion de la poudre; et nous nous contenterons de donner les résultats de l'analyse faite des produits de cette combustion par MM. Bunsen et Schischkoff. D'après ces chimistes, 100 grammes de poudre brûlée donnent :

PRODUITS SOLIDES.

	gr
Sulfate de potasse.....	42,27
Carbonate de potasse.....	12,64
Hyposulfite de potasse.....	3,27
Sulfure de potassium.....	2,13
Sulfocyanure de potassium.....	0,30
Nitrate de potasse.....	3,72
Charbon.....	0,73
Soufre.....	0,14
Carbonate d'ammoniaque.....	2,86
Total.....	68,06

PRODUITS GAZEUX.

	gr	lit
Acide carbonique.....	20,12	soit 10,171
Azote.....	9,98	— 7,940
Oxyde de carbone.....	0,94	— 0,749
Hydrogène.....	0,02	— 0,234
Acide sulfurique.....	0,18	— 0,116
Oxygène.....	0,14	— 0,100
Total.....	31,38	19,310

MM. Bunsen et Schischkoff ont évalué à 3340 degrés la température des gaz produits dans une capacité fermée; à cette température les gaz auraient

un volume égal à 2463 fois le volume apparent de la poudre, ou à 4374 fois le volume des grains.

XII. Ce qu'on vient de dire pourrait donner une idée approximative de la tension des gaz produits par la combustion de la poudre. A la vérité, ces gaz, en se répandant dans une capacité plus grande, perdent par la dilatation une partie de leur chaleur et de leur tension; mais d'un autre côté, au volume des gaz permanents qui entrent dans les produits de la combustion, il faut ajouter les vapeurs qui ne se condensent que lorsque la température s'est abaissée. Il existe ainsi deux périodes distinctes dans la durée du phénomène de l'explosion : l'une dans laquelle tous les produits sont à l'état gazeux, l'autre dans laquelle les vapeurs condensées forment ce qu'on appelle la *crasse* des armes à feu. L'évaluation de la tension des matières gazeuses produites par la combustion de la poudre offre ainsi de très-grandes difficultés. Rumford est le seul expérimentateur qui ait employé des moyens convenables pour y parvenir. L'appareil dont il s'est servi se composait d'un petit canon en fer forgé, établi verticalement, la bouche en haut, sur un support en métal de canon, reposant lui-même sur un bloc de pierre très-dure solidement installé sur un lit de maçonnerie. Ce petit canon, à parois très-épaisses, n'avait que 6^{mm},35 ($\frac{1}{4}$ de pouce) de diamètre intérieur; il était fermé par un obturateur en acier trempé, de forme hémisphérique, sur lequel reposait un poids destiné à s'opposer à la sortie des fluides élastiques développés par la combustion de la poudre. Ce poids n'était autre qu'une pièce de canon de fort calibre, placée verticalement, et retenue latéralement par des montants en bois le long desquels il pouvait glisser librement. Le petit canon de fer se terminait inférieurement par un petit canal vertical formant lumière, quoique sans orifice; on faisait pénétrer l'extrémité inférieure de ce canal dans une cavité pratiquée dans un boulet, qui, chauffé au rouge, élevait la température de la poudre contenue dans le petit canal et déterminait l'explosion. (Voy. pour plus de détails, le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert, tome II, page 321 et suiv.; et le *Mémoire de Rumford*, présenté le 4 mai 1797 à la Société royale de Londres.) On faisait varier la charge de poudre et le poids placé sur l'obturateur de manière que dans l'explosion ce poids ne fût que légèrement soulevé; on pouvait admettre alors que ce poids était égal à la force élastique totale des gaz produits; et en le divisant par l'aire de la section transversale du petit canon, on avait la force élastique par unité de surface. Connaissant d'ailleurs le poids de la charge et la capacité du petit canon, il était facile d'en déduire la densité des gaz développés dans cette capacité. Rumford a représenté la loi qui lie la densité de ces gaz à leur force élastique par l'équation

$$y = 1,841 \cdot x^{1+0,0004 \cdot x}, \quad [13]$$

dans laquelle y représente la force élastique exprimée en atmosphères et x la charge exprimée en millièmes de la capacité du canon. Si l'on prend pour variable la densité d des gaz produits par la combustion de la poudre, et qu'on exprime la tension en kilogrammes par centimètre carré, on

peut remplacer la formule de Rumford par celle-ci : $y = 1^{\circ},9408 (928,5 \cdot d)^{1+0,0016 \cdot d}$. [14]

Dans les expériences de Rumford, les tensions observées ont été jusqu'à 10977 atmosphères. Dans le tir ordinaire, la densité des gaz développés ne dépasse pas 0,45, ce qui donne $y = 2223^{\circ},4$ et répond à 2151,5 atmosphères.

On a proposé d'autres formules empiriques pour représenter la loi de la tension des gaz développés en fonction de leur densité. Telle est la formule $y = 110^{\circ} + (10000^{\circ} \cdot d^2)$, [15]

qui donne des valeurs assez exactes depuis $d = 0,08$ jusqu'à $d = 0,45$.

L'évaluation de la *force absolue* de la poudre présente de très-grandes difficultés; il faut entendre par ces mots la tension des gaz produits dans une capacité entièrement remplie de poudre, ce qui revient à supposer $x = 1000$ dans la formule [13], ou à prendre pour d la densité gravimétrique si l'on fait usage de la formule [14]. Dans une expérience où l'explosion a amené la rupture du petit canon servant aux expériences, Rumford a évalué la tension à 54752 atmosphères; mais cette évaluation est évidemment exagérée, parce que Rumford a calculé la tension d'après la ténacité du fer à froid, tandis que cette ténacité doit être certainement beaucoup moindre à la température de l'explosion. La formule [13] donnerait 30759 atmosphères; M. Piobert, en discutant les circonstances de la rupture du canon de Rumford, a été amené à réduire à 12000 atmosphères la force absolue de la poudre. Mais il y a encore beaucoup d'incertitude sur ce point.

Voyez pour les effets de la poudre dans les bombes, obus, grenades, etc., l'article PROJECTILES CREUX; et pour ses effets sur le projectile pendant son mouvement dans l'âme de la pièce, l'article BALISTIQUE INTÉRIEURE.

POULIE, machine simple, et organe de transformation de mouvement servant à changer un mouvement rectiligne continu en un autre mouvement de même espèce, mais de direction différente. Une poulie est une petite roue, en bois ou en métal, dont la circonférence est creusée suivant un profil circulaire formant ce qu'on appelle *la gorge*. L'axe de la poulie, lequel est ordinairement en métal,

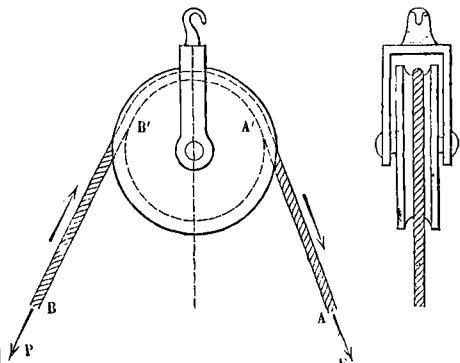


Fig. 1.

repose par ses extrémités, appelées *tourillons*, sur des *coussinets* fixes, ou sur les branches d'une *chape* en fer, portant un crochet à sa partie supérieure, comme l'indique la figure 1. Une corde ou quel-

quelquefois une chaîne, est enroulée sur la gorge de la poulie. L'axe, au lieu de faire corps avec la poulie, peut être adapté à la chape; dans ce cas la poulie est percée d'un trou circulaire appelé *œil*, lequel est garni en métal lorsque la poulie est en bois.

I. La poulie simple peut être employée de deux manières. Si l'axe repose sur des supports fixes, ou si la chape est accrochée à un point invariable, on a ce qu'on appelle une *poulie fixe*. La corde ou la chaîne enroulée sur la gorge est alors sollicitée à l'une de ses extrémités A par une force mouvante F, et à l'autre extrémité B par une force résistante P. La corde étant supposée inextensible, les points d'application de ces deux forces se déplacent toujours de quantités égales, en sorte que le mouvement rectiligne suivant AA se trouve transformé en un autre mouvement rectiligne suivant BB', sans que la vitesse en soit altérée.

Si l'on néglige le frottement et la roideur des cordes, la relation entre les forces F et P, dans le cas de l'équilibre ou du mouvement uniforme, est très-simple. En effet, la poulie est soumise à ces deux forces et aux réactions que les coussinets exercent sur l'axe (ou à celle que l'axe exerce sur l'œil); mais ces réactions étant normales rencontrent l'axe de rotation, en sorte que si l'on prend les moments des forces par rapport à cet axe, les moments de ces réactions disparaissent et il reste, en nommant r le rayon de la poulie, mesuré au fond de la gorge, mais augmenté du rayon de la corde,

$$Fr - Pr = 0, \text{ d'où } F = P,$$

c'est-à-dire que la puissance est égale à la résistance. Si l'on nomme ensuite R la résultante des réactions exercées par les coussinets sur l'axe, ou par l'axe sur l'œil, il faut que cette force soit égale et opposée à la résultante des forces F et P, et qu'elle soit par conséquent dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les directions AA' et BB'. En nommant donc 2α cet angle, et projetant les forces sur la direction de la bissectrice, on trouvera

$$R = 2 P \sin \alpha.$$

La réaction R serait égale à 2P si les deux brins de la corde étaient parallèles.

II. On ne peut pas, en général, négliger le frottement ni la roideur des cordes. Il faut alors appliquer à la poulie fixe la théorie des TREUILS (Voy. ce mot). L'équation [5] de l'article TREUIL devient dans ce cas :

$$Fr = Pr + \frac{1}{2}(A + BP) + 2 f_1 \rho R \quad [1]$$

et l'on a, en négligeant le poids de la poulie,

$$R = \sqrt{F^2 + P^2 + 2FP \cos 2\alpha}, \quad [2]$$

formules auxquelles on appliquera la méthode des approximations successives. On commencera par supposer F=P, ce qui donnera pour R une première valeur approchée, que l'on substituera dans [1]; on aura ainsi une seconde valeur approchée de F; on la mettra dans [2], ce qui donnera une seconde valeur approchée de R; on substituera celle-ci dans [1], ce qui donnera une troisième valeur approchée de F, laquelle pourra suffire en général.

Si les cordons sont parallèles, le calcul se simplifie; et l'équation [8] de l'article TREUIL devient, en négligeant toujours le poids de la poulie,

$$F = P \cdot \frac{r + \frac{1}{2}B + f_1 \rho}{r - f_2 \rho} + \frac{1}{2} \frac{A}{r - f_1 \rho}, \quad [3]$$

relation qui est de la forme

$$F = \alpha + \beta P. \quad [4]$$

Supposons, par exemple,

$$r = 0^m, 20, \quad \rho = 0^m, 01; \quad f = 0, 15,$$

$$\text{d'où } f_1 = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = 0, 1484, \text{ et } f_1 \rho = 0, 001484.$$

Supposons que la corde soit une corde blanche de 48 fils de caret ou d'un diamètre de 0^m, 0254 (Voy. ROIDEUR DES CORDES), on aura A=0,578750 et B=0,017424. On trouvera en substituant ces valeurs, α=1^k,4577 et β=1,1021; par conséquent

$$F = 1^k,4577 + 1,1021 P.$$

Pour P=30^k on trouvera F=34^k,521, ce qui suppose l'emploi de deux hommes, s'il s'agit d'un travail continu.

III. La seconde manière d'employer la poulie simple est la suivante. La charge P (fig. 2) est appliquée à la chape de la poulie; celle-ci repose sur la corde, laquelle est attachée d'une part en un point fixe A, et sollicitée de l'autre par la force mouvante F. On a alors ce qu'on appelle une *poulie mobile*. Si l'on néglige le frottement et la roideur de la corde, la théorie de cet appareil est encore très-simple.

La poulie est soumise aux forces F et P et à la tension T du cordon fixe AA'. La force P rencontre l'axe; si donc on prend les moments des forces par rapport à cet axe, on aura

$$Fr - Tr = 0, \text{ d'où } F = T.$$

Il en résulte que la direction de la force P est la bissectrice de l'angle formé par les deux brins de la corde; nommant, comme ci-dessus, 2α cet angle, et projetant les forces sur la direction de P, on obtient

$$2 F \cos \alpha = P,$$

d'où

$$F = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

Si les cordons sont parallèles,

il vient F = 1/2 P, c'est-à-dire que dans ce cas la puissance est la moitié de la résistance.

On peut parvenir au même résultat d'une autre manière, qu'il est utile de connaître. Par le point fixe A (fig. 3) menons une horizontale AB. Concevons que la charge P s'élève, ainsi que la poulie, d'une quantité OO'; les deux cordons AA' et BB' seront raccourcis de cette même quantité; par conséquent, comme la longueur totale de la corde n'a pas varié, le point d'application de la force mouvante F se sera élevé de deux fois OO'. Remarquons d'abord ce résultat que, dans la poulie mobile à cordons parallèles, le chemin parcouru par

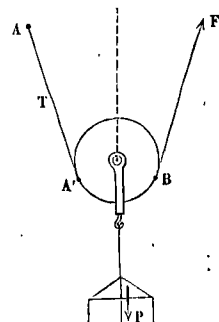


Fig. 2.

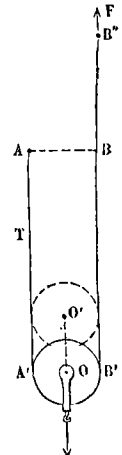


Fig. 3.

le point d'application de la puissance est le double du chemin parcouru par le point d'application de la résistance. Maintenant, si h désigne la quantité dont la charge s'est élevée, le travail de F sera $F \cdot 2h$; le travail de P sera Ph en valeur absolue; mais il sera négatif. Quant au travail de la tension T , il est nul, car on peut supposer cette force transportée en un point quelconque de sa direction sur le cordon AA' , et par conséquent en un point qui ne s'est pas déplacé. En vertu du principe de la TRANSMISSION DU TRAVAIL (Voy. ce mot), on a donc

$$F \cdot 2h - Ph = 0, \text{ d'où } F = \frac{1}{2}P.$$

IV. Le mode de suspension des réverbères est une application de la poulie mobile. On peut se demander quelle est la courbe décrite par cette poulie, considérée comme un simple point mobile, lorsque l'on allonge graduellement la corde pour faire descendre le réverbère. Soit A (fig. 4) le point fixe

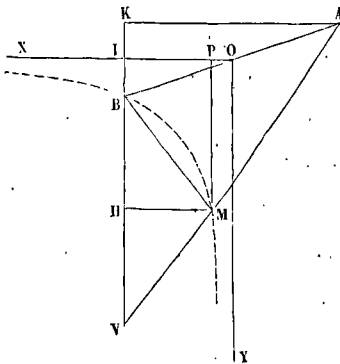


Fig. 4.

auquel la corde est attachée, B la poulie fixe sur laquelle elle passe, M la position de la poulie mobile à un instant quelconque. Par le milieu de AB menons une horizontale OX et une verticale OY , que nous prendrons pour axes coordonnés. Le mouvement étant supposé assez lent, la poulie prend, pour chaque longueur de la corde, la position d'équilibre correspondante; par conséquent la direction du poids suspendu en M , c'est-à-dire la verticale, est la bissectrice de l'angle AMB des deux brins. Soient x, y les coordonnées du point M , a et b celles du point B ; menons BV parallèle à l'axe des y , jusqu'à la rencontre de AM prolongé, et MH et AK parallèles à l'axe des x . Nous aurons par des similitudes évidentes

$$BH : MH = KV : AK;$$

mais

$$\begin{aligned} BH &= IH - IB = y - b, \\ MH &= OI - OP = a - x, \\ KV &= 2BI + 2BH = 2y, \\ AK &= 2OI = 2a, \end{aligned}$$

par conséquent

$$y - b : a - x = 2y : 2a,$$

d'où l'on tire

$$xy = ab,$$

c'est-à-dire que la courbe cherchée est une hyperbole équilatère ayant pour asymptote la verticale passant par le milieu de la droite AB qui joint les points de suspension.

V. Lorsque la poulie mobile est employée à soulever de lourds fardeaux, on la dispose de manière que les deux brins de la corde soient parallèles. Dans ce cas on peut appliquer la formule [3], ou la formule [4] en y remplaçant P par T ; et l'on a

$$F = T \frac{r + \frac{1}{2}B + f_1\rho}{r - f_1\rho} + \frac{1}{2} \frac{A}{r - f_1\rho}, \quad [5]$$

$$\text{ou } F = \alpha + \beta T \quad [6]$$

avec $P = F + T$, d'où $T = P - F$; substituant dans [5] et simplifiant, on obtient enfin

$$F = \frac{\frac{1}{2}A}{2r + \frac{1}{2}B} + \frac{r + \frac{1}{2}B + f_1\rho}{2r + \frac{1}{2}B} P. \quad [7]$$

Si l'on néglige le frottement et la roideur des cordes, ce qui revient à faire $A = 0, B = 0$ et $f_1 = 0$, il reste $F = \frac{1}{2}P$, comme on l'a trouvé précédemment.

Si l'on voulait tenir compte du poids de la poulie, on pourrait le supposer compris dans la charge P .

VI. En employant deux poulies, on peut changer un mouvement rectiligne continu suivant une direction donnée AB (fig. 5) en un autre mouve-

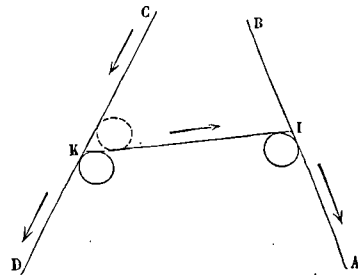


Fig. 5.

ment rectiligne continu suivant une seconde direction donnée CD . Pour cela, on n'a qu'à couper les deux droites données par une troisième droite quelconque IK . Dans le plan AIK on tracera, avec le rayon de la gorge de la poulie qu'on veut employer, augmenté du rayon de la corde, un cercle tangent aux droites AI et IK ; dans le plan IKD on tracera, avec le même rayon, un cercle tangent aux deux droites IK et KD . Ces cercles indiqueront l'emplacement qu'il devra occuper les deux poulies. Le mouvement suivant IA sera transformé, à l'aide de la première poulie, en un mouvement égal suivant KI , et celui-ci sera transformé à l'aide de la seconde poulie, en un mouvement égal suivant DK . Le mouvement suivant IA se trouvera ainsi transformé en un mouvement égal suivant DK . Si l'on voulait que le second mouvement eût lieu en sens contraire, c'est-à-dire suivant KC , il faudrait tracer le second cercle tangent aux droites IK et KC , comme le montre la circonférence ponctuée.

Cette disposition est fréquemment employée dans la marine.

(Voy. PALANS.)

POULIE FOLLE, poulie qui peut tourner librement

sur son axe sans être entraînée par le mouvement de celui-ci, ou sans l'entraîner lui-même.

Toutes les fois qu'on fait usage d'une COURROIE SANS FIN (Voy. ce mot), on place sur l'axe de l'une des deux poulies une poulie folle, sur laquelle on fait passer la courroie quand on veut interrompre la transmission (Voy. EMBRAYAGE).

POUPE, extrémité postérieure d'un navire, celle qui est tournée du côté d'où le navire vient (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

POUSSÉE, résultante des pressions qu'un fluide en repos exerce sur un corps qui y est plongé, ou qui flotte à sa surface. C'est une force verticale, agissant de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé, et passant par le centre de gravité du volume de ce fluide (Voy. CORPS PLONGÉS, CORPS FLOTANTS).

POUSSÉE DES TERRES, force horizontale que les terres meubles exercent contre les murs destinés à les soutenir. Par extension on désigne par *puissée des terres* la théorie de l'équilibre des terres ainsi soutenues. Le cas le plus simple est celui d'un massif terminé par un plan horizontal BX (fig. 1) et soutenu par un mur dont la paroi

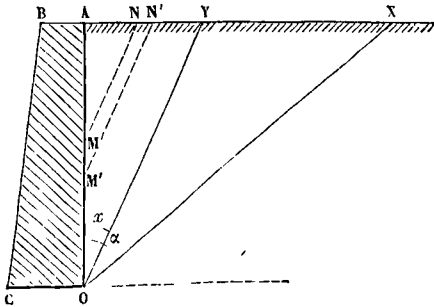


Fig. 1.

intérieure AO est verticale. Nous supposons que le massif s'étende perpendiculairement au plan de la figure d'une quantité égale $\frac{1}{2}l$ en avant et en arrière, en sorte que sa longueur totale dans ce sens soit l . Soit OX la trace du TALUS NATUREL DES TERRES (Voy. ce mot), c'est-à-dire celle d'un plan exprimant l'inclinaison sous laquelle, librement abandonnées à l'action de la pesanteur, les terres se soutiendraient d'elles-mêmes sans éboulement. Si α désigne l'angle AOX, $\cot \alpha$ sera le coefficient de frottement relatif au glissement des terres sur elles-mêmes; car OX représente l'inclinaison sous laquelle une masse de terre descendrait sans accélération le long du talus; la réaction du talus serait donc opposée au poids de la masse en mouvement, c'est-à-dire verticale; cette réaction ferait donc avec la normale au talus un angle égal au complément de α , par conséquent l'angle du frottement est $90^\circ - \alpha$, et le coefficient de frottement est $\cot \alpha$ (Voy. FROTTEMENT). — Cela posé, menons par l'arête projetée en O un plan quelconque OY, qui détachera du massif un prisme de terre ayant pour section droite le triangle AOY et pour longueur l , et cherchons la pression que ce prisme exerce sur la paroi verticale du mur. Ce prisme peut être considéré comme en équilibre sous l'action de son

poids P, de la réaction normale F du mur, et de la réaction R du plan OY. On néglige d'ordinaire la résistance au glissement que les terres éprouveraient de la part du mur, parce que l'époque la plus dangereuse pour la stabilité du mur étant l'époque des pluies, où les terres imbibées d'eau ont un poids plus considérable, le frottement du mur dans cette circonstance est considérablement diminué; en agissant ainsi, on se place d'ailleurs à dessein dans un cas plus défavorable, ce qui ne peut avoir aucun inconvénient au point de vue de la solidité de la construction. La force F se trouve ainsi dépendre de l'angle AOY, que nous désignerons par x ; et la première question à résoudre est de savoir quelle est la valeur de x qui donne le maximum de F; car c'est pour résister à ce maximum que les dimensions du mur devront être calculées. Soient donc h la hauteur AO, et l le poids du mètre cube des terres; la section droite du prisme considéré est $\frac{1}{2}AO \times AY$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}h^2 \tan x$; son volume est donc $\frac{1}{2}h^2 l \tan x$; et son poids

$$P = \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan x.$$

Projetons successivement sur OY et sur une perpendiculaire à cette direction les trois forces F, P et R; nous devons avoir pour l'équilibre

$$F \sin x - P \cos x + R \cos \alpha = 0, \quad [1]$$

$$F \cos x + P \sin x - R \sin \alpha = 0,$$

puisque l'angle du frottement est $90^\circ - \alpha$. Éliminant R entre ces deux équations, on en tire

$$F (\sin \alpha \sin x + \cos \alpha \cos x)$$

$$- P (\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x) = 0,$$

d'où

$$F = P \tan (\alpha - x) = \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan x \cdot \tan (\alpha - x). \quad [2]$$

Si l'on remarque que cette expression est symétrique par rapport aux quantités x et $\alpha - x$ dont la somme est constante, on en conclut aisément que le maximum de F a lieu pour

$$x = \alpha - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \alpha,$$

relation à laquelle on est d'ailleurs conduit par la différentiation.

Elle montre que le PLAN DE RUPTURE OY qui répond au maximum de poussée fait avec la face verticale du mur un angle qui est la moitié de celui que fait avec cette même face le talus naturel des terres.

La valeur de F correspondante à ce maximum est

$$F = \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha. \quad [3]$$

C'est aussi la valeur de la force égale et contraire à F que les terres exercent sur le mur, c'est-à-dire que c'est l'expression cherchée de la poussée des terres.

Il ne suffit pas pour l'application qu'on a ordinairement à faire de cette théorie que l'on connaisse la poussée; il faut encore savoir quel est son point d'application sur la ligne AO; on y parvient de la manière suivante. Cherchons la poussée φ sur une hauteur AM = x ; nous trouverons, d'après la formule [3],

$$\varphi = \frac{1}{2} \Pi x^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha = Ax.$$

en représentant pour abrégé par A l'ensemble des terres qui multiplient x^2 . Si l'on différencie cette expression par rapport à x , on obtient

$$d\varphi = 2Ax dx :$$

c'est l'expression de la pression élémentaire que les terres exercent sur une bande horizontale du mur ayant pour longueur l et pour hauteur dx . Le moment de cette force par rapport à l'arête projetée en A est

$$2Ax dx \times x \text{ ou } 2Ax^2 dx.$$

La somme de tous les moments analogues, depuis le point A jusqu'au point O, est égale au moment de la poussée totale, c'est-à-dire au produit de la force F par la distance cherchée Z de son point d'application au point A; on a donc (Voy. MOMENTS)

$$FZ = \int_0^h 2Ax^2 dx = \frac{2}{3} Ah^3,$$

ou, en mettant pour F et A leurs valeurs,

$$\frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \Pi l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot h^3,$$

ou, en simplifiant,

$$Z = \frac{2}{3} h.$$

Ainsi la poussée s'exerce aux deux tiers de la hauteur du mur à partir du sommet, ou au tiers à partir du pied. Il en résulte qu'en appelant μ le moment de la poussée, on a

$$\mu = FZ = \frac{1}{2} \Pi h^2 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{2}{3} h$$

ou
$$\mu = \frac{1}{3} \Pi h^3 l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha. \quad [4]$$

II. Après le cas que nous venons de traiter, le plus simple est le suivant, qui rencontre une application fréquente dans la FORTIFICATION (Voy. cemot). Les terres forment un parapet qui repose en partie sur la crête du mur de revêtement ABCO (fig. 2)

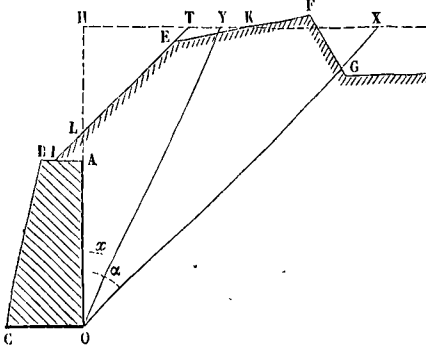


Fig. 2.

en n'y laissant qu'une *berme* étroite BI, qui peut même se réduire à zéro. On suppose ordinairement que le talus extérieur EI du parapet soit le talus naturel des terres; et on remplace la plongée EF par un plan horizontal HX mené par son milieu K. On suppose d'abord la paroi intérieure du mur prolongée à travers le massif des terres jusqu'au point H, où elle coupe l'horizontale HX. Nous désignerons par H la hauteur OH, et par ζ la hauteur HL. Soit toujours OY le plan de rupture et α l'angle qu'il fait avec OA; conservons aux lettres

F, P, R, α les significations adoptées dans le problème précédent. On trouvera comme plus haut

$$F = P \tan(\alpha - x);$$

mais la valeur de P sera différente. Pour l'obtenir, il faut d'abord évaluer la figure OLYTO; elle est la différence entre le triangle OHY et le triangle LHT. Le premier de ces triangles a pour valeur

$$\frac{1}{2} H^2 \tan x$$

et la valeur du second est

$$\frac{1}{2} \zeta^2 \tan \alpha,$$

ce qui donne

$$OLYTO = \frac{1}{2} (H^2 \tan x - \zeta^2 \tan \alpha),$$

on a donc

$$P = \frac{1}{2} \pi l (\Pi^2 \tan x - \zeta^2 \tan \alpha) \quad [5]$$

et par suite

$$F = \frac{1}{2} \Pi l (H^2 \tan x - \zeta^2 \tan \alpha) \cdot \tan(\alpha - x). \quad [6]$$

Il s'agit de trouver le maximum de cette expression relatif à x . Pour cela, on développe $\tan(\alpha - x)$; on pose ensuite pour abrégé

$$\tan x = \omega, \quad \cot \alpha = f, \quad \frac{\zeta^2}{H^2} \tan \alpha = t$$

et il vient

$$F = \frac{1}{2} \Pi H^2 l \cdot \frac{(\omega - t)(1 - f\omega)}{f + \omega}. \quad [7]$$

La quantité

$$\frac{(\omega - t)(1 - f\omega)}{f + \omega}$$

peut se mettre sous la forme

$$-f(f + \omega) - \frac{(f + t)(1 + f^2)}{f + \omega} + 1 + tf + 2f^2.$$

Si l'on prend alors la dérivée par rapport à $f + \omega$, ce qui revient à la prendre par rapport à ω puisque r est constant, et qu'on égale cette dérivée à zéro, on obtient l'équation

$$-f + \frac{(f + t)(1 + f^2)}{(f + \omega)^2} = 0,$$

d'où
$$\omega = \sqrt{\frac{(f + t)(1 + f^2)}{f}} - f, \quad [8]$$

ou, en remettant pour ω , f et t leurs valeurs, et simplifiant,

$$\tan x = \frac{\sqrt{H^2 \cot^2 \alpha + \zeta^2} - \cot \alpha}{H \cos \alpha}. \quad [9]$$

On peut remarquer que pour $\zeta = 0$ cette formule donne

$$\tan x = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{1}{2} \alpha,$$

comme cela devait être, puisqu'on retombe alors dans le cas précédemment traité.

Si l'on met pour ω sa valeur dans l'expression de F [7], on obtient le maximum de la poussée; on trouve, toutes réductions faites,

$$F = \frac{1}{2} \Pi H^2 l [\sqrt{1 + f^2} - \sqrt{f^2 + t}]^2 \quad [10]$$

ou, en remettant pour f et t leurs valeurs, et faisant passer H^2 dans la parenthèse,

$$F = \frac{1}{2} \Pi^2 l \left[\frac{H}{\sin \alpha} - \sqrt{H^2 \cot^2 \alpha + \zeta^2} \right]^2 = f(H). \quad [11]$$

On trouverait de même la poussée φ sur une hauteur z comptée à partir du point H; et l'on aurait

$$\varphi = \frac{1}{2} \Pi l \left[\frac{z}{\sin \alpha} - \sqrt{z^2 \cot^2 \alpha + \zeta^2} \right]^2 = f(z).$$

On peut remarquer que cette expression s'annule pour $x = \zeta$, comme cela doit être, puisque le prisme de terre se réduit alors à zéro.

La poussée sur un élément de hauteur serait $d\varphi$; son moment par rapport au point H serait $x d\varphi$; par conséquent la somme des moments des poussées élémentaires, prise depuis le point L jusqu'au point O sera exprimée par

$$\int_{\zeta}^H x d\varphi.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int x d\varphi = x\varphi - \int \varphi dx.$$

On aura donc en définitive

$$FZ = Hf(H) - \int_{\zeta}^H f(x) dx,$$

en appelant Z la distance du point H au point d'application de la force F, et en remarquant que le produit $x\varphi$ s'annule pour $x = \zeta$. — L'intégration indiquée dans le second membre peut s'effectuer; mais elle est laborieuse. En désignant $\cot \alpha$ par f , et le rapport $\frac{\zeta}{H}$ par n , on trouvera que le moment M

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (1 + 2f^2)(1 - 3n^2 + 2n^3) \\ - 2f\sqrt{1+f^2} \left(1 + \frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ + 2(1+f^2) \left(3n^2 - 2n^3 + \frac{n^3}{f^2}\right) \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{6} \Pi H^3 l [13]$$

III. Au lieu de faire les calculs qui précèdent, on peut avoir recours à un tracé géométrique qui donnera pour les inconnues des valeurs suffisamment approchées. Commençons par construire le plan de rupture OY. La formule [9] peut se mettre sous la forme

$$H \tan \alpha = \frac{\sqrt{H^2 \cot^2 \alpha + \zeta^2}}{\cos \alpha} - H \cot \alpha. [14]$$

Le premier membre n'est autre chose que la distance HY. Élevons au point O (fig. 3) la droite OV

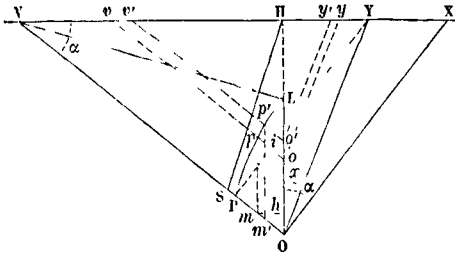


Fig. 3.

perpendiculaire au talus naturel OX des terres; l'angle en V sera égal à α , et la distance VH sera égale à $H \cot \alpha$. Le radical qui entre dans le second membre de la relation [14] représente donc l'hypoténuse VL du triangle VHL. Prenons sur VO la longueur VP égale à VL, et élevons PY' perpendiculaire à VO, nous aurons

$$VY' = \frac{VP}{\cos \alpha}.$$

La relation [14] revient donc à $HY = VY' - VH$,

ce qui montre que les points Y et Y' se confondent, et que par conséquent pour obtenir le plan de rupture il suffit de joindre le point O à l'extrémité Y de la perpendiculaire PY.

Construisons maintenant la poussée F, d'après la valeur fournie par l'équation [11]. On a

$$\frac{H}{\sin \alpha} = VO;$$

le radical est d'ailleurs égal à VL ou VP; la quantité entre parenthèses est donc égale à

$$VO - VP \text{ ou } OP$$

et l'on a

$$F = \frac{1}{2} \Pi l \cdot \overline{OP}^2. [15]$$

Pour avoir la poussée φ sur une hauteur quelconque Ho, on élèvera de même par le point o une perpendiculaire $o\varphi$ au talus naturel des terres; on prendra φp égal à la distance du point v au point L, et l'on aura

$$\varphi = \frac{1}{2} \Pi l \cdot \overline{o\varphi}^2.$$

Pour une autre hauteur Ho' infiniment peu différente de Ho, on aurait de même

$$\varphi' = \frac{1}{2} \Pi l \cdot \overline{o'\varphi'}^2.$$

Il en résulte que la poussée sur l'élément oo' , c'est-à-dire $\varphi - \varphi'$, est exprimée par

$$\frac{1}{2} \Pi l (\overline{o\varphi}^2 - \overline{o'\varphi'}^2).$$

Or, si oo' est infiniment petit,

$$\frac{1}{2} (op + o'\varphi')$$

diffère infiniment peu de op ; d'ailleurs

$$op - o'\varphi' = pi;$$

la poussée élémentaire a donc pour expression

$$d\varphi = \Pi l \cdot op \cdot pi.$$

Il est commode ici de prendre les moments par rapport à l'arête projetée en O. Le moment de la poussée élémentaire, ou $d\varphi \cdot Oo$, revient à

$$\Pi l \cdot op \cdot pi \cdot Oo.$$

Menons pm et $p'm'$ parallèles à OH, et mh perpendiculaire à cette ligne. Le produit $pi \cdot Oo$ ou $pi \cdot pm$ n'est autre chose que l'aire du parallélogramme $pmm'i$ divisée par le sinus de l'angle $mm'i$ ou VOH , c'est-à-dire par $\cos \alpha$. D'un autre côté, on a

$$op = mO = \frac{mh}{\cos \alpha};$$

le moment de la poussée élémentaire revient donc à

$$\Pi l \cdot \frac{mh}{\cos \alpha} \cdot \frac{pmm'i}{\cos \alpha}$$

ou à

$$\frac{\Pi l}{\cos^2 \alpha} \cdot pmm'i \cdot mh,$$

c'est-à-dire au produit de

$$\frac{\Pi l}{\cos \alpha}$$

par le moment du parallélogramme $pmm'i$ par rapport au plan vertical OH. La somme des moments

analogues sera $\frac{\Pi l}{\cos^2 \alpha} \Sigma pmm'i \cdot mh$, c'est-à-dire le

produit de $\frac{\Pi l}{\cos^2 \alpha}$ par la somme des moments des

parallélogrammes analogues à $pmm'i$ pris par rapport à OH. Cette somme n'est autre chose que le moment par rapport à OH du triangle mixtiligne déterminé par les droites OP, OL, et par la courbe

PpL lieu des points analogues à p. On trouve par les procédés ordinaires de la Géométrie analytique que cette courbe est une branche d'hyperbole équilatère, ayant pour centre le point H, et pour asymptote une droite HS telle qu'on a $VS = VH$.

Ayant évalué l'aire de ce triangle mixtiligne, on la multipliera par la distance de son centre de gravité à la verticale OH, et par le facteur $\frac{H}{\cos^2 \alpha}$; on aura ainsi la somme des moments des poussées élémentaires, ou, ce qui revient au même, le moment de la poussée totale. En le divisant par F on aura le bras de levier Z de cette poussée. Il faut bien remarquer à ce sujet que ce bras de levier ne peut pas se calculer comme dans le premier problème, attendu que les lignes de rupture oy, o'y', etc., qui correspondent aux différentes hauteurs oH, o'H, etc., ne sont plus parallèles.

M. Poncelet, dans son *Mémoire sur la stabilité des revêtements*, a montré qu'on pouvait, par des considérations géométriques analogues, résoudre le problème de la poussée des terres dans les cas les plus compliqués. Nous ne saurions suivre ce savant auteur dans tous les développements de cette question. Ce qui précède suffit pour les cas les plus ordinaires; nous nous contenterons donc de renvoyer le lecteur au mémoire cité. On peut consulter aussi un mémoire de M. le colonel Audoy inséré dans le *Mémorial de l'officier du génie*, n° XI (*Voy. les articles BUTÉE DES TERRES, REVÊTEMENTS*).

POUSSÉE DES VÔTES, effort horizontal que les vôtées exercent de dedans en dehors sur leurs piédroits. Par extension, on désigne sous le nom de *poussée des vôtées* la théorie même de l'équilibre et de la stabilité des vôtées. — Lorsqu'une vôte en berceau (*Voy. VÔTES*) vient à se rompre, on remarque le plus ordinairement les effets représentés par la figure 1; c'est-à-dire qu'elle s'ou-

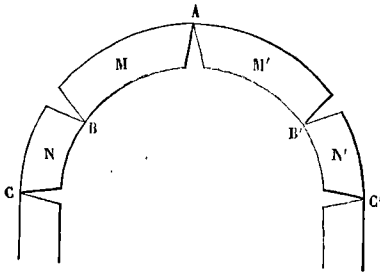


Fig. 1.

vre à la clef du côté de l'intrados, vers les reins du côté de l'extrados, et aux naissances du côté de l'intrados encore. Elle se partage en 4 parties M, M', N, N'. Les deux premières s'abaissent en tournant autour des points B et B', tandis que les deux dernières se renversent à l'extérieur en tournant autour des points C et C'. Les piédroits, s'ils ne sont pas suffisamment résistants, peuvent être renversés ainsi eux-mêmes en faisant corps avec les parties inférieures N et N' de la vôte; dans ce cas la rotation se fait autour de l'arête externe de la base des piédroits. Il peut arriver aussi que les piédroits glissent horizontalement sur leur

base au lieu de se renverser en tournant autour d'une arête de cette base. Dans des cas plus rares, on observe un effet inverse du précédent et qui est représenté par la figure 2: la vôte s'ouvre à la

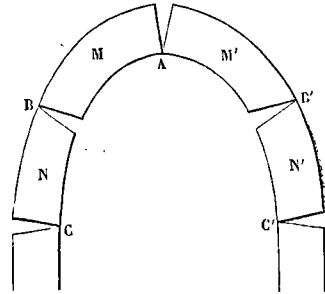


Fig. 2.

clef du côté de l'extrados, aux reins du côté de l'intrados, et aux naissances du côté de l'extrados: dans ce cas les deux parties supérieures M et M' se soulèvent en tournant autour des points B et B', et les parties inférieures N et N' se renversent à l'intérieur en tournant autour des points C et C'. Ce mode de rupture ne se manifeste que dans les vôtées minces, surélevées, et très-chargées vers les reins; et c'est pour éviter cet effet qu'on fait usage des *clefs pendantes*, destinées à augmenter la charge de la vôte à la partie supérieure, en même temps qu'elles servent d'ornement, comme on le voit dans les églises gothiques.

I. Pour l'équilibre d'une vôte, il faut qu'aucun des effets signalés ci-dessus ne puisse se produire; et la théorie de la poussée des vôtées a pour objet de rechercher à quels signes on peut reconnaître à l'avance que ces effets ne se produiront pas. Remarquons d'abord que la vôte étant symétrique par rapport au plan vertical qui contient la génératrice de l'extrados ou de l'intrados projetée en A (fig. 1 et 2), on peut supprimer une des moitiés de la vôte, en remplaçant la partie supprimée par la réaction qu'elle exerce sur la partie conservée. Cette réaction est nécessairement horizontale, et perpendiculaire aux génératrices de la vôte. Supposons en effet que les figures 1 ou 2 représentent une section droite de la vôte, faite par le milieu de sa longueur; l'action mutuelle des deux parties de la vôte pourra être regardée comme s'exerçant au point A; or, en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction (*Voy. RÉACTION*), les pressions mutuelles exercées en A pourront être regardées comme égales et opposées; et, comme elles sont symétriques par rapport à la verticale du point A, elles ne peuvent être qu'horizontales, et situées dans le plan de la figure. Cela posé, soit N (fig. 3) la réaction de la moitié de droite sur la moitié de gauche, h sa distance au point B, et H sa distance au point C; soit P la résultante des forces extérieures supposées verticales qui agissent sur AB; on peut la regarder comme située dans le plan de la figure, en admettant que cette figure représente encore une section droite faite à égale distance des plans de tête; soit p la distance de cette force au point B; q sa distance au point C;

soit P' la résultante des forces extérieures supposées verticales qui s'exercent sur BC, et p' sa distance au point C. Désignons par R la valeur absolue de la réaction mutuelle qui s'exerce en B

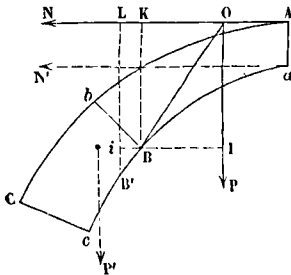


Fig. 3.

entre les deux parties AB et BC de la voûte; soit R_x sa projection horizontale et R_y sa projection verticale; enfin soit R' la réaction du piédroit sur la partie BC, R'_x et R'_y ses projections. Si l'on considère l'équilibre de la partie AB, on devra avoir, en considérant d'abord les projections horizontales et verticales des forces (Voy. ÉQUILIBRE).

$$R_x = N \text{ et } R_y = P; \quad [1]$$

puis, en prenant les moments par rapport à l'axe projeté en B,

$$Nh = Pp, \text{ d'où } N = \frac{Pp}{h}. \quad [2]$$

Si l'on considère l'équilibre de la demi-voûte entière, on aura d'abord, en ne considérant que les projections,

$$R'_x = N \text{ et } R'_y = P + P', \quad [3]$$

puis, en prenant les moments par rapport à l'axe projeté en C,

$$NH = Pq + P'p', \text{ d'où } N = \frac{Pq + P'p'}{H}. \quad [4]$$

La première des équations [3] montre d'abord que la réaction horizontale N se transmet au piédroit, c'est cette force qui constitue réellement la poussée. La seconde montre, comme on pouvait s'y attendre, que le piédroit supporte en outre le poids $P + P'$ de la demi-voûte et de sa charge. De plus, les valeurs [2] et [4] devant être égales, il en résulte l'équation de condition

$$\frac{Pp}{h} = \frac{Pq + P'p'}{H}. \quad [5]$$

Si elle n'est point satisfaite d'elle-même, l'équilibre statique de la voûte n'est point assuré. Si elle est satisfaite, l'une des expressions [2] ou [4] donne la valeur de la poussée. Enfin, les équations [1] font connaître les composantes de la réaction R qui s'exerce en B et par suite cette réaction elle-même.

II. Le calcul qui précède suppose qu'on connaisse le point B, et par conséquent le joint Bb suivant lequel la rupture tend à s'opérer, et que l'on nomme pour cette raison le joint de rupture. On peut le déterminer, au moins approximativement, de plusieurs manières. Supposons d'abord que, dans la figure 3, AaBb représente l'ensemble des n premiers voussoirs, à partir du sommet A; soit P leur poids, y compris la charge qu'ils supportent, p la distance de la verticale de ce poids au point

B; soit, comme plus haut, N la réaction horizontale au point A, et h sa distance au point B. On devra avoir, pour que la voûte ne puisse pas s'ouvrir suivant Bb en tournant autour de l'arête projetée en B,

$$Nh \geq Pp, \text{ d'où } N \geq \frac{Pp}{h}.$$

Ainsi la quantité $\frac{Pp}{h}$ sera la limite inférieure que devra atteindre la force N pour que la rupture n'ait pas lieu suivant le joint Bb. Si l'on calcule cette expression pour différentes valeurs du nombre n de voussoirs considérés, le joint auquel correspondra la plus grande valeur de $\frac{Pp}{h}$ sera évidemment celui pour lequel le danger de la rupture sera le plus grand; ce sera le joint de rupture.

On peut encore procéder de la manière suivante. Différentions cette expression en faisant varier P , p et h , et égalons la différentielle à zéro; il viendra

$$h(P dp + p dP) - P p dh = 0,$$

ou, en divisant par P ,

$$h dp + hp \frac{dP}{P} - p dh = 0.$$

Mais dP , qui est proportionnel à l'accroissement du volume de voûte considéré, est un infiniment petit du troisième ordre, tandis que dp et dh sont du premier; on peut donc supprimer le second terme, et il vient

$$\frac{dp}{dh} = \frac{p}{h}.$$

Mais si B' est un point de l'intrados infiniment voisin du point B, on aura, en menant les verticales BK, B'L et l'horizontale IBi,

$$p = BI, \quad h = IO, \quad dp = Bi, \quad dh = B'i;$$

par conséquent la relation qu'on vient d'obtenir, revient à

$$\frac{Bi}{B'i} = \frac{BI}{IO}.$$

Si donc on joint BO, la droite BO sera en ligne droite avec l'élément BB', c'est-à-dire que ce sera une tangente au point B à la courbe d'intrados. On obtiendra donc le joint de rupture en cherchant le point de l'intrados pour lequel la tangente à cette courbe rencontre l'horizontale du point A au même point que la force P .

M. Petit, capitaine de génie, a donné pour les voûtes en plein cintre une table des valeurs de l'angle de rupture, c'est-à-dire de l'angle que fait avec la verticale le rayon mené du centre de la voûte au joint de rupture. Nous donnerons ici un extrait de cette table. Soit R le rayon de l'extrados, r le rayon de l'intrados, et α l'angle de rupture; on a, en considérant d'abord les voûtes extradosées parallèlement, le tableau suivant des valeurs correspondantes de $\frac{R}{r}$ et de α .

$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α
2,00	57°—17'	1,60	63°49'	1,40	63°—48'	1,20	59°—41'
1,50	59—37	1,55	64—3	1,35	63—19	1,15	57—1
1,80	61—24	1,50	64—9	1,30	62—14	1,10	53—15
1,70	62—53	1,45	64—5	1,25	61—15	1,05	46—32

On voit que c'est la valeur 1,5 du rapport $\frac{R}{r}$ qui donne le maximum de l'angle de rupture, et que ce maximum est $64^{\circ} 9'$.

Si l'on considère les voûtes en plein cintre extradossées horizontalement, on obtient le tableau ci-dessous :

$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α	$\frac{R}{r}$	α
2,00	36°	1,60	52°	1,40	59°	1,20	63°
1,90	39	1,55	54	1,35	60	1,15	64
1,80	44	1,50	56	1,30	61	1,10	65
1,70	48	1,45	57	1,25	62	1,05	69

On voit que pour ce genre de voûtes l'angle de rupture augmente constamment avec la valeur du rapport $\frac{R}{r}$; c'est-à-dire que le joint de rupture s'éloigne d'autant plus de la clef que la voûte proprement dite est plus mince.

Dans les voûtes à intrados elliptique, le point B où le joint de rupture rencontre l'ellipse est sensiblement à la même hauteur au-dessus des naissances que dans une voûte en plein cintre ayant même épaisseur à la clef et pour rayon d'intrados le demi petit axe de cette ellipse.

La même observation s'applique aux voûtes en anses de panier. Quant aux voûtes en arc de cercle, il n'y a pas, à proprement parler, de joint de rupture, attendu que, dans la pratique, le demi-angle d'ouverture de la voûte, c'est-à-dire l'angle que le rayon mené au point de naissance fait avec la verticale, est ordinairement plus petit que l'angle de rupture correspondant d'une voûte en plein cintre ayant les mêmes rayons d'intrados et d'extrados.

III. Au lieu de supposer un abaissement à la clef, on pourrait supposer un soulèvement, c'est-à-dire qu'au lieu d'admettre que la voûte s'ouvre aux points a, b, c (fig. 3), on pourrait examiner le cas où elle tendrait à s'ouvrir aux points A, B, C; les rotations s'exécuteraient alors autour des points b et c . En opérant comme ci-dessus, on obtiendrait la réaction horizontale N' qui s'exercerait alors au point a ; ce serait une seconde limite de la poussée; elle serait supérieure à N , puisque la distance de la force P au point b est supérieure à p , tandis que la distance de l'horizontale N' au même point b est inférieure à h . Dans l'état d'équilibre permanent, la réaction qui s'exerce sur le joint Aa n'est appliquée ni en A ni en a ; elle est appliquée en un point intermédiaire inconnu; et sa valeur est comprise entre N et N' . Le problème de la poussée des voûtes est ainsi un problème indéterminé. Mais on peut resserrer l'indétermination entre des limites plus étroites, si, au lieu de considérer les différentes parties de la voûte comme des solides incompressibles, on a égard à la compression que les matériaux éprouvent en vertu de leurs réactions mutuelles. En d'autres termes, on précise la question en la traitant, non plus seulement au point de vue statique, mais au point de vue de la stabilité de la construction, eu égard à la résistance limitée des matériaux que l'on emploie. Mais pour cela il est nécessaire d'admettre les hypothèses relatives aux

lois suivant lesquelles la pression se répartit entre les divers points d'une même surface de contact supposée plane [Voy. COMPRESSION (résistance à la)]; ainsi que les conséquences qui en résultent, savoir que, pour qu'il n'y ait en aucun point de la surface de contact une pression négative, il faut que la résultante des pressions normales à la surface ne soit pas appliquée en un point de cette surface distant d'une arête quelconque de moins du tiers de la largeur du prisme perpendiculairement à cette arête.

Si l'on applique ces considérations à la recherche de la poussée, on devra, dans le cas où la voûte est supposée s'abaisser à la clef, prendre pour point d'application de la force horizontale N , un point situé au tiers de l'épaisseur de la clef, à partir du point A (fig. 3), et dans le cas où la voûte est supposée se soulever à la clef, prendre un point situé au tiers de l'épaisseur de la clef, mais à partir du point a . Ces deux hypothèses donneront pour N deux valeurs, beaucoup plus rapprochées que les premières, et entre lesquelles la vraie valeur de la poussée devra être comprise. On peut appliquer les mêmes considérations à tous les joints; en sorte que si l'on divise chacun d'eux en trois parties égales, qu'on joigne par une courbe continue tous les points de division situés du côté de l'intrados, et par une autre courbe tous les points de division situés du côté de l'extrados, c'est entre ces deux courbes que toutes les pressions mutuelles résultantes devront passer.

IV. On lève toute espèce d'indétermination en employant la méthode graphique suivante, due à M. Méry, ingénieur des ponts et chaussées. Soit $ACca$ (fig. 4) une demi-voûte dont on se propose

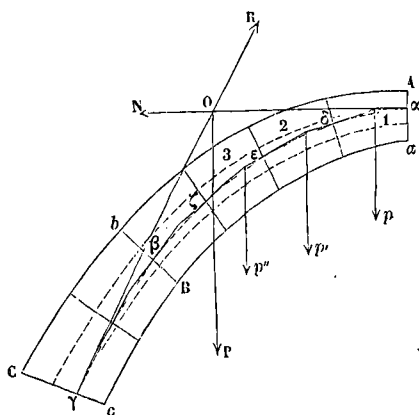


Fig. 4.

d'étudier la stabilité. On prend sur le joint Aa un point α situé au tiers à partir du point A; et sur le joint Cc un point γ situé au tiers à partir du point c . Soit P la résultante des forces extérieures qui agissent sur la voûte, γ compris son propre poids. Par le point α , on mène une horizontale pour représenter la direction de la poussée N ; cette droite coupe en un point O la direction de la force P ; on joint $O\gamma$, et l'on regarde cette droite comme la direction de la réaction R que le piedroit exerce sur la demi-voûte. Cette demi-voûte devant être en équilibre sous l'action de ces trois forces, il faut

un effet qu'elles concourent en un même point. On sait de plus que chacune d'elles doit être égale et opposée à la résultante des deux autres; si donc on décompose la force P en deux autres dirigées, l'une suivant $O\alpha$, l'autre suivant $O\gamma$, la première donnera en valeur absolue la force horizontale ou poussée N , la seconde donnera en valeur absolue la réaction du piédroit sur la voûte. Cette dernière force, prise dans le sens $O\gamma$, représentera l'action de la voûte sur le piédroit. Soient maintenant p , p' , p'' , etc., les résultantes partielles des forces extérieures qui s'exercent sur les voussoirs consécutifs à partir du sommet. Le voussoir 1 est en équilibre sous l'action de la force N , maintenant connue, de la force p , et de la réaction r que le voussoir 2 exerce sur le voussoir 1. En construisant donc la résultante des forces N et p et la prenant en sens opposé, on aura la réaction r ; en la prenant au contraire dans son sens propre, on aura la réaction r_1 que le voussoir 1 exerce sur le voussoir 2. Le voussoir 2 est en équilibre sous l'action de la force r_1 , de la force p' et de la réaction r' que le voussoir 3 exerce sur le voussoir 2; en construisant la résultante des forces r_1 et p' et la prenant en sens opposé, on aura la réaction r' ; en la prenant au contraire dans son sens propre, on aura la réaction r'_1 que le voussoir 2 exerce sur le voussoir 3. En continuant ainsi, on déterminera la réaction p que l'avant-dernier voussoir exerce sur le dernier; en la composant avec la force extérieure q qui agit sur ce dernier voussoir, on devra avoir une résultante égale et opposée à R si l'on a bien opéré. On aura déterminé ainsi d'une manière complète toutes les forces qui agissent sur les voussoirs successifs. La ligne brisée qui joint les points α , δ , ϵ , ζ , etc., γ , où sont appliquées les réactions mutuelles de ces voussoirs, est ce que M. Méry a appelé la *courbe des pressions*.

Pour que la voûte offre des garanties de stabilité suffisantes, il faut : 1° que la courbe des pressions soit comprise entre les courbes menées au tiers de l'épaisseur des joints, tant du côté de l'extrados que du côté de l'intrados; cela est nécessaire, d'après ce qui a été dit plus haut, pour qu'il n'y ait en aucun point des joints une pression négative. Il faut 2° qu'en divisant la composante normale de chacune des réactions N , r , r' , r'' , etc., par la surface du joint correspondant, ce qui donne la pression moyenne ou par mètre carré, on obtienne un résultat tout au plus égal à la pression que les matériaux peuvent supporter sans inconvénient. Cette limite doit être fixée, dans les voûtes, à 50000^{ks} pour la pierre de taille, et à 10000^{ks} en moyenne pour le moellon. Il faut 3° que la direction de chacune de ces réactions fasse avec la surface du joint un angle peu différent d'un angle droit. Quand une de ces forces est oblique au joint, elle donne lieu à une composante dirigée suivant le joint et qui mesure la tendance au glissement. A la vérité, le frottement de la pierre sur la pierre est assez considérable, puisque le coefficient de frottement (Voy. FROTTEMENT) relatif à ce cas est 0,76; la réaction pourrait donc faire avec la normale au joint un angle de 37° environ sans que le glissement eût lieu. Mais il est prudent de ne pas compter sur cette résistance au glissement, qui d'ailleurs peut être notablement diminuée si, au moment du décin-

trement de la voûte, les mortiers sont encore à demi-fluides. Il vaut donc mieux que les réactions s'écartent peu de la normale; cette observation est particulièrement applicable aux voûtes en arc de cercle.

On peut remarquer que la méthode de M. Méry ne fait aucune hypothèse sur la direction des forces p , p' , p'' , etc., P ; elle est donc applicable dans tous les cas. Au reste, la détermination exacte de ces forces est la véritable difficulté de l'application des théories qui précèdent. Si la voûte portait un fluide, la pression s'exercerait normalement en chaque point de l'extrados, et elle serait facile à évaluer. Si, comme cela arrive presque toujours, la voûte porte un massif de maçonnerie, on ne sait plus comment son poids se répartit entre les divers éléments de l'extrados. On admet généralement que chaque voussoir porte, indépendamment de son poids, celui des matériaux compris entre les plans verticaux menés par les génératrices de l'extrados qui limitent ce voussoir. Mais il est clair que cette hypothèse est arbitraire, et qu'elle peut, dans certains cas, s'éloigner beaucoup de la vérité. On a proposé de ne tenir compte que de la composante normale à l'extrados du poids des prismes ainsi déterminés, hypothèse également arbitraire. Il est vraisemblable que la vérité est entre ces deux suppositions. Quoiqu'il en soit, et quelque hypothèse qu'on adopte, on devra calculer, en général, le poids de la maçonnerie à raison de 2200^{ks} par mètre cube, et celui des surcharges diverses à raison de 1320^{ks} en moyenne.

V. Les méthodes qui viennent d'être exposées ne sont au fond qu'un système de vérifications. Connaissant l'ouverture et la hauteur de la voûte, on se donne la courbe d'intrados. On détermine l'épaisseur à la clef d'après une formule empirique due à Perronnet; en appelant e l'épaisseur cherchée, et l l'ouverture de l'intrados, on pose

$$e = 0^m,325 + 0,0347. l.$$

On se donne ensuite la courbe d'extrados; et l'on cherche si la voûte ainsi déterminée satisfait aux conditions d'équilibre et de stabilité. Si ces conditions ne sont pas remplies, on augmente l'épaisseur. Si elles sont satisfaites, on essaye au contraire de la diminuer; et c'est ainsi par tâtonnements qu'on arrive à trouver les dimensions les plus avantageuses au double point de vue de l'économie et de la solidité de la construction.

M. Yvon Villarceau, dans une série d'articles publiés dans la *Revue de l'architecture*, et dans un mémoire sur l'*Établissement des arches de pont*, a essayé d'aborder le problème en sens inverse, et de déterminer à la fois la forme d'intrados, l'épaisseur à la clef, et la forme d'extrados, connaissant l'ouverture et la hauteur de la voûte. C'est en substituant à la voûte véritable un système de voussoirs infiniment minces, ne se touchant que par une génératrice, que l'auteur est parvenu à mettre le problème en équations; et, à la suite de calculs laborieux où il a mis en usage toutes les ressources de l'analyse, il a dressé des tables qui permettent de déterminer les divers éléments de la voûte. Il nous serait impossible de suivre ce savant dans les détails de son important mémoire, et nous ne pouvons qu'y renvoyer le lecteur. Du reste, les courbes d'intrados résultant de la théorie de M. Yvon Villarceau

diffèrent peu des courbes généralement employées; elles sont plus évasées vers les reins, mais elles ne s'en éloignent que d'une faible quantité.

Pour ce qui concerne les constructions supportant la voûte, voyez les articles PIÉDROITS, PILES, CULÉES.

VI. Nous n'avons parlé encore que des voûtes droites. Dans les voûtes biaises, on observe au moment du décintrement que la plus grande contraction des matériaux a lieu dans le sens de la section droite; et l'on peut en conclure que la poussée s'exerce dans un plan perpendiculaire à l'axe de la voûte. Mais elle ne se répartit pas uniformément sur toute la longueur du piédroit; on peut s'en rendre compte de la manière suivante. Soit $ABB'A'$, $CDD'C'$ (fig. 5) la coupe horizontale d'une voûte

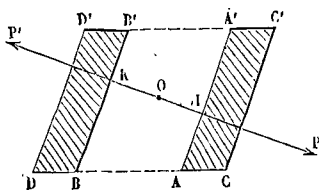


Fig. 5.

biaise faite à la hauteur des naissances; et soit O le centre du parallélogramme $AAB'A'$. Menons par le point O la droite IK perpendiculaire à AA' et à BB' . Le poids total de la voûte est une force verticale qui passe par le point O. On peut la décomposer en deux autres, situées dans le plan vertical qui a pour trace IK, et rencontrant la face supérieure des piédroits. Les composantes horizontales de ces deux forces seront dirigées suivant IK; OP et OP' peuvent représenter ces deux composantes, qui ne sont autre chose que la poussée. Or, il résulte de la figure que la force P est plus voisine de l'angle aigu A que de l'angle obtus A'; la poussée se répartit donc inégalement sur la longueur AA' du piédroit; et c'est l'angle aigu A qui supporte le plus grand effort. Ce résultat est indépendant de l'appareil de la voûte. Mais il peut se produire dans les voûtes biaises un autre effet, que l'on désigne sous le nom de *poussée au vide*, et qui dépend de l'appareil. Cet effet consiste dans la tendance que peuvent avoir les voussoirs placés aux extrémités de la voûte à glisser en dehors des plans de tête. Cette tendance est sensible dans *l'appareil hélicoïdal* (Voy. PONTS BIAIS) par suite de l'inclinaison des hélices qui servent de limites aux lits de pose des voussoirs. Il disparaît dans *l'appareil orthogonal*, surtout lorsqu'on prend pour joints continus des voussoirs de tête les cylindres qui projettent les trajectoires orthogonales sur le plan de tête. C'est là l'avantage principal de ce genre d'appareil, qui est néanmoins peu employé à cause des difficultés de son exécution. Du reste, il n'est pas complètement à l'abri de l'inconvénient que nous signalons; car, dans certains ponts des environs de Paris, construits d'après le système orthogonal, on a été obligé de relier les têtes à la voûte par des tirants en fer.

Le système de voûtes biaises, le plus avantageux au point de vue de la stabilité, est celui qui se compose d'arcs droits en retraite; il n'a d'autre incon-

véniement que d'offrir du côté de l'intrados une série de redans qui sont d'un effet désagréable à l'œil.

VII. Il nous reste à dire quelques mots des voûtes en dôme. Soit ABCD (fig. 6) la section d'une portion

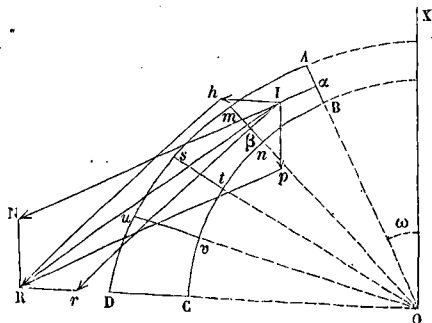


Fig. 6.

de voûte de ce genre par un plan vertical mené suivant l'axe OV. Soient AB, mn , st , uv , DC les traces sur ce plan des joints coniques qui divisent la voûte en assises. Imaginons que par des plans menés suivant OV, et formant entre eux des angles successifs égaux, on ait divisé la voûte en n tranches égales; et supposons que la figure nous représente la section d'une de ces tranches par son plan de symétrie vertical. Considérons l'équilibre de cette tranche. Soit P le poids de la partie supérieure de la voûte figurée en points. Une voûte en dôme n'a ordinairement à porter que son propre poids; cependant si la partie supérieure portait une construction quelconque, il faudrait comprendre son poids dans la force P. On peut décomposer cette force en n forces égales dirigées dans le plan de symétrie de chacune des n tranches, normalement au joint conique supérieur. Si ω désigne l'angle AOX, la composante qui agit sur AB aura pour expression $\frac{P}{n} \sin \omega$. Elle sera appliquée en un

point α , que l'on choisira de manière qu'il n'y ait point en B de pression négative et que l'arête A ne soit point écrasée. Désignons par N cette composante normale; elle se composera avec le poids p du premier voussoir, et donnera une résultante R. Mais cette résultante ne représentera pas la pression du premier voussoir sur le second. Il y a, en effet, ici une force de plus à considérer que dans les voûtes en berceau. Les faces verticales du voussoir reçoivent des voussoirs voisins des pressions que l'on peut supposer normales, et qui, à cause de la symétrie, donnent une résultante horizontale située dans le plan de la figure. On peut d'ailleurs s'imposer la condition que la pression du premier voussoir sur le second soit normale au joint conique qui les sépare. Si donc on décompose la force R en deux autres, l'une h horizontale, l'autre r perpendiculaire à mn , cette dernière représentera la pression du premier voussoir sur le second, et la première sera la résultante des pressions latérales. On pourra opérer sur le second voussoir comme on a opéré sur le premier. La force r , composée avec le poids p' du second voussoir, donnera une résultante R' , que l'on décomposera en deux: l'une h horizontale, l'autre r' perpendiculaire à st ; la pré-

mière sera la résultante des pressions latérales éprouvées par le second voussoir; la seconde sera la pression exercée par le second voussoir sur le troisième. En continuant ainsi, on déterminera toutes les forces qui agissent sur les divers voussoirs dont la tranche se compose. La dernière force analogue à r donnera la pression normale du dernier voussoir sur la face supérieure du mur circulaire qui porte la voûte; sa composante verticale sera la charge que supporte le mur, sa composante horizontale sera la poussée. Il faudra pour l'équilibre et pour la stabilité de la voûte : 1° que les pressions r soient toutes comprises entre les courbes AD et BC; 2° que leurs points d'application α , β , etc., ne soient pas trop près de l'extrados ou de l'intrados pour qu'il y ait pression négative d'un côté ou écrasement de l'autre, ce dont on jugera par des moyens analogues à ceux qui ont été exposés pour les voûtes en berceau; 3° qu'en divisant chacune de ces pressions par la surface sur laquelle elle agit, surface qu'on pourra regarder comme plane si n est suffisamment grand, le quotient ne dépasse pas la charge par mètre carré que les matériaux employés peuvent supporter sans inconvénient. — On s'est imposé la condition que toutes les pressions fussent normales, et cela est prudent dans les voûtes en dôme, voûtes ordinairement très-minces; mais si l'on croyait pouvoir compter sur la résistance au glissement, on pourrait admettre pour les forces N , r , r' , etc., une certaine inclinaison avec la normale. — Cette méthode n'est, comme on voit, qu'une extension de la méthode de

M. Méry. On pourra diviser les joints coniques en trois parties équivalentes en surfaces, par des arcs de cercle décrits du point O, et s'imposer la condition que les points d'application des forces N , r , r' , etc., soient tous compris dans la zone intermédiaire. Si les conditions dont nous avons parlé n'étaient pas remplies, on modifierait en conséquence l'épaisseur de la voûte, ou même la courbe d'extrados. En général, ces conditions exigeront que la voûte soit plus épaisse aux naissances qu'à la clef; la même remarque s'applique aux voûtes en berceau (*Voy. le Cours des routes et ponts*, professé à l'École centrale, par M. Mary; le *Cours de Mécanique appliquée*, de M. Bélanger; le *Mémoire*, de M. Yvon Villarceau, *sur les arches de pont*; le *Mémoire* de M. Méry, inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, etc., etc.).

POUTRE COURBE. *Voy. PIÈCES COURBES.*

POUTRE DROITE. On désigne quelquefois sous ce nom l'ensemble des questions relatives à la RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (*voy. ce mot*) auxquelles peut donner lieu l'étude des poutres droites, et en général de toutes les pièces prismatiques qui entrent dans la construction des édifices ou des machines. (*Voy. FLEXION PLANE.*)

POUTRES ARMÉES. Poutres composées de plusieurs pièces de bois, disposées de manière à augmenter la résistance à la flexion sans augmenter l'équarrissage.

I. Deux dispositions principales sont employées pour armer une poutre. La première consiste à placer sur la pièce principale AA (*fig. 1*), qui prend

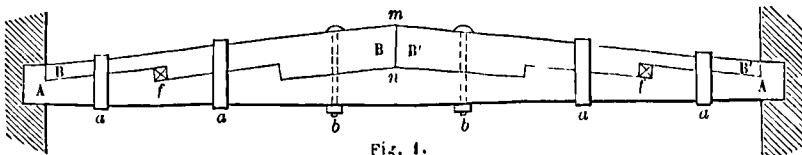


Fig. 1.

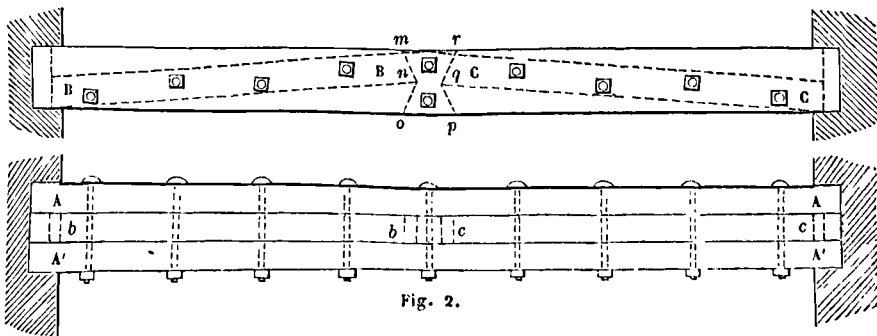


Fig. 2.

le nom de *mèche*, deux pièces secondaires égales BB, B'B', que l'on appelle *fouurrures*, qui s'arc-boutent mutuellement suivant la face verticale commune mn, et qui s'appuient sur la mèche par des redans analogues à ceux des pièces *embrevées* (*voy. ASSEMBLAGES*); la mèche et les fouurrures sont en outre reliées par des brides en fer a , a , a , etc., ou par des boulons b , b . (On a supprimé sur la figure la bride du milieu, afin de laisser voir le joint mn.) Comme il est important que les pièces soient exactement assemblées, et qu'il serait trop difficile de tailler les redans avec une exactitude mathématique, on laisse volontairement un peu de jeu, et,

au moment de la pose, on opère le serrage en introduisant les clefs f entre la mèche et chaque fouurrure. Par un motif analogue, on introduit quelquefois un coin entre les deux fouurrures, suivant la face mn, avant de poser la bride du milieu. Par ce système, la résistance de la poutre à la flexion se trouve notablement augmentée, sans qu'il ait été nécessaire de recourir à des bois d'un plus fort équarrissage.

La seconde disposition usitée consiste à remplacer la poutre principale par deux poutres jumelles AA, AA (*fig. 2*), entre lesquelles on laisse un intervalle égal à leur propre largeur, c'est-à-dire à peu

près le tiers de leur épaisseur dans le sens vertical. Ces poutres sont reliées à leurs extrémités par des traverses, auxquelles on donne le nom de *coussinets*, et qui sont assemblées à tenon et embrèvement; elles sont en outre réunies en leur milieu par une clef ou poinçon *mnopqr*, en forme de queue d'hironde, qui s'engage dans les joues des deux poutres. Dans l'intervalle de ces poutres viennent se placer ensuite deux pièces de même épaisseur qu'elles, *bb*, *BB* et *cc*, *CC*, figurées en points sur la projection verticale, et auxquelles on donne le nom d'*arbalétriers*; ces arbalétriers s'appuient d'une part sur les coussinets et de l'autre sur le poinçon, et on les taille de manière qu'ils entrent à force entre ces points d'appui. Tout le système est enfin relié par des boulons horizontaux. Cette espèce de poutres armées a été employé particulièrement dans la restauration de l'ancien Louvre et du Palais-Royal. (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy.)

On a proposé, et employé même quelquefois, d'autres dispositions pour la construction des poutres armées. Ainsi, au lieu de mettre simplement les arbalétriers en contact avec les pièces latérales, comme dans la fig. 2, on les a encastrés de la moitié de leur épaisseur dans chacune de ces pièces creusées à mi-bois à cet effet; mais il est clair que, malgré les entailles plus ou moins complexes données alors aux arbalétriers, le système n'offre pas plus de résistance que les deux pièces *AA* et *A'A'* réunies simplement sans arbalétriers. On a proposé, pour armer une poutre, de la scier en trois dans le sens de sa largeur, de faire prendre à la pièce du milieu une certaine courbure vers le haut, et de boulonner les trois pièces dans cette position relative. La pratique n'a point constaté l'efficacité de ce système. On s'est quelquefois contenté de doubler l'épaisseur de la poutre dans le sens vertical, au moyen d'une seconde poutre assemblée à entailles avec la première; mais le système de la fig. 1 est préférable, puisqu'il n'emploie que des bois auxiliaires moins longs. Enfin, on a réuni des pièces placées parallèlement à côté l'une de l'autre par des entailles horizontales. Il est clair que dans ce cas la résistance à la flexion n'est pas augmentée dans le même rapport que par l'emploi du système représenté fig. 1, attendu que la résistance croît comme la simple largeur, tandis qu'elle varie proportionnellement au carré de la hauteur. (Voy. *RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*.)

II. On donne aussi le nom de *poutres armées* aux poutres en fer à la Polonceau, c'est-à-dire à des poutres dont les extrémités *A* et *B* (fig. 3) sont re-

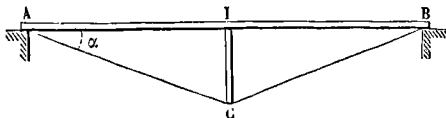


Fig. 3.

liées par des tirants *AC* et *BC* à un poinçon ou à une bielle *IC*, placée perpendiculairement à la poutre en son milieu *I*. Ces poutres offrent une résistance beaucoup plus grande que les poutres simples, et présentent, par conséquent, comparati-

vement à celles-ci, une économie notable. Soit, en effet, *p* le poids par mètre dont on peut charger uniformément une pareille poutre supposée placée sur deux appuis de niveau en *A* et en *B*, et soit *R* la tension par unité de surface qu'on ne veut pas dépasser; soit *t* la tension de l'un quelconque des tirants, *Q* la pression qu'éprouve la bielle, et α l'angle *IAC* d'un tirant avec la poutre.

Si l'on considère la poutre comme reposant sur trois appuis de niveau *A*, *I*, *B*, on trouvera pour la réaction de l'appui intermédiaire (*Voy.* *FLEXION PLANE*)

$$\frac{5}{8} pl,$$

en appelant *l* la longueur de la poutre. Cette réaction est égale et opposée à la pression *Q*. On a donc

$$Q = \frac{5}{8} pl. \quad [1]$$

Considérons maintenant l'équilibre du point *C*; en égalant à zéro la somme des projections sur la direction *IC*, des trois forces qui le sollicitent, on trouve

$$Q - 2t \sin \alpha = 0, \text{ d'où } t = \frac{16 \sin \alpha}{5 pl}. \quad [2]$$

On appliquera ensuite la formule de la résistance

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{T}{\Omega},$$

en prenant pour *T* la projection $-t \cos \alpha$ de la tension du tirant *BC* sur la direction de la poutre, et pour μ le maximum du moment fléchissant, lequel a lieu au milieu *I* de la poutre, et a pour valeur

$$\mu = \frac{1}{8} p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl^2}{32}, \quad [3]$$

ce qui donnera

$$R = \frac{vp l^2}{32I} + \frac{t \cos \alpha}{\Omega},$$

ou, en mettant pour *t* sa valeur,

$$R = \frac{vp l^2}{32I} + \frac{5pl \cot \alpha}{16\Omega}. \quad [4]$$

Si *p'* représente le poids par mètre dont on pourrait charger la même poutre non armée, pour ne pas dépasser la résistance *R*, on trouve

$$R = \frac{vp' l^2}{8I}. \quad [5]$$

La valeur de *p'* qu'on tire de cette formule est généralement beaucoup plus petite que la valeur de *p* déduite de la relation [1].

On fait généralement IC égal à $\frac{1}{6} l$; il en résulte

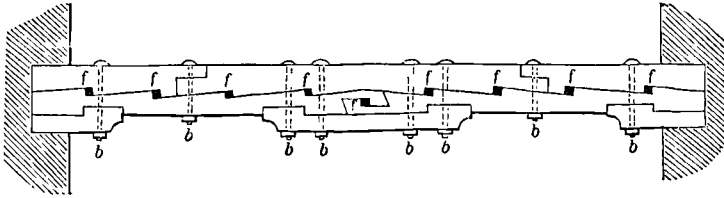
que l'angle α est l'angle dont la tangente est $\frac{1}{3}$; soit $18^\circ 26'$ environ. Sa cotangente est égale à 3.

Les relations [1] et [2] servent à déterminer les dimensions transversales de la bielle et des tirants. (*Voy.* *COMPRESSION, ALLONGEMENT*.)

POUTRES D'ASSEMBLAGES. Poutres formées par la réunion de plusieurs pièces de bois d'une longueur moindre que la portée totale qu'on veut obtenir. La figure représente un exemple d'une poutre d'assemblage. On voit qu'elle est formée de huit pièces de bois, assemblées par des entailles, serrées par des clefs *f*, *f*, etc., et reliées en outre par des boulons *b*, *b*, etc. Cette figure suffit pour donner une idée de ce mode d'assemblage. Mais on a souvent employé des systèmes beaucoup plus

complexes. Les poutres de la grande salle de l'hôtel de ville de Maestricht, qui ont 9 mètres de long, se composent chacune de dix pièces; celles de la grande salle de l'hôtel de ville d'Amsterdam, qui

ont 11 mètres de long, se composent chacune de douze pièces. On trouvera les dessins détaillés de ces poutres dans le *Traité de Charpente* de J. Adhémar, pl. XVI.



POUTRES EN TREILLIS. Voy. PONTS EN CHARPENTE.

PRAIRIAL. Neuvième mois du Calendrier républicain. Il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 20 mai et le 20 juin (Voy. CALENDRIER).

PRÉCEINTE. Forte liaison, en saillie sur le BORDÉ d'un navire, à la hauteur du premier et du deuxième FONT, et formée par trois VIRURES d'une plus forte section (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

La préceinte, placée à la hauteur des gaillards, prend le nom de VIRORD.

PRÉCESSION DES ÉQUINOXES. Mouvement lent des équinoxes sur l'écliptique, en sens inverse du mouvement réel de la Terre, ou du mouvement apparent du Soleil. En observant les étoiles pendant une longue période d'années, on reconnaît que leurs coordonnées équatoriales varient d'une manière en apparence assez compliquée; mais si l'on passe des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques, on s'aperçoit que les latitudes restent sensiblement constantes, tandis que les longitudes augmentent toutes de la même quantité. Cet accroissement de longitude est uniforme. Il est dû au mouvement rétrograde des équinoxes sur l'écliptique, mouvement qui est de 50",2 par année. Il en résulte que le Soleil revient à l'équinoxe 50",2 plus tôt qu'il ne ferait si l'équinoxe était fixe, d'où le nom de *précession des équinoxes*. On fait voir dans la *Mécanique céleste* que le mouvement dont il s'agit est dû à l'action du Soleil sur le renflement équatorial du globe terrestre; l'axe de la Terre, au lieu de conserver son parallélisme dans l'espace, comme on peut l'admettre dans une première approximation, tourne d'un mouvement lent, uniforme et rétrograde autour de l'axe de l'écliptique; il en résulte que l'équateur, tout en continuant à faire le même angle avec l'écliptique, coupe celui-ci suivant une droite qui tourne elle-même lentement, uniformément, et dans le sens rétrograde, autour de l'axe de l'écliptique; or, les extrémités de cette intersection sont précisément les équinoxes.

La précession a été découverte par Hipparque, vers la fin du II^e siècle avant J. C. Ce phénomène a plusieurs conséquences qu'il est utile de consigner. En premier lieu, le déplacement du pôle de l'équateur autour du pôle de l'écliptique fait varier les distances polaires des étoiles. L'étoile qui porte aujourd'hui le nom d'*étoile Polaire* était à 12° du pôle à l'époque des plus anciennes observations; elle en est aujourd'hui à 1°28'. En 2605, elle n'en sera plus qu'à 26'30", puis elle s'en éloignera jusqu'à 46' dans l'espace de 13 000 ans. pour s'en rapprocher ensuite.

En second lieu, la précession a pour effet de rendre visibles certaines étoiles qui étaient autrefois au-dessous de l'horizon, et invisibles d'autres étoiles qui se trouvaient précédemment au-dessus.

Enfin, la précession a détruit la correspondance qui existait primitivement entre les *signes du zodiaque* (Voy. ces mots) et les constellations qui portent les mêmes noms. Avant Hipparque, et vers l'année 289 avant J. C., l'équinoxe du printemps répondait à l'origine de la constellation du *Bélier*; aujourd'hui il est à 30° environ en arrière, c'est-à-dire dans la constellation des Poissons. On a conservé la convention d'après laquelle le point vernal répond à l'origine du signe du Bélier; mais il en résulte que les signes ne correspondent plus aux constellations de même nom.

Le phénomène de la précession des équinoxes se complique de celui de la *NUTATION* (Voy. ce mot); en sorte que le nombre 50",2 donné plus haut n'est qu'une valeur moyenne de la rétrogradation annuelle du point vernal.

PRESSE À COINS, machine dans laquelle le coin est employé à exercer une pression sur des matières dont on se propose ordinairement d'extraire un suc liquide. Les matières placées dans un sac sont pressées par une pièce de bois M (fig. 1) qui

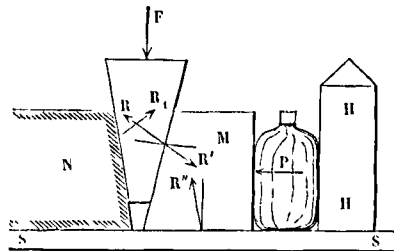


Fig. 1.

peut se mouvoir horizontalement sur un support SS. Le coin ABCD est introduit entre la pièce mobile M et une pièce fixe N. Si l'on exerce un effort vertical F sur la tête du coin, on l'oblige à pénétrer d'une certaine quantité entre les pièces M et N; par suite, la pièce mobile s'écarte et comprime les matières placées entre elle et une paroi fixe HH, en exerçant sur elle un effort horizontal que nous désignerons par P. Dans la recherche de la relation qui lie les forces F et P, on néglige le poids du coin et celui de la pièce mobile M.

1. La question peut d'abord être résolue graphiquement. Si l'on considère à part le coin ABCD, on voit qu'il doit être en équilibre sous l'action de la force F et des réactions R et R₁, qu'il reçoit sur ses

faces AD et BC, réactions dont la direction est connue, puisque chacune d'elles fait avec la normale à la face correspondante du coin un angle égal à l'angle φ du frottement. Si donc on mène (fig. 2) une verti-

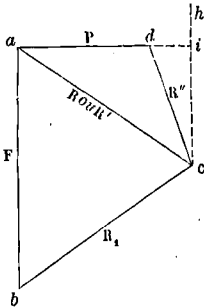


Fig. 2.

cale ab pour représenter la force F , et que par les points a et b on mène des droites respectivement parallèles aux réactions R et R_1 , lesquelles se couperont en un point c , les côtés ac et bc du triangle abc représenteront ces deux forces en grandeur et en direction. Si l'on considère ensuite la pièce mobile M (fig. 1), on voit qu'elle doit être en équilibre sous l'action d'une force R' égale et opposée à R , qui est exercée par le coin, d'une force égale et contraire à P , exercée par les matières pressées, enfin d'une réaction R'' exercée par le support SS . Cette dernière fait avec la verticale un angle égal à l'angle φ , si l'on suppose que la nature des surfaces frottantes soit la même que pour le coin ; sa direction est donc connue. Si donc on mène par le point a (fig. 2) une horizontale, et par le point c une parallèle à R'' , on formera un triangle acd dont les côtés ac , cd et ad seront respectivement proportionnels aux forces R' , R'' et P ; et, puisque ac représente R , et par conséquent aussi R' , il en résulte que cd représentera R'' , et que ad représentera la pression P . Le rapport des forces F et P sera donc celui des lignes ab et ad .

II. On peut déduire de la figure 2 la relation analytique qui lie les forces F et P . Nous supposons le coin isocèle, comme cela a lieu le plus souvent; il en résultera $R_1 = R$, et par conséquent $ac = bc$. Le triangle abc donnera

$$\frac{R}{F} = \frac{ac}{ab} = \frac{\sin abc}{\sin acb}.$$

Le triangle acd donnera de même

$$\frac{P}{R} = \frac{ad}{ac} = \frac{\sin acd}{\sin adc}.$$

Par conséquent, on obtient en multipliant membre à membre

$$\frac{P}{F} = \frac{\sin acd \cdot \sin abc}{\sin adc \cdot \sin acb}. \quad [1]$$

Or, si l'on mène ch parallèle à ab , et que l'on prolonge ad jusqu'en i , on trouve

$$abc = bac = A - \varphi,$$

A désignant l'angle à la base du coin (Voy. COIN). On a ensuite

$$cad = 90^\circ - bac = 90^\circ - (A - \varphi),$$

$$acd = hca - hcd = bac - \varphi = A - 2\varphi,$$

$$adc = 90^\circ + hcd = 90^\circ + \varphi,$$

enfin $acb = 180^\circ - 2bac = 180^\circ - 2(A - \varphi).$

En substituant ces valeurs dans l'expression [1], on trouve

$$\frac{P}{F} = \frac{\sin(A - 2\varphi) \cdot \sin(A - \varphi)}{\cos\varphi \cdot 2\sin(A - \varphi)\cos(A - \varphi)} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} [2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(A - 2\varphi)}{\cos\varphi \cos(A - \varphi)}.$$

Si, par exemple, on a $A = 80^\circ$ et $\varphi = 6^\circ$, on trouvera

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 68^\circ}{\cos 6^\circ \cdot \cos 74^\circ} = 1,691.$$

III. Si l'on ne tient pas à avoir une formule directement calculable par logarithmes, on peut mettre la relation [2] sous une forme plus simple; il suffit pour cela de développer le numérateur et d'effectuer la division, ce qui donne

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{2} \cdot [\tan(A - \varphi) - \tan\varphi], \quad [3]$$

formule facile à retenir. Elle montre que la pression produite est d'autant plus grande, pour un même effort moteur F sur la tête du coin, que l'angle A est plus grand, c'est-à-dire que le coin est plus aigu. Elle montre aussi que la pression diminue quand le frottement augmente. Si l'angle φ s'élevait jusqu'à la valeur $\frac{1}{2}A$, on aurait $P = 0$, indépendamment de l'effort F exercé.

En développant la formule [3] on peut la transformer en une autre qui ne contienne que le coefficient de frottement f , et dispense ainsi de déterminer l'angle φ . On trouve

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{2} \left[\frac{\tan A - f}{1 + f \tan A} - f \right]. \quad [4]$$

IV. On arrive au même résultat par des considérations analytiques. Pour cela, il est commode de remplacer la réaction R par sa composante normale N et par sa composante tangentielle fN (Voy. FROTTEMENT) et d'opérer de même pour les réactions R' et R'' . On trouve d'abord, en considérant l'équilibre du coin seul (Voy. COIN),

$$F = 2N(\cos A + f \cdot \sin A). \quad [5]$$

En considérant ensuite la pièce mobile, et projetant successivement les forces qui la sollicitent sur la direction verticale et sur la direction de P ,

$$N' \cos A + fN' \sin A - N'' = 0,$$

$$N' \sin A - fN' \cos A - fN'' - P = 0.$$

En éliminant N'' entre ces deux dernières relations, et remplaçant N' par son égale N , on obtient

$$P = N(\sin A - f \cdot \cos A) - fN(\cos A + f \sin A);$$

par suite

$$\frac{P}{F} = \frac{(\sin A - f \cos A) - f(\cos A + f \sin A)}{2(\cos A + f \sin A)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A - f}{1 + f \tan A} - f \right);$$

c'est la relation [4] précédemment obtenue. Cette méthode analytique est celle qui a été indiquée par M. Bélanger dans son cours à l'École centrale des arts et manufactures.

V. Il est utile de connaître le rapport entre le travail moteur produit par la force F pour un déplacement quelconque du coin, et le travail résistant développé par la force P . Supposons que le coin qui occupait la position initiale ABCD (fig. 3) soit venu prendre la position A'B'C'D' en glissant le long de BC. Le chemin parcouru dans le sens de la force F sera la distance des droites AB et A'B', c'est-à-dire la perpendiculaire A*i* abaissée

du point A sur A'B'. Le chemin parcouru dans le sens horizontal sera la distance A'K. On aura donc

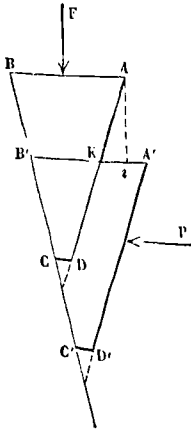


Fig. 3.

$$\frac{CP}{CF} = \frac{P \cdot A'K}{F \cdot Ai} = \frac{P}{F} \cdot \frac{A'K}{Ai}$$

Or, $A'K = 2 Ki = 2 \cdot \frac{Ai}{\tan A Ki} = \frac{2 Ai}{\tan A}$;

il vient donc

$$\frac{CP}{CF} = \frac{P}{F} \cdot \frac{2}{\tan A} = \frac{\tan(A - \varphi) - \tan \varphi}{\tan A} \quad [6]$$

Dans l'exemple traité plus haut, on aurait

$$\frac{CP}{CF} = \frac{\tan 74^\circ - \tan 6^\circ}{\tan 80^\circ} = 0,596.$$

La formule [6] montre que le travail développé par la force P, ou, ce qui revient au même, le travail de compression exercé sur les matières pressées, est toujours moindre que le travail moteur.

La perte de travail est plus considérable lorsque, au lieu d'exercer sur la tête du coin un effort continu, on agit par choc, comme cela a ordinairement lieu; la déformation de la tête du coin et les ébranlements produits dans toute la machine absorbent une portion notable du travail moteur, et, par suite, une partie notable du travail transmis aux matières pressées (Voy. TRANSMISSION DU TRAVAIL). On atténue la perte due au choc en augmentant la masse du corps choquant (Voy. Choc).

PRESSE HYDRAULIQUE, machine destinée à transmettre de grandes pressions par l'intermédiaire d'un liquide. Le principe de la presse hydraulique est dû à Pascal, qui l'a fait connaître vers le milieu du XVII^e siècle. Il n'est autre au fond que le principe des VASES COMMUNIQUANTS (Voy. ce mot).

I. Soient V et v (fig. 1) deux vases cylindriques, remplis d'un liquide, d'eau par exemple, et communiquant entre eux. Supposons les niveaux supérieurs AB et ab pressés chacun par un piston de même section que le vase, et chargés de poids que nous représenterons par P et par p, y compris le poids des pistons eux-mêmes. Soit h la différence de niveau des plans AB et ab, et H le poids du mètre cube du liquide considéré. Soient enfin Ω et ω les aires des deux pistons. Si le système est en équilibre, la pression par mètre doit être la même en tous les points d'une même couche de niveau. Si, par conséquent, on prolonge le plan AB jusqu'en

mn dans le second vase, la pression par mètre devra être la même sur AB et sur mn. Or, sur AB, la pression totale est P; la pression par mètre est donc $\frac{P}{\Omega}$. Sur ab, la pression totale est $p + \Pi\omega h$, c'est-à-dire égale au poids p, plus le poids de la

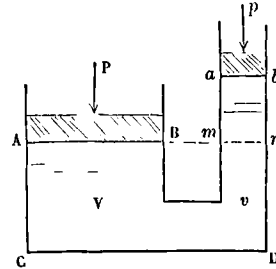


Fig. 1.

colonne liquide abmn; la pression par mètre est donc $\frac{p}{\omega} + \Pi h$; et l'on doit avoir

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{p}{\omega} + \Pi h. \quad [1]$$

Si h est nul, ou si le second terme du second membre est négligeable vis-à-vis du premier, ce qui a le plus souvent lieu, il reste

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{p}{\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{p} = \frac{\Omega}{\omega}, \quad [2]$$

c'est-à-dire que les poids qui se font équilibre dans ces deux vases sont proportionnels à la section de ces vases.

II. Ce principe peut encore être démontré d'une autre manière. Concevons que, sous l'action du poids p le niveau ab s'abaisse d'une petite quantité x; en vertu de l'incompressibilité du liquide, il faudra que le niveau AB s'élève d'une quantité correspondante z, telle que le volume q sorti du vase de droite soit égal au volume introduit dans le vase de gauche, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\omega x = \Omega z = q. \quad [3]$$

Appliquons à ce petit mouvement le principe du travail virtuel, le travail de p sera px, le travail de P sera Pz, le travail de la pesanteur sera Πq.h (Voy. TRAVAIL DE LA PESANTEUR); on aura donc

$$px + \Pi q h = Pz;$$

ou, en mettant pour z et z leurs valeurs tirées de [3],

$$\frac{pq}{\omega} + \Pi q h = \frac{Pq}{\Omega};$$

et, en divisant par q,

$$\frac{p}{\omega} + \Pi h = \frac{P}{\Omega};$$

ce qui n'est autre chose que l'équation [1].

III. D'après ce principe, on voit que l'on peut, avec un faible poids p, faire équilibre à un poids considérable P; il suffit pour cela que le rapport de ω à Ω soit suffisamment petit. Mais si l'on voulait faire usage de ce principe avec un appareil constitué, comme l'indique la figure 1, on serait arrêté par l'impossibilité d'empêcher le liquide de s'échapper entre le piston et la paroi du vase, quelque bien ajusté que le piston puisse être. C'est l'ingénieur anglais Bramah qui a trouvé, à la fin du siècle dernier (1796), le moyen de rendre cette fuite d'eau impossible, et qui, par là, a fait entrer dans le do-

maîne de la pratique une machine qui n'avait été jusque-là qu'une curiosité théorique.

Le moyen imaginé par Bramah consiste à entourer le piston d'un cuir embouti, c'est-à-dire d'une sorte d'anneau, formé d'un cuir rendu flexible, et affectant la forme AA représentée en coupe et en plan sur la figure 2. Une cavité pratiquée dans la paroi du vase sert à loger le cuir. L'eau, sous l'influence de la pression qu'elle supporte, s'échappe bien entre le piston P et la paroi Q; mais elle pénètre dans l'anneau de cuir, et le force à s'appliquer d'une part contre la paroi et de l'autre contre le piston, de manière à empêcher toute fuite d'eau.

IV. Voici comment est aujourd'hui disposée une presse hydraulique.

Le grand piston AA (fig. 3), qui est une sorte de

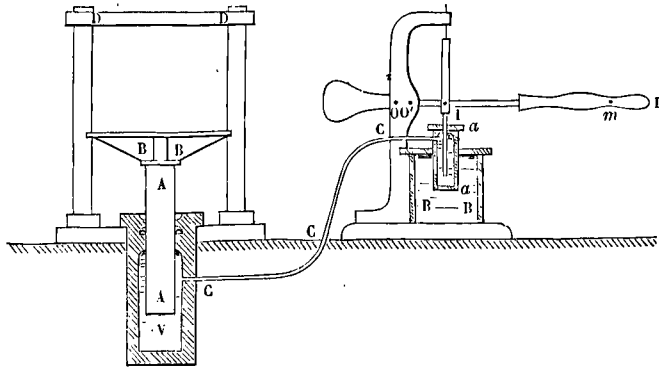


Fig. 3.

piston plongeur, porte à la partie supérieure un plateau BB sur lequel on place les matières à presser. Une petite pompe aspirante et foulante aa, que l'on manœuvre à l'aide d'un levier L mobile autour de l'axe O, extrait l'eau contenue dans un réservoir BB, la refoule par le conduit CCC dans le cylindre V où se meut le piston AA, et oblige celui-ci à s'élever. Les matières placées sur le plateau BB sont ainsi graduellement comprimées entre ce plateau, mobile avec le piston, et un plateau fixe DD solidement relié au cylindre V.

On peut se rendre compte de la pression qu'un homme, appliqué au levier L, peut exercer ainsi par l'intermédiaire de la presse. Comme il ne s'agit que d'un travail intermittent, on peut imposer à l'homme un effort de 25^k. Soit l la distance entre le point d'application m de cet effort et l'axe de rotation O, et soit λ la distance entre ce même axe et

le point d'articulation I de la tige de la pompe; l'effort transmis par le piston de cette pompe sera exprimé par $25^k \cdot \frac{l}{\lambda}$, d'après la théorie du levier (Voy. LEVIER). Soient ω et Ω les sections des deux pistons, on aura l'effort exercé sur le grand piston en multipliant l'effort exercé sur le petit par le rapport $\frac{\Omega}{\omega}$ (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE), ou $\frac{D^2}{d^2}$, en désignant par D et d les diamètres des deux pistons, ce qui donnera

$$25^k \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{D^2}{d^2}$$

Si, par exemple, on suppose $l=12\lambda$ et $D=10d$, on obtiendra $25^k \cdot 12 \cdot 100$ ou 30000^k pour la pression transmise aux matières à presser. Il faut compter de 15 à 20 pour 100 de perte due aux frottements. Mais, vers la fin de l'opération, lorsque la pression à exercer doit devenir plus grande, on peut, sans inconvénient, exiger de l'homme un effort supérieur à 25^k, et qui pourrait au besoin être porté jusqu'à 50^k. On a d'ailleurs un autre moyen d'exercer une pression plus grande sans imposer à l'homme un plus grand effort, c'est de diminuer la distance OI. Pour cela, on retire le boulon qui sert d'axe en O, et on l'introduit en O', plus près du point d'articulation I. On peut ainsi doubler le rapport de l à λ, et par suite la pression transmise aux matières à comprimer.

La considération du travail des forces permet d'ailleurs de calculer la force F qui doit être exercée par l'homme pour produire une pression P déterminée. En conservant, en effet, les notations employées plus haut, on aura, pour le travail moteur, $F \cdot z \cdot \frac{l}{\lambda}$, et, pour le travail de la résistance principale, Pz. Quant au travail du frottement exercé par le cuir embouti, en nommant e la hauteur de cette garniture, et f le coefficient du frottement, qui peut être évalué à $\frac{1}{6}$, on aura $P \cdot \pi \cdot D \cdot e \cdot f \cdot z$. En négligeant les autres résistances passives, telles que le

frottement du petit piston et celui de l'eau contre les parois du conduit CCC, on devra donc avoir

$$Fz \frac{l}{\lambda} = Pz + P \cdot \pi \cdot D \cdot e \cdot f \cdot z,$$

d'où

$$F = P \cdot \frac{z}{z} \cdot \frac{\lambda}{l} (1 + \pi D e f) = P \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{D^2}{D^2} (1 + \pi D e f). \quad [4]$$

La même équation servirait à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire à déterminer le diamètre D qu'il convient de donner au grand piston pour produire une pression P en n'imposant au moteur qu'un effort F déterminé à l'avance.

V. La machine offre plusieurs parties accessoires qui n'ont pu être représentées sur la figure. — En premier lieu, pour éviter que la pression ne dépasse la limite fixée par la résistance des parois, on adapte, près de la pompe, une soupape de sûreté. C'est une soupape conique aa (fig. 4) qui ferme un

conduit *tt* par lequel l'eau peut au besoin s'écouler. Cette soupape est pressée par un levier mobile autour d'un axe fixe *O*, et que sollicite à l'autre extrémité un poids *P*, réglé de telle sorte que la soupape

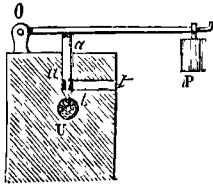


Fig. 4.

ne soit soulevée que lorsque la pression exercée par l'eau en *U* atteint la limite fixée à l'avance.

Il existe près de la pompe un autre conduit par lequel l'eau peut s'écouler, mais qui, dans l'état ordinaire, est fermé à l'aide d'une vis formant soupape. Lorsque l'opération est terminée, on fait

tourner cette vis de manière à ouvrir le conduit; l'eau s'écoule, le piston *AA* redescend, et la presse cesse d'agir sur les matières soumises à son action.

VI. La presse hydraulique est aujourd'hui d'un emploi très-général dans l'industrie. On s'en sert non-seulement pour presser les draps, le papier et autres matières molles, mais on l'emploie pour éprouver les fers en les soumettant soit à un effort de traction, soit à un effort transversal tendant à en opérer la rupture. On s'en est servi également dans les grands travaux de construction, pour élever des fardeaux d'un poids considérable, tels que des travées entières du pont tubulaire de l'île d'Anglesey, etc., etc.

PRESSE MONÉTAIRE, machine employée à la fabrication des monnaies et qui a remplacé l'ancien **BALANCIER MONÉTAIRE** (*Voy. ce mot*). La presse monétaire, due à M. Thonnellier, agit sans choc et d'une manière continue. Elle est représentée par la figur 1, que nous empruntons au *Cours élémen-*

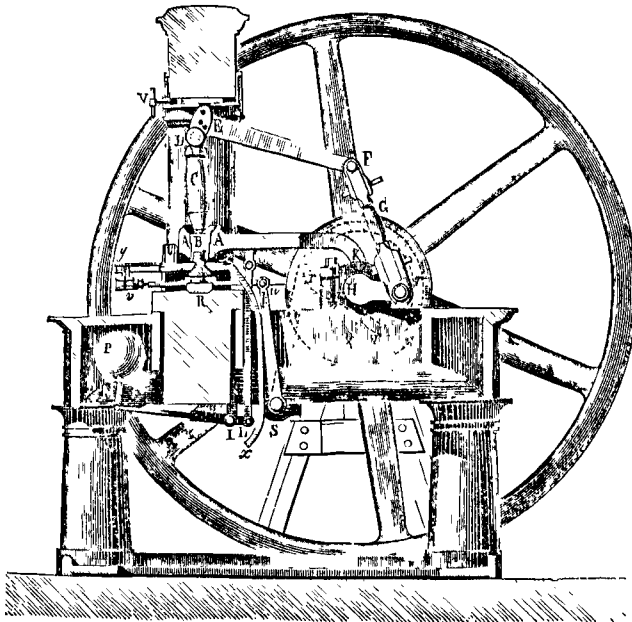


Fig. 1.

taire de Mécanique de M. Delaunay. La disposition des coins et de la virole est la même que dans le balancier monétaire; et l'on donne encore le nom de *botte-coulante* à la pièce *AA* qui porte le coin supérieur *B*, bien qu'elle n'ait pas exactement la même fonction que dans le balancier monétaire. La pression qui fait pénétrer la matière du *flan* dans le creux des coins et de la virole, est transmise au coin supérieur *B* par l'intermédiaire d'une colonne *C*, appelée *colonne de pression*, et terminée inférieurement par une surface sphérique ou *rotule*. Elle reçoit elle-même la pression d'un levier coudé *DEF*, mobile autour du point fixe *E*, et dont l'extrémité *D*, de forme sphérique, s'emboîte dans une cavité de même forme pratiquée dans la tête de la colonne *C*. L'extrémité *F* de ce levier est mise en mouvement à l'aide d'une bielle *G* et d'une mani-

velle *H*, montée sur l'arbre du volant d'une machine à vapeur. Chaque fois que l'extrémité *F* s'élève, l'extrémité *D* s'abaisse, et exerce, par l'intermédiaire de la colonne *C*, une forte pression sur le coin supérieur *B*. Chaque fois, au contraire, que l'extrémité *F* s'abaisse, l'extrémité *D* se relève, et la colonne *C* cesse de presser le coin supérieur. La botte coulante *AA* fait partie d'un levier *AK*, mobile autour du point *K*; un autre levier *LM*, mobile autour du point fixe *L*, et chargé à son extrémité d'un contrepoids *P*, tend sans cesse à relever le levier *AK*. Il en résulte que, dès que la colonne *C* cesse de presser le coin supérieur, ce coin, et la botte coulante qui le porte, se relèvent d'une certaine quantité.

Dans l'épaisseur d'un plateau *Q*, monté sur l'arbre du volant, est pratiquée une coulisse excentrique

rr, dans laquelle s'engage un bouton fixé à l'extrémité d'un levier coudé *rst*, mobile autour du point fixe *t*, et articulé avec une tringle *uv* qui peut prendre ainsi un mouvement de va-et-vient. Cette tringle n'est pas droite; elle porte vers son milieu une partie inclinée; il en résulte que lorsque, par l'effet de la rotation de l'excentrique et du mouvement du levier coudé *rst*, cette tringle est tirée vers la droite, elle soulève le coin inférieur R, de la quantité nécessaire pour amener la face inférieure de la pièce frappée à la hauteur du bord supérieur de la virole. Dans le plan de ce bord supérieur est établie la *main-poseur*, qui est mobile avec la tringle *uv*, et prend, par conséquent, un mouvement de va-et-vient rectiligne; au lieu de tourner autour d'un axe fixe comme dans le balancier monétaire. Cette pièce est à trois branches, et a la forme représentée par la figure 2. En X est établi un gobe-

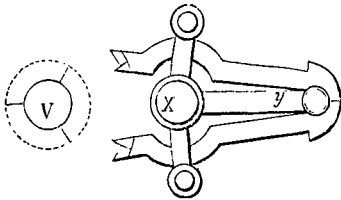


Fig. 2.

lot cylindrique, sans fond, dans lequel on place à l'avance une pile de flans. Quand la *main-poseur* marche vers la droite, en passant entre les supports fixes de ce gobelet, ses deux branches latérales se rapprochent de la pièce du milieu, et saisissent le flan placé au-dessous de la pile; en même temps ces deux branches extrêmes réunies poussent la pièce qui vient d'être frappée, et qui se trouve en ce moment au-dessus de la virole V, et chassent cette pièce dans un conduit que l'on voit en *xx* sur la figure 1, et d'où elle tombe dans une corbeille disposée pour la recevoir. Dès que les saillies latérales de la *main-poseur* ont dépassé les supports du gobelet, les branches latérales se rouvrent, et le flan est déposé sur le coin inférieur, au niveau de la virole. Quand la tringle *uv* et la *main-poseur* retournent vers la gauche, le coin inférieur redescend à sa place, le flan qui vient d'y être posé pénètre dans la virole; la *main-poseur* est remise dans sa position primitive, et tout se trouve disposé de nouveau pour que le flan reçoive la pression du coin supérieur. L'opération peut se prolonger ainsi indéfiniment; l'ouvrier qui surveille le travail n'a d'autre soin que de remplir le gobelet de flans à mesure qu'il se vide.

Une presse monétaire peut frapper ainsi de 45 à 50 pièces de 5 francs par minute, de 65 à 70 pièces d'or, ou autant de pièces de 2 francs. A l'hôtel de la Monnaie de Paris, il y a de 12 à 15 presses en activité; elles sont mises en mouvement par des machines à vapeur du système de Woolff; et exigent chacune un travail de 2 à 3 chevaux-vapeur.

Le bâti de la machine est en fonte, et venu d'une seule pièce, ce qui est une condition essentielle pour la solidité de l'appareil, à cause des pressions énormes et intermittentes auxquelles il est soumis. — On règle la distance des coins en faisant varier le point de rotation E du levier DEF;

pour cela on se sert d'un coin introduit entre le tampon d'acier sur lequel se trouve le point E, et la partie supérieure du massif; une vis V sert à faire pénétrer le coin plus ou moins, suivant qu'on veut rapprocher ou écarter les coins agissant sur le flan. — Dans les presses monétaires du système Thonnelier, construites par M. Cail, le volant est monté sur son axe de manière à pouvoir tourner dans son moyeu quand la résistance à vaincre est trop forte; cette disposition diminue les dangers de rupture.

L'avantage des presses monétaires sur les balanciers est facile à saisir. En premier lieu le travail est beaucoup plus régulier, puisque la pression exercée à chaque coup est toujours la même, tandis qu'elle varie nécessairement d'un coup à l'autre dans les balanciers mus par des hommes. Le travail est en même temps beaucoup plus rapide. Enfin, dans la presse monétaire, les deux coins n'arrivent jamais au contact, et ne risquent par conséquent pas de se briser par le choc dans le cas où l'on oublierait d'interposer un flan; tandis que cette rupture serait à peu près certaine dans ce cas avec un balancier.

PRESSE TYPOGRAPHIQUE, ou PRESSE MÉCANIQUE. Voy. OPÉRATEURS.

PRESSION, résistance qu'un solide de forme prismatique oppose à un effort longitudinal qui tend à diminuer sa longueur (Voy. COMPRESSION, FLEXION PLANE). La *pression par unité de surface* est le quotient de la pression totale par l'aire de la section droite du prisme.

PRESSION D'UN FLUIDE, force que ce fluide exerce sur les parois des vases qui le contiennent, sur la surface des corps solides qui y sont plongés, et, par extension, sur toute surface idéale tracée dans son intérieur.

I. Si l'on considère un FLUIDE PARFAIT (Voy. ce mot) n'exerçant aucun frottement sur les surfaces avec lesquelles il est en contact, la pression de ce fluide sur un élément $d\omega$ de surface est une force infiniment petite ou élémentaire $d\mathcal{P}$, normale à cet élément. La *pression par mètre carré* sur un élément $d\omega$ de paroi est le quotient de la pression élémentaire $d\mathcal{P}$ que le fluide exerce sur cet élément par l'aire $d\omega$ de ce même élément. En général, si, en un point quelconque M d'un fluide, on conçoit un élément de surface $d\omega$, et que $d\mathcal{P}$ soit la pression élémentaire exercée sur cet élément, le quotient $\frac{d\mathcal{P}}{d\omega}$ sera la *pression par mètre au point M*.

II. Lorsqu'un fluide parfait est en équilibre, la pression par mètre en un point donné quelconque de ce fluide reste la même dans quelque sens qu'on l'estime. Ce principe est connu sous le nom de *Principe d'égalité de pression en tout sens*. On en a donné diverses démonstrations; nous adopterons la suivante, due à M. Bélanger. Soit M (fig. 1) un point quelconque d'un fluide parfait en équilibre. Par ce point M faisons passer deux plans quelconques, qui se couperont suivant une droite MN. Sur l'un de ces plans traçons un élément rectangulaire MNBA, et sur l'autre plan un élément MNB'A' égal au premier. Menons les plans AMA', BMB' et AA'B'B; et considérons l'équilibre du prisme de fluide compris entre ces divers plans.

Soit \mathcal{P} la pression par mètre sur l'élément MABN, et \mathcal{P}' la pression par mètre sur l'élément MA'B'N. Soient F, F', F'' les pressions exercées sur les faces AMA', BNB' et ABB'A'. Enfin soit p le poids de

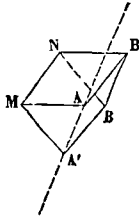


Fig. 1.

l'élément de volume considéré. Ce poids et les pressions qui s'exercent sur les cinq faces du prisme devant être en équilibre, la somme de leurs projections sur un axe quelconque doit être égale à zéro. Prenons pour axe la droite AA'; les forces F, F', F'' perpendiculaires à la direction de AA' disparaîtront d'elles-mêmes; et il ne restera que le poids du prisme de fluide et les pressions exercées sur AMNB et sur A'MNB'. Désignons par x le côté MA, par kx le côté MN, par α l'angle MAA'. La projection de la pression exercée sur AMNB sera $\mathcal{P}.kx^2 \cdot \cos \alpha$; la projection de la pression exercée sur A'MNB' sera $-\mathcal{P}'.kx^2 \cdot \cos \alpha$. Le volume du prisme considéré pourra être représenté par $k'x^3$; et si Π désigne le poids du mètre cube du fluide, évalué au point M, on aura $p = \Pi.k'x^3$; en sorte que si β est l'angle de AA' avec la verticale, on aura pour la projection de p l'expression $\Pi.k'x^3 \cdot \cos \beta$.

En vertu de l'équilibre on devra donc avoir $(\mathcal{P} - \mathcal{P}')kx^2 \cos \alpha + \Pi.k'x^3 \cos \beta = 0$ ou $(\mathcal{P} - \mathcal{P}')k \cos \alpha + \Pi.k'x \cos \beta = 0$. Mais si AM ou x est infiniment petit, le dernier terme disparaît devant le premier qui est fini; il reste donc

$(\mathcal{P} - \mathcal{P}')k \cos \alpha = 0$, d'où $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, ce qui démontre la proposition énoncée, puisque les plans MABN et MA'B'N sont quelconques.

La démonstration suppose un fluide parfait. S'il s'agissait d'un liquide sensiblement visqueux, et exerçant un frottement sur les surfaces en contact avec lui, les pressions pourraient ne plus être normales aux surfaces, et la proposition n'aurait plus nécessairement lieu.

III. L'équilibre d'un fluide pesant exige que la pression soit la même en tous les points d'une même couche horizontale. Soient, en effet, deux points quelconques, A et B (fig. 2), situés sur un même plan

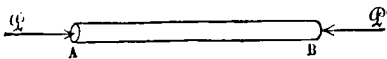


Fig. 2.

horizontal. Concevons un cylindre droit, à génératrices horizontales, ayant pour bases deux éléments verticaux perpendiculaires à la droite qui joint les points A et B. Si le fluide est en équilibre, la partie de ce fluide comprise dans le cylindre considéré, et solidifiée par la pensée, devra être elle-même en équilibre. Or elle est soumise à deux

forces horizontales, s'exerçant normalement aux bases du cylindre. Si l'on nomme $d\omega$ l'aire de chacune de ces bases et \mathcal{P} et \mathcal{P}' la pression par mètre aux points A et B, les deux forces dont nous parlons seront exprimées par $\mathcal{P}d\omega$ et $-\mathcal{P}'d\omega$. Le cylindre est soumis en outre à son poids, force verticale, et aux pressions qui s'exercent sur sa surface convexe, forces perpendiculaires aux génératrices du cylindre. Or, pour l'équilibre il faut que la somme des projections de ces diverses forces sur un axe quelconque soit égale à zéro. Prenons pour axe une génératrice quelconque du cylindre, ou la droite AB: le poids du cylindre et les pressions sur la surface convexe étant perpendiculaires à l'axe, donneront zéro pour projections; il restera donc

$$\mathcal{P}d\omega - \mathcal{P}'d\omega = 0, \text{ d'où } \mathcal{P} = \mathcal{P}',$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On déduit de ce principe que la densité du fluide est la même en tous les points d'une même couche horizontale. Considérons en effet (fig. 3) deux plans

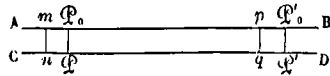


Fig. 3.

horizontaux très-voisins AB et CD; isolons et solidifions par la pensée deux cylindres verticaux mn et pq du fluide considéré, ayant une même base infiniment petite $d\omega$, et terminés à ces deux plans. Soit \mathcal{P}_0 la pression par mètre sur la base supérieure du premier prisme, \mathcal{P} la pression par mètre sur la base inférieure, p le poids du cylindre. Il est soumis en outre à des pressions horizontales qui s'exercent sur la surface convexe. Mais si l'on projette toutes ces forces sur une même verticale, ces dernières disparaîtront et l'on devra avoir pour l'équilibre

$$\mathcal{P}_0 d\omega - \mathcal{P} d\omega + p = 0, \text{ d'où } p = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) d\omega.$$

Si \mathcal{P}'_0 et \mathcal{P}' désignent de même les pressions par mètre sur les deux bases du second cylindre, et p' le poids de ce cylindre, on trouvera de même $p' = (\mathcal{P}' - \mathcal{P}'_0) d\omega$.

Or, d'après le principe ci-dessus établi, on a $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$; il en résulte $p' = p$; c'est-à-dire que les deux cylindres fluides ont le même poids; et comme ils ont d'ailleurs le même volume, puisqu'ils ont la même base et la même hauteur, on en conclut qu'ils ont la même densité moyenne; ce qui démontre la proposition énoncée, puisque les plans horizontaux AB et CD sont supposés infiniment voisins.

Si dans un fluide pesant en équilibre on considère deux cylindres terminés aux mêmes plans horizontaux, leurs poids seront proportionnels à leurs bases, puisque la distribution des densités y est la même et qu'ils ont la même hauteur.

IV. Si l'on compare les pressions par mètre en deux points d'un fluide pesant situés sur une même verticale, on trouve que la pression au point inférieur est égale à la pression au point supérieur, augmentée du poids d'une colonne fluide qui aurait pour base l'unité de surface, et qui se terminerait aux plans horizontaux passant par les deux points considérés. Soient, en effet, A et B (fig. 4) les deux points dont il s'agit. Concevons un cylindre de

fluide à génératrices verticales, dont les bases soient des éléments horizontaux dont nous représenterons l'aire par $d\omega$. La partie du fluide comprise dans ce cylindre, solidifiée par la pensée, devra être en équilibre. Soit \mathcal{P} la pression supérieure et \mathcal{P}' la pression inférieure, par unité de surface; la pression sur chacune des bases sera exprimée par $\mathcal{P}d\omega$ et $-\mathcal{P}'d\omega$, en prenant pour sens positif le sens descendant. Le cylindre est en outre soumis à son poids, que nous pouvons représenter par $p d\omega$, d'après ce qui a été dit plus haut, en appelant p le poids d'un cylindre de fluide terminé aux mêmes plans horizontaux, mais ayant pour base l'unité de surface. Le cylindre reçoit en outre des pressions horizontales qui s'exercent

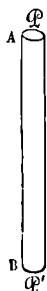


Fig. 4.

sur sa surface convexe. Si l'on projette toutes ces forces sur une même verticale, ces dernières pressions disparaîtront, et il restera

$\mathcal{P}d\omega - \mathcal{P}'d\omega + p d\omega = 0$, d'où $\mathcal{P}' = \mathcal{P} + p$, [1] ce qui démontre la proposition énoncée.

V. En combinant les deux principes qui précèdent, on peut comparer les pressions en deux points quelconques d'un même fluide. Soit, en effet, \mathcal{P} la pression par mètre en un point A, et \mathcal{P}' la pression par mètre en un autre point B (fig. 5). Menons



Fig. 5.

par le point B un plan horizontal, et par le point A une verticale qui rencontrera ce plan en un point C. La pression en C sera la même qu'en B; on aura donc, en vertu de ce qui vient d'être établi,

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + p,$$

p désignant toujours le poids d'une colonne du fluide considéré ayant un mètre carré de base, et terminé aux plans horizontaux passant par A et par C.

VI. Lorsque le fluide est gazeux, et n'occupe qu'un médiocre volume, comme cela a ordinairement lieu dans les applications, le terme p est presque toujours négligeable vis-à-vis de \mathcal{P} , et il reste $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$; c'est-à-dire que la pression est sensiblement la même en tous les points de la masse gazeuse.

Si le fluide est incompressible, le poids p s'exprime simplement en fonction de la distance h qui sépare les points A et B. Car si Π désigne le poids du mètre cube de ce fluide, le poids d'un cylindre ayant 1^{m^2} de base et pour hauteur h a pour expression $\Pi \cdot 1^{\text{m}^2} \cdot h$. On a donc

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + \Pi h. \quad [2]$$

VII. On peut conclure de cette relation que, pour l'équilibre d'un liquide, la surface libre doit être horizontale. Car, si l'on considère une couche horizontale quelconque, la pression y est la même partout, d'après ce qui a été dit plus haut. D'un autre côté, si la surface libre n'éprouve aucune

pression, on a, en nommant \mathcal{P}' la pression constante dans la couche considérée,

$$\mathcal{P}' = 0 + \Pi h,$$

d'où il résulte que h est le même pour tous les points de cette couche, et que par conséquent la surface libre est un plan parallèle à cette couche, c'est-à-dire un plan horizontal. On arrive encore à la même conclusion si le liquide est pressé à la partie supérieure par un autre liquide ou par un gaz. Soit en effet AB (fig. 6) la surface de sépara-

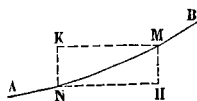


Fig. 6.

tion, \mathcal{P} et \mathcal{P}' les pressions en deux points M et N de cette surface, h la distance verticale des points M et N, p et p' les poids de deux colonnes des deux fluides ayant pour hauteur h et pour base 1^{m^2} . En considérant le fluide supérieur, on aura

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + p,$$

et, en considérant le fluide inférieur,

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + p',$$

d'où résulte

$$p = p',$$

ce qui ne peut avoir lieu pour deux fluides de densités différentes, qu'autant qu'on aura

$$p = 0 \text{ et } p' = 0, \text{ d'où } h = 0.$$

Par conséquent la surface de séparation doit être un plan horizontal. Ce plan est ce que l'on appelle le *niveau supérieur* du liquide.

On remarque en même temps qu'il en résulte $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$; c'est-à-dire que la pression est la même en tous les points de la surface de séparation.

VIII. La pression en un point d'un liquide peut toujours être exprimée par le poids d'une colonne de ce liquide ayant 1^{m^2} de base, et une hauteur convenablement choisie. Si, en effet, z représente la hauteur d'une semblable colonne, son poids est exprimé par

$$\Pi \cdot 1^{\text{m}^2} \cdot z \text{ ou par } \Pi z,$$

Π désignant le poids du mètre cube de ce fluide. Or en faisant varier z on peut faire passer le produit Πz par toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini. En appelant \mathcal{P} la pression en un point d'un liquide, on peut donc toujours poser

$$\mathcal{P} = \Pi z, \text{ d'où } \frac{\mathcal{P}}{\Pi} = z.$$

On voit que le quotient $\frac{\mathcal{P}}{\Pi}$ de la pression par mètre, par le poids du mètre cube de liquide, représente la hauteur z d'une colonne de ce liquide, ayant 1^{m^2} de base et dont le poids serait égal à cette pression. Ce quotient se nomme à cause de cela, la *hauteur due à la pression* \mathcal{P} ; et par contre la pression \mathcal{P} s'appelle la *pression due à la hauteur* z .

Si l'on divise par Π les deux membres de l'équation [2], ce qui donne

$$\frac{\mathcal{P}'}{\Pi} = \frac{\mathcal{P}}{\Pi} + h, \quad [3]$$

on voit que cette relation peut être exprimée en disant que : la hauteur due à la pression en un point d'un liquide est égale à la hauteur due à la pression en un autre point du même liquide situé

au-dessus, augmentée de la hauteur verticale qui sépare ces deux points.

Pour l'eau, on a sensiblement

$$\Pi = 1000.$$

IX. Lorsqu'il s'agit d'un liquide, on évalue aisément la pression totale exercée sur une paroi de grandeur finie. Soit MN (fig. 7) le plan horizontal

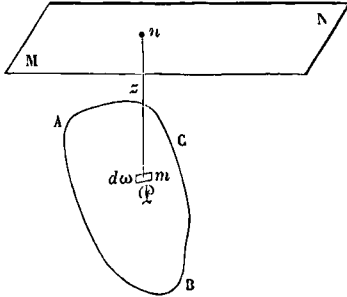


Fig. 7.

de la surface libre, P_0 la pression par mètre en un point quelconque de cette surface. Soit ABC une surface plane plongée dans le liquide, $d\omega$ l'un de ses éléments, $mn = z$ la distance de cet élément au plan MN. La pression exercée par le fluide sur l'élément $d\omega$ est une force normale au plan ABC et qui a pour valeur $Pd\omega$, en appelant P la pression par mètre au point m . Mais, d'après ce qu'on a vu, on a, en nommant Π le poids du mètre cube du liquide,

$$P = P_0 + \Pi z,$$

d'où $Pd\omega = P_0d\omega + \Pi zd\omega$.

Toutes les pressions élémentaires exercées sur le plan ABC étant des forces parallèles et de même sens, se composent en une seule R égale à leur somme; on a donc

$$R = \Sigma P_0d\omega + \Sigma \Pi zd\omega,$$

ou $R = P_0\Sigma d\omega + \Pi\Sigma zd\omega$.

Soit Ω l'aire totale de la paroi ABC, et Z la distance de son centre de gravité au plan MN, on aura $\Sigma d\omega = \Omega$ et $\Sigma zd\omega = Z\Omega$

en vertu du théorème sur les moments des forces parallèles (Voy. MOMENT). En substituant dans la valeur de R , il viendra donc

$$R = P_0\Omega + \Pi Z\Omega = \Omega (P_0 + \Pi Z).$$

Mais $P_0 + \Pi Z$ est la pression par mètre au centre de gravité de la paroi ABC considérée; on voit donc que la pression totale exercée sur une paroi plane est égale à l'aire de cette paroi multipliée par la pression par mètre en son centre de gravité.

Si l'on suppose $P_0 = 0$, il reste $R = \Pi Z\Omega$, c'est-à-dire que, dans ce cas, la pression totale est égale au poids d'une colonne liquide qui aurait cette paroi pour base, et pour hauteur la distance de son centre de gravité, au-dessous de la surface libre, ou au-dessous du niveau supérieur.

X. Lorsqu'il s'agit d'une surface courbe, on ne peut plus faire la somme des pressions exercées sur ses éléments, puisque ce sont des forces normales et par conséquent de directions différentes. Mais on peut dans certains cas faire la somme de leurs projections sur un axe. Soit ABCD (fig. 8) une paroi courbe quelconque, MN le niveau supé-

rieur du liquide, et OX l'axe sur lequel on se propose de projeter les pressions. Soit $d\omega$ un élément de la surface courbe situé en m . La pression par mètre en ce point étant représentée par P , la pres-

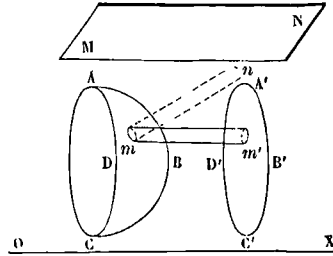


Fig. 8.

sion sur l'élément considéré est $Pd\omega$; c'est une force dirigée suivant la normale mn , et faisant avec l'axe OX un angle, variable d'un élément à l'autre, et que nous désignerons par α . La projection de la pression élémentaire sur l'axe sera donc $Pd\omega \cdot \cos \alpha$. Mais si l'on projette l'élément $d\omega$ sur un plan $A'B'C'D'$ perpendiculaire à OX, la projection $d\omega'$ de cet élément, situé en m' , aura précisément pour expression $d\omega \cdot \cos \alpha$; car le plan $A'B'C'D'$ fait avec le plan tangent en m un angle α égal à celui que fait la normale mn avec l'axe OX. La projection de la pression élémentaire sera donc exprimée par $Pd\omega'$; et si R désigne la somme algébrique de toutes les projections analogues, on aura

$$R = P\Sigma d\omega';$$

mais on a

$$P = P_0 + \Pi z,$$

en nommant P_0 la pression par mètre sur le plan MN, Π le poids du mètre cube du liquide, et z la distance du point m au-dessous de MN. Il vient donc

$$R = P_0\Sigma d\omega' + \Pi\Sigma zd\omega'. \quad [4]$$

Supposons d'abord que l'axe OX soit horizontal. Les éléments $d\omega$ et $d\omega'$ étant à la même hauteur, $zd\omega'$ sera le moment de l'élément $d\omega'$ par rapport au plan MN. Si donc Ω' représente l'aire de la projection $A'B'C'D'$ de la paroi courbe sur le plan perpendiculaire à OX, plan vertical dans l'hypothèse actuelle, et si Z représente la distance du centre de gravité de $A'B'C'D'$ au-dessous de MN, on pourra écrire

$$R = P_0\Omega' + \Pi Z\Omega = \Omega' (P_0 + \Pi Z).$$

Or $P_0 + \Pi Z$ est la pression par mètre au centre de gravité de $A'B'C'D'$; on peut donc dire que : la somme des projections sur un axe horizontal de toutes les pressions élémentaires exercées par un liquide pesant en équilibre sur une paroi courbe, est égale à la projection de cette paroi sur un plan perpendiculaire à l'axe, multipliée par la pression par mètre au centre de gravité de cette projection.

Supposons en second lieu que le poids Π du mètre cube de fluide considéré soit assez faible pour que le second terme du second membre de l'équation [4] puisse être négligé vis-à-vis du premier, il restera

$$R = P_0\Omega'.$$

Ce cas est précisément celui d'un gaz, qui occupe, comme cela a généralement lieu, un assez petit espace. La pression du gaz est sensiblement la

même en tous les points; et l'on voit que la somme des projections des pressions élémentaires sur un axe quelconque est égale à la pression par mètre en un point quelconque de la masse gazeuse, multipliée par l'aire de la projection de la paroi courbe sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Il est utile de remarquer que lorsqu'on projette, comme dans les deux exemples précédents, le contour d'une paroi courbe sur un plan, il peut arriver que le cylindre projetant coupe la paroi suivant une seconde courbe, comme l'indique la figure 9. Dans ce cas, les éléments de paroi situés

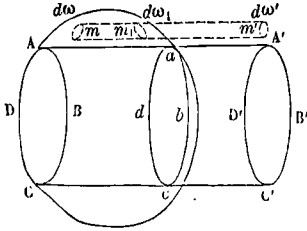


Fig. 9.

en dehors du cylindre projetant peuvent être négligés. Car, dans les deux exemples, si l'on prend un élément quelconque $d\omega$ en dehors du cylindre projetant $ABCD'A'B'C'D'$, et qu'on le projette sur le plan $A'B'C'D'$, le cylindre projetant élémentaire rencontrera la paroi suivant un nouvel élément $d\omega_1$, qui aura la même projection $d\omega'$. Or la pression étant la même sur $d\omega$ et sur $d\omega_1$, soit parce que, comme dans le premier exemple, ces deux éléments sont à la même distance du niveau supérieur, soit parce que, comme dans le second exemple, la pression est la même partout, il en résulte que la projection de la pression sur $d\omega$ sera $+P d\omega'$, et que la projection de la pression sur $d\omega_1$ sera $-P d\omega'$, d'où il résulte que ces deux projections égales et de signe contraire disparaîtront. Or, on en pourrait dire autant de tous les éléments situés en dehors du cylindre $ABCD'A'B'C'D'$; ils donneront lieu à des pressions égales deux à deux et de signe contraire. Il ne restera donc que la projection des pressions exercées sur la partie $abcd$ de la paroi courbe comprise dans l'intérieur du cylindre projetant.

On tire de là cette conséquence remarquable que la somme des projections, sur un axe quelconque, des pressions exercées par un gaz sur une enveloppe fermée est égale à zéro, car la partie $abcd$ ci-dessus considérée se réduit elle-même à zéro dans ce cas. Et l'on en peut dire autant pour les pressions exercées par un liquide pesant sur une enveloppe fermée, lorsque l'axe sur lequel on projette les pressions est horizontal.

XI. Tout ce qui vient d'être dit se rapporte aux fluides en équilibre, et les pressions que nous avons évaluées portent, pour cette raison, le nom de pressions hydrostatiques. Lorsqu'il s'agit d'un fluide en mouvement, les pressions ne peuvent plus, en général, être évaluées de la même manière. Il y a cependant un certain nombre de cas où les pressions se mesurent comme dans le cas de l'équilibre.

1° Si le mouvement de chaque molécule fluide est rectiligne et uniforme, les pressions de ce fluide

sont les pressions hydrostatiques. Car le mouvement étant partout rectiligne et uniforme les forces auxquelles le fluide est soumis satisfont aux conditions de l'équilibre, si toutefois on peut négliger la viscosité.

2° Lorsque le mouvement d'un fluide est très-lent, quel qu'il soit d'ailleurs, les pressions peuvent être évaluées comme dans l'état hydrostatique. Car, puisque les vitesses, et par suite les accélérations, sont très-faibles, les forces satisfont à très-peu près aux conditions de l'équilibre.

3° Lorsqu'il existe dans un fluide en mouvement une section plane normale à toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes aux environs de ce plan, la pression, dans cette section, varie suivant la loi hydrostatique. Car le mouvement des diverses molécules peut être regardé comme sensiblement rectiligne et uniforme, dans le voisinage de la section considérée, et l'on rentre ainsi dans le cas examiné en premier lieu.

4° Enfin, lorsque toutes les molécules fluides se meuvent comme si elles n'étaient soumises qu'aux forces extérieures qui agissent sur elles, la pression est la même, à un instant donné, dans toute l'étendue du fluide. Car toute différence de pression tendrait à produire un mouvement qui altérerait le mouvement dû aux forces extérieures. (Ce dernier principe est une conséquence immédiate des équations générales du mouvement des fluides, qu'on trouvera exposées dans tous les traités de Mécanique rationnelle. Dans le mouvement permanent, le seul dont on ait à s'occuper dans les applications, on arrive à la même conséquence en partant du THÉOREME DE DANIEL BERNOULLI [Voy. ce mot].)

PRESSION HYDROSTATIQUE, pression d'un fluide dans l'état d'équilibre (Voy. **PRESSION D'UN FLUIDE**).

PRESSION VIVE, nom donné par Dubuat à l'excès de pression qui se manifeste sur la face d'amont d'une plaque plongée perpendiculairement dans un courant, ou à la différence observée entre la pression effective et la pression hydrostatique. D'après ces expériences, en nommant Π le poids du mètre cube du fluide, v sa vitesse, et k un coefficient numérique, la pression vive, rapportée au mètre carré, est exprimée par

$$k\Pi \frac{v^2}{2g}$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la densité du liquide et à la hauteur due à sa vitesse. Le coefficient k a pour valeur moyenne 1,19.

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE, l'un des principes fondamentaux de l'hydrostatique. On l'énonce d'ordinaire en disant qu'un corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du volume de fluide déplacé. Il faut entendre par cet énoncé que les pressions exercées par un fluide sur un corps qui y est plongé ont une résultante unique, verticale, agissant de bas en haut, et égale au poids du volume de fluide déplacé. Cette résultante est ce que l'on appelle la poussée du fluide.

On démontre expérimentalement le principe d'Archimède, au moins pour les corps plongés dans un liquide, à l'aide de la balance hydrostatique (Voy. les Traités de physique). Mais ce principe peut

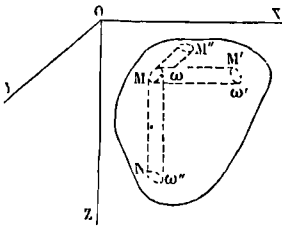
aussi être démontré théoriquement par deux méthodes.

I. La première, en quelque sorte intuitive, est vraisemblablement celle qui a été employée par Archimède. Concevons que, dans un fluide en repos, on isole par la pensée un certain volume de ce fluide, et qu'on le solidifie sans altérer ni sa forme ni son poids; le volume ainsi solidifié sera évidemment en équilibre, puisque avant la solidification il faisait partie d'un système en repos, et que cette solidification n'a pu en aucune manière troubler l'équilibre. Or, ce corps devenu solide est soumis d'une part à son poids, qui est une force verticale agissant de haut en bas, et de l'autre aux pressions que le reste du fluide exerce sur sa surface; il faut donc que ces pressions aient une résultante unique égale et opposée au poids du volume considéré; ainsi ces pressions se réduisent à une poussée verticale de bas en haut, égale au poids du volume considéré et passant par le centre de gravité de ce volume.

Concevons maintenant qu'on remplace ce volume de fluide solidifié par un volume égal d'un corps solide quelconque ayant exactement la même forme. Les pressions exercées sur la surface par le fluide environnant ne seront pas changées, et elles se réduiront encore à une poussée verticale de bas en haut égale au poids du fluide que le corps remplace. Ce corps est donc soumis d'une part à son poids et de l'autre à cette poussée, qui sont deux forces verticales de sens contraire; la poussée se retranche ainsi du poids du corps, ce qui fait dire que le corps perd de son poids une partie égale au poids du volume du fluide qu'il déplace.

II. La seconde méthode entre plus avant dans l'analyse du phénomène.

Considérons un corps plongé dans un liquide en repos; rapportons-le à trois axes rectangulaires dont deux OX et OY tracés au niveau supérieur du



liquide, et le troisième OZ verticalement. Soit M un point de la surface du corps; considérons un élément $d\omega$ de cette surface comprenant le point M. La pression exercée par le fluide sur cet élément est une force normale, équivalente au poids d'une colonne de liquide qui aurait pour base l'élément $d\omega$ et pour hauteur la distance du point M au-dessous du niveau supérieur, c'est-à-dire l'ordonnée x de ce point. L'expression de cette pression élémentaire est donc $\Pi \cdot d\omega \cdot x$, en désignant par Π le poids du mètre cube du liquide considéré. Désignons par X, Y, Z, les composantes de cette pression parallèles aux trois axes, et par α , β , γ les angles aigus que la normale en M à la surface du corps fait avec ces mêmes axes, nous aurons :

$$X = \Pi \cdot d\omega \cdot x \cos \alpha, \quad Y = \Pi \cdot d\omega \cdot x \cos \beta, \\ Z = \Pi \cdot d\omega \cdot x \cos \gamma.$$

Concevons maintenant qu'une parallèle à l'axe des x se meuve en rencontrant toujours le contour de l'élément $d\omega$ considéré; elle engendrera une surface cylindrique qui coupera la surface du corps suivant un second élément $d\omega'$, situé à la même distance que $d\omega$ au-dessous du niveau supérieur, c'est-à-dire à la distance x . La composante X' parallèle à l'axe des x de la pression élémentaire exercée sur $d\omega'$ sera donc exprimée par

$$X' = \Pi \cdot d\omega' \cdot x \cos \alpha',$$

en appelant α' l'angle aigu que la normale à l'élément $d\omega'$ fait avec OX. — Or, $d\omega \cos \alpha$ est la section droite du petit cylindre considéré, car α est l'angle que fait l'élément $d\omega$ avec un plan parallèle à YOZ, ou avec le plan de la section droite. Mais $d\omega' \cos \alpha'$ est la section droite du même cylindre. On a donc

$$d\omega \cos \alpha = d\omega' \cos \alpha', \text{ et par suite } X = -X',$$

c'est-à-dire que les pressions horizontales X et X' sont égales et opposées. Et, comme on en pourrait dire autant pour un élément quelconque de la surface différent de $d\omega$, on voit que les pressions élémentaires parallèles à l'axe des x sont deux à deux égales et opposées, et s'entre-détruisent mutuellement, ou du moins se font équilibre.

On démontrerait exactement de la même manière que toutes les pressions élémentaires horizontales parallèles à l'axe des y sont deux à deux égales et opposées, et qu'elles se font par conséquent équilibre.

Il reste à considérer les pressions élémentaires verticales. Une verticale assujettie à rencontrer le contour de l'élément $d\omega$ décrit un cylindre qui coupe la surface du corps suivant un élément $d\omega''$, situé à une distance x' au-dessous du niveau supérieur; et la composante verticale Z' de la pression exercée par le liquide sur cet élément sera exprimée par

$$Z' = -\Pi \cdot d\omega'' \cdot x' \cos \gamma'',$$

en appelant γ'' l'angle aigu que la normale en N fait avec l'axe des x .

On verrait comme ci-dessus que les deux produits $d\omega \cos \gamma$ et $d\omega'' \cos \gamma''$ sont égaux comme exprimant tous deux la section droite du cylindre vertical considéré. On peut donc écrire

$$Z' = -\Pi \cdot d\omega'' \cdot x' \cos \gamma'',$$

et, par suite, on a

$$Z + Z' = -\Pi d\omega \cos \gamma (x' - x).$$

Or, $d\omega \cos \gamma (x' - x)$ exprime, à un infiniment petit près du second ordre, le volume du cylindre vertical MN compris entre les deux éléments $d\omega$ et $d\omega''$; par conséquent, $\Pi d\omega \cos \gamma (x' - x)$ exprime le poids d'un cylindre égal formé du liquide considéré. Si l'on opère de même pour un élément de la surface différent de $d\omega$, on obtiendra de même deux pressions verticales élémentaires dont la somme algébrique sera en valeur absolue le poids d'un cylindre du liquide considéré compris entre cet élément et celui qui lui correspond sur la même verticale, et ainsi de suite. La somme algébrique de toutes les pressions verticales élémentaires a donc pour valeur absolue la somme des poids réunis de tous les cylindres verticaux analogues. Mais la somme des volumes de tous ces cylindres élémentaires a pour limite le volume même du corps plongé; la somme algébrique de toutes les pressions élémentaires est donc égale en valeur absolue au poids d'un volume égal formé du liquide environnant. D'ailleurs, d'après le signe de $Z + Z'$ et de toutes les sommes

analogues, les pressions verticales se réduisent deux à deux à une force dirigée de bas en haut; donc la somme totale des pressions verticales est elle-même une force verticale dirigée de bas en haut. Donc, enfin, la résultante de toutes les pressions exercées par le liquide sur le corps plongé est une *poussée* verticale, agissant de bas en haut, et égale au poids du volume de liquide déplacé.

Le poids de chaque cylindre élémentaire vertical étant appliqué en son centre de gravité, il en résulte que la poussée peut être considérée comme appliquée au centre de gravité du volume déplacé. Ceci ne suppose pas que le corps plongé soit homogène.

Le point d'application de la poussée, c'est-à-dire le centre de gravité du fluide déplacé, porte le nom de *centre de poussée*.

Il pourrait arriver qu'une même surface cylindrique élémentaire rencontrât la surface du corps en plus de deux éléments; mais alors elle la rencontrerait en un nombre pair d'éléments, puisqu'à chaque élément formant *entrée* correspondrait un élément formant *sortie*; et en considérant ces éléments deux à deux, on arriverait encore aux mêmes conclusions.

(Voy. CORPS PLONGÉS (équilibre des), AÉROSTATS.)

Les raisonnements seraient les mêmes pour un corps plongé dans un fluide élastique en repos, et où par conséquent tous les points situés dans une même couche horizontale éprouvent une même pression (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE).

Le principe d'Archimède s'applique aux corps qui ne sont plongés qu'en partie dans un liquide. Un corps flottant reçoit du liquide, à la surface duquel il nage, une poussée verticale égale au poids du volume du liquide qu'il déplace, et qui peut être regardée comme appliquée au centre de gravité de ce volume.

PRISME DE BUTÉE, nom que prend le PRISME DE POUSSÉE (Voy. ce mot) quand les terres, au lieu de tendre à descendre le long du plan de rupture, tendent au contraire à monter le long de ce plan (Voy. BUTÉE DES TERRES).

PRISME DE POUSSÉE, prisme de terre compris entre la paroi interne d'un mur de soutènement, le plan horizontal qui limite les terres, et le plan de rupture; c'est ce prisme qui produit la poussée (Voy. POUSSÉE DES TERRES).

PRISMES CHARGÉS DEBOUT, pièces prismatiques en bois, en fer, en fonte, etc., placées verticalement et servant de supports. Leurs dimensions transversales doivent être calculées d'après leur hauteur et la charge verticale qu'ils ont à soutenir.

I. Si les poteaux ou les colonnes pouvaient être disposés de manière à n'éprouver aucune flexion, on pourrait leur appliquer les règles relatives à la résistance des prismes à la compression [Voy. COMPRESSION (résistance à la)]. C'est-à-dire qu'en nommant E le coefficient d'élasticité de la matière employée, P la charge du poteau dans le sens longitudinal, Ω sa section, et i le raccourcissement par mètre de longueur, on aurait

$$P = E\Omega i; \quad [1]$$

et, en se donnant le raccourcissement proportionnel i qu'il convient de ne pas dépasser pour ne pas altérer l'élasticité de la matière, on aurait une relation entre P et Ω d'où l'on pourrait tirer l'une de

ces quantités si l'autre était connue. La limite de charge qu'il conviendrait de ne pas dépasser serait (Voy. l'art. cité) d'environ 60^k par centimètre carré pour le bois de chêne, 80^k pour le sapin, 6^k par millimètre carré pour le fer, 10^k pour la fonte.

II. Mais par suite des ébranlements auxquels une construction quelle qu'elle soit est continuellement exposée, il peut arriver que le poteau ou la colonne fléchisse; et alors sa résistance dépend de sa longueur aussi bien que de sa section transversale. Pour le faire comprendre, considérons un poteau vertical de longueur l , encastré à son extrémité inférieure, et chargé à l'autre d'un poids appliqué au centre de gravité de la section supérieure. Soit OA (fig. 1) la position primitive de la fibre moyenne

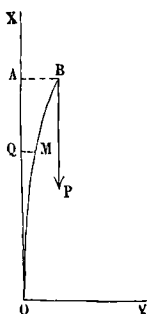


Fig. 1.

(celle qui passe par les centres de gravité des sections transversales), et OMB la position que prend cette fibre par suite des ébranlements auxquels le poteau est soumis. Soit P la charge supportée par le poteau et appliquée en B. Supposons que l'on puisse négliger le poids du poteau lui-même vis-à-vis du poids P . Prenons pour axe des x la verticale OX, et pour axe des y l'horizontale OY. Soit M un point quelconque de la courbe OB, et soient $OQ = x$ et $MQ = y$ ses coordonnées; enfin soit f la flèche AB résultant de la flexion. Si E désigne le coefficient d'élasticité de la matière du poteau [Voy. ALLONGEMENT (résistance à l')], et I le moment d'inertie de sa section transversale par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le point M , on aura [Voy. FLEXION PLANE (résistance à la)]:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(f - y). \quad [2]$$

Multipliant les deux membres par $2 dy$, intégrant, et remarquant que pour $y = 0$ on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$, puisque, la pièce étant encastrée, la tangente en O à la courbe OB est verticale, on aura

$$EI \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = P(2fy - y^2), \quad [3]$$

d'où
$$dx \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{dy}{\sqrt{2fy - y^2}}.$$

Intégrant de nouveau, et remarquant que pour $y = 0$ on doit avoir $x = 0$, on obtient

$$x \sqrt{\frac{P}{EI}} = \arccos \frac{f - y}{y}. \quad [4]$$

Pour $y = f$ on doit avoir $x = l$; il vient donc

$$l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \arccos = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

n désignant un nombre entier. De cette dernière relation on tire

$$P = \frac{EI \cdot (2n + 1)^2 \pi^2}{4 l^2}.$$

Si la section transversale est un carré ayant pour côté c , on a $I = \frac{1}{12} c^4$ (Voy. MOMENT D'INERTIE); on peut donc écrire

$$P = \frac{E(2n + 1)^2 \pi^2}{48} \cdot \frac{c^4}{l^2}.$$

d'où

$$c^2 = \frac{4l}{(2n+1)\pi} \sqrt{\frac{3P}{E}}, \quad [5]$$

formule qui montre que la section c^2 doit être proportionnelle à la hauteur l pour que le poteau puisse supporter une même charge P .

Si la section est un cercle de rayon r , on trouvera de même

$$\pi r^2 = \frac{2l}{2n+1} \sqrt{\frac{2P}{\pi E}}, \quad [6]$$

formule qui conduit à la même conclusion.

On arriverait à des conclusions analogues si, au lieu de supposer le poteau encastré par le bas et ne pouvant fléchir que par le haut, on le supposait simplement posé, mais disposé de telle sorte que l'extrémité supérieure B (fig. 2) de la fibre moyenne ne puisse que s'abaisser verticalement de manière à faire prendre à cette fibre la forme OMB .

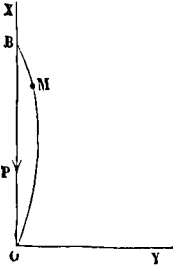


Fig. 2.

En appelant f la flèche de cette courbe, ou la plus grande ordonnée comprise entre les points O et B , on

trouverait pour l'équation de la courbe

$$x \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{arc sin } \frac{y}{f}, \quad [7]$$

avec la condition

$$f \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi,$$

d'où l'on tirerait

$$c^2 = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{3P}{E}} \quad \text{et} \quad \pi r^2 = \frac{l}{n} \sqrt{\frac{2P}{\pi E}}. \quad [8]$$

On pourrait tirer des relations [5], [6] et [8] diverses conséquences sur lesquelles nous n'insistons pas, attendu que ces formules ne doivent pas être regardées comme rigoureuses puisqu'on a négligé le poids du prisme. Elles suffisent toutefois pour faire comprendre comment, pour une même charge, la section transversale doit croître avec la hauteur du poteau.

III. Cette remarque a été faite depuis longtemps. Rondelet, dans son *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir* (1802-1817), a donné pour les poteaux en bois, à section carrée, des règles d'après lesquelles on peut former le tableau suivant :

Rapport $\frac{l}{c}$	12	24	36	48	60	72
Charge permanente par centimètre carré. . .	50 ^k	30 ^k	20 ^k	10 ^k	5 ^k	2 ^k , 50

La charge permanente est le 7^e de celle qui produirait la rupture; et l'on voit qu'elle diminue rapidement à mesure que le rapport de la hauteur du poteau au côté de la base augmente.

M. Hodgkinson, physicien anglais, a cru pouvoir conclure de ses expériences sur la résistance des poteaux en bois que la charge P' produisant la rupture, la hauteur l du poteau et le côté c de la

section supposée carrée, sont liés par une formule qui, traduite en mesures françaises, devient

$$\frac{P'}{c^2} = 2565 \left(\frac{c}{l}\right)^2. \quad [9]$$

Dans cette formule, P' est exprimé en kilogrammes, c en centimètres, et l en décimètres. Si, conformément à la règle de Rondelet, on adopte pour limite de la charge permanente P le septième de P' , d'où $P' = 7P$, et si, de plus, on exprime c et l en centimètres, on tire la formule de M. Hodgkinson

$$c^2 = 0,5224 l \sqrt{P}. \quad [10]$$

La formule [9], dont la forme est celle des relations [5], [6] et [8], s'accorde assez bien avec les règles de Rondelet quand le rapport $\frac{l}{c}$ est compris entre 30 et 45, et même encore quand $\frac{l}{c}$ dépasse cette limite, mais quand ce rapport est notablement inférieur à 30, ce qui est rare à la vérité, la formule [10] donne des équarrissages beaucoup plus forts que ne le suppose le tableau dressé d'après les règles de Rondelet.

Si l'on trace une courbe qui ait pour abscisses les valeurs du rapport $\frac{l}{c}$ et pour ordonnées les valeurs correspondantes de la charge permanente par centimètre carré, indiquées par le tableau dont il s'agit, on reconnaît que les deux premiers points et les trois derniers sont sur une courbe analogue à une branche d'hyperbole; le troisième point s'éloigne notablement de cette courbe, et paraît en ligne droite avec celui qui le précède et celui qui le suit, ce qui semble indiquer que ce point répond à quelque erreur expérimentale. En ne tenant compte que des cinq autres, on trouve qu'en désignant par x le rapport $\frac{l}{c}$ et par y la charge permanente par centimètre carré, la courbe peut être représentée par l'équation empirique

$$y = \frac{7064,5}{x + 40,9} + 0,39x - 88,2. \quad [11]$$

Cette formule peut donc servir à résoudre le problème dans lequel, étant données les dimensions du poteau, on demande la charge permanente qu'il peut supporter; car il suffit de multiplier par c^2 la valeur de y donnée par cette formule. Elle se prête moins bien à la solution du problème inverse dans lequel, étant données la hauteur du poteau et la charge totale qu'il doit supporter, on demande l'équarrissage qu'il faut lui donner. Il faut alors procéder par tâtonnements. Supposons par exemple qu'un poteau de 5^m de haut ait à supporter une charge totale de 12 000^k. On fera une hypothèse sur le côté c de la section transversale; soit par exemple $c = 0^m,2$, d'où $c^2 = 0^m,04$. Divisant 12 000^k par 400, nombre des centimètres carrés contenus dans la section, on trouve pour la charge par centimètre carré 30^k. D'un autre côté on a

$$x = \frac{l}{c} = \frac{5}{0,2} = 25;$$

cette valeur substituée dans la formule [11] donne $y = 28^k,75$. Cette valeur étant inférieure à 30^k, on en conclura qu'on a adopté pour c une valeur trop petite; car 28,75 multipliés par 400 donnerait une charge totale inférieure à 12 000^k. Faisons donc $c = 0^m,22$; le quotient de 12 000^k par $(0,22)^2$ est

24^k,79; on a $x = \frac{5}{0,22} = 22,73$; cette valeur mise dans [11] donne $y = 31,68$. On en conclut que la valeur 0^m,22 est trop forte; et pourra donc adopter $c = 0^m,21$. Si l'on voulait une approximation plus grande, on continuerait les calculs d'après la même méthode de tâtonnements.

M. Morin adopte la formule

$$P = A \cdot \frac{c^4}{l^2}, \quad [12]$$

dans laquelle la charge totale P est exprimée en kilogrammes, le côté c en centimètres, et la hauteur l en décimètres; et il prend pour A les valeurs suivantes :

- Pour le chêne fort..... A = 256,5
- chêne faible..... A = 180
- sapin rouge et le pin résineux.. A = 214,2
- sapin blanc et le pin jaune.... A = 160

valeurs qui supposent que le poteau ne porte que le 10^e de la charge qui produirait la rupture.

Si la section, au lieu d'être carrée, est un rectangle dont la plus petite dimension est c et la plus grande b, il faut dans la formule [12] remplacer c⁴ par bc³.

IV. Pour calculer les dimensions des colonnes en fonte, M. Hodgkinson a proposé une formule empirique qui, en mesures françaises, revient à la suivante :

$$P = 10\,676 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}, \quad [13]$$

dans laquelle P désigne la charge totale en kilogrammes, d le diamètre de la colonne en centimètres, et l sa hauteur en décimètres. Cette formule se prête aisément au calcul par logarithmes. On en tire

$$\log d = \frac{\log P + 1,7 \cdot \log l - \log 10\,676}{3,6}. \quad [14]$$

Si, par exemple, on suppose comme plus haut P = 12 000^k, l = 50^{décim.}, on trouvera d = 6^{cent.},55.

M. Love, habile ingénieur, a donné pour le même objet une formule empirique qui représente avec une exactitude suffisante le résultat des expériences de M. Hodgkinson, et qui, en mesures françaises, revient à

$$P = \frac{1250 \cdot d^4}{1,846 d^2 + 0,00043 l^2}, \quad [15]$$

et dans laquelle P désigne la charge permanente totale exprimée en kilogrammes, d le diamètre exprimé en centimètres, et l la hauteur en centimètres aussi.

Pour les colonnes en fer, le même ingénieur a proposé une formule analogue et qui revient à

$$P = \frac{600 \cdot d^4}{1,973 d^2 + 0,00064 l^2}. \quad [16]$$

V. Pour les colonnes creuses, on admet que la résistance est égale à celle d'une colonne pleine d'un diamètre égal au diamètre extérieur de la colonne creuse, diminuée de la résistance d'une autre colonne pleine d'un diamètre égal au diamètre intérieur de la colonne creuse. S'il s'agit de calculer la résistance connaissant les dimensions de la colonne, on calculera donc séparément les résistances P' et P'' relatives à deux colonnes pleines dont les diamètres seraient d' et d'', en employant pour cela les formules [13], [15] ou [16]. S'il s'agit de déterminer les dimensions transversales de la colonne creuse connaissant sa hauteur L et sa charge P, on se

donne le diamètre extérieur d', d'après les conventions locales; on en déduit la résistance P' d'une colonne pleine de même diamètre. On a ensuite P'' = P' - P; et l'on en déduit le diamètre d'', à l'aide des mêmes formules.

Supposons, par exemple, que le hauteur soit de 5^m, la charge de 22 600^k; et qu'il s'agisse d'une colonne creuse en fonte. Admettons qu'on se donne pour diamètre extérieur d' = 8^{cent.}. La formule [13] donnera

$$P' = 10\,676 \cdot \frac{8^{3,6}}{50^{1,7}} = 24\,619;$$

on aura donc P'' = 24 619 - 22 600 = 2019^k.

La formule [14] donnera alors, log d'' = 0,6013824, d'où d'' = 3^{cent.},9938.

Ce calcul ne présente aucune difficulté; mais le diamètre extérieur d' n'est pas entièrement arbitraire. Les conditions d'un bon coulage de la fonte exigent que l'épaisseur de la matière, ou la différence d' - d'' ne reste pas au-dessous de certaines limites qui dépendent de la hauteur de la colonne.

De 2 à 3 mètres de hauteur, l'épaisseur ne doit pas être inférieure à 12 millimètres.

De 3 à 4 mètres de hauteur, l'épaisseur ne doit pas être inférieure à 15 millimètres.

De 4 à 6 mètres de hauteur, l'épaisseur ne doit pas être inférieure à 20 millimètres.

De 6 à 8 mètres de hauteur, l'épaisseur ne doit pas être inférieure à 25 millimètres.

Il faut donc que la différence d' - d'' soit au moins égale au double des nombres inscrits dans la dernière colonne. Cette condition est remplie dans l'exemple ci-dessus.

VI. M. Hodgkinson a déduit de ses expériences sur les supports en fonte (*Transactions philosophiques*, 1840), diverses remarques qu'il est utile de consigner. La première est relative à la forme qu'affectent les extrémités des colonnes chargées debout : leur résistance diminue d'une manière notable lorsqu'au lieu d'être terminées par des plans perpendiculaires à leur longueur, leurs extrémités sont arrondies; cette résistance peut ainsi être réduite au tiers. On comprend, en effet, que la charge, au lieu de se répartir uniformément sur toutes les fibres, ne porte alors que sur celles qui occupent la partie centrale jusqu'à une certaine distance de la fibre moyenne; et que par conséquent la forme arrondie donnée aux extrémités équivaut à une véritable diminution de la section transversale.

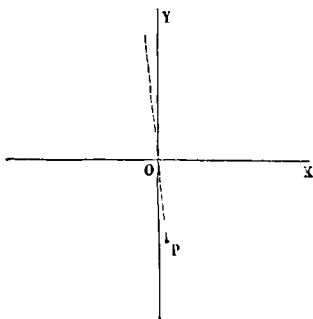
La seconde observation porte sur le renflement des colonnes vers le milieu de leur longueur. Cet accroissement de diamètre augmente la résistance; mais d'un septième à un huitième seulement.

Enfin, M. Hodgkinson a constaté que la résistance diminue notablement lorsque la charge, au lieu d'être appliquée au centre de gravité de la base supérieure du prisme, est appliquée suivant une face latérale, ou très-près de cette face. Il résulte, en effet, de ce second mode d'application de la charge, un accroissement notable du moment fléchissant (*Voy. FLEXION PLANE*), et, par suite, une diminution de la résistance du prisme (*Voy. la Résistance des matériaux*, par M. Morin, et la *Théorie de la résistance des solides* de M. Bélanger).

Voy. aussi l'art. ÉCRASEMENT (Résistance à l').

PROBABILITÉ DU TIR, probabilité d'atteindre un but déterminé, dans le tir des armes à feu ou

des bouches à feu. Lorsqu'on tire un grand nombre de coups sur un même but, dans des circonstances aussi près d'être identiques que possible, on n'obtient pas des résultats identiques. Si l'on tire, par exemple, sur une cible, avec une même arme, chargée et dirigée de la même manière, les points d'impact, c'est-à-dire les points où la trajectoire du centre de chaque projectile rencontre la cible, ne se confondent point; et ils paraissent, au premier abord, très-irrégulièrement répartis sur la cible. Mais à mesure que le nombre de ces points augmente, on reconnaît qu'autour d'un certain point central, les points d'impact sont plus rapprochés entre eux et en plus grand nombre, tandis que le nombre des points d'impact diminue à mesure qu'ils s'éloignent de ce point central. Supposons que l'on ait tracé sur la cible deux axes rectangulaires, l'un



vertical et l'autre horizontal, et qu'on ait mesuré les coordonnées des points d'impact par rapport à ces deux axes; soit X la moyenne des abscisses prises avec leur signe, et Y la moyenne des ordonnées; de telle sorte qu'en appelant x, y les coordonnées d'un point d'impact quelconque, et n le nombre de ces points, on ait

$$X = \frac{\sum x}{n} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\sum y}{n},$$

les longueurs X et Y, prises avec leur signe, seront les coordonnées d'un certain point de la cible, auquel on donne le nom de *point d'impact moyen*. C'est précisément le point central dont nous parlions tout à l'heure.

Si les axes des coordonnées ont été menés par le centre de la cible, ou plus exactement par le point qui sert de mire, les valeurs de X et de Y seront généralement très-faibles; le nombre des points d'impact situés au-dessus de l'axe horizontal différera peu du nombre de ceux qui sont situés au-dessous; et le nombre des points d'impact situés à droite de l'axe vertical différera également très-peu du nombre de ceux qui sont situés à gauche. S'il arrivait que les coordonnées X et Y du point d'impact moyen ne fussent pas très-petites, il faudrait en conclure qu'il existe, soit dans la construction de l'arme, soit dans la manière dont elle est employée, une cause constante de déviation. La *grandeur* de cette déviation serait la distance du point d'impact moyen au centre de la cible, ou à l'origine des coordonnées; en l'appelant D, on aurait

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

et la *direction* de la déviation serait donnée par l'angle que fait avec l'horizontale la droite qui va

de l'origine au point d'impact moyen; en appelant i cet angle, on aurait

$$\text{tang } i = \frac{Y}{X}.$$

L'abscisse X est ce que l'on appelle l'*écart moyen horizontal*; l'ordonnée Y est l'*écart moyen vertical*. Si l'on appelle δ la distance du point d'impact dont les coordonnées sont x et y , au centre de la cible, la quantité $\frac{\sum \delta^2}{n}$, ou la moyenne entre les distances

analogues, est ce que l'on nomme l'*écart moyen absolu*. Si tous les points étaient placés sur une même horizontale, ou si, ce qui revient au même, on ne tenait pas compte de leurs écarts dans le sens vertical, l'écart moyen absolu dans le sens horizontal s'obtiendrait en calculant la moyenne de toutes les abscisses prises positivement; on aurait de même l'écart moyen absolu dans le sens vertical en calculant la moyenne de toutes les ordonnées prises avec le signe *plus*.

Le point d'impact moyen jouit d'une propriété remarquable. Soit e la différence entre l'abscisse x d'un des points d'impact et l'abscisse α d'un point déterminé, mais quelconque de la cible; la différence sera ce qu'on appelle l'*écart horizontal* par rapport au point dont l'abscisse est α . En l'élevant au carré, on aura

$$e^2 = (x - \alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2,$$

et si l'on fait la somme de tous les carrés analogues, on aura, en appelant toujours n le nombre total des points d'impact,

$$\sum e^2 = \sum x^2 - 2\alpha \sum x + n\alpha^2,$$

ce qu'on peut écrire, en ajoutant et retranchant nX^2 ,

$$\sum e^2 = \sum x^2 - nX^2 + n(\alpha - X)^2.$$

Dans cette expression, le seul terme variable avec α est positif; elle sera donc la plus petite possible quand ce terme deviendra nul, c'est-à-dire quand on aura $\alpha = X$. Ainsi le point d'impact moyen jouit de la propriété que, *par rapport à ce point, la somme des carrés des écarts horizontaux est un minimum*. L'équation précédente se réduit à

$$\sum e^2 = \sum x^2 - nX^2, \quad [1]$$

relation qui permet de calculer la somme des carrés des écarts horizontaux sans être obligé de calculer séparément chacun de ces écarts.

On démontrerait de la même manière que, *par rapport au point d'impact moyen, la somme des carrés des écarts verticaux est un minimum*, c'est-à-dire que si l'on appelle e' la différence entre l'ordonnée d'un des points d'impact et l'ordonnée β d'un point déterminé, la somme $\sum e'^2$ est un minimum quand $\beta = Y$; et que l'on a

$$\sum e'^2 = \sum y^2 - nY^2. \quad [2]$$

Enfin, si l'on appelle d l'*écart absolu* d'un point d'impact par rapport au point dont les coordonnées sont α et β , la somme $\sum d^2$ sera un minimum quand on aura à la fois

$$\alpha = X \quad \text{et} \quad \beta = Y;$$

car on a $\sum d^2 = \sum (x - \alpha)^2 + \sum (y - \beta)^2$, et, puisque les deux termes sont positifs, le minimum de leur somme correspondra au minimum de chacun d'eux, c'est-à-dire que, *par rapport au point d'impact moyen, la somme des carrés des écarts absolus est un minimum*; et l'on a

$$\sum d^2 = \sum x^2 - nX^2 + \sum y^2 - nY^2 = \sum (x^2 + y^2) - n(X^2 + Y^2).$$

En appelant ρ la distance du point d'impact dont les coordonnées sont x et y à l'origine des coordonnées, et D la distance du point d'impact moyen à cette même origine, on pourra écrire

$$\Sigma d^2 = \Sigma \rho^2 - nD^2, \quad [3]$$

relation analogue aux équations [1] et [2].

M. Didion (*Calcul des Probabilités appliqué au tir des projectiles*) appelle *moyen écart*, dans le

sens horizontal, la quantité $\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n}}$, ou la racine

carrée de la moyenne entre les carrés des écarts horizontaux; en la désignant par m , on a donc

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - X^2}. \quad [4]$$

Il appelle de même *moyen écart*, dans le sens vertical, la quantité

$$m' = \sqrt{\frac{\Sigma e'^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - Y^2}. \quad [5]$$

Enfin, il appelle *moyen écart absolu* la quantité

$$M = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma \rho^2}{n} - D^2}. \quad [6]$$

La ressemblance entre les expressions *écart moyen* et *moyen écart* est fâcheuse; il faut se rappeler que l'*écart moyen* est la moyenne des écarts absolus, ou pris avec le même signe, tandis que le *moyen écart* est la racine carrée de la somme des carrés de ces mêmes écarts. Les auteurs allemands appellent *erreur moyenne* (der mittlere Fehler) la quantité à laquelle M. Didion a donné le nom de *moyen écart*. Nous adopterons cependant ici cette dernière expression, qui paraît consacrée dans l'artillerie française depuis 1857. Il n'est pas inutile de remarquer que la relation qui existe entre le *moyen écart* et ce que les auteurs français ont appelé *coefficient de régularité* ou *module de convergence*. En désignant par g ce module, on a (voy. Cournot, *Théorie des Chances*, p. 219)

$$g = \sqrt{\frac{n}{2 \Sigma e^2}} = \frac{1}{m \sqrt{2}}$$

A mesure que le nombre n augmente, il devient de plus en plus probable que, si l'on continuait les épreuves dans les mêmes conditions, les nouveaux points d'impact viendraient se grouper autour du point d'impact moyen déjà obtenu; et l'on peut calculer la probabilité p que l'écart ne dépassera pas une limite l assignée à l'avance. On démontre, en effet, dans le calcul des probabilités que, si l'on pose

$$p = \varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \quad [7]$$

cette quantité exprimera la probabilité que l'écart ne dépassera pas, soit en plus, soit en moins, la limite donnée par la relation

$$l = tm \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \text{ou} \quad l = \frac{t}{n} \sqrt{2 \Sigma e^2}, \quad [8]$$

s'il s'agit des écarts horizontaux. S'il s'agissait des écarts verticaux, il faudrait remplacer dans la relation [8] les quantités m et e respectivement par m' et e' .

La formule [7] est connue sous le nom de FORMULE DE LAPLACE, et il existe des Tables des valeurs numériques de la fonction $\varphi(t)$. (Voy. PROBABILITÉ.)

On appelle *erreur à craindre*, ou valeur *médiane* de l'erreur, la valeur de l qui correspond à $p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire celle pour laquelle il y a 1 contre 1 à parier que l'écart tombera soit au-dessus, soit au-dessous.

Pour donner un exemple de l'application de ces formules, nous prendrons les cent premiers points d'impact obtenus dans une série d'épreuves sur le pistolet d'officier, à canon rayé et à balle sphérique, et rapportées par M. Didion dans son *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles* (1858). Le pistolet était placé sur chevalet, à 50^m de la cible, et incliné convenablement pour atteindre le centre. Voici les coordonnées des points d'impact; les abscisses positives sont comptées vers la droite et les ordonnées positives sont comptées vers le haut. Les coordonnées sont exprimées en centimètres.

On trouve pour les coordonnées du point d'impact moyen

$$X = +0^{\text{cent}},35 \quad \text{et} \quad Y = -6^{\text{cent}},48;$$

ce point est donc situé dans le quatrième angle des axes, à une distance de l'origine égale à

$$\sqrt{(0,35)^2 + (6,48)^2} = 6^{\text{cent}},489,$$

et la droite qui joint ce point à l'origine fait avec l'axe des x un angle i dont la tangente est

$$\text{tang } i = -\frac{6,48}{0,35}, \quad \text{d'où} \quad i = 93^{\circ}5'30'' \text{ environ.}$$

On trouve ensuite

$$m = 18,26, \quad m' = 21,18, \quad M = 27,96.$$

La probabilité qu'à un coup suivant l'écart horizontal ne dépassera pas une limite l donnée, correspondra donc à la valeur t tirée de la relation

$$l = t.18,26 \sqrt{\frac{2}{100}}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{10l}{18,26 \sqrt{2}};$$

pour $l = 3^{\text{cent}}$, par exemple, on aurait

$$t = 1,162,$$

et les Tables de la fonction $\varphi(t)$ donnent

$$p = 0,89968.$$

Il y aurait donc un peu moins de 9 à parier contre 1 que l'écart horizontal ne dépassera pas 3 centimètres, soit en plus, soit en moins; c'est-à-dire que la distance du point d'impact sera comprise entre $0,35 + 3$ et $0,35 - 3$, ou entre $+3^{\text{cent}},35$ et $-2^{\text{cent}},65$.

S'il s'agit de l'écart vertical, on aura

$$t = \frac{10l}{21,18 \sqrt{2}};$$

si, par exemple, on fait

$$l = 6,48,$$

valeur absolue de Y , on trouve

$$t = 2,163,$$

et par suite

$$p = 0,997778.$$

Il y aurait donc plus de 997 à parier contre 1 qu'à un coup suivant l'écart vertical ne dépassera pas $6^{\text{cent}},48$, soit en plus, soit en moins, et que, par conséquent, l'ordonnée verticale du point d'impact sera comprise entre $-6,48 + 6,48$ et $-6,48 - 6,48$, ou entre *zéro* et $-12^{\text{cent}},96$. Cette forte probabilité indique une cause constante de déviation vers le bas, tenant, soit à la construction de l'arme, soit à l'inclinaison donnée à son axe

N ^{os}	x	y	N ^{os}	x	y	N ^{os}	x	y	N ^{os}	x	y	N ^{os}	x	y
1	+ 5	+ 10	21	+ 5	- 40	41	+ 8	- 37	61	+ 45	+ 10	81	0	- 15
2	- 5	+ 37	22	+ 29	+ 39	42	+ 22	- 11	62	+ 10	- 6	82	- 3	+ 10
3	- 29	- 24	23	+ 40	- 35	43	- 15	- 40	63	- 9	+ 37	83	- 31	- 5
4	- 7	+ 11	24	- 7	+ 16	44	- 10	+ 30	64	+ 7	- 20	84	- 12	- 2
5	- 4	- 29	25	+ 13	- 28	45	+ 2	+ 33	65	- 10	- 11	85	+ 7	+ 5
6	+ 11	- 12	26	0	- 32	46	- 23	- 17	66	0	0	86	- 23	- 9
7	+ 6	- 14	27	- 4	- 4	47	+ 4	- 16	67	- 2	- 11	87	+ 37	- 39
8	- 6	- 10	28	- 3	- 20	48	- 14	+ 13	68	+ 7	- 16	88	- 18	- 4
9	+ 24	- 37	29	- 27	+ 2	49	- 12	+ 14	69	- 41	+ 32	89	- 1	- 6
10	- 17	- 21	30	- 20	- 15	50	+ 16	- 50	70	- 14	- 14	90	0	- 34
11	+ 5	0	31	- 31	+ 34	51	+ 14	- 32	71	+ 8	- 30	91	- 23	- 28
12	+ 10	- 15	32	+ 25	- 10	52	+ 27	- 4	72	+ 56	+ 8	92	- 26	- 10
13	+ 13	+ 41	33	0	- 5	53	- 13	+ 3	73	+ 8	- 10	93	+ 9	- 7
14	+ 22	+ 12	34	+ 7	+ 20	54	+ 28	- 4	74	- 2	+ 20	94	+ 19	- 29
15	- 23	- 24	35	- 27	+ 14	55	+ 28	- 9	75	- 37	- 32	95	+ 36	- 52
16	- 1	- 13	36	- 17	+ 13	56	+ 5	- 23	76	- 2	- 7	96	- 2	+ 10
17	+ 18	- 11	37	+ 10	- 12	57	+ 28	+ 18	77	+ 2	- 43	97	+ 10	- 8
18	+ 3	- 15	38	- 2	+ 17	58	0	+ 19	78	- 19	- 7	98	- 11	- 9
19	+ 3	- 6	39	- 11	- 20	59	+ 21	+ 11	79	+ 9	- 23	99	+ 17	+ 19
20	- 25	+ 24	40	- 12	- 31	60	- 1	- 6	80	- 2	- 2	100	- 8	- 39

Cherchons, au contraire, l'écart vertical à craindre, ou la valeur médiane de cet écart; la valeur de t qui répond à $p = \frac{1}{2}$ étant $t = 0,4769$, on aura

$$= 0,4769.21,18 \sqrt{\frac{2}{100}}$$

ou

$l = 1^{\text{cent}},428$ ou environ $1^{\text{cent}},43$, c'est-à-dire qu'on pourra parier 1 contre 1 que l'écart vertical sera compris entre $+1^{\text{cent}},43$ et $-1^{\text{cent}},43$, ou que l'ordonnée du point d'impact sera comprise entre $-6^{\text{cent}},48 + 1^{\text{cent}},43$ et $-6^{\text{cent}},48 - 1^{\text{cent}},43$, ou entre $-5^{\text{cent}},05$ et $-6^{\text{cent}},91$.

On conçoit qu'il soit utile de pouvoir calculer la possibilité d'atteindre une surface de dimensions données. Malheureusement, il existe à cet égard une grande divergence entre les formules données par les différents auteurs qui se sont occupés de la question. Pour nous borner au cas le plus utile, celui d'une cible circulaire, nous exposerons la méthode de M. Didion, parce qu'elle paraît rationnelle, et justifiée par l'expérience. Cet auteur admet d'abord que le nombre des observations sur les-

quelles on s'appuie soit assez grand pour que la probabilité d'un écart horizontal x , compté à partir de la verticale du point d'impact moyen, puisse être représentée par une expression de la forme

$$p = A e^{-\mu^2 x^2} \quad [9]$$

Il admet en second lieu que la loi de probabilité soit la même dans le sens vertical et dans le sens horizontal; dès lors la probabilité d'un écart vertical y , compté à partir de l'horizontale du point d'impact moyen, peut être représentée par l'expression

$$p' = A e^{-\mu^2 y^2} \quad [10]$$

et, en vertu de la règle des probabilités composées, la probabilité p'' d'atteindre le point qui a pour coordonnées x et y , par rapport au point d'impact moyen, sera

$$p'' = pp' = A^2 e^{-\mu^2(x^2+y^2)} = A^2 e^{-\mu^2 r^2} \quad [11]$$

Remarquons que si n est le nombre total des observations, et v celui des points d'impact distribués sur la couronne circulaire dont l'aire est $2\pi r dr$, la probabilité d'atteindre cette couronne est

$$\frac{v}{n} = A^2 e^{-\mu^2 r^2} 2\pi r dr,$$

d'où

$$v = \pi n A^2 e^{-\mu^2 r^2} \cdot 2 r dr. \quad [12]$$

Pour avoir la probabilité P d'atteindre un cercle de rayon r, dont le centre est le point d'impact moyen, il faudra multiplier l'expression [11] par l'élément de l'aire du cercle, et intégrer de 0 à r, ce qui donne

$$P = \int_0^r A^2 e^{-\mu^2 \rho^2} 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi A^2}{\mu^2} (1 - e^{-\mu^2 r^2}). \quad [13]$$

Il reste à déterminer les constantes A et μ ; on a pour cela deux conditions. En premier lieu on doit avoir P=1 pour $r = \infty$, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{\pi A^2}{\mu^2} = 1, \text{ d'où } A = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}. \quad [14]$$

En second lieu, il faut que la somme des carrés des écarts soit égale à nM^2 ; par conséquent, en multipliant le second membre de la relation [12] par ρ^2 , et intégrant de 0 à ∞ , on doit obtenir nM^2 pour résultat. On trouve

$$\begin{aligned} nM^2 &= n\pi A^2 \int_0^\infty e^{-\mu^2 \rho^2} \cdot \rho^2 \cdot 2\rho d\rho \\ &= \frac{n\pi A^2}{\mu^4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 \rho^2} \cdot \mu^2 \rho^2 \cdot d \cdot \mu^2 \rho^2. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \mu^2 \rho^2 &= u, \\ \text{on a à calculer l'intégrale} \\ \int_0^\infty e^{-u} u du, \end{aligned}$$

laquelle a pour valeur l'unité. On doit donc avoir $\frac{\pi A^2}{\mu^4} = M^2$ ou $\frac{1}{\mu^2} = M^2$, d'où $\mu^2 = \frac{1}{M^2}$.

L'expression définitive de la probabilité P est donc

$$P = 1 - e^{-\frac{r^2}{M^2}}. \quad [15]$$

On en tire

$$r = M \sqrt{\log' \frac{1}{1-P}}. \quad [16]$$

Pour $r = M$, on a

$$P = 1 - \frac{1}{e} = 0,63127.$$

Ainsi, il y a en général 63 contre 36, ou 7 contre 4 à parier que l'on atteindra, dans des circonstances semblables à celles des observations, le cercle décrit du point d'impact moyen comme centre avec un rayon égal au moyen écart absolu (27^{cent},96 dans l'exemple donné plus haut).

On peut chercher aussi le rayon du cercle qui doit contenir la moitié des balles : c'est celui qui correspond à $P = \frac{1}{2}$; on trouve

$$r = M \sqrt{\log' 2} = 0,83255 \cdot M.$$

Dans l'exemple donné plus haut, on aurait $r = 23^{\text{cent}}, 278$.

Suivant Poisson, la valeur de P, dans le cas du cercle, serait donnée par la formule

$$P = \varphi \left(\frac{xn}{2f} \right),$$

φ représentant la fonction exprimée par le second membre de l'équation [7], et f désignant la somme des carrés des écarts. Cette formule ne paraît pas d'accord avec l'expérience.

Le rayon du cercle qui contient la moitié des balles a été adopté dans la plupart des concours de tir, et notamment à l'École normale de tir de Vincennes, pour comparer l'adresse des différents ti-

reurs, ou la bonté des différentes armes. C'est aussi très-souvent le terme de comparaison employé dans les écoles d'artillerie. Voici, à cet égard, quelques résultats d'expérience. La première colonne du tableau suivant indique les distances; les nombres inscrits dans les autres colonnes expriment le rayon du cercle qui contient la moitié des balles.

	FUSIL d'infanterie, modèle de 1842.	FUSIL rayé à balles oblongues.	CARABINE rayée à tige; mod. 1846.	CARABINE rayée à balles oblongues.
100 ^m	m	m	m	m
150	0,38'	"	"	0,10
200	0,75	0,647	0,18	"
250	1,40	"	0,24	0,15
300	"	0,920	"	"
350	4,30	"	0,36	0,26
400	"	1,170	"	"
450	9,40	1,310	0,48	0,40
500	"	1,802	0,62	0,94
600	"	2,975	0,78	0,94
700	"	3,940	1,10	"
800	"	4,307	1,47	2,00
900	"	"	1,94	"
1000	"	"	2,56	"

Mais il arrive souvent aussi que, pour donner les résultats du tir, on se contente de faire connaître le nombre des projectiles qui, sur un nombre de coups déterminés, 100 par exemple, ont atteint un but de dimensions données. C'est ce que l'on fait en général pour le tir des canons, des obusiers et des mortiers. Voici, d'après le relevé fait dans les écoles de tir, pendant les trente dernières années, le nombre moyen des boulets qui, sur 100 coups, ont atteint un blanc de 0^m,50 de diamètre, à diverses distances, et suivant le calibre des bouches à feu.

CALIBRE des pièces.	DISTANCES.						
	400 ^m	500 ^m	600 ^m	700 ^m	800 ^m	900 ^m	1000 ^m
Siège et pièce.	24	8,00	7,74	5,42	2,40	"	"
	16	7,20	6,33	4,70	"	"	"
	12	6,90	5,67	3,85	"	"	"
Cann. pagné.	12	4,80	3,68	3,10	2,65	2,27	2,02
	8	3,56	3,05	2,70	2,35	2,06	1,80
	6	3,25	2,90	2,60	2,30	2,05	1,80
	4	2,90	2,40	1,95	1,60	1,30	1,05

Avec les canons rayés, la précision du tir et la portée ont augmenté d'une manière notable; mais la RÉVIATION latérale (Voy. ce mot) est très-grande, et il est nécessaire d'en tenir compte (Voy. ARMES RAYÉES).

Pour un but de forme rectangulaire dont les dimensions seraient 2a dans le sens horizontal et 2b dans le sens vertical, la probabilité d'atteindre serait, d'après M. Didion,

$$p = \varphi \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right) \cdot \varphi \left(\frac{b}{m'\sqrt{2}} \right). \quad [17]$$

Cette formule est établie d'après les considérations qui ont servi à obtenir la formule [15].

Ces considérations ont conduit le même auteur à la détermination des courbes d'égale probabilité, c'est-à-dire des courbes, lieux des points de la cible qu'on a la même probabilité d'atteindre. Ces courbes seraient des ellipses dont les axes seraient proportionnels aux moyens écarts m et m'.

On nomme *justesse du tir* la limite vers laquelle tend le rapport entre la probabilité d'atteindre une surface et l'étendue de cette surface, lorsque cette dernière tend indéfiniment vers zéro. Si l'on choisit pour terme de comparaison le cercle, et qu'on adopte la formule de probabilité de M. Didion, la justesse j sera donnée par la formule

$$j = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{r^2}{M^2}}}{\pi r^2}$$

Cette fraction prend la forme $\frac{0}{0}$ lorsque r s'annule ;

mais en remplaçant, suivant une règle connue, les deux termes par leurs dérivées, et faisant ensuite

$$r = 0,$$

on obtient

$$j = \frac{1}{\pi M^2} \quad [18]$$

Dans l'exemple de tir du fusil donné plus haut, on a trouvé

$$M = 27^{\text{cent}}, 96 = 0^{\text{m}}, 2796,$$

on aurait donc

$$j = 4, 0717.$$

Quelques personnes, frappées de la longueur des calculs qu'entraîne l'emploi du *moyen écart*, c'est-à-dire de la moyenne entre les carrés des écarts observés, ont essayé de substituer à cette quantité l'*écart moyen*, ou la moyenne arithmétique des écarts absolus. C'est d'après une idée analogue, sans doute, que le *règlement sur le tir*, à l'usage des régiments d'infanterie, établi dans l'armée belge en 1848, prescrit de prendre pour terme de comparaison dans les concours de régiment la *somme des écarts mesurés à partir du centre*. Mais cette règle n'est point conforme aux principes du calcul des probabilités. Laplace a démontré que la moyenne la plus probable est celle pour laquelle la somme des carrés des erreurs est un minimum (*Voy. MOINDRES CARRÉS*) ; or, c'est le point d'impact moyen qui jouit de cette propriété : c'est donc à partir de ce point que les écarts doivent être mesurés ; et rien ne peut dispenser du calcul des quantités que nous avons désignées par m , m' ou M , c'est-à-dire du *moyen écart*, qui entre dans toutes les formules de probabilité.

Il peut arriver qu'on veuille faire concourir au calcul du *moyen écart* plusieurs moyennes résultant d'autant de séries d'observations distinctes. Supposons, par exemple, que n observations aient donné X pour la valeur de l'abscisse du point d'impact moyen ; que n' observations formant une seconde série aient donné la valeur X' , et que n'' observations formant une troisième série aient donné la valeur X'' . Si les armes employées ont été les mêmes, le pointeur également adroit, en un mot si toutes les observations doivent peser du même poids dans le résultat cherché, on obtiendra la moyenne ξ des observations en posant

$$\xi = \frac{nX + n'X' + n''X''}{n + n' + n''} \quad [19]$$

Mais si les conditions ont changé d'une série à l'autre, il faut pour rendre les observations comparables, ramener leur nombre, dans chaque série, à ce qu'il devrait être pour qu'un même écart ait la même probabilité, c'est-à-dire pour qu'à une même valeur de la limite l corresponde la même

valeur de l . Or, pour qu'il en soit ainsi, il faudra, en vertu de la relation [8], que le rapport $\frac{m}{\sqrt{n}}$ soit le

même pour chaque série ; on devra donc remplacer les nombres n' et n'' par d'autres nombres N' et N'' satisfaisant respectivement aux relations

$$\frac{m'}{\sqrt{n'}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \frac{m''}{\sqrt{n''}} = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

d'où

$$N' = n' \cdot \frac{m^2}{m'^2} \quad \text{et} \quad N'' = n'' \cdot \frac{m^2}{m''^2}.$$

La valeur ξ se calculera alors par la formule

$$\xi = \frac{nX + N'X' + N''X''}{n + N' + N''}.$$

Si l'on remplace N' et N'' par leurs valeurs, et qu'on divise ensuite les deux termes par m^2 , on peut mettre cette formule sous la forme

$$\xi = \frac{\frac{n}{m^2}X + \frac{n'}{m'^2}X' + \frac{n''}{m''^2}X''}{\frac{n}{m^2} + \frac{n'}{m'^2} + \frac{n''}{m''^2}} \quad [20]$$

En la comparant à la formule [19] on voit qu'elle en diffère en ce que les nombres n , n' , n'' sont

remplacés respectivement par $\frac{n}{m^2}$, $\frac{n'}{m'^2}$, $\frac{n''}{m''^2}$. Chacune de ces dernières quantités est ce que l'on appelle le *poids* (*Voy. ERREURS [Théorie des]*) du résultat fourni par la série d'observations correspondantes ; et l'on voit qu'on passe de la formule [19] à la formule [20] en remplaçant le nombre des observations de chaque série par le poids du résultat fourni par cette série.

On calculerait de la même manière l'ordonnée η du point d'impact moyen définitif, en fonction des ordonnées Y , Y' , Y'' , des points d'impact moyens obtenus séparément dans chaque série.

(*Voyez le Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, par M. Didion ; les *Formules de probabilité relatives au résultat moyen des observations*, par Poisson, insérées dans le *Mémorial d'artillerie*, 1830 ; la *Théorie des chances*, par M. Cournot ; la *Théorie analytique des probabilités*, par Laplace, chap. iv ; le *Calcul des probabilités*, par M. Liagre, § 114).

PROBABILITÉ MATHÉMATIQUE, rapport entre le nombre des chances favorables à un événement et le nombre total des chances, supposées toutes également possibles. Ainsi un dé à jouer ayant 6 faces, marquées des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, la probabilité d'amener un de ces points, 5 par exemple, au premier coup de dé, est $\frac{1}{6}$, car il n'y a qu'une chance favorable sur 6. Le nombre des cartes d'une même couleur, au jeu de piquet, étant 8, et le nombre total des cartes étant 32, la probabilité d'amener un *trèfle*, par exemple, en tirant au hasard une carte du paquet, est le rapport de 8 à 32 ou $\frac{1}{4}$. Le nombre des figures au même jeu étant 12, la probabilité d'amener une figure au premier coup est le rapport de 12 à 32 ou $\frac{3}{8}$. Et ainsi de suite.

1. En général, si f désigne le nombre des chances favorables à un événement A, et si c désigne le nombre des chances contraires, de telle sorte que $f + c$ soit le nombre total des chances, supposées

également possibles, la probabilité p de l'événement A sera

$$p = \frac{f}{c+f}$$

et la probabilité contraire q sera

$$q = \frac{c}{c+f}$$

Il en résulte $p+q=1$;

c'est-à-dire que, si p désigne la probabilité qu'un événement A aura lieu, la probabilité contraire sera $1-p$.

Il en résulte encore que si c est nul, c'est-à-dire si toutes les chances sont favorables à l'événement A, la probabilité de cet événement, qui dans ce cas se change en certitude, est exprimée par le rapport de f à f , ou par l'unité. Ainsi l'unité représente la certitude; et toute probabilité p , non équivalente à la certitude, est exprimée par une fraction.

II. Le calcul des probabilités, qui a été imaginé par Pascal et Fermat, a été l'objet des études d'un grand nombre de géomètres et de philosophes, parmi lesquels nous citerons Jacques Bernoulli, Montmort, Moivre, Leibnitz, Hume, Huyghens, Euler, Condorcet, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Legendre, Lacroix, Gauss, Poisson, Cournot, Quételet. C'est une des branches les plus importantes des mathématiques pures; ses applications sont nombreuses; et l'usage qu'on en fait en géodésie, dans le calcul des rentes viagères et des assurances, dans les épreuves relatives au tir des projectiles, et dans diverses autres questions pratiques, nous ont engagé à en rappeler ici les principes fondamentaux.

Le mot probabilité a, dans la langue générale, une signification vague qui a trompé d'excellents esprits, et contribué ainsi à jeter de la défaveur sur le calcul des probabilités et sur la légitimité de son emploi dans les applications. Toute équivoque disparaît cependant lorsqu'on a bien présente à l'esprit la définition très-précise de la probabilité mathématique, qui, comme on le voit, n'est applicable qu'aux chances égales susceptibles d'être exactement énumérées; et l'on ne saurait la confondre avec ce qu'on a appelé la probabilité morale, résultant d'une tendance de notre esprit à admettre ou à rejeter une hypothèse sans que nous puissions appuyer notre jugement sur une déduction logique, encore moins sur des opérations de calcul. M. Cournot, dans son *Exposition de la théorie des chances*, a mis très-nettement en lumière cette distinction capitale; et c'est pour éviter toute méprise à cet égard qu'il a, à l'exemple de Moivre, substitué la dénomination de théorie des chances à celle, plus généralement admise, de calcul des probabilités. Nous étalons d'abord quelques principes élémentaires.

III. Si un événement A peut arriver dans diverses hypothèses, dont les probabilités sont inégales, la probabilité de cet événement est la somme des probabilités de chacune des hypothèses favorables à l'événement. Si, par exemple, une urne renferme n boules blanches, n' boules rouges, et n'' boules noires, avec un nombre quelconque de boules d'autres couleurs, de manière que N soit le nombre total des boules, et qu'on demande la probabilité d'amener au premier tirage une boule de l'une des trois couleurs nommées ci-dessus, cette probabilité sera évidemment le rapport de

$$n + n' + n'' \text{ à } N.$$

Mais ce rapport peut s'écrire

$$\frac{n}{N} + \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N}$$

et, sous cette forme, on voit qu'il équivaut à la somme des probabilités d'amener soit une boule blanche, soit une boule rouge, soit une boule noire.

IV. Dans les exemples précédents il ne s'agissait que de probabilités absolues; mais il y a des questions dans lesquelles on est amené à ne considérer que des probabilités relatives. Supposons, par exemple, que, dans le cas de l'urne ci-dessus, on regarde comme nul le tirage d'une boule d'une couleur autre qu'une blanche, une rouge ou une noire, et que l'on demande la probabilité d'amener plutôt une blanche qu'une rouge ou une noire, la probabilité demandée sera une probabilité relative. Cette probabilité aura évidemment pour valeur

$$\frac{n}{n + n' + n''}$$

ou le rapport entre le nombre des boules blanches et le nombre total des boules blanches, rouges et noires. Or, cette valeur est le quotient de

$$\frac{n}{N} \text{ par } \frac{n}{N} + \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N};$$

on peut donc poser ce principe: que la probabilité relative d'un événement est le quotient de la probabilité absolue de cet événement par la somme des probabilités absolues que l'on compare.

V. On appelle probabilité composée d'un événement résultant du concours de plusieurs autres.

Si les divers événements simples sont indépendants, la probabilité composée est le produit des probabilités des événements simples. Supposons, par exemple, qu'on ait deux urnes, l'une renfermant f boules blanches et c boules noires, l'autre renfermant f' boules blanches et c' boules noires, et qu'on demande la probabilité d'amener deux boules blanches en tirant une boule de chaque urne. Le nombre total des chances est ici le nombre des arrangements qu'on peut faire en mettant à la suite de chacune des boules de la première urne toutes les boules de la seconde; ce nombre total des chances est donc $(f+c)(f'+c')$. Quant au nombre des chances favorables, on l'obtiendra en comptant le nombre des arrangements, qu'on peut faire en mettant à la suite de chacune des boules blanches de la première urne chacune des boules blanches de la seconde; ce nombre de chances favorables est donc $f.f'$. Par conséquent, la probabilité cherchée a pour expression

$$\frac{f.f'}{(f+c)(f'+c')}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f}{(f+c)} \cdot \frac{f'}{f'+c'}$$

c'est-à-dire le produit de la probabilité simple d'extraire une boule blanche de la première urne par la probabilité simple d'extraire une boule blanche de la seconde.

En considérant un plus grand nombre d'urnes contenant chacune des boules blanches et des boules noires, on démontrerait de la même manière que la probabilité d'un événement composé d'un nombre quelconque d'événements indépendants est égale au produit des probabilités des événements simples.

Par exemple: la probabilité de tirer un as d'un

Jeu de piquet ou de 32 cartes étant $\frac{4}{32}$ ou $\frac{1}{8}$, la probabilité de tirer successivement un as de trois jeux de piquet séparés serait

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \text{ ou } \frac{1}{512}.$$

VI. Si les événements simples ne sont pas indépendants, et que, de deux événements simples formant un événement composé, le second ne puisse arriver qu'autant que le premier a eu lieu, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité absolue du premier événement, par la probabilité que, ce premier événement ayant eu lieu, le second aura lieu également. Imaginons, en effet, qu'une urne contenant n boules dont f blanches, on demande la probabilité d'amener deux blanches en deux tirages, sans remettre dans l'urne la première boule tirée. Le nombre total des chances sera le nombre des arrangements des n boules 2 à 2, c'est-à-dire $n(n-1)$; le nombre des chances favorables sera le nombre des arrangements 2 à 2 des f boules blanches, c'est-à-dire $f(f-1)$. La probabilité cherchée aura donc pour expression

$$\frac{f(f-1)}{n(n-1)} \text{ ou } \frac{f}{n} \times \frac{f-1}{n-1}.$$

Or $\frac{f}{n}$ est la probabilité absolue d'amener une boule blanche au premier tirage. Cette boule blanche ayant été tirée, il en reste $f-1$, et le nombre total des boules est réduit à $n-1$; ainsi $\frac{f-1}{n-1}$ exprime alors la probabilité d'amener une seconde boule blanche : ce qui justifie la proposition énoncée.

Si, par exemple, on demandait d'extraire ainsi deux figures de trèfle d'un jeu de piquet, on aurait pour la probabilité de tirer une première figure de trèfle $\frac{3}{32}$. Il resterait alors 31 cartes, dont 2 figures de trèfle; la probabilité de tirer une seconde figure de trèfle serait donc $\frac{2}{31}$; et, d'après le principe démontré, la probabilité composée aurait pour valeur $\frac{3}{32} \times \frac{2}{31}$ ou $\frac{3}{16.31}$ c'est-à-dire $\frac{3}{496}$.

VII. La règle des probabilités composées conduit à l'évaluation des probabilités dans les épreuves répétées. — On peut toujours assimiler les épreuves répétées des mêmes hasards à des tirages successifs dans lesquels on extrairait d'une urne, contenant, par exemple, f boules blanches et c boules noires, une boule qu'on remettrait chaque fois dans l'urne pour ne pas altérer les chances. La chance d'extraire une boule blanche serait $\frac{f}{f+c}$ ou p ; la chance

contraire serait $\frac{c}{f+c}$ ou q , de telle sorte que l'on ait $p+q=1$. D'après la règle des probabilités composées, la chance d'extraire, en m tirages successifs, d'abord $m-n$ boules blanches, puis n boules noires, serait le produit de $m-n$ facteurs égaux à p par n facteurs égaux à q , c'est-à-dire $p^{m-n} \cdot q^n$. Mais si l'on n'a point égard à l'ordre dans lequel les boules blanches et les boules noires se succèdent, la probabilité d'extraire $m-n$ boules blanches et n noires en m tirages sera représentée par $p^{m-n} \cdot q^n$ répété autant de fois qu'il y a de combinaisons possibles de m objets n à n , ou $m-n$ à $m-n$. Si l'on

désigne par $C_{m,n}$ ce nombre de combinaisons, la probabilité dont il s'agit aura pour valeur $C_{m,n} \cdot p^{m-n} \cdot q^n$. Il résulte de cette observation que si l'on développe la puissance m du binôme $p+q$, ce qui donne

$$(p+q)^m = p^m + \frac{m}{1} \cdot p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1.2} p^{m-2}q^2 \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} p^{m-n}q^n + \dots, [1]$$

le terme p^m exprimera la probabilité d'extraire m boules blanches en m tirages; le second terme exprimera la probabilité d'extraire $m-1$ boules blanches et 1 boules noires; et ainsi de suite. Le terme général, qui en a n avant lui, exprimera la probabilité d'extraire en m tirages $m-n$ boules blanches et n boules noires. — Le dernier terme q^m exprimera la probabilité de n'extraire que des boules noires. La somme de toutes ces probabilités est égale à l'unité; et en effet elle équivaut à la certitude, puisque le tirage de m boules ne peut donner que l'un des résultats ci-dessus énumérés.

En général, si l'on appelle p la probabilité d'un événement A, et q la probabilité de l'événement contraire B, de telle sorte qu'on ait $p+q=1$, la probabilité que, dans m épreuves, l'événement A arrivera $m-n$ fois et l'événement B n fois, aura pour expression le terme général du développement [1] ci-dessus, ou $C_{m,n} \cdot p^{m-n} \cdot q^n$.

D'après la règle [3] relative aux probabilités dans diverses hypothèses, la somme de tous les termes du développement de $(p+q)^m$, depuis p^m jusqu'à $C_{m,n} \cdot p^{m-n} \cdot q^n$ inclusivement, exprimera la probabilité que, dans m épreuves, l'événement B n'arrivera pas plus de n fois.

Supposons, par exemple, que d'un jeu de piquet on tire successivement 5 cartes, en remettant chaque fois la carte tirée; et cherchons la probabilité que sur ces 5 tirages, on amènera 3 trèfles. La probabilité d'amener un trèfle est $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$, et la probabilité contraire est $\frac{3}{4}$. Le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3, ou 2 à 2, est 10; la probabilité demandée sera donc

$$10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ ou } \frac{45}{512},$$

La probabilité d'amener au moins 3 trèfles serait $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + 5 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + 10 \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$, c'est-à-dire $\frac{53}{512}$.

VIII. Il est important de déterminer le terme du développement [1] qui a la plus grande valeur absolue. Or le rapport du terme général écrit à celui qui le précède est

$$\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{q}{p},$$

et le rapport du terme qui suit le terme général à ce terme général lui-même est

$$\frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{q}{p}.$$

Le terme général sera donc le plus grand si l'on a à la fois

$$\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{q}{p} > 1 \text{ et } \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{q}{p} < 1,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{m-n}{n} > \frac{p}{q} - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{m-n}{n} < \frac{p}{q} + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

On satisfait à ces inégalités en posant

$$\frac{m-n}{n} = \frac{p}{q} \quad [2]$$

et l'on voit de plus que si, sans changer le rapport de $m-n$ à n , on fait croître indéfiniment ces deux nombres, les termes

$$\frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{q}$$

décroissent indéfiniment, en sorte que le seul moyen de satisfaire aux deux inégalités est alors de satisfaire à l'égalité [2]. Ainsi, dans un grand nombre d'épreuves, l'événement composé dont la probabilité est la plus grande est celui dans lequel les résultats se partagent entre les deux événements simples dans le rapport des probabilités de ses événements. Si, par exemple, on extrait un grand nombre de cartes d'un jeu de piquet, en remettant à chaque fois la carte tirée, on aura une probabilité plus grande que toutes les autres, que le nombre des trèfles sera au nombre des autres cartes tirées dans le rapport de $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$, ou dans le rapport de 1 à 3.

IX. Si l'on compare le terme maximum, que nous désignerons par M , à un terme placé r rangs après, et que nous désignerons par R , on trouve que leur rapport est

$$\frac{R}{M} = \frac{(m-n)(m-2-1)\dots(m-n-r+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+r)} \cdot \frac{q^r}{p^r} \quad [3]$$

Posons $m-n = hp$ et hq ; il viendra, en divisant les facteurs, en nombre égal, du numérateur et du dénominateur, par h ,

$$\frac{R}{M} = \frac{p \left(p - \frac{1}{h}\right) \left(p - \frac{2}{h}\right) \dots \left(p + \frac{r-1}{h}\right)}{\left(q + \frac{1}{h}\right) \left(q + \frac{2}{h}\right) \left(q + \frac{3}{h}\right) \dots \left(q + \frac{r}{h}\right)} \cdot \frac{q^r}{p^r}$$

Si maintenant on fait croître h indéfiniment, ce qui revient à multiplier indéfiniment les épreuves, l'expression tendra vers

$$\frac{p^r \cdot q^r}{q^r \cdot p^r}$$

c'est-à-dire vers l'unité. Ainsi, quand on multiplie suffisamment les épreuves, la probabilité correspondante à un terme R placé r rangs après le terme maximum, approche autant qu'on le veut de la probabilité exprimée par ce terme maximum.

On démontrerait la même propriété pour la probabilité correspondante à un terme R' placé r rangs avant le terme maximum.

Il en résulte que quand on multiplie les épreuves, toutes les probabilités exprimées par les termes compris de R' à R (r étant d'ailleurs quelconque) vont en se rapprochant de la probabilité maximum.

Mais en même temps cette probabilité maximum diminue en valeur absolue, comme on peut le reconnaître sur des exemples, et comme Stirling et Laplace l'ont démontré d'une manière générale (Voy. le *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, par M. Lacroix, note 1, page 272).

X. Si, dans l'expression du rapport $\frac{R}{M}$, au lieu de

faire croître m et n , on fait au contraire croître r , on trouve que ce rapport peut être rendu aussi petit qu'on le voudra en prenant r suffisamment grand. On peut, en effet, l'écrire

$$\frac{R}{M} = \frac{ph}{qh+1} \cdot \frac{ph-1}{qh+2} \cdot \frac{ph-2}{qh+3} \dots \frac{ph-(r-1)}{qh+r} \cdot \frac{q^r}{p^r}$$

ou, en observant que le nombre des fractions qui précèdent $\frac{q^r}{p^r}$ est précisément r ,

$$\frac{R}{M} = \frac{pqh}{pqh+p} \cdot \frac{pqh-q}{pqh+2p} \cdot \frac{pqh-2q}{pqh+3p} \dots \frac{pqh-(r-1)q}{pqh+rp}$$

Les fractions qui forment l'expression de ce rapport vont en diminuant, puisque les numérateurs vont en diminuant et que les dénominateurs vont en augmentant. Si donc on les remplace toutes, à partir de la seconde, par la plus grande d'entre elles, c'est-à-dire par la première, on aura

$$\frac{R}{M} < \left(\frac{pqh}{pqh+p}\right)^r$$

Or, on sait qu'étant donné un nombre plus petit que l'unité, on peut toujours l'élever à une puissance r assez grande pour que le résultat soit plus petit que toute quantité donnée δ . Donc on peut, *a fortiori*, en prenant r suffisamment grand, rendre $\frac{R}{M}$ plus petit que δ , ce qu'il s'agissait de démontrer.

XI. Les observations qui précèdent conduisent à une proposition très-importante, démontrée pour la première fois par Jacques Bernoulli (*Ars conjectandi*, 1713) et dont voici l'énoncé : *A mesure qu'on multiplie les épreuves, on a une probabilité toujours croissante que le rapport du nombre des événements A à celui des événements contraires B ne s'écartera pas du rapport de leurs probabilités respectives au delà d'une limite donnée, en plus ou en moins; et quelque resserrée que soit cette limite, la probabilité dont il s'agit pourra approcher de l'unité autant qu'on le voudra, pourvu qu'on augmente suffisamment le nombre des épreuves.* Il suffit pour le démontrer de faire voir que la somme des termes du développement de $(p+q)^m$, depuis le terme qui précède de r rangs le terme maximum jusqu'au terme qui suit de r rangs ce même terme maximum, peut être rendue aussi peu différente de l'unité qu'on le voudra en prenant m suffisamment grand (Voy. pour la démonstration l'art. THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI).

XII. Lorsque le nombre m des épreuves est très-considérable, il devient impraticable de calculer un grand nombre de termes du développement de $(p+q)^m$. On a recours alors à des formules d'approximation. La probabilité correspondante à un terme de ce développement est une fonction du rang de ce terme, et peut par conséquent être représentée par l'ordonnée d'une courbe qui aurait ce rang pour abscisse. Cette courbe porte le nom de *courbe de probabilité*. Mais, au lieu de prendre l'ordonnée pour la mesure de la probabilité qui correspond à une abscisse donnée, on peut prendre l'aire du rectangle élémentaire qui a pour hauteur cette ordonnée et pour base l'accroissement infiniment petit ou la différentielle de l'abscisse. La somme des probabilités exprimées par les termes du développement compris entre le rang n et le rang n' est alors exprimée par l'aire de la courbe, prise depuis l'abscisse n jusqu'à l'abscisse n' , l'aire totale de la courbe, comprise entre les ordonnées correspondantes aux abscisses extrêmes 0 et ∞ , ayant pour valeur l'unité, puisque la somme de toutes les probabilités répond à la certitude.

A la courbe véritable, les analystes ont cherché à substituer une courbe dont l'équation fût simple,

et qui s'approchât suffisamment de la vérité. Lorsque m est très-grand, on peut, en général, remplacer la courbe de probabilité par une courbe dont l'équation est de la forme

$$y = Ae^{-kx^2},$$

qui est le type des courbes dont les ordonnées décroissent symétriquement, et d'une manière rapide, de part et d'autre d'une valeur maximum.

On démontre (Voy. la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace) que si l'on peut négliger les quantités de l'ordre $\frac{1}{m}$, la probabilité P que, dans

un nombre m d'épreuves, le nombre des événements A restera compris entre les limites $m(p-l)$

et $m(p+l)$ (p étant la probabilité de l'événement simple) sera donnée par la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt. + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi p(1-p)m}}, \quad [4]$$

la quantité t étant elle-même donnée par la relation

$$t = l \sqrt{\frac{m}{2p(1-p)}}. \quad [5]$$

Dans la plupart des cas, le second terme de la formule [4] peut être négligé, et l'on réduit ordinairement l'expression de P à

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt. \quad [6]$$

Voici, d'après M. Cournot, le tableau des valeurs de la fonction P ainsi réduite :

t	P	t	P	t	P	t	P	t	P
0,00	0,00000	0,60	0,60386	1,20	0,91031	1,80	0,98909	2,40	0,999312
0,01	0,01128	0,61	0,61168	1,21	0,91296	1,81	0,98952	2,41	0,999346
0,02	0,02257	0,62	0,61941	1,22	0,91553	1,82	0,98994	2,42	0,999379
0,03	0,03384	0,63	0,62705	1,23	0,91801	1,83	0,99035	2,43	0,999411
0,04	0,04511	0,64	0,63459	1,24	0,92050	1,84	0,99074	2,44	0,999441
0,05	0,05637	0,65	0,64203	1,25	0,92290	1,85	0,99111	2,45	0,999469
0,06	0,06762	0,66	0,64938	1,26	0,92524	1,86	0,99147	2,46	0,999497
0,07	0,07886	0,67	0,65663	1,27	0,92751	1,87	0,99182	2,47	0,999523
0,08	0,09008	0,68	0,66378	1,28	0,92973	1,88	0,99216	2,48	0,999547
0,09	0,10128	0,69	0,67084	1,29	0,93190	1,89	0,99248	2,49	0,999571
0,10	0,11246	0,70	0,67780	1,30	0,93401	1,90	0,99279	2,50	0,999593
0,11	0,12362	0,71	0,68467	1,31	0,93606	1,91	0,99309	2,51	0,999614
0,12	0,13476	0,72	0,69143	1,32	0,93806	1,92	0,99338	2,52	0,999635
0,13	0,14587	0,73	0,69810	1,33	0,94001	1,93	0,99366	2,53	0,999654
0,14	0,15695	0,74	0,70468	1,34	0,94191	1,94	0,99392	2,54	0,999672
0,15	0,16800	0,75	0,71116	1,35	0,94376	1,95	0,99418	2,55	0,999689
0,16	0,17901	0,76	0,71754	1,36	0,94556	1,96	0,99443	2,56	0,999706
0,17	0,18999	0,77	0,72382	1,37	0,94731	1,97	0,99466	2,57	0,999722
0,18	0,20094	0,78	0,73001	1,38	0,94902	1,98	0,99489	2,58	0,999736
0,19	0,21184	0,79	0,73610	1,39	0,95067	1,99	0,99511	2,59	0,999751
0,20	0,22270	0,80	0,74210	1,40	0,95228	2,00	0,99532	2,60	0,999764
0,21	0,23351	0,81	0,74800	1,41	0,95385	2,01	0,99552	2,61	0,999777
0,22	0,24430	0,82	0,75381	1,42	0,95538	2,02	0,99572	2,62	0,999789
0,23	0,25502	0,83	0,75952	1,43	0,95686	2,03	0,99591	2,63	0,999800
0,24	0,26570	0,84	0,76514	1,44	0,95830	2,04	0,99609	2,64	0,999811
0,25	0,27632	0,85	0,77067	1,45	0,95969	2,05	0,99626	2,65	0,999821
0,26	0,28690	0,86	0,77610	1,46	0,96105	2,06	0,99642	2,66	0,999831
0,27	0,29742	0,87	0,78144	1,47	0,96237	2,07	0,99658	2,67	0,999840
0,28	0,30788	0,88	0,78669	1,48	0,96365	2,08	0,99673	2,68	0,999849
0,29	0,31828	0,89	0,79184	1,49	0,96490	2,09	0,99688	2,69	0,999857
0,30	0,32863	0,90	0,79691	1,50	0,96611	2,10	0,99702	2,70	0,999865
0,31	0,33892	0,91	0,80188	1,51	0,96728	2,11	0,99715	2,71	0,999872
0,32	0,34913	0,92	0,80677	1,52	0,96841	2,12	0,99728	2,72	0,999880
0,33	0,35928	0,93	0,81156	1,53	0,96952	2,13	0,99740	2,73	0,999887
0,34	0,36936	0,94	0,81627	1,54	0,97059	2,14	0,99752	2,74	0,999893
0,35	0,37938	0,95	0,82089	1,55	0,97162	2,15	0,99763	2,75	0,999899
0,36	0,38933	0,96	0,82542	1,56	0,97263	2,16	0,99774	2,76	0,999905
0,37	0,39921	0,97	0,82987	1,57	0,97360	2,17	0,99785	2,77	0,999910
0,38	0,40901	0,98	0,83423	1,58	0,97455	2,18	0,99795	2,78	0,999915
0,39	0,41874	0,99	0,83851	1,59	0,97546	2,19	0,99804	2,79	0,999920
0,40	0,42839	1,00	0,84270	1,60	0,97633	2,20	0,99813	2,80	0,999925
0,41	0,43797	1,01	0,84681	1,61	0,97721	2,21	0,99822	2,81	0,999929
0,42	0,44747	1,02	0,85084	1,62	0,97804	2,22	0,99830	2,82	0,999933
0,43	0,45689	1,03	0,85478	1,63	0,97884	2,23	0,99838	2,83	0,999937
0,44	0,46623	1,04	0,85865	1,64	0,97962	2,24	0,99846	2,84	0,999940
0,45	0,47548	1,05	0,86244	1,65	0,98038	2,25	0,99853	2,85	0,999943
0,46	0,48466	1,06	0,86614	1,66	0,98110	2,26	0,99860	2,86	0,999946
0,47	0,49374	1,07	0,86977	1,67	0,98181	2,27	0,99867	2,87	0,999949
0,48	0,50275	1,08	0,87333	1,68	0,98249	2,28	0,99873	2,88	0,999952
0,49	0,51167	1,09	0,87680	1,69	0,98315	2,29	0,99879	2,89	0,999955
0,50	0,52050	1,10	0,88020	1,70	0,98379	2,30	0,99885	2,90	0,999958
0,51	0,52924	1,11	0,88353	1,71	0,98441	2,31	0,99891	2,91	0,999961
0,52	0,53790	1,12	0,88679	1,72	0,98500	2,32	0,99896	2,92	0,999963
0,53	0,54646	1,13	0,88997	1,73	0,98558	2,33	0,99901	2,93	0,999965
0,54	0,55494	1,14	0,89308	1,74	0,98613	2,34	0,99905	2,94	0,999967
0,55	0,56332	1,15	0,89612	1,75	0,98667	2,35	0,99911	2,95	0,999969
0,56	0,57162	1,16	0,89910	1,76	0,98719	2,36	0,99915	2,96	0,999971
0,57	0,57982	1,17	0,90200	1,77	0,98769	2,37	0,99919	2,97	0,999973
0,58	0,58792	1,18	0,90484	1,78	0,98817	2,38	0,99923	2,98	0,999974
0,59	0,59594	1,19	0,90761	1,79	0,98864	2,39	0,99927	2,99	0,999976

t = 3,00	P = 0,9999779093....
t = 4,00	P = 0,9999999845828....
t = 5,00	P = 0,99999999999843253....

XIII. Le théorème de Jacques Bernoulli conduit à la détermination des probabilités *a posteriori*, c'est-à-dire à la détermination de la probabilité d'un événement simple, par les résultats que fournissent des épreuves répétées et en grand nombre relatives à cet événement.

Si, par exemple, sur un très-grand nombre *m* d'épreuves, l'événement A que l'on a en vue est arrivé *m - n* fois, le quotient $\frac{m}{n}$ sera une valeur approchée de la probabilité *p* de l'événement simple; et, en la mettant pour *p* dans l'équation [5] on trouvera

$$t = lm \sqrt{\frac{m}{2n(m-n)}}, \text{ d'où } t = \frac{\sqrt{2n(m-n)}}{m\sqrt{m}}. \quad [7]$$

Si l'on se donne la probabilité P, la table donnera *t* par interpolation, et l'on en déduira la valeur correspondante de *l*. On aura donc approximativement la probabilité P donnée que la valeur de *p* est comprise entre

$$\frac{m-n}{m} - l \quad \text{et} \quad \frac{m-n}{m} + l.$$

Si, par exemple, sur 10 000 épreuves l'événement A est arrivé 8500 fois, on aura *m* = 10 000 et *m - n* = 8500. Adoptons pour la valeur de P le nombre 0,999016 qui, d'après la table, répond à *t* = 2,33; il viendra

$$l = 2,33 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 8500 \cdot 1500}}{10^4} = 0,001176...$$

On aura donc approximativement une probabilité de 0,999; ou plus de 999 à parier contre 1 que la valeur *p* est comprise entre

$$\frac{8500}{10\ 000} - 0,001176 \quad \text{et} \quad \frac{8500}{10\ 000} + 0,001176,$$

c'est-à-dire entre 0,848824 et 0,851176.

XIV. Mais on traite aussi les questions relatives aux probabilités *a posteriori* par une autre méthode fondée sur une règle particulière appelée la *Règle de Bayes*, du nom du géomètre anglais qui l'a indiquée. Cette règle peut s'énoncer de la manière suivante : *Les probabilités des causes, ou des hypothèses, sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés.* C'est-à-dire que si les événements observés peuvent avoir lieu dans diverses hypothèses également possibles, la plus probable de ces hypothèses est celle qui donne la plus grande probabilité pour les événements observés; et que la probabilité de ces événements dans chaque hypothèse peut servir de mesure à la probabilité de cette hypothèse elle-même.

Ce principe, qui n'est au fond que la définition de ce qu'on doit entendre par la probabilité d'une hypothèse, n'est point sujet à contestation, bien qu'on en ait fait des applications erronées. — Par conséquent si *p, p', p'', etc.*, désignent la probabilité des événements observés dans les diverses hypothèses, les probabilités de ces hypothèses pourront être représentées par *kp, kp', kp'', etc.* Mais leur somme doit être égale à l'unité, puisque l'une des hypothèses a nécessairement lieu; on a donc

$$kp + kp' + kp'' + \dots = 1,$$

d'où
$$k = \frac{1}{p + p' + p'' + \dots};$$

et par conséquent les probabilités des hypothèses respectives sont

$$\frac{p}{p + p' + p'' + \dots}, \quad \frac{p'}{p + p' + p'' + \dots},$$

$$\frac{p''}{p + p' + p'' + \dots}, \text{ et ainsi de suite;}$$

c'est-à-dire que la probabilité de chaque hypothèse se forme en divisant la probabilité des événements observés dans cette hypothèse par la somme des probabilités de ces mêmes événements dans toutes les hypothèses.

Concevons, par exemple, 5 urnes renfermant :

La première,	4 boules blanches et	1 noire.
La seconde,	3	2 noires.
La troisième,	2	3
La quatrième,	1	4
La cinquième,	0	5

La probabilité d'extraire une boule blanche sera, pour les cinq urnes respectivement :

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad 0.$$

Par conséquent, si l'événement observé a été l'extraction d'une boule blanche, la probabilité qu'elle a été tirée de la première urne est

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + 0} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{10}.$$

On trouverait de même pour les autres urnes les

probabilités $\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}$, et 0.

XV. Dans les applications que l'on fait de la règle de Bayes aux événements naturels, on suppose un nombre indéfini d'hypothèses également possibles (mais non également probables), et l'on admet que la probabilité de chaque événement simple puisse passer d'une manière continue par toutes les valeurs comprises depuis 0 jusqu'à l'unité. Soit *x* la probabilité d'un événement simple A dans une des hypothèses, 1 - *x* sera la probabilité de l'événement contraire B; et la probabilité que dans *m* épreuves l'événement A se produise *m - n* fois et l'événement B *n* fois aura, comme on l'a vu, pour expression $C_{m,n} x^{m-n} (1-x)^n$. Pour obtenir la probabilité de l'hypothèse considérée, il faut, d'après la règle de Bayes, diviser cette quantité par la somme de toutes les quantités analogues relatives aux diverses hypothèses, c'est-à-dire par la somme des valeurs que prend cette quantité quand on y fait varier *x* depuis 0 jusqu'à 1. En nommant donc P_x la probabilité de l'hypothèse répondant à *x*, on aura

$$P_x = \frac{C_{m,n} x^{m-n} (1-x)^n}{\sum_0^1 C_{m,n} x^{m-n} (1-x)^n},$$

la somme Σ représentant une somme de quantités discontinues (aussi peu différentes de l'une à l'autre qu'on le voudra). On passera de la discontinuité à la continuité, en multipliant les deux termes par *dx* et faisant croître *x* d'une manière continue; le dénominateur se change en une intégrale, et le facteur $C_{m,n}$ disparaissant, on peut écrire

$$P_x = \frac{x^{m-n} (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m-n} (1-x)^n dx}. \quad [8]$$

Cette probabilité est infiniment petite. Mais si l'on cherche la probabilité que *x* soit compris entre deux limites finies *a* et *b*, plus petites que l'unité

il faut faire la somme des probabilités P_x depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$; c'est-à-dire qu'en nommant $P_{a,b}$ la probabilité dont il s'agit, on a

$$P_{a,b} = \frac{\int_a^b x^{m-n} (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m-n} (1-x)^n dx}, \quad [9]$$

quantité qui a une valeur finie.

Les intégrations indiquées s'effectuent par la règle de l'intégration par parties; mais elles conduisent à des formules dont l'emploi est très-laborieux lorsque m et n sont des nombres considérables. Les analystes y ont substitué des formules approximatives. On démontre (Voy. la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace, et la note p. 291 du *Traité élémentaire du calcul des probabilités* de M. Lacroix) que si l'on pose

$$a = \frac{m-n}{m} - l \quad \text{et} \quad b = \frac{m-n}{m} + l,$$

c'est-à-dire si l'on prend des limites également éloignées, en moins et en plus de la valeur $\frac{m-n}{m}$ qui rend le produit $x^{m-n} (1-x)^n$ maximum, la valeur de $P_{a,b}$ est donnée par la formule [6] citée plus haut, la variable t étant liée à la limite l par la relation [7]. Ainsi la règle de Bayes conduit au même résultat approximatif que le théorème de J. Bernoulli.

XVI. Une fois la probabilité des hypothèses déterminée à l'aide des faits observés, on peut s'élever à la probabilité des événements futurs par les règles de probabilités *a priori*. Il suffit pour cela de multiplier la probabilité de l'hypothèse par la probabilité des nouveaux événements dans cette hypothèse. On trouve ainsi, par des procédés analogues à ceux qui ont été indiqués plus haut, que la probabilité P' que, dans une nouvelle série de m' épreuves, le rapport du nombre des événements A au nombre total de ces épreuves restera compris entre les limites $\frac{m-n}{m} - l'$ et $\frac{m-n}{m} + l'$,

est encore exprimée par la formule [6]: la variable t et la nouvelle limite l' étant liées entre elles par la relation

$$t = l'm \sqrt{\frac{mm'}{2n(m-n)(m+m')}}. \quad [10]$$

Si m' , quoique très-grand, a cependant une valeur relative très-petite par rapport à m , on reconnaît, en divisant par m les deux termes de la fraction sous le radical, que la formule se réduit sensiblement à

$$t = l'm \sqrt{\frac{m'}{2n(m-n)}}. \quad [11]$$

On voit que, pour une même limite l , la variable t , et par suite la probabilité P' , diminuent avec m' ; et que, pour une même valeur de m' , la probabilité P diminue avec la limite l .

Si au contraire m' était très-grand par rapport à m , la formule [10] se réduirait sensiblement à

$$t = l'm \sqrt{\frac{m}{2n(m-n)}}. \quad [12]$$

formule qui ne diffère de la formule [7] qu'en ce que l y est remplacé par l' . La valeur de t , et par suite P' , diminuent alors avec l' ; et pour obtenir

une probabilité P' égale à P , il faut supposer la limite l' égale à l .

XVII. Il n'entre pas dans le cadre de ce dictionnaire de parler des applications du calcul des probabilités aux jeux de hasard; nous avons dû nous restreindre aux principes fondamentaux, en vue des applications énumérées en commençant; et nous renvoyons pour tout le reste aux ouvrages spéciaux. (Voy. dans ce dictionnaire les articles MOYENNES ERREURS (Théorie des), MOINDRES CARRÉS, ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.)

Les principaux ouvrages à consulter sont: l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, l'ouvrage ayant pour titre *Doctrine of chances* par Moivre, la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace, le *Traité élémentaire des Probabilités* par M. Lacroix, l'*Exposition de la théorie des chances* par M. Cournot, et les *Mémoires* de M. Bien-Aymé, insérés dans le journal l'*Institut* en juin 1839 et en mai 1840.

PROFIL, coupe verticale d'un édifice, d'une construction ou d'une machine quelconque, perpendiculaire à sa face principale (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS).

PROFILS, représentations de la coupe d'un terrain par des plans verticaux ou par des cylindres à génératrices verticales, que l'on joint à un plan topographique pour compléter le figuré du relief (Voy. ce mot). On a souvent besoin de fixer particulièrement l'attention sur les inégalités que présente le terrain dans certaines directions ou suivant certaines lignes tracées sur le plan. Si la ligne est droite, on imagine un plan vertical suivant cette droite, et l'on trace, à une échelle convenable, l'intersection de ce plan avec la surface de ce terrain. Pour cela, on porte sur une droite des longueurs proportionnelles à celles qui séparent sur le plan les points principaux placés dans la direction que l'on considère, et, aux extrémités de ces longueurs, on élève des perpendiculaires proportionnelles aux cotes des points correspondants, puis on fait passer par les extrémités de ces perpendiculaires un trait continu qui représente le *profil* du terrain suivant la ligne dont il s'agit. Si la ligne considérée est courbe, on la prend pour base d'un cylindre à génératrices verticales dont on développe sur un plan l'intersection avec la surface du terrain. Pour cela, on porte sur une droite des longueurs proportionnelles aux longueurs des arcs de courbe qui séparent sur le terrain les points principaux de la ligne considérée, on élève des perpendiculaires proportionnelles aux cotes de ces points, et l'on achève comme ci-dessus. Par extension, le résultat ainsi obtenu porte encore le nom de *profil*. — S'il s'agit du tracé d'une route ou d'un chemin de fer, le profil dans la direction droite ou courbe de cette route ou de ce chemin, porte le nom de *profil en long*; les coupes perpendiculaires à la direction de la route ou de la voie ferrée s'appellent des *profils en travers*.

Dans les profils en travers, qui occupent ordinairement peu d'étendue, rien n'empêche de prendre la même échelle pour les distances horizontales et pour les perpendiculaires; mais dans les profils en long, qu'il faut nécessairement réduire à une faible étendue horizontale, les inégalités du terrain deviendraient insensibles, si l'on n'avait soin de prendre pour les hauteurs une échelle beaucoup plus grande que pour les longueurs; on exagère ainsi le

relief du terrain, mais on le rend sensible aux yeux.

PROFÈLEMENT, opération que l'on fait sur le terrain pour déterminer le profil d'un ouvrage de fortification passagère (*Voy. FORTIFICATION*). L'ouvrage étant tracé et défilé (*Voy. DÉFILEMENT*), on procède au profillement, et l'on détermine sur chaque face de l'ouvrage deux profils. Soient *Aa*,

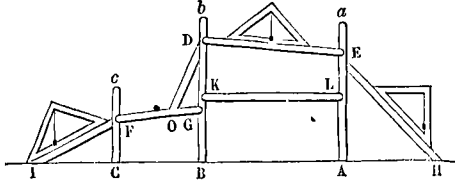


Fig. 1.

Bb, *Cc* des perches établies verticalement à l'aplomb des crêtes extérieure et intérieure, et à l'aplomb de l'arête intérieure de la banquette. Le sous-officier chargé du défillement a fait marquer sur les perches *Bb* et *Cc* les points où elles sont rencontrées par le plan de défillement; ce qui donne directement le point *D* de la crête intérieure, et le point *F* en portant une distance de 1^m,30 au-dessous du point où la perche *Cc* est rencontrée par le plan de défillement. Cela posé, on cloue en *D* une latte par un seul clou, et l'on fait mouvoir son autre extrémité sur la perche *Aa*, jusqu'à ce que la pente de cette latte soit de 6 de base sur 1 de hauteur, ce dont on s'assure à l'aide d'un niveau sur lequel ont été tracés à l'avance les points par lesquels doit passer le fil à plomb quand le plus grand côté est incliné à 1 sur 1, 1 sur 2, 1 sur 3, 1 sur 6, etc. On cloue la latte dans cette position, et on a la plongée *DE*. On cloue une latte en *E* par un clou, et on fait varier sa position jusqu'à ce qu'elle ait l'inclinaison 1 sur 1; on l'arrête dans la position trouvée, et l'on a le talus extérieur *EH*. On prend sur *Bb'* le point *G* à 1^m,30 au-dessous du point *D*; on cloue une latte en *F* et en *G*, et l'on a la direction de la banquette. On détermine de la même manière que ci-dessus le talus intérieur *DO*, incliné à 1 de base sur 3 de hauteur, et le talus de la banquette *FI*, incliné à 2 de base sur 1 de hauteur. Le premier profil se trouve ainsi arrêté. On pourrait procéder de même pour le second; mais on peut abrégier si le premier a été fait avec soin. Pour la clarté du discours, nous supposons que dans le deuxième profil les points qui correspondent à ceux du premier profil soient représentés par les mêmes lettres accentuées. Le point *D'* étant déterminé par le défillement, on y cloue une latte par un clou, et l'on fait glisser son autre extrémité sur *A'a'* jusqu'à ce que, en visant *DE* de manière que *D'* soit caché par cette latte, la latte *D'E'* tout entière vienne se cacher derrière *DE*; on est sûr alors qu'elles sont dans un même plan; et comme *D* et *D'* appartiennent tous deux à la crête intérieure, ce plan est celui de la plongée du parapet. C'est ce qu'on appelle *dégauchir* la seconde droite par rapport à la première. La position des lattes *E'H'*, *F'G'*, *D'O'*, *F'I'* s'obtient de même par *dégauchissement*.

Lorsqu'on a déterminé ainsi deux profils sur chaque face, il reste encore à déterminer le profil

en capitale, c'est-à-dire le profil suivant lequel les deux faces de l'ouvrage viennent se rencontrer. Pour cela, on prolonge sur le terrain les projections des crêtes extérieures, et à leur intersection on élève une perche verticale; on opère de même pour les crêtes intérieures, et pour les projections des arêtes intérieures des banquettes. Désignons par des lettres chargées de deux accents les points qui, dans le profil en capitale, correspondent aux points représentés par les mêmes lettres dans les autres profils. Le point *D''* est donné par le défillement. La plongée *D''E''* s'obtiendra par *dégauchissement*. Le point *E''* étant trouvé, on obtiendra *E''H''* aussi par *dégauchissement*. De même pour *F''G''*, *D'O''* et *F''I''*.

On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour guider les travailleurs.

PROJECTILES (MOUVEMENT DES). Voy. BALISTIQUE.

PROJECTILES CREUX, projectiles tels que les bombes, les obus, les grenades, qui reçoivent une charge intérieure destinée à rompre l'enveloppe où elle est renfermée, pour en disperser les débris. Ces projectiles sont ordinairement en fonte de fer. Le volume de la charge est généralement assez faible pour qu'on puisse négliger la durée de l'inflammation proprement dite, c'est-à-dire le temps employé par la flamme pour se propager des premiers grains aux derniers; la densité des gaz développés au bout de temps *t*, à partir de l'instant où le feu a été mis à la charge, peut alors se calculer par la formule

$$d = D \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3}{1 - \frac{D}{\delta} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3}, \quad [1]$$

dans laquelle *T* désigne la durée de la combustion d'un grain, δ la densité des grains et *D* la densité que devrait avoir la poudre pour occuper toute la capacité où elle est contenue (y compris les interstices des grains), sans pour cela changer de poids (*Voy. Poudre* [propriété balistique de la], équation [4]). D'après les expériences de Rumford, la tension des gaz développés peut être représentée par $y = 1,841 (905d)^{1+0,362d}$. [2]

Mais ces formules supposent que la capacité où est renfermée la charge n'a point d'issue à l'extérieur; en réalité il y a toujours un orifice par lequel on introduit la charge et l'amorce, et qui n'est bouché que par une cheville ou *fusée* en bois. On tient compte de cette circonstance en diminuant la densité *d* d'une fraction *n* de sa valeur que nous apprendrons tout à l'heure à déterminer; et en remplaçant en conséquence *d* par $(1-n)d$ dans les formules [1] et [2] qui deviennent :

$$d' = (1-n)D \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3}{1 - \frac{D}{\delta} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3} \quad [3]$$

et $y' = 1,841 [905 (1-n)d]^{1+0,362(1-n)d}$. [4]

La tension maximum a lieu pour $t = T$, d'où $d' = (1-n)D$; et, en la désignant par *Y*, on a

$$Y = 1,841 [905 (1-n)D]^{1+0,362(1-n)D}. \quad [5]$$

Soit *T* la ténacité du métal qui forme le projectile, par unité de surface de rupture. La rupture d'une sphère creuse tendant à se faire dans le plan d'un grand cercle, en appelant *R* et *r* les rayons extérieur et intérieur de l'enveloppe, on aura pour

l'expression de la résistance à la rupture (Voy. RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX)

$$\pi(R^2 - r^2) \cdot T.$$

D'un autre côté, la pression Y s'exerce sur un cercle de rayon r, et par conséquent l'expression totale de la pression qui produit la rupture est

$$\pi r^2 \cdot Y.$$

En égalant ces deux expressions on obtient la relation

$$(R^2 - r^2) T = r^2 Y, \quad [6]$$

qui sert à résoudre les divers problèmes relatifs à la rupture des projectiles creux.

La première chose à faire était de déterminer la fraction n qui entre dans la valeur de Y. Pour cela, on a eu recours à l'observation. Dans des expériences faites à Metz en 1833, on a fait éclater des obus en fonte grise, dont la ténacité était de 1350 kilogrammes par centimètre carré de surface de rupture, le diamètre extérieur était 16^c,29, le diamètre intérieur 11^c,32; la charge qui produisait l'éclatement était de 345 grammes. De ces données on déduisait D = 0,459; et en substituant ces diverses valeurs dans la formule [6], on a pu en tirer la valeur de n, qui a été trouvée égale à $\frac{1}{6}$. Dans d'autres expériences, on a fait éclater des obus de mêmes dimensions, en fonte truitée, dont la ténacité était de 1100^k, la charge produisant l'éclatement était de 310 grammes; il en résultait D = 0,412; et la formule [6] a donné pour n la valeur $\frac{1}{6}$ comme dans les premières expériences.

On en conclut que le poids P de gaz perdus par l'orifice, dont le diamètre avait 11^{mm},3, était le sixième du poids de la charge, et l'on en déduisait pour la densité réelle d du gaz au moment de la rupture la valeur 0,3455. Connaissant ainsi la valeur de n pour un projectile déterminé, il est facile d'en conclure sa valeur pour un autre projectile. On admet pour cela que la perte de gaz est proportionnelle à l'aire de l'orifice et à la densité moyenne du gaz, ce qui est confirmé par l'expérience. Soit donc P la perte du gaz pour un projectile donné, dans lequel le rayon de l'orifice est ρ et la densité du gaz d, au moment où la rupture a lieu; soit P' la perte pour un autre projectile dans lequel le rayon de l'orifice est ρ' , et D' la densité que prendrait le gaz au moment de l'explosion s'il n'y avait pas d'orifice; celle qu'il prendra avec l'orifice sera (1 - n) D', et, en vertu des hypothèses admises, on aura

$$\frac{P'}{P} = \frac{\pi \rho'^2 (1 - n) D'}{\pi \rho^2 d} \quad [7]$$

Mais, en appelant V la capacité du projectile considéré, on a

$$P' = nVD';$$

la relation [7] devient donc, après réductions,

$$\frac{nV}{P} = \frac{\rho'^2 (1 - n)}{\rho^2 d},$$

et l'on en tire $n = \frac{P \rho'^2}{P \rho'^2 + V d \rho^2}$ [8]

En mettant pour P la valeur 52 grammes, pour d la valeur correspondante 0,3455 et pour V la valeur $\frac{4}{3} \pi r^3$, r étant le rayon intérieur du projectile, il

vient $n = \frac{\rho'^2}{\rho'^2 + 0,935 \rho r^3}$ [9]

La valeur de n étant ainsi déterminée, on la mettra dans l'équation [6], et l'on pourra, connaissant la ténacité du métal, en déduire par le calcul la valeur de D et par suite la charge qui produit la rupture.

Si l'on cherche, à l'aide de la même formule, comment varie la charge de rupture quand on fait varier l'épaisseur du métal, on trouve qu'elle ne croit pas indéfiniment avec l'épaisseur, et que celle qui exige la plus grande charge correspond au cas où le poids du projectile creux est à peu près les deux tiers du poids qu'aurait le projectile s'il était plein, c'est-à-dire que le rayon intérieur diffère alors très-peu des 0,7 du rayon extérieur. C'est à peu de chose près la proportion qui a été adoptée pour les bombes de 27 centimètres et pour les obus de 16^c et de 12^c.

Les formules ci-dessus établies ont été vérifiées en 1835 dans une série d'expériences où l'on a fait varier les dimensions des projectiles depuis 118^{mm},5 de diamètre extérieur jusqu'à 320^{mm},5 et les épaisseurs depuis 12^{mm} jusqu'à 41^{mm}. La concordance entre les résultats de l'expérience et les calculs faits à l'avance sur la résistance de ces divers projectiles a montré que les formules pouvaient être employées avec confiance. Cependant lorsque le projectile a une faible épaisseur relativement à son rayon extérieur, il éclate sous une charge moindre que celle qui est indiquée par le calcul, ce qui semble tenir à une circonstance déjà entrevue par Robins (*Nouveaux principes d'Artillerie*, 1783) et qui a occupé Euler : c'est que lorsque les gaz développés ont une certaine distance à parcourir avant d'atteindre la paroi, ils n'agissent pas seulement par leur tension, mais encore par leur force vive, et que cet effet devient sensible malgré leur faible masse. — Cette circonstance serait très-difficile à soumettre au calcul; mais on la rend manifeste par l'expérience en mêlant à la charge des balles en fer; la rupture a lieu alors sous une charge beaucoup plus faible, ce qui tient évidemment au choc des balles contre la paroi du projectile.

Le nombre des éclats produits par l'explosion augmente avec la charge, toutes choses égales d'ailleurs, mais dans un moindre rapport; la vitesse dont ces éclats sont animés augmente au contraire dans un plus grand rapport que la charge. En ne tenant compte que des éclats dont le poids est supérieur à 100 grammes, les seuls qu'il y ait lieu de considérer à la guerre, les expériences faites avec des obus de 22 centimètres, dont l'épaisseur est de 26 millimètres, ont donné les résultats suivants :

Charges.	Nombre des éclats.	Poids moyen des éclats.	Vitesse moyenne des éclats.
0 ^k ,70	19 à 20	1 ^k ,029	93 ^m
1,00	23	0,860	162
1,50	27 à 28	0,744	161
2,00	37	0,528	248

Le nombre des gros éclats diminue quand l'épaisseur des parois augmente, leur poids moyen devient de plus en plus grand; quant à la vitesse moyenne des éclats, elle varie en sens inverse du poids moyen.

Enfin les expériences faites avec les plus faibles charges qui puissent faire éclater les obus et avec les plus fortes charges qu'ils puissent contenir ont donné les résultats suivants :

Calibre des obus.	Épaisseur des parois.	Charges.	Nombre des éclats.	Poids moyen des éclats.	Vitesse des éclats.
15 ^{cent}	19 ^{mm} ,4	0 ^k ,300	18 à 19	0 ^k ,325	142 ^m
		0 ^k ,458	16 à 17	0 ^k ,378	143
16...	25	0 ^k ,400	17	0 ^k ,561	136
		0 ^k ,600	18	0 ^k ,508	156
22...	26	0 ^k ,700	19 à 20	1 ^k ,029	93
		2 ^k ,000	37	0 ^k ,528	248

Il ne s'agit toujours que des éclats dont le poids est supérieur à 100^{gr}. (Voy. le *Traité d'Artillerie*, de M. Piobert, tome II, pages 363 et suiv.)

PROJECTION. On nomme *projection orthogonale* (du grec ὀρθός, droit, et γωνία, angle) d'un point sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. La *projection orthogonale d'une ligne* sur un plan est le lieu des projections orthogonales de ses différents points. Si la ligne considérée est droite, sa projection est droite aussi. Si la ligne considérée est une droite perpendiculaire au plan sur lequel on projette, la projection de cette ligne se réduit à un point.

La perpendiculaire qui projette un point sur un plan se nomme la *projetante* de ce point. Le lieu des projetantes des différents points d'une ligne est une surface cylindrique que l'on désigne sous le nom de *cylindre projetant*. Si la ligne considérée est droite, le cylindre se change en une surface plane, à laquelle on donne le nom de *plan projetant*.

Les projections orthogonales ne sont pas les seules dont on fasse usage. On projette souvent les points d'une même ligne à l'aide de projetantes obliques, parallèles à une même direction : c'est ce qu'on appelle plus particulièrement une *projection oblique*. Quelquefois les droites projetantes, au lieu d'être parallèles à une même direction, sont assujetties à passer par un même point; on a alors ce qu'on appelle une *projection centrale* ou une *projection conique*. Les projections obliques et les projections coniques sont employées quelquefois avec succès dans les problèmes relatifs aux INTERSECTIONS DE SURFACES (Voy. ce mot). Mais les projections orthogonales sont celles dont on fait le plus d'usage; et c'est toujours de projections orthogonales qu'on entend parler quand on n'exprime pas positivement le contraire.

L'emploi des projections pour la représentation des corps forme la base de la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (Voy. ce mot); et beaucoup de personnes désignent cette branche des mathématiques appliquées par le nom de *Méthode des projections*.

PROJECTION DU MOUVEMENT D'UN POINT,

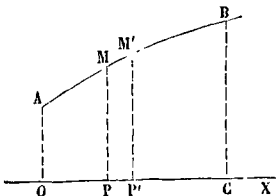


Fig. 1.

mouvement d'un mobile fictif qui occuperait à chaque instant la position marquée par la projection du mobile réel sur un axe ou sur un plan. Soit, par exemple, AB (fig. 1), la trajectoire du mobile réel,

M sa position au bout du temps t sur cette trajectoire; soit OX un axe quelconque, P la projection du point M sur cet axe, et O la projection de la position initiale A du mobile. On peut concevoir un mobile fictif qui parcourt OX de manière à occuper à chaque instant la position du point P, projection du point M; le mouvement de ce mobile fictif sera la projection du mouvement réel sur l'axe OX.

I. La vitesse du point P a une relation très-simple avec celle du point M. Soit, en effet, M' la position du mobile réel au bout du temps $t + \Delta t$, et P' sa projection. Soit v la vitesse du point M sur sa trajectoire; et soit v_x la vitesse du point P; on aura (Voy. MOUVEMENT VARIÉ)

$$v_x = \lim. \frac{PP'}{\Delta t}.$$

Mais si Δt est suffisamment petit, et si, par conséquent, le point M' est suffisamment voisin du point M, on peut le considérer comme situé sur la tangente en M à la trajectoire; et si l'on appelle α l'angle de cette tangente avec l'axe OX, on a

$$PP' = MM' \cdot \cos \alpha$$

et par conséquent

$$v_x = \lim. \frac{MM'}{\Delta t} \cos \alpha.$$

Mais on a aussi

$$v = \lim. \frac{MM'}{\Delta t};$$

il en résulte

$$v_x = v \cos \alpha,$$

c'est-à-dire que la vitesse de la projection est la projection de la vitesse du mobile réel.

Si l'on projette ainsi le mouvement sur trois axes rectangulaires, et qu'on appelle α, β, γ les angles que la tangente à la trajectoire, au point occupé par le mobile au bout du temps t , fait avec ces trois axes, et v_x, v_y, v_z , les vitesses respectives des trois projections, on aura de même

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \cos \beta, \quad v_z = v \cos \gamma,$$

d'où l'on tire aisément les relations

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}, \quad [2]$$

en ayant égard à la relation connue

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Lorsque la trajectoire est plane et qu'on projette le mouvement sur deux axes rectangulaires tracés dans son plan, les angles α et β deviennent complémentaires, et l'on a

$$v_x = v \cos \alpha \quad \text{et} \quad v_y = v \sin \alpha, \quad [3]$$

d'où $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Quant à l'angle α , on peut le tirer de l'une des relations [3]; mais il est généralement plus commode de le déterminer par sa tangente, en divisant l'une par l'autre les équations [3], ce qui donne

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x},$$

c'est-à-dire que, lorsque l'on connaît les projections de la vitesse du mobile sur deux axes rectangulaires, on obtient la tangente de l'angle que la tangente à la trajectoire fait avec l'axe des x , en divisant la projection de la vitesse sur l'axe des y par la projection sur l'axe des x . Cette règle est d'une application fréquente.

II. Si l'on projette sur un axe un mouvement rectiligne et uniformément varié, le mouvement de la

projection est lui-même uniformément varié. Soit en effet OU (fig. 2) la trajectoire rectiligne du mobile, O sa position initiale, M sa position au bout du temps t ; soient O' et P les projections des points

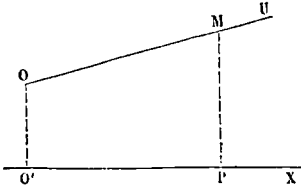


Fig. 2.

O et M sur un axe quelconque O'X. Désignons par v_0 la vitesse initiale du mobile, par F la force constante qui produit le mouvement, par e l'espace OM parcouru dans le temps t , par α l'angle des deux droites OU et O'X, par x l'espace O'P parcouru dans le temps t par la projection. Nous aurons (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ)

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad [4]$$

et

$$x = e \cos \alpha = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cos \alpha}{m} t^2. \quad [5]$$

Cette équation montre que la projection P se meut d'un mouvement uniformément varié, comme un point matériel qui aurait la même masse m que le mobile réel, qui aurait pour vitesse initiale la projection $v_0 \cos \alpha$ de la vitesse initiale du mobile réel, et qui serait soumis à une force constante $F \cos \alpha$ égale à la projection de la force F qui agit sur le mobile réel.

III. Si l'on projette sur un axe le MOUVEMENT PARABOLIQUE (Voy. ce mot) produit par une force constante qui n'agit pas dans la direction de la vitesse initiale du mobile, le mouvement de la projection est encore un mouvement uniformément varié.

Soit en effet OV (fig. 3) la direction de la vitesse initiale v_0 du mobile, OF la direction de la force

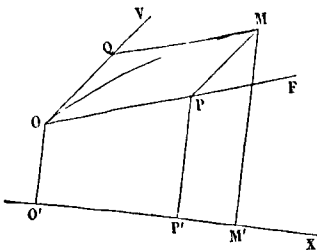


Fig. 3.

constante F qui produit le mouvement parabolique; OQ l'espace qui serait parcouru dans le temps t suivant OV si la force F n'agissait pas; OP celui qui serait parcouru dans le même temps suivant OF s'il n'y avait pas de vitesse initiale; le mobile, au bout du temps t , sera arrivé au sommet M du parallélogramme construit sur OQ et OP, après avoir parcouru l'arc de parabole OM. Projetons les points O, P, M en O', P', M' sur un axe quelconque O'X.

Désignons par α l'angle de OV avec O'X, par β l'angle de OF avec ce même axe; par x l'espace O'M' parcouru par la projection du mobile au bout du temps t . Nous aurons

$$O'M' = P'M' + O'P'$$

ou $x = PM \cos \alpha + OP \cos \beta,$

mais $PM = OQ = v_0 t$

et $OP = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2;$

il vient donc

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{1}{2} \frac{F \cos \beta}{m} t^2. \quad [6]$$

Cette équation montre que la projection M' du mobile se meut d'un mouvement uniformément varié, comme un point matériel qui aurait la même masse m, qui aurait pour vitesse initiale la projection $v_0 \cos \alpha$ de la vitesse initiale du mobile réel, et qui serait soumis à une force constante $F \cos \beta$, égale à la projection de la force qui agit sur le mobile réel.

Le mouvement de la projection pourrait cependant être uniforme; cela arriverait si l'axe O'X était perpendiculaire à la direction OF de la force F; mais ce cas est compris dans la formule [6]; il suffit d'y faire $\beta = 90^\circ$.

IV. Revenons maintenant au cas général où le mouvement que l'on projette est quelconque. On a déjà vu en commençant que la vitesse du mouvement projeté est la projection de la vitesse du mouvement réel. Nous allons montrer que la force qui produirait le mouvement de la projection est la projection de celle qui agit sur le mobile réel, pourvu qu'on attribue à la projection la même masse qu'au mobile donné lui-même. En effet, le mouvement réel étant produit par une F variable quelconque, on peut toujours la considérer à partir du temps quelconque t , pendant une durée Δt assez petite pour que la force F puisse être regardée comme constante en direction et en intensité pendant cette courte durée. Dès lors le mouvement pourra être regardé comme parabolique; et sa projection sur un axe quelconque sera un mouvement uniformément varié. Désignons par v_x la vitesse de la projection au bout du temps t , vitesse qui jouera ici le rôle de la vitesse initiale; par $v_x + \Delta v_x$ la vitesse de cette projection au bout du temps $t + \Delta t$, par F_x la projection de la force qui agit sur le mobile à l'instant t , et par m la masse du mobile, attribuée également à sa projection. Le mouvement de cette projection étant uniformément varié, on aura

$$v_x + \Delta v_x = v_x + \frac{F_x}{m} \cdot \Delta t,$$

équation qui se réduit à

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{F_x}{m},$$

et qui sera d'autant plus exacte que Δt sera plus petit. A la limite, c'est-à-dire pour une durée Δt infiniment petite, cette relation deviendra rigoureuse, et l'on pourra écrire

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m}.$$

Mais le premier membre est l'expression de l'accélération dans le mouvement projeté; en la désignant par j_x on aura donc

$$j_x = \frac{F_x}{m}, \text{ d'où } F_x = j_x \cdot m.$$

Or jx multiplié par m est la mesure de la force qui produit l'accélération j_x (Voy. MESURE DES FORCES); cette force a donc aussi pour valeur F_x , c'est-à-dire qu'elle est égale à la projection de la force qui produit le mouvement réel.

La considération de la projection du mouvement sur les axes coordonnés sert à résoudre un grand nombre de problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel. Nous indiquerons les deux principaux.

I. Le mouvement d'un point matériel étant connu, on peut demander à quelle force il est soumis. Dans ce cas on commence par déterminer le mouvement des projections du mobile sur les axes coordonnés. On a ainsi les coordonnées du mobile en fonction du temps. En les différentiant par rapport au temps, on obtient, en fonction du temps, les vitesses des projections, ou, ce qui revient au même, les composantes de la vitesse réelle, d'où l'on peut déduire cette vitesse et toutes les circonstances du mouvement. Différentiant à leur tour les vitesses des projections, on en déduit les accélérations; en les multipliant par la masse du mobile, on obtient les forces qui produisent le mouvement des projections, ou, ce qui revient au même, les composantes suivant les axes de la force qui agit réellement sur le mobile, d'où l'on peut conclure la grandeur et la direction de cette force elle-même.

Pour en donner un exemple, supposons qu'un point matériel parcoure le cercle O (fig. 4) d'un mouvement uniforme, en allant de A vers B. Soit A sa position initiale, et M sa position au bout du temps t . Joignons OM, et projetons le point M en P et en Q sur deux axes rectangulaires OX et OY menés par le point O. Appelons x et y les coordonnées du point M par rapport à ces axes, R le rayon du cercle, et α l'angle MOP. Nous aurons

$$x = R \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = R \sin \alpha.$$

Mais le mouvement du point M sur la circonférence étant supposé uniforme, l'angle MOA ou α décrit par le rayon mené au point M est proportionnel au temps, et l'on peut poser

$$\alpha = \omega t,$$

en désignant par ω une constante, qui est l'angle

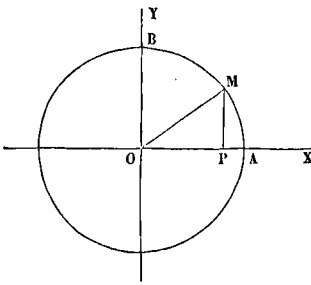


Fig. 4.

décrit dans l'unité de temps. On pourra donc écrire

$$x = R \cos \omega t \quad \text{et} \quad y = R \sin \omega t. \quad [7]$$

En différentiant une première fois par rapport au temps, et appelant v_x et v_y les vitesses des projections, on obtient

$$v_x = -R\omega \sin \omega t \quad \text{et} \quad v_y = R\omega \cos \omega t, \quad [8]$$

d'où l'on tire, en appelant v la vitesse du mobile,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega,$$

quantité constante, comme cela devait être.

Différentiant les équations [2] par rapport au temps, et désignant par j_x et j_y les accélérations des projections, on trouve

$$j_x = -R\omega^2 \cos \omega t \quad \text{et} \quad j_y = -R\omega^2 \sin \omega t. \quad [9]$$

Multipliant par la masse m du mobile, et appelant F_x et F_y les projections de la force F qui agit sur le mobile, on peut écrire

$$F_x = -m\omega^2 R \cos \omega t \quad \text{et} \quad F_y = -m\omega^2 R \sin \omega t. \quad [10]$$

On en déduit (Voy. COMPOSITION DES FORCES)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 R,$$

quantité constante. On a ensuite, en désignant par α' l'angle que la force fait avec l'axe des x ,

$$\tan \alpha' = \frac{F_y}{F_x} \tan \omega t,$$

d'où

$$\alpha' = \omega t = \alpha,$$

c'est-à-dire que la direction de la force est celle du rayon OM. Quant à son sens, on peut remarquer que les composantes ayant le signe — dans le premier quadrant, la force est nécessairement dirigée de M vers O. Ainsi donc

La force qui produit le mouvement circulaire et uniforme d'un point matériel est une force constante dirigée vers le centre du cercle. On lui donne pour cette raison le nom de FORCE CENTRIFÈTE (Voy. ce mot).

II. Il peut arriver au contraire que la force soit donnée, et que l'on demande le mouvement du point matériel auquel elle est appliquée. Dans ce cas, les composantes de la force suivant les axes, ou ses projections sur ces axes, sont données en fonction du temps. En les divisant par la masse du mobile, on obtient les accélérations des projections, exprimées en fonction du temps. Si l'on cherche les fonctions dont ces accélérations sont les dérivées, on obtient les vitesses des projections; et si l'on cherche les fonctions dont ces vitesses sont les dérivées, on obtient les coordonnées du mobile en fonction du temps. En remontant ainsi aux *fonctions primitives*, on introduit des constantes qui se déterminent d'après les conditions initiales du problème.

On en trouvera un exemple à l'article MOUVEMENT DES PROJECTILES.

On arrive à des résultats analogues lorsque, au lieu de projeter le mouvement d'un point matériel sur un axe, on le projette sur un plan, c'est-à-dire que *la vitesse de la projection est la projection de la vitesse du mobile réel*; et, si l'on attribue à la projection la même masse qu'au mobile réel, *la force qui produirait le mouvement de la projection est la projection de celle qui agit réellement sur le mobile*. On pourrait démontrer ces propositions par des moyens semblables à ceux qui ont été employés plus haut; mais il est plus simple d'employer le mode de démonstration suivant. Supposons que l'on prenne pour plan des xy le plan sur lequel s'opère la projection, et soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du mobile au bout du temps t ; on aura, pour exprimer ces coordonnées en fonction de t , des équations de la forme

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad [11]$$

d'où l'on déduira, comme on l'a vu plus haut,

$$v_x = f'(t), \quad v_y = \varphi'(t), \quad v_z = \psi'(t) \quad [12]$$

et $F_x = mf''(t), \quad F_y = m\varphi''(t), \quad F_z = m\psi''(t).$ [13]

Si l'on considère maintenant la projection du mobile sur le plan des xy , on voit que ses coordonnées sont exprimées en fonction du temps par les deux premières équations [11]; d'où il suit que les composantes de sa vitesse sont exprimées par les deux premières équations [12], et que par conséquent les composantes de la force qui produirait son mouvement, dans l'hypothèse où elle aurait la masse m , sont exprimées par les deux premières équations [13]. Il résulte immédiatement de ces remarques que la vitesse de la projection n'est autre chose que la projection sur le plan des xy de la vitesse du mobile réel, et que la force qui produirait le mouvement de la projection n'est autre chose que la projection sur le plan des xy de la force qui produit le mouvement réel. — Car si l'on se reporte au parallélogramme des vitesses ou au parallélogramme des forces (Voy. COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES FORCES), on reconnaît que la diagonale du parallélogramme construit sur deux des composantes est la projection de la diagonale du parallélogramme sur le plan de ces deux composantes.

On peut remarquer en particulier que si l'on projette sur un plan le mouvement PARABOLIQUE (Voy. ce mot) produit par une force constante qui n'agit pas dans la direction de la vitesse initiale du mobile, on obtient encore un mouvement parabolique, à moins que le plan de projection ne soit perpendiculaire au plan du mouvement réel, auquel cas le mouvement de la projection est rectiligne et uniformément varié.

PROPULSEURS À AUBES, roues à palettes servant d'organes de propulsion dans les bateaux à vapeur. Des deux côtés du bateau et vers le milieu de sa longueur, sont établies deux roues à palettes, montées sur un axe commun; une ou plusieurs machines à vapeur, agissant sur cet axe à l'aide de manivelles, lui impriment un mouvement de rotation; les palettes, s'appuyant sur l'eau comme des rames, font avancer le bateau. Si l'eau demeurait immobile, le bateau avancerait avec une vitesse égale à celle des palettes, de même qu'une locomotive avance avec une vitesse égale à celle de la jante de ses roues motrices. Mais l'eau cédant à l'impulsion des palettes, prend une certaine vitesse en sens contraire du mouvement du bateau; celui-ci avance donc avec une vitesse moindre que celle des palettes. La différence, divisée par la vitesse des palettes, est ce que l'on appelle le *recul*; si on le désigne par ϵ , qu'on appelle v la vitesse du centre des palettes et V celle du bateau, on a donc

$$\epsilon = \frac{v - V}{v}. \quad [1]$$

On peut appliquer aux propulseurs à aubes une théorie analogue à celle des ROUES À AUBES PLANES (Voy. ce mot); mais on peut aussi l'établir d'une manière plus directe et plus complète, comme il suit :

I. Soit O (fig. 1) la projection de l'axe de la roue, AB la section d'une palette, dont la direction fait avec la verticale un angle α ; soit l la longueur de la palette dans le sens perpendiculaire à la figure, soit $AB = h$, en sorte qu'en appelant a l'aire de la palette on aura $a = lh$. Soit F la résultante des pressions normales que la palette exerce sur l'eau où elle est plongée; son impulsion élémentaire,

projetée sur un axe horizontal parallèle à la direction du bateau, sera $F \cos \alpha \cdot dt$. Désignons par dm la masse d'eau mise en mouvement par la palette dans le temps dt , et u la vitesse imprimée à

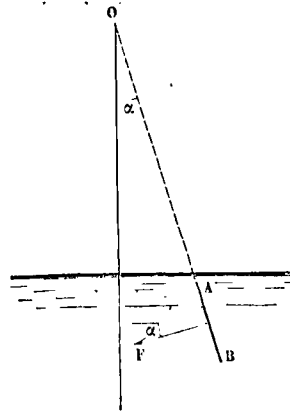


Fig. 1.

cette masse d'eau dans le sens de l'axe horizontal considéré; sa quantité de mouvement projetée sur cet axe sera udm ; on aura donc

$$F \cos \alpha \cdot dt = u dm.$$

La masse dm peut être considérée comme celle d'un prisme de liquide ayant pour base la projection verticale de la palette, ou $a \cos \alpha$, et pour hauteur le chemin décrit dans le temps dt par le bateau, c'est-à-dire $V dt$; on a donc, en nommant Π le poids du mètre cube d'eau,

$$dm = \frac{\Pi a \cos \alpha \cdot V dt}{g}$$

La vitesse u est la différence entre la projection horizontale de la vitesse du centre de la palette et la vitesse du bateau, c'est-à-dire qu'on a

$$u = v \cdot \cos \alpha - V.$$

En substituant ces valeurs de dm et de u dans la relation précédente, on aura donc, après avoir supprimé les facteurs $\cos \alpha$ et dt devenus communs aux deux membres,

$$F = \frac{\Pi a V (v \cos \alpha - V)}{g}, \quad [2]$$

ce qui donne l'expression de la pression exercée par la palette sur l'eau, et par conséquent aussi la pression égale et contraire exercée par l'eau sur la palette.

Cela posé, appliquons au mouvement du bateau le principe de la quantité du mouvement, en prenant le même axe que ci-dessus, c'est-à-dire un axe parallèle à la direction du bateau. Les forces qui sollicitent le navire sont, d'une part les forces analogues à F qui agissent sur les palettes plongées, de l'autre la résistance éprouvée par la carène, résistance qui, d'après l'expérience (Voy. RÉSTISTANCE DES FLUIDES), a pour expression

$$R = \frac{K \Pi A V^2}{2g},$$

en appelant K un coefficient numérique et A l'aire de la portion immergée du *maitre-couple* (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). Quant au poids du navire, et aux pressions exercées par l'eau sur la coque perpendiculairement à l'axe, ces forces disparaîtront

dans l'application du principe invoqué. Considérons un tour entier de la roue; soit T sa durée; soit n le nombre des palettes. Le mouvement du bateau étant supposé parvenu à l'uniformité, l'accroissement de quantité de mouvement sera nul; nous aurons donc à évaluer l'impulsion totale des forces F à celle de la force R ; ce qui donne

$$2n \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} F \cos \alpha dt = RT, \quad [3]$$

en appelant α_0 l'angle de la palette avec la verticale au moment de son immersion ou de son émergence. Pour préciser et pour simplifier en même temps, nous supposerons que α_0 réponde à l'instant où le centre de l'aube entre dans l'eau, ou à l'instant où ce point en sort; nous négligerons ainsi, à l'entrée, l'action de l'eau sur la palette depuis l'instant où son bord inférieur entre dans l'eau jusqu'au moment où le centre s'immerge; mais, par compensation, à partir de cet instant jusqu'au moment où le bord supérieur entre dans l'eau à son tour, nous comptons la force F comme si elle s'exerçait sur l'aube entière; une compensation du même genre s'établit à la sortie. Soit ρ le rayon moyen de la roue, ou la distance du centre de la palette à l'axe; le chemin élémentaire décrit par le centre de l'aube sera $\rho d\alpha$; mais il a aussi pour expression $v dt$; on a donc

$$v dt = \rho d\alpha, \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{\rho d\alpha}{v}.$$

On a aussi $v = \frac{2\pi\rho}{T}$, d'où $T = \frac{2\pi\rho}{v}$.

Mettant pour dt , pour T , pour F et pour R leurs valeurs dans la relation [3] et simplifiant, on obtient

$$n \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \alpha v (v \cos \alpha - V) \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{2} K \pi A V^2.$$

Posons $v = Vx$, la relation ci-dessus pourra s'écrire

$$\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} (x \cos \alpha - 1) \cos \alpha d\alpha = \frac{K \pi A}{2na}, \quad [1]$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$x (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) - 2 \sin \alpha_0 = \frac{K \pi A}{2na} = \mu.$$

On tire de là $x = \frac{v}{V} = \frac{\mu + 2 \sin \alpha_0}{\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}$, [5]

relation qui fera connaître l'une des deux vitesses v ou V lorsque l'autre sera donnée. Le recul ϵ s'en déduira sans difficulté par la relation [1].

La hauteur de l'axe de la roue est ordinairement réglée de manière qu'au moment où la palette vient se placer dans le plan vertical de l'axe, son bord supérieur soit recouvert d'une hauteur d'eau, qui est le plus souvent de 10 à 20 centimètres, et que nous représenterons par λ . Cette donnée détermine l'angle α_0 ; car si IK (fig. 2) est un arc décrit du centre O de la roue, et passant par le milieu I de la palette AB , et que HK soit le niveau de l'eau, on a évidemment $\cos \alpha_0 = \frac{OH}{OK}$, ou

$$\cos \alpha_0 = \frac{\rho - \left(\frac{1}{2}h + \lambda\right)}{\rho}.$$

Dans ce qui précède, nous n'avons pas eu égard

au frottement de l'eau sur la palette; en effet, l'eau en contact avec la palette s'échappe dans le sens horizontal ou dans le sens de la plus grande pente de la palette; le mouvement de l'eau dans le sens

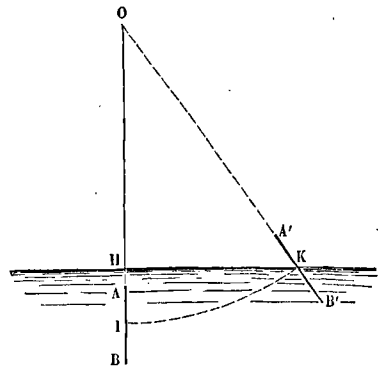


Fig. 2.

horizontal, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de la roue, donne lieu à un frottement de sens opposé qui ne fournit aucune projection sur l'axe parallèle à la direction du navire; le mouvement dans le sens de la plus grande pente se fait dans deux directions opposées suivant que l'on considère la période du mouvement où la palette passe de la position $A'B'$ à la position AB , ou celle pendant laquelle la palette va de la position AB à la position symétrique de $A'B'$; il en résulte que le frottement né de ces deux mouvements opposés est le même dans les deux périodes, mais qu'il est de sens contraire, et que par conséquent il disparaît du calcul lorsqu'on considère un tour entier de la roue.

Il n'en est plus de même du travail de ce frottement, et nous serons obligés d'y avoir égard en évaluant le travail \mathcal{E}_m que doit produire la machine motrice. Ce travail se compose de trois parties: le travail utile \mathcal{E}_u , c'est-à-dire celui qui est employé à vaincre la résistance de l'eau sur la carène; le travail \mathcal{E}_F développé par les palettes pour mettre l'eau en mouvement; enfin le travail du frottement de l'eau sur les palettes, que nous désignerons par \mathcal{E}_f .

Le travail utile a pour expression, dans l'unité de temps,

$$\mathcal{E}_u = R.V = \frac{K \pi A V^3}{2g}. \quad [7]$$

Le travail élémentaire de la force F est $F \rho d\alpha$; le travail total développé par les palettes dans un tour des roues aura donc pour valeur

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_F &= 2n \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\pi \alpha v (v \cos \alpha - V)}{g} \cdot \rho d\alpha \\ &= \frac{4n \pi \alpha \rho}{g} v (v \sin \alpha_0 - V \alpha_0); \end{aligned}$$

on aura le travail correspondant pour l'unité de temps, en divisant cette expression par la durée d'un tour, ou par $\frac{2\pi\rho}{v}$, ce qui donne

$$\mathcal{E}_F = \frac{2n \pi \alpha v (v \sin \alpha_0 - V \alpha_0)}{\pi \cdot g}. \quad [8]$$

Il reste à évaluer le travail du frottement. On sait que le frottement de l'eau sur une surface dont

L'étendue est Ω est exprimé par $\Omega (\alpha U + \beta U^2)$; mais, dans la question qui nous occupe, la vitesse relative U de l'eau par rapport à la palette est toujours assez grande pour qu'on puisse négliger la première puissance vis-à-vis du terme βU^2 ; nous prendrons donc $\alpha \beta U^2$ pour l'expression du frottement, et par conséquent $\alpha \beta U^3$ pour celle de son travail dans l'unité de temps; et nous poserons

$$\mathcal{E}f = 4 \alpha \beta U^3, \quad [9]$$

attendu qu'il y a toujours deux palettes de chaque roue plongées en même temps. Pour évaluer approximativement la vitesse U , on peut procéder de la manière suivante. Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable, et supposons que toute l'eau s'échappe horizontalement; le volume d'eau écoulé dans le temps dt formera deux prismes ayant pour hauteur U et pour base le produit de la projection verticale $h \cos \alpha$ de la hauteur de la palette, par le chemin relatif $u dt$ décrit par son centre; et dont le volume total sera par conséquent exprimé par $2U h \cos \alpha \cdot u dt$. Mais le volume d'eau sur lequel la palette a agi dans le temps dt est, comme on l'a vu, $\alpha \cos \alpha V dt$; on doit donc avoir

$$2U \cdot h \cos \alpha \cdot u dt = h l \cos \alpha \cdot V dt,$$

d'où

$$U = \frac{lV}{2u} = \frac{l}{2(x \cos \alpha - 1)}. \quad [10]$$

La valeur de U étant ainsi déterminée, on la transportera dans la relation [9] pour avoir le travail du frottement.

On aura ensuite

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_w + \mathcal{E}f + \mathcal{E}f, \quad [11]$$

d'où l'on déduira le rendement du propulseur, ou le rapport $\frac{\mathcal{E}_w}{\mathcal{E}_n}$.

II. Nous appliquerons cette théorie à un exemple. Nous choisirons pour cela un bateau faisant le service du Havre à Honfleur, le *Castor*. Dans ce navire, le diamètre des roues, pris extérieurement, est de 3^m; la hauteur des aubes est de 0^m,40, leur longueur de 1^m,30; il y a 12 palettes, et les roues font 40 tours par minute. L'aire de la partie immergée du maître-couple est de 4^m. La hauteur d'eau au-dessus du bord supérieur de la palette, quand elle est à l'aplomb de l'axe, est 0^m,10.

On déduit de ces données :

$$\rho = 1^m,50 - \frac{1}{2} \cdot 0^m,40 = 1^m,30;$$

on a donc d'abord,

$$\cos \alpha_0 = \frac{1^m,30 - 0^m,20 - 0^m,10}{1^m,30} = \frac{10}{13} = 0,7692,$$

par conséquent $\alpha_0 = 39^\circ 43'$ (à une minute près), ou, en prenant le rayon pour unité,

$$\alpha_0 = \pi \cdot \frac{39^\circ 43'}{1800} = 0,6806,$$

et

$$\sin \alpha_0 = 0,6389.$$

Nous prendrons pour K la valeur 0,08, un peu supérieure à celle qui a été indiquée par M. Bourgois pour les vaisseaux rapides, attendu que les bateaux à roues éprouvent toujours une résistance un peu plus grande. Nous aurons alors

$$\mu = \frac{0,08 \cdot 3,1416 \cdot 4}{2,12 \cdot 1,30 \cdot 0,40} = 0,0805,$$

puis $x = \frac{v}{V} = \frac{0,0805 + 2,0 \cdot 6389}{0,6806 + 0,6389 \cdot 0,7692} = 1,1588.$

Les roues faisant 40 tours par minute, il en résulte pour v la valeur

$$v = \frac{40 \cdot 2\pi \rho}{60} = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^m,30 = 5^m,4454.$$

Par suite $V = \frac{5^m,4454}{1,1588} = 4^m,6991,$

ce qui répond à un peu plus de 9 nœuds (la vitesse nominale est de 10 nœuds).

La formule [1] donne ensuite pour le recul,

$$\epsilon = \frac{5,4454 - 4,6991}{5,4454} = 0,137.$$

La formule [7] donne

$$\mathcal{E}_w = \frac{0,08 \cdot 1000 \cdot 4 \cdot (4,6991)^3}{2,9 \cdot 81} = 1692^{\text{km}},5.$$

La formule [8] donne

$$\mathcal{E}f = \frac{2,12 \cdot 1000 \cdot 0,52 \cdot 5,4454 \cdot 4,6991 \cdot (5,4454 \cdot 0,6389 - 4,6991 \cdot 0,6806)}{3,1416 \cdot 9,81}$$

ou

$$\mathcal{E}f = 2910^{\text{km}},9.$$

Dans la formule [9] nous prendrons pour β un nombre un peu moindre que le coefficient 0,3 donné par Prony pour les canaux et rivières, dont le lit offre plus de résistance; nous adopterons avec M. Bourgois 0,25; mais nous doublerons ce nombre pour tenir compte des deux faces de la palette; nous écrirons donc $\beta = 0,5$.

Dans la formule [10] nous mettrons pour α sa valeur moyenne

$$\frac{1}{2} \alpha_0 \text{ ou } 19^\circ 51' 30'',$$

ce qui donne

$$\cos \alpha = 0,9405$$

Et comme on a

$$x = \frac{5,4454}{4,6991} = 1,1588,$$

en mettant ces valeurs dans [10], avec $l = 1^m,30$, on trouvera

$$U = \frac{1^m,30}{2(1,1588 \cdot 0,9405 - 1)} = 7^m,2343,$$

par suite

$$\mathcal{E}f = 4 \cdot 0,52 \cdot 0,5 \cdot (7^m,2343)^3 = 393^{\text{km}},7.$$

En réunissant les trois parties de \mathcal{E}_n on obtient $\mathcal{E}_n = 1692^{\text{km}},5 + 2910^{\text{km}},9 + 393^{\text{km}},7 = 4997^{\text{km}},1$ ou, en chevaux-vapeur,

$$\mathcal{E}_n = 66^{\text{ch}},6.$$

L'expérience directe a donné 75^{ch} pour le travail développé par la vapeur. Si on en retranche un dixième, pour tenir compte du travail consommé par le frottement des bielles, manivelles, coussinets de l'arbre des roues, il reste 67^{ch},5 pour le travail réellement transmis aux palettes, nombre qui diffère à peine de celui qu'indique la théorie.

On voit que, dans ce propulseur, le frottement a peu d'importance, même en l'exagérant comme nous avons fait. Sur 100 chevaux-vapeur fournis par la machine, il y en a 33,9 employés à vaincre la résistance de l'eau sur la carène, c'est ce qui constitue le travail utile; 58,2 sont consommés par le recul, c'est-à-dire pour mettre l'eau en mouvement; le frottement n'en emploie que 7,9.

III. Dans la théorie qui vient d'être exposée, on suppose, ainsi qu'on l'a vu, que toute l'eau successivement rencontrée par les palettes prend la vitesse u , ce qui n'est pas rigoureux; mais on néglige, par compensation, le choc de la palette à l'entrée, et l'eau soulevée à la sortie.

Le choc de la palette à son entrée dans l'eau est

une cause de trépidations fatigantes; on les atténue aujourd'hui en donnant une légère inclinaison à l'aube, de telle sorte que l'une de ses extrémités s'immerge avant l'autre; l'immersion, au lieu d'être brusque, est alors successive et continue, et le choc est beaucoup moins sensible.

IV. Les palettes que nous avons considérées jusqu'ici sont des palettes *fixes*, maintenues par deux ou trois roues parallèles dans lesquelles elles sont emboîtées à demeure comme cela a lieu pour les récepteurs hydrauliques. Mais on fait aussi usage de palettes *mobiles*, disposées de telle sorte qu'elles demeurent sensiblement verticales pendant tout le temps où elles sont immergées. Voici le mécanisme imaginé par M. Cavé pour obtenir ce résultat.

Les aubes sont comprises entre deux roues parallèles et solidaires; chaque aube est montée sur un axe longitudinal dont les extrémités peuvent tourner dans des coussinets pratiqués en regard sur les jantes des deux roues (elles vont en s'effilant vers les bords, afin d'éprouver une moindre résistance au moment de l'immersion et au moment de la sortie). Entre la roue la plus voisine du bateau, et celui-ci, des leviers AM, A'M', A''M'', etc. (fig. 3),

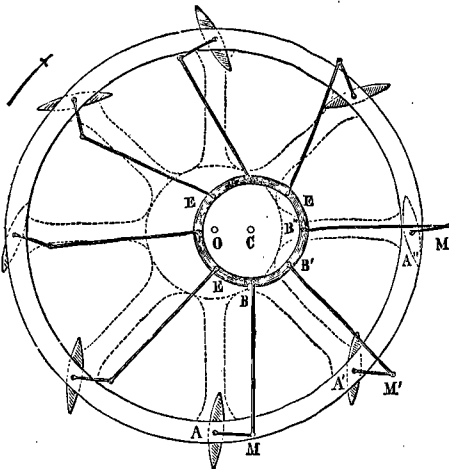


Fig. 3.

sont établis perpendiculairement à l'axe A, A', A'', etc., de chaque aube. L'extrémité M de chaque levier s'articule à une bielle MB, dont l'autre extrémité B est articulée avec un anneau en fer E, E, E. Cet anneau embrasse un disque en cuivre, dont le centre C, situé sur la même horizontale que le centre O de la roue, ne coïncide pas avec lui; ce disque est fixé à la coque du navire, à une petite distance de sa muraille; et, dans le mouvement de la roue, l'anneau glisse autour du disque. Toutes les bielles MB, M'B', M''B'', etc., sont d'égale longueur; il en est de même de tous les leviers AM, A'M', A''M'', etc. Il est facile, à l'aide de la figure, de se rendre compte du jeu de ce mécanisme. Les aubes étant placées comme la figure l'indique, supposons que la roue tourne dans le sens indiqué par la flèche, jusqu'à ce que le point A' vienne prendre la position du point A, l'anneau EE, entraîné par le système des leviers et des biel-

les, tournera autour du disque C d'une même quantité angulaire; et le point B' viendra prendre la position du point B. Mais puisque

$$M'B' = MB \text{ et que } A'M' = AM,$$

le point M' sera obligé de prendre la position du point M; par conséquent l'aube A' viendra prendre la position exacte qu'avait l'aube A; et il en sera de même de toutes les aubes successives. Le tracé ayant été fait de manière que la palette A soit verticale, il en sera de même de toutes les palettes qui viendront successivement prendre sa place. Il résulte aussi du même tracé que les deux palettes qui précèdent ou qui suivent A ont aussi une position sensiblement verticale; par conséquent chaque palette conserve sensiblement cette position pendant tout le temps qu'elle est immergée; quoique, pendant un tour de roue, elle fasse, comme la figure le montre, un tour complet autour de son axe A. On voit encore que le disque C fonctionne comme un EXCENTRIQUE CIRCULAIRE (Voy. ce mot), avec cette différence qu'ici le disque est immobile, tandis que c'est l'anneau qui tourne.

Lorsque le propulseur est à palettes mobiles, il faut apporter quelques modifications à la théorie exposée ci-dessus. On a alors

$$F dt = u dm \text{ et } dm = \frac{\Pi a v dt}{g},$$

d'où il résulte que la valeur de F est toujours exprimée par l'équation [2]; mais l'équation [3] se réduit à

$$2n \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} F dt = RT,$$

d'où

$$\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} (x \cos \alpha - 1) d\alpha = \mu$$

et par suite

$$x = \frac{v}{V} = \frac{\mu + 2\alpha_0}{2 \sin \alpha_0}.$$

La valeur de \mathcal{E}_n reste évidemment la même, celle de $\mathcal{E}F$ change, attendu que le travail élémentaire de F est alors

$$F \cos \alpha \cdot \rho d\alpha;$$

on a donc, pour un tour de roue,

$$\mathcal{E}F = 2n \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\Pi a v (v \cos \alpha - V)}{\pi g} \cos \alpha \cdot \rho d\alpha;$$

effectuant l'intégration, et divisant par

$$\frac{2\pi\rho}{v},$$

on trouve pour l'unité de temps

$$\mathcal{E}F = \frac{2n \Pi a v V [v (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha) - 2V \sin \alpha_0]}{g}.$$

Le travail du frottement reste le même.

Les palettes mobiles offrent un appui plus avantageux; avec les données de l'exemple précédent on trouverait

$$x = 1,1282$$

et par suite

$$V = 4^m,8266,$$

au lieu de

$$4^m,6991.$$

L'inconvénient de ce système est d'une part une complication plus grande, et par conséquent plus de chances de dérangement dans le propulseur; d'autre part un surcroît de frottement dû au glissement de l'anneau EE sur la circonférence du disque C.

V. Beaucoup d'ingénieurs se contentent d'appliquer aux bateaux à vapeur les formules suivantes établies par Coriolis d'après une théorie analogue à celle qu'il a donnée pour les roues hydrauliques (Voy. le *Calcul de l'effet des machines*, par Coriolis). On a d'après cet auteur

$$v = V \left(1 + \frac{KA}{ka} \right),$$

k étant un coefficient qu'on peut généralement prendre entre 1, et 1,1 pour les roues à palettes fixes, et entre 1,25 et 1,30 pour les roues à palettes mobiles.

On a ensuite

$$\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_u \left(1 + \frac{KA}{ka} \right) = \frac{KHA V^2}{2g} \cdot v.$$

Ces formules s'accordent avec l'expérience quand la vitesse V du navire ne dépasse pas 4^m ; mais au delà elles donnent pour v et pour \mathfrak{C}_m des valeurs trop grandes.

VI. Quand le bateau doit naviguer sur une rivière, il faut, quelle que soit la théorie qu'on adopte, prendre pour V la vitesse relative du navire par rapport au fluide en mouvement; c'est-à-dire que V représentera la vitesse absolue du navire, augmentée ou diminuée de la vitesse du courant, suivant que le navire descend ou qu'il remonte.

Pour ce qui concerne le choix des appareils à vapeur à employer pour faire mouvoir les navires à roues, Voyez l'art. NAVIGATION à VAPEUR.

PROPULSEURS HÉLICOÏDES, organes mécaniques qui impriment le mouvement aux navires à l'aide de la pression qu'une surface hélicoïde exerce sur l'eau en tournant autour de son axe. L'idée d'employer la vis comme moyen de propulsion est déjà ancienne. Paucton, en 1768, proposa en France la vis d'Archimède pour pousser les navires; avant lui Robert Hooke avait eu l'idée d'appliquer au même usage des ailes de moulin à vent plongeant dans l'eau. Un grand nombre de tentatives du même genre furent faites à diverses époques. Mais c'est en 1839 qu'eut lieu le premier essai réellement pratique d'un propulseur hélicoïde: l'*Archimède*, navire de 237 tonneaux, pourvu d'une hélice propulsive, d'après les idées de F. P. Smith, fermier à Hendon, fit en 20 heures le voyage de Gravesend à Portsmouth, dans des circonstances défavorables de vent et de marée. A peu près à la même époque, l'ingénieur Ericsson, Suédois de naissance, fit en Angleterre l'essai d'un propulseur composé d'une ou de deux roues verticales à aubes hélicoïdes; et le *Stockton*, navire à vapeur de 70 chevaux, muni de ce propulseur, après avoir subi diverses épreuves dont les résultats furent des plus satisfaisants, quitta l'Angleterre et fit route à la voile pour l'Amérique. Le propulseur d'Ericsson eut dans ce pays un grand succès; et c'est le système qui a été d'abord introduit en France. Le premier navire français pourvu d'une hélice fut le *Napoléon* de la poste, appelé aujourd'hui le *Corse*. Depuis, l'emploi de l'hélice a toujours été en se généralisant et en se perfectionnant; et son introduction a opéré, depuis un certain nombre d'années, une révolution complète dans la marine, principalement dans la marine militaire. On trouvera dans le *Traité de l'hélice propulsive*, par E. Paris, capitaine de vaisseau, l'historique complet de la question.

I. L'hélice propulsive est placée à l'arrière du navire, au milieu d'une ouverture rectangulaire pratiquée dans le massif arrière, près de l'étambot (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). L'arbre qui la porte, placé parallèlement à la quille, traverse la coque dans une botte à étoupes, et va s'appuyer par son bout antérieur contre un massif spécial, solidement établi dans la cale, et que l'on appelle sa *butée*. Cet arbre est mis en mouvement par une ou plusieurs machines à vapeur agissant soit directement, soit par l'intermédiaire d'un engrenage.

Le mode d'action de l'hélice est facile à comprendre. Soit amb (fig. 1) la position d'une portion

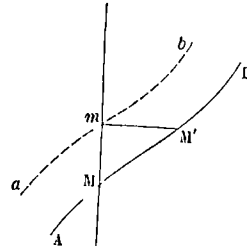


Fig. 1.

de la surface hélicoïde à un certain instant, et AMB la position que cette portion de surface a prise au bout d'un temps très-court, par suite de la rotation de l'hélice; l'eau en contact avec la surface amb aura été forcée de se déplacer; et elle aura subi deux déplacements simultanés: l'un de m vers M dans le sens de l'axe de la vis, l'autre de m vers M' dans le sens perpendiculaire à l'axe et au rayon. Ce double déplacement ne peut s'effectuer sans que la surface amb n'exerce sur l'eau un certain effort, et que, par conséquent, l'eau ne réagisse à son tour sur la surface hélicoïde; la composante de cette réaction parallèlement à l'axe est la force qui tend à faire avancer le navire.

L'hélice installée à bord de l'*Archimède* était une surface hélicoïde à génératrice droite et perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire une surface de vis à filet carré; elle embrassait l'étendue d'un pas dans le sens de l'axe. Plus tard, Smith réduisit cette étendue à un demi-pas en doublant l'hélice, c'est-à-dire en établissant sur le même arbre deux hélices, d'un demi-pas chacune, placées à 180° l'une de l'autre. Mais on ne tarda pas à s'apercevoir que cette étendue dans le sens de l'axe, très-génante pour l'installation de l'hélice, pouvait être notablement réduite. Pour comprendre la disposition de l'hélice propulsive, telle qu'elle est le plus généralement employée aujourd'hui, il faut imaginer une surface hélicoïde double, comme celle dont il a été question tout à l'heure, coupée par deux plans perpendiculaires à l'axe; la portion comprise entre ces deux plans formera ce que l'on appelle une hélice à deux ailes, comme celle qui est représentée (fig. 2). L'expérience a démontré qu'une portion d'hélice aussi peu étendue dans le sens de l'axe suffit pour la propulsion d'un navire, lorsqu'elle a une étendue suffisante dans le sens perpendiculaire à l'axe. Au lieu d'une seule paire d'ailes on peut en employer deux, placées immédiatement à la suite l'une de l'autre, mais à 90° , de manière à

former une croix; on peut aussi les placer sur le même noyau, ce qui revient à employer une hélice



Fig. 2.

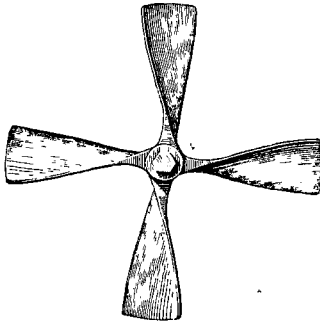


Fig. 3.

quadruple. La figure 3 représente l'hélice du vaisseau le *Napoléon* de 90 canons; son rayon est de 2^m,90; le pas moyen complet est de 8^m,50; mais elle n'en embrasse qu'une partie ayant 1^m,20 dans le sens de l'axe. On a employé des hélices à 6 ailes et plus; mais lorsque les ailes sont trop nombreuses, elles se nuisent réciproquement; et le système qui prévaut aujourd'hui est celui des hélices à 2 ou à 4 ailes, selon qu'il y a ou qu'il n'y a pas de puits de remontage (Voir plus loin).

II. La théorie de l'hélice propulsive a été donnée par M. Bourgois, dans le *Traité des propulseurs hélicoïdes*, qu'il a publié en 1845.

L'auteur admet que la résistance de l'eau sur chaque élément de l'hélice est proportionnelle au carré de la vitesse relative, et au carré du sinus de l'angle d'incidence; il fait, dans le cours de son mémoire, plusieurs autres hypothèses, auxquelles il ne paraît pas indispensable d'avoir recours; et il arrive à des formules assez compliquées que l'on trouvera plus loin. La théorie élémentaire de l'hélice propulsive peut être établie d'une manière simple comme il suit.

Soit XX' (fig. 4) l'axe de l'hélice, M un élé-

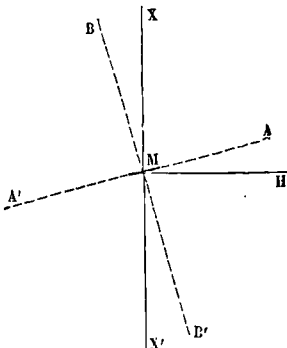


Fig. 4.

ment de sa surface hélicoïde, i l'angle AMH que cet élément fait avec un plan perpendiculaire à l'axe. Soit f la pression normale de l'eau sur l'élément placé en M, et MB sa direction, perpendiculaire à MA; la pression exercée par l'élément sur l'eau sera une force f égale à la première, mais dirigée sui-

vant MB'. Soit φ le frottement de l'eau sur l'élément M; cette force s'exerce dans le sens MA'; l'élément M exerce à son tour sur l'eau une force φ égale et contraire, c'est-à-dire dirigée suivant MA. Soit dm la masse élémentaire de liquide déplacée par l'élément M dans un temps très-court dt , et u la projection suivant MX' de la vitesse imprimée à l'eau. Cette projection est la même, quel que soit l'élément considéré. En effet, si l'on se reporte à la figure 1, on voit que si un point m de l'hélice parcourt le chemin mM' perpendiculairement à l'axe, il parcourt le chemin mM dans le sens de l'axe, et l'angle $mM'M$ étant celui que nous avons appelé i , on a

$$mM = mM' \cdot \text{tang } i.$$

Or, si α désigne l'angle dont l'hélice a tourné, et ρ la distance du point m à l'axe, on a

$$mM' = \rho \alpha;$$

d'ailleurs, par la propriété fondamentale de l'hélice, on a

$$\text{tang } i = \frac{H}{2\pi\rho},$$

en appelant H le pas de l'hélice; on a donc

$$mM = \frac{\alpha H}{2\pi},$$

quantité indépendante de ρ . Il en résulte que la vitesse communiquée à l'eau parallèlement à l'axe est la même quel que soit l'élément d'hélice considéré; ainsi la quantité u est constante.

Cela posé, écrivons que la somme des projections sur XX' (fig. 4) des impulsions de toutes les forces telles que f et φ exercées sur le liquide dans le temps dt est égale à l'accroissement des quantités de mouvement de ce liquide, projetées sur le même axe; comme sa vitesse initiale était nulle, nous aurons

$$\int f \cos i \cdot dt - \int \varphi \sin i \cdot dt = \int u dm = u \int dm. [1]$$

Si l'hélice embrassait un pas entier, le liquide mis en mouvement dans le temps dt serait un cylindre ayant pour base le cercle, projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à son axe, et pour hauteur $V dt$ en appelant V la vitesse du navire; l'hélice n'embrassant qu'une partie du pas, le volume déplacé devra être réduit proportionnellement. Si donc on appelle a la projection sur un plan perpendiculaire à XX', de la portion d'hélice employée, et H le poids du mètre cube d'eau, on aura

$$mdt = \frac{\pi a V dt}{a}$$

L'équation [1], divisée par ai , deviendra donc

$$\int f \cos i - \int \varphi \sin i = \frac{\pi a V u}{g};$$

mais si v désigne la vitesse avec laquelle l'hélice, en vertu de sa rotation, avancerait dans un écrou fixe, on a évidemment

$$u = v - V;$$

par conséquent

$$\int f \cos i - \int \varphi \sin i = \frac{\pi a V (v - V)}{g}. [2]$$

Appliquons maintenant au navire le principe des quantités de mouvement que nous venons d'appliquer au liquide déplacé; en appelant R la résistance de l'eau sur la carène, on aura

$$\int f \cos i - \int \varphi \sin i = R [3]$$

et par conséquent,

$$R = \frac{\Pi aV(v-V)}{g};$$

mais, d'après l'expérience, on a, en appelant A l'aire de la partie immergée du maitre-couple et K un coefficient numérique (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES)

$$R = \frac{K \Pi aV^2}{2g}.$$

Il en résulte l'égalité

$$\frac{\Pi aV(v-V)}{g} = \frac{K \Pi aV^2}{2g},$$

$$\text{d'où } v-V = \frac{KA}{2a} \cdot V \text{ ou } v = V \left(1 + \frac{KA}{2a}\right)$$

ou enfin

$$v = V(1 + \mu) \quad [4]$$

en posant pour abrégé

$$\mu = \frac{KA}{2a}.$$

On tire de la relation [4]

$$v-V = V\mu, \text{ c'est-à-dire } u = V\mu. \quad [5]$$

Soit h le chemin que fait le navire pendant un tour de l'hélice, on aura la proportion

$$H : h = v : V,$$

d'où

$$\frac{H-h}{H} = \frac{v-V}{v} = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

Le premier membre de cette relation est ce qu'on appelle le *recul*; nous le désignerons par ϵ ; nous écrirons en conséquence

$$\epsilon = \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{1+\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{1+\frac{2Ka}{KA}} \quad [6]$$

Cette relation montre que le recul est indépendant de la force motrice de la machine et de la vitesse du navire. Toutes choses égales d'ailleurs, il est d'autant moindre que a est plus grand par rapport à A; c'est-à-dire que, pour un même navire, le recul est d'autant moindre que la projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à l'axe est plus grande. Mais l'expérience montre qu'au delà de 4 à 6 ailes, l'accroissement du nombre de ces organes est désavantageux, parce que chaque aile, au lieu d'agir sur un liquide en repos, rencontre une masse fluide déjà mise en mouvement par l'aile qui l'a précédée. On obtient plus d'effet en augmentant le rayon des ailes sans en accroître le nombre.

Soit N le nombre de tours que fait l'hélice dans une minute; la durée d'un tour sera

$$\frac{60}{N};$$

on aura donc

$$H : v = \frac{60}{N} : 1, \text{ d'où } N = \frac{60v}{H}. \quad [7]$$

Il en résulte que N est proportionnel à v, et par conséquent à la vitesse V que l'on veut donner au navire.

Si la vitesse V est donnée, la relation [4] donnera v; par suite la relation [7] donnera le nombre de tours que doit faire l'hélice par minute. L'équation [6] donnera le recul. Si l'on a besoin de la distance h, on la tirera de la proportion écrite plus haute, qui donne

$$h = H \cdot \frac{v}{V} = H \cdot \frac{1}{1+\mu} \text{ ou } h = \delta H,$$

en posant

$$\delta = \frac{1}{1+\mu}.$$

La quantité δ par laquelle il faut multiplier le pas H pour avoir le chemin h fait par le navire pendant un tour de l'hélice, est ce qu'on appelle le *coefficient d'avance*.

Il s'agit maintenant de calculer le travail que doit développer la machine pour donner au navire la vitesse V.

Soit F la force que la machine exerce sur l'hélice, à la distance r de son axe; en prenant les moments des forces qui s'exercent sur l'hélice, par rapport à son axe, on aura

$$Fr = \int f \sin i \cdot \rho + \int \varphi \cos i \cdot \rho$$

De la relation

$$\tan i = \frac{H}{2\pi\rho}$$

on tire

$$\rho \sin i = \frac{H \cos i}{2\pi}.$$

et

$$\rho \cos i = \frac{H \cos^2 i}{2\pi \sin i} = \frac{H}{2\pi \sin i} - \frac{H \sin i}{2\pi}.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$Fr = \frac{H}{2\pi} \int f \cos i + \frac{H}{2\pi} \int \frac{\varphi}{\sin i} - \frac{H}{2\pi} \int \varphi \sin i,$$

ou, en ayant égard à l'équation [3],

$$Fr = \frac{RH}{2\pi} + \frac{H}{2\pi} \int \frac{\varphi}{\sin i}.$$

En appelant ω la vitesse angulaire de l'hélice, on a

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi v}{H};$$

multipliant ces dernières relations membre à membre, on obtient

$$Fr\omega = Rv + v \int \frac{\varphi}{\sin i} = RV \cdot \frac{v}{V} + v \int \frac{\varphi}{\sin i},$$

ou

$$\mathfrak{C}F = \mathfrak{C}R \cdot (1 + \mu) + v \int \frac{\varphi}{\sin i}. \quad [8]$$

Si l'on négligeait le frottement, il resterait simplement

$$\mathfrak{C}F = \mathfrak{C}R(1 + \mu), \quad [9]$$

et le travail moteur serait proportionnel au travail utile.

Calculons l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation [8]. Soit $d\sigma$ la surface d'un élément de l'hélice et U la vitesse relative par rapport à l'eau, on pourra écrire

$$\varphi = d\sigma(\alpha U + \beta U^2);$$

mais, comme la vitesse U est ordinairement assez grande, on pourra négliger la première puissance de U et prendre simplement

$$\varphi = d\sigma \cdot \beta U^2.$$

Faisons d'abord la somme de tous les éléments de l'intégrale pour lesquels i est le même, c'est-à-dire de tous ceux qui composent un même filet d'hélice. Pour ces éléments, U est aussi le même; la somme sera donc

$$\frac{\sigma\beta U^2}{\sin i}.$$

Faisons maintenant la somme pour tous les filets. Pour cela, remarquons d'abord que, si l'hélice embrassait un pas entier, on aurait

$$\sigma = d\rho \sqrt{H^2 + (2\pi\rho)^2};$$

mais l'hélice n'embrassant qu'une fraction de pas, soit qu'on la considère comme simple ou comme double, en appelant λ cette fraction, on aura

$$\sigma = \lambda \cdot d\rho \sqrt{H^2 + (2\pi\rho)^2}.$$

Remarquons ensuite que l'élément d'hélice considéré ne décrit pas dans le fluide l'hélice à laquelle il appartient, et qui a pour pas H , mais une hélice ayant pour pas h ; le chemin décrit par cet élément dans un tour d'hélice est donc

$$\sqrt{h^2 + (2\pi\rho)^2};$$

le chemin décrit dans une seconde est, par conséquent,

$$U = \frac{N}{60} \sqrt{h^2 + (2\pi\rho)^2}.$$

D'ailleurs de

$$\text{tang } i = \frac{H}{2\pi\rho}$$

on déduit

$$\frac{1}{\sin i} = \frac{\sqrt{H^2 + (2\pi\rho)^2}}{H}$$

Substituant ces diverses valeurs dans l'intégrale cherchée, on trouve

$$\int \frac{\varphi}{\sin i} = \frac{\beta\lambda}{H} \left(\frac{N}{60}\right)^2 \int (H^2 + 4\pi^2\rho^2) (h^2 + 4\pi^2\rho^2) d\rho.$$

Il faudrait prendre cette intégrale depuis le rayon de l'arbre jusqu'au rayon extérieur R de l'hélice; mais, afin de compenser en partie l'erreur commise en négligeant le terme αU dans l'expression du frottement, et le frottement de l'axe lui-même, on peut intégrer de 0 à R ; ce qui donne, en posant $R = \eta H$, et se rappelant qu'on a posé $h = \delta H$,

$$= \beta\lambda \left(\frac{N}{60}\right)^2 H^3 \left[\frac{16}{5} \pi^4 \eta^5 + \frac{4}{3} \pi^2 (1 + \delta^2) \eta^3 + \delta^2 \eta \right] \quad [10]$$

Or

$$\frac{NH}{60} = v;$$

en remplaçant donc la parenthèse ci-dessus par le symbole (η) , afin d'abrégier l'écriture, l'équation [8] deviendra

$$\mathcal{C}F = \mathcal{C}R (1 + \mu) + \beta\lambda H^2 (\eta) v^3;$$

mais le terme $\mathcal{C}F$ est le travail moteur \mathcal{C}_m ; le terme $\mathcal{C}R$ est le travail utile

$$\mathcal{C}_u = \frac{K \Pi A V^3}{2g}$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$\mathcal{C}_u \cdot \frac{2g\beta\lambda H^2 (\eta)}{K \Pi A} \cdot \frac{v^3}{V^3} \text{ ou } \mathcal{C}_u (1 + \mu)^3 \cdot \frac{2g\beta\lambda H^2 (\eta)}{K \Pi A}$$

En posant donc

$$\mu' = \frac{2g\beta\lambda H^2 (\eta)}{K \Pi A},$$

on aura enfin

$$\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_u (1 + \mu) [1 + (1 + \mu)^2 \mu']. \quad [11]$$

Nous avons raisonné jusqu'ici comme si le frottement de l'eau ne s'exerçait que sur une des faces de l'hélice, on aura égard à son action sur les deux faces en prenant β égal au double du coefficient de U^2 dans la fonction empirique $\alpha U + \beta U^2$ (réduite comme on l'a vu à son second terme).

Pour avoir le minimum de \mathcal{C}_m pour un effet utile donné, il faudrait déterminer R , λ et H en égalant à zéro les dérivées du second membre par rapport à ces variables; mais on serait conduit à

des équations que l'on ne saurait résoudre. Ce n'est donc que par tâtonnement que l'on a pu déterminer les dimensions de l'hélice de manière à donner le résultat le plus avantageux. En général, quand on augmente la surface de l'hélice, on diminue le recul, mais le frottement augmente; et il est indispensable de consulter l'expérience pour obtenir les proportions les plus favorables. Pour un bâtiment et une hélice donnée, les relations ci-dessus établies permettent de résoudre tous les problèmes pratiques qui peuvent se présenter. Si, par exemple, on se donne la vitesse V que doit prendre le navire, l'équation [4] fera connaître v , et, par suite, l'équation [7] donnera le nombre N de tours que doit faire l'hélice par minute quand on aura calculé μ

par la relation $\mu = \frac{K A}{2 a}$. On en déduira le recul par l'équation [6], et le coefficient d'avance δ par la relation $\delta = \frac{1}{1 + \mu}$, qui revient à $\delta = 1 - \epsilon$. On calcu-

lera ensuite le travail utile $\mathcal{C}_u = \frac{K \Pi A V^3}{2g}$; et la

formule [11] donnera le travail \mathcal{C}_m que doit dépenser la machine motrice. Si le rendement de celle-ci est connu, on en déduira le travail effectif développé par la vapeur.

III. Afin de donner un exemple de ce calcul, nous prendrons une des expériences faites sur le vaisseau *le Napoléon*. Dans ce bâtiment on avait

$$A = 98^{\text{m}^2};$$

le coefficient K , d'après M. Bourgois (*Mémoire sur la résistance de l'eau*, etc.), était 0,058. Quant aux dimensions de l'hélice, elles sont exprimées par les relations

$$R = 2^{\text{m}}, 90, \quad H = 8^{\text{m}}, 50;$$

la portion de pas embrassée par chaque aile est $1^{\text{m}}, 20$; ce qui fait $4^{\text{m}}, 80$ pour les quatre ailes, et donne

$$\lambda = \frac{4^{\text{m}}, 8}{8^{\text{m}}, 5} = 0,5647$$

et

$$a = \lambda \cdot \pi R^2 = 0,5647 \cdot 3,1416 \cdot (2^{\text{m}}, 9)^2,$$

ou

$$a = 14^{\text{m}^2}, 92.$$

Dans l'expérience dont il s'agit, la vitesse du navire était de douze nœuds, ce qui donne

$$V = 6^{\text{m}}, 225.$$

Cela posé, on aura d'abord

$$\mu = \frac{0,058 \cdot 98}{2 \cdot 14,92} = 0,19;$$

par suite

$$1 + \mu = 1,19 \text{ et } [(1 + \mu)^2 = 1,416];$$

puis

$$v = 6^{\text{m}}, 225 \cdot 1,19 = 7^{\text{m}}, 411$$

et

$$N = \frac{7^{\text{m}}, 411 \cdot 60}{8^{\text{m}}, 5} = 52,31,$$

ou un peu plus de 52 tours par minute; ce qui est conforme à l'expérience. On trouve ensuite pour le recul

$$\epsilon = \frac{0,19}{1,19} = 0,16,$$

et pour le coefficient d'avance

$$\delta = \frac{1}{1,19} = 0,84, \text{ (d'où } \delta^2 = 0,7056).$$

Le travail utile exprimé en chevaux est

$$\mathcal{E}_m = \frac{0,058 \cdot 1026^4 \cdot 98^{m^2} \cdot (6^m, 225)^3}{2 \cdot 9, 81 \cdot 75} = 956^{\text{chevaux}}$$

On trouvera

$$\eta = \frac{2,9}{8,5} = 0,341,$$

puis

$$(\eta) = 0,341 \left[\begin{array}{l} 3,20 \cdot \pi^4 (0,341)^4 \\ + 1,33 \pi^2 (0,341)^2 \cdot 1,7056 + 0,7056 \end{array} \right] = 2,5674.$$

La valeur du coefficient β serait 0,3 d'après Prony (Voy. FROTTMENT DE L'EAU, TUYAUX DE CONDUITE, CANAUX DÉCOUVERTS); mais cette valeur se rapporte à des parois hérissées d'aspérités, comme celles des canaux, ou même comme celles des conduites recouvertes de matières incrustantes. M. Bourgois prend 0,25; et il est probable qu'on se rapprocherait de la vérité en adoptant une valeur plus faible encore. Pour $\beta = 0,25$ on trouve

$$\mu' = \frac{2 \cdot 9, 81 \cdot 0, 5647 \cdot 0, 5 (8, 5)^2 \cdot 2, 5674}{0, 058 \cdot 1026 \cdot 98} = 0, 176,$$

puis

$$1 + (1 + \mu)^2 \cdot \mu' = 1 + (1, 416)^2 \cdot 0, 176 = 1, 249;$$

donc

$$\mathcal{E}_m = 956^{\text{ch}} \cdot 1, 19 \cdot 1, 249 = 956^{\text{ch}} \cdot 1, 486 = 1421^{\text{ch}}.$$

Le rendement de la machine motrice pouvait être évalué à 0,55; le travail T développé par la vapeur était donc

$$T = \frac{1421^{\text{ch}}}{0, 55} = 2583^{\text{ch}}, 6.$$

L'expérience a donné jusqu'à

$$\mathcal{E}_m = 1500^{\text{ch}} \text{ et } T = 2700^{\text{ch}}.$$

On peut remarquer que, le travail utile étant représenté par 1, le travail dû au recul, c'est-à-dire le travail nécessaire pour mettre l'eau en mouvement, est représenté par 0,190; et que le travail consommé par le frottement de l'eau est représenté par 0,296; ce qui donne 1,486 pour le travail moteur fourni par la machine. Sur 100 unités de travail développées par ce moteur, il y en a donc environ 12,8 absorbées par le recul, 19,9 consommées par le frottement. Le reste, ou 67,3, représente le travail utilisé. Le coefficient d'utilisation est le rapport $\frac{\mathcal{E}_m}{T}$. Dans l'exemple actuel ce serait $\frac{956}{2583,6}$ ou 0,37.

IV. Les formules de M. Bourgois ont une forme très-différente de celles qui précèdent; nous croyons devoir les donner ici, en renvoyant à son Mémoire cité plus haut pour le détail des hypothèses et des calculs qui l'y ont conduit.

L'expression du recul, qu'il représente par ρ , est d'abord

$$\rho = \frac{H \sqrt{KB}}{\sqrt{S} + H \sqrt{KB}}$$

formule dans laquelle H représente le pas de l'hélice, B la surface de la partie immergée du maître-couple, K un coefficient de résistance qui varie de 3 à 4 kilogrammes suivant la forme du navire (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES), et S la surface de l'hélice. Il obtient ensuite les relations

$$\begin{aligned} KB(nH\delta)^2 &= \frac{x t}{8 \pi} n^2 \rho^2 (C^4 - C'^4) \\ - \frac{\gamma}{2 \pi} \frac{m'}{m} n^2 H \left[H^2 (C - C') + \frac{1}{3} (C^3 - C'^3) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x t}{8 \pi} n^2 \rho^2 H (C^4 - C'^4) \\ + \frac{\gamma}{2 \pi} \frac{m'}{m} n^2 \left[\frac{1}{3} (C^3 - C'^3) + \frac{1}{5} (C^5 - C'^5) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= KB(nH\delta)^2 + P\rho \\ + \frac{\gamma \delta}{2 \pi} \frac{m'}{m} n^2 \left[\begin{array}{l} H^2 (C - C') + \frac{2}{3} H^2 (C^3 - C'^3) \\ + \frac{1}{5} (C^5 - C'^5) \end{array} \right], \end{aligned}$$

dans lesquelles n représente le nombre de tours (ou fraction de tour) de l'hélice par seconde, δ le coefficient d'avance ou le rapport entre l'avance par tour et le pas de la vis, x un coefficient relatif à la résistance, et que M. Bourgois prend égal à 135, C et C' les circonférences extérieure et intérieure de l'hélice, $\frac{m'}{m}$ le rapport entre le nombre des branches effectives et le nombre de celles qui seraient nécessaires pour former une hélice complète embrassant un pas, t une quantité que M. Bourgois prend égale à la puissance $\frac{2}{3}$ du rap-

port $\frac{m'}{m}$, γ un coefficient égal à 0,5 et relatif au frottement de l'eau, enfin P le travail développé par la machine dans une seconde.

V. Tout ce que nous venons de dire se rapporte au mouvement d'un navire sur une eau en repos. S'il s'agissait de la navigation sur une rivière, la théorie resterait la même; mais il faudrait entendre par V la vitesse relative du navire par rapport au liquide sur lequel il se meut, c'est-à-dire que pour avoir V il faudrait, dans le cas où le navire descend le courant, retrancher de la vitesse réelle celle de la rivière; il faudrait, au contraire, l'ajouter dans le cas où le navire remonterait le courant.

VI. Nous avons supposé jusqu'ici que la surface de l'aile était une surface de vis à filet carré. En réalité les hélices adoptées par la pratique n'ont point un pas uniforme, c'est-à-dire que, développée sur un plan, chacune d'elles ne donnerait pas une ligne droite, mais bien une ligne courbe convexe vers l'axe, telle que AMB (fig. 5). Chaque élément de

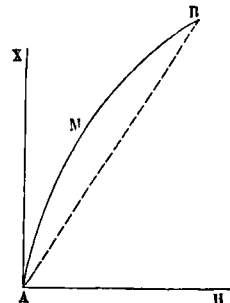


Fig. 5.

cette courbe, supposée enroulée sur le cylindre qui lui correspond, donne un élément d'une hélice particulière; et ces hélices vont en augmentant de pas, depuis le point B où le pas est le plus faible, jusqu'au point A où il est le plus grand. C'est ce que l'on appelle donner à l'hélice une avance de pas. Dans l'hélice du Napoléon, le pas à l'entrée est de

7^m,30, et à la sortie de 9^m,30. Le but de cette disposition est de diminuer le choc de l'eau à son entrée sur l'hélice (il s'agit ici, bien entendu, du mouvement relatif de l'eau par rapport à l'hélice supposée fixe). On a vu que, par l'effet du recul, un élément du propulseur décrit une hélice dont le pas, au lieu d'être H , est réellement h ou δH ; si l'on donnait exactement ce pas à l'hélice, l'eau entrerait sans choc sur le propulseur. Mais ce pas, correspondant au minimum du recul, ne conviendrait plus dans le cas d'un recul plus considérable; toute cause qui tend à s'opposer au mouvement du navire revient à une augmentation du coefficient de résistance K , et par suite à une augmentation du recul; il faut donc que le pas à l'entrée soit réglé, non sur le minimum de ϵ , ou, ce qui revient au même, sur le maximum de δ , mais sur sa valeur moyenne dans les circonstances ordinaires. Le pas à l'entrée étant ainsi fixé, on règle le pas à la sortie en donnant à la courbe BMA la forme d'un arc de cercle dont BA serait la corde, la direction BA répondant elle-même au pas moyen qui figure dans les formules ci-dessus.

L'accroissement de pas à la sortie est nécessaire pour compenser la diminution à l'entrée; car autrement on voit qu'en vertu de l'équation [7] il faudrait donner au propulseur une vitesse de rotation plus grande que celle qui répond au pas moyen H.

On n'emploie pas toujours non plus des surfaces hélicoïdes à génératrices droites; des génératrices courbes ont donné de bons résultats, surtout quand la convexité de la génératrice était tournée vers l'extérieur.

On a essayé d'éviter l'aile près de l'axe, pour diminuer le poids du propulseur; et il ne paraît pas que cet évidement diminue l'action du propulseur, pourvu qu'il ne s'élève pas au delà du quart du rayon.

Enfin, on a proposé de former le propulseur de deux hélices qui tourneraient en sens contraire, celle d'arrière étant destinée à recevoir l'action de l'eau mise en mouvement par celle d'avant. Ericsson avait fait un essai de ce genre; ce dispositif n'a pas été expérimenté depuis.

VII. Quant au nombre et à la disposition des ailes, l'expérience a montré que pour diminuer les trépidations auxquelles la rotation du propulseur donne lieu, il était nécessaire d'employer un nombre pair d'ailes. En général, on emploie 2 ou 4 ailes, rarement 6; au delà de 6, le nombre des ailes nuit à l'action du propulseur, comme nous l'avons déjà dit plus haut. M. Mangin, ingénieur de la marine, a eu l'idée d'employer 2 paires d'ailes placées l'une derrière l'autre, de manière à donner la même projection sur un plan perpendiculaire à l'axe; la puissance du propulseur n'a pas été moindre que si les deux branches eussent été placées en croix comme cela a lieu d'ordinaire; mais le résultat le plus inattendu de cette disposition a été la suppression presque complète des trépidations dont il a été question ci-dessus. Ce fait aurait besoin toutefois d'être confirmé par une plus longue expérience.

La disposition imaginée par M. Mangin avait, du reste, pour principal but de résoudre la question si débattue des hélices à poste fixe, ou des hélices susceptibles d'être remontées. On conçoit l'utilité qu'il peut y avoir à remonter l'hélice dans l'inté-

rieur du navire, soit pour la visiter et la réparer, soit pour l'empêcher d'être un obstacle à la marche quand le bâtiment navigue à la voile. Mais il faut pour cela pratiquer dans la coque une ouverture assez grande pour laisser passer le propulseur; et, lorsqu'il se compose de 4 ailes en croix, il faut que l'ouverture ait une largeur égale au diamètre de l'hélice, ce qui présente de tels inconvénients que, dans la marine marchande surtout, où la nature et la régularité du service permettent rarement de se passer du propulseur, on a préféré les hélices à poste fixe, malgré les obstacles qu'elles peuvent apporter à la navigation à voiles. Dans la marine militaire, au contraire, où l'emploi des voiles est la règle et le propulseur hélicoïde l'exception, les esprits sont encore partagés entre les inconvénients et les avantages des puits de remontage. — L'avantage de pouvoir remonter l'hélice pour la réparer, ou pour faciliter la navigation à voiles en diminuant les frottements, est manifeste; mais l'inconvénient des puits est de diminuer la solidité de l'arrière, et d'occuper un espace considérable qui pourrait être plus utilement employé. Cet inconvénient oblige à faire usage d'hélices à 2 ailes, qui exigent, pour produire le même travail, un plus grand diamètre ou une plus grande vitesse de rotation qu'une hélice à 4 ailes. L'inconvénient disparaît par la disposition qu'a imaginée M. Mangin, puisque la largeur du puits se trouve réduite à un peu plus de la largeur de l'aile, au lieu d'une largeur égale à son diamètre.

M. Sollier, ingénieur de la marine, a résolu la question d'une autre manière en employant une hélice à 4 ailes, dont 2 peuvent être amenées, quand il est nécessaire, derrière les deux autres, comme dans l'hélice de M. Mangin. Nous décrirons ce système, qui donnera en même temps une idée des dispositions employées pour remonter les hélices. Les 4 ailes forment 2 branches, composées chacune de

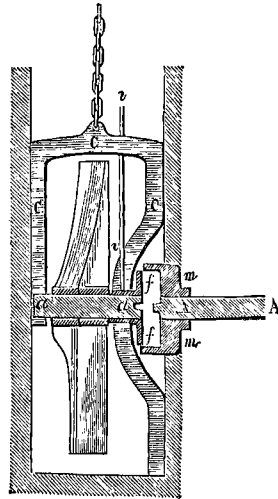


Fig. 6.

deux ailes opposées. La branche d'arrière est fixée à l'axe aa (fig. 6) du propulseur; la branche d'avant à une douille d qui entoure cet axe et peut au besoin tourner à frottement autour de lui. L'axe et

la douille reposent, l'un à l'arrière, l'autre à l'avant, sur des coussinets faisant partie d'un châssis CC qui peut glisser entre les deux étambots quand on veut remonter le propulseur. L'axe *aa* présente à son bout antérieur une saillie appelée té (*ff*), qui est rectiligne, et la douille *d* en présente un autre *gg*. Quand le propulseur est disposé pour la marche, c'est-à-dire quand les branches sont à angle droit, les deux té sont dans un même plan, et s'engagent dans une rainure pratiquée dans un manchon *mm* qui est fixé à clavettes à l'extrémité arrière de l'arbre AA de la machine. Cet arbre, en tournant, entraîne ainsi l'axe *aa* et la douille *d*, et par conséquent les deux branches du propulseur. Lorsqu'on veut remonter l'hélice, on fait tourner l'arbre AA, non pas au moyen de la machine à vapeur, mais au moyen d'un mécanisme spécial intérieur, mis en mouvement par un petit cabestan, jusqu'à ce que la branche d'avant ait pris la position verticale; et on la fixe dans cette position au moyen d'un verrou *vv*, qui peut être manœuvré du pont même, et qui traverse la douille *d*. On tire alors l'arbre AA vers l'avant d'une quantité suffisante pour dégager le té *gg*, sans dégager le té *ff*. On fait de nouveau tourner l'arbre AA; la branche d'avant, maintenue par le verrou *vv*, conserve sa position verticale; et la branche d'arrière vient s'appliquer contre la branche d'avant, comme le montre la figure. On tire alors l'arbre AA vers l'avant, de manière à dégager le té *ff*; le propulseur est alors complètement séparé de l'arbre AA; et en élevant le châssis CC, on fait monter l'hélice par l'orifice du puits jusque dans l'intérieur du navire. Une manœuvre inverse sert à remettre le propulseur en place lorsqu'on veut le faire fonctionner.

Pour pouvoir *embrayer* et *désembrayer* à volonté (Voy. EMBRAYAGE), on fait l'arbre AA de deux parties, terminées, en regard l'une de l'autre, par des plateaux que l'on peut réunir à volonté au moyen de boulons. Pour éviter que l'effort de transmission ne soit supporté par un seul boulon pendant l'embrayage ou le désembrayage, on les fait avancer ou reculer tous ensemble, en leur donnant la forme d'autant de vis dont les têtes sont dentées, et engrènent avec une même roue. Les moyens spéciaux d'embrayage sont souvent supprimés dans les navires qui ont un puits; le désembrayage s'opère en séparant l'axe du propulseur de l'arbre de la machine, et l'embrayage en les rapprochant, par des procédés analogues à ceux qui viennent d'être décrits pour l'hélice de M. Sollier.

VIII. Une des particularités les plus remarquables du propulseur hélicoïde, c'est qu'il ne pousse pas le navire suivant l'axe; il y a une déviation sensible, vers tribord ou vers babord, selon qu'on emploie une hélice dextrorsum ou sinistrorsum (hélice à droite, ou hélice à gauche); et l'action continue du gouvernail est nécessaire pour maintenir le mouvement dans le sens du longitudinal. Cet effet paraît dû à la différence de pression qu'éprouve un même élément de la surface hélicoïde, suivant qu'il est plongé à une profondeur plus ou moins grande. Si, par exemple, on considère l'instant où deux ailes opposées sont dans la position verticale, deux éléments correspondants de ces hélices feront des angles égaux de part et d'autre du plan vertical de symétrie du navire mais si la

pression qui s'exerce sur l'élément inférieur est plus grande que celle qui s'exerce sur l'élément supérieur, leurs composantes perpendiculaires à la quille seront inégales, et il en résultera une déviation latérale.

Le propulseur hélicoïde perd notablement de ses avantages quand le navire éprouve, soit par l'effet d'un vent contraire, soit par un remorquage, ou par toute autre cause, une résistance plus grande que celle pour laquelle son hélice a été disposée; car, ainsi que nous l'avons déjà dit, tout accroissement de résistance équivaut à une augmentation du coefficient K et par suite à une augmentation de recul. Il peut arriver, au contraire, suivant quelques auteurs, que le recul soit *négatif*, c'est-à-dire que l'hélice avance plus vite qu'elle ne le ferait dans un écrou solide avec une même vitesse de rotation; cette circonstance paradoxale aurait lieu notamment quand le navire marche en même temps à la vapeur et à la voile. Quelques auteurs ont nié le recul négatif; d'autres l'expliquent en admettant que le navire entraîne avec lui une masse liquide sur laquelle l'hélice agirait comme sur un liquide en repos. Ce point attend encore une explication satisfaisante, si toutefois le fait énoncé est vrai.

Voyez pour plus de détails les *propulseurs hélicoïdes*, par M. Bourgois, et le *Traité de l'hélice propulsive* de M. E. Paris.

Pour les machines à vapeur appliquées aux propulseurs hélicoïdes, voyez l'article NAVIGATION A VAPEUR.

PROUE, partie d'un navire située en avant du couple antérieur, et qui se termine par l'ÉTRAVE. Dans un sens plus général on donne le nom de proue à l'avant du navire, c'est-à-dire à l'extrémité dirigée du côté du point vers lequel on navigue (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

PUISSANCE ABSOLUE D'UNE CHUTE, produit du poids d'eau-écoulé pendant l'unité de temps par la différence de niveau des deux biefs (Voy. CHUTE D'EAU, RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES).

PUISSANCE VIVE, moitié du produit de la masse d'un point matériel par le carré de sa vitesse; ou, par extension, somme des produits analogues pour tous les points matériels faisant partie d'un même système. C'est M. Bélanger qui a adopté cette dénomination pour éviter l'équivoque résultant de ce que beaucoup d'auteurs appellent *force vive* le produit mv^2 de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse, tandis que d'autres donnent le même nom à

la moitié de ce produit, ou à $\frac{1}{2}mv^2$. Cette dernière quantité mérite un nom particulier parce que, d'une part, c'est elle qui entre ordinairement dans les calculs, et parce que, d'autre part, elle a une signification propre; car si l'on y remplace *m* par sa valeur $\frac{p}{g}$, *p* étant le poids du mobile, elle prend la forme

$$p \cdot \frac{v^2}{2g}$$

c'est-à-dire que la *puissance vive d'un mobile est le produit de son poids par la hauteur due à sa vitesse*.

La puissance vive totale d'un système, ou la somme des puissances vives de tous les points ma-

tériels qui le composent, s'écrit généralement

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2.$$

Cette expression se simplifie dans le mouvement de TRANSLATION et dans le mouvement de ROTATION (Voy. ces mots). Dans le premier cas, toutes les vitesses étant égales, $\frac{1}{2} v^2$ devient un facteur commun que l'on peut faire sortir du signe Σ (somme); et l'on obtient

$$\frac{1}{2} v^2 \Sigma m$$

ou, en désignant par M la somme Σm des masses du système,

$$\frac{1}{2} M v^2,$$

expression de la puissance vive d'un point matériel qui aurait pour masse M et pour vitesse v.

Dans le second cas, la vitesse de chaque point du système s'exprime en fonction de la distance de ce point à l'axe rotation et de la vitesse angulaire, par la formule

$$v = \omega r,$$

dans laquelle ω désigne la vitesse angulaire, et r la distance du point considéré à l'axe. L'expression de la puissance vive totale est donc

$$\Sigma \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

ou, en mettant $\frac{1}{2} \omega^2$ hors du signe Σ puisque c'est un facteur constant,

$$\frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2.$$

La somme $\Sigma m r^2$ des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point matériel du système par le carré de sa distance à l'axe, est une quantité qui ne dépend que de la matière et de la forme du corps, et nullement de son mouvement; on lui a donné le nom de MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot); et on la désigne souvent par la lettre I. L'expression de la puissance vive totale devient alors

$$\frac{1}{2} \omega^2 I.$$

On peut introduire la masse totale M du système dans cette expression en posant

$$I = MR^2,$$

R désignant une distance convenable, définie par cette équation, et à laquelle on a donné le nom de RAYON DE GYRATION (Voy. ce mot). On obtient alors pour la puissance vive totale

$$\frac{1}{2} \omega^2 MR^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} M (\omega R)^2.$$

Or, ωR est la vitesse du point qui serait situé à la distance R de l'axe; en la désignant par V il vient

$$\frac{1}{2} M V^2,$$

puissance vive d'un point matériel qui aurait pour masse M et qui serait situé à une distance de l'axe égale au rayon de gyration du corps.

L'unité de puissance vive est le kilogrammètre (Voy. TRAVAIL); car l'expression

$$p \cdot \frac{v^2}{2g}$$

est le produit d'un nombre p de kilogrammes par la hauteur $\frac{v^2}{2g}$, qui est un nombre de mètres. C'est

aussi ce qui résulte du PRINCIPE DE L'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot).

PUITS, excavations verticales, d'un diamètre plus ou moins considérable, que l'on creuse à une certaine distance de l'axe d'un TUNNEL (Voy. ce mot), qui, poussées jusqu'au niveau de la voie, puis reliées à la voie même par des galeries horizontales, servent d'abord à la construction du tunnel, et deviennent ensuite un moyen de ventilation.

On donne aussi le nom de puits à des excavations analogues qui servent à la ventilation et à l'exploitation des mines.

PUITS ARTÉSIENS ou Puits forés, trous cylindriques d'un petit diamètre, mais d'une grande profondeur, destinés à amener à la surface du sol des eaux jaillissantes, dites *eaux artésiennes*.

On sait qu'il existe à une certaine profondeur au-dessous du sol, dans la plupart des contrées, des couches sablonneuses ou perméables, comprises entre des couches imperméables, de granit, de craie, d'argile, ou de toute autre roche sans fissure. Si l'on met une couche perméable de ce genre en communication, par un canal artificiel, avec le niveau du sol, l'eau contenue dans cette couche s'élève dans le canal conformément au principe des VASES COMMUNIQUANTS (Voy. ce mot); et si le point du sol où le canal vient aboutir est inférieur aux points d'affleurement de la couche aquifère, l'eau, tendant à s'élever au niveau d'où elle est partie, forme une source jaillissante, qui peut être utilisée pour les besoins des populations. L'étude de la constitution géologique d'une contrée fournit les renseignements nécessaires pour le forage, et fait connaître avec une assez grande précision les chances de succès que peut avoir une entreprise de ce genre.

Les puits forés existent depuis un temps immémorial en Chine; et dès les temps les plus reculés on a creusé des puits de ce genre en Syrie, en Égypte, et dans les oasis de l'ancienne chaine libyque; quelques-uns de ces puits avaient 60 à 80 mètres de profondeur et fournissaient des quantités d'eau considérables. L'usage des puits forés a été introduit en Europe dès l'origine des temps modernes. Ils abondent dans l'ancienne province d'Artois, ce qui leur a fait donner le nom de puits artésiens. Le plus ancien de ces puits de l'Artois paraît être celui qui a été creusé en 1126 à Lillers (Pas-de-Calais), dans un couvent de chartreux, et qui n'a pas cessé de fournir de l'eau depuis son forage. Le premier puits artésien creusé à Paris remonte à François I^{er}. Depuis le commencement de ce siècle l'usage des puits artésiens s'est rapidement propagé en Europe; et les Français l'ont récemment transporté en Algérie, où il a excité l'admiration et la reconnaissance des indigènes. Les hommes qui ont le plus contribué, par leurs recherches et par leurs travaux, à perfectionner l'art du forage des puits, sont : MM. Héricart de Thury, Degoussé, Mulot, Triger et Kind. En France les deux plus beaux travaux de ce genre sont le puits de Grenelle, creusé par MM. Mulot et Degoussé (1841), et le puits de Passy creusé par M. Kind (1861). Le premier a 548^m de profondeur; il fournissait 900^{m-cub} d'eau par jour avant le forage du puits de Passy qui s'alimente à la même source, c'est-à-dire à la même couche perméable; depuis, il n'a pas cessé de fournir 777^{m-cub} en 24 heures.

Le puits de Passy, qui a rencontré l'eau à 576^m,7 de profondeur, mais qui a été poussé plus profondément encore, ne fournit pas moins de 20 000^m cub. par jour.

Les procédés employés pour le forage ont beaucoup varié, et se sont successivement perfectionnés en se simplifiant. A Grenelle l'instrument du forage était une sorte de tarière disposée en hélice, adaptée à l'extrémité d'une longue tige de fer, formée, bien entendu, de pièces assemblées successivement bout à bout, et à laquelle on imprimait un mouvement alternatif de rotation. A Passy, M. Kind a employé un trépan ou ciseau en acier, armé de 7 dents et pesant 1800 kilogrammes, suspendu à une longue tige de bois, formée de pièces de 10^m de long, successivement vissées l'une au bout de l'autre, et qui recevait un mouvement de va-et-vient dans le sens vertical. A cet effet la tige de bois était articulée à son extrémité avec une bielle liée elle-même au piston d'une machine à vapeur à cylindre vertical. La course verticale du trépan était ainsi égale à celle du piston; on faisait varier le point d'articulation à mesure que le trépan pénétrait dans le sol. Quand on avait foré ainsi pendant 6 heures, et fait descendre le trépan de 1^m à 1^m,50, on le retirait à l'aide d'un câble plat s'enroulant sur une bobine mue par un second cylindre à vapeur. On descendait alors au fond du puits un seau en tôle, percé au fond de deux orifices fermés par des clapets s'ouvrant de dehors en dedans. Le seau se remplissait ainsi des matières boueuses produites par le forage, et on le retirait. Ce travail de curage était poursuivi pendant 6 heures, après quoi l'on recommençait à forer, et ainsi de suite.

Ce qui ajoute nécessairement à la longueur de ces travaux déjà si longs par eux-mêmes, ce sont les accidents inévitables qui surviennent dans le cours de l'opération. Une tige se brise, et sa partie inférieure reste au fond du puits, d'où il faut l'extraire. Pour cela, il faut, à l'aide d'un outil de forme convenable, parvenir à saisir le bout de la tige rompue. Quelquefois c'est la tarière, ou bien la cuiller de curage qui restent au fond du puits. Il faut alors, avec d'autres instruments spéciaux, entailler, à cette profondeur, l'outil demeuré au fond, et le réduire en morceaux que l'on retire l'un après l'autre. Des accidents de ce genre ont interrompu pendant 14 mois le forage du puits de Grenelle, et pendant deux ans celui du puits de Passy.

A mesure que le forage avance, il faut procéder au *tubage*; c'est-à-dire qu'il faut revêtir la paroi naturelle du canal d'une paroi résistante qui empêche l'eau affluante de désagréger les terres ou les roches traversées et de troubler les eaux.

L'eau fournie par le puits de Grenelle a une température de 30°; celle du puits de Passy, ayant un plus long trajet à parcourir, a une température de 28°.

On cite comme un bel exemple de puits artésien, celui de Mondorff, dans le Luxembourg, qui a 730^m de profondeur.

(Voy. le *Traité sur les puits artésiens*, par M. F. Garnier.)

PUITS DE REMONTAGE, ouverture pratiquée à l'arrière des bâtiments à hélice, pour faire remonter le propulseur sur le pont, afin de le visiter ou de le réparer (Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES).

PYROXYLE (PROPRIÉTÉS BALISTIQUES DU), propriétés d'où dépendent les effets du pyroxyle dans les armes à feu. On sait que le coton-poudre, ou *pyroxyle* (de πυρ, feu, et de ξύλον, bois), s'obtient en maintenant le coton pendant 15 à 20 minutes dans un mélange d'acide nitrique et d'acide sulfurique concentrés, lavant à grande eau, et faisant sécher. — Cette substance jouit de propriétés explosives qui ont fait songer dès l'abord à l'employer dans les armes à feu. Ces propriétés ont été étudiées par M. Plobert, qui en a donné la théorie dans un appendice placé à la fin du tome II de son *Traité d'Artillerie*. Il a suivi pour cela une marche analogue à celle qui l'avait conduit aux formules relatives à l'inflammation de la poudre. (Voy. Poudre [Propriétés balistiques de la].)

Le coton se compose de brins ayant la forme d'un ruban de 0^{mm},016 à 0^{mm},043 de largeur sur 0^{mm},005 à 0^{mm},010 d'épaisseur, que la pression peut réduire à 0^{mm},002 ou 0^{mm},003. On peut regarder la section transversale de chaque ruban comme composée d'un rectangle terminé par deux demi-cercles (fig. 1)



Fig. 1.

dont l'aire totale équivaut à celle du rectangle. Chaque brin peut affecter des positions diverses; le plus souvent il est roulé sur sa largeur ou bien tordu en spirale. D'après ce qu'on vient de dire, on peut considérer un feu de coton comme composé de deux brins distincts, de même section, dont l'un cylindrique s'enflamme par sa surface latérale tout entière, et l'autre prismatique ne prend feu que par deux faces planes opposées.

Soient T le temps nécessaire à la combustion complète d'un cylindre dont le volume est V, et q₁ le volume du noyau de matière non brûlée au bout du temps t; si l'on admet que l'inflammation se propage d'une manière uniforme dans le sens normal, les volumes non brûlés seront proportionnels au carré du temps nécessaire pour leur combustion, et l'on aura

$$V : q_1 = T^2 : (T - t)^2,$$

d'où

$$q_1 = V \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2 = V \varphi^2, \quad [1]$$

en désignant par φ la fonction du temps $1 - \frac{t}{T}$. Si

Q₁ est le volume de la matière brûlée, on aura donc

$$Q_1 = V - q_1 = V (1 - \varphi^2). \quad [2]$$

Soient encore T' le temps nécessaire à la combustion totale d'un prisme rectangulaire, dans lequel l'ignition ne se propage que par deux faces opposées, V' son volume, q₂ le volume du noyau non brûlé au bout du temps t, et Q₂ le volume de la partie brûlée; les volumes non brûlés seront proportionnels au temps nécessaire à leur combustion, si l'on suppose toujours que l'inflammation se propage uniformément dans le sens normal; on aura donc

$$V' : q_2 = T'^2 : (T' - t)^2,$$

d'où

$$q_1 = V' \left(1 - \frac{t}{T'} \right) = V' \varphi' \quad [3]$$

et

$$Q_2 = V' (1 - \varphi'^2), \quad [4]$$

Si l'on applique ces formules au brin de coton-poudre, on aura, d'après ce qui a été dit ci-dessus, $V' = V$; l'expérience prouve d'ailleurs qu'on a $T' = T$; il en résulte $\varphi' = \varphi$. Par conséquent, le volume total de matière brûlée au bout du temps t sera

$$Q_1 + Q_2 = V [(1 - \varphi^2) + (1 - \varphi)]. \quad [5]$$

Considérons maintenant l'inflammation d'une charge cylindrique dont la section est S et la longueur L . Soit τ le temps qui s'écoule depuis le moment où le feu est mis en un point déterminé de la charge jusqu'à celui où il atteint une couche placée à la distance x de ce point. Si cette couche s'enflamme au bout du temps t , on aura $x = ut$, en appelant u la vitesse de propagation de la flamme; et la couche dont l'inflammation cessera au bout de ce même temps t , sera située à la distance $u (t - T)$. En vertu de la formule [5] le volume de gaz fourni au bout du temps t sera

$$S dx \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{t - \tau}{T} \right)^2 \right] \right\} + \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{t - \tau}{T} \right) \right] \right\}, \quad [6]$$

puisque sa combustion a commencé au bout du temps τ , et non à l'instant zéro. Remplaçant τ par sa valeur $\frac{x}{u}$, multipliant par la densité D que devrait avoir le pyroxyle pour occuper tout l'espace dans lequel les gaz se développent, et intégrant, on aura pour le poids P des gaz développés au bout du temps t

$$P = 2DS \int dx \int \left[\left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right)^2 + \left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right) \right] dx. \quad [7]$$

Le premier terme doit être intégré à partir de zéro; le second à partir de zéro encore, tant que t est moindre que T , et depuis $u (t - T)$ à partir de $t = T$; pour les deux termes les intégrales doivent être prises jusqu'à ut , ou jusqu'à L si ut surpassa L , ce qui donne lieu à quatre formules distinctes.

L'espace Q occupé par les gaz développés se compose de la capacité E de l'espace libre, s'il y en a un, et du volume de la charge, diminué du volume réellement occupé par la matière non encore brûlée. On a donc

$$Q = E + 2S \int dx \int \left[\left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right)^2 + \left(1 - \frac{t - \frac{x}{u}}{T} \right) \right] dx, \quad [8]$$

les intégrales étant prises entre les mêmes limites que pour P , et δ désignant la densité des brins de coton, c'est-à-dire à peu près 6D.

Par suite, la densité d des gaz développés sera exprimée par

$$d = \frac{P}{Q}. \quad [9]$$

Pour faire usage de ces formules, il faudrait

connaître la vitesse u . — Tout ce que l'expérience a appris, c'est que le coton s'enflamme vers 150°; qu'un brin du poids de 0^m,2 par mètre courant brûle avec une vitesse de 0^m,225; qu'un assemblage de trois de ces brins brûle avec une vitesse de 0^m,30; et que la vitesse de combustion s'élève à 0^m,50 pour un assemblage de vingt à vingt-cinq de ces mêmes brins. On ne connaît pas non plus la loi qui lie la densité des gaz développés et leur force élastique. Quelques accidents survenus dans des essais ont amené à croire que, pour une même densité, les gaz provenant du pyroxyle ont une force élastique triple de ceux qui proviennent de la poudre.

En admettant ce rapport et en faisant quelques hypothèses sur la vitesse u , on a pu néanmoins par une méthode analogue à celle qui est indiquée à l'article BALISTIQUE INTÉRIEURE, arriver à se faire une idée de la manière dont la tension varie dans les gaz issus du pyroxyle. Cette tension est non-seulement beaucoup plus grande dans les premiers instants que pour la poudre, mais elle atteint son maximum dans un temps beaucoup plus court. D'un autre côté, à mesure que la capacité dans laquelle les gaz se développent s'accroît par le déplacement du projectile, la tension diminue avec une rapidité beaucoup plus grande que cela n'a lieu pour la poudre. Pour rendre cette comparaison sensible, imaginons qu'on prenne pour abscisses les distances du projectile à sa position initiale, et pour ordonnées les tensions des gaz développés, et que l'on construise la courbe ayant ces coordonnées, on obtiendra pour le pyroxyle une courbe telle que OMB (fig. 2) et pour la poudre une courbe telle que

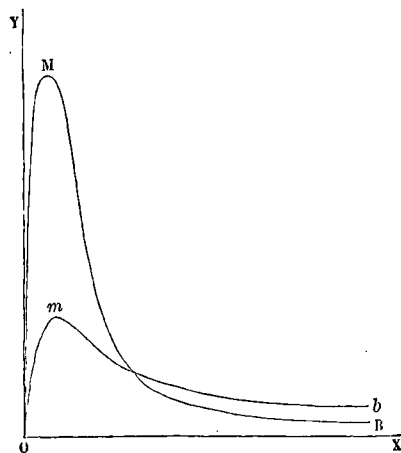


Fig. 2.

Omb. Le travail développé par les gaz provenant du pyroxyle sera donc beaucoup plus considérable, surtout dans les premiers instants, que le travail produit par les gaz résultant d'une même charge de poudre.

Ces considérations suffisent pour expliquer l'effet du pyroxyle dans les armes à feu. Dans les armes très-courtes, comme le pistolet de cavalerie, le rapport des poids de poudre et de pyroxyle capables de

produire les mêmes effets varie de 5,6 à 6,4; il descend à 3,25 dans le mousqueton; il est encore de 2,65 dans le fusil d'infanterie; il varie de 2 à 2,5 dans le canon de 12, pour des vitesses variables de 158^m à 497^m,3.

Mais cet avantage est malheureusement compensé par les effets destructeurs du pyroxyle sur l'arme même où il est employé, surtout quand l'âme est longue et le projectile lourd, ce qui s'explique par

la rapidité avec laquelle la tension des gaz développés atteint son maximum.

On a appliqué le pyroxyle à l'explosion des projectiles creux. Le rapport entre le poids de poudre et le poids de pyroxyle nécessaire pour déterminer la rupture du projectile a été trouvé de 3,20 pour les obus de 16 centimètres. Le nombre des éclats obtenus avec le pyroxyle a été de 21 en moyenne, tandis qu'il n'est que de 17 avec la poudre.

Q

QUADRATURE, évaluation de l'aire d'une figure plane (ou réduction de cette figure à un carré équivalent). Quel que soit le contour de la figure considérée, on peut toujours, par un procédé analogue à celui que l'on met en pratique dans l'ARRENTAGE (*Voy.* ce mot), la diviser en triangles rectangles ou en trapèzes rectangulaires dont un seul côté est curviligne. La figure 1 offre un exemple de

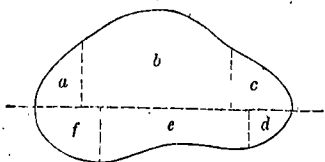


Fig. 1.

cette décomposition; les figures *a, c, d, f* sont des triangles rectangles à hypoténuse curviligne, et les figures *b* et *e* sont des trapèzes rectangulaires dont un seul côté est curviligne. Et comme le triangle rectangle n'est lui-même qu'un cas particulier du trapèze rectangulaire, on voit que le problème de la quadrature peut toujours se ramener en définitive à l'évaluation d'un trapèze rectangulaire de ce genre, ou de l'aire comprise entre une courbe quelconque

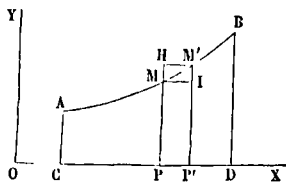


Fig. 2.

AB (fig. 2), un axe OX, et deux ordonnées AC et BD perpendiculaires à cet axe.

I. MÉTHODE ANALYTIQUE. Si l'ordonnée de la courbe est donnée en fonction de l'abscisse, ce calcul peut s'effectuer exactement, au moins dans un grand nombre de cas, d'après les considérations suivantes. Soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe AB, rapportée à l'axe OX et à un axe OY perpendiculaire au premier. Désignons par U l'aire AMPC comprise entre la courbe, l'axe des *x*, l'ordonnée AC correspondant à *x=a*, et une ordonnée quelconque MP correspondant à une abscisse quelconque *x*. L'aire représentée par U est

évidemment une fonction de *x*, car elle varie quand on fait varier l'abscisse OP, et prend une valeur déterminée quand *x* prend lui-même une valeur déterminée. Supposons que cette abscisse croisse d'une quantité $PP' = \Delta x$, l'ordonnée MP ou *y* deviendra M'P', et variera d'une quantité correspondante Δy ; l'aire U croîtra du trapèze mixtiligne MPP'M', que nous représenterons par ΔU . Ce trapèze est compris entre les deux rectangles PMIP' et PHM'P', déterminés par les ordonnées MP, M'P', l'axe des *x* et les droites MI et M'H parallèles à cet axe. On a donc

$$PMIP' < \Delta U < PHM'P',$$

ou

$$y \cdot \Delta x < \Delta U < (y + \Delta y) \Delta x,$$

d'où

$$y < \frac{\Delta U}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Si l'on fait tendre PP' ou Δx vers zéro, Δy tend également vers zéro. Le rapport $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, compris entre *y* et

y + Δy, tend donc lui-même vers *y*. Or, la limite de ce rapport, ou la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction U et l'accroissement de la variable *x*, n'est autre chose que la dérivée de U par rapport à *x*. En la désignant par U', on a donc

$$U' = y = f(x).$$

Pour obtenir la fonction U, il faut donc déterminer la fonction dont la dérivée est *f(x)*, c'est-à-dire la fonction primitive de *f(x)*. Soit F(x) cette fonction primitive, on aura

$$U = F(x) + C,$$

en désignant par C une constante arbitraire qui a pu disparaître en prenant la dérivée. On détermine cette constante en exprimant que l'aire considéré commence à l'ordonnée AC, ou qu'elle s'annule pour *x=a*; car cette condition donne

$$0 = F(a) + C, \text{ d'où } C = -F(a),$$

et, par suite,

$$U = F(x) - F(a). \quad [1]$$

Si, au lieu de terminer l'aire à une ordonnée quelconque MP, on la termine à une ordonnée déterminée BD correspondante à l'abscisse OD=*b*, il faut, dans la formule (1) ci-dessus, faire *x=b*, ce qui donne

$$U = F(b) - F(a), \quad [2]$$

c'est-à-dire que, pour obtenir l'aire comprise entre une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est *y=f(x)*, l'axe des *x* et les ordonnées répondant à deux abscisses déterminées *a* et *b*, il faut chercher la fonction dont *f(x)* est la dérivée; si F(x) est cette fonction, il reste à y remplacer *x*

successivement par les abscisses b et a et à retrancher le second résultat du premier.

Prenons pour exemple l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, dont l'équation est

$$xy = m^2, \text{ d'où } y = \frac{m^2}{x},$$

et proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre les ordonnées répondant aux abscisses a et b . La fonction primitive de $\frac{m^2}{x}$ est $m^2 \log' x$, en désignant par \log' un logarithme népérien. On aura donc, d'après la règle ci-dessus,

$$U = m^2 \log' b - m^2 \log' a = m^2 \log' \frac{b}{a}.$$

Ce calcul trouve fréquemment son application dans les machines à vapeur et dans les machines soufflantes.

Pour fixer les idées, on a supposé l'ordonnée y croissante; en reprenant les raisonnements ci-dessus, on verrait que le résultat subsiste encore quand l'ordonnée est décroissante. Il n'y a de différence que dans le sens des inégalités employées.

On a supposé l'ordonnée constamment positive; mais il pourrait arriver que la courbe passât au-dessous de l'axe des x , comme l'indique la figure 3.

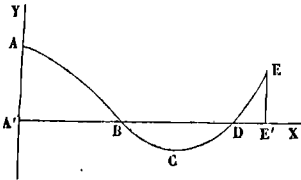


Fig. 3.

Dans ce cas, l'aire BCDB située au-dessous de l'axe devrait être regardée comme négative; car l'ordonnée étant négative dans cette région, les rectangles élémentaires $y\Delta x$ qui composent cette aire sont eux-mêmes négatifs.

On a supposé les coordonnées rectangulaires; si elles étaient obliques, et que les axes coordonnés fissent entre eux un angle θ , il faudrait aux rectangles élémentaires considérés substituer des parallélogrammes qui auraient pour expression $y\Delta x \sin \theta$; en sorte que la limite du rapport $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ serait alors $y \sin \theta$. On trouverait ainsi pour l'expression de l'aire demandée

$$U = \sin \theta [F(b) - F(a)].$$

C'est la formule [1] dont le second membre a été multiplié par le sinus de l'angle des axes. On trouverait pour l'aire d'une hyperbole quelconque rapportée à ses asymptotes

$$U = m^2 \sin \theta \log' \frac{b}{a},$$

m^2 désignant la puissance de l'hyperbole, θ l'angle des asymptotes, a et b les abscisses correspondantes aux ordonnées qui limitent l'aire.

Lorsqu'on ne sait pas trouver la fonction primitive de l'ordonnée $f(x)$, ce qui arrive fréquemment, ou lorsque, ce qui arrive plus fréquemment encore, l'ordonnée n'est pas donnée en fonction de l'abscisse, et que la courbe n'est connue que par des couples isolés de valeurs correspondantes de x et de y , il faut avoir recours à des méthodes approximatives.

On emploie trois méthodes principales qui supposent toutes que les ordonnées à l'aide desquelles on a déterminé la courbe sont équidistantes. Nous verrons plus loin comment il faudrait opérer si cette condition n'était pas remplie.

II. MÉTHODE DES TRAPÈZES. Soit ABCDEFGHL (fig. 4) une courbe déterminée par des ordonnées

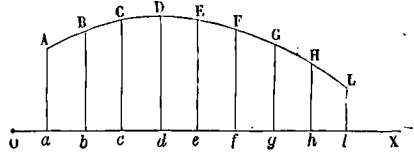


Fig. 4.

équidistantes Aa, Bb, Cc , etc.; et supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe OX et les ordonnées extrêmes Aa et Ll . Menons les cordes consécutives AB, BC, CD , etc.; et évaluons les trapèzes $AabB, BbcC, CcdD$, etc.; leur somme approchera sensiblement de l'aire demandée si ces ordonnées sont en nombre suffisant pour que les arcs de courbe qu'elles comprennent s'écartent peu de leurs cordes. Or, si l'on nomme $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ les ordonnées et δ la distance de deux ordonnées consécutives, on aura

$$\text{Trapèze } AabB = ab \cdot \frac{1}{2} (Aa + Bb) = \delta \cdot \frac{1}{2} (y_0 + y_1),$$

$$\text{Trapèze } BbcC = bc \cdot \frac{1}{2} (Bb + Cc) = \delta \cdot \frac{1}{2} (y_1 + y_2),$$

$$\text{Trapèze } CcdD = cd \cdot \frac{1}{2} (Cc + Dd) = \delta \cdot \frac{1}{2} (y_2 + y_3),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{Trapèze } HhlL = hl \cdot \frac{1}{2} (Hh + Ll) = \delta \cdot \frac{1}{2} (y_{n-1} + y_n).$$

En faisant la somme et désignant par U l'aire demandée, on aura donc sensiblement

$$U = \delta \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right),$$

c'est-à-dire que l'aire demandée a pour première valeur approchée le produit de la distance de deux ordonnées consécutives par la demi-somme des ordonnées extrêmes augmentée de la somme de toutes les ordonnées intermédiaires. Cette méthode donne un résultat un peu trop faible quand la courbe tourne sa cavité vers l'axe, comme dans la figure 3; elle donne, au contraire, un résultat un peu trop fort quand la courbe tourne sa convexité vers l'axe. Dans les courbes sinueuses, les erreurs tendent à se compenser.

III. MÉTHODE DE THOMAS SIMPSON. Cette méthode suppose que la distance al des ordonnées extrêmes est divisée en un nombre pair de parties égales par les ordonnées intermédiaires; en sorte que le nombre total des ordonnées est impair. On démontre, dans la Géométrie analytique, que par trois points donnés non en ligne droite on peut toujours faire passer une parabole dont l'axe soit parallèle à une direction donnée. Imaginons donc que l'arc de courbe ABC (fig. 5 et 6) soit l'arc d'une parabole dont l'axe serait parallèle à Bb . L'ordonnée Bb sera un diamètre de la courbe, et, si l'on mène au point B la tangente MN , elle sera parallèle à la corde AC . Il en résulte que le segment parabolique $ABCA$ sera

es $\frac{2}{3}$ du parallélogramme AMNC et aura, par conséquent, pour mesure

$$\frac{2}{3} \cdot Bi \cdot ac.$$

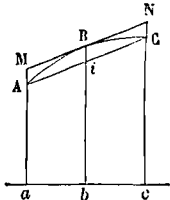


Fig. 5.

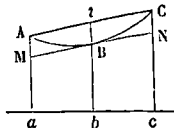


Fig. 6.

D'ailleurs le trapèze rectiligne AacC est mesuré par

$$bi \cdot ac;$$

le trapèze curviligne ABCca a pour valeur

$$ac \left(bi + \frac{2}{3} Bi \right),$$

ou

$$ac \left[bi + \frac{2}{3} (Bb - bi) \right],$$

ou

$$\frac{1}{3} ac (bi + 2Bb),$$

ou enfin

$$\frac{1}{3} ab (2bi + 4Bb);$$

mais

$$ac = 2\delta, \quad 2bi = y_0 + y_2 \quad \text{et} \quad Bb = y_1;$$

donc le trapèze

$$ABCca = \frac{1}{3} \delta (y_0 + 4y_1 + y_2); \quad [1]$$

La formule [1] subsisterait encore si la courbe tournait sa convexité vers l'axe, comme dans la figure 6; car on aurait dans ce cas

Trapèze rectiligne... AacC = ac.bi,

Segment parabolique ABCA = $\frac{2}{3} ac \cdot Bi$;

donc

$$\begin{aligned} \text{Trapèze curviligne ABCca} &= ac \left(bi - \frac{2}{3} Bi \right) \\ &= ac \left[bi - \frac{2}{3} (bi - Bb) \right] \\ &= \frac{1}{3} ac (bi + 2Bb), \end{aligned}$$

comme dans le cas de la figure 5; par suite, la formule définitive serait la même.

Cette formule peut encore être établie d'une autre manière. Si l'on rapporte la parabole ABC (fig. 5 ou 6) aux droites aA et ac, son équation est de la forme

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

et, par conséquent, on a

$$ABCca = \int_0^{2\delta} y dx = 2\alpha\delta + 2\beta\delta^2 + \frac{8}{3}\gamma\delta^3;$$

mais on a pour déterminer les coefficients α , β et γ les relations

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ y_1 &= \alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2, \\ y_2 &= \alpha + 2\beta\delta + 4\gamma\delta^2, \end{aligned}$$

qui expriment que les points A, B, C sont sur la courbe. En éliminant α , β et γ entre ces quatre équations, on retombe sur la formule [1].

Cela posé, on a (fig. 4) pour le trapèze curviligne AacC

$$\frac{1}{3} \delta (y_0 + 4y_1 + y_2);$$

on aurait de même pour le trapèze curviligne CceE

$$\frac{1}{3} \delta (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

pour le trapèze EegG

$$\frac{1}{3} \delta (y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\dots\dots\dots,$$

enfin pour le dernier GgLL

$$\frac{1}{3} \delta (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

En faisant la somme, on aura donc

$$U = \frac{1}{3} \delta (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

ou encore

$$U = \frac{1}{3} \delta \left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) \right],$$

c'est-à-dire que l'aire demandée a pour seconde valeur approchée le tiers du produit de la distance de deux ordonnées consécutives par la somme des ordonnées extrêmes, plus quatre fois la somme des ordonnées de rang pair, plus deux fois la somme des ordonnées intermédiaires de rang impair.

Si la courbe avait un point d'inflexion, elle ne pourrait plus être assimilée à une parabole dans le voisinage de ce point qu'autant qu'il correspondrait à une ordonnée de rang impair. Si cela n'avait pas lieu, il faudrait diviser l'aire en deux parties: l'une depuis la première ordonnée jusqu'à celle du point d'inflexion; l'autre depuis l'ordonnée du point d'inflexion jusqu'à la dernière, et évaluer ces deux parties indépendamment l'une de l'autre. On agirait d'une manière analogue s'il y avait plus d'un point d'inflexion; les ordonnées des points d'inflexion diviseraient l'aire totale en parties distinctes qu'on évaluerait séparément.

IV. MÉTHODE DE M. PONCELET. Cette méthode exige aussi que la distance des ordonnées extrêmes soit divisée en un nombre pair de parties égales, et que, par conséquent, le nombre total des ordonnées soit impair. Par les sommets B, D, F, etc. (fig. 7)

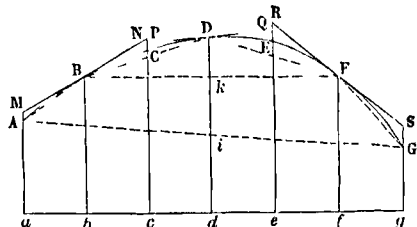


Fig. 7.

qui correspondent aux ordonnées de rang impair, menons les tangentes MN, PQ, RS, etc., terminées de part et d'autre à l'ordonnée de rang pair qui précède et qui suit. Soit P la somme des aires des trapèzes aMNC, cPQe, eRSg, ..., on aura

$$P = ac \cdot Bb + ce \cdot Dd + eg \cdot Ff \dots$$

ou

$P = 2\delta(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})$,
ou, en désignant par S_1 la somme des ordonnées de rang impair,

$$P = 2\delta S_1.$$

Joignons maintenant AB, BD, ..., DF, FG, de manière à sauter les sommets de rang impair, excepté les extrêmes; et soit p la somme des trapèzes aABb, bBdD, ..., dDFf, fFGg, nous aurons

$$p = \frac{1}{2}ab(Aa + Bb) + \frac{1}{2}bd(Bb + Dd) + \dots + \frac{1}{2}df(Dd + Ff) + \frac{1}{2}fg(Ff + Gg),$$

ou

$$p = \frac{1}{2}\delta(y_0 + y_1) + \delta(y_1 + y_3) + \dots + \delta(y_{n-3} + y_{n-1}) + \frac{1}{2}\delta(y_{n-1} + y_n),$$

ou

$$p = \delta \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_1) + y_1 + y_3 + \dots + y_{n-3} + y_{n-1} + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \right],$$

ou bien, en ajoutant et retranchant $\frac{1}{2}(y_1 + y_{n-1})$ dans la parenthèse,

$$p = \delta \left[2S_1 + \frac{1}{2}(y_0 + y_n) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{n-1}) \right].$$

Or, l'aire U est évidemment comprise entre P et p; on aura donc une valeur approchée de cette aire en posant

$$U = \frac{1}{2}(P + p),$$

ou

$$U = \delta \left[2S_1 + \frac{1}{4}(y_0 + y_n) - \frac{1}{4}(y_1 + y_{n-1}) \right],$$

c'est-à-dire que l'aire demandée a pour troisième valeur approchée le produit de la distance de deux ordonnées consécutives par le double de la somme des ordonnées de rang pair, augmenté du quart de la différence entre la somme des ordonnées extrêmes et la somme des ordonnées immédiatement voisines des extrêmes. On voit que dans cette expression il n'entre que les ordonnées de rang pair et les deux ordonnées extrêmes, en sorte qu'elle dispense de calculer ou de mesurer les ordonnées de rang impair. Avec un nombre d'ordonnées presque moitié moindre que celui qu'exige la méthode de Th. Simpson, elle donne un résultat aussi approché, et souvent même davantage.

La formule subsisterait encore si la courbe tournait sa convexité vers l'axe; la seule différence, c'est que P serait alors moindre que U et p plus grand que U.

On obtient aisément une limite supérieure de l'erreur commise. Cette erreur est, en effet, moindre que la demi-différence des aires P et p dont on a pris la moyenne pour valeur de U. En appelant λ la limite cherchée, on a donc

$$\lambda = \frac{1}{2}(P - p) = \frac{1}{4}\delta[(y_1 + y_{n-1}) - (y_0 + y_n)],$$

c'est-à-dire qu'on a une limite supérieure de l'erreur commise en prenant le quart du produit de la distance de deux ordonnées consécutives par la différence entre la somme des deux ordonnées immédiatement voisines des extrêmes, et la somme des extrêmes.

Il faudrait prendre la différence en sens contraire si la courbe tournait sa convexité vers l'axe.

La valeur de la limite λ peut s'obtenir sur la figure; car on a, en joignant AG et BF, qui coupent l'ordonnée du milieu en i et en k,

$$y_1 + y_{n-1} = 2dk \text{ et } y_0 + y_n = 2di;$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{4}\delta(dk - di) = \frac{1}{4}\delta.ki.$$

Cette limite peut ainsi être déterminée à l'avance, c'est-à-dire dès que les ordonnées sont tracées, et avant l'application de la formule; on peut donc juger, avant tout calcul, si le nombre des ordonnées est suffisant pour obtenir l'approximation que l'on désire. Il ne faudrait cependant pas s'exagérer cet avantage; la formule donne presque toujours une approximation beaucoup plus grande que la limite ainsi déterminée ne le fait croire.

V. Afin de donner un exemple de l'application de ces méthodes, supposons qu'on se propose d'évaluer l'aire comprise entre l'hyperbole dont l'équation est en coordonnées rectangulaires

$$xy = 0^m, 0840,$$

l'axe des x et les ordonnées qui répondent à

$$x = 0^m, 1 \text{ et } x = 0^m, 7.$$

Calculons les ordonnées correspondantes à $x = 0^m, 1 - 0^m, 2 - 0^m, 3 - 0^m, 4 - 0^m, 5 - 0^m, 6 - 0^m, 7$, nous trouverons

$$0^m, 84 - 0^m, 42 - 0^m, 28 - 0^m, 21 - 0^m, 168 - 0^m, 14 - 0^m, 12$$

pour

$y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6$;
nous aurons ainsi un nombre impair d'ordonnées équidistantes.

La méthode des trapèzes donnera

$$U = 0^m, 1 \left(0^m, 42 + 0^m, 42 + 0^m, 28 + 0^m, 21 \right) + 0^m, 168 + 0^m, 14 + 0^m, 06,$$

ou

$$U = 0^m, 1698.$$

La méthode de Th. Simpson donnera :

$$U = \frac{1}{3} \cdot 0^m, 1$$

$$\left[(0^m, 84 + 0^m, 12) + 4(0^m, 42 + 0^m, 21 + 0^m, 14) + 2(0^m, 28 + 0^m, 168) \right]$$

ou

$$U = 0^m, 1645.$$

Enfin la méthode de M. Poncelet donnera

$$U = 0^m, 1 \left[2(0^m, 42 + 0^m, 21 + 0^m, 14) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(0^m, 84 + 0^m, 12) - \frac{1}{4}(0^m, 42 + 0^m, 14) \right]$$

ou

$$U = 0^m, 1640.$$

La valeur véritable de l'aire demandée est

$$U = 0, 0840 \cdot \log 7 = 0^m, 163456 \dots$$

On voit que la méthode de Th. Simpson donne un résultat très-approché; et que celle de M. Poncelet, qui emploie deux ordonnées de moins, donne encore une approximation plus satisfaisante, puisque l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{300}$. La méthode des trapèzes est celle qui s'éloigne le plus de la vérité.

VI. Nous avons supposé jusqu'ici que la courbe était déterminée par des ordonnées équidistantes. Si elles ne l'étaient pas, on pourrait, après avoir tracé la courbe à l'aide des ordonnées connues et inégalement distantes, faire abstraction des ordon-

nées intermédiaires, et les remplacer par des ordonnées équidistantes dont on prendrait la valeur sur l'épure même. Il se présente, dans les applications, des circonstances où cette méthode, toute imparfaite qu'elle est, offre pourtant un secours précieux. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le jaugeage des rivières dont le cours n'est pas uniforme.

VII. Les diverses méthodes de quadrature qui viennent d'être exposées sont d'une application continuelle, non-seulement pour l'évaluation des aires, mais pour le calcul de toutes les intégrales définies. Si l'on a à calculer l'expression

$$U = \int_a^b f(x) dx,$$

on regardera $f(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe répondant à l'abscisse x ; et, quelle que soit l'origine de cette intégrale et la nature des quantités qu'elle renferme, le calcul reviendra à évaluer l'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$ l'axe des x , et les ordonnées qui répondent à $x = a$ et à $x = b$. Si l'on fait usage de la formule de Th. Simpson, on partagera l'intervalle $b - a$ en un nombre pair n de parties égales; et si δ est une des parties, on calculera les ordonnées correspondantes aux abscisses $a, a + \delta, a + 2\delta, a + 3\delta, \dots$ et ainsi de suite. On introduira ces ordonnées dans la formule de Th. Simpson, et on aura la valeur numérique de l'intégrale qu'il s'agissait de calculer, avec une approximation d'autant plus grande que le nombre n sera plus grand. En sorte que l'approximation est indéfinie.

Ces méthodes donnent avec 5 ordonnées, et souvent avec 3, un résultat suffisamment approché pour les besoins de la pratique; tandis que les procédés plus rigoureux de l'analyse sont le plus souvent inapplicables. On fait usage des méthodes approchées de quadrature dans une foule de questions de Mécanique, de Physique, de Probabilités, etc., etc.

QUADRATURE, position relative de deux corps célestes dont les longitudes diffèrent de 90° . Cette dénomination s'emploie principalement dans le cas où l'un des corps célestes considérés est le soleil. Ainsi la lune est en quadrature vers le premier et le dernier quartier (Voy. PHASES). C'est pourquoi ces deux phases portent le nom commun de QUADRATURES.

QUANTITÉ DE MOUVEMENT, produit de la masse d'un mobile par sa vitesse. Dans les calculs, ce produit représente un nombre de kilogrammes; car si dans le produit mv de la masse par la vitesse

on remplace le facteur m par la valeur $\frac{p}{g}$, p désignant le poids du mobile et g l'accélération due à la pesanteur dans le lieu où ce mobile se trouve, on obtient pour l'expression de la quantité de mouvement

$$\frac{p}{g} v \text{ ou } p \frac{v}{g}.$$

Or le rapport $\frac{v}{g}$, qui est celui de deux longueurs, est un nombre abstrait; la quantité de mouvement est donc le produit d'un nombre p de kilogrammes par un nombre abstrait; c'est-à-dire que c'est un nombre de kilogrammes.

Il existe entre les quantités de mouvement des différents points qui composent un système matériel et les impulsions des forces qui le sollicitent (Voy. IMPULSION) une relation importante, connue sous le nom de *Principe des quantités de mouvement*, et que nous allons établir.

I. On considère d'abord un point matériel sollicité par une force constante qui agit dans la direction de sa vitesse initiale. Le mouvement de ce point est un mouvement uniformément varié; et en appelant v_0 la vitesse initiale, v la vitesse au bout du temps t , et j l'accélération, on a (Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ)

$$v = v_0 + jt \text{ ou } v - v_0 = jt.$$

Mais l'accélération j a pour valeur le quotient $\frac{F}{m}$ de la force qui sollicite le mobile par la masse de ce mobile (Voy. MESURE DES FORCES); on peut donc écrire

$$v - v_0 = \frac{F}{m} \cdot t$$

ou, en multipliant par m ,

$$mv - mv_0 = Ft. \quad [1]$$

Or, mv est la quantité de mouvement finale du mobile, mv_0 est sa quantité de mouvement initiale; $mv - mv_0$ est donc l'accroissement de quantité de mouvement; d'un autre côté Ft est l'impulsion de la force constante; la relation [1] peut donc s'énoncer en disant que *l'accroissement de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force*. Le mot accroissement est pris ici dans un sens algébrique; si F était de sens contraire à la vitesse initiale, la vitesse diminuerait, et l'accroissement de quantité de mouvement serait négatif.

II. On considère ensuite un point matériel soumis à une force constante qui agit dans une direction différente de celle de la vitesse initiale. On sait qu'alors le mobile est animé d'un MOUVEMENT PARABOLIQUE (Voy. ce mot), et que la projection de ce mouvement sur un axe quelconque est un mouvement uniformément varié, dans lequel les vitesses initiale et finale sont les projections des vitesses initiale et finale qui ont lieu dans l'espace, et l'accélération est celle que produirait, sur un mobile de même masse, une force constante égale à la projection de celle qui agit réellement sur le mobile (Voy. PROJECTION DU MOUVEMENT). En appelant v_0 et v_x les projections, sur l'axe considéré, de la vitesse initiale v_0 et de la vitesse finale v ; m la masse du mobile, t la durée du mouvement que l'on considère, et F_x la projection de la force constante qui agit sur le mobile, on a donc

$$v_x = v_{0x} + \frac{F_x}{m} t,$$

d'où l'on tire en multipliant par m et passant le terme mv_{0x} dans le premier membre

$$mv_x - mv_{0x} = F_x t, \quad [2]$$

équation qui exprime que *l'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur l'axe que l'on considère, est égal à l'impulsion de la force constante projetée sur le même axe*. Cette relation ne diffère de la relation [1] qu'en ce qu'au lieu des vitesses réelles du mobile et de la force constante qui le sollicite, il n'y entre que les projections de ces vitesses et de cette force sur un même axe.

III. On considère alors un point matériel soumis à une force variable quelconque. On divise la durée

du mouvement en intervalles θ assez petits pour que, pendant la durée de chacun d'eux, la force puisse être considérée comme constante en intensité et en direction. Soit v_0 la vitesse initiale du mobile, et $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ou v les valeurs de la vitesse au bout des instants $\theta, 2\theta, 3\theta, \dots, n\theta$ ou t ; soit F_1 la valeur de la force pendant le premier instant θ, F_2 sa valeur pendant le second instant, F_3 sa valeur pendant le troisième instant, et ainsi de suite, enfin F_n sa valeur pendant le dernier instant θ . Pendant chacun de ces instants le mobile, étant regardé comme soumis à une force constante, a un mouvement parabolique, dont la projection sur un axe donne lieu à une relation analogue à la relation [2]. En appelant donc $v_{0x}, v_{1x}, v_{2x}, v_{3x}, \dots, v_{nx}$, ou $v_x, F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, \dots, F_{nx}$ les projections des vitesses et des forces ci-dessus nommées, sur ce même axe, et remarquant que la vitesse finale de chaque instant devient la vitesse initiale pour l'instant qui suit, on aura successivement :

$$\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= F_{1x} \theta, \\ mv_{2x} - mv_{1x} &= F_{2x} \theta, \\ mv_{3x} - mv_{2x} &= F_{3x} \theta, \\ \dots &\dots \dots \\ mv_x - mv_{n-1,x} &= F_{nx} \theta. \end{aligned}$$

Ajoutant toutes ces relations membre à membre, on voit que toutes les vitesses intermédiaires disparaissent, et qu'il reste dans le premier membre $mv_x - mv_{0x}$, c'est-à-dire l'accroissement total de la quantité de mouvement, projetée sur l'axe. Quant au second membre, il sera la somme des impulsions élémentaires $F_{0x}\theta, F_{1x}\theta, F_{2x}\theta, \dots$, de la force variable projetée sur le même axe; si donc on suppose θ infiniment petit, on pourra représenter cette

somme par $\int_0^t F_x dt$, et l'on aura

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt, \quad [3]$$

c'est-à-dire que l'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur un axe quelconque est égal à l'impulsion totale de la force variable projetée sur le même axe.

IV. Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que si l'on écrit trois équations analogues pour trois axes rectangulaires, c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int_0^t F_x dt, \\ mv_y - mv_{0y} &= \int_0^t F_y dt, \\ mv_z - mv_{0z} &= \int_0^t F_z dt; \end{aligned} \right\} [4]$$

ces équations feront connaître pour un instant quelconque les valeurs des projections rectangulaires v_x, v_y, v_z de la vitesse v du mobile, et par suite cette vitesse elle-même (Voy. COMPOSITION DES VITESSES).

Les équations [4] peuvent s'écrire

$$v_x = v_{0x} + \frac{1}{m} \int_0^t F_x dt = v_{0x} + f(t),$$

$$v_y = v_{0y} + \frac{1}{m} \int_0^t F_y dt = v_{0y} + \varphi(t),$$

$$v_z = v_{0z} + \frac{1}{m} \int_0^t F_z dt = v_{0z} + \psi(t),$$

les fonctions $f(t), \varphi(t), \psi(t)$ s'annulant avec t .

Mais si x, y, z désignent les coordonnées du mobile au bout du temps t , on a (Voy. PROJECTION DU MOUVEMENT)

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Multipliant donc les équations ci-dessus par dt et intégrant de nouveau, on aura en nommant x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales du mobile

$$x = x_0 + v_{0x}t + \int_0^t f(t) dt,$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \int_0^t \varphi(t) dt,$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \int_0^t \psi(t) dt,$$

c'est-à-dire que les équations [4] sont, au fond, les équations du mouvement du mobile considéré.

V. Considérons enfin un système quelconque de points matériels dont m, m', m'', \dots , désignent les masses, v_0, v'_0, v''_0, \dots , les vitesses initiales, v, v', v'', \dots , les vitesses finales; et soient F, F', F'', \dots , les résultantes des forces, tant extérieures que moléculaires, qui agissent sur chacun de ces points matériels. Ces points pouvant être ainsi considérés comme entièrement libres, on pourra écrire pour chacun d'eux une relation analogue à la relation [3]; on aura donc

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt,$$

$$m'v'_x - m'v'_{0x} = \int_0^t F'_x dt,$$

$$m''v''_x - m''v''_{0x} = \int_0^t F''_x dt,$$

et ainsi de suite. En les ajoutant terme à terme on pourra écrire

$$\Sigma mv_x - \Sigma mv_{0x} = \Sigma \int_0^t F_x dt = \int_0^t \Sigma F_x dt$$

ou, en appelant R la RÉSULTANTE DE TRANSLATION (V. ce mot),

$$\Sigma mv_x - \Sigma mv_{0x} = \int_0^t R_x dt. \quad [5]$$

Le terme Σmv_x est la somme des quantités de mouvement finales, projetées sur l'axe que l'on considère, Σmv_{0x} est la somme des quantités de mouvement initiales projetées sur cet axe; le premier membre de [5] exprime donc l'accroissement total des quantités de mouvement projetées sur ce même axe. Quant au second membre, c'est l'impulsion totale de la résultante de translation projetée sur l'axe; et l'on sait que cette résultante est indépendante des actions mutuelles que les molécules du système exercent les unes sur les autres; la relation [5] peut donc s'énoncer en disant que : dans

un système matériel quelconque, l'accroissement total des quantités de mouvement projetées sur un axe est égale à l'impulsion totale de la résultante de translation des forces extérieures qui agissent sur le système, projetée sur le même axe. C'est dans cet énoncé que consiste le *Principe général des quantités de mouvement*, que l'on pourrait appeler aussi le *Principe de l'effet de l'impulsion*, par analogie avec le *Principe de l'effet du travail* [Voy. EFFET DU TRAVAIL (Principe de l')].

Le principe général des quantités de mouvement est d'une application fréquente, surtout lorsqu'on a intérêt à faire disparaître du calcul les FORCES MUTUELLES (Voy. ce mot) du système. Il diffère surtout du principe de l'effet du travail en ce que celui-ci a lieu pour les vitesses et les forces telles qu'elles sont dans l'espace, tandis que le principe de l'effet de l'impulsion n'a lieu que pour les vitesses et les forces projetées sur un même axe.

(Voy. les *Leçons de Mécanique* de M. Bélanger.)

QUART DE NONANTE, procédé graphique employé dans la **CONSTRUCTION NAVALE** (Voy. ce mot) pour déterminer la courbure de certaines pièces. Soit OA (fig. 1) le *bouge* ou la *flèche* que doit pré-

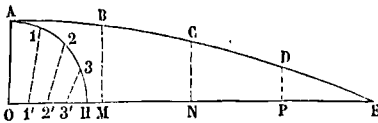


Fig. 1.

senter la courbe et OE sa longueur. Il s'agit de joindre le point A au point E par une courbe, dont la nature est arbitraire, mais qui est assujettie seulement à se rapprocher graduellement de OE d'après une loi régulière. Du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un quart de cercle AH, qu'on divise aux points 1, 2, 3 en quatre parties égales; on divise de même le rayon OH en quatre parties égales aux points 1', 2', 3', et l'on tire les droites 11', 22', 33'. Cela fait, on divise OE en quatre parties égales; et aux points de division M, N, P, on élève des perpendiculaires respectivement égales aux distances 11', 22', 33'. Par les extrémités B, C, D de ces perpendiculaires et par les points extrêmes A et E, on fait passer une courbe continue; c'est la courbe demandée.

C'est ainsi que se tracent la courbe du *bau*, la courbe des *vergues*, etc. On voit que ce procédé doit son nom à ce qu'il est fondé sur la division du quart de cercle, ou *nonante* degrés, en quatre parties égales. On le désigne aussi sous le nom de *trait de barrot*, parce qu'il sert, comme on vient de le dire, à déterminer la courbe du *bau*, également nommé *barrot*.

Si l'on rapporte la courbe aux axes OE et OA, il est aisé de voir qu'elle a pour équation

$$y = b \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2 \frac{x}{a} \sin \frac{\alpha}{2} + 1},$$

formule dans laquelle *a* désigne la longueur OE, et *b* la hauteur OA.

On donne le même nom à un autre tracé fondé également sur la division du quart de cercle en 4 parties égales. Soit OY (fig. 2) la *flèche* que doit avoir la courbe, et soit OD sa longueur. Élevez

en D les perpendiculaires DE et DF égales à OY. Du point F comme centre avec EF pour rayon, décrivez l'arc EX. Divisez DX en 4 parties égales, et par les points de division élevez les perpendiculaires

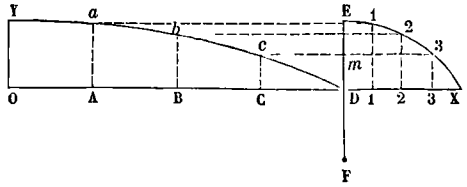


Fig. 2.

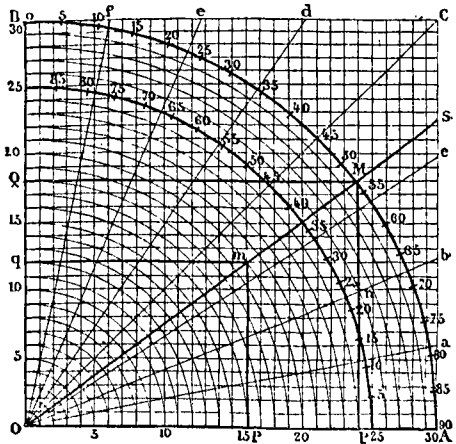
1.1, 2.2, 3.3. Divisez OD en 4 parties égales, et par les points de division élevez les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, terminées aux parallèles à OX menées par les points de division 1, 2, 3 de l'arc EX. Par les points *y, a, b, c, D* faites passer une courbe continue; ce sera la courbe demandée. On reconnaît aisément qu'en nommant R la distance OY et L la longueur OD, l'équation de la courbe, rapportée aux axes OX et OY est

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{y}{R} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right).$$

Si l'on n'avait besoin que d'une partie de la courbe, et que l'ordonnée extrême fût donnée, soit Cc par exemple, on porterait cette ordonnée en Dm, on mènerait m3 parallèle à OX et 3.3 parallèle à OY; et ce sont les distances OC et D3 qu'on diviserait chacune en 4 parties égales.

QUART DE ROND, sorte de moulure circulaire (Voy. MOULURES).

QUARTIER DE RÉDUCTION, instrument que les marins emploient pour résoudre divers problèmes de navigation. Il se compose d'un carré OACB, dont



les côtés ont été divisés en un même nombre de parties égales, 30 sur la figure ci-contre. On a joint les points de division par des droites parallèles aux côtés OA et OB, qui partagent le carré en un très-grand nombre de petits carrés égaux. C'est du nombre des divisions de OA et de OB que dépend le degré d'approximation que pourra donner l'instrument. Du point O, que l'on appelle le *centre de*

quartier, on a tracé des quarts de circonférences concentriques, qui passent par tous les points de division de OA et de OB. Le quadrant extérieur est divisé en degrés à partir du point B; la même division est répétée en sens contraire sur l'un des quadrants intérieurs. Les dimensions du quartier de réduction sont ordinairement assez grandes pour qu'on puisse sur ces deux quadrants apprécier les 5^e de degré, c'est-à-dire des arcs de 12'. Par le centre O on a mené les droites

Oa, Ob, Oc, Oc, Od, Oe, Of,

qui partagent l'angle droit en 8 parties égales, et répondent sur le quadrant extérieur aux arcs de 11° 15'—22° 30'—33° 45'—45°—56° 15'—67° 30'—78° 45' (Voy. RUMBS). Enfin, au centre O du quartier est fixée l'extrémité d'un fil de soie, ou d'un crin, que l'on peut tendre sur le quartier dans la direction d'un rayon quelconque. Le quartier est ordinairement collé sur fort carton ou sur bois pour lui donner plus de solidité, et le rendre plus facilement maniable.

Étant donnés une longueur a et un angle α , on peut, à l'aide du quartier de réduction, trouver promptement l'une quelconque des quantités

$$a \cos \alpha, a \sin \alpha, a \operatorname{tang} \alpha, \frac{a}{\cos \alpha}, \frac{a}{\sin \alpha}, \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha};$$

ou bien, l'une de ces quantités étant donnée, on peut trouver a connaissant α , ou α connaissant a .

I. Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver $a \cos \alpha$, connaissant a et α . On tendra le fil dans la direction OS faisant avec OA l'angle α ; on évaluera a à l'aide des divisions de OA, en faisant valoir à chacune, 1, 2, . . . 5, . . . 10 unités de longueur, suivant le besoin; supposons que a soit ainsi représenté par 20 divisions de OA; on déterminera le point m où le quadrant portant le n° 20 est rencontré par la direction du fil; puis, on comptera le nombre des divisions de OA comprises entre le pied p de la verticale du point m , et le point O. Dans l'exemple de la figure le nombre de ces divisions est 16; l'expression $a \cos \alpha$ est donc les $\frac{16}{20}$ de a .

II. Supposons qu'on veuille trouver $a \operatorname{tang} \alpha$, connaissant a et α ; on tendra le fil dans la direction OS faisant avec OA l'angle α ; on évaluera a à l'aide des divisions de OA; supposons que a soit représenté par 16 de ces divisions; on cherchera le point m où la 16^e verticale rencontre la direction OS; et l'on comptera le nombre des divisions comprises sur cette verticale entre le point m et la ligne OA; dans l'exemple de la figure, il y en a 12; l'expression $a \operatorname{tang} \alpha$ est donc les $\frac{12}{16}$ de a .

III. Supposons qu'on veuille trouver $\frac{a}{\sin \alpha}$, connaissant a et α . On tendra le fil sur la direction OS comme ci-dessus; on évaluera a à l'aide des divisions de OB; supposons que a soit représenté par 12 de ces divisions; on cherchera le point m où la 12^e horizontale rencontre OS; et l'on cherchera le numéro d'ordre du quadrant sur lequel se trouve le point m ; dans l'exemple de la figure il se trouve sur le 20^e quadrant; on en conclura que, a étant représenté par 12, la quantité $\frac{a}{\sin \alpha}$ est représentée par 20; ou que cette quantité est les $\frac{20}{12}$ de a .

IV. Supposons encore que l'on veuille trouver a connaissant l'expression $a \cos \alpha$ et l'angle α . On tendra le fil dans la direction OS comme précédemment; on évaluera $a \cos \alpha$ à l'aide des divisions de OA, supposons que cette quantité soit représentée par 16 divisions; on cherchera le point m où la 16^e verticale rencontre OS; et l'on prendra le numéro d'ordre du quadrant sur lequel se trouve le point m ; ici il se trouve sur le 20^e quadrant; on en conclura que, $a \cos \alpha$ étant représenté par 16, a est représenté par 20; ou que a est les $\frac{20}{16}$ de $a \cos \alpha$.

V. Supposons enfin qu'il s'agisse de trouver l'angle α connaissant a et $a \operatorname{tang} \alpha$. On évaluera a et $a \operatorname{tang} \alpha$ à l'aide des divisions de OA; supposons que a soit représenté par 16 divisions et $a \operatorname{tang} \alpha$ par 12 de ces divisions; on prendra la 16^e verticale, et l'on comptera sur cette verticale 12 divisions à partir de OA; ce qui déterminera un point m ; on tendra le fil sur Om; et on lira sur le quadrant intérieur à quelle division correspond le fil; dans l'exemple actuel on trouvera qu'il répond à 37^e environ; ce sera la valeur de α .

Ces exemples suffisent pour montrer comment on devra opérer dans les divers cas qui peuvent se présenter. La solution du problème n'est jamais qu'approchée; mais l'approximation, même assez grossière, que l'on obtient ainsi, est ordinairement suffisante dans les problèmes que l'on résout à l'aide du quartier de réduction.

VI. Mais l'usage principal de l'instrument consiste dans la résolution des problèmes des routes [Voy. ROUTES (problèmes des) et LOXODROME]. On suppose connu le point de départ; et l'on a à traiter six cas différents, dont on trouvera la solution exacte à l'article LOXODROME. Mais pour l'emploi du quartier de réduction il faut supposer que la différence en latitude des points de départ et d'arrivée est peu considérable; on peut alors, dans l'intégrale

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{\cos l},$$

remplacer le dénominateur variable $\cos l$ par le dénominateur constant

$$\cos \frac{1}{2} (l_0 + l_1),$$

ou $\cos \lambda$ en appelant λ la latitude moyenne; la valeur approchée de l'intégrale ci-dessus est alors

$$\frac{l_1 - l_0}{\cos \lambda};$$

et les formules [3] et [6] de l'article cité sont remplacées par celles-ci :

$$l_1 - l_0 = s \cos Z. \quad [1]$$

et

$$L_1 - L_0 = \operatorname{tang} Z. \frac{l_1 - l_0}{\cos \lambda} = \frac{s \sin Z}{\cos \lambda}. \quad [2]$$

1. On donne Z et s . — On tendra le fil sur l'azimut Z , compté à partir de B; soit OS cette direction; on évaluera s à l'aide des divisions de OA; supposons que s soit représenté par 30 divisions; on déterminera le point M où le 30^e quadrant rencontre OS, et l'on comptera le nombre des divisions comprises entre ce point et OA; ici on en trouvera 18; on aura ainsi la valeur de $l_1 - l_0$ exprimée en minutes, si s était exprimé en milles. On comptera également le nombre des divisions comprises entre

M et OA; ici on en trouvera 24; ce sera la valeur de $s \sin Z$. Cela fait, on prendra la moyenne λ entre l_0 et l_1 ; on tendra le fil sur cette latitude moyenne; soit Ob la direction correspondante; on cherchera le point n où cette direction rencontre la 24^e verticale; et l'on déterminera le numéro d'ordre du quadrant sur lequel se trouve le point n ; dans l'exemple, ce numéro d'ordre est 26; on en conclura que $L_1 - L_0$ est exprimé par 26; cette différence sera donnée en minutes si s est donné en milles. Plus explicitement, s étant donné en milles, on lui fera exprimer des minutes; $l_1 - l_0$ vaudra alors les $\frac{18}{30}$ de S ; et $L_1 - L_0$ en vaudra les

$$\frac{19 \frac{1}{2}}{30} \quad \text{ou} \quad \frac{39}{60}$$

2. On donne l_1 et L_1 . — On connaît dans ce cas $l_1 - l_0$, λ et $L_1 - L_0$. On tendra d'abord le fil sur la latitude moyenne λ (c'est-à-dire qu'on lui donnera la direction qui fait avec OA l'angle λ); soit Ob cette direction. On évaluera $L_1 - L_0$ à l'aide des divisions de OA; supposons que cette différence soit représentée par 26; on déterminera le point n où le fil est rencontré par le quadrant dont le numéro d'ordre est 26; et l'on comptera le nombre des divisions de OA comprises entre le point O et la verticale du point n ; on en trouvera ici 24; ce sera l'expression de $(L_1 - L_0) \cos \lambda$. On évaluera de même $l_1 - l_0$ à l'aide des divisions de OA; supposons que cette différence soit représentée par 18; il s'agira pour déterminer Z, de trouver l'angle qui a pour tangente $\frac{24}{18}$; pour cela,

on cherchera le point de rencontre de la 18^e horizontale avec la 24^e verticale; soit M le point de rencontre; on tendra le fil sur OM; et l'angle BOM sera la valeur cherchée de l'azimut Z. On déterminera le numéro d'ordre du quadrant qui contient le point M; dans l'exemple, c'est le 30^e; on en conclura $s = 30$; valeur qui sera donnée en milles, si l_1 et L_1 sont donnés en minutes.

3. On donne Z et l_1 . — On connaît dans ce cas $l_1 - l_0$ et λ . On déterminera s comme dans le problème précédent; et $L_1 - L_0$ comme dans le problème 1.

4. On donne s et l_1 . — On connaît alors $l_1 - l_0$ et λ ; on évaluera $l_1 - l_0$ et s à l'aide des parties de OA; supposons que $l_1 - l_0$ soit représenté par 18 divisions et s par 30 divisions; on cherchera le point où la 18^e horizontale rencontre le quadrant qui porte le n^o 30; soit M ce point; on tendra le fil sur OM; et l'angle MOB sera l'azimut Z; le nombre de divisions comprises entre le point M et OB donnera la différence en longitude; on trouvera ainsi 24 pour l'expression de cette différence. Les latitudes et longitudes sont toujours exprimées en minutes, s étant exprimé en milles.

Les deux autres cas où l'on donnerait soit Z et L_1 , soit s et L_1 , se rencontrent très-rarement et ne peuvent être traités avec le quartier de réduction que lorsqu'on y joint une échelle de latitudes croissantes construite d'après les principes exposés à l'article CARTES MARINES. Le dernier de ces problèmes ne peut même être résolu dans ce cas que par tâtonnement. Mais lorsqu'on veut avoir égard aux latitudes croissantes, il est préférable, au lieu de faire

usage du quartier de réduction, de recourir à l'emploi d'une CARTE MARINE (Voy. ce mot).

VII. Les marins ont adopté, dans l'emploi du quartier de réduction, certaines locutions qu'il est nécessaire de connaître pour entendre les ouvrages relatifs à la navigation :

Tendre le fil sur le rumb de vent, c'est tendre le fil de manière que sa direction fasse avec le côté OB, ou côté nord et sud, un angle MOB égal à celui que fait la route du navire avec le méridien.

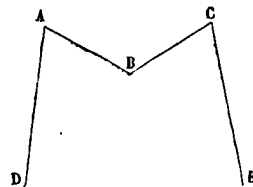
Tendre le fil sur la latitude moyenne, c'est tendre le fil de manière que sa direction fasse avec le côté OA, ou côté est et ouest, un angle égal à la moyenne arithmétique entre la latitude du point d'arrivée et la latitude du point de départ.

Faire cadrer le chemin nord et sud et le chemin est et ouest, c'est compter sur OB, à partir du point O, de O en Q par exemple, le nombre de divisions nécessaires pour représenter le chemin parcouru dans le sens nord et sud, et compter ensuite sur l'horizontale passant par le point Q, et à partir de ce point, de Q en M par exemple, le nombre de divisions représentant le chemin parcouru dans le sens est et ouest. On a particulièrement à faire cette opération dans la RÉDUCTION DES ROUTES (Voy. ce mot).

QUENOUILLETES, pièces qui sont le prolongement des JAMBETTES, et forment, dans un navire, la membrure du TABLEAU (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE).

QUÊTE, dénomination qui s'applique, dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot), à l'inclinaison d'une pièce droite par rapport à la verticale. On dit, par exemple, la *quête de l'étambot*; elle se mesure par la distance entre le point de la quille où commence la râblure de l'étambot, et la verticale menée par le point de cette même râblure qui correspond à la ligne de flottaison. L'arête antérieure du GOUVERNAIL (Voy. ce mot) participe à la quête de l'étambot.

QUEUE D'ARONDE, ouvrage de fortification passagère (Voy. FORTIFICATION) composé de deux faces



AB et BC formant TENAILLE, et de deux branches latérales AD et CE. L'angle en B doit être de 120^o au plus pour que chacune des deux faces puisse être efficacement défendue par la mousqueterie partant de l'autre face. Cet ouvrage s'emploie dans les mêmes circonstances que les LUNETTES (Voy. ce mot); et il offre les mêmes inconvénients. Il a de plus le défaut de présenter au rentrant B un angle mort; c'est-à-dire qu'en ce point une partie du fossé est à l'abri des feux partant de AB et de BC.

QUEUE D'HIRONDE, saillie en forme de trapèze ménagée à l'extrémité d'une pièce de charpente,

et destinée à pénétrer dans une cavité de même forme pratiquée dans une autre pièce avec laquelle on veut assembler la première (Voy. ASSEMBLAGES).

QUILLE, pièce longitudinale qui occupe la partie inférieure de la membrure d'un navire, et qui lui sert de base (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

R

RABATTEMENT, méthode fréquemment employée en Géométrie descriptive pour la résolution des problèmes. Elle consiste à faire tourner un plan autour de l'une de ses traces pour l'appliquer, ou, comme on dit, le *rabattre* sur le plan de projection correspondant. On exécute alors, dans le plan ainsi rabattu, les opérations géométriques dont on a besoin pour la résolution du problème qu'on a en vue, et qu'il eût été difficile d'exécuter si le plan avait conservé dans l'espace sa situation primitive. Un rabattement est presque toujours suivi d'une opération contraire, qui consiste à *relever* le plan rabattu, pour rendre aux points déterminés dans le rabattement la position véritable qu'ils doivent avoir dans l'espace.

I. Afin de fixer les idées, nous supposons que le rabattement se fasse sur le plan horizontal, en faisant par conséquent tourner le plan donné autour de sa trace horizontale. Le problème général à résoudre est celui-ci : *Étant données les projections m, m' (fig. 1) d'un point M situé dans un plan dont*

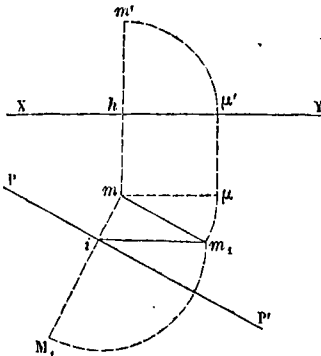


Fig. 1.

*on a la trace horizontale PP' , trouver la position que le point M prendra sur le plan horizontal quand on rabattra le plan considéré, en le faisant tourner autour de PP' . Dans la rotation autour de PP' , le point M décrira un arc de cercle dont le centre sera sur l'axe PP' que l'on désigne quelquefois sous le nom de *charnière*, et le plan de ce cercle sera perpendiculaire à PP' . Il en résulte que la trace horizontale du plan de ce cercle est la perpendiculaire miM_1 , abaissée du point m sur PP' . C'est donc sur cette perpendiculaire que le point M viendra se rabattre. Il s'agit de trouver à quelle distance du centre i de l'arc décrit. Or, si l'on imagine qu'on joigne le point M au point i , la ligne de jonction sera perpendiculaire à PP' , en vertu du théorème de Géométrie connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires* (V. notre *Géométrie théorique et**

pratique, n° 413). Dans le rabattement, cette ligne reste perpendiculaire à PP' et vient par conséquent se rabattre sur le prolongement de mi . Tout se réduit donc à trouver la longueur de cette droite qui va du point M au point i . Or, le triangle dont les trois sommets sont M, m, i est rectangle en i ; la ligne cherchée est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dans lequel les côtés de l'angle droit sont, d'une part mi , et de l'autre la distance Mi , laquelle, mesurant la hauteur du point M au-dessus du plan horizontal, est égale à $m'h$. On peut donc construire ce triangle; pour cela on élèvera en m une droite mm_1 , perpendiculaire à mi et égale à $m'h$; et l'on joindra im_1 , qui sera l'hypoténuse cherchée. Pour avoir le rabattement du point M, il restera donc à décrire du point i comme centre, avec im_1 pour rayon, un arc de cercle, qui rencontrera le prolongement de mi au point M_1 qu'il s'agissait d'obtenir.

Afin de faire comprendre, sur l'épure même, que mm_1 est égal à $m'h$, on décrit du point h le quart de cercle $m'\mu'$; on mène $\mu'\mu$ perpendiculaire à la ligne de terre et terminé à la rencontre de la parallèle à XY menée par le point m ; enfin on décrit du point m comme centre l'arc de cercle μm_1 terminé à la rencontre de la perpendiculaire mm_1 . L'égalité des lignes $m'h, \mu'h, \mu m$ et $m_1 m$ est ainsi rendue manifeste. — Cependant cette précaution n'est pas indispensable, à moins que l'épure ne soit destinée à des commençants.

On peut remarquer que dans le triangle $mi m_1$, l'angle en i mesure l'inclinaison du plan considéré par rapport au plan horizontal. Lorsque cette inclinaison est une fois connue, on peut construire le triangle $mi m_1$, en faisant au point i un angle mim_1 , égal à l'inclinaison donnée, et en élevant au point m sur mi la perpendiculaire mm_1 .

II. C'est précisément ce que l'on fait pour *relever un point M, donné dans le plan supposé rabattu*. On détermine, si elle n'est pas donnée à l'avance, l'inclinaison α du plan donné par rapport au plan horizontal. Du point M_1 on abaisse sur la trace horizontale PP' du plan donné une perpendiculaire M_1im . Au point i on fait avec mi un angle mim_1 , égal à α . Du point i comme centre, avec iM_1 pour rayon, on décrit un arc de cercle, qui vient rencontrer en un point m_1 le second côté de l'angle. Du point m_1 on abaisse sur im une perpendiculaire (ou une parallèle à PP'); le point m , pied de cette perpendiculaire, est la projection horizontale du point relevé. On abaisse alors du point m sur la ligne de terre une perpendiculaire sur laquelle on prend, à partir de XY, une longueur hm' égale à mm_1 ; le point m' ainsi obtenu est la projection verticale du point relevé.

III. On emploierait exactement les mêmes procédés pour rabattre un plan sur le plan vertical de projection, ainsi que pour relever les points ra-

battus. Mais le rabattement sur le plan horizontal est beaucoup plus fréquent.

IV. Pour donner un exemple de l'emploi du rabattement, nous traiterons ce problème : *Étant données les projections de trois points, non en ligne droite, trouver les projections du centre du cercle qui passe par ces trois points, et déterminer le rayon de ce cercle.* Soient a, a' — b, b' — c, c' (fig. 2) les projec-

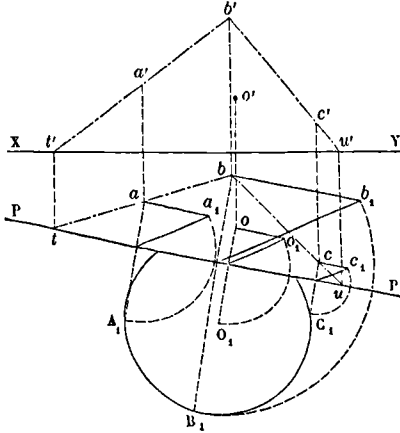


Fig. 2.

tions de trois points que nous désignerons par A, B, C. Par les points A et B menons une droite, dont les projections seront ab et $a'b'$; et déterminons la trace horizontale t de cette droite. Par les points B et C menons de même une droite, dont les projections seront bc et $b'c'$; et déterminons la trace horizontale u de cette seconde droite. Joignons les points t et u , nous aurons la trace horizontale PP' du plan qui contient les trois points A, B, C.

Cela fait, rabattons les trois points en A_1, B_1, C_1 comme il a été expliqué ci-dessus. Par ces points rabattus faisons passer un cercle; et soit O_1 son centre. Relevons les points O_1 comme nous l'avons expliqué plus haut; les points o et o' seront les projections du centre O du cercle passant par les trois points donnés. Quant au rayon de ce cercle, pour l'obtenir, il suffit de joindre $O_1 A_1$. Comme vérification, la distance des points o, o' et a, a' doit être égale à $O_1 A_1$ [Voy. DISTANCES [Problèmes sur les]]; et il doit en être de même de la distance de o, o' à b, b' , ou de o, o' à c, c' .

V. Lorsque le plan est donné par ses traces, et que le point où elles rencontrent la ligne de terre est dans le cadre de l'épure, on peut opérer le rabattement d'une autre manière, qu'il est bon de connaître, quoique l'on ait moins fréquemment l'occasion de l'appliquer. Soient $\alpha P, \alpha P'$ (fig. 3) les traces du plan donné; et soit m la projection horizontale d'un point M situé dans ce plan. Par le point m menons une droite quelconque ab , qui coupe la trace αP et la ligne de terre; ce sera la projection horizontale d'une droite menée dans le plan par le point M. Et, pour avoir sa trace verticale, il suffira d'élever en a une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la trace $\alpha P'$ en a' .

Supposons maintenant que l'on rabatte le plan

donné sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace αP . D'après ce qui a été dit plus haut, le point a, a' se rabattra sur la perpendiculaire abaissée du point a sur αP . Mais la distance

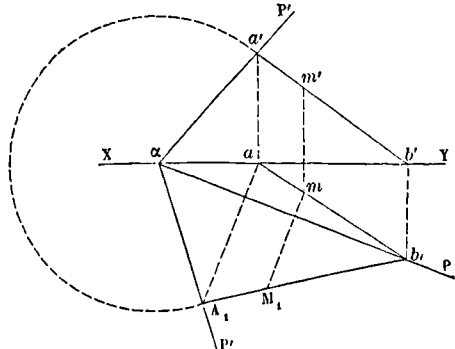


Fig. 3.

$a'a$ n'ayant pas varié, le point a, a' se rabattra à une distance du point α égale à $a'a$, c'est-à-dire sur la circonférence décrite du point α comme centre avec $\alpha a'$ pour rayon. Le point A_1 où cette circonférence est rencontrée par la perpendiculaire αA_1 , abaissée sur αP , sera donc le rabattement du point a, a' . Mais la trace b , située sur αP , ne change pas de place dans le rabattement; la droite qui a pour trace a' et b se rabattra donc suivant $A_1 b$. Enfin le point M devant se rabattre sur une perpendiculaire abaissée de m sur αP , son rabattement sera en M_1 , à la rencontre de cette perpendiculaire avec la droite $A_1 b$.

En rabattant, comme nous l'avons fait, un point a' de la trace verticale du plan donné, on obtient le rabattement $\alpha P'$ de cette trace. — Une fois ce rabattement obtenu, il est facile de relever un point quelconque M_1 du plan rabattu. Par le point M_1 on mène une droite $A_1 b$ qui coupe $\alpha P'$ et αP . Du point A_1 on abaisse sur αP une perpendiculaire que l'on prolonge jusqu'à la ligne de terre, en a ; et l'on élève au point a une verticale aa' ; le point a' ainsi obtenu, et le point b déjà déterminé, sont les traces d'une droite contenant le point M. Il est facile d'en déduire les projections ab et $a'b'$ de cette droite. Si l'on abaisse alors du point M_1 une perpendiculaire sur αP , le point m où elle rencontre ab est la projection horizontale du point relevé; et, en élevant en m une verticale, on obtient la projection verticale correspondante m' .

VI. Quand on a rabattu la trace verticale du plan, on peut encore s'y prendre d'une autre manière pour obtenir le rabattement d'un point quelconque du plan donné, ou pour relever un point quelconque du plan rabattu. Soient $\alpha P, \alpha P'$ (fig. 4) les traces du plan donné, et soit m la projection horizontale d'un point M qu'il s'agit de rabattre. Nous savons d'abord que le rabattement du point cherché sera sur la perpendiculaire mn abaissée de m sur αP . Concevons que par le point M on mène, dans le plan donné, une parallèle au plan vertical; la projection horizontale de cette droite sera une droite mt menée par le point m parallèlement à la ligne de terre; et le point t sera sa trace horizontale. Or, dans le rabattement, la droite dont il s'agit ne cessera pas d'être parallèle à

$\alpha P'$; elle se rabattra donc suivant une droite tu parallèle à $\alpha P'_1$. Le point M_1 , où cette parallèle rencontrera la perpendiculaire mn , sera le rabattement du point M .

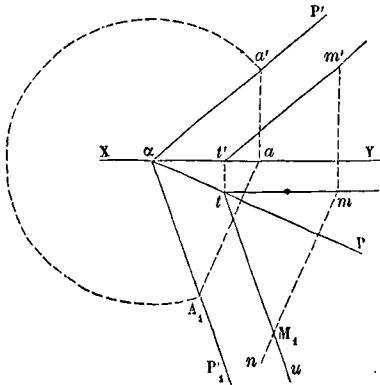


Fig. 4.

Inversement, s'il s'agit de relever un point M , du plan rabattu, on abaissera de ce point une perpendiculaire sur αP , et l'on mènera par ce même point M_1 une parallèle à αP_1 ; par le point t où cette parallèle rencontre αP , on mènera une parallèle à la ligne de terre; le point m où elle rencontrera la perpendiculaire $M_1 m$, sera la projection horizontale du point relevé. Si l'on veut obtenir la projection verticale correspondante, on abaissera du point t une perpendiculaire tt' sur la ligne de terre; par le point t' on mènera une parallèle à la trace verticale αQ , ce sera la projection verticale de la droite du plan projetée horizontalement en mt ; en élevant donc une verticale par le point m , on aura en m' la projection verticale du point relevé.

VII. Quand le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection, son rabattement sur l'un quelconque de ces plans s'opère avec la plus grande facilité. Soient, par exemple, αP et $\alpha P'$ (fig. 5) les

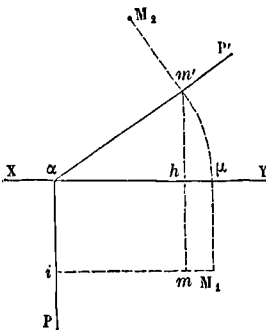


Fig. 5.

traces d'un plan perpendiculaire au plan vertical; et soient m, m' les projections d'un point M contenu dans ce plan.

Si l'on rabat le plan sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace αP , qui est perpendiculaire à la ligne de terre, le point M décrira un arc de cercle qui aura pour projection horizon-

tales la droite $m'i$ parallèle à la ligne de terre, et pour projection verticale l'arc $m'\mu$ décrit du point α pour centre. Le point M se rabattra donc sur im à une distance du point i égale à $\alpha\mu$; on obtiendra donc le rabattement M_1 , demandé en menant par le point μ une perpendiculaire à XY jusqu'à la rencontre de im prolongé.

Pour relever un point M_1 du plan rabattu, on mènerait les droites $M_1 i$ et $M_1 \mu$, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la ligne de terre; on décrirait du point α comme centre l'arc $\mu m'$; le point m' serait la projection verticale du point relevé; et, en abaissant de ce point une perpendiculaire sur la ligne de terre, on obtiendrait en m la projection horizontale correspondante.

Si l'on veut rabattre le plan donné sur le plan vertical, on remarquera que la droite qui joint le point M à la projection verticale m' est perpendiculaire à $\alpha P'$, et égale en longueur à mh . Elle se rabattra donc suivant une droite $m'M_2$ perpendiculaire à $\alpha P'$ et égale à mh .

Pour relever un point M_2 du plan rabattu, on abaisserait de ce point une perpendiculaire sur la trace verticale du plan; le pied m' de cette perpendiculaire serait la projection verticale du point relevé. Du point m' on abaisserait une perpendiculaire à la ligne de terre, et l'on prendrait sur cette perpendiculaire, à partir de XY , une longueur hm égale à $M_2 m'$; le point m ainsi obtenu serait la projection horizontale du point relevé.

Lorsqu'on a bien compris les principes qui viennent d'être exposés, les questions de rabattement ne peuvent plus offrir aucune difficulté sérieuse.

RÂBLURE, rainure longitudinale pratiquée sur les deux faces latérales de la quille d'un navire, vers le haut de ces faces, et qui est destinée à servir d'encastrement au bordage inférieur (*Voy. CONSTRUCTION NAVALE*).

RACCORDEMENT. Appliqué aux lignes, ce mot signifie la réunion de deux lignes bout à bout avec la condition qu'elles soient tangentes au point commun, que l'on nomme alors le *point de raccordement*. Le raccordement est fréquemment appliqué dans les arts : le tracé des MOULURES, de l'OVALE, de l'ANSE DE PANIER et des diverses courbes à plusieurs centres, des ARCADES, de la VOLUTE, etc., etc. (*Voy. les mots soulignés*), en offre de nombreux exemples.

Le principal problème de raccordement consiste à réunir deux lignes données par une troisième qui se raccorde avec chacune des deux premières. Ce problème peut être résolu d'une infinité de manières. Mais, dans les applications ordinaires, c'est le cercle qu'on emploie comme ligne auxiliaire pour raccorder les droites entre elles, les droites et les cercles, ou les cercles entre eux.

Soient en premier lieu deux droites données AB et CD (fig. 1) à raccorder entre elles. Il peut arriver que le rayon de l'arc de cercle qui doit les raccorder soit donné à l'avance; c'est ce qui arrive ordinairement dans le tracé des routes ou des chemins de fer. Dans ce cas, on mène une droite HO parallèle à l'une des droites données AB , à une distance de cette ligne égale au rayon donné; le point O , où elle rencontre la bissectrice IO de l'angle formé par les deux droites données, est le centre du cercle de raccordement. Du point O on abaisse sur les

droites données les perpendiculaires OB et OC; les pieds B et C de ces perpendiculaires sont les points de raccordement. Si du point O comme centre avec OB pour rayon on décrit un arc de cercle, il pas-

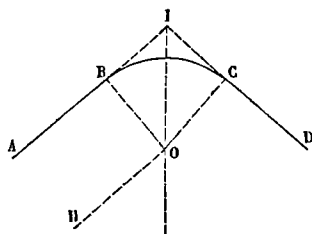


Fig. 1.

sera au point C, et il aura pour tangente la droite AB en B et la droite CD en C. Les deux droites données se trouveront donc raccordées par l'intermédiaire de l'arc BC.

Il peut arriver au contraire que l'un des points de raccordement soit donné, le point B par exemple. Dans ce cas, on élève en B sur AB la perpendiculaire BO terminée à la bissectrice IO; le rayon BO du cercle de raccordement se trouve ainsi déterminé; et la construction s'achève comme dans le premier cas.

Soient, en second lieu, une droite AB et un arc de cercle DE (fig. 2) à raccorder par un arc de

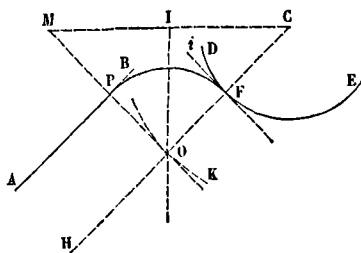


Fig. 2.

cercle. Si le rayon du cercle auxiliaire est donné, on mènera une parallèle HO à AB à une distance de cette droite égale au rayon du cercle auxiliaire. Du centre C de l'arc donné, avec un rayon égal à celui de cet arc augmenté du rayon du cercle auxiliaire, on décrira un arc de cercle OK. Le point O où cet arc rencontrera la droite HO sera le centre du cercle auxiliaire. On abaissera du point O sur AB la perpendiculaire OP; et l'on joindra OC qui rencontrera l'arc DE en un point F; les points P et F seront les points de raccordement. Du point O comme centre avec OP pour rayon on décrira un arc de cercle; il passera au point F, et sera tangent à la droite AF en P, et à l'arc FE en F.

Il peut arriver que le rayon du cercle auxiliaire ne soit pas donné, et que l'on donne à sa place soit le point de raccordement P, soit le point de raccordement F. Dans le premier cas, on opérera de la manière suivante. Par le point P on mènera la droite OM perpendiculaire à AB, et l'on prendra sur cette droite une longueur PM égale au rayon de l'arc DE; on joindra MC; et, sur le milieu de cette ligne de jonction on élèvera la perpendiculaire IO. Le point O où les perpendiculaires MO et IO se rencontre-

ront sera le centre du cercle recherché; on joindra OC et l'on aura le point de raccordement F. Si du point O comme centre avec OP pour rayon on décrit un arc de cercle, il passera par le point F, et sera tangent à la droite AB en P, et à l'arc DE en F.

Si c'est le point F qui est donné, on mènera en ce point la tangente Fi; le problème sera ramené à raccorder les deux droites AB et iF, avec la condition que le point F soit un des points de raccordement, problème qui a été résolu plus haut.

Soient, en troisième lieu, deux arcs de cercle AB et DE (fig. 3) à raccorder par un arc de cercle. Si

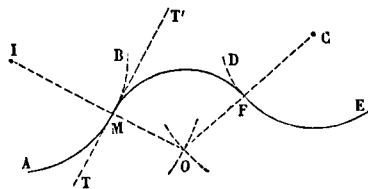


Fig. 3.

le rayon du cercle auxiliaire est donné, on décrira des points I et C comme centres, avec des rayons respectivement égaux à ceux des arcs AB et DE augmentés du rayon du cercle auxiliaire, deux arcs dont l'intersection O sera le centre du cercle demandé. On joindra OI et OC, ce qui fera connaître les points de raccordement M et F. Si du point O comme centre avec OM pour rayon on décrit un arc de cercle, il passera par le point F et sera tangent à l'arc AB en M et à l'arc DE en F. Si le rayon du cercle auxiliaire n'est pas donné, et que l'on donne l'un des points de raccordement, le point M par exemple, on mènera en ce point la tangente TT'; et le problème reviendra à raccorder la droite TT' et l'arc de cercle DE, avec la condition que le point M soit le point de raccordement de la droite, problème qui a été résolu plus haut.

Nous ne croyons pas nécessaire de donner les démonstrations élémentaires qui justifient ces diverses constructions.

On a à résoudre dans le tracé des routes un problème plus compliqué. Il s'agit de raccorder deux droites données AB et CD (fig. 4), avec la condi-

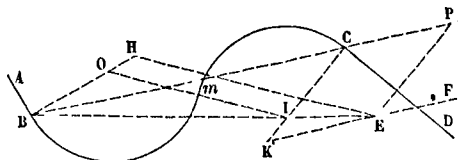


Fig. 4.

tion que les points B et C soient les deux points de raccordement. On effectue le raccordement au moyen de deux arcs de cercle de même rayon qui se raccordent entre eux. On opère pour cela de la manière suivante. On joint BC, que l'on prolonge indéfiniment. Aux points B et C on élève sur AB et sur CD les perpendiculaires BH et CK que l'on prend égales, mais d'ailleurs quelconques. Par le point K on mène KF parallèle à BC; et du point H comme centre, avec un rayon double de la perpendiculaire BH, on décrit un arc de cercle qui coupe KF en un point

E. On joint BE, qui coupe CK en un point I. On joint EH; et par le point I on mène IO parallèle à EH. Les points O et I sont les centres des deux arcs de cercles demandés. En effet, menons par le point E la droite EP parallèle à CK; la figure CKEP sera une parallélogramme, et l'on aura

$$EP = CK = BH.$$

Les triangles semblables BIC et BEP donneront la proportion

$$CI : EP = BI : BE. \quad [1]$$

Les triangles semblables BOI et BHE donnent à leur tour

$$BO : BH = BI : BE. \quad [2]$$

Ces deux proportions ayant les trois derniers termes égaux, il en résulte

$$CI = BO.$$

Mais les derniers triangles donnent aussi

$$OI : BO = HE : BH.$$

Or HE est par construction le double de BH, donc OI est le double de BO. Il en résulte que si du point O comme centre avec OB pour rayon on décrit un arc de cercle, il se raccordera avec AB en B, et coupera OI en un point *m*, qui sera le milieu de OI; si donc, du point I comme centre, avec Im pour rayon on décrit un second arc de cercle, il se raccordera avec le premier en *m*, et avec la droite CD en C.

On emploie aussi la parabole pour opérer le raccordement de deux droites; cette méthode trouve particulièrement son application dans le tracé des routes. Soient AB et CD (fig. 5) les deux droites

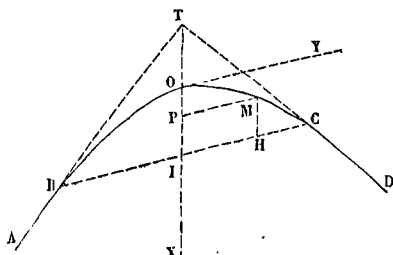


Fig. 5.

données; on les regardera comme tangentes en B et en C à une même parabole qu'il s'agit de tracer. D'après les propriétés connues de cette courbe, si l'on prolonge les deux tangentes jusqu'à leur point de rencontre T, et qu'on joigne ce point au milieu I de la corde BC, on aura un diamètre de la parabole; le milieu O de la distance IT sera un point de la courbe; et la droite OY menée par ce point parallèlement à la corde BC sera la tangente au point O. Si l'on rapporte la parabole au diamètre OI et à la tangente OY, son équation sera de la forme

$$y^2 = 2px$$

et si l'on désigne par *a* la distance OI et par *b* la distance IC, ces deux distances étant les coordonnées du point C, on aura

$$b^2 = 2pa$$

et par suite

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x, \text{ d'où } x = a \frac{y^2}{b^2}.$$

Si l'on se donne une ordonnée quelconque

$$IH = y,$$

cette équation fera connaître l'abscisse correspondante

$$OP = x;$$

et il sera facile de construire le point correspondant M. On obtiendra ainsi autant de points qu'on le voudra sur la parabole de raccordement, et on pourra tracer cette courbe. Le calcul des abscisses se fait très-rapidement: si l'on prend pour *y* par exemple les valeurs

$$0,1.b, -0,2.b, -0,3.b, -0,4.6 \dots 0,9.b$$

on en déduit immédiatement pour *x* les valeurs correspondantes

$$0,01.a, -0,04.a, -0,09.a, -0,16.a \dots 0,81.a.$$

Si l'on ne veut pas recourir au calcul, on peut obtenir sur le terrain même autant de points que l'on veut de la parabole de raccordement ou du moins des points qui en approchent autant qu'on le voudra. Soient AB et CD (fig. 6) les deux directions don-

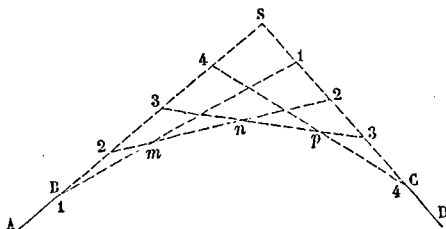


Fig. 6.

nées, S leur point de rencontre. On commence par diviser les distances SB et SC en un même nombre de parties égales; et l'on numérote les points de division de B vers S et de S vers C, comme l'indique la figure. On détermine ensuite les directions qui passent par les points portant le même numéro; et l'on marque sur le terrain: le point de rencontre des directions 1.1 et 2.2; celui des directions 2.2 et 3.3; celui des directions 3.3 et 4.4; et ainsi de suite. Les points *m*, *n*, *p*,... ainsi déterminés, appartiennent à la courbe demandée. Si le nombre des divisions de BS et de SC était infini, on sait en effet que le lieu des intersections successives des droites menées ainsi de manière à diviser proportionnellement ces deux distances, serait une parabole tangente en B et en C aux deux droites AB et CD. En divisant les distances CS et SC en un nombre suffisamment grand de parties égales, on aura des points *m*, *n*, *p* aussi voisins qu'on le voudra de la parabole de raccordement. — Cette méthode a toutefois un inconvénient grave; c'est que les points *m*, *n*, *p*, etc., sont donnés par l'intersection de deux directions sous un angle très-aigu, ce qui rend leur détermination douteuse. — La méthode précédente paraît donc préférable.

Le mot RACCORDEMENT peut s'appliquer aux lignes tracées dans l'espace. C'est ainsi que la trajectoire d'un mobile soumis à une force variable peut être considérée comme résultant du raccordement d'une infinité de petits arcs de paraboles successifs (Voy. TRAJECTOIRE).

Le même mot s'applique également aux surfaces. On dit que deux surfaces courbes se raccordent suivant une ligne commune, lorsqu'en chaque point de cette ligne elles ont le même plan tangent. C'est ainsi qu'un cylindre ou un cône, tangent à un ellipsoïde, se raccorde avec cet ellipsoïde, le long de l'ellipse de contact. Le raccordement des surfaces

est la conséquence du contact de ces surfaces suivant une ligne. — Ainsi encore un paraboloïde hyperbolique peut être tangent à une surface gauche en tous les points d'une génératrice commune (Voy. PARABOLOÏDE DE RACCORDEMENT).

RADIER, construction horizontale en maçonnerie qui forme le fond d'un sas d'écluse (Voy. ÉCLUSES À SAS). Les dimensions horizontales sont données par celles du sas. Pour obtenir son épaisseur, on le considère comme une pièce encastrée par les deux bouts (Voy. FLEXION PLANE). On suppose le sas vide, ce qui est le cas le plus défavorable, et le radier soumis à son poids et à la poussée de bas en haut qu'exercent sur lui les eaux situées au-dessous et provenant des infiltrations, poussée qui est proportionnelle à la distance de sa face inférieure au niveau des biefs ou des sources d'où proviennent les eaux infiltrées. On applique en conséquence la formule relative à ce cas, savoir :

$$\mu = \frac{1}{12} p'a^2, \quad [1]$$

dans laquelle μ est le moment fléchissant, p' l'excès de la poussée P sur le poids p du radier, par mètre de longueur, et a la longueur du sas. On substitue cette valeur de μ dans la formule de la résistance

$$R = \frac{v\mu}{I}, \quad [2]$$

dans laquelle on met pour R la valeur qui convient au mortier, savoir $3^k,7$ environ par centimètre carré (le 10^6 de la charge qui produirait l'ÉCRASEMENT) (Voy. ce mot), ce qui donne

$$R = \frac{vp'a^2}{12I}. \quad [3]$$

Mais si l désigne la largeur du radier, e son épaisseur inconnue, et Π le poids du mètre cube de maçonnerie, soit 2000^k en moyenne, π le poids du mètre cube d'eau ou 1000^k , et h la hauteur d'eau qui produit la poussée, on a

$$v = \frac{1}{2}e, \quad p = \Pi le, \quad P = \pi lh,$$

d'où

$$p' = l(\pi h - \Pi e)$$

et

$$I = \frac{1}{12} le^3$$

(Voy. MOMENTS D'INERTIE). Substituant ces valeurs dans la relation [3], on obtiendra

$$R = \frac{1}{2} \frac{e \cdot l(\pi h - \Pi e) \cdot a^2}{le^3} = \frac{(\pi h - \Pi e) a^2}{2e^2}, \quad [4]$$

d'où l'on tirera la valeur de e . L'équation est du second degré en e ; mais elle a toujours une racine négative qui devra être rejetée.

On donne aussi le nom de *radier* à une voûte renversée, d'une faible flèche, que l'on construit au fond d'une rivière entre deux piles d'un pont, pour défendre ce fond des affouillements causés par l'accroissement de vitesse que prend l'eau à son passage sous l'arche. On prolonge ordinairement ce radier en aval du pont jusque près du point où l'eau a repris sensiblement la vitesse qu'elle avait avant son passage entre les piles. On peut calculer l'épaisseur de ce genre de radier d'une manière analogue à la précédente, ou lui appliquer la théorie de LA POUSSEE DES VOUTES (Voy. ce mot).

RAIDEUR DES CORDES, résistance que les cordes

opposent à la flexion. Lorsqu'une corde, enroulée sur un cylindre, est sollicitée à l'une de ses extrémités par une force mouvante P, et à l'autre par une force résistante Q, on observe que du côté de la force Q, la corde prend une courbure d'un rayon plus grand que celui du cylindre; en sorte que la direction moyenne du brin correspondant à Q passe à une distance de l'axe plus grande que le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde, ainsi que l'indique la figure 1. Il en résulte que pour l'équilibre dynamique (Voy. ÉQUILIBRE), il faut que la force P soit plus grande que la force Q; si l'on prend, en effet, les moments des forces par rapport à l'axe du cylindre, ce qui fait disparaître le poids de celui-ci, et qu'on désigne par r le rayon du cylindre, par ρ celui de la corde, et par δ la distance AI entre le cylindre et le brin qui s'en écarte, on devra avoir

$$P(r + \rho) = Q(r + \delta + \rho),$$

d'où

$$P = Q + \frac{\delta}{r + \rho} \cdot Q.$$

La différence entre P et Q, exprimée comme on voit par

$$\frac{\delta}{r + \rho} \cdot Q,$$

est ce que l'on appelle la *raideur* de la corde. Pour une même corde, cette résistance à la flexion augmente à mesure que la force Q augmente, et que le rayon r du cylindre diminue; et, dans un grand nombre de cas, elle ne saurait être négligée.

1. Amontons est le premier qui ait fait des expériences sur la raideur des cordes. Il se servait pour cela d'un appareil qui est représenté de face et de profil sur la figure 2. A une poutre horizontale AA

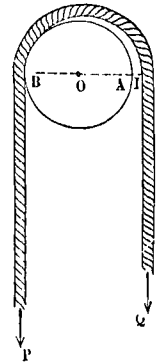


Fig. 1.

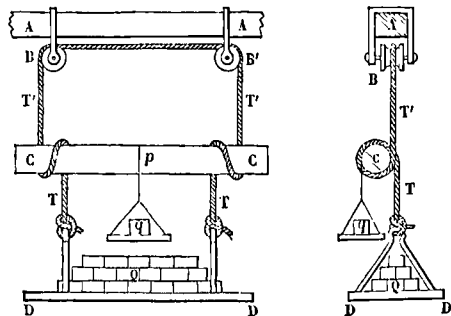


Fig. 2.

sont fixées deux poulies B, B', sur lesquelles s'enroule la corde mise en expérience. — Chaque brin, après s'être enroulé sur un cylindre horizontal mobile CC, va s'attacher à l'un des crochets qui supportent un plateau DD chargé d'un poids Q. Sur le cylindre mobile s'enroule une cordelette, à l'extrémité de laquelle est suspendu un plateau plus petit, que l'on peut charger d'un poids q . On augmente peu à peu ce poids q jusqu'à ce que, sous l'action de ce poids, et du poids p du cylindre mobile, ce

cyindre commence à tourner sur lui-même en enroulant la portion inférieure de chaque brin de la corde, et en déroulant par conséquent la portion supérieure de ces mêmes brins. On obtient ainsi la mesure de la raideur. En effet, le mouvement du cylindre mobile étant très-lent, on peut le regarder comme en équilibre sous l'action des forces p et q , des tensions T des deux brins inférieurs de la corde, des tensions T' des brins supérieurs, et enfin de la raideur R de chacun des brins inférieurs. Si l'on

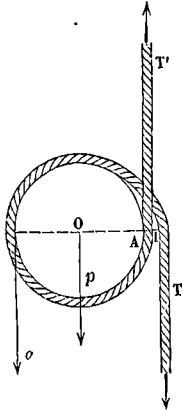


Fig. 3.

prend les moments par rapport à un axe parallèle à celui du cylindre, compris dans le même plan horizontal, et rencontrant la direction moyenne des brins supérieurs, afin de faire disparaître les tensions T' , on aura

$$p(r + \rho) + q \cdot 2(r + \rho) = 2T \cdot \delta,$$

d'où

$$\frac{1}{2}p + q = \frac{\delta}{r + \rho} T.$$

Or, d'après ce qui a été dit plus haut, le second membre est précisément l'expression de la raideur R de l'un des brins de la corde, on a donc

$$R = q + \frac{1}{2}p,$$

c'est-à-dire que, dans cette expérience, la raideur cherchée a pour valeur le poids additionnel q placé dans le petit plateau, augmenté de la moitié du poids du cylindre mobile.

II. Coulomb a repris les expériences d'Amontons en se servant du même appareil. Il a aussi mis en usage une méthode d'expérimentation différente. Sur deux madriers horizontaux, placés parallèlement à une petite distance l'un de l'autre, il plaçait transversalement un rouleau cylindrique, sur lequel s'enroulait la corde expérimentée, chargée de poids égaux à ses extrémités. Une cordelette flexible, dont on pouvait négliger la raideur, était fixée au même rouleau, s'y enroulait, et portait à son extrémité un petit plateau que l'on chargeait graduellement jusqu'à ce que le rouleau se mit à rouler lentement sur les madriers. Des expériences préalables avaient fait connaître la mesure de la résistance au roulement (Voy. ROULEMENT [Résistance au]); en la défalquant, on obtenait la résistance due à la raideur de la corde.

Par l'emploi de ces deux méthodes, Coulomb a été conduit à admettre que la raideur se compose de deux parties : l'une indépendante de la tension ou de la charge, et que Coulomb a nommée la *raideur naturelle*; l'autre, proportionnelle à la tension, et qu'il a nommée pour cette raison la *raideur proportionnelle*. Il a reconnu, en outre, que la raideur est en raison inverse du diamètre du rouleau; en sorte qu'en nommant D le diamètre du cylindre ou de la poulie sur laquelle la corde s'enroule, la raideur R peut être représentée par la formule

$$R = \frac{A + BQ}{D}, \quad [1]$$

Q désignant la charge ou la tension de la corde.

Les coefficients A et B , constants pour une même corde, varient en passant d'une corde à l'autre. M. Navier, en discutant les expériences de Coulomb, avait cru pouvoir admettre que, pour les cordes blanches, les coefficients A et B étaient proportionnels à une certaine puissance du diamètre de la corde, variant de 2 à 1 suivant que la corde était neuve ou usée; et que pour les cordes goudronnées ces coefficients étaient proportionnels au nombre des *fils de caret* dont se compose la corde.

D'après cela, il avait formé le tableau suivant :

	NOMBRE de fils n	DIAMÈTRE d de la corde.	A	B
Cordes blanches...	30	^m 0,0200	^k 0,2246	0,0097
	15	0,0144	0,0635	0,0055
	6	0,0088	0,0186	0,0024
Cordes goudronnées.	30	^m 0,0236	^k 0,3496	0,0125
	15	0,0168	0,1059	0,0060
	6	0,0096	0,0212	0,0026

Pour se servir de ce tableau, s'il s'agit d'une corde blanche, on prend les nombres qui se rapportent à la corde dont le diamètre d se rapproche le plus du diamètre d' ; et, en appelant R' la raideur cherchée, et R celle que donnerait la table, on pose

$$R' = R \left(\frac{d'}{d} \right)^\mu, \quad [3]$$

en prenant $\mu = 2$ pour les cordes neuves, $\mu = 1,5$ pour les cordes qui ont un certain temps de service, et $\mu = 1$ pour les cordes usées.

S'il s'agit d'une corde goudronnée d'un nombre n' de fils de caret, on prend les nombres de la table qui se rapportent à la valeur de n la plus voisine de n' , et l'on pose

$$R' = R \cdot \frac{n'}{n}. \quad [3]$$

III. M. Morin, en discutant, à son tour, les résultats des expériences de Coulomb, a été amené à penser qu'on représenterait mieux ces résultats en admettant que le coefficient A soit, dans tous les cas, proportionnel au nombre n des fils de caret, et que le coefficient B soit composé de deux termes, l'un proportionnel à n et l'autre au carré de n ; il pose, en conséquence, pour les cordes blanches

$$R = \frac{n [0,000297 + 0,000245n + 0,000363 \cdot Q]}{D} \quad [4]$$

et pour les cordes goudronnées :

$$R = \frac{n[0,0014575 + 0,000346n + 0,004181 \cdot Q]}{D} \quad [5]$$

Les formules [4] et [5], appliquées aux cordes en usage, depuis 6 fils de caret jusqu'à 60, lui ont permis de dresser le tableau suivant :

n	CORDES BLANCHES.			CORDES GOUDRONNÉES.		
	d	A	B	d	A	B
	m	k		m	k	
6	0,0089	0,010604	0,002178	0,0105	0,021201	0,002513
9	0,0110	0,022521	0,003267	0,0129	0,041143	0,003769
12	0,0127	0,038848	0,004356	0,0149	0,067314	0,005026
15	0,0141	0,059585	0,005445	0,0167	0,097712	0,006282
18	0,0155	0,084731	0,006534	0,0183	0,138339	0,007509
21	0,0168	0,114288	0,007623	0,0198	0,183193	0,008795
24	0,0179	0,148255	0,008712	0,0211	0,234276	0,010052
27	0,0190	0,186632	0,009801	0,0224	0,291586	0,011308
30	0,0200	0,229419	0,010890	0,0236	0,355125	0,012565
33	0,0210	0,276616	0,011979	0,0247	0,424891	0,013821
36	0,0220	0,328223	0,013068	0,0258	0,500886	0,015078
39	0,0228	0,384240	0,014157	0,0268	0,583108	0,016334
42	0,0237	0,444667	0,015246	0,0279	0,671559	0,017591
45	0,0246	0,509504	0,016335	0,0289	0,766237	0,018847
48	0,0254	0,578750	0,017424	0,0298	0,867144	0,020104
51	0,0261	0,652407	0,018513	0,0308	0,974278	0,021360
54	0,0268	0,730474	0,019602	1,0316	1,087641	0,022617
57	0,0276	0,812951	0,020691	1,0326	1,207231	0,023873
60	0,0283	0,899838	0,021780	1,0334	1,333050	0,025120

IV. Comme exemple de l'application de ces tableaux et de ces formules, supposons qu'une corde blanche de 36 fils de caret s'enroule sur une poulie de 0^m,25 de diamètre et supporte à l'une de ses extrémités un poids de 500^k; quelle sera la raideur?

Remarquons d'abord que, d'après le tableau ci-dessus, le diamètre de la corde sera 0^m,0220. Cela posé, servons-nous en premier lieu du tableau de M. Navier, et calculons d'abord la raideur comme pour une corde de 30 fils, ayant un diamètre de 0^m,0200; nous aurons

$$R = \frac{0^k,2246 + 0,0097 \cdot 500^k}{0,25} = 20^k,2984$$

et par suite, si la corde est neuve,

$$R' = R \left(\frac{0,022}{0,020} \right)^2 = 20^k,2984 \cdot 1,21 = 24^k,561.$$

Employons, en second lieu, le tableau de M. Morin, nous trouverons

$$R' = \frac{0^k,328223 + 0,013068 \cdot 500^k}{0,25} = 27^k,449.$$

En adoptant ce second nombre, on voit que la raideur serait environ le 18^e de la charge.

V. Il reste encore de l'incertitude pour les cordes usées et pour les cordes mouillées. Pour les premières, il faut s'en tenir à la règle donnée par M. Navier et rapportée plus haut. Pour les dernières, Coulomb a trouvé que la présence de l'eau n'augmentait pas la raideur des cordes de 6 fils et de 15 fils, mais qu'elle doublait la raideur naturelle A des cordes de 30 fils. De nouvelles expériences sur ce sujet seraient nécessaires.

Voyez le Mémoire de Coulomb sur les *Machines simples*, l'*Architecture hydraulique de Bélidor*, édition de M. Navier, et les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin.

RAILS, bandes de fer parallèles qui constituent, à proprement parler, les CHEMINS DE FER (Voy. ce

mot), et sur lesquelles roulent les roues de wagons et des locomotives. Malgré cette dénomination de chemins de fer, les premiers rails ont été construits en bois, puis en bois et fer, puis en fonte. On les fait aujourd'hui en fer laminé, c'est-à-dire étiré au LAMINOIR (Voy. ce mot). Leur section transversale s'est accrue successivement avec le poids des locomotives qu'ils avaient à supporter; et leur poids s'est accru lui-même en proportion; ce poids, qui n'était que de 13 à 17 kilogrammes par mètre courant, à l'origine des chemins de fer, est aujourd'hui de 30 à 38; on en emploie même qui pèsent jusqu'à 42 kilogrammes. Leur longueur s'est aussi accrue avec leur poids; on ne leur donnait dans le principe que 1^m,20; ils ont généralement aujourd'hui une longueur de 6^m. Ils reposent sur des traverses espacées de mètre en mètre, ou de 1^m,10 en 1^m,10.

1. La forme de la section transversale et le mode d'assemblage avec les traverses ont beaucoup varié; et aujourd'hui encore divers systèmes sont employés concurremment. L'un des plus usités est le rail à *champignon simple*, qui est représenté par la figure 1. Il s'adapte sur les traverses par l'intermé-

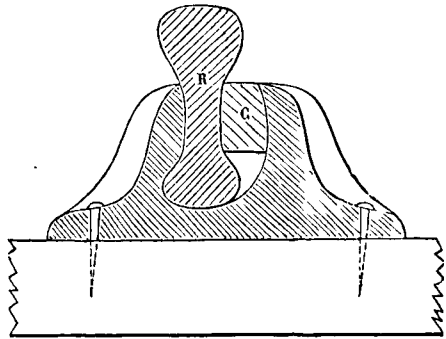


Fig. 1.

diare de pièces en fonte appelées *coussinets*. Le rail R s'engage dans le coussinet comme le montre la figure, et il y est serré par un coin en bois C introduit à force. Le coussinet lui-même est fixé à la traverse par des chevilles en fer. — On donne au rail une légère inclinaison de $\frac{1}{20}$ sur la verticale, de telle sorte que les têtes de deux rails parallèles formant une voie sont un peu plus éloignés que leurs pieds. — La forme de la section transversale étant symétrique, on peut retourner le rail de bout en bout, de manière que le bord intérieur usé soit mis à l'extérieur et le bord extérieur à l'intérieur.

On a employé, avec le même mode d'assemblage, un rail à *double champignon*, dont la section transversale est représentée par la figure 2. On avait espéré, en lui donnant cette forme, pouvoir retourner le rail de haut en bas, lorsque le haut serait usé par le frottement des roues. Mais l'expérience n'a pas confirmé cette espérance; le rail ainsi retourné est plus difficile à maintenir dans son coussinet, et, ce qui est plus grave, ne présente plus la même résistance.

Sur un grand nombre de chemins on fait usage du rail à *patin* ou rail *Vignolles*, représenté par la

figure 3. L'adoption de ce rail dispense de l'emploi des coussinets, attendu que le rail se fixe directement, à l'aide de chevilles en fer ou de *tire-fonds* à vis, sur des longuerines en bois, reposant elles-

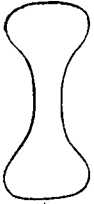


Fig. 2.

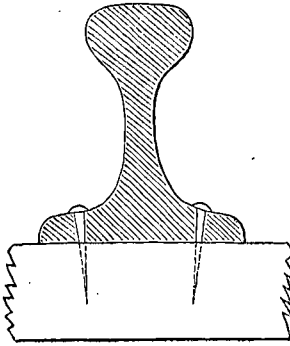


Fig. 3.

mêmes sur des traverses, qui, dans ce cas, peuvent être plus espacées. Ce système est fort employé en Amérique.

On emploie aussi deux autres formes, entièrement distinctes des précédentes : le *rail Brunel* (fig. 4) et

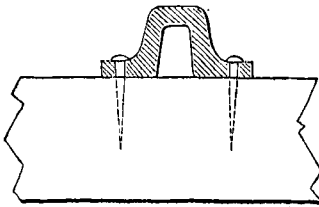


Fig. 4.

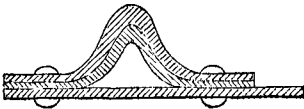


Fig. 5.

le *rail Barlow* (fig. 5). Le premier se pose, comme le rail à patin, sur des longuerines portées par des traverses. Ce système est employé en Angleterre, en Hollande, et sur plusieurs lignes secondaires de France. Cependant il offre plusieurs inconvénients, dont le principal consiste en ce que le métal paraît beaucoup plus fatigué dans la fabrication que celui des rails ordinaires. Le système des longuerines lui-même a été critiqué; on lui reproche de s'opposer à l'écoulement des eaux, et d'être en somme plus coûteux que le système des rails posés directement sur traverses. Quoi qu'il en soit, le rail Brunel a été abandonné sur plusieurs chemins allemands.

Le rail Barlow supprime à la fois les longuerines et les traverses; il s'adapte à une bande de fer rivée aux rails par deux boulons, et reposant directement sur le ballast; une autre bande de fer verticale, formant cornière avec la première, s'enfonce dans le ballast même. On reproche à ce rail de manquer d'élasticité, de s'écraser, d'être d'une fabrication

difficile, de se détruire par le relâchement des assemblages, etc. Cependant il a ses partisans, frappés surtout de sa simplicité et de l'économie qu'il présente par rapport aux autres systèmes.

Il existe beaucoup d'autres rails, qui se rapprochent plus ou moins de ceux que nous venons de décrire, et pour la description desquels nous renverrons aux ouvrages spéciaux, et particulièrement au *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet. Chaque système a ses partisans et ses détracteurs, ce qui semble indiquer que chacun a des qualités spéciales qui peuvent décider le choix de l'ingénieur dans des circonstances particulières.

II. Quel que soit le système adopté, le *gabarit* ou profil de la section transversale du rail n'est pas arbitraire; et il a fallu de longs essais et des tâtonnements multipliés pour fixer la forme la plus convenable au double point de vue de l'économie et de la résistance. La figure 6 représente, à une échelle

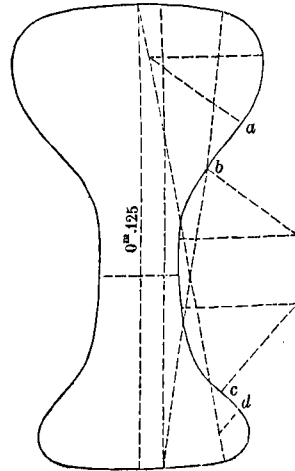


Fig. 6.

de moitié, le gabarit d'un rail à simple champignon, employé sur la ligne du Nord. Le contour se compose à peu près exclusivement d'arcs de cercles, dont le tracé est suffisamment indiqué sur la figure par des lignes ponctuées; les seules parties *ab* et *cd* sont droites.

Pour se rendre compte à l'avance du poids du rail et de la résistance qu'il pourra offrir, il faut recourir au calcul. Soit *OY* (fig. 7) l'axe de symétrie de la section, et soit *XX'* une perpendiculaire à *OY* menée par le point *O*. Pour obtenir d'abord l'aire de la section, on la divisera par des parallèles à *XX'*, équidistantes entre elles, en un nombre pair *n* de parties. Soient $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$ les longueurs des cordes ainsi menées (les deux extrêmes u_0 et u_n sont nulles), soit δ la distance de deux cordes consécutives, et Ω l'aire que l'on cherche, on aura par le théorème de Th. Simpson (*Voy. QUALRATURE*)

$$\Omega = \frac{\delta}{3} [4(u_1 + u_3 + u_5, \dots + u_{n-1}) + 2(u_2 + u_4 + u_6, \dots + u_{n-2})] \quad [1]$$

Pour obtenir, en second lieu, le centre de gravité *G* de la section, dont on aura besoin pour la

suite du calcul, on égalera le moment de l'aire totale, par rapport à l'axe XX' , à la somme des moments des parties dont elle se compose. Si h désigne la distance OG , u la longueur d'une quelconque

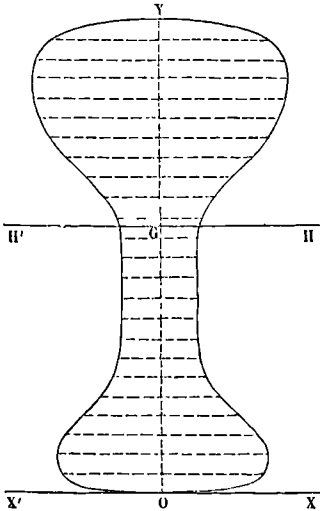


Fig. 7.

des cordes, et v sa distance à l'axe OX , la distance h serait donnée exactement par la formule

$$\Omega h = \int u dv, v,$$

l'intégrale étant prise depuis $v=0$ jusqu'à $v=OY$. En remplaçant cette intégrale par sa valeur approchée, exprimée au moyen de la formule de Th. Simpson, c'est-à-dire en prenant pour ordonnées les valeurs du produit uv ou $u.n'\delta$, n' étant le nombre des divisions de OY comprises entre la corde u et l'axe XX' , on trouvera

$$\Omega h = \frac{1}{3} \delta [4(u_1 \delta + u_3 \cdot 3\delta + u_5 \cdot 5\delta + \dots) + 2(u_2 \cdot 2\delta + u_4 \cdot 4\delta + u_6 \cdot 6\delta + \dots)]$$

ou

$$\Omega h = \frac{1}{3} \delta^2 [4(u_1 + 3u_3 + 5u_5 + \dots) + 2(2u_2 + 4u_4 + 6u_6 + \dots)]$$

On a besoin de connaître le moment d'inertie de la section par rapport à un axe horizontal HH' mené par le centre de gravité. Soit I ce moment d'inertie. Il sera plus commode pour le calcul de prendre d'abord le moment d'inertie I' par rapport à l'axe XX' , et d'en déduire ensuite le moment I . Or le moment I' serait donné exactement par la formule

$$I' = \int u dv, v^2,$$

l'intégrale étant prise entre les mêmes limites que ci-dessus. Si l'on remplace cette intégrale par sa valeur approchée, c'est-à-dire si l'on prend pour ordonnées les valeurs du produit uv^2 ou $u.n'^2\delta^2$, on trouvera par la formule de Simpson

$$I' = \frac{1}{3} \delta^3 [4(u_1 \delta^2 + u_3 \cdot 9\delta^2 + u_5 \cdot 25\delta^2 + \dots) + 2(u_2 \cdot 4\delta^2 + u_4 \cdot 16\delta^2 + u_6 \cdot 36\delta^2 + \dots)]$$

ou

$$I' = \frac{1}{3} \delta^3 [4(u_1 + 9u_3 + 25u_5 + \dots) + 2(4u_2 + 16u_4 + 36u_6 + \dots)], \quad [3]$$

formule qui donnera I' . On obtiendra ensuite I d'après une propriété connue des moments d'inertie, en écrivant

$$I' = I + \Omega h^2, \text{ d'où } I = I' - \Omega h^2. \quad [4]$$

Ces calculs préliminaires effectués, on sera en mesure d'apprécier la résistance du rail. Si l'on pouvait le regarder comme encastré aux points qui correspondent aux traverses, on aurait d'après les règles de la résistance des matériaux (*Voy. FLEXION PLANE*)

$$R = \frac{v}{1} \left(\frac{1}{8} Pa + \frac{1}{12} pa^2 \right), \quad [5]$$

R désignant la résistance, en kilogrammes par millimètre carré, de la fibre la plus fatiguée, ou la plus éloignée de l'axe HH' , v la distance de cette fibre à HH' , a la distance de deux traverses consécutives, p le poids du rail par mètre de longueur, et P la charge qu'il est exposé à porter en son milieu.

Si l'on pouvait, au contraire, considérer le rail comme composé de parties librement posées par leurs extrémités sur les traverses, on aurait

$$R = \frac{v}{1} \left(\frac{1}{4} Pa + \frac{1}{8} pa^2 \right). \quad [6]$$

Ces valeurs de R seront deux limites extrêmes entre lesquelles l'effort agissant sur le rail, par millimètre carré de section, sera nécessairement compris. On prendra pour p l'expression Πa , en désignant par Π le poids du mètre cube du métal employé, et pour P la moitié de la charge portée par l'essieu des roues motrices de la locomotive, augmentée du poids d'une de ces roues. Et, d'après la qualité du métal formant le rail, on verra si l'effort, par millimètre carré, exercé sur cette pièce ne dépasse pas la limite indiquée par l'expérience (*Voy. RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX, ALLONGEMENT*). Dans les épreuves que subissent les rails au moment de leur réception, on augmente graduellement la charge P depuis 12 tonnes jusqu'à 30 tonnes.

La détermination exacte de la figure la plus favorable à adopter pour la section du rail n'est pas seulement importante au point de vue de la résistance, elle l'est aussi au point de vue économique. Chaque centimètre carré ajouté à la section, représente par mètre courant de rail 100 centimètres cubes de fer, et par kilomètre 100 000 centimètres cubes, ou 100 décimètres cubes, qui représentent un poids de 779 kilogrammes environ. Sur une ligne de 200 lieues, ou de 800 kilomètres, composées de quatre files de rails, ce serait un poids total de 779^k.800.4, soit 2492800 kilogrammes, ou environ 2493 tonnes, qui, à raison de 240^f la tonne, représentent une valeur de 598320^f.

III. Une fois le gabarit de la section du rail arrêté, on l'exécute en tôle d'acier, et un exemplaire poinçonné de ce gabarit est remis à l'industriel chargé de la fabrication, tandis qu'un certain nombre d'autres exemplaires restent entre les mains des agents de la compagnie pour servir de vérification au moment de la réception des rails. Les cahiers des charges relatifs à la fourniture des rails entrent dans des détails minutieux sur tout ce qui touche à la fabrication de ces rails, aux épreuves

qu'ils doivent pouvoir supporter, et à leur réception définitive (Voy. sur ce sujet l'Aide-mémoire de M. Claudel).

Le rail à simple champignon, du chemin de fer du Nord, a 6^m de long, 0^m,125 de hauteur, 0^m,065 de largeur au champignon, 0^m,019 à la tige, 0^m,058 au pied. Le rail à patin de la même ligne, qui est un des mieux étudiés, et qui a été copié par plusieurs autres lignes, a 6^m de long, 0^m,062 de largeur au champignon, 0^m,017 à la tige, 0^m,107 au bas du patin; il pèse 37^{kg} par mètre courant; il repose sur 7 traverses, espacées de mètre en mètre.

Le rail à simple champignon du chemin de Mulhouse a 130 millimètres de haut, 65 à la tête du champignon, 20 à la tige. Le rail à patin sur divers chemins prussiens a de 130 à 140 millimètres de haut, avec 14 millimètres à la tige; tandis qu'en Bavière on ne lui donne que de 100 à 110 millimètres de haut, avec une largeur de 20 millimètres à la tige. (Voyez, pour plus de détails, le *Traité élémentaire* de M. Perdonnet, déjà cité.)

RAMPE, se dit de tout chemin incliné à l'horizon. Dans les routes ordinaires cette inclinaison ne dépasse pas 5 centimètres par mètre. Sur les chemins de fer les rampes sont nécessairement beaucoup moindres; elles n'excèdent pas 10 à 12 millimètres par mètre dans les pays de plaine, et 20 à 25 dans les pays de montagnes. Dans la fortification, au contraire, on rencontre des rampes beaucoup plus fortes, à l'usage de l'infanterie. Ainsi les rampes qui conduisent du fond du fossé au chemin couvert peuvent être de 15 à 20 centimètres par mètre.

RAPPORTEUR, instrument qui sert à mesurer les angles sur le papier. Il se compose de deux demi-cercles concentriques, ayant un même diamètre AB, et qui sont divisés en degrés, l'un à partir de la droite, l'autre à partir de la gauche. Cet instrument se fait ordinairement en cuivre, et est disposé comme l'indique la figure 1. Au centre

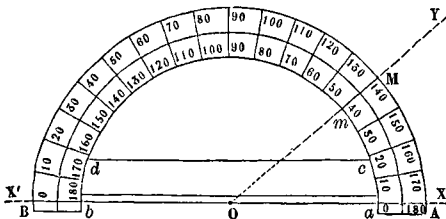


Fig. 1.

commun O des deux demi-circonférences est une encoche qui permet de faire coïncider le centre avec un point donné sur le papier. Le diamètre AB se nomme la *ligne de foi* de l'instrument.

Pour mesurer avec cet instrument un angle YOX, on le place de manière que le centre O soit au sommet et que la ligne de foi coïncide avec l'un des côtés OX; l'autre côté OY vient alors rencontrer le limbe intérieur en un point m; et il ne reste qu'à lire le nombre de degrés compris dans l'arc am.

Pour faire en un point donné O d'une droite XX' un angle dont la mesure est donnée, on place le centre du rapporteur au point donné O, et l'on fait

coïncider la ligne de foi avec la droite donnée XX'; on marque sur le limbe intérieur un point m tel que l'arc am contienne le nombre de degrés donnés; il ne reste plus qu'à tirer Om. On se servirait du limbe extérieur si l'angle devait avoir pour côté OX'.

Dans ces deux problèmes on évalue à l'œil les fractions de degré.

On peut avec le rapporteur élever en un point d'une droite une perpendiculaire, puisque cela revient à faire en ce point un angle de 90°.

On fait des rapporteurs en corne dans lesquels la partie comprise entre cd et le cercle intérieur, au lieu d'être évidée, est pleine; ces instruments ont l'inconvénient de se déformer facilement. D'un autre côté, il faut user avec ménagement des rapporteurs en cuivre, parce qu'ils sont exposés à salir le papier.

Pour vérifier un rapporteur, il faut d'abord s'assurer, avec un compas à pointes sèches (Voy. COMPAS), que le point indiqué comme le centre est bien à égale distance de tous les points de chaque circonférence. Il faut ensuite vérifier la graduation; pour cela on trace sur le papier, à l'aide du rapporteur, un angle d'un nombre exact de degrés, 30 par exemple; les côtés de l'angle passant alors l'un par le zéro de l'un des deux limbes, et l'autre par la division 30. On fait alors tourner le rapporteur en maintenant son centre au sommet de l'angle, de manière que le côté qui passait par le zéro vienne passer par la division 1; l'autre côté devra passer par la division 31. On fait tourner de nouveau le rapporteur de manière que le premier côté passe par la division 2; le second devra passer par la division 32; et ainsi de suite. En répétant cette opération pour divers angles et pour chaque limbe, on s'assurera que la graduation est exacte.

On donne quelquefois au rapporteur la forme d'un rectangle dont la base est double de la hauteur; les divisions marquées sur ses côtés, et dont la direction converge vers le milieu O (fig. 2) de l'un d'eux, correspondent aux divisions d'une cir-

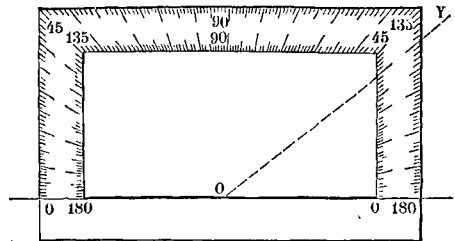


Fig. 2.

conférence qui serait décrite du point O comme centre. Le principal avantage d'un rapporteur de cette forme, c'est qu'il peut servir en même temps d'équerre. On le construit plein ou évidé à l'intérieur selon qu'il est en corne ou en cuivre.

On fait des rapporteurs qui, au lieu de n'embrasser qu'une demi-circonférence, embrassent une circonférence entière, et sont munis d'un **VERNIER** (Voy. ce mot); ce perfectionnement, qui complique le maniement du rapporteur, ne rend pas en réalité cet instrument beaucoup plus précis.

RATEAU, portion de roue dentée qu'on emploie fréquemment dans les mécanismes d'horlogerie,

particulièrement dans la sonnerie et dans les cadratures d'équation (*Voy. MONTRES À RÉPÉTITION, HORLOGES À ÉQUATION*).

RAVELIN, nom donné autrefois à la DEMI-LUNE parce qu'elle est placée sur la partie basse du terrain, comparativement aux bastions.

RAYON DE GYRATION, ou *bras de l'inertie*, distance à laquelle il faudrait concentrer la masse d'un corps animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, pour que son moment d'inertie par rapport à cet axe fût le même. Il résulte de cette définition qu'en nommant I le moment d'inertie du corps, M sa masse, et R son rayon de gyration, on a toujours

$$MR^2 = I, \text{ d'où } R^2 = \frac{I}{M},$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration est égal au moment d'inertie du corps divisé par la masse totale. Dans les corps homogènes la recherche du rayon de gyration est une simple question de Géométrie (*Voy. MOMENT D'INERTIE*).

RAYON MOYEN, expression employée, dans l'étude du mouvement de l'eau dans les CANAUX DÉCOUVERTS (*Voy. ce mot*) et dans les rivières, pour désigner le quotient que l'on obtient en divisant l'aire de la section transversale du courant par le périmètre mouillé.

RÉACTION, force égale et contraire à l'action qu'un point matériel donné reçoit d'un autre point matériel : si le point A reçoit du point B une certaine action, il exerce à son tour sur le point B une réaction égale et contraire. Le principe d'égalité entre l'action et la réaction, posé par Newton dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, est devenu un axiome de Mécanique, accepté par tous ceux qui s'occupent de cette science. Il s'étend à des corps de dimensions finies; ainsi la Lune exerce sur la Terre une attraction égale et contraire à celle qu'elle reçoit de notre globe; car puisque les réactions exercées par les différents points de la Lune sur les différents points de la Terre sont égales et contraires aux actions que ces derniers exercent sur les premiers, la résultante de ces réactions, ou la réaction totale, est égale à la résultante des actions, ou à l'action totale. La considération des réactions est continuelle dans l'étude des machines et des constructions de toute espèce. Tout corps employé dans une machine ou dans une construction quelconque repose sur des appuis fixes ou mobiles, et exerce une certaine action sur ces appuis; ceux-ci réagissent à leur tour; et leurs réactions doivent entrer au nombre des forces qui agissent sur le corps dont on s'occupe. C'est à l'aide de cette considération des réactions qu'on peut ramener l'étude du mouvement ou de l'équilibre d'un corps posé sur des appuis, à celle d'un corps entièrement libre. On en trouvera de nombreux exemples dans ce livre.

Pour en donner un ici-même, considérons une table à trois pieds chargée d'un poids, et proposons-nous de déterminer les réactions qu'elle reçoit de la part du sol sur lequel elle repose. Soient A, B, C les points de contact des pieds de la table avec le sol, et soit O le point où la résultante P du poids de la table et du poids dont elle est chargée vient rencontrer le plan ABC. Soient R, R', R'' les réactions que le sol exerce respective-

ment aux points A, B, C. Il devra y avoir équilibre entre les quatre forces parallèles P, R, R', R''; par conséquent la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque, tracé dans un plan perpendiculaire à leur direction, devra être égale à zéro. Choisissons pour axe la droite qui passe par les points d'application de deux des réactions inconnues, leurs moments par rapport à cet axe seront nuls, et l'équation ne contiendra qu'une inconnue, qui sera la troisième réaction. Prenons, par exemple, pour axe la droite BC; et abaissons des points A et O sur cet axe les perpendiculaires AD et OH; nous aurons en regardant le moment de P comme positif,

$$P.OH - R.AD = 0,$$

d'où

$$R = P \frac{OH}{AD}.$$

On déterminerait de la même manière les deux autres réactions. Et l'on peut remarquer que la somme des trois forces R, R', et R'' devant être égale à P, il en résulte un théorème de Géométrie, qui peut d'ailleurs se démontrer directement; savoir que : si d'un point intérieur à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, et qu'on divise chacune d'elles par la hauteur du triangle qui lui est parallèle, la somme des trois quotients est égale à l'unité.

Le problème est indéterminé, dans le cas où il y aurait plus de trois pieds, si le sol est regardé comme incompressible; mais il devient déterminé si l'on a égard à la loi de compressibilité du sol. Admettons, conformément à l'expérience, que les pieds y fassent des empreintes dont le volume soit proportionnel à la charge qu'ils supportent [*Voy. COMPRESSION (Résistance à la)*]. Soient

$$\omega, \omega', \omega'', \dots,$$

les aires des bouts des pieds;

$$z', z'', z''', \dots,$$

les profondeurs des empreintes, que l'on peut regarder comme des prismes droits; on aura en appelant

$$R', R'', R''', \dots,$$

les réactions correspondantes, et K un coefficient donné par l'expérience,

$$R' = K\omega'z', \quad R'' = K\omega''z'', \quad R''' = K\omega'''z''', \dots$$

Posons de même

$$P = K\Omega h,$$

en appelant Ω la somme

$$\omega + \omega' + \omega'' + \dots;$$

et h une hauteur définie par cette équation.

Soient

$$\alpha', \beta'; \alpha'', \beta''; \alpha''', \beta'''; \dots,$$

les coordonnées des centres des bouts des pieds; a, b celles du point où le poids P rencontre le plan contenant ces centres; l'équilibre de la table donnera, en prenant les moments par rapport à l'axe des y,

$$K\omega'z'.\alpha' + K\omega''z''.\alpha'' + K\omega'''z'''.\alpha''' + \dots = K\Omega h.a$$

ou

$$\omega'z'\alpha' + \omega''z''\alpha'' + \omega'''z'''\alpha''' + \dots = \Omega h.a; \quad [1]$$

on trouvera de même, en prenant les moments par rapport à l'axe des x,

$$\omega'z'\beta' + \omega''z''\beta'' + \omega'''z'''\beta''' + \dots = \Omega h.b. \quad [2]$$

On aura en outre

$$R' + R'' + R''' + \dots = P,$$

d'où

$$\omega'z' + \omega''z'' + \omega'''z''' + \dots = \Omega h. \quad [3]$$

Or, les centres des bouts des pieds restent dans un même plan, qui ne saurait être vertical; on peut donc représenter son équation par

$$z = Ax + By + C.$$

Les centres étant dans ce plan, on a

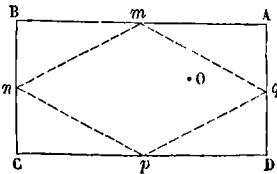
$$\left. \begin{aligned} z' &= A\alpha' + B\beta' + C, \\ z'' &= A\alpha'' + B\beta'' + C, \\ z''' &= A\alpha''' + B\beta''' + C, \end{aligned} \right\} [4]$$

et ainsi de suite.

S'il y a n pieds, les équations [4] seront en nombre n ; le nombre total des équations sera donc $n + 3$. Or il y a précisément $n + 3$ inconnues, savoir n profondeurs z' , z'' , z''' , etc., et les trois coefficients A , B , C . Le problème est donc déterminé.

Considérons, par exemple, le cas de 4 pieds placés aux 4 sommets d'un rectangle ABCD; supposons

$$\omega = \omega'' = \omega''' = \omega' = \omega; \text{ d'où } \Omega = 4\omega.$$



Prenons pour axes les médianes du rectangle ayant pour sommets les centres des bouts des 4 pieds, en sorte qu'en appelant 2α l'une des dimensions de ce rectangle et 2β l'autre dimension, on ait

$$\alpha' = \alpha, \beta' = \beta; \alpha'' = -\alpha, \beta'' = +\beta; \alpha''' = -\alpha; \beta''' = -\beta; \alpha^{IV} = +\alpha, \beta^{IV} = -\beta.$$

Les équations [1], [2], [3] deviendront

$$\alpha z' - \alpha z'' - \alpha z''' + \alpha z^{IV} = 4ah, [5]$$

$$\beta z' + \beta z'' - \beta z''' - \beta z^{IV} = 4bh, [6]$$

$$z' + z'' + z''' + z^{IV} = 4h [7]$$

et les équations [4] deviendront

$$\left. \begin{aligned} z' &= A\alpha + B\beta + C, \\ z'' &= -A\alpha + B\beta + C, \\ z''' &= -A\alpha - B\beta + C, \\ z^{IV} &= +A\alpha - B\beta + C. \end{aligned} \right\} [8]$$

Si l'on reporte les valeurs [8] dans [5], [6], [7], il vient

$$4A\alpha^2 = 4ah, \quad 4B\beta^2 = 4bh, \quad 4C = 4h,$$

d'où

$$A = \frac{ah}{\alpha^2}, \quad B = \frac{bh}{\beta^2}, \quad C = h.$$

Par suite :

$$\left. \begin{aligned} z' &= h \left(1 + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right), \\ z'' &= h \left(1 - \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right), \\ z''' &= h \left(1 - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} \right), \\ z^{IV} &= h \left(1 + \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} \right). \end{aligned} \right\} [8]$$

On a ensuite

$$R' = K\omega z' \text{ et } P = K \cdot 4\omega h;$$

d'où

$$R = \frac{1}{4} P \cdot \frac{z'}{h};$$

on trouvera de même

$$R = \frac{1}{4} P \cdot \frac{z''}{h}, \quad R''' = \frac{1}{4} P \cdot \frac{z'''}{h}, \quad R^{IV} = \frac{1}{4} P \cdot \frac{z^{IV}}{h},$$

donc enfin

$$\left. \begin{aligned} R' &= \frac{1}{4} P \left(1 + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right), \\ R'' &= \frac{1}{4} P \left(1 - \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right), \\ R''' &= \frac{1}{4} P \left(1 - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} \right), \\ R^{IV} &= \frac{1}{4} P \left(1 + \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} \right). \end{aligned} \right\}$$

Ce calcul suppose que tous les pieds portent, c'est-à-dire que les valeurs [10] sont positives. Pour que cette condition soit remplie, il faut que le point O où le poids P rencontre le rectangle ABCD formé par les pieds de la table, soit dans l'intérieur du losange $mnpq$ qui a pour sommets les milieux des côtés de ce rectangle, ou tout au plus sur le contour de ce losange. Si, par exemple, le point O était sur mq , on aurait

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 1,$$

et la valeur de R''' serait nulle; si le point O tombait au delà de mq , dans le triangle mAg , on aurait

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} > 1,$$

et la valeur de R''' serait négative, c'est-à-dire que le pied C ne porterait plus; et alors il faudrait traiter la question comme dans le cas où il n'y a que trois pieds.

On peut remarquer encore qu'en vertu des formules [10] on a

$$R' + R''' = \frac{1}{2} P \text{ et } R'' + R^{IV} = \frac{1}{2} P,$$

c'est-à-dire que, lorsque les 4 pieds portent, la somme des réactions exercées sur les deux pieds situés aux extrémités d'une des diagonales du rectangle ABCD est égale à la moitié de la charge totale P.

RÉACTIONS DES PIÈCES TOURNANTES. Lorsque les pièces tournantes d'une machine se communiquent mutuellement le mouvement, soit par des engrenages, soit par des courroies sans fin, elles exercent l'une sur l'autre des réactions qu'il est indispensable de connaître, pour pouvoir déterminer les dimensions des dents de l'engrenage ou la section des courroies. Lorsque le mouvement est uniforme, cette détermination est une question de Statique qui n'offre aucune difficulté; mais le calcul est différent quand le mouvement est varié. Il y a lieu d'ailleurs, dans ce cas, de se préoccuper du sens des réactions, qui peut changer pendant le mouvement, de telle sorte qu'une roue qui en conduisait une autre soit à son tour accidentellement conduite par celle-ci.

I. Considérons d'abord des roues O et O' (fig. 1) qui engrènent ensemble, et soit A le point de contact des circonférences primitives, que l'on peut regarder comme le point d'application de la réaction R, perpendiculaire à OO', que l'une des roues exerce sur l'autre. Soient r et r' les rayons des circonférences primitives, soit F la force mouvante, appliquée à une distance a de l'axe O, et P la force résistante, appliquée à une distance p de l'axe O'. Appliquons à la roue O le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot). Soit F' une force qui, appliquée tangentiellement à la circonférence OA produirait le même travail que la force F, ce qui exige que les

moments de ces forces par rapport à l'axe O soient égales et qu'on ait

$$F'r = Fa, \text{ d'où } F' = F \cdot \frac{a}{r}. \quad [1]$$

Soit e l'espace parcouru par le point A dans un

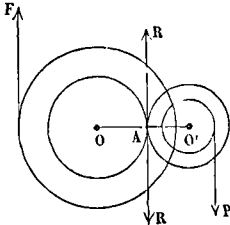


Fig. 1.

temps très-court θ ; soit v_0 sa vitesse initiale et v sa vitesse au bout du temps θ ; enfin soit M une masse fictive telle que, transportée à la distance r de l'axe O, elle aurait la même puissance vive que la roue O. On aura

$$F'e - Re = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2). \quad [2]$$

Opérons de même pour la roue O'. Soit P' la force qui, appliquée tangentiellement à la circonférence O'A produirait le même travail que la force P; ce qui exige qu'on ait

$$P'e = P' \cdot \frac{p}{r'}. \quad [3]$$

Soit M' une masse fictive qui, transportée à la distance r' de l'axe O', aurait la même puissance vive que la roue O'. On aura

$$P'e - P'e = \frac{1}{2} M' (v^2 - v_0^2). \quad [4]$$

Divisant membre à membre les relations [2] et [4], on en tire

$$\frac{F'e - R}{R - P'} = \frac{M}{M'}, \text{ d'où } R = \frac{M'F' + MP'}{M + M'}. \quad [5]$$

On a vu comment on obtient F' et P' ; les masses fictives M et M' s'obtiennent aussi sans difficulté: Si I représente le moment d'inertie de la roue O, par exemple, et ω sa vitesse angulaire, on doit avoir

$$\frac{1}{2} M \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ d'où } M = \frac{I}{r^2}.$$

On aurait une relation semblable pour déterminer M' .

L'inspection de l'équation [5] montre que R ne peut changer de signe que si P' en change lui-même, et si le produit MP' devient, en valeur absolue, plus grand que le produit $M'F'$.

Si la force P' varie entre des limites très-éloignées, on pourra néanmoins faire en sorte que R ne varie qu'entre des limites très-rapprochées. On peut, en effet, mettre la valeur de R sous la forme

$$R = \frac{F' + P' \cdot \frac{M}{M'}}{\frac{M}{M'} + 1}. \quad [6]$$

On voit alors que pour rendre insensibles les variations de P' , il suffit de faire en sorte que la fraction $\frac{M}{M'}$ soit très-petite, c'est-à-dire que M' soit très-grand par rapport à M . On verrait de même que si F' va-

riait entre des limites très-éloignées, on rendrait ces variations insensibles en rendant au contraire M très-grand par rapport à M' . — On voit donc que pour que la réaction R varie très-peu, il faut augmenter la masse de la roue à laquelle est appliquée la force variable. C'est pourquoi il est d'usage, dans les machines, de placer un VOLANT (Voy. ce mot) sur l'axe de la roue qui est exposée aux efforts les plus variables.

II. On arriverait à des résultats analogues si la roue O était précédée de plusieurs autres roues engrenant les unes avec les autres, et si la roue O' était suivie également de plusieurs autres roues, la force F étant appliquée à la première et la force P à la dernière. Il suffirait, en effet, d'appeler alors F' la force qui, appliquée tangentiellement à la circonférence OA, produirait le même travail que la force F ; P' la force qui, appliquée tangentiellement à la circonférence O'A, produirait le même travail que la force P ; M la masse qui, transportée à la distance r de l'axe O, aurait une puissance vive égale à la somme des puissances vives de toutes les roues depuis la première jusqu'à la roue O; et M' la masse qui, transportée à la distance r' de l'axe O', aurait une puissance vive égale à la somme des puissances vives de toutes les roues depuis la roue O' jusqu'à la dernière. Les travaux des réactions intermédiaires disparaîtraient, puisque ces réactions sont deux à deux égales et opposées.

III. Considérons maintenant le cas où une même roue en conduirait plusieurs, deux par exemple. Soient O, O', O'' (fig. 2) les axes, et r, r', r'' les

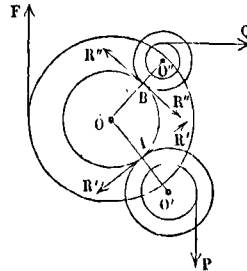


Fig. 2.

rayons des circonférences primitives de trois roues, dont les deux dernières engrenent avec la première. Soient F, P, Q la force mouvante et les forces résistantes appliquées aux distances a, p, q des trois axes respectifs. Soient R' et R'' les réactions qui s'exercent aux points de contact A et B. Soient comme ci-dessus e le chemin parcouru dans le temps très-court θ par les points A et B, u_0 leur vitesse initiale, u leur vitesse au bout de ce temps. Soient F', P', Q' les forces qui, appliquées tangentiellement aux circonférences OA, O'A, O''B produiraient respectivement le même travail que les forces F, P, Q . Enfin soient M, M', M'' les masses fictives qui, transportées respectivement en un point des circonférences OA, O'A, O''B, auraient la même puissance vive que les roues O, O' et O''. En appliquant d'abord le principe de l'effet du travail au système entier, les réactions mutuelles exercées en A et en B disparaîtront, et l'on aura

$$(F' - P' - Q')e = \frac{1}{2} (M + M' + M'') (u^2 - u_0^2). \quad [7]$$

Appliquant ensuite le même principe à la roue O' et à la roue O'', on trouvera

$$(R' - P') e = \frac{1}{2} M' (u^2 - u_0^2) \quad [8]$$

et

$$(R'' - Q') e = \frac{1}{2} M'' (u^2 - u_0^2). \quad [9]$$

Si l'on divise membre à membre l'équation [8] par l'équation [7], on obtient

$$\frac{R' - P'}{F' - P' - Q'} = \frac{M'}{M + M' + M''},$$

d'où

$$R' = \frac{M'(F' - Q') + (M + M'')P'}{M + M' + M''}. \quad [10]$$

Si l'on divise de même l'équation [9] par l'équation [7], on obtient

$$\frac{R'' - Q'}{F' - P' - Q'} = \frac{M''}{M + M' + M''},$$

d'où

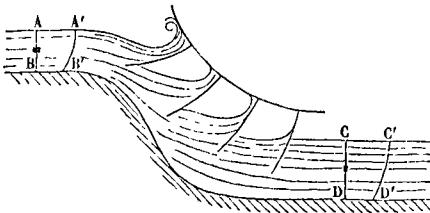
$$R'' = \frac{M''(F' - P') + (M + M')Q'}{M + M' + M''}. \quad [11]$$

Ces réactions pourraient devenir négatives; et alors la roue O serait conduite par les roues O' ou O'', sans que pour cela le sens de la rotation ait changé.

On traiterait d'une manière analogue le cas où une seule roue engrènerait avec un nombre quelconque d'autres roues. Les mêmes calculs seraient applicables si la communication entre les roues, au lieu de se faire pour un engrenage, s'opérait par l'intermédiaire de courroies sans fin.

Les mêmes formules peuvent encore être établies par la considération de l'accélération angulaire (Voy. la Mécanique des corps solides par Coriolis, et le Cours de Mécanique appliquée professé à l'École centrale par M. Bélanger).

RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES, machines destinées à recevoir l'action d'un cours d'eau et à la transmettre aux divers organes de mouvement employés dans une usine. Lorsqu'on veut employer un cours d'eau comme puissance motrice, on y établit un barrage pour créer une chute artificielle si l'on n'a pas à sa disposition une chute naturelle (Voy. CHUTE D'EAU). Dans tous les cas, le cours d'eau se trouve divisé en deux biefs, l'un supérieur, l'autre inférieur : c'est au point de jonction de ces deux biefs que le récepteur doit être placé, afin de recevoir l'action de l'eau qui s'écoule du bief d'amont dans le bief d'aval. On peut, par les considérations suivantes, évaluer d'une manière générale, le travail



exercé par l'eau sur le récepteur. Soit AA' le niveau dans le bief d'amont, CC' le niveau dans le bief d'aval, H la distance verticale de ces deux niveaux, c'est-à-dire la chute. Concevons qu'au bout d'un temps θ très-court, le liquide compris entre les sec-

tions AB et CD, se soit déplacé d'une petite quantité, et que les molécules primitivement situées dans ces sections soient venues respectivement en A'B' et en C'D'. Appliquons à ce déplacement le principe de L'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot). Soit P le poids du liquide qui s'écoule dans l'unité de temps par la section AB ou par la section CD; le poids du liquide écoulé dans le temps θ sera P θ . Soit U la vitesse moyenne dans la section AB et u la vitesse moyenne dans la section CD. L'accroissement de puissance vive du liquide considéré sera (Voy. CANAUX DECOUVERTS)

$$\alpha P \theta \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} \right),$$

α désignant un coefficient un peu supérieur à l'unité (1,1 environ). Soit Ω l'aire de la section AB, Y la distance de son centre de gravité au niveau AA', et II le poids du mètre cube d'eau; la pression qui s'exerce sur AB sera, abstraction faite de la pression atmosphérique, IIQY (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE); et son travail dans le temps θ sera + IIQYU θ , ou ce qui revient au même + PY θ . Si y représente la distance du niveau CC' au centre de gravité de la section CD, on trouvera de même pour le travail de la pression qui s'exerce en CD, - Py θ . Le travail de la pesanteur s'obtiendra en multipliant le poids P θ par la différence de niveau des centres de gravité des sections AB et CD, ce qui donne + P θ (H + y - Y). Le récepteur exerce sur le liquide compris entre AB et CD un travail égal et contraire à celui qu'il reçoit du liquide; nous désignerons celui-ci par \mathcal{E}_m pour l'unité de temps; pendant le temps θ le travail correspondant sera $\mathcal{E}_m \theta$, attendu que le mouvement du récepteur peut être considéré comme composé de périodes égales et très-courtes, et qu'on peut représenter par θ la durée d'une de ces périodes. Enfin les actions moléculaires, les frottements, produisent un travail négatif que nous représenterons par - \mathcal{E}_f dans l'unité de temps, et par $\mathcal{E}_f \theta$ dans le temps θ . Egalant l'accroissement de puissance vive à la somme algébrique de tous les travaux, on obtient

$$\alpha P \theta \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} \right) = PY\theta - Py\theta + P\theta (H + y - Y) - \mathcal{E}_m \theta - \mathcal{E}_f \theta,$$

d'où l'on tire, après réductions,

$$\mathcal{E}_m = PH + P \left(\alpha \frac{U^2}{2g} - \alpha \frac{u^2}{2g} \right) - \mathcal{E}_f. \quad [1]$$

Comme la vitesse U est généralement très-petite, on voit que le travail \mathcal{E}_m exercé par l'eau sur le récepteur est toujours moindre que PH, c'est-à-dire moindre que la puissance absolue de la chute. Et l'on doit s'efforcer, dans la disposition du récepteur, de faire en sorte que \mathcal{E}_m se rapproche autant que possible de PH. Pour cela il est nécessaire de réduire le plus qu'on peut les termes $\frac{u^2}{2g}$ et \mathcal{E}_f . Il faut donc, en premier lieu, que le liquide sorte du récepteur avec la plus faible vitesse possible. Il faut, en outre, pour diminuer le terme \mathcal{E}_f , faire en sorte que le liquide choque le moins possible le récepteur; car c'est dans les chocs et par l'agitation qui en résulte que l'eau perd la plus grande partie de sa puissance vive, sans action utile sur le récepteur. On a quelquefois exprimé ces deux conditions d'une manière abrégée en disant : *il faut que l'eau entre sans choc et sorte sans vitesse*. Ce langage est trop absolu : on ne peut éviter complètement le choc de

l'eau à son entrée; et il n'est pas possible non plus que l'eau sorte rigoureusement sans vitesse; car il faut que u conserve une valeur suffisante pour l'écoulement des eaux du bief d'aval. Enfin il y a une autre condition à remplir, qui n'a pas été exprimée dans ce qui précède, mais qui paraîtra évidente: c'est que toute l'eau qui sort du bief d'amont agisse sur le récepteur avant d'atteindre le bief d'aval; car autrement les choses se passeraient comme si le poids P était diminué du poids de toute l'eau qui a passé sans agir, et le travail \mathcal{E}_m se trouverait par conséquent diminué à peu près dans le même rapport.

On divise les récepteurs hydrauliques en deux classes principales: les roues à axe horizontal et les roues à axe vertical. Dans la première classe se trouvent les ROUES EN DESSOUS A PALETTES PLANES, les ROUES EN DESSOUS A PALETTES COURBES OU ROUES PONCELET, les ROUES PENDANTES, les ROUES DE CÔTÉ, les ROUES EN DESSUS OU ROUES A AUGETS. Dans la seconde classe sont rangées les anciennes ROUES A CULLER OU A CUYE, les ROUES A REACTION, et les diverses espèces de TURBINES. On peut encore ranger parmi les récepteurs hydrauliques les MACHINES A COLONNE D'EAU (Voy. ces mots).

RECOUPEMENT (MÉTHODE DE), méthode de lever des plans dans laquelle chaque point est déterminé par la rencontre de plus de deux droites (Voy. LEVER DES PLANS).

RECOUVREMENT, partie du tiroir des machines à vapeur qui, par son mouvement alternatif, règle l'ouverture ou la fermeture des lumières d'admission et d'échappement. On appelle plus exactement *recouvrement extérieur* la distance comprise, dans la position moyenne du tiroir, entre le bord interne de la lumière d'admission et le bord extérieur de la bande du tiroir. On appelle *recouvrement intérieur* la distance comprise entre le même bord interne de la lumière et le bord intérieur de la bande du tiroir (Voy. DÉTENTE).

RECU, mouvement que prennent les armes à feu, au moment de l'explosion, en sens contraire du mouvement du projectile. Ce mouvement s'explique par le *Principe des quantités de mouvement* ou de *l'effet de l'impulsion* (Voy. QUANTITÉ DE MOUVEMENT). En vertu de ce principe l'accroissement des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est égal à l'impulsion totale de la résultante de translation des forces extérieures, projetée sur le même axe. Considérons une arme à feu au moment où l'explosion va avoir lieu; elle n'est soumise qu'à son poids et aux réactions des supports qui se réduisent à une force égale et opposée à ce poids; la résultante de translation est donc égale à zéro. L'explosion n'étant due qu'aux forces moléculaires mutuelles qui se développent dans le système quand on met le feu à la pièce, ces forces n'altèrent pas la résultante de translation, qui reste par conséquent nulle. L'accroissement des quantités de mouvement est donc égal à zéro; et, puisque les quantités de mouvement initiales étaient nulles, il en est de même de la somme des quantités de mouvement finales. Si donc m désigne la masse du projectile, d 'un boulet par exemple, v sa vitesse horizontale au sortir de l'âme de la pièce, M la masse du canon et de son affût, et u la vitesse du recul, on aura en prenant pour axe la

direction horizontale du tir

$$mv - Mu = 0, \text{ d'où } u = v \cdot \frac{m}{M} = v \cdot \frac{p}{P},$$

en appelant p le poids du boulet et P celui de la pièce et de son affût. C'est-à-dire que, d'après cette formule, la vitesse du recul serait une fraction de la vitesse du projectile égale au rapport entre le poids du projectile et celui de l'arme. Ainsi, pour une pièce de 24 avec affût de place, pour laquelle on a

$$p = 12^h, \quad P = 317.p$$

environ, et $v = 500^m$, on trouverait

$$u = \frac{500^m}{317} \text{ ou } u = 1^m,577.$$

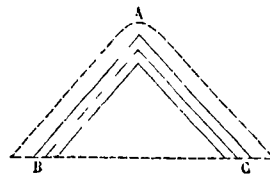
Mais diverses circonstances dont on n'a pu tenir compte dans le calcul tendent à modifier ce résultat. D'un côté le frottement exercé par les roues et par l'affût sur le sol et sur l'essieu, le frottement du boulet lui-même dans l'âme de la pièce, tendent à diminuer la vitesse du recul; d'un autre côté les gaz de la poudre continuant à agir sur la pièce après que le boulet a quitté l'âme, tendent à accroître au contraire la vitesse du recul; il faudrait avoir égard d'ailleurs à l'inertie des gaz eux-mêmes, à celle de la poudre non encore enflammée, à la résistance de l'air, etc., Voy. *l'Introduction à la Mécanique industrielle*, par M. Poncelet.

RECU, l'un des éléments qui servent à apprécier l'effet d'une hélice propulsive. Si H représente le chemin que ferait l'hélice dans le sens de son axe pendant un tour si elle se mouvait dans un écrou fixe, et h le chemin qu'elle fait réellement dans le même temps, la quantité

$$\frac{H-h}{H}$$

est ce qu'on appelle le recul. Il est ordinairement de 0,20; mais il peut descendre beaucoup plus bas; certains auteurs admettent même que dans certains cas le recul peut être *négatif*, c'est-à-dire que l'hélice avancerait plus vite dans l'eau que dans un écrou solide (Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES).

REDAN, ouvrage de fortification composé de deux faces AB et AC . Isolé, il serait d'une mau-



vaïse défense, attendu qu'il offre un *secteur sans feux* et des *angles morts* (Voy. FORTIFICATION) et qu'il peut être aisément emporté par la gorge; mais il peut avoir son utilité lorsqu'il fait partie d'un système d'où il puisse tirer son flanquement (Voy. LIGNES À INTERVALLES). C'est surtout comme ouvrage de campagne qu'il est employé, et, à ce point de vue, il est plutôt du domaine de la stratégie que de la fortification proprement dite.

L'angle A d'un redan ne doit pas être inférieur à 60° , pour que le saillant présente une solidité suffisante.

REDOUTE, ouvrage de fortification

dont la forme est polygonale, et qui n'offre que des angles saillants. Le défaut de ce genre d'ouvrage est d'offrir à chaque saillant des secteurs sans feu, et des fossés qui ne sont point défendus. On emploie néanmoins les redoutes pour défendre des points exposés de toutes parts, mais à portée d'être soutenus : des mamelons, l'entrée d'un défilé, les ailes d'une position. On en fait aussi usage dans les LIGNES A INTERVALLES (Voy. ce mot). La forme adoptée le plus fréquemment est le carré; on place la porte au milieu du côté le moins exposé. Si la redoute doit recevoir de l'artillerie de campagne, on y établit des batteries à BARBETTE (Voy. ce mot), principalement aux angles. Le relief d'une redoute est celui de tous les ouvrages de campagne (Voy. FORTIFICATION). L'intérieur d'une redoute doit être assez grand pour contenir ses défenseurs, à raison d'un homme par mètre courant de front s'il n'y a qu'un rang, de 2 hommes par mètre de front s'il y a 2 rangs, et ainsi de suite. On admet ordinairement que le tiers de la garnison sert de réserve. On compte au minimum 1^m50 de surface par homme pour loger la troupe avec barraquement. Ces conditions déterminent les dimensions minimum de la redoute; car si n est le nombre de rangs des défenseurs sur chaque front, et x la longueur de ce front en mètres, le nombre total des défenseurs sera

$$\frac{3}{2} \cdot 4nx \text{ ou } 6nx;$$

en comptant 4^m de distance de la crête du parapet au pied du talus de la banquette, on aura

$$x - 8$$

pour le côté du carré réservé au logement de la troupe, et

$$(x - 8)^2$$

sera la superficie de ce carré; en la divisant par

$$1^{\text{m}},50 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

on aura une seconde expression du nombre des défenseurs. On devra donc avoir

$$\frac{2}{3} (x - 8)^2 = 6nx \text{ ou } (x - 8)^2 = 9nx, [1]$$

d'où

$$x = \frac{9n + 16 + \sqrt{81n^2 + 288n}}{2};$$

la seconde racine est étrangère à la question.

- Pour $n=1$ on trouve $x=22^{\text{m}},1$ ou 22^{m} ;
- $n=2$ — $x=32$;
- $n=3$ — $x=41,5$ ou 42 ;

ce qui suppose 132 hommes de garnison dans le premier cas, 384 dans le second, et 756 dans le troisième.

L'équation est différente lorsqu'on a à tenir compte de l'artillerie. Une pièce placée dans un angle occupe 7^m sur chaque front; une pièce placée sur un front en occupe 5^m; la plateforme d'une pièce placée dans un angle occupe 40^m, celle d'une pièce sur un front occupe 60^m; le caisson et l'avant-train occupent 40^m. D'après cela, si p est le nombre des pièces placées dans les angles (4 au plus) et p' le nombre de celles placées sur les fronts, on

trouve qu'en portant la réserve aux $\frac{2}{5}$ de la garnison, ce qui suppose les $\frac{3}{5}$ sur la banquette, le

nombre des défenseurs est exprimé d'abord par

$$[4x - (14p + 5p')] \cdot n \cdot \frac{5}{3}.$$

Mais il peut être exprimé également par

$$\frac{2}{3} [(x - 8)^2 - (40p + 60p') - 40(p + p')].$$

En égalant ces deux expressions, on obtient l'équation

$$(x - 8)^2 - (40p + 60p') - 40(p + p') = \frac{5n}{2} [4x - (14p + 5p')],$$

d'où l'on tirera, dans chaque cas particulier, la valeur de x . Si, par exemple, on suppose

$$n=3, p=2, p'=3,$$

on aura à résoudre l'équation

$$(x - 8)^2 - 460 = \frac{15}{2} (4x - 43),$$

d'où l'on tirera

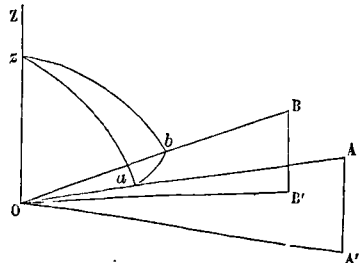
$$x = 47^{\text{m}},5 \text{ ou } x = 48^{\text{m}}.$$

On trouve dans ce cas que la garnison est de 745 hommes.

On n'élève pas de redoute dont le côté atteigne 90^m; dans le cas où le côté devrait avoir cette étendue, on préfère construire un FORTIN (Voy. ce mot).

RÉDUCTION À L'HORIZON, opération qui a pour but de résoudre le problème suivant : étant donné un angle, qui a été mesuré dans son plan, trouver l'angle formé par les projections horizontales de ses côtés. Les instruments qui servent aujourd'hui à la mesure des angles (Voy. THÉODOLITE, CERCLE RÉPÉTITEUR) les donnent tout réduits à l'horizon; mais les anciens cercles répéteurs donnaient les angles mesurés dans leur plan même; et, dans la plupart des problèmes, il est alors nécessaire d'opérer la réduction.

Soient OA et OB les côtés de l'angle; OA' et OB'



leurs projections horizontales, OZ la verticale du point O. On suppose qu'on ait mesuré les DISTANCES ZENITHALES (Voy. ce mot) des objets A et B qui ont servi de mire; et soient

$$AOZ = a, BOZ = b, AOB = c.$$

Il s'agit de trouver l'angle A'O'B'.

Nous supposons d'abord que a et b diffèrent notablement de 90°. Concevons alors le triangle sphérique qui a pour côtés

$$(ax) = a, (bx) = b \text{ et } (ab) = c;$$

l'angle cherché est l'angle de ce triangle opposé à c . Si donc on appelle $2s$ la somme

$$a + b + c,$$

on aura (Voy. la Trigonométrie sphérique)

$$\sin \frac{1}{2} A'O'B' = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Si les angles a et b diffèrent peu de 90°, ce qui

arrive le plus ordinairement, cette formule devient pénible à calculer, si l'on veut obtenir une approximation suffisante. Il est préférable alors de calculer la réduction, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à l'angle c pour obtenir l'angle demandé; soit x cette quantité; l'angle cherché sera

$$c + x.$$

Posons

$$a = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ et } b = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

nous aurons pour la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique

$$\cos(c + x) = \frac{\cos c - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Si l'on développe le premier membre, en remarquant que x étant une quantité très-petite, on peut remplacer $\cos x$ par 1 et $\sin x$ par x ; et si, dans le second membre on remplace $\sin \alpha$ et $\sin \beta$ par α et β , et $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ par

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \text{ et } 1 - \frac{\beta^2}{2},$$

on aura

$$\begin{aligned} \cos c - x \sin c &= \frac{\cos c - \alpha \beta}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos c - \alpha \beta}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}, \end{aligned}$$

en négligeant les quantités très-petites du 4^e ordre. Chassant le dénominateur, réduisant, et négligeant les quantités très-petites du 3^e ordre, on en tire

$$x = \frac{\alpha \beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cos c}{\sin c}.$$

On donne ordinairement à cette expression une forme plus élégante; pour cela on remplace $\cos c$ par

$$\cos^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2} c,$$

on multiplie $\alpha \beta$ par

$$\cos^2 \frac{1}{2} c + \sin^2 \frac{1}{2} c,$$

et l'on met

$$2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$$

à la place de $\sin c$; la formule prend alors la forme

$$x = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \operatorname{cot} \frac{1}{2} c.$$

Les petits arcs α , β , x sont ici exprimés en parties du rayon; si l'on veut qu'ils soient exprimés en secondes, ce qui est plus commode dans la pratique, il suffit de les remplacer par les nombres de secondes qu'ils expriment, divisés par la longueur de l'arc d'une seconde; c'est-à-dire que si l'on veut que α , β , x expriment des secondes, il faut, dans la formule, les remplacer respectivement par

$$\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{x}{\delta},$$

la lettre δ représentant pour abrégier la longueur de l'arc d'une seconde, ou

$$0,0000048481;$$

on a alors en simplifiant :

$$x = \frac{1}{\delta} \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \operatorname{cot} \frac{1}{2} c \right].$$

On peut s'assurer que la formule reste la même

lorsque α et β surpassent $\frac{\pi}{2}$, pourvu qu'on regarde alors α et β comme négatifs; elle subsiste également, et à la même condition, lorsque l'une seulement des deux distances zénithales surpasse $\frac{\pi}{2}$.

A la place de δ on écrit souvent $\sin 1''$, quantité équivalente, et qui ne peut donner lieu à aucune ambiguïté.

Les deux termes de la formule ci-dessus ont été réduits en tables.

RÉDUCTION AU CENTRE DE LA STATION, opération qu'il faut faire lorsqu'un obstacle quelconque empêche de se placer au centre même de la station, et que l'on est contraint d'observer les angles d'un point différent, mais peu éloigné. Soit C (fig. 1) le

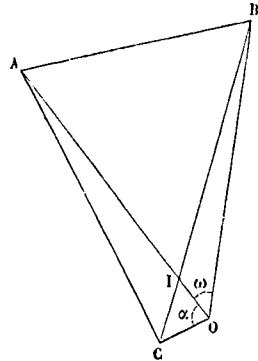


Fig. 1.

centre de la station, et O le point où l'on opère; ayant mesuré en O l'angle AOB, il s'agit d'en déduire l'angle ACB qu'on aurait obtenu si l'on avait opéré au centre C. Faisons

$$\begin{aligned} \text{ACB} &= x, \text{ AOB} = \omega, \text{ AO} = b, \text{ OB} = a, \text{ OC} = \delta, \\ \text{AOC} &= \alpha; \end{aligned}$$

soit enfin I le point de rencontre des droites AO et BC.

Les triangles AIC et BIO donnent

$$\text{AIB} = x + \text{CAO} = \omega + \text{OBC} \quad [1]$$

et les triangles CAO, BOC donnent à leur tour

$$\sin \text{CAO} = \sin \alpha \cdot \frac{\delta}{\text{AC}}, \quad \sin \text{OBC} = \sin(\omega + \alpha) \cdot \frac{\delta}{\text{BC}};$$

par conséquent, en remarquant que OC étant ordinairement très-petit par rapport aux côtés AC ou BC, les angles CAO et OBC sont eux-mêmes très-petits, en sorte qu'on peut remplacer les sinus par les arcs, la relation [1] donnera

$$x - \omega = \delta \cdot \left[\frac{\sin(\omega + \alpha)}{\text{BC}} - \frac{\sin \alpha}{\text{AC}} \right],$$

ou, en remplaçant BC et AC par BO et AO qui en diffèrent très-peu,

$$x - \omega = \delta \left[\frac{\sin(\omega + \alpha)}{a} - \frac{\sin \alpha}{b} \right],$$

relation qui résout le problème; et qui a lieu dans tous les cas, pourvu qu'on ait égard aux signes des sinus.

Les côtés a et b peuvent être calculés si le triangle AOB fait partie d'un canevas trigonométrique; si le point C est visible et accessible, on mesurera δ et α directement.

Il peut se faire que le point C soit le centre de

figure d'un édifice et ne puisse être aperçu du point O. Si l'édifice est circulaire, on opérera comme pour trouver le rayon d'un cercle dont le centre est invisible et inaccessible (Voy. PROBLÈMES DE TOPOGRAPHIE, VIII) et l'on calculera la distance OC. Si la base de l'édifice est un rectangle *mnqr* (fig. 2),

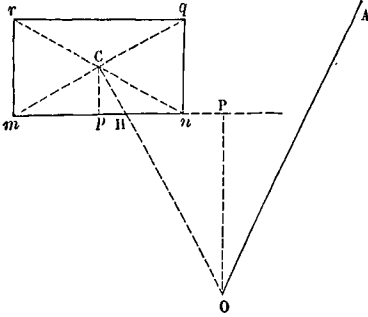


Fig. 2.

auquel cas le point C est à la rencontre des diagonales, on pourra opérer de la manière suivante : on marquera le point *p* milieu de *mn*, qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur *mn*; et l'on abaissera sur *mn* ou sur son prolongement la perpendiculaire OP; les triangles CH*p*, OH*p* donneront alors

$$pH = Pp \cdot \frac{Cp}{OP + Cp}$$

Or, P*p* et OP peuvent être mesurés; C*p* est la moitié de *nq*; on aura donc le point H, et par suite la direction de OH; d'où l'on déduira AOC ou α . On mesurera ensuite OH; on y ajoutera

$$CH \text{ ou } \sqrt{Cp^2 + pH^2}$$

et l'on aura OC ou δ .

L'emploi du THÉODOLITE (Voy. ce mot) à lunette excentrique peut donner lieu à une erreur du genre de celle dont il vient d'être parlé, et que l'on peut

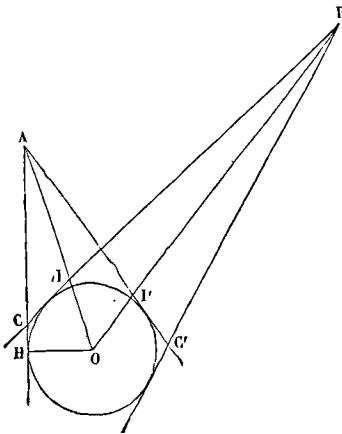


Fig. 3.

calculer d'une manière analogue. Soient A et B (fig. 3) les projections horizontales des points que l'on vise, O la projection horizontale de l'axe vertical de l'appareil; OH = ρ le rayon du cercle au-

quel la trace horizontale du cercle vertical parcouru par l'axe optique de la lunette reste constamment tangent. L'angle à mesurer est l'angle AOB, ou O; l'angle mesuré avec le cercle vertical à gauche est l'angle ACB, ou C, formé par les tangentes menées des points A et B au cercle OH; et l'angle mesuré avec le cercle vertical à droite est l'angle AC'B, ou C', formé de même par les tangentes issues des points A et B. Appelons 2α l'angle CAC', et 2β l'angle CBC'. Les deux triangles CIA et OIB, qui ont les angles en I égaux, donnent

$$C + \alpha = O + \beta, \text{ d'où } O - C = \alpha - \beta. \quad [1]$$

Les triangles OIA et C'I'B donnent de même

$$O + \alpha = C' + \beta, \text{ d'où } C' - O = \alpha - \beta. \quad [2]$$

On peut remarquer, avant d'aller plus loin, que de ces deux relations il résulte

$$O - C = C' - O, \text{ ou } O = \frac{1}{2} (C + C').$$

Ainsi on obtient la valeur exacte de l'angle à mesurer AOB, en faisant deux mesures, l'une avec le cercle vertical à gauche, l'autre avec le cercle vertical à droite, et prenant la moyenne des résultats.

Quant à la valeur de l'erreur $\alpha - \beta$, comme les angles α et β sont ordinairement très-petits, on peut l'écrire

$$\sin \alpha - \sin \beta,$$

ou

$$\frac{\rho}{OA} - \frac{\rho}{OB},$$

quantité qui sera très-petite si OA et OB sont très-grands par rapport à ρ , comme cela arrive ordinairement. Cependant cette erreur peut ne pas être négligeable : pour

$$\rho = 0^m,15; \quad OA = 500^m \text{ et } OB = 1000^m,$$

on trouverait

$$0,00015,$$

ce qui répond à un angle de près de $3''$.

Mais il faut bien remarquer que l'erreur est rigoureusement nulle quel que soit ρ si l'on a

$$OA = OB,$$

c'est-à-dire si l'axe vertical du théodolite est à égale distance des projections verticales des points observés.

RÉDUCTION AU MÉRIDIEN (FORMULE DE), formule qui donne la différence de hauteurs ou de distances zénithales d'un même astre observé dans le méridien et près du méridien; elle est employée dans la détermination des latitudes par la méthode des observations circumméridiennes (Voy. LATITUDE, III, formule [1]).

RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES AU SOMMET DU SIGNAL, correction qu'il faut faire subir aux distances zénithales lorsque le signal, comme cela arrive d'ordinaire, est plus élevé que l'observateur. Soit A le signal au pied duquel se trouve l'observateur en *a*; et soit B le point dont on a observé la distance zénithale du point *a*, c'est-à-dire l'angle BaZ. La distance zénithale vraie étant l'angle BAZ, on voit qu'il faut à l'angle observé ajouter la différence des angles BAZ et BaZ, c'est-à-dire l'angle aBA. Posons

$$Aa = h, \quad AB = d \text{ et } BaZ = z;$$

le triangle AaB donnera

$$\frac{\sin B}{\sin z} = \frac{h}{d}, \text{ d'où } \sin B = \frac{h \sin z}{d}.$$

Comme l'angle B est toujours très-petit, on peut

remplacer sin B par B sin 1°; la formule ci-dessus donnera donc

$$B = \frac{h \sin x}{d \sin 1''}$$

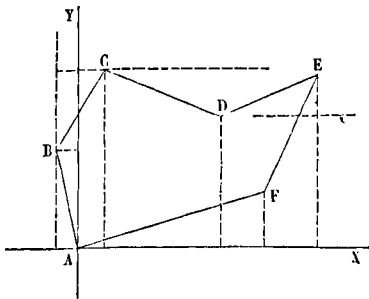
c'est la correction cherchée.

RÉDUCTION DES ROUTES, opération qu'il faut effectuer pour remplacer les diverses routes qu'un navire a parcourues dans des directions distinctes par une route unique parcourue dans une même direction. Cette opération, indispensable pour éviter d'avoir à tenir compte des bordées que l'on court et des changements accidentels de route, s'exécute à chaque *quart*, c'est-à-dire cinq fois par jour, et se répète en outre tous les jours à midi. On peut l'effectuer graphiquement ou par le calcul.

Supposons, pour fixer les idées, qu'un navire ait parcouru successivement :

- 8 milles dans la direction N. $\frac{1}{4}$ NO,
- 10 — — N. NE,
- 11 — — E. SE, 4° E,
- 9 — — E. NE,
- 12 — — S. SO.

On peut traduire ces directions en degrés (*Voy. RUMBS*). Après avoir mené par le point A, qui re-



présente le point de départ, une droite AX pour figurer la ligne est et ouest, et une perpendiculaire AY pour figurer la ligne nord et sud, on portera successivement :

- 8 unités de longueur dans la direction AB faisant avec AY, et vers la gauche, un angle de 11° 15';
- 10 unités dans la direction BC faisant avec AY, et vers la droite, un angle de 22° 30';
- 11 unités dans la direction CD faisant avec une parallèle à AX, et au-dessous de cette parallèle, un angle de 18° 30';
- 9 unités dans la direction DE faisant avec une parallèle à AO, et au-dessus de cette parallèle, un angle de 22° 30';
- 12 unités dans la direction EF faisant avec une parallèle à OY, et à gauche de cette parallèle, un angle de 22° 30'.

Le point F ainsi déterminé représentera le point d'arrivée; on tirera AF, qui représentera la route cherchée. On trouvera que sa longueur représente 17,4 milles, et que sa direction fait avec AY un angle de 69° 40', ce qui répond à la direction E. NE, 2° 10' E. Telle est la solution graphique.

Pour opérer par le calcul, on décompose chaque chemin partiel en deux chemins composants, l'un suivant la ligne est et ouest, l'autre suivant la ligne

nord et sud, pour cela, il suffit de multiplier le nombre de milles du chemin considéré par le cosinus de l'angle que sa direction fait avec chacune des deux droites rectangulaires AX et AY. On peut, pour abrégé, faire usage du **QUARTIER DE RÉDUCTION** (*Voy. ce mot*), qui donne toujours une approximation suffisante dans la pratique. On a soin de noter le sens dans lequel chaque chemin composant doit être compté. S'il y avait doute à cet égard, une figure même grossière le ferait disparaître. On inscrit les chemins composants dans des colonnes distinctes, suivant qu'ils sont dirigés vers l'un des quatre points cardinaux, et l'on forme ainsi le tableau suivant :

RUMBS.	DISTANCES	N	S.	E.	O.
N. $\frac{1}{4}$ NO.....	8 milles.	7,87	"	"	1,55
N. NE.....	10 —	9,25	"	3,80	"
E. SE, 4° E.	11 —	"	3,49	10,43	"
E. NE.....	9 —	3,45	"	8,30	"
S. SO.....	12 —	"	11,10	"	4,57
Route directe		20,57	14,59	22,53	6,12
17,43 milles				6,12	
E. NE, 2° 10' E.				16,41	
		5,98			

On additionne les nombres inscrits dans chaque colonne; on compare les sommes des chemins nord et sud, et l'on retranche la plus petite de la plus grande; ce qui donne dans l'exemple ci-dessus 5,98 milles N. On compare de même les sommes des chemins est et ouest, et l'on retranche la plus petite de la plus grande; ce qui donne ici 16,41 milles E. Il ne reste plus qu'à composer ces deux chemins en un seul; ce qui se fait encore à l'aide du quartier de réduction en *faisant cadrer le chemin nord et sud et le chemin est et ouest*. (*Voy. à l'article QUARTIER DE RÉDUCTION le sens de cette locution technique*). La direction du fil fait connaître le rumb qui correspond au chemin résultant AF; et la construction donne en même temps le nombre de milles du chemin résultant. On inscrit ces résultats dans le tableau.

On opère de même pour réduire les routes faites pendant la durée de chaque *quart*. Mais chaque jour, à midi, on fait un calcul semblable en opérant sur les routes réduites au bout de chacun des *quarts* précédents; ce qui donne la route réduite correspondante à 24 heures.

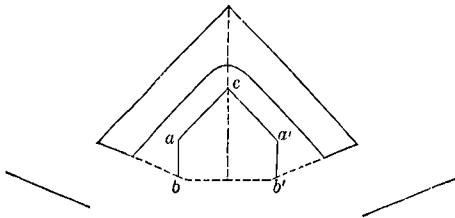
On voit que la réduction des routes n'est autre chose que l'application du principe relatif à la projection d'un chemin polygonal et à la projection du chemin direct. On n'aurait aucun avantage à opérer à l'aide des Tables des logarithmes des lignes trigonométriques, attendu que les données du problème ne sont jamais assez exactes pour qu'il y ait lieu de rechercher une approximation plus grande que celle que donne le quartier de réduction.

RÉDUCTION D'UNE HAUTEUR À UN HORIZON DONNÉ, réduction qu'on est obligé de faire subir à la hauteur d'un astre pour la ramener à ce qu'elle

eût été si l'observation eût été faite dans un lieu différent de celui où elle a été faite réellement. Cette réduction se présente dans les calculs nautiques toutes les fois qu'ayant observé deux fois la hauteur d'un astre, on veut tenir compte du chemin fait par le navire dans l'intervalle des deux observations. Il faut, en effet, dans ce cas, pour rendre les observations comparables, réduire l'une des hauteurs à l'horizon de l'autre. [Voy. l'exposition de la méthode à employer à l'article LATITUDE (détermination de la), § IV.]

RÉDUIT. Ouvrage élevé dans l'intérieur d'une DEMI-LUNE, d'une PLACE D'ARMES RENTRANTE, d'un FORT, d'une REDOUTE (Voy. ces mots), et dans lequel les défenseurs peuvent se retirer lorsque l'ouvrage principal est tombé au pouvoir de l'ennemi.

Le réduit d'une demi-lune permet à l'assiégé de battre à bout portant la brèche pratiquée au saillant; il favorise les retours offensifs et prolonge la défense. Il peut être formé par un simple mur crénelé; mais, dans les demi-lunes que leur position désigne comme pouvant devenir un point d'attaque, le réduit est une seconde demi-lune intérieure à la première, séparée d'elle par un fossé, et offrant un relief intermédiaire entre celui de la demi-lune et celui de la courtine. L'escarpe n'est point revêtue; on lui donne au moins 5 mètres de haut; le fossé doit avoir de 4 à 5 mètres au fond. Le réduit de demi-lune a souvent la forme de la demi-lune elle-même: mais quelquefois on lui donne des flancs ab et $a'b'$, dirigés parallèlement à la capitale de la



demi-lune, et pouvant recevoir chacun trois pièces. Les points a et a' sont situés sur le côté extérieur du polygone fortifié. Ces flancs prennent à revers les brèches pratiquées aux bastions adjacents et obligent ainsi l'assaillant à s'emparer du réduit avant de tenter l'assaut du bastion. Il est bon que le réduit puisse avoir vue sur les glacis des bastions par-dessus la demi-lune. Le réduit doit toujours avoir un terre-plein bas, qui est vu de la courtine. Lorsqu'une route traverse une des faces de la demi-lune, elle traverse également la face correspondante du réduit.

Les places d'armes rentrantes sont ordinairement munies d'un réduit que l'on construit le plus souvent en charpente au moment du siège; il a la forme de la place d'armes elle-même. (Voy. FORTIFICATIONS, ATTAQUE DES PLACES.)

Les ouvrages fermés, tels qu'un fort, une redoute, ont presque toujours un réduit pouvant contenir au moins les deux tiers de la garnison. Ce réduit est ordinairement une petite redoute dont les faces sont dirigées perpendiculairement aux capitales des saillants de l'ouvrage principal, afin de rendre la défense de ces saillants plus efficace. Cependant,

lorsque l'un des fronts de l'ouvrage est à l'abri d'une attaque de l'ennemi, c'est vers le milieu de ce front que le réduit est le plus avantageusement placé. La porte de sortie du réduit doit être soustraite aux vues de l'ennemi, et il faut éviter qu'elle serve en même temps de porte d'entrée au fort.

Les batteries de côte sont ordinairement accompagnées d'un réduit qui a la forme d'une tour à un étage avec plate-forme défensive, ou d'un corps-de-garde à rez-de-chaussée avec plate-forme aussi. (Voy. BATTERIES DE CÔTE.)

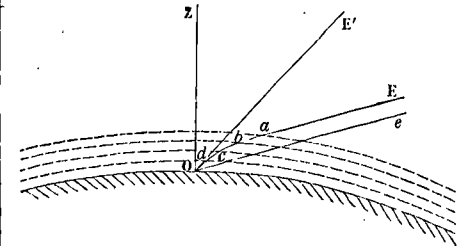
REFEND (MUR DE). Mur perpendiculaire à la façade d'un édifice, et qui a pour objet de diviser l'intérieur en pièces séparées.

REFENDS, canaux de séparation qu'on taille entre les pierres d'un édifice pour protéger les joints ou pour les dissimuler. On taille souvent ainsi les chaînes de pierres qui forment l'encoignure d'un bâtiment. Quelquefois on taille en refends toute la surface d'un mur, mais plus particulièrement au rez-de-chaussée. Ce genre de décoration, appliqué ainsi au soubassement d'un édifice, lui donne un caractère de force et de sévérité qui est d'un bon effet; mais il n'en faut point abuser.

Les refends ne sont qu'un diminutif des BOSSAGES (Voy. ce mot).

REFLUX, mouvement descendant de la mer (Voy. MARÉES). On lui donne aussi le nom de *jusant*.

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE, déviation que l'atmosphère fait éprouver aux rayons lumineux et qui a pour effet de diminuer les DISTANCES ZÉNITHALES (Voy. ce mot). Un rayon lumineux Ec.



émant d'une étoile, rencontrant les couches de plus en plus denses de l'atmosphère, éprouve une série de déviations qui le rapprochent de plus en plus de la normale, et lui font suivre un chemin curviligne $abcdO$, ayant sa convexité tournée vers le haut, et dont le dernier élément dO est la direction suivant laquelle l'œil voit l'étoile. La longueur de l'arc $abcdO$ pouvant être négligée par rapport à la distance de la Terre à l'étoile, la direction suivant laquelle celle-ci devrait être aperçue serait la direction Oe parallèle à aE , tandis qu'elle est vue effectivement dans la direction OE' ; la distance zénithale eOZ se trouve donc remplacée par une distance zénithale moindre $E'OZ$; et la différence, ou l'angle eOE' , est la *réfraction astronomique*.

La connaissance de la réfraction astronomique est de la plus haute importance en Astronomie et en Géodésie; aussi un grand nombre d'astronomes et de géomètres ont-ils essayé de résoudre cette difficile question de physique mathématique.

Tycho-Brahé paraît être le premier qui ait dressé

une table de réfraction, déduite de l'observation des distances zénithales d'un certain nombre d'étoiles à leur passage supérieur et à leur passage inférieur. Mais il admettait que la réfraction pouvait être négligée jusqu'à 45°, erreur due à l'imperfection des instruments dont il disposait.

Lacaille, en comparant les distances zénithales méridiennes de plusieurs étoiles, observées de deux stations éloignées l'une de l'autre en latitude, construisit aussi une table approximative des réfractions.

Le premier astronome qui ait essayé de représenter la réfraction par une formule est D. Cassini; pour y arriver, il substituait à l'atmosphère réelle une atmosphère fictive de densité moyenne; sa formule s'accorde avec les formules plus exactes jusqu'à une distance zénithale de 65°.

Newton a donné une formule fondée sur l'hypothèse que dans l'atmosphère les pressions sont proportionnelles aux densités, ce qui revient à supposer une température uniforme. Cette formule est beaucoup moins exacte que celle de Cassini.

Bradley a donné une formule empirique qui est restée en usage dans de grands observatoires jusque dans ces derniers temps; voici cette formule: en désignant par x_1 la distance zénithale observée et par θ la réfraction, il pose

$$\theta = 57'' \cdot \text{tang}(x_1 - 3\theta). \quad [1]$$

Kramp, adoptant l'hypothèse de Newton, mais se servant de données physiques plus récentes, a donné une formule plus exacte que celles en usage jusqu'à lui.

Mais c'est l'illustre Laplace qui a le mieux approfondi cette question. — Ce savant géomètre a donné deux formules: l'une plus simple et applicable jusqu'à des distances zénithales de 74°, c'est-à-dire dans les limites où se font les observations ordinaires; la seconde plus compliquée, mais applicable jusqu'à 90°. La première de ces formules ne suppose aucune hypothèse sur la loi de décroissement de densité des couches atmosphériques; il suffit d'admettre que les couches d'égale densité sont sphériques et concentriques. Cette formule est la suivante:

$$\theta = \frac{\alpha \text{ tang } x_1}{\sin 1''} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \alpha (2 \cos^2 x_1 + 1) - \frac{H}{a}}{\cos^2 x_1} \right], \quad [2]$$

dans laquelle a est le rayon équatorial ou 6366198^m;

H la hauteur idéale d'une atmosphère de densité constante qui produirait la pression constatée par le baromètre dans la couche inférieure; et α une quantité donnée par la formule

$$\alpha = \frac{p \delta}{2(1 + p \delta)}, \quad [3]$$

dans laquelle δ est la densité de l'air dans la couche inférieure et p le pouvoir réfringent de cette couche.

Quand la température de la couche inférieure est zéro et la hauteur barométrique 0^m,76, la formule [2] se simplifie et peut s'écrire:

$$\theta = 60'' \cdot 56706 \cdot \text{tang } x_1 - 0'' \cdot 067018 \cdot \text{tang}^3 x_1. \quad [4]$$

La seconde formule de Laplace, applicable jusqu'à 90°, est trop compliquée pour être donnée ici; on la trouvera dans la *Mécanique céleste*.

Avant Laplace, Simpson avait donné une formule

très-simple, fondée sur l'hypothèse de Cassini; c'est

$$\sin(x_1 - A\theta) = B \sin x_1. \quad [5]$$

Elle a beaucoup d'analogie avec celle de Bradley.

Enfin Delambre, remarquant que les formules données pour la réfraction se développent en général sous la forme

$$\theta = A \text{ tang } x_1 + B \text{ tang}^3 x_1 + C \text{ tang}^5 x_1 + \dots$$

a proposé d'observer diverses étoiles à leur passage supérieur au méridien et à leur passage inférieur; on aurait ainsi pour les deux distances zénithales de chacune d'elles des expressions telles que

$$x_1 + A \text{ tang } x_1 + B \text{ tang}^3 x_1 + C \text{ tang}^5 x_1 + \dots,$$

et

$$x_2 + A \text{ tang } x_2 + B \text{ tang}^3 x_2 + C \text{ tang}^5 x_2 + \dots$$

Mais la demi-somme de ces distances zénithales est égale à la distance zénithale du pôle; soit λ cette distance; on aura donc

$$(x_1 + x_2) + A(\text{tang } x_1 + \text{tang } x_2) + B(\text{tang}^3 x_1 + \text{tang}^3 x_2) + C(\text{tang}^5 x_1 + \text{tang}^5 x_2) = 2\lambda,$$

en négligeant les puissances des tangentes supérieures à la cinquième. On aurait une équation analogue pour chaque étoile circumpolaire observée; et il serait facile d'en déduire les constantes A, B, C par la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot). C'est par cette méthode que Delambre a déterminé la latitude de Montjouy (Voy. le *Traité de Géodésie* de L. Puissant, et le *Cours d'Astronomie et de Géodésie* de l'École polytechnique, d'où nous avons extrait les principaux détails contenus dans cet article)

La réfraction astronomique n'affecte que les distances zénithales; elle n'a point d'influence sur les azimuts; cela tient à la forme sphérique des couches qui constituent l'atmosphère.

La réfraction astronomique est considérable pour les astres placés à l'horizon; elle s'élève dans ce cas jusqu'à 35'.

La *Connaissance des temps* contient une table des réfractions moyennes pour la température de 10° centigrades et pour une pression de 0^m,76. Les navigateurs peuvent s'en contenter la plupart du temps. Mais on trouve dans le même recueil une seconde table, placée à la suite de la première, et donnant les coefficients par lesquels il faut multiplier la réfraction moyenne pour obtenir la réfraction qui correspond à une température et à une pression données.

Voici un extrait de la table des réfractions moyennes:

DISTANCE zénithale observée.	RÉFRACTION.	DISTANCE zénithale observée.	RÉFRACTION.	DISTANCE zénithale observée.	RÉFRACTION.
0	0''	35°	41''	32°	6' 35''
1	1	40	49	33	7 — 26
2	2	45	58	34	8 — 30
3	3	50	1' — 9	35	9 — 55
4	4	55	1 — 23	36	11 — 49
5	5	60	1 — 41	37	14 — 29
10	10	65	2 — 4	38	18 — 23
15	16	70	2 — 39	39	24 — 22
20	21	75	3 — 55	40	33 — 48
25	27	80	5 — 20		
30	34	81	5 — 54		

RÉFRACTION GÉODÉSIQUE, déviation que l'at-

mosphère fait éprouver aux rayons lumineux émanés d'un point situé à la surface du globe. La réfraction géodésique n'est autre chose que la réfraction astronomique, avec cette différence que les rayons lumineux, au lieu de pouvoir être considérés comme venant d'une distance infinie, viennent d'un point situé à une distance finie de l'observateur.

Pour évaluer la réfraction géodésique, on admet ordinairement que la courbe qu'affecte le rayon lumineux en traversant les couches successives de l'atmosphère, peut être considérée comme se confondant sensiblement avec un arc de cercle. La déviation totale, qui est l'angle que le dernier élément de l'arc fait avec sa corde, peut alors être regardée comme proportionnelle à l'arc, ou, ce qui revient au même, à l'angle des verticales menées par ses extrémités. Si $2n$ désigne le nombre par lequel il faut multiplier l'angle de ces verticales pour avoir la déviation, n est ce que l'on appelle le coefficient de la réfraction géodésique.

Il existe encore de l'incertitude sur la valeur de ce coefficient. Delambre le regardait comme égal à 0,08; les opérations faites pour la carte de France ont donné pour moyenne 0,065; le colonel Bayer a trouvé, en Prusse, pour la valeur de ce nombre, 0,068 au bord de la mer et 0,062 dans l'intérieur des terres; suivant M. Struve, sa valeur est 0,072 sur le haut du Caucase, et 0,088 au pied de cette chaîne de montagnes (Voy. le Cours de Géodésie de M. Laussedat à l'École polytechnique. Voy. aussi l'art. NIVELLEMENT).

Les marins se servent pour calculer la DÉPRESSION (Voy. ce mot) d'une table qui suppose au coefficient de la réfraction la valeur 0,08.

REGISTRE DE NIVELLEMENT, carnet dans lequel on inscrit, sous une forme claire et commode pour les calculs, les résultats d'un nivellement. Le modèle ci-dessous donnera une idée de la disposition la plus généralement adoptée :

NUMÉROS des points observés.	COUPS de niveau		DIFFÉRENCE de niveau.		COTES.	OBSERVATIONS.
	arrière	avant	+	-		
1	0,531	"	"	"	150,000	Donnée.
2	"	2,063	1,532	"	151,532	
3	0,656	"	"	"	"	
3	"	1,897	1,241	"	152,773	
4	0,811	"	"	"	"	
4	"	0,764	"	0,047	152,726	
5	1,012	"	"	"	"	
5	"	1,850	0,838	"	153,564	
5	0,761	"	"	"	"	
6	"	0,547	"	0,214	153,350	

La première colonne contient les numéros d'ordre des points observés; la seconde les hauteurs du voyant pour les coups arrière (Voy. NIVELLEMENT), la troisième les hauteurs du voyant pour les coups d'avant; on fait la différence entre chaque coup arrière et le coup avant qui le suit, et on inscrit cette différence dans la 4^e colonne si elle est positive, c'est-à-dire si la hauteur du coup avant surpasse la hauteur du coup arrière; dans le cas contraire, on inscrit la différence dans la 5^e colonne. La cote du point 1 étant supposée donnée, on l'inscrit dans la 6^e colonne en face du n° 1; puis, pour obtenir les cotes

suyvantes, on ajoute algébriquement les différences de niveau inscrites dans les deux colonnes précédentes, c'est-à-dire qu'on les ajoute réellement si elles sont dans la colonne intitulée +, et qu'on les retranche au contraire si elles sont dans la colonne intitulée —. Ce tableau offre une vérification dont on a soin de profiter; il faut que la différence entre la somme des coups avant portés dans la 3^e colonne et la somme des coups arrière portés dans la 2^e soit précisément égale à la différence entre la cote du dernier point et celle du premier; c'est ce qui arrive ici : la somme des coups avant est 7^m,121; celle des coups arrière est 3^m,771; différence 3^m,350 qui est bien égale à celle qui existe entre 153^m,350, cote du point 6, et 150^m,000, cote du point 1.

RÈGLE, instrument qui sert à tracer des lignes droites; c'est une lame de bois ou de métal, à bords parallèles et parfaitement dressés; l'un de ces bords est souvent aminci en biseau. Pour vérifier une règle, on trace une ligne avec l'un de ses bords AB; on renverse ensuite la règle en la faisant



tourner autour de AB, et l'on se sert de nouveau de ce même bord pour tracer une ligne qui doit coïncider avec la première si la règle est juste; si elle ne l'est pas, l'erreur se trouve ainsi doublée, et l'on en est averti par l'épaisseur du trait de crayon, plus grande à l'endroit défectueux. Dans la figure on a exagéré l'erreur pour rendre la méthode sensible. — Pour tracer, avec une bonne règle, une droite qui passe par deux points donnés, on fait affleurer contre ces deux points l'un des bords de la règle, et l'on suit ce bord avec le crayon. Pour prolonger une droite déjà tracée, on fait coïncider avec cette droite une partie du bord de la règle, et l'on se sert du reste de ce bord pour tracer le prolongement demandé. — Les bonnes règles se font en bois de poirier très-sec.

RÈGLE À CALCUL, instrument qui sert à simplifier les calculs numériques en tenant lieu d'une table de logarithmes. Il a été inventé en 1625 par Edmond Gunter, mathématicien anglais.

Il se compose de deux parties : 1^o d'une règle fixe portant des divisions inégales numérotées de 1 à 100; le chiffre 1 répond à l'une des extrémités de la règle, et le nombre 100 à l'autre extrémité; les distances comprises depuis l'extrémité 1 jusqu'aux différentes divisions sont proportionnelles aux logarithmes des nombres inscrits à côté de ces divisions;

2^o D'une règle mobile dans une coulisse, et pouvant glisser à frottement doux le long de la règle fixe; cette règle mobile, appelée *reglette*, porte les mêmes divisions que la règle fixe.

On peut apprécier les dixièmes au moyen des subdivisions tracées sur les deux échelles, et avec un peu d'habitude on peut tenir compte des centièmes.

La règle à calcul permet d'obtenir les produits et les quotients d'une manière rapide, quand on est suffisamment exercé; les résultats ne sont, en général, qu'approchés; mais l'approximation est

suffisante dans la plupart des cas où l'on emploie cet instrument.

(Pour l'intelligence des exemples qui suivent, nous supposons que le lecteur ait une règle à calcul entre les mains.)

Soit à multiplier 465,2 par 72,34. On transporte d'abord mentalement les virgules à la droite du chiffre des plus hautes unités; on obtient ainsi 4,652 et 7,234. On fait ensuite glisser la réglette jusqu'à ce que son extrémité 1 vienne se placer sur la règle fixe au point qui répond à 4,652. On cherche, sur la réglette ainsi placée, le point qui répond à 7,234. Ce point correspond au point de la règle qui répond à 33,7 à peu près. On en conclut que le produit de 4,652 par 7,234 est à peu près 33,7 puisque, d'après l'opération, le logarithme de ce nombre est la somme des logarithmes des deux facteurs proposés. Mais, comme le dividende a été divisé par 100 et le multiplicateur par 10, le produit est 1000 fois trop petit; sa valeur véritable est donc 33700 à moins d'une centaine. (La valeur exacte est 33652,568.)

Soit à diviser 475,8 par 297,6. On transporte la virgule du diviseur après le chiffre des plus hautes unités, et l'on place celle du dividende après le second chiffre à gauche. On a ainsi à diviser 47,58 par 2,976. On fait glisser la réglette jusqu'à ce que l'extrémité 1 vienne correspondre au point de la règle fixe qui répond au diviseur 2,976. On cherche, sur la règle fixe, le point qui répond au dividende 47,58; ce point correspond sur la réglette au point qui répond à 16 environ. On en conclut que le quotient est à peu près 16; car, d'après l'opération, son logarithme est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur. Mais, à l'inspection des deux nombres donnés, on voit que le chiffre des plus hautes unités du quotient cherché est celui des unités simples; ce quotient est donc 1,6 à moins d'un dixième. (Le quotient à moins d'un centième est 1,59.)

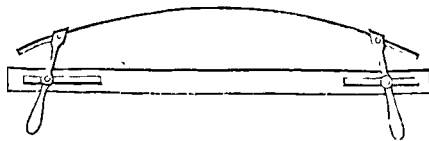
On opérerait d'une manière analogue pour effectuer une multiplication ou une division quelconque. Toute la difficulté de ces opérations consiste dans la lecture des nombres sur la règle et sur la réglette. Cette lecture exige de bons yeux et une grande habitude, sans laquelle les avantages de la règle à calcul deviendraient illusoire. Cet instrument est très-répandu en Angleterre, où on le trouve entre les mains de tous les ouvriers. En France, on a fait jusqu'ici de vains efforts pour le rendre populaire. Les constructeurs y ont inscrit, indépendamment des logarithmes des nombres, ceux des lignes trigonométriques, une échelle particulière pour extraire les racines carrées, et une foule de renseignements, utiles sans doute, mais qui compliquent singulièrement l'aspect de l'appareil. Cette complication n'est pas étrangère au peu de succès que la règle à calcul a obtenu chez nous.

La règle à calcul est également connue sous le nom de *règle logarithmique*.

RÈGLE DE BAYES, règle relative au calcul des probabilités *a posteriori*, et que l'on peut énoncer de la manière suivante : *Les probabilités des causes, ou des hypothèses, sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés* (Voy. **PROBABILITÉ**).

RÈGLE DE KUTSCH, double décimètre dont les bords, taillés en biseau, sont divisés en centimètres et millimètres. Ce petit instrument est très-employé dans le dessin linéaire, parce qu'il peut servir à la fois d'*échelle*, de *règle* et d'*équerre* (Voy. ces mots); les divisions correspondantes des deux bords de la règle sont en effet situées sur une même droite perpendiculaire à ces bords, en sorte qu'il suffit de faire coïncider avec une droite deux de ces divisions correspondantes pour donner aux bords de la règle une direction perpendiculaire à cette droite.

RÈGLE PLOYANTE, règle en bois flexible ou en baleine, dont les extrémités sont engagées dans des curseurs qu'on peut faire glisser le long d'une règle droite rigide, en bois ou en fer, et fixer en un point quelconque de cette dernière à l'aide de vis de pression. En rapprochant plus ou moins les curseurs, on fait prendre à la règle flexible une courbure plus ou moins prononcée



Quelquefois on dispose le long de la règle droite, et perpendiculairement à sa direction, des vis dont le bout touche à la règle ployante du côté de sa concavité, et à l'aide desquelles on peut la maintenir dans la courbure qu'on lui a donnée, ou même modifier un peu cette courbure.

En réalité, la courbe qu'affecte la règle ployante est celle qui est connue sous le nom d'*élastique*; mais, comme on ne lui donne en général qu'une faible courbure, elle peut, sans erreur sensible, remplacer une autre courbe, au moins dans une partie de son parcours, surtout si l'on y adapte les vis dont il vient d'être parlé.

On emploie la règle ployante dans tous les tracés où l'on a à faire passer une courbe par un certain nombre de points donnés. On en fait particulièrement usage pour tracer les méridiens et les parallèles dans les cartes géographiques.

RÈGLES DE M. LECHATÉLIER, règles qui servent de guide dans la construction des locomotives.

1° *Le nombre de tours des roues motrices par seconde doit être compris entre 2½ et 3*, afin que le mécanisme ne soit pas fatigué par des oscillations trop rapides des pistons. Cette règle sert à déterminer le diamètre des roues motrices, connaissant la vitesse que doit prendre la machine. Car si v est la vitesse exprimée en kilomètres par heure et D le diamètre des roues en mètres, le chemin parcouru dans une seconde étant

$$\pi D \times 2,5 \text{ ou } \pi D \times 3,$$

le chemin parcouru par heure sera

$$3600 \cdot \pi D \cdot 2,5 \text{ ou } 3600 \cdot \pi D \cdot 3.$$

Ce chemin est exprimé en mètres; en le divisant par 1000, on aura le chemin parcouru par heure en kilomètres, c'est-à-dire la vitesse v ; on aura donc

$$v = 3,6 \cdot \pi D \cdot 2,5 \text{ ou } v = 3,6 \cdot \pi D \cdot 3,$$

d'où

$$D = \frac{v}{3,6 \cdot \pi \cdot 2,5} \text{ ou } D = \frac{v}{3,6 \cdot \pi \cdot 3},$$

ou, en mettant pour π sa valeur et effectuant les calculs.

$$D = 0,036v \text{ ou } D = 0,029v.$$

Pour une vitesse de 50 kilomètres à l'heure, par exemple, on trouverait que le diamètre des roues motrices doit être compris entre 1^m,80 et 1^m,45.

2° Les dimensions des cylindres doivent être telles, que l'effort moyen de traction exercé au pourtour des roues motrices soit égal à la résistance totale qu'éprouve le train, machine et tender compris, à la vitesse et sur le profil considéré. Cette résistance totale est celle qui est désignée par T à l'article TRACTION DES CONVOIS, et qui est donnée par la formule [11] de cet article ou par la formule de Harding. Son travail pour un tour de roue est $T \cdot \pi D$.

Désignons par Φ la pression par unité de surface sur le piston, d le diamètre de celui-ci et l sa course. La pression totale sur le piston sera

$$\frac{\Phi \pi d^2}{4},$$

et son travail pour un tour de roue

$$\frac{\Phi \pi d^2}{4} \cdot 2l;$$

mais, comme il y a deux pistons, le travail total sera exprimé par

$$\frac{\Phi \pi d^2}{4} \cdot 2l \cdot 2 \text{ ou } \Phi \pi d^2 l.$$

On devra donc avoir, d'après la règle énoncée,

$$\Phi \pi d^2 l = T \pi D,$$

d'où

$$d^2 l = \frac{TD}{\Phi}.$$

On se donnera, dans des limites convenables, le rapport de l à d , et l'on déduira de cette formule la valeur de ces dimensions. Si, par exemple, on fait

$$l = 2d,$$

on trouvera

$$d = \sqrt[3]{\frac{TD}{2\Phi}}.$$

Dans cette formule, on prend en général

$$\Phi = 4^k, 65$$

par centimètre carré. Voici d'après quelles considérations : la chaudière est timbrée à 7 atmosphères; on peut admettre, par conséquent, que la pression moyenne sur le piston est de $4 \frac{1}{2}$ atmosphères, ce qui donne par centimètre carré

$$1^k, 033 \times 4,5,$$

soit

$$4^k, 6485 \text{ ou à peu près } 4^k, 65.$$

Il convient alors d'exprimer D et d en centimètres. Si par exemple, on a

$$T = 1700^k \text{ et } D = 180^{\text{cent}},$$

on trouvera

$$d = 32^{\text{cent}}, 04 \text{ et } l = 64^{\text{cent}}, 08.$$

M. Lechatelier conseille d'augmenter la valeur de T de 20 à 25 p. 100, selon qu'il s'agit d'un train de marchandises ou d'un train de voyageurs, afin de tenir compte des résistances additionnelles dues aux frottements de la machine et à l'action de la vapeur. Mais, d'après M. Perdonnet, on se rapproche davantage des résultats fournis par l'expérience en ne tenant pas compte de cette augmentation.

3° L'adhérence sera supposée égale à $\frac{1}{6}$, proportion qui est généralement admise. En multipliant ar 6 l'effort T calculé précédemment, on aura

donc la pression que les roues motrices doivent exercer sur les rails. Si cette charge est inférieure à douze tonnes, on ne couplera pas les roues; si elle est comprise entre douze et vingt tonnes, on couplera deux paires de roues; si elle surpasse vingt tonnes, on couplera les trois paires de roues. Dans l'exemple ci-dessus, où $T = 1700^k$, on a

$$1700^k \times 6 = 10200^k,$$

soit 10,2 tonnes. Ce nombre étant inférieur à 12, il n'y aurait pas lieu de coupler les roues.

4° Le rapport de la surface de chauffe S du foyer à celle S' des tubes doit être 0,1. C'est la proportion généralement admise en Angleterre. En France, on adopte jusqu'ici $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{13}$ pour les machines à voya-

geurs, $\frac{1}{14}$ à $\frac{1}{15}$ pour les machines à marchandises.

5° Le rapport de $S + S'$ à $d^2 l$ doit se rapprocher beaucoup de l'unité si S et S' sont exprimés en mètres carrés et d et l en décimètres.

Ces deux dernières règles déterminent S et S' . Dans l'exemple ci-dessus, on a

$$d = 3^{\text{déc}}, 2 \text{ et } l = 6^{\text{déc}}, 4;$$

on en déduit

$$d^2 l = 69, 536.$$

Par conséquent, en vertu de la règle (5°),

$$S + S' = 69^{\text{m}}, 536,$$

ou, en vertu de la règle (4°),

$$1,1 \cdot S' = 69^{\text{m}}, 536,$$

d'où

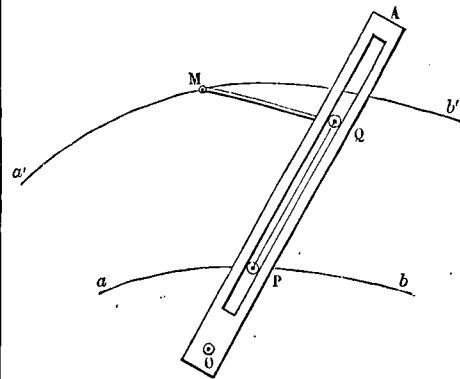
$$S' = 63^{\text{m}}, 21 \text{ et } S = 6^{\text{m}}, 32.$$

En adoptant le rapport $\frac{1}{15}$, au lieu de $\frac{1}{10}$, on trouverait

$$S' = 65^{\text{m}}, 19 \text{ et } S = 4^{\text{m}}, 34.$$

(Voy. le Traité élémentaire des chemins de fer de M. Perdonnet.)

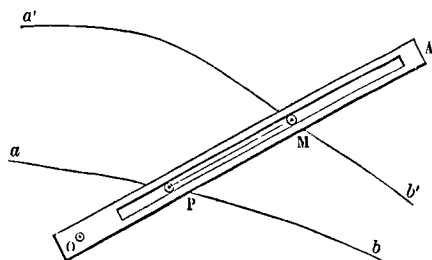
RÉGLETTE DE LA CONDAMINE, règle mobile autour d'un point fixe O, et percée d'une rainure



longitudinale dans laquelle peuvent glisser deux chevilles P et Q, maintenues à une distance constante l'une de l'autre, et formant avec une pointe à tracer M, un système de forme invariable. Si, en faisant tourner la règle autour du point fixe O, on fait glisser les deux chevilles de manière que la cheville P décrive une courbe donnée ab , la pointe M tracera une autre courbe $a'b'$, que l'on appelle la *rosette* de la courbe ab . L'appareil peut

avoir une disposition différente que l'on trouvera représentée à l'article ROSETTE.

RÈGLETTE DE NICOMÈDE, règle mobile autour d'un point fixe O, et percée d'une rainure longitu-



dinale dans laquelle peuvent glisser deux pointes à tracer P et M, maintenues à une distance constante l'une de l'autre. Si, en faisant tourner la règle, on fait glisser la pointe P de manière qu'elle décrive une courbe donnée *ab*, la pointe M décrira une autre courbe *a'b'*, qui sera la *conchoïde* de la courbe donnée. Cet appareil est dû à Nicomède, géomètre de l'antiquité, qui l'avait imaginé pour résoudre le problème de la trisection de l'angle.

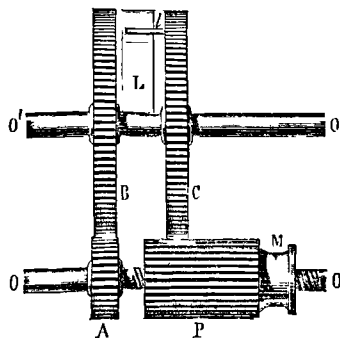
RÉGULATEUR, organe important des mécanismes d'horlogerie, dont la fonction est de régler la marche du rouage et de l'empêcher de s'accélérer sous l'action constante du moteur. Dans les horloges, le régulateur est un pendule; dans les montres, c'est un balancier circulaire oscillant sous l'action d'un ressort spiral; dans les chronomètres, c'est un balancier compensateur oscillant sous l'action d'un ressort en hélice (*Voy. CHRONOMÈTRE, HORLOGE, MONTRE, PENDULE*).

Les horlogers donnent aussi le nom de *régulateur* à une horloge construite avec soin, et ayant une marche assez régulière pour pouvoir servir à régler les montres et les pendules.

RÉGULATEUR À PAPILLON, nom donné, dans les locomotives, au registre qui règle l'ouverture par laquelle la vapeur se rend de la chaudière dans les cylindres. Il consiste en un disque mobile autour de son centre, et qui est percé d'orifices dont la forme est celle d'un trapèze circulaire. Ils correspondent à des orifices semblables percés dans un disque immobile sur lequel le papillon s'appuie. En faisant tourner celui-ci à l'aide d'une manivelle extérieure, le mécanicien peut à volonté faire correspondre les orifices des deux disques, et ouvrir ainsi le régulateur, ou faire correspondre les orifices du disque immobile aux parties pleines du papillon, et fermer ainsi le passage à la vapeur (*Voy. LOCOMOTIVES*).

RÉGULATEUR À RESSORT, ou *régulateur Poncelet*, régulateur fondé sur la flexion d'une lame élastique. L'arbre moteur OO transmet le mouvement de rotation à un axe parallèle O'O' par l'intermédiaire de deux roues dentées A et B. Sur l'axe O'O' est adaptée une lame ou flasque élastique L, qui, par l'intermédiaire d'un taquet *t*, entraîne dans le mouvement une roue C égale à B, mais folle sur l'axe O'O'. La roue C engrène avec un long pignon P monté à vis sur l'axe OO, et portant à son extrémité un manchon M. Dans l'état de régime, la transmission s'opère sans donner lieu à aucune

particularité, la lame L conservant une flexion constante; mais, si la vitesse de l'axe OO vient à augmenter, la lame L n'entraîne la roue C qu'après avoir fléchi d'une certaine quantité plus grande

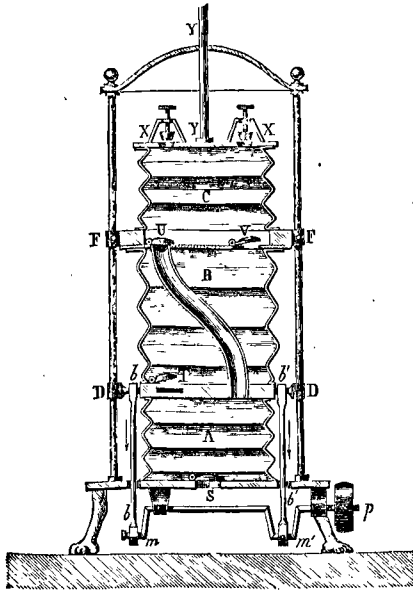


que la flexion normale, et, par conséquent, il s'établit un retard entre le mouvement de la roue A et celui du pignon P; ce pignon prend donc un mouvement relatif par rapport à l'axe OO, et, par conséquent, se déplace d'une certaine quantité le long de cet axe, puisqu'il sert d'écrou à la vis filetée sur ce même axe. Si, au lieu de s'accroître, la vitesse de l'arbre moteur OO diminue, la flexion de la lame L, au lieu de s'accroître, diminue, et il s'établit un retard en sens contraire du précédent entre les roues B et C, et, par suite, entre la roue A et le pignon P, qui est obligé ainsi de se déplacer le long de l'axe OO, dans un sens inverse du premier. Les variations de vitesse sont donc accusées par le déplacement du pignon P, et le manchon M transmet ce déplacement à la valve qui règle l'admission de la vapeur, ou à la vanne qui règle l'écoulement de l'eau, selon qu'il s'agit d'une machine à vapeur ou d'une roue hydraulique.

RÉGULATEUR À SOUFFLET, régulateur imaginé en 1837 par M. Molinié pour régler l'ouverture de vanne des roues hydrauliques. Voici en quoi il consiste. Un soufflet cylindrique à trois compartiments A, B, C est placé entre de petites colonnes montées sur un plateau à pieds, et maintenues à la partie supérieure par un chapeau. Ces compartiments sont séparés par deux diaphragmes : l'un FF, fixé sur les colonnes; l'autre DD, mobile verticalement entre des guides. Ce dernier est mis en mouvement par deux bielles *bb*, *b'b'* et par deux manivelles *m*, *m'* qui reçoivent le mouvement du moteur par l'intermédiaire d'une courroie sans fin enroulée sur la poulie *p*. Une soupape S est placée sur le plateau à pieds; une autre T sur le diaphragme mobile DD. L'orifice de celle-ci se continue à l'extérieur par une ouverture latérale pratiquée dans l'épaisseur du diaphragme même. Ces soupapes établissent alternativement la communication de l'air extérieur avec les compartiments A et B. Ces deux compartiments communiquent avec le troisième C, appelé *réservoir* : le premier par un tuyau flexible dont l'orifice supérieur est garni d'une soupape U; le second à l'aide d'une soupape V.

Voici maintenant le jeu de l'appareil : lorsque le diaphragme DD s'abaisse, il comprime l'air du compartiment A et ferme la soupape S, ouvre la soupape

U, et refoule l'air dans le réservoir; en même temps l'air extérieur s'introduit dans le compartiment B par la soupape T, et la soupape V se ferme. Le jeu inverse a lieu quand le diaphragme mobile DD re-

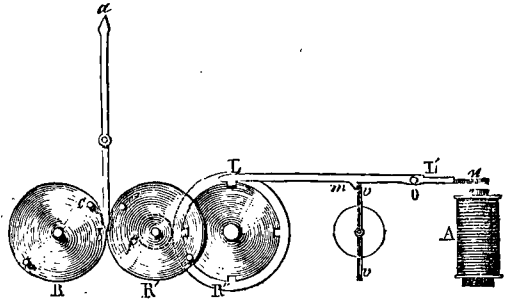


monte : il comprime l'air du compartiment B, et refoule l'air dans le réservoir par la soupape V; en même temps l'air extérieur s'introduit par la soupape S dans le compartiment A, et la soupape U se ferme. On voit que le mouvement du diaphragme DD produit ainsi un écoulement continu de l'air extérieur dans le réservoir. Celui-ci est percé à sa partie supérieure d'orifices en partie fermés par des bouchons coniques XX, dont on peut régler la position en faisant tourner les tiges à vis qui les portent. Dans l'état normal, ces orifices sont réglés de telle sorte, que la quantité d'air qui sort du réservoir dans un temps donné soit précisément égale à celle qui y est introduite par le soufflet. Mais si la vitesse de la machine s'accélère, le diaphragme DD, qui participe à toutes les variations de vitesse, s'accélère aussi. La quantité d'air introduite dans le réservoir C devient supérieure à celle qui peut en sortir dans le même temps par les orifices XX : l'air se comprime par conséquent dans le réservoir et oblige le plateau supérieur à s'élever. Si, au contraire, la vitesse de la machine se ralentit, le soufflet introduit moins d'air dans le réservoir qu'il ne s'en écoule dans le même temps; l'air du réservoir se dilate, et sa pression devenant moindre, le plateau supérieur descend par son propre poids. Les mouvements du plateau supérieur sont communiqués à la vanne à l'aide de la tige YY qui traverse le chapeau. Cette tige est soutenue à sa partie supérieure par une corde qui passe sur des poulies de renvoi et vient s'attacher à la vanne, convenablement équilibrée par des contre-poids, pour qu'elle cède facilement à l'effort qui lui est transmis. Quand la vitesse de la machine s'accélère, le plateau supérieur du réservoir s'élève; il en résulte que la vanne s'abaisse, diminue l'orifice par lequel l'eau arrive sur le ré-

cepteur hydraulique, et ralentit la vitesse de la machine. Quand la vitesse se ralentit, au contraire, le plateau supérieur du réservoir s'abaisse; il en résulte que la vanne s'élève, agrandit l'orifice d'arrivée de l'eau sur le récepteur, et accélère le mouvement de la machine.

Ce régulateur, lorsqu'il est établi avec soin, est très-sensible, et accuse des variations très-faibles dans l'action du moteur.

RÉGULATEUR ÉLECTRIQUE, mécanisme employé pour remettre à l'heure une horloge placée à distance. Il faut supposer que le retard ou l'avance n'est que d'un petit nombre de minutes en 24 heures. L'aiguille *ab* des minutes peut tourner à frottement doux sur son axe quand un obstacle l'empêche d'être entraînée avec cet axe. Près de la queue *b* de cette aiguille sont placées verticale-



ment deux roues dentées égales R et R' qui engrènent ensemble et tournent en sens contraire quand on les met en mouvement. Sur l'axe de la roue R' est monté un pignon *p* engrénant avec une roue R'' sur l'axe de laquelle est monté un chaperon présentant un certain nombre de crans. Dans l'un de ces crans s'engage une saillie ménagée à l'extrémité d'un levier LL' mobile autour d'un axe horizontal O. A l'extrémité L' de ce levier est adaptée une plaque de fer doux *n*; et au-dessous, à une petite distance, est placé un électro-aimant A. La roue R'' peut être mise en mouvement par un mécanisme d'horlogerie, dont le volant *vv* est retenu par une saillie *m* du levier LL'. L'observateur placé à la station régulatrice attend que l'horloge type placée sous ses yeux marque midi. Il met alors les fils de l'électro-aimant A en communication avec les pôles d'une pile dont il dispose. Le courant passant dans l'électro-aimant, il attire la plaque de fer doux, fait basculer le levier LL', et dégage ainsi le volant *vv* du mouvement d'horlogerie, qui aussitôt se met en marche, et fait tourner la roue R'' et par suite les roues R et R'. Deux chevilles *c* et *c'*, symétriquement placés près de la circonférence de ces roues, viennent alors l'une ou l'autre rencontrer la queue *b* de l'aiguille, et la ramènent à la position verticale si elle s'en écarte soit à droite soit à gauche, c'est-à-dire s'il y a avance ou retard. L'observateur attend 8 ou 10 secondes, pour être sûr que l'effet est produit; il interrompt alors la communication entre l'électro-aimant et l'aiguille; l'électro-aimant cesse d'attirer le fer doux; le levier LL' retombe par son extrémité de gauche sur le chaperon, et, par l'effet de la rotation de celui-ci, s'engage dans le premier cran qui se présente; le volant, en tournant, vient alors buter

contre l'arrêt m , et le mécanisme s'arrête. L'aiguille ab , entraînée par son axe, obéit alors au mécanisme de l'horloge, attendu que sa queue b se trouve dégagée des chevilles c ou c' .

Une horloge peut être ainsi réglée, à distance, deux fois en 24 heures. C'est à M. Brégué qu'est dû ce système ingénieux.

RÉGULATEUR HYDRAULIQUE. Il se compose de deux bassins, l'un inférieur, l'autre supérieur. Une pompe, dont le mouvement est lié à celui de la machine, extrait l'eau du bassin inférieur et la verse dans le bassin supérieur. En même temps l'eau du bassin supérieur s'écoule dans le bassin inférieur par un orifice que l'on peut régler à volonté. Mais cet écoulement étant sensiblement uniforme, tandis que le jeu de la pompe varie avec la vitesse de la machine, il s'ensuit que le niveau de l'eau dans le bassin supérieur s'élève quand la vitesse de la machine augmente, et s'abaisse au contraire quand la vitesse diminue. Ces variations de niveau sont accusées par un flotteur, dont le mouvement se transmet à la valve d'admission s'il s'agit d'une machine à vapeur, ou à la vanne d'écoulement s'il s'agit d'une roue hydraulique.

RÉGULATEUR LARIVIÈRE, sorte de régulateur pneumatique. Il se compose d'un cylindre dans lequel se meut un piston qui lui sert de fermeture. On fait le vide dans ce cylindre à l'aide d'une petite pompe liée au mouvement de la machine; et en même temps on laisse rentrer l'air par un orifice pratiqué à la base du cylindre et que l'on peut régler à volonté. La rentrée de l'air étant à peu près uniforme, tandis que l'épuisement dépend de la vitesse de la machine, il en résulte que la pression dans le cylindre s'accroît quand la vitesse se ralentit et qu'au contraire le piston s'éloigne de la base fixe; la pression diminue au contraire, quand la vitesse augmente, et le piston se rapproche de la base fixe. Les variations de vitesse sont donc accusées par le mouvement du piston, qui se transmet à la valve d'admission de la vapeur, pour ouvrir l'orifice quand la vitesse se ralentit, ou la fermer quand la vitesse s'accroît. Le jeu de cet appareil est donc inverse de celui du **RÉGULATEUR A SOUFFLET** (Voy. ce mot).

RÉGULATEURS, organes ou mécanismes qui, dans les machines, ont pour fonction de maintenir la vitesse entre des limites données. On en distingue diverses espèces. Les uns, comme le **PENDULE CONIQUE** ou le **RÉGULATEUR A SOUFFLET**, agissent sur le moteur pour modifier son action dans le sens convenable quand la vitesse dépasse les limites assignées; les autres, comme les **VOLANTS**, agissent à la fois sur le moteur et sur la résistance, en absorbant l'excès de travail moteur pour le convertir en puissance vive, et restituant ensuite cette puissance vive sous forme de travail moteur quand c'est la résistance qui est en excès. Parmi les régulateurs de la première espèce, on distingue les **RÉGULATEURS A FORCE CENTRIFUGE**, le **RÉGULATEUR A RESSORT**, les **RÉGULATEURS pneumatiques** (comme le **RÉGULATEUR LARIVIÈRE** et le **RÉGULATEUR A SOUFFLET** déjà cité), et le **RÉGULATEUR HYDRAULIQUE** (Voy. les mots soulignés).

RÉGULATEURS A FORCE CENTRIFUGE, mécanismes employés dans les machines, et particulièrement dans les machines à vapeur, pour maintenir

entre des limites données les variations de la vitesse de régime.

Le plus généralement adopté est le **PENDULE CONIQUE** (V. ce mot). Mais ce régulateur a un inconvénient: c'est qu'en le réglant pour une certaine vitesse de régime on règle par cela même l'orifice d'admission de la vapeur et par conséquent la puissance de la machine. Dans certaines industries, il peut être avantageux de pouvoir faire varier la puissance, tout en conservant la vitesse de régime; et alors la disposition du pendule conique ne convient plus. Il faut pouvoir élever ou abaisser le manchon mobile sans faire varier la différence de niveau, désignée par Z à l'article **PENDULE CONIQUE**, entre le centre des boules et le point de rencontre des tiges avec l'axe, puisque c'est cette différence de niveau qui règle la vitesse de régime ω , par la relation $Z = \frac{g}{\omega^2}$. On y parvient en faisant décrire

aux centres des boules, dans le plan mené par l'axe, non plus un cercle, mais une parabole ayant pour sous-normale la quantité Z ; et cette solution a été réalisée dans le **régulateur de Franke**, du reste peu employé dans la pratique. A la solution exacte on préfère la solution approximative employée par M. Farcot dans son **régulateur à tiges croisées** (fig. 1). Imaginons qu'on ait tracé la parabole qui a

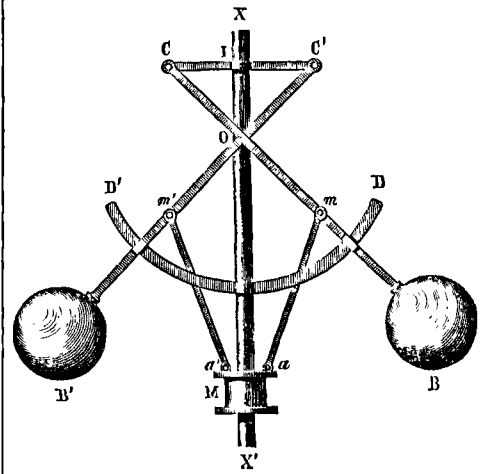


Fig. 1.

pour sous-normale Z ; qu'on ait pris, entre le sommet de la courbe et le point qui répond à la plus grande excursion de la boule, un point moyen; et qu'on ait déterminé le centre de courbure C de ce point moyen. Ce centre de courbure sera situé de l'autre côté de l'axe, d'après les propriétés connues de la développée de la parabole. C'est au point C , fixé à l'axe de rotation XX' , que M. Farcot suspend la tige CB de la boule. Les deux tiges se croisent sur l'axe en un point O ; elles sont reliées comme à l'ordinaire au manchon M par les petites tiges am et $a'm'$; et entre elles par un arc de cercle DD' , le long duquel elles peuvent glisser, et qui a pour centre le point O . Si l'on déplace le manchon, le point de croisement O se déplace aussi sur l'axe XX' , et les boules se déplacent sur le cercle osculateur de la parabole. Par conséquent si le déplace-

ment n'est pas très-considérable, la normale à ce cercle, c'est-à-dire le rayon BC, diffère peu de la normale à la parabole; en sorte que la sous-normale, qui n'est autre chose que la projection de OB sur l'axe, reste sensiblement constante et égale à Z. Par suite, le manchon peut être déplacé, dans un sens ou dans l'autre, d'une quantité assez notable sans que la sous-normale varie d'une manière sensible; en d'autres termes, on peut faire varier assez notablement la puissance de la machine, sans faire varier sensiblement la vitesse de régime; en sorte qu'on peut accroître ou diminuer la quantité des objets fabriqués sans s'écarter des conditions de vitesse qui assurent une bonne exécution.

M. Foucault a résolu le même problème d'une manière rigoureuse par une disposition fondée sur un principe tout différent. — Il emploie, comme dans le pendule conique, un losange OAMA' (fig. 2)

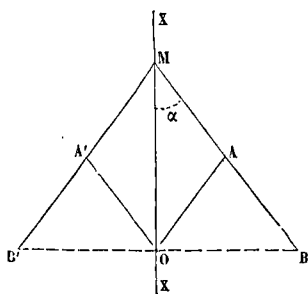


Fig. 2.

articulé à ses quatre sommets, et il adapte les boules aux prolongements des côtés MA et MA', à une distance MB double de MA. Il fixe le point O sur l'axe, et place le manchon en M. Il résulte de cette disposition, analogue à celle du BALANCIER D'OLIVER EVANS (Voy. ce mot), que, dans toutes les positions du losange, les centres B et B' des boules demeurent sur l'horizontale du point O; en sorte que le travail de la pesanteur sur les boules est constamment nul. Mais chaque boule, sollicitée par la force centrifuge à s'écarter de l'axe, est ramenée vers cet axe par la tension d'un ressort à boudin, par l'intermédiaire duquel elle est liée à l'axe. Ainsi la boule B, par exemple, est liée à l'axe par un ressort à boudin, placé de l'autre côté de l'axe, et fixé à une carcasse tournant avec cet axe. Quand la tige MB a la position verticale, l'extrémité du ressort ne dépasse pas le point O; mais si la tige s'écarte de cette position, le ressort s'allonge, et, dans la position indiquée sur la figure, il s'est allongé de OB; c'est cet allongement qui mesure la tension du ressort. Désignons-le par x ; la tension pourra être représentée par Ex ; d'ailleurs la force centrifuge a pour expression $m\omega^2 x$, en appelant m la masse de la boule et ω la vitesse angulaire de l'appareil; dans l'état de régime on devra donc avoir

$$m\omega^2 x = Ex, \quad [1]$$

d'où l'on tire

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{m}},$$

valeur indépendante de l'écartement des boules, et par conséquent de la position du manchon M.

Soit maintenant F la force qu'il faut exercer pour déplacer le manchon, ou, ce qui revient au même, l'effort égal et contraire que le manchon reçoit des organes sur lesquels il doit agir. Désignons l'angle AMO par α , la longueur MB par l , et la longueur OM par y . Appliquons à un petit déplacement du système le principe du TRAVAIL VIRTUEL (Voy. ce mot). Le travail de la force centrifuge sera $m\omega^2 x dx$, la nouvelle vitesse angulaire étant ω' . Le travail du ressort sera, en valeur absolue, $Ex dx$. Le travail de la force F sera $F dy$. On aura donc, en négligeant les frottements qui sont très-faibles,

$$2 m\omega^2 x dx - 2 Ex dx + F dy = 0.$$

Mais $x = l \sin \alpha$, $y = l \cos \alpha$; par suite

$$dx = l \cos \alpha d\alpha \text{ et } dy = -l \sin \alpha d\alpha.$$

Il viendra donc, en supprimant le facteur $l \sin \alpha d\alpha$ commun à tous les termes,

$$2(m\omega'^2 - E) l \cos \alpha = F, \quad [2]$$

d'où l'on tirera ω' si F est donné, ou F si l'on s'est donné ω' .

Si, comme dans le problème du pendule conique, on s'impose la condition

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

on en tirera, en négligeant $\frac{1}{n^2}$,

$$\omega'^2 = \frac{2\omega}{n};$$

et, en ayant égard à la relation [1], on mettra la relation [2] sous la forme

$$\frac{4E l \cos \alpha}{n} = F.$$

Les relations [1] et [3] détermineront les inconnues E et m ; c'est-à-dire que, F étant donné, l'équation [3] fera connaître E, et par suite la force du ressort; et qu'alors l'équation [1] donnera m , d'où l'on déduira le poids des boules.

Dans le régulateur de Flaud, l'axe de rotation est horizontal; l'appareil se compose d'un losange articulé. Les tiges AB, A'B' (fig. 3) sont fixées à l'axe; les tiges CD, C'D' sont fixées au manchon. Les boules sont remplacées par des masses de forme lenticulaire qui tendent à s'écarter de l'axe sous

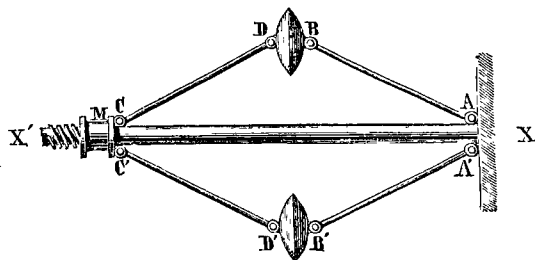


Fig. 3.

l'influence de la force centrifuge. Le manchon, qui tend alors à se rapprocher de l'extrémité AA' en glissant le long de l'axe, est retenu par un ressort en hélice fixé à l'axe du côté X'. Dans cet appareil, comme dans le précédent, le travail virtuel de la pesanteur est constamment nul, parce que l'une des boules s'élève d'une quantité précisément égale à celle dont l'autre s'abaisse. La théorie de ce régulateur est tout à fait analogue à celle du précédent.

et l'on trouve (Voy. le *Traité des mécanismes* de M. Haton de la Goupillière) que, dans l'état normal, il y a entre la vitesse angulaire ω , la constante E entrant dans l'expression de la réaction du ressort, la masse m d'une boule, et l'angle α que les côtés du losange font avec l'axe, la relation

$$\frac{m\omega^2}{2E} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad [4]$$

Indépendamment des *régulateurs à boules* dont il vient d'être question, on emploie un autre régulateur fondé sur l'action de la force centrifuge, et qui porte le nom de *régulateur-Duvoir* ou à *anneau de Saturne*. Perpendiculairement à l'axe de rotation est monté un axe secondaire, autour duquel peut tourner un anneau pesant embrassant l'axe principal. L'action de la force centrifuge tend à placer l'anneau dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, tandis qu'un ressort fixé par ses extrémités à l'axe et à l'anneau tend à coucher celui-ci le long de l'axe. L'anneau a généralement deux positions d'équilibre, dont l'une stable et l'autre instable. La théorie de cet appareil exige l'emploi des intégrales elliptiques. Elle a été donnée par M. Haton de la Goupillière dans un mémoire inséré aux *Annales des mines*, 5^e série.

Il existe un autre régulateur dit également à *anneau de Saturne*, et connu sous le nom de *régulateur de Davies*. Dans ce régulateur, l'anneau est creux et lesté de plomb dans une de ses parties; c'est par son poids, et non plus par le jeu d'un ressort, qu'il est ramené vers la position verticale quand la vitesse de rotation diminue. Le principe de cet appareil est d'ailleurs le même que dans le précédent.

RÉITÉRATION, méthode employée en Géodésie pour la mesure des angles. Elle consiste à mesurer le même angle un certain nombre de fois, en prenant chaque fois pour origine un point différent du limbe, et à adopter la moyenne des résultats obtenus. Cette méthode a été employée d'abord par Bessel dans la triangulation de la Prusse orientale, et depuis, par un grand nombre d'autres observateurs, surtout en Allemagne. En alliant cette méthode avec celle des observations *conjuguées*, dans lesquelles on marche alternativement sur le limbe dans un sens et dans le sens opposé, on élimine assez rapidement les erreurs systématiques ou constantes, telles que celles qui proviendraient de ce que l'axe géométrique de rotation ne passe pas rigoureusement par le centre des divisions, ou de l'inégale élasticité des métaux, etc. Mais, comme chaque observation élémentaire exige deux lectures, cette méthode peut laisser subsister l'erreur de lecture, malgré le nombre des réitérations.

Cependant beaucoup de géomètres, en discutant les causes d'erreurs auxquelles la méthode de **RÉITÉRATION** (Voy. ce mot) et la méthode de *Réitération* peuvent donner lieu, en sont venus à donner en définitive la préférence à cette dernière. Les deux méthodes paraissent d'ailleurs à peu près équivalentes, en ce qui concerne l'élimination des erreurs de division et des erreurs de pointé (Voy. le *Cours de Géodésie* de M. Laussedat à l'École polytechnique).

RELÈVEMENT, nom donné, dans la navigation, à la détermination de l'azimut d'un signal terrestre, et par extension à celle de l'azimut d'un

astre. Les relèvements se font à l'aide du **COMPAS DE VARIATION** (Voy. ce mot), ou par des observations astronomiques (Voy. **AZIMUT**). Pour la construction des cartes hydrographiques de peu d'étendue on emploie souvent un système de relèvements qui a la plus grande analogie avec la méthode usitée en topographie quand on fait usage de la **PLANCHETTE** (Voy. ce mot). D'une station connue et marquée sur la carte, on relève tous les points remarquables de la côte; on fait de même d'une autre station connue et marquée également sur la carte. Par les deux points qui figurent les deux stations on mène des parallèles aux directions dans lesquelles les points dont il s'agit ont été relevés; les intersections de ces droites deux à deux déterminent les points qu'il s'agissait de marquer sur la carte. Cette méthode peu précise, mais très-expéditive, suffit dans un grand nombre de cas. Quand on a besoin d'une exactitude plus grande, il faut relever les signaux par des observations astronomiques.

RELIEF. Voy. **FIGURÉ DU RELIEF**.

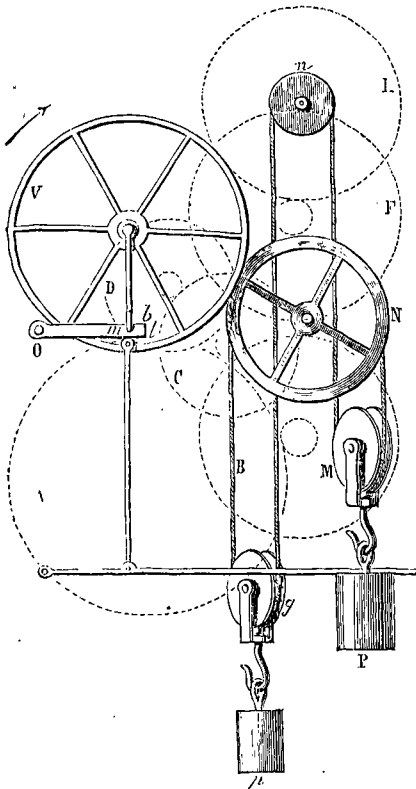
REMISES, traites qu'un banquier adresse à son correspondant pour qu'il en touche le montant à l'échéance (Voy. **LETTRE DE CHANGE**, **CHANGE**, **ARBITRAGE**).

REMONTAGE (MÉCANISME DU), dispositif employé pour remonter les montres ou les horloges sans arrêter la marche du rouage (Voy. **CHRONOMÈTRE**, **HORLOGE**).

REMONTOIR D'ÉGALITÉ, mécanisme employé en horlogerie pour remédier aux variations de la force motrice. Les remontoirs sont fondés sur l'emploi d'une force motrice auxiliaire, qui agit directement sur la roue d'échappement ou sur la roue qui la précède; la force motrice principale n'agit alors qu'à des intervalles périodiques pour remonter la force auxiliaire, c'est-à-dire la replacer dans les conditions primitives. Un grand nombre d'auteurs, Huyghens, Leibnitz, R. Robin, Gaudron, Mudge, Thiout, etc., se sont occupés de la question des remontoirs, et il est peu d'expositions où l'on ne voie figurer quelque conception nouvelle relative à ce sujet. Nous décrirons ici le remontoir de R. Robin, qui est un des plus simples.

Le moteur principal est un ressort renfermé dans un barillet sur l'axe duquel est montée la roue dentée A. Le rouage principal se compose des roues A, B, C, D, dont la dernière engrène avec le pignon d'un volant V, qui tend à se mouvoir dans le sens indiqué par la flèche. Sur l'axe de ce volant est adapté un bras b , qui, dans l'état ordinaire est arrêté par la cheville m que porte un levier l mobile autour du point O. Le moteur secondaire est un poids P suspendu par l'intermédiaire d'une poulie mobile M, à une corde sans fin qui passe sur deux poulies fixes N, n , et sur une quatrième poulie, mobile g , à laquelle est suspendu un contre-poids p . La poulie n est solidaire avec une roue E qui engrène avec le pignon de la roue d'échappement F. La poulie N porte un pignon qui engrène avec la roue C du rouage principal. Enfin un levier L, mobile autour du point O', est lié au levier l au moyen d'une tige t qui s'articule à ses extrémités avec l et L; et le levier L repose par son extrémité libre sur le poids P qui forme le moteur secondaire.

Voici maintenant les conséquences de cette disposition. La corde sans fin ne pouvant glisser sur les poulies fixes N et n dont la gorge est armée de pointes pour empêcher le glissement, l'excès du



pois P sur le contrepois p a pour effet de faire tourner la poulie n , par suite la roue E et la roue d'échappement, dont le mouvement est régularisé par un pendule et par un échappement à ancre (Voy. HORLOGE). Le poids P descend donc peu à peu, tandis que le contre-poids p remonte. L'extrémité libre du levier L s'abaissant, il en est de même de l'extrémité libre du levier l articulé avec le premier; et ce petit levier l finit par s'abaisser assez pour que le bras b ne soit plus retenu par la cheville m . A cet instant le moteur principal fait tourner le rouage A, B, C, D ; par suite la poulie N dont le pignon engrène avec la roue C , et le poids P se trouve remonté; quand il est revenu à sa position primitive, ce qui a lieu peu de temps avant que le bras b ait fait un tour entier, ce bras se trouve de nouveau arrêté par la cheville m ; et le même jeu recommence. Le poids P se trouve ainsi remonté de minute en minute.

Outre les remontoirs placés, comme celui qu'on vient de décrire, dans le corps même du rouage, il en existe qui agissent sur la sonnerie; d'autres exercent leur action sur le régulateur. Nous ne saurions entreprendre ici la description des diverses combinaisons proposées. Nous sommes d'autant moins porté à le faire que, malgré l'autorité de quelques-uns des savants qui se sont occupés de la question

des remontoirs, ce genre de mécanisme n'a jamais réussi à s'introduire dans l'horlogerie de précision; jamais, par exemple, les constructeurs d'horloges astronomiques destinées aux observatoires n'ont eu recours à ce moyen. Cela tient à ce que les inconvénients des remontoirs l'emportent en définitive sur leurs avantages; ils exigent un moteur principal plus puissant, attendu qu'il y a plus de frottements à vaincre; et, à cause de ces frottements variables, ils n'atteignent jamais complètement le but que les inventeurs se sont proposé. Les remontoirs, condamnés dès 1794 dans un rapport fait à la Convention par un jury composé de M. Mathieu l'aîné, Lepaute, A. Janvier, de Belle, Charles, Lagrange, Lépine jeune et Ferdinand Berthoud, ont été jugés avec la même sévérité par les horlogers modernes les plus compétents, et en particulier par M. Henri Robert dans la brochure qu'il a publiée sous le titre d'*Études sur diverses questions d'horlogerie*. (Voyez pour plus de détails, le *Traité d'Horlogerie* de L. Moinet.)

REMOUS, nom que l'on donne en hydraulique à divers mouvements tumultueux qui se manifestent dans un courant liquide lorsqu'il passe brusquement d'une section plus petite à une section plus grande. Telles sont les mouvements occasionnés par le passage d'une rivière entre les piles d'un pont (Voy. PILES); tels sont encore ceux que l'on observe à la sortie de l'eau qui vient d'agir sur une ROUE HYDRAULIQUE (Voy. ce mot). En général les remous correspondent à une perte de puissance vive du liquide en mouvement, attendu que l'agitation qui les constitue ne contribue en rien à l'effet utile que l'on a en vue.

Quelques auteurs rangent dans la classe des remous le phénomène du *ressaut superficiel* (Voy. RESSAUT).

RENIPLARD, soupape des chaudières à vapeur, ordinairement placée sur le *trou d'homme*, et s'ouvrant de dehors en dedans. Elle permet à l'air extérieur de rentrer dans la chaudière quand la pression intérieure devient, par une cause quelconque, inférieure à la pression atmosphérique; elle empêche ainsi que la chaudière ne soit écrasée par la pression de l'atmosphère (Voy. GÉNÉRATEURS).

On donne aussi ce nom à une soupape adaptée au condenseur dans les machines à vapeur appliquées à la navigation. Cette soupape, placée à la partie supérieure du condenseur, s'ouvre de dedans en dehors et retombe par son poids. Elle sert au passage de la vapeur lorsqu'au moment de la mise en train on *purge* le condenseur de l'air et de l'eau qu'il peut contenir, en y faisant passer un courant de vapeur (Voy. CONDENSEUR).

RENDEMENT, ou *coefficient d'effet utile*, rapport entre le travail utile d'une machine et le travail moteur qu'elle reçoit (Voy. MACHINES).

RENTE, intérêt annuel qu'un gouvernement paye pour les sommes qu'il a empruntées. Le *taux* de la rente est l'intérêt nominal correspondant à un emprunt de 100^{fr}. Mais les titres de rente étant susceptibles d'être négociés constituent une marchandise dont le prix est variable. Le *cours* de la rente est le prix actuel d'un titre de rente égal au taux.

Lorsque l'on dit, par exemple, que le $4\frac{1}{2}$ pour 100 est à 93^{fr},50, cela signifie qu'il faut payer 93^{fr},50 pour

obtenir un titre de 4^f,50 de rente annuelle. Le *taux* de la rente est ici 4 $\frac{1}{2}$ et le *cours* de la rente est 93^f,50. De même, lorsqu'on dit que le 3 pour 100 est à 67,90, cela signifie qu'il faut payer 67^f,90 pour obtenir un titre de 3^f de rente annuelle. Le *taux* de la rente est ici 3, et le *cours* de la rente est 67^f,90. — La rente est dit *au pair* lorsque le *cours* de la rente est à 100^f.

Les rentes sont servies par semestre à des époques déterminées, savoir: le 22 mars et le 22 septembre, pour les rentes 4 $\frac{1}{2}$ et 4 pour 100; les 1^{er} janvier, 1^{er} avril, 1^{er} juillet, 1^{er} octobre pour les rentes 3 pour 100. Lorsqu'on ajoute à l'énoncé d'un titre de rentes 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 les mots *jouissance du 22 mars*, ou *du 22 septembre*, cela signifie que l'acquéreur a droit aux arrérages de la rente à partir du 22 mars ou du 22 septembre. On emploie une locution pareille pour les autres rentes

La première question à résoudre est de savoir à quel *taux* réel on place son argent quand on achète de la rente à un *cours* déterminé. Supposons, par exemple, que la rente 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 soit à 94^f,80; cela veut dire que 94^f,80 rapportent 4^f,50 par an. Pour avoir le *taux* réel du placement, il faut chercher ce que rapporteraient 100^f dans les mêmes conditions. On posera donc la proportion :

$$94^f,80 : 4^f,50 = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{4^f,50 \times 100}{94^f,80}$$

ou

$$x = 4,746$$

ou environ

$$4^f,75 \text{ pour } 100.$$

Supposons de même que la rente 3 pour 100 soit à 67,90; on posera

$$67,90 : 3 = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{300}{67,90} = 4,418$$

ou environ

$$4^f,42 \text{ pour } 100$$

En général, si *t* est le *taux* de la rente, *c* le *cours*, et *x* le *taux* réel du placement, on a

$$c : t = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{100 t}{c}, \quad [1]$$

c'est-à-dire que *pour avoir le taux du placement, il faut multiplier le taux de la rente par 100, et diviser le produit par le cours.*

Le second problème consiste à trouver la relation qui existe entre une somme *a* placée en rentes sur l'État, le *taux* *t* de la rente, le *cours* *c* de cette rente, et la *quotité* *r* de rentes achetées. Cette relation est des plus simples, attendu que la rente est évidemment proportionnelle au capital placé; on a donc

$$r : a = t : c,$$

d'où

$$r = \frac{at}{c}, \quad [2]$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la quotité de rentes correspondante à un capital donné, il faut multiplier ce capital par le taux de la rente, et diviser*

le produit par le cours. Supposons, par exemple, qu'on demande combien on aurait de rente 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 au *cours* de 94,25 pour une somme de 12 818^f, on trouvera

$$r = \frac{12818^f \times 4,50}{94,25} = 612^f.$$

La formule [2] servirait à résoudre divers problèmes inverses; et particulièrement celui-ci : *Que vaut, au cours c, une quotité r de rentes à t pour 100? On en tire, en effet,*

$$a = \frac{cr}{t}, \quad [3]$$

c'est-à-dire que pour résoudre ce problème, il faut multiplier la *quotité* de rentes donnée par le *cours* et diviser le produit par le *taux*. Supposons, par exemple, qu'on demande ce que valent 645^f de rente 3 pour 100 au *cours* de 68,60, on aura

$$a = \frac{645 \times 68,60}{3} = 14749^f.$$

Une troisième classe de problèmes sur les rentes est formée par ceux dont le type suit : *On a acheté 540^f de rente 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 au cours de 92^f,80; on les revend à 94^f,60; que gagne-t-on pour 100, et quel est le bénéfice total.* On gagne 94^f,60 — 92^f,80 ou 1^f,60 sur 92^f,80; sur 100^f on gagne donc une *quotité* donnée par le quatrième terme de la proportion

$$92,80 : 1,60 = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{1,60 \times 100}{92,80} = 1^f,724 \text{ ou environ } 1^f,72.$$

Le gain total est la différence entre le *prix* de vente et le *prix* d'achat, c'est-à-dire, d'après ce qui a été dit plus haut, entre

$$\frac{94,60 \cdot 540}{4,50} \text{ et } \frac{92,80 \times 540}{4,50}$$

ou bien

$$\frac{1^f,60 \times 540}{4,50}$$

ou, en effectuant le calcul,

$$192^f.$$

D'une manière générale, si *t* est le *taux* de la rente, *c* le plus bas *cours*, *c'* le *cours* le plus haut, et *r* la *quotité* de la rente, le gain pour 100 sera donné par la proportion

$$c : c' - c = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{(c' - c) 100}{c} \quad [4]$$

et le bénéfice total sera

$$\frac{(c' - c) r}{t}.$$

Enfin, un problème qu'on peut avoir souvent à résoudre consiste à *rechercher ce qu'une variation γ dans le cours c de la rente peut produire de variation dans le capital a qui représente une quotité r de rentes au taux t.* Soit α la variation de *a* (on aura les deux relations :

$$t : c = r : a \text{ et } t : c + \gamma = r : a + \alpha$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{cr}{t}, \text{ et } a + \alpha = \frac{(c + \gamma) r}{t} = \frac{cr}{t} + \frac{\gamma r}{t}.$$

Il en résulte

$$\alpha = \frac{Y^r}{i}, \quad [6]$$

c'est-à-dire que pour obtenir la variation du capital, il faut multiplier la variation du cours par la quotité de rentes et diviser par le taux. Si, par exemple, une personne possède 3600^r de rentes $4 \frac{1}{2}$ pour 100, une baisse de 0^r,10 dans le cours de la rente représentera une diminution dans le capital exprimée par

$$\frac{0^r,10 \cdot 3600}{4,5} \text{ ou } 80^r.$$

Les formules [1], [2], [3], [4], [5] peuvent servir à résoudre diverses questions inverses, qui n'offrent aucune difficulté, mais qui se rencontrent rarement dans la pratique (*Voy. nos Problèmes et Exercices d'Arithmétique et d'Algèbre*).

RENTES VIAGÈRES. Une rente viagère est une somme payée annuellement à une personne jusqu'à l'époque de son décès.

I. Si l'on veut connaître le capital qui représente une rente de ce genre, on peut employer les considérations suivantes. On sait que le produit d'un gain plus ou moins probable par la probabilité de l'obtenir constitue ce que l'on appelle l'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (*Voy. ce mot*) relative à ce gain; on sait d'autre part (*Voy. MORTALITÉ*) que la probabilité, pour une personne de l'âge n , d'atteindre l'âge $n + p$, est le rapport entre le nombre des survivants de l'âge $n + p$ et le nombre des vivants de l'âge n . Cela posé, soit v_n le nombre des vivants du même âge que la personne dont il s'agit; soit v_{n+1} le nombre des vivants de l'âge $n + 1$, v_{n+2} le nombre des vivants de l'âge $n + 2$, et ainsi de suite, jusqu'à v_{n+k} , qui représentera le nombre des vivants de l'âge le plus avancé qui figure dans la table de mortalité. Soit a la rente viagère, c le capital que l'on cherche, et r l'intérêt annuel de 1^r. La somme a qui doit être payée au bout d'un an, a pour valeur actuelle, d'après les règles des INTÉRÊTS (*Voy. ce mot*),

$$\frac{a}{1+r};$$

la probabilité, pour la personne dont il s'agit, de vivre encore un an, est d'ailleurs

$$\frac{v_{n+1}}{v_n};$$

l'espérance mathématique correspondante a donc pour expression

$$\frac{a}{1+r} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n};$$

La somme a qui doit être payée au bout de 2 années, a pour valeur actuelle

$$\frac{a}{(1+r)^2};$$

la probabilité, pour la personne qui doit la toucher, de vivre encore 2 ans, est d'ailleurs

$$\frac{v_{n+2}}{v_n};$$

l'espérance mathématique correspondante est donc exprimée par

$$\frac{a}{(1+r)^2} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

On verrait de même que l'espérance mathématique

correspondante à la somme a qui doit être payée au bout de 3 ans est

$$\frac{a}{(1+r)^3} \cdot \frac{v_{n+3}}{v_n},$$

et ainsi de suite; jusqu'à l'espérance mathématique correspondante à la somme a qui doit être payée dans k années, laquelle a pour expression

$$\frac{a}{(1+r)^k} \cdot \frac{v_{n+k}}{v_n}.$$

La somme de toutes les espérances mathématiques ainsi obtenues forme l'espérance totale, ou la valeur actuelle de la rente viagère; on doit donc avoir

$$C = \frac{a}{(1+r)} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n} + \frac{a}{(1+r)^2} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_n} + \frac{a}{(1+r)^3} \cdot \frac{v_{n+3}}{v_n} + \frac{a}{(1+r)^k} \cdot \frac{v_{n+k}}{v_n} \quad [1]$$

ou

$$C = \frac{a}{v_n} \left[\frac{v_{n+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^k} \right]$$

ou en désignant par S_n la quantité entre parenthèses

$$C = \frac{a}{v_n} \cdot S_n = a \cdot \frac{S_n}{v_n} \quad [2]$$

La quantité $\frac{S_n}{v_n}$ qui figure dans cette formule exprime la valeur actuelle d'une rente viagère de 1^r sur la tête d'une personne de l'âge n . Nous désignerons cette quantité par A_n , et nous écrirons en conséquence

$$C_n = a \cdot A_n. \quad [3]$$

II. Tout se réduit donc à calculer les quantités S_n et A_n . On remarquera d'abord que S_{n-1} peut se déduire de S_n . En effet, on a

$$S_n = \frac{v_{n+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \dots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^k} \quad [4]$$

et

$$S_{n-1} = \frac{v_n}{(1+r)} + \frac{v_{n+1}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^3} + \dots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^{k+1}} \quad [5]$$

Si l'on divise par $1+r$ les deux membres de l'égalité [3] et qu'on la retranche membre à membre de l'égalité [4], on obtient

$$S_{n-1} - \frac{S_n}{(1+r)} = \frac{v_n}{(1+r)};$$

d'où

$$S_{n-1} = \frac{S_n + v_n}{(1+r)}, \quad [6]$$

c'est-à-dire que, connaissant la somme S_n relative à un certain âge n , on aura la somme S_{n-1} relative à un âge inférieur d'une année, en ajoutant à la première somme le nombre des vivants de l'âge n , et divisant le tout par 1 plus l'intérêt annuel de 1^r. Or, si, pour fixer les idées, nous supposons qu'on se serve de la table de Deparcieux, on a

$$v_{95} = 0$$

par conséquent

$$S_{94} = 0.$$

On a ensuite

$$v_{94} = 1,$$

par conséquent

$$S_{93} = \frac{0 + 1}{(1+r)}$$

Puis

$$v_{93} = 2,$$

d'où

$$S_{92} = \frac{S_{93} + 2}{(1+r)}$$

Puis

$$v_{92} = 4,$$

d'où

$$S_{91} = \frac{S_{92} + 4}{(1+r)}$$

Puis

$$v_{91} = 7,$$

d'où

$$S_{90} = \frac{S_{91} + 7}{(1+r)}$$

En continuant ainsi, on obtiendra, par un mode de calcul uniforme, toutes les valeurs de S_n .

Disant ensuite ces valeurs de S_n par les valeurs correspondantes de v_n , on obtient les valeurs de A_n .

On peut aussi calculer les valeurs de A_n directement. On a, en effet,

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \frac{S_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{S_n + v_n}{v_{n-1}(1+r)} \\ &= \frac{S_n}{v_{n-1}(1+r)} + \frac{v_n}{v_{n-1}(1+r)} \\ &= \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{S_n}{v_n(1+r)} + \frac{v_n}{v_{n-1}(1+r)} \\ &= \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{A_n}{1+r} + \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{1}{1+r} \end{aligned}$$

ou enfin

$$A_{n-1} = \frac{A_n + 1}{1+r} \cdot \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad [7]$$

formule d'une application très-simple.

Enfin, il existe encore une autre méthode pour calculer les valeurs de A_n . Reprenons la relation [4]; et multiplions tous les termes par $(1+r)^k$, après avoir remplacé dans le premier membre S_n par sa valeur $A_n \cdot v_n$, il viendra

$$A_n v_n (1+r)^k = v_{n+1} (1+r)^{k-1} + v_{n+2} (1+r)^{k-2} + v_{n+3} (1+r)^{k-3} + \dots + v_{n+k} \quad [8]$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$T_{n+p} = v_{n+p} (1+r)^{k-p},$$

on pourra écrire

$$A_n T_n = T_{n+1} + T_{n+2} + T_{n+3} + \dots + T_{n+k}. \quad [9]$$

Les valeurs de T s'obtiennent en multipliant respectivement les nombres des survivants de la table de mortalité, à partir du dernier, par

$$1, (1+r), (1+r)^2, (1+r)^3, \dots, (1+r)^k.$$

On fait les sommes successives des nombres ainsi obtenus; et en divisant chacune de ces sommes par la valeur suivante de T , on obtient la valeur correspondante de A .

Voici la table des valeurs de A_n calculées, par l'une ou l'autre des méthodes précédentes, en supposant l'intérêt à 4 pour 100, qui est le taux le plus fréquemment adopté par les Compagnies, et en prenant pour base les tables de mortalité de Deparcieux et de Du villard.

AGES.	VALEURS DE A_n , suivant		VALEURS DE A_n , suivant		VALEURS DE A_n , suivant			
	Deparcieux.	Du villard.	Deparcieux.	Du villard.	Deparcieux.	Du villard.		
	f	f	f	f	f	f		
0	14,0697	11,6182	32	16,5347	14,7105	64	8,3942	7,2381
1	17,2103	14,7428	33	16,3899	14,5494	65	8,0394	6,9646
2	17,7396	16,5164	34	16,2396	14,3839	66	7,6910	6,6929
3	18,2425	17,4740	35	16,0840	14,2138	67	7,3503	6,4236
4	18,5590	17,9608	36	15,9224	14,0388	68	7,0187	6,1571
5	18,7492	18,1777	37	15,7548	13,8586	69	6,6988	5,8939
6	18,8765	18,2339	38	15,5857	13,6731	70	6,3938	5,6345
7	18,9535	18,2094	39	15,4187	13,4822	71	6,0837	5,3797
8	18,9957	18,1268	40	15,2526	13,2856	72	5,7940	5,1299
9	19,0219	18,0134	41	15,0975	13,0834	73	5,5059	4,8862
10	19,0076	17,8823	42	14,9426	12,8754	74	5,2218	4,6491
11	18,9492	17,7416	43	14,7877	12,6617	75	4,9455	4,4199
12	18,8437	17,5960	44	14,6326	12,4425	76	4,6520	4,1998
13	18,7312	17,4466	45	14,4774	12,2177	77	4,3758	3,9904
14	18,6204	17,3011	46	14,3220	11,9974	78	4,1052	3,7937
15	18,5023	17,1544	47	14,1667	11,7818	79	3,8346	3,6125
16	18,3795	17,0091	48	14,0115	11,5713	80	3,5962	3,4500
17	18,2749	16,8652	49	13,8562	11,3659	81	3,3696	3,3108
18	18,1666	16,7230	50	13,7009	11,1656	82	3,1641	3,2003
19	18,0544	16,5820	51	13,5457	10,9701	83	2,9395	3,1251
20	17,9380	16,4422	52	13,3903	10,7793	84	2,6996	3,0920
21	17,8407	16,3031	53	13,2348	10,5932	85	2,4243	3,1054
22	17,7404	16,1644	54	13,0793	10,4117	86	2,1847	3,1617
23	17,6369	16,0258	55	12,9238	10,2348	87	1,9773	3,2331
24	17,5299	15,8868	56	12,7683	10,0624	88	1,7105	3,2490
25	17,4196	15,7469	57	12,6128	9,8945	89	1,4461	3,0885
26	17,3056	15,6059	58	12,4573	9,7311	90	1,1873	2,9299
27	17,1877	15,4632	59	12,3018	9,5722	91	0,9410	2,7732
28	17,0659	15,3184	60	12,1463	9,4177	92	0,7119	2,6174
29	16,9399	15,1712	61	11,9908	9,2672	93	0,4807	2,4638
30	16,8095	15,0210	62	11,8353	9,1207	94	0,0000	2,3127
31	16,6745	14,8676	63	11,6798	8,9782	95	0,0000	2,1627

La table de Du villard se prolongeant jusqu'à 110 ans, on a pour A_n les valeurs correspondantes.

AGES.	VALEURS de A_n .	AGES.	VALEURS de A_n .	AGES.	VALEURS de A_n .	AGES.	VALEURS de A_n .
96	2,0130	100	1,4603	104	0,9955	108	0,4808
97	1,8735	101	1,3286	105	0,8766	109	0,0000
98	1,7331	102	1,2297	106	0,8230	110	0,0000
99	1,5951	103	1,0910	107	0,7119	*	*

III. A l'aide de ces tables, on résout sans difficulté les trois problèmes principaux auxquels correspond l'équation [3]. Exemples :

1° De quel capital faut-il disposer à 60 ans pour se faire une rente viagère de 1200^f, l'intérêt étant à 4 pour 100? On a ici

$$a = 1200^f,$$

La table, d'après Deparcieux, donne

$$A_{60} = 9,7130;$$

par conséquent on a

$$C = 1200^f \times 9,7130 = 11655^f,60.$$

2° Une personne de 45 ans dispose d'un capital de 3000^f; quelle rente viagère peut-elle se faire avec ce capital? On a ici,

$$C = 30000^f;$$

la table, suivant Deparcieux, donne

$$A_{45} = 13,9042;$$

on a donc

$$a = \frac{30000^f}{13,9042} = 2157^f,62.$$

3° A quel âge peut-on, avec un capital donné, se faire une rente viagère égale à l'intérêt à 10 pour 100 de ce capital? On a ici

$$a = 0,10.C;$$

et par conséquent

$$A = \frac{1}{0,10} = 10.$$

La table, suivant Deparcieux, montre que ce nombre tombe entre 59 et 60 ans.

IV. On a supposé la rente payable annuellement. Souvent elle est exigible par semestre ou même par trimestre. On pourrait pour en calculer la valeur faire l'application des méthodes précédentes en supposant que les intérêts se capitalisent par semestre ou par trimestre, et en se servant d'une table de mortalité dans laquelle on aurait réparti uniformément les décès annuels par semestre ou par trimestre aussi. Mais il est plus simple de faire le calcul approximativement comme il suit. Si la rente est exigible par semestre, la série des seconds termes exigibles à la fin de l'année a pour valeur

$\frac{1}{2} A_n$; quant à la série des premiers termes, exigibles au milieu de l'année, elle diffère extrêmement peu de la moyenne entre une rente $\frac{1}{2}$ exigible à la fin de l'année, et une rente semblable payée d'avance au commencement de l'année, c'est-à-dire entre $\frac{1}{2} A_n$ et $\frac{1}{2} A_n + \frac{1}{2}$; cette moyenne est $\frac{1}{2} A_n + \frac{1}{4}$;

en y ajoutant la valeur de la rente $\frac{1}{2}$ exigible à la fin de l'année, on obtient $A_n + \frac{1}{4}$ pour la valeur approchée de la rente payable par semestre. Le calcul exact donne

$$A_n \times 1,000095 + 0,245454,$$

quantité qui diffère extrêmement peu de la valeur approchée. Si la rente est exigible par trimestre, on trouve par des raisonnements analogues que sa valeur approchée est $A_n + \frac{3}{8}$.

La rente viagère étant exigible jusqu'au jour du décès, il faut ajouter à sa valeur la valeur moyenne du décompte calculé en raison du temps qui s'écoule depuis le dernier terme échu jusqu'au jour du décès. Ce décompte est de $\frac{1}{2}$ franc si la rente est payable annuellement; il est de $\frac{1}{4}$ franc si la rente est payable par semestre; il est de $\frac{1}{8}$ franc si la rente est payable par trimestre.

V. On appelle *rente viagère différée*, une rente qui ne doit commencer à être servie qu'un certain nombre t d'années après l'époque du placement. Supposons qu'une personne de l'âge $n - t$ veuille jouir d'une rente viagère a à partir de l'époque où elle aura atteint l'âge n . Les probabilités qu'elle aura d'atteindre les âges $n + 1, n + 2, \dots$ jusqu'à $n + k$, sont respectivement

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}, \frac{v_{n+2}}{v_{n-1}}, \frac{v_{n+3}}{v_{n-2}}, \dots, \frac{v_{n+k}}{v_{n-t}}$$

et les valeurs de l'espérance mathématique de toucher la somme a aux époques dont il s'agit seront :

$$\frac{a}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_{n-t}}, \frac{a}{(1+r)^{t+2}} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_{n-t}}, \dots, \frac{a}{(1+r)^{t+k}} \cdot \frac{v_{n+k}}{v_{n-t}}.$$

Le capital qui représente la rente différée sera la

somme de ces espérances; on aura donc, en la désignant par C

$$C = \frac{a}{(1+r)^t \cdot v_{n-t}} \cdot \left[\frac{v_{n+1}}{1+r} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^k} \right]$$

ou

$$C = \frac{a}{(1+r)^t} \cdot \frac{S_n}{v_{n-t}} = \frac{a}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n. \quad [10]$$

Si, par exemple, une personne de 37 ans place actuellement une somme de 50000^f pour jouir à 55 ans d'une rente viagère, la valeur de cette rente sera donnée par la formule

$$50000 = \frac{a}{(1+r)^{18}} \cdot \frac{v_{37}}{v_{55}} \cdot A_{55}.$$

Si l'on suppose que les intérêts soient à 4 pour 100, et que l'on se serve de la table de Deparcieux, on trouvera :

$$v_{37} = 678, \quad v_{55} = 526, \quad A_{55} = 11,1727,$$

par conséquent

$$a = \frac{50000^f (1,05)^{18} \cdot 678}{526 \cdot 11,1727} = 11685^f,70.$$

VI. Une rente viagère peut être *temporaire*, c'est-à-dire qu'il peut être convenu qu'elle ne sera servie que pendant un temps déterminé (en supposant, bien entendu, que la personne qui doit en jour vivra un nombre d'années suffisant). Supposons qu'une personne de l'âge $n - t$ veuille se faire une rente temporaire a jusqu'à l'âge n . Pour trouver le capital dont elle devra disposer pour cela, on remarquera que si, au capital cherché C , on ajoutait le capital C' nécessaire pour constituer une rente viagère a jusqu'à l'âge n , la somme devrait donner le capital C'' nécessaire pour constituer une rente viagère *immédiate* a . Or, d'après ce qui a été établi ci-dessus, on a

$$C' = \frac{a}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n;$$

d'ailleurs

$$C'' = a \cdot A_{n-t}.$$

Il en résulte

$$C = C'' - C' = a \left[A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{A_n}{(1+r)^t} \right]. \quad [11]$$

Si par exemple, on a

$$a = 2400^f, \quad n = 50, \quad t = 22,$$

on trouvera, en calculant les intérêts à 4 pour 100 et se servant de la table de Deparcieux,

$$C = 34569^f,84.$$

VII. Une rente viagère différée, au lieu d'être constituée par le paiement immédiat d'un capital, peut être payée aussi par annuités, lesquelles restent acquises à la Compagnie, dans le cas où la personne qui doit jouir de la rente viendrait à décéder avant l'époque fixée. L'annuité qu'il faut payer dans ce cas, est précisément égale à la rente temporaire dont on jouirait en versant *immédiatement* un capital égal à celui qui est nécessaire pour constituer la rente différée. Seulement, il faut bien remarquer que le paiement de l'annuité commence une année plus tôt que la rente temporaire à laquelle on la compare, puisqu'elle devra être payée au commencement de la première année, tandis que la rente ne le serait qu'à la fin de cette année même. On commencera donc par calculer, à l'aide de la formule [10], le capital C nécessaire pour constituer une rente a différée (depuis l'âge $n - t$ jusqu'à l'âge n). On calculera ensuite la quantité entre parenthèses dans le second membre de l'équation [11].

Soit Z la valeur de cette quantité. Si x désigne l'annuité cherchée, xZ sera le capital correspondant à une rente temporaire x. Mais ce capital est inférieur à C précisément d'une annuité x, puisque la première annuité doit être payée au commencement de l'année; on a donc

$$xZ = C - x,$$

d'où

$$x = \frac{C}{Z + 1} \quad [12]$$

ou, en mettant pour C et Z leurs valeurs,

$$x = \frac{a \cdot v_n \cdot A_n}{(1+r)^t \cdot v_{n-t} \cdot A_n + 1 + A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n} \quad [12 \text{ bis}]$$

Si, par exemple, on demandait l'annuité que devrait payer une personne de 34 ans pour se constituer, à partir de 60 ans, une rente viagère de 3600^f, on fera dans la formule [10]

$$n = 60, t = 60 - 34 = 26, a = 3600.$$

La table suivant Deparcieux donnera

$$V_{60} = 463, V_{34} = 702, A_{60} = 9,7130;$$

on aura donc

$$C = \frac{3600^f}{(1,04)^{26}} \cdot \frac{463}{702} \cdot 9,7130 = 8318^f,30.$$

La table donne d'ailleurs

$$A_{34} = 16,2396.$$

La quantité entre parenthèses dans le second membre de l'équation [11] aura donc pour valeur

$$Z = 16,2396 - \frac{463}{702} \cdot \frac{9,7130}{(1,04)^{26}} = 13,9289.$$

Il viendra donc

$$x = \frac{8318^f,30}{1 + 13,9289} = 557^f,19.$$

Réciproquement, si l'annuité x était connue, et qu'on voulût en déduire la valeur de la rente viagère différée a, on tirerait de l'équation [12 bis]

$$a = \frac{x \left(1 + A_{n-t} - \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n \right) (1+r)^t}{\frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n} \quad [12 \text{ ter}]$$

Toutes ces questions peuvent être traitées par une autre méthode, fondée sur l'emploi des quantités T_n. On trouvera cette méthode exposée dans la *Théorie élémentaire des rentes viagères*, etc., par M. Maas.

VIII. Une rente viagère peut être constituée sur deux têtes, c'est-à-dire que, dans ce cas, la Compagnie à laquelle on s'adresse s'engage à servir la rente tant que les deux personnes sont vivantes. Les rentes viagères sur deux têtes donnent lieu à des questions et à des calculs analogues à ceux qui précèdent; il n'y a de différence que dans l'évaluation des probabilités.

Soit n l'âge de l'une des deux personnes, m celui de la seconde. Les probabilités pour la première personne de vivre encore 1 an, 2 ans, 3 ans, etc., sont exprimées par

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}, \frac{v_{n+2}}{v_n}, \frac{v_{n+3}}{v_n}, \dots$$

Les probabilités pour la seconde personne de vivre

encore 1 an, 2 ans, 3 ans, etc., sont exprimées de même par

$$\frac{v_{m+1}}{v_m}, \frac{v_{m+2}}{v_m}, \frac{v_{m+3}}{v_m}, \dots$$

D'après les règles du calcul des probabilités, si l'on multiplie ces fractions respectivement par les précédentes, les produits

$$\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m}, \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{v_n \cdot v_m}, \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{v_n \cdot v_m}, \dots$$

exprimeront les probabilités que les deux personnes dont il s'agit seront encore vivantes dans 1 an, dans 2 ans, dans 3 ans, etc. En mettant ces probabilités à la place de $\frac{v_{n+1}}{v_n}, \frac{v_{n+2}}{v_n}, \frac{v_{n+3}}{v_n}, \dots$, dans la formule [1], on obtiendra l'expression du capital C, équivalent à une rente viagère a constituée sur deux têtes dont les âges sont n et m. On trouvera ainsi

$$C = \frac{a}{v_n \cdot v_m} \left[\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots \right], \quad [13]$$

et si l'on pose

$$A_{n,m} = \frac{1}{v_n \cdot v_m} \left[\frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots \right]$$

on pourra écrire

$$C = a \cdot A_{n,m}. \quad [14]$$

On voit que A_{n,m} est le capital équivalent à une rente viagère de 1 franc sur deux têtes, dont les âges sont n et m.

IX. Pour calculer les valeurs de A_{n,m}, on peut d'abord remarquer qu'en désignant par S_{n,m} la quantité entre parenthèses dans A_{n,m}, on a, comme dans le cas d'une seule tête,

$$S_{n-1,m-1} = \frac{S_{n,m} + v_n \cdot v_m}{(1+r)},$$

formule qui permet de construire les valeurs successives de S en partant de la fin de la table de mortalité pour remonter vers les âges inférieurs. Disant ensuite les valeurs de S_{n,m} par celles de v_n · v_m, on obtient les valeurs de A_{n,m}.

On peut aussi calculer A_{n,m} directement. Par des transformations tout à fait semblables à celles qui ont été indiquées dans le cas d'une seule tête, on trouvera

$$A_{n-1,m-1} = \frac{(A_{n,m} + 1)}{1+r} \cdot \frac{v_n \cdot v_m}{v_{n-1} \cdot v_{m-1}}, \quad [15]$$

et l'on déduira de cette formule les valeurs successives de A.

Nous donnons ci-dessous le tableau de ces valeurs, d'après la table de Deparcieux, et en supposant l'intérêt à 4 p. 100, pour des différences d'âge croissant de 5 ans en 5 ans, depuis 0 jusqu'à 30 ans. Pour des différences d'âge qui ne sont pas un multiple de 5, on procède par INTERPOLATION (*Voy.* ce mot).

On trouvera dans la *Théorie des annuités viagères* de Baily des tables analogues calculées aux taux de 3½ et de 4½ p. 100.

AGE du plus jeune.	DIFFÉRENCES D'AGES.						
	0	5 ans.	10 ans.	15 ans.	20 ans.	25 ans.	30 ans.
0	8,6757	11,5809	11,8094	11,5731	11,3034	11,0602	10,7620
1	12,9743	14,2791	14,4250	14,0895	13,7750	13,4646	13,0825
2	13,7909	14,8028	14,8156	14,4701	14,1494	13,8158	13,4038
3	14,6026	15,2883	15,1829	14,8287	14,5036	14,1460	13,7032
4	15,1406	15,6125	15,3929	15,0344	14,7093	14,3304	13,8595
5	15,4855	15,8027	15,4961	15,1362	14,8145	14,4157	13,9184
6	15,7344	15,9066	15,5449	15,2056	14,8693	14,4509	13,9274
7	15,9047	15,9305	15,5695	15,2342	14,8835	14,4455	13,8957
8	16,0211	15,9238	15,5646	15,2342	14,8694	14,4115	13,8127
9	16,1143	15,9019	15,5453	15,2220	14,8417	14,3632	13,7124
10	16,1419	15,8442	15,4914	15,1763	14,7809	14,2816	13,5766
11	16,0970	15,7476	15,4203	15,0945	14,6840	14,1639	13,4027
12	15,9737	15,6292	15,3101	14,9738	14,5485	14,0076	13,1882
13	15,8453	15,5062	15,1959	14,8487	14,3829	13,8226	12,9634
14	15,7115	15,3782	15,0776	14,7188	14,2613	13,6291	12,7278
15	15,5720	15,2450	14,9549	14,5839	14,1089	13,4266	12,4806
16	15,4265	15,1263	14,8276	14,4437	13,9501	13,2146	12,2211
17	15,3136	15,0223	14,7141	14,3162	13,8024	13,0093	11,9854
18	15,1966	14,9148	14,5968	14,1839	13,6269	12,7942	11,7381
19	15,0751	14,8037	14,4749	14,0466	13,4435	12,5687	11,4995
20	14,9489	14,6888	14,3489	13,9039	13,2517	12,3322	11,2492
21	14,8571	14,5891	14,2371	13,7739	13,0684	12,1002	11,0222
22	14,7627	14,4865	14,1217	13,6392	12,8768	11,8779	10,8054
23	14,6657	14,3809	14,0024	13,4779	12,6763	11,6448	10,5789
24	14,5660	14,2721	13,8791	13,3097	12,4684	11,4211	10,3419
25	14,4634	14,1598	13,7516	13,1342	12,2465	11,1874	10,1146
26	14,3577	14,0440	13,6196	12,9509	12,0159	10,9623	9,8772
27	14,2488	13,9244	13,4828	12,7593	11,7949	10,7474	9,6288
28	14,1365	13,8008	13,3195	12,5588	11,5631	10,5228	9,3897
29	14,0207	13,6729	13,1492	12,3489	11,3407	10,2878	9,1501
30	13,9011	13,5405	12,9715	12,1289	11,1075	10,0627	8,8791
31	13,7775	13,4034	12,7859	11,8982	10,8836	9,8275	8,6957
32	13,6497	13,2612	12,5919	11,6769	10,6699	9,5816	8,3189
33	13,5174	13,1148	12,3889	11,4448	10,4466	9,3450	8,0387
34	13,3803	12,9646	12,1764	11,2219	10,2129	9,0980	7,7450
35	13,2382	12,7329	11,9536	10,9882	9,9839	8,8397	7,4364
36	13,0907	12,5409	11,7199	10,7634	9,7549	8,5692	7,1329
37	12,9375	12,3401	11,4951	10,5485	9,5102	8,2854	6,8357
38	12,7372	12,1103	11,2409	10,3070	9,2595	7,9949	6,5352
39	12,5274	11,8691	10,9940	10,0537	8,9972	7,6899	6,2440
40	12,3076	11,6158	10,7346	9,8083	8,7223	7,3692	5,9652
41	12,0771	11,3495	10,4818	9,5512	8,4338	7,0523	5,6800
42	11,8351	11,0893	10,2362	9,2814	8,1304	6,7401	5,4122
43	11,5809	10,8154	9,9784	9,0113	7,8316	6,4340	5,1441
44	11,3137	10,5467	9,7075	8,7424	7,5174	6,1360	4,8777
45	11,0326	10,2639	9,4423	8,4526	7,1862	5,8488	4,6161
46	10,7366	9,9850	9,1636	8,1476	6,8570	5,5536	4,3359
47	10,4623	9,7279	8,8866	7,8405	6,5428	5,2838	4,0705
48	10,1733	9,4575	8,6144	7,5365	6,2332	5,0122	3,8191
49	9,9054	9,1900	8,3440	7,2299	5,9415	4,7504	3,5661
50	9,6232	8,9271	8,0596	6,9062	5,6594	4,4925	3,3407
51	9,3617	8,6673	7,7751	6,5967	5,3798	4,2245	3,1302
52	9,1224	8,4107	7,4902	6,3028	5,1259	3,9718	2,9442
53	8,8713	8,1596	7,2088	6,0138	4,8710	3,7333	2,7392
54	8,6072	7,8960	6,9128	5,7314	4,6169	3,4864	2,4983
55	8,3645	7,6350	6,6134	5,4703	4,3766	3,2743	2,2665
56	8,1100	7,3605	6,3163	5,2020	4,1188	3,0713	2,0470
57	7,8424	7,0711	6,0216	4,9482	3,8676	2,8862	1,8562
58	7,5955	6,7993	5,7439	4,7039	3,6387	2,6890	1,6123
59	7,3367	6,5130	5,4725	4,4607	3,4021	2,4573	1,3685
60	7,0646	6,2105	5,2098	4,2215	3,1923	2,2294	1,1284
61	6,7778	5,9078	4,9337	3,9642	2,9909	2,0133	0,8973
62	6,4745	5,6050	4,6794	3,7116	2,8060	1,8252	0,6817
63	6,1865	5,3171	4,4282	3,4798	2,6092	1,5849	0,4649
64	5,8810	5,0319	4,1753	3,2383	2,3772	1,3440	"
65	5,5584	4,7507	3,9224	3,0191	2,1465	1,1052	"
66	5,2461	4,4710	3,6599	2,8131	1,9311	0,8775	"
67	4,9461	4,2124	3,4100	2,6291	1,7472	0,6672	"
68	4,6603	3,9617	3,1791	2,4338	1,5116	0,4558	"
69	4,3916	3,7218	2,9487	2,2126	1,2813	"	"
70	4,1442	3,4973	2,7510	2,0017	1,0571	"	"
71	3,8911	3,2580	2,5608	1,8012	0,8403	"	"
72	3,6661	3,0379	2,3980	1,6357	0,6423	"	"
73	3,4445	2,8320	2,2236	1,4210	0,4425	"	"
74	3,2294	2,6238	2,0238	1,2080	"	"	"
75	3,0255	2,4431	1,8322	1,0005	"	"	"
76	2,8001	2,2622	1,6450	0,7969	"	"	"
77	2,5869	2,1025	1,4878	0,6097	"	"	"
78	2,3952	1,9407	1,2913	0,4246	"	"	"
79	2,1940	1,7502	1,0909	"	"	"	"

AGE du plus jeune.	DIFFÉRENCES D'AGES.						
	0	5 ans.	10 ans.	15 ans.	20 ans.	25 ans.	30 ans.
80	2,0310	1,5786	0,9020	»	»	»	»
81	1,8831	1,4228	0,7223	»	»	»	»
82	1,7651	1,3038	0,5620	»	»	»	»
83	1,6310	1,1398	0,3995	»	»	»	»
84	1,4863	0,9614	»	»	»	»	»
85	1,2883	0,7876	»	»	»	»	»
86	1,1378	0,6258	»	»	»	»	»
87	1,0328	0,4923	»	»	»	»	»
88	0,8664	0,3497	»	»	»	»	»
89	0,7036	»	»	»	»	»	»
90	0,5481	»	»	»	»	»	»
91	0,4076	»	»	»	»	»	»
92	0,2982	»	»	»	»	»	»
93	0,2404	»	»	»	»	»	»
94	»	»	»	»	»	»	»
95	»	»	»	»	»	»	»

Pour donner un exemple de l'emploi de cette Table, supposons qu'on demande le prix d'une rente viagère de 6000 francs sur deux têtes, âgées l'une de 37 ans et l'autre de 50. La Table donne pour les âges

37 et 37 + 10....	$\Lambda = 11,4951$	Diff. Prem.	Diff. Seconde.
37 et 37 + 15....	10,5485	-1,9466	-0,0917
37 et 37 + 20....	9,5102	-1,0383	

$$A_{37,50} = 11,4951 + \left(-0,9466 + \frac{1}{2} \cdot 0,0917\right) \frac{3}{5} - \frac{1}{2} 0,0917 \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$A_{37,50} = 10,9381$$

Le prix demandé est donc

$$6000' \times 10,9381$$

c'est-à-dire

$$65628',60$$

D'après une formule d'interpolation connue, on aura donc

Voici maintenant une Table analogue à la précédente, mais calculée d'après la loi de mortalité de Duvillard.

PRIX D'UNE RENTE VIAGÈRE DE UN FRANC SUR DEUX TÊTES, D'APRÈS DUVILLARD.

AGE du plus jeune.	DIFFÉRENCES D'AGES.						
	0	5 ans.	10 ans.	15 ans.	20 ans.	25 ans.	30 ans.
0	6,1070	9,5457	9,4751	9,1758	8,8793	8,5884	8,2786
1	9,7821	12,1631	11,9382	11,5506	11,1746	10,8001	10,3908
2	12,2778	13,6349	13,2954	12,8600	12,4406	12,0162	11,5462
3	13,7700	14,4033	13,9921	13,5345	13,0930	12,6382	12,1262
4	14,5893	14,7627	14,3129	13,8466	13,3945	12,9202	12,3775
5	14,9935	14,8877	14,4186	13,9536	13,4966	13,0080	12,4410
6	15,1492	14,8788	14,4044	13,9437	13,4893	12,9678	12,3957
7	15,1580	14,7935	14,3217	13,8669	13,4057	12,8931	12,2863
8	15,0807	14,6651	14,2003	13,7516	13,2884	12,7644	12,1382
9	14,9538	14,5134	14,0577	13,6146	13,1483	12,6121	11,9666
10	14,7992	14,3498	13,9040	13,4654	12,9948	12,4454	11,7801
11	14,6304	14,1814	13,7453	13,3099	12,8174	12,2697	11,5842
12	14,4554	14,0121	13,5850	13,1509	12,6682	12,0882	11,3819
13	14,2790	13,8444	13,4253	12,9914	12,4973	11,9026	11,1752
14	14,1041	13,6795	13,2670	12,8313	12,3267	11,7143	10,9652
15	13,9324	13,5181	13,1107	12,6716	12,1547	11,5236	10,7528
16	13,7647	13,3604	12,9565	12,4965	11,9817	11,3309	10,5382
17	13,6013	13,2061	12,8041	12,3517	11,8074	11,1363	10,3217
18	13,4422	13,0550	12,6533	12,1924	11,6319	10,9398	10,1034
19	13,2872	12,9068	12,5037	12,0326	11,4549	10,7413	9,8835
20	13,1360	12,7609	12,3549	11,8721	11,2760	10,5407	9,6618
21	12,9882	12,6170	12,1910	11,7105	11,0952	10,3380	9,4386
22	12,8013	12,4743	12,0562	11,5473	10,9120	10,1330	9,2138
23	12,6422	12,3324	11,9066	11,3822	10,7264	9,9257	8,9874
24	12,4872	12,1908	11,7557	11,2148	10,5381	9,7159	8,7597
25	12,3360	12,0488	11,6030	11,0448	10,3469	9,5037	8,5304
26	12,2801	11,8909	11,4482	10,8717	10,1526	9,2892	8,2999
27	12,1407	11,7603	11,2908	10,6955	9,9552	9,0722	8,0682
28	12,0007	11,6138	11,1303	10,5157	9,7545	8,8527	7,8353
29	11,8596	11,4650	10,9685	10,3323	9,5506	8,6311	7,6015
30	11,7169	11,3133	10,7990	10,1451	9,3433	8,4072	7,3671
31	11,5428	11,1441	10,6140	9,9412	9,1211	8,1706	7,1227
32	11,4217	10,9981	10,4506	9,7573	8,9179	7,9522	6,8955
33	11,2707	10,8351	10,2703	9,5580	8,7010	7,7225	6,6800

AGE du plus jeune.	DIFFÉRENCES D'ÂGES.						
	0	5 ans.	10 ans.	15 ans.	20 ans.	25 ans.	30 ans.
34	11, 1161	10, 6678	10, 0856	9, 3545	8, 4812	7, 4913	6, 4246
35	10, 9575	10, 4959	9, 8962	9, 1471	8, 2585	7, 2588	6, 1898
36	10, 7946	10, 3191	9, 7022	8, 9358	8, 0332	7, 0254	5, 6556
37	10, 6272	10, 1374	9, 5035	8, 7209	7, 8056	6, 7912	5, 7227
38	10, 4548	9, 9507	9, 3003	8, 5023	7, 5759	6, 5565	5, 4912
39	10, 2776	9, 7590	9, 0927	8, 2806	7, 3444	6, 3218	5, 2617
40	10, 0952	9, 5623	8, 8808	8, 0557	7, 1114	6, 0874	5, 0345
41	9, 9076	9, 3606	8, 6648	7, 8281	6, 8773	5, 8536	4, 8101
42	9, 7150	9, 1542	8, 4451	7, 5981	6, 6423	5, 6209	4, 5892
43	9, 5171	8, 9433	8, 2218	7, 3661	6, 4070	5, 3896	4, 3724
44	9, 3144	8, 7281	7, 9955	7, 1323	6, 1717	5, 1602	4, 1604
45	9, 1069	8, 5088	7, 7663	6, 8973	6, 0368	4, 9332	3, 9541
46	8, 8947	8, 2858	7, 5347	6, 6614	5, 7026	4, 7092	3, 7547
47	8, 6782	8, 0595	7, 3011	6, 4251	5, 4697	4, 4886	3, 5635
48	8, 4578	7, 8302	7, 0659	6, 1887	5, 2386	4, 2722	3, 3823
49	8, 2337	7, 5985	6, 8295	5, 9527	5, 0096	4, 0606	3, 2134
50	8, 0064	7, 3645	6, 5925	5, 7176	4, 7833	3, 8548	2, 0596
51	7, 7762	7, 1290	6, 3553	5, 4837	4, 5602	3, 6558	2, 9248
52	7, 5436	6, 8923	6, 1182	5, 2516	4, 3407	3, 4649	2, 8138
53	7, 3090	6, 6548	5, 8818	5, 0217	4, 1256	3, 2836	2, 7326
54	7, 0720	6, 4171	5, 6465	4, 7944	3, 9155	3, 1143	2, 6874
55	6, 8317	6, 1796	5, 4625	4, 5701	3, 7112	2, 9596	2, 6828
56	6, 5980	5, 9427	5, 1809	4, 3495	3, 5137	2, 8230	2, 7169
57	6, 3601	5, 7069	4, 9515	4, 1329	3, 3241	2, 7092	2, 7673
58	6, 1226	5, 4726	4, 7248	3, 9208	3, 1438	2, 6237	2, 7739
59	5, 8850	5, 2402	4, 5013	3, 7139	2, 9749	2, 5726	2, 6300
60	5, 6504	5, 0102	4, 2814	3, 5129	2, 8197	2, 5604	2, 4882
61	5, 4165	4, 7829	4, 0655	3, 3185	2, 6816	2, 5856	2, 3483
62	5, 1848	4, 5587	3, 8540	3, 1337	2, 5647	2, 6272	2, 2097
63	4, 9555	4, 3380	3, 6474	2, 9538	2, 4742	2, 6287	2, 0732
64	4, 7291	4, 1210	3, 4460	2, 7865	2, 4158	2, 4876	1, 9390
65	4, 5058	3, 9082	3, 2505	2, 6320	2, 3938	2, 3491	1, 8056
66	4, 2860	3, 6998	3, 0615	2, 4930	2, 4073	2, 2131	1, 6717
67	4, 0701	3, 4962	2, 8798	2, 3730	2, 4374	2, 0788	1, 6044
68	3, 8584	3, 2977	2, 7063	2, 2770	2, 4318	1, 9472	1, 5075
69	3, 6511	3, 1046	2, 5425	2, 2100	2, 2945	1, 8187	1, 3208
70	3, 4485	2, 9175	2, 3900	2, 1761	2, 1601	1, 6920	1, 2050
71	3, 2509	2, 7367	2, 2512	2, 1749	2, 0286	1, 5664	1, 0920
72	3, 0585	2, 5629	2, 1291	2, 1904	1, 8993	1, 4499	0, 9998
73	2, 8718	2, 3969	2, 0279	2, 1760	1, 7730	1, 3336	0, 8896
74	2, 6909	2, 2396	1, 9518	2, 0440	1, 6502	1, 2199	0, 8087
75	2, 5165	2, 0926	1, 9051	1, 9155	1, 5296	1, 1093	0, 7888
76	2, 3490	1, 9578	1, 8881	1, 7904	1, 4107	1, 0010	0, 6679
77	2, 1891	1, 8378	1, 8883	1, 6684	1, 3008	0, 9117	0, 5873
78	2, 0377	1, 7363	1, 8665	1, 5504	1, 1920	0, 8038	0, 4112
79	1, 8964	1, 6580	1, 7459	1, 4371	1, 0867	0, 7188	"
80	1, 7670	1, 6076	1, 6314	1, 3279	0, 9854	0, 6424	"
81	1, 6527	1, 5884	1, 5242	1, 2227	0, 8879	0, 6053	"
82	1, 5577	1, 5942	1, 4254	1, 1291	0, 8104	0, 5360	"
83	1, 4886	1, 5967	1, 3378	1, 0415	0, 7205	0, 3818	"
84	1, 4541	1, 5297	1, 2648	0, 9636	0, 6592	"	"
85	1, 4650	1, 4851	1, 2083	0, 8975	0, 5865	"	"
86	1, 5300	1, 4645	1, 1693	0, 8443	0, 5719	"	"
87	1, 6372	1, 4594	1, 1488	0, 8168	0, 5316	"	"
88	1, 7190	1, 4405	1, 1178	0, 7680	0, 3973	"	"
89	1, 6174	1, 3436	1, 0252	0, 6998	"	"	"
90	1, 5181	1, 2481	0, 9348	0, 6143	"	"	"
91	1, 4209	1, 1532	0, 8459	0, 5819	"	"	"
92	1, 3248	1, 0648	0, 7735	0, 5183	"	"	"
93	1, 2308	0, 9765	0, 6860	0, 3718	"	"	"
94	1, 1395	0, 8904	0, 6721	"	"	"	"
95	1, 0491	0, 8059	0, 5420	"	"	"	"
96	0, 9580	0, 7217	0, 5104	"	"	"	"
97	0, 8786	0, 6557	0, 4571	"	"	"	"
98	0, 7980	0, 5756	0, 3339	"	"	"	"
99	0, 7204	0, 5158	"	"	"	"	"
100	0, 6480	0, 4422	"	"	"	"	"
101	0, 5844	0, 4103	"	"	"	"	"
102	0, 5070	0, 3716	"	"	"	"	"
103	0, 4306	0, 2733	"	"	"	"	"
104	0, 3850	"	"	"	"	"	"
105	0, 3153	"	"	"	"	"	"
106	0, 3120	"	"	"	"	"	"
107	0, 2981	"	"	"	"	"	"
108	0, 2403	"	"	"	"	"	"
109	0, 0000	"	"	"	"	"	"

X. Une rente viagère constituée sur deux têtes | que la Compagnie qui s'engage à servir la rente
 peut être payable jusqu'au dernier décès, c'est-à-dire | doit la payer tant qu'une des deux têtes sera vivante.

Dans ce cas, les probabilités doivent être évaluées d'une autre manière.

La probabilité pour une personne de l'âge n de vivre encore une année étant

$$\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la probabilité contraire, ou la probabilité pour cette personne de mourir dans l'année, sera, suivant la règle des probabilités,

$$1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

De même, la probabilité pour une autre personne de l'âge m de mourir dans l'année est

$$1 - \frac{v_{m+1}}{v_m}.$$

La probabilité que les deux personnes mourront dans l'année est le produit de ces deux probabilités particulières, c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \left(1 - \frac{v_{m+1}}{v_m}\right),$$

et par conséquent la probabilité contraire, c'est-à-dire la probabilité que l'une au moins des deux personnes vivra encore au bout de l'année, est

$$1 - \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \left(1 - \frac{v_{m+1}}{v_m}\right)$$

ou

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} + \frac{v_{m+1}}{v_m} - \frac{v_{n+1} \cdot v_{m+1}}{v_n \cdot v_m}.$$

On trouverait de la même manière que la probabilité que l'une au moins des deux personnes vivra encore au bout de 2 ans est exprimée par

$$\frac{v_{n+2}}{v_n} + \frac{v_{m+2}}{v_m} - \frac{v_{n+2} \cdot v_{m+2}}{v_n \cdot v_m};$$

que la probabilité qu'une au moins des deux personnes vivra encore au bout de 3 ans a pour expression

$$\frac{v_{n+3}}{v_n} + \frac{v_{m+3}}{v_m} - \frac{v_{n+3} \cdot v_{m+3}}{v_n \cdot v_m};$$

et ainsi de suite. Si l'on remplace, dans les formules [1], [2], [3], les probabilités

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}, \frac{v_{m+2}}{v_m}, \frac{v_{n+3}}{v_n}, \dots$$

par celles que l'on vient d'obtenir, le résultat se composera de trois séries de termes qui, d'après les notations adoptées plus haut, pourront s'écrire

$$aA_n + aA_m - aA_{n,m}.$$

On aura donc, en désignant par C le capital équivalent à la rente viagère considérée,

$$C = a(A_n + A_m - A_{n,m}). \quad [16]$$

On voit que la quantité entre parenthèses se compose du capital équivalent à une rente de 1 franc sur une tête de l'âge n , plus le capital équivalent à une rente de 1 franc sur une tête de l'âge m , moins le capital équivalent à une rente de 1 franc sur deux têtes âgées l'une de n et l'autre de m années.

Si l'on demande, d'après cela, la valeur actuelle d'une rente viagère de 4500 francs constituée sur deux têtes âgées, l'une de 53 ans, l'autre de 58, jusqu'au dernier décès, les tables, d'après Deparcieux, rapportées plus haut donneront

$$A_{53} = 11,7248, \quad A_{58} = 10,3140, \quad A_{53,58} = 8,1596.$$

$$C = 4500(11,7248 + 10,3140 - 8,1596) = 62456,40.$$

XI. Une rente viagère sur deux têtes peut être différée d'un nombre t d'années. En raisonnant

comme dans le cas d'une seule tête, on trouve que le capital équivalent à cette rente est exprimé par la formule

$$C = \frac{a}{(1+r)^t} \frac{v_n v_m}{v_{n-t} \cdot v_{m-t}} A_{n,m}, \quad [17]$$

si la rente doit cesser au premier décès, et par la formule

$$C = \frac{a}{(1+r)^t} \left(\frac{v_n}{v_{n-t}} A_n + \frac{v_m}{v_{m-t}} A_m - \frac{v_n v_m}{v_{n-t} \cdot v_{m-t}} A_{n,m} \right), \quad [10]$$

si la rente doit être servie jusqu'au dernier décès.

XII. Une rente viagère sur deux têtes peut être temporaire; on en obtient la valeur en remarquant que, comme dans le cas d'une seule tête, si l'on ajoutait au capital cherché celui qui est nécessaire pour constituer une rente différée jusqu'à l'époque où la rente temporaire cesse, on devrait obtenir le capital nécessaire pour constituer une rente immédiate.

Il existe beaucoup d'autres combinaisons que nous ne pourrions examiner ici sans dépasser les bornes que nous avons dû nous imposer. Nous avons exposé les principales, et, pour les autres, nous renvoyons aux ouvrages spéciaux. (*Voy. le Traité des annuités de Deparcieux, la Théorie des annuités viagères de Baily, et la Théorie élémentaire des annuités viagères de M. Maas. Voyez aussi nos Problèmes et exercices d'Arithmétique et d'Algèbre.*)

Pour les rentes de survie et pour les rentes viagères à capital réservé, *Voy. l'article ASSURANCES SUR LA VIE.*

RÉPÉTITION, méthode employée en Géodésie pour la mesure des angles, et qui a été imaginée par Tobie Mayer, célèbre astronome allemand. Cette méthode consiste à porter plusieurs fois la mesure d'un même angle sur un limbe divisé, de telle sorte que chaque mesure s'ajoute sans discontinuité à la précédente; à faire une seule lecture à la fin de l'opération; et à diviser le nombre de degrés obtenus par le nombre des mesures. Cette méthode, employée par Borda et par tous les géomètres français du commencement de ce siècle, a l'avantage de réduire presque indéfiniment l'erreur de lecture et d'atténuer de même l'erreur provenant des inexactitudes de division. Mais elle suppose que les arcs mesurés s'ajoutent sans discontinuité; ce qui ne peut avoir lieu rigoureusement à cause du jeu des arcs emboîtés les uns dans les autres, de celui des vis de rappel dans les écrous, de l'élasticité des métaux, etc., et même, suivant quelques auteurs, d'un certain mouvement général d'entraînement dû à la rotation dans un même sens et à la torsion des axes; en sorte que ces auteurs en sont venus à infirmer le principe même de la méthode. Les observateurs combattent ces inconvénients par l'emploi des observations croisées, et surtout par les séries de répétitions conjuguées, dans lesquelles, après avoir répété un angle un certain nombre de fois en allant de l'objet de gauche à l'objet de droite, ils exécutent un même nombre de répétitions du même angle, en allant de l'objet de droite vers l'objet de gauche. Toutefois, les géomètres ne sont plus d'accord sur l'efficacité de la méthode de répétition, et beaucoup d'entre eux, principalement à l'étranger, et particulièrement en Allemagne, lui préfèrent la méthode de RÉITERATION (*Voy. ce mot*).

On admet, conformément aux principes du calcul des probabilités, qu'en nommant l l'erreur de lecture, d l'erreur de division, p l'erreur de pointé et n le nombre des observations, l'erreur à craindre est représentée par la formule

$$\frac{\pm l \pm d}{n} \pm \frac{p}{\sqrt{n}}$$

REPORT, terme de Bourse. On appelle *report* du comptant à la fin du mois, ou simplement *report*, la différence entre le prix de la rente au comptant et celui de la rente fin-courant, qui est toujours plus élevé. Les reports offrent un moyen de placer temporairement son argent sur les fonds publics sans avoir aucune chance à courir. Supposons, par exemple, que Pierre achète 9000 francs de rente à $\frac{1}{2}$ pour 100 au comptant à 93,10 et qu'il les revende immédiatement fin-courant à 93,50. La différence des deux cours étant de 0,40, et $4 \frac{1}{2}$ étant contenu 2000 fois dans la quotité 9000^f de rentes dont il s'agit, on obtiendra la différence du prix d'achat au prix de vente en multipliant 0,40 par 2000, ce qui donne 800^f. Tel est le gain réalisé par Pierre. Le gain étant de 0,40 sur 93,10, on obtiendra le bénéfice pour 100 en posant la proportion

$$93,10 : 0,40 = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{40}{93,10}$$

Mais ce bénéfice se rapporte à une durée d'un mois au plus; pour obtenir le bénéfice annuel, il faut donc multiplier par 12, ce qui donne

$$\frac{40 \times 12}{93,10} \text{ ou environ } 5,15,$$

Ainsi Pierre a placé de la sorte son argent à un peu plus de 5 pour 100.

Si l'on veut tenir compte des courtages, il faut ajouter 0,05 au prix d'achat, et retrancher autant du prix de vente (*Voy. MARCHÉS A TERME*), ce qui revient à ajouter 0,10 au prix d'achat et réduit la différence entre le prix d'achat et le prix de vente, à 0,30. En faisant ce calcul dans cette hypothèse on trouve pour le bénéfice total 600^f; et pour le taux du placement annuel 3,87 environ.

On appelle *report d'un mois à l'autre* la différence qui existe entre le prix de la rente fin-courant et le prix de la rente fin-prochain, c'est-à-dire entre le prix de la rente livrable à la fin du mois où l'on se trouve, et le prix de cette même rente livrable à la fin du mois suivant. Ce genre de report fournit aux spéculateurs les moyens de prolonger une opération. Pierre a acheté 12 000^f de rentes 3 pour 100 fin-courant, au cours de 69,80, dans l'espoir de les revendre avec bénéfice. La fin du mois arrivée, il se trouve que le cours du 3 pour 100 au comptant n'est plus que de 68,90; Pierre ne pourrait donc vendre qu'à perte. Mais s'il a foi dans une hausse prochaine des fonds publics, il peut continuer son opération en se faisant *reporter* (d'où le nom de *report*); ce qui se fera de la manière suivante: Pierre vendra ses 12 000^f de rentes au cours du jour, c'est-à-dire à 68,90, et il les rachètera immédiatement pour l'époque de la liquidation suivante, en payant au vendeur un intérêt

qui n'est autre chose que le report. Si ce report est de 0,50, il rachètera donc ses rentes fin prochain au cours de 68,90 + 0,50 ou de 69,40; et le règlement définitif de son opération se trouvera ainsi *reporté* au mois suivant. Supposons que ses prévisions se réalisent, et qu'il revende définitivement ses rentes au comptant à 71,70, il sera facile de calculer son bénéfice. Il a acheté à terme à 69,80 + 0,05 (en tenant compte du courtage), ou à 69,85; il vend au comptant à 68,90 — 0,125 (*Voy. MARCHÉS AU COMPTANT*) ou à 68,775; il perd donc 69,85 — 68,775 ou 1,075 pour chaque quotité de 3 francs de rente. Il rachète à terme à

$$69,40 + 0,05 \text{ ou à } 6,45;$$

il revend au comptant à

$$71,70 - 0,125 \text{ ou à } 71,575;$$

il gagne donc

$$71,575 - 69,45 \text{ ou } 2,125$$

sur chaque quotité de 3^f de rente. Le gain l'emporte sur la perte de

$$2,125 - 1,075 \text{ ou de } 1,05.$$

Pour obtenir le bénéfice total, il reste à répéter 1,05 autant de fois que 3 est contenu dans 12 000, c'est-à-dire 4000 fois, ce qui donne 4200^f.

Un spéculateur à la hausse (c'est-à-dire qui compte sur la hausse des fonds publics) ne peut se faire *reporter* qu'autant qu'il se trouve un spéculateur à la baisse (ou comptant sur la baisse) qui consente à faire l'opération inverse, c'est-à-dire à *reporter*. Supposons, par exemple, que Robert ait vendu 15 750^f de rentes $4 \frac{1}{2}$ pour 100 fin courant au cours de 91,35 dans l'espoir de les racheter avec bénéfice. Le moment de la liquidation arrivé, le $4 \frac{1}{2}$ pour 100 se trouve monté à 92,70; Robert ne pourrait racheter qu'à perte. Mais s'il a foi dans une baisse, il peut continuer son opération en *reportant*, ce qui s'exécutera de la manière suivante: Robert rachètera ses rentes au cours du jour, c'est-à-dire à 92,70; mais il les revendra immédiatement pour l'époque de la liquidation suivante, par l'intermédiaire d'un agent de change, à quelque autre spéculateur qui ait besoin de se faire *reporter*. Si le report est de 0,40, il revendra donc ses rentes à

$$92,70 + 0,40 \text{ ou à } 93,10;$$

et le règlement définitif de son opération sera reporté à la liquidation suivante. Si, à ce moment, ses prévisions sont réalisées, et que le $4 \frac{1}{2}$ pour 100 soit tombé, par exemple, à 91,10, on trouvera par un calcul analogue à celui de l'exemple précédent que son bénéfice est de 1050^f.

Il peut arriver par exception, et contrairement à ce que nous avons supposé jusqu'ici, que le cours de la rente au comptant soit plus élevé que le cours de la rente fin courant; la différence prend, dans ce cas, le nom de *déport*.

Lorsqu'il y a déport, les porteurs de titres de rentes peuvent obtenir un bénéfice en engageant momentanément ces titres. Les opérations du déport sont analogues à celles du report; mais elles sont précisément inverses.

Dans les marchés à terme, l'acheteur a toujours le droit d'exiger la livraison des titres avant l'époque fixée, pourvu qu'il prévienne le vendeur 5 jours à

l'avance, et qu'il paye le prix stipulé dans le marché. L'usage de cette faculté porte le nom d'*escompte*, et l'on dit que l'acheteur *escompte son vendeur*, parce que l'acheteur perd ainsi les intérêts de son argent pour le nombre de jours qui restaient à s'écouler jusqu'à l'époque de la liquidation. Cette opération est ordinairement dirigée contre les vendeurs à découvert, c'est-à-dire contre les spéculateurs, plus audacieux qu'honnêtes, qui vendent à terme des rentes dont ils n'ont pas les titres, espérant se les procurer avec avantage avant l'époque de la liquidation. Exemple : Daniel a acheté fin courant 24 000^f de rentes 3 pour 100. Soupçonnant que celui qui les lui a vendues est un vendeur à découvert, il l'escompte 12 jours avant l'époque de la liquidation, et l'oblige ainsi à transiger et à reporter son opération à la liquidation suivante en subissant un déport de 0^f,50. On trouve aisément ce que Daniel gagne à cette opération. Il perd l'intérêt de son capital pendant 12 jours, c'est-à-dire les $\frac{12}{360}$ ou $\frac{1}{30}$ de 24 000^f, c'est-à-dire 800^f. Mais il gagne autant de fois 0^f,50 que 3 est contenu dans 24 000, c'est-à-dire 8000 fois, ce qui fait 4000^f. Son bénéfice est donc, en définitive, 4000^f — 800^f, c'est-à-dire 3208^f.

REPOS, état d'un corps qui conserve sa position dans l'espace. Le repos est *absolu* si le corps est rapporté à des objets réellement fixes; il n'est que *relatif* si les points auxquels on le rapporte sont animés d'un mouvement auquel ce corps participe.

REPRÉSENTATION DES CORPS (Géométrie descriptive), art de représenter sur une surface plane les objets qui ont les trois dimensions.

On fait usage de deux systèmes différents pour représenter les objets en relief: le *Dessin géométral* et la *Perspective*. Nous renverrons à l'art. PERSPECTIVE pour le second mode de représentation; il ne sera question ici que du premier.

I. Si le corps à représenter est susceptible d'une définition géométrique, la représentation résulte de l'application pure et simple de la méthode des projections (*Voy. PROJECTIONS, GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE*). Si, par exemple, il s'agit d'un polyèdre, on projette ses arêtes sur deux plans rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical; chacune de ces arêtes se trouve ainsi complètement déterminée, et le polyèdre lui-même est décrit géométriquement, c'est-à-dire représenté d'une manière rigoureuse, qui permet non-seulement de se faire une idée exacte de la forme du corps, mais encore d'en reproduire, au besoin, les dimensions vraies. C'est ainsi que la figure 1 représente un *prisme oblique*, dont la base inférieure ABCD est située dans le plan horizontal; la base supérieure *abcd* et *a'b'c'd'*; les arêtes latérales sont projetées en

$Aa, A'a' - Bb, B'b' - Cc, C'c' - Dd, D'd'$.

La figure 2 représente une *pyramide*, dont la base ABCDE est située dans le plan horizontal; le sommet est projeté en S, S'; les projections des arêtes latérales sont

$SA, S'A' - SB, S'B' - SC, S'C' - SD, S'D' - SE, S'E'$.

La figure 3 représente un *octaèdre régulier*, dont

l'axe est vertical, et projeté en O, O'O''. Les arêtes sont projetées en

$AB, A'B' - BC, B'C' - \dots, OA, O'A' - OB, O'B' - \dots, OA, O''A' - OB, O''B' - \dots$

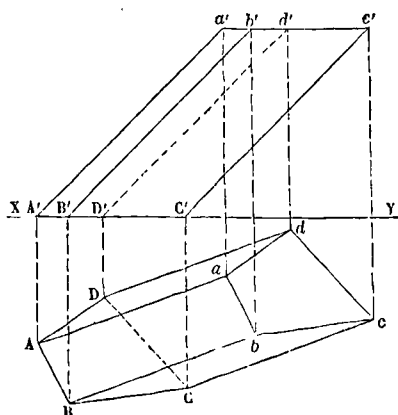


Fig. 1.

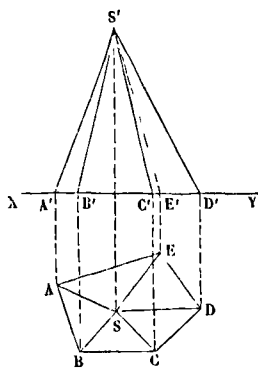


Fig. 2.

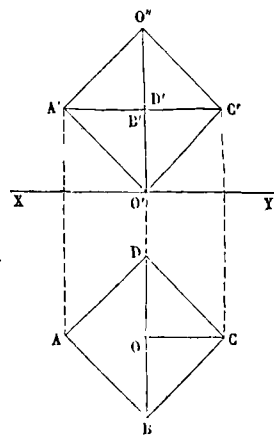


Fig. 3.

Si le corps est terminé par une surface courbe, on représente cette surface par sa trace et son contour apparent, par une directrice et un certain nombre de génératrices, par une série de sections horizontales, etc. (*Voy. SURFACES COURBES.*)

II. Lorsque le corps que l'on veut représenter n'est pas susceptible d'une définition géométrique simple, le meilleur moyen d'en donner une idée précise est de tracer l'intersection de sa surface par des plans horizontaux et par des plans verticaux, choisis de manière que les principaux détails de sa forme soient représentés sur ces intersections. Pour donner, par exemple, une idée complète d'un édifice, les architectes supposent cet édifice coupé par une série de plans horizontaux, un à chaque étage ordinairement, et par une série de plans verticaux convenablement choisis; ils représentent sur un plan chacune des intersections ainsi obtenues; et ils y joignent la projection verticale des principales façades sur des plans parallèles à ces façades. Ces projections verticales des façades se nomment *élé-*

ractions; les coupes verticales s'appellent *coupes* et quelquefois *profils*; la coupe horizontale faite à chaque étage est le *plan géométral*, ou simplement le *plan* de cet étage. Le même système d'intersections et les mêmes dénominations sont en usage dans tous les arts mécaniques; et la même méthode, qui sert à représenter l'ensemble d'une construction ou d'une machine, s'emploie aussi pour représenter à part les principaux détails de cette construction ou de cette machine.

Sur un dessin géométral soigné il est d'usage de représenter les ombres principales (*Voy. OMBRES*), afin de rendre le dessin plus facile à saisir. On sup-

pose alors les corps éclairés par des rayons lumineux parallèles dont les projections font des angles de 45° avec la ligne de terre, la lumière étant supposée marcher de gauche à droite en allant en avant du spectateur.

Dans les simples croquis, on se contente d'indiquer par un trait plus prononcé, que l'on appelle *trait de force* ou *trait ressenti*, les arêtes qui séparent les faces éclairées des faces dans l'ombre; on ajoute quelques traits plus légers pour faire *tourner* les corps arrondis, lorsque l'on peut craindre quelque ambiguïté. D'après ce système, on voit (fig. 4) que les carrés A et B représentent *en plan*, le premier

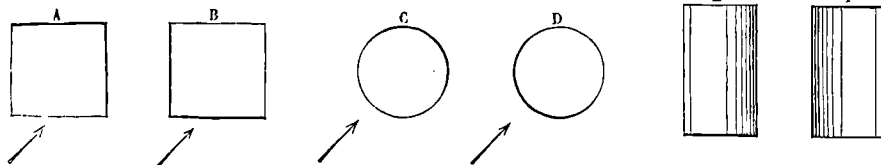


Fig. 4.

un prisme saillant, le second un prisme creux; que les cercles C et D représentent, également en plan, le premier un cylindre en relief, le second une cavité cylindrique; qu'enfin les rectangles E et F représentent en élévation, le premier un cylindre en relief, le second un demi-cylindre en creux.

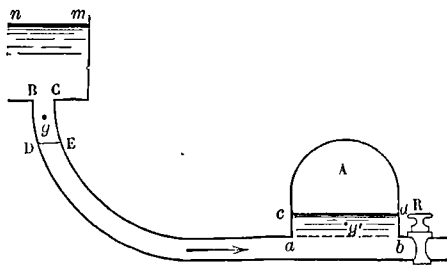
On est obligé, pour l'intelligence du dessin, d'y figurer des arêtes, ou même des corps, qui en réalité sont cachés par d'autres; on tient compte de cette circonstance en ponctuant les contours des objets cachés.

En parcourant les principaux articles d'Architecture ou de Mécanique de ce dictionnaire, on y trouvera de nombreux exemples de représentation, que nous ne pourrions reproduire ici.

RÉSERVOIR D'AIR, capacité contenant de l'air placée sur le trajet d'une conduite d'eau pour éviter les *coups de bélier* résultant d'un arrêt subit de la masse d'eau en mouvement. Lorsqu'une grande masse d'eau est en mouvement dans une conduite, et qu'on vient à fermer brusquement le robinet d'écoulement, le fluide est tout à coup arrêté, et perd sa puissance vive en exerçant sur les parois de la conduite un travail qui peut compromettre leur résistance. Le choc produit par cet arrêt subit est ce qu'on nomme *coup de bélier*, par analogie avec le **BÉLIER HYDRAULIQUE** (*Voy. ce mot*). On éviterait ce choc en fermant le robinet lentement et graduellement; mais comme on ne peut pas toujours répondre des agents chargés de ce soin, on place par prudence un réservoir d'air A immédiatement en amont du robinet. Au moment de la fermeture du robinet R, l'eau en mouvement trouvant cette issue fermée s'introduit dans le réservoir A en y comprimant l'air contenu; elle perd ainsi sa puissance vive par ce travail de compression, et le coup de bélier est évité.

On peut déterminer la capacité du réservoir d'air de manière qu'à l'instant de la plus grande compression de l'air sa pression par mètre ne dépasse pas une limite donnée. On applique pour cela le théorème de l'EFFET DU TRAVAIL (*Voy. ce mot*). Soit U_0 la vitesse moyenne de l'eau au moment de

la fermeture, U sa vitesse à un instant quelconque pendant la compression de l'air, D le diamètre de la conduite, L sa longueur, Π le poids du mètre cube du liquide, V_0 le volume primitif de l'air du



réservoir, \mathcal{P}_0 sa pression, V_1 et \mathcal{P}_1 son volume et sa pression à l'instant de la plus grande pression, V et \mathcal{P} son volume et sa pression au moment où la vitesse moyenne de l'eau est U. Soit enfin H la distance verticale entre le niveau nm de l'eau dans le bassin supérieur, et le niveau ab de l'eau dans le réservoir d'air, dans l'état normal.

La puissance vive possédée par l'eau contenue dans la conduite est exprimé par

$$\frac{1}{2} \cdot \Pi \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 L \cdot U_0^2.$$

Cette quantité, prise négativement, représentera donc la variation de puissance vive depuis l'instant de la fermeture du robinet jusqu'à l'instant de la plus grande compression de l'air dans le réservoir. Il faut égaler cette variation de puissance vive à la somme des travaux des forces qui agissent sur le liquide pendant la période considérée. Nous avons d'abord le travail négatif de l'élasticité du gaz, ce travail a pour valeur (*Voy. ÉLASTICITÉ*)

$$- \mathcal{P}_0 V_0 \log^r \frac{V_0}{V_1}.$$

Le travail de la pression atmosphérique \mathcal{P}_a qui

s'exerce à l'origine de la conduite est

$$Q_a \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 s,$$

en désignant par s le chemin décrit par le liquide.

Or le produit $\frac{1}{4} \pi D^2 s$, qui exprime le volume d'eau introduit dans la conduite pendant la période considérée, exprime aussi, en vertu de l'incompressibilité de ce liquide, le volume d'eau introduit dans le réservoir d'air, c'est-à-dire $V_0 - V_1$. Le travail de la pression atmosphérique est donc exprimé par $Q_a (V_0 - V_1)$.

Le travail de la pesanteur est le même que si le volume $abcd$, ou $V_0 - V_1$, était tombé directement du bassin supérieur; en sorte que ce travail a pour valeur

$$\Pi (V_0 - V_1) \cdot H',$$

en désignant par H' la différence de niveau des centres de gravité g et g' des volumes d'eau $V_0 - V_1$, dans la conduite en BCDE et dans le réservoir en $abcd$. On peut généralement négliger la différence entre H et H' et écrire pour le travail de la pesanteur

$$\Pi (V_0 - V_1) \cdot H.$$

Le travail du frottement serait exprimé (Voy. CONDUITES) par

$$\Pi D \beta U^2 L S$$

si la vitesse moyenne était constante et égale à U ; on aura une valeur approchée de ce travail en remplaçant U^2 par la moyenne $\frac{1}{2} U_0^2$ de ses valeurs extrêmes. Remplaçant en même temps s par le quotient du volume dépensé $V_0 - V_1$ par l'aire $\frac{1}{4} \pi D^2$ de la section de la conduite, on trouvera

$$\frac{2 \Pi \beta L U_0^2 (V_0 - V_1)}{D}$$

L'application du principe de l'effet du travail donne donc, eu égard au signe des travaux,

$$-\frac{1}{2} \frac{\Pi}{g} \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 L U_0^2 = -Q_0 V_0 \log' \frac{V_0}{V_1} + Q_a (V_0 - V_1) + \Pi H (V_0 - V_1) - \frac{2 \Pi \beta L U_0^2 (V_0 - V_1)}{D}$$

ou
$$-\frac{1}{2} \frac{\Pi}{g} \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 L U_0^2 = (V_0 - V_1)$$

$$\times \left[Q_a + \Pi H - \frac{2 \Pi \beta L U_0^2}{D} \right]$$

$$- Q_0 V_0 \log' \frac{V_0}{V_1}, \quad [1]$$

équation à laquelle il faut joindre la relation

$$P_0 V_0 = Q_1 V_1 \quad [2]$$

résultant de la loi de Mariotte.

Si l'on se donne Q_0 , et le rapport de Q_1 à Q_0 , on aura par cela même le rapport de V_0 à V_1 , et l'équation [1] ne renfermera plus qu'une inconnue V_0 ou V_1 . Si, par exemple, on suppose $Q_1 = Q_0 = 10334^k$, $Q_1 = 2 Q_0$, $D = 0^m, 30$, $L = 1500^m$, $H = 25^m$, $U = 0^m, 7$; en prenant, avec M. Darcy, $\beta = 0,000507$, on trouvera

$$V_1 = 0^m, 143, \text{ d'où } V_0 = 0^m, 286.$$

En négligeant le frottement, on obtiendrait pour V_0 une valeur plus que double.

Si l'on se donne Q_0 et V_0 , on aura à résoudre une équation transcendante pour trouver V_1 . On peut la rendre algébrique en supposant que Q_1 ne

surpasse pas le double de Q_0 , et que par conséquent $\frac{V_0}{V_1}$ ne dépasse pas 2. On a, en effet, d'une manière générale

$$\log' \frac{a}{b} = \int_b^a \frac{dx}{x};$$

si a ne dépasse pas $2b$, on peut remplacer x par sa valeur moyenne $\frac{1}{2}(a+b)$ et écrire

$$\log' \frac{a}{b} = \frac{2}{a+b} \int_b^a dx = \frac{2(a-b)}{a+b},$$

le résultat est approché à moins de 1/25 de sa valeur, dans le cas le plus défavorable. On peut donc, dans l'équation [1], remplacer le dernier terme par

$$-\frac{2 Q_0 V_0 (V_0 - V_1)}{V_0 + V_1},$$

l'équation devient ainsi algébrique et du second degré.

On emploie aussi les réservoirs d'air pour régulariser le mouvement ascensionnel de l'eau dans les pompes (Voy. POMPES). Dans ce cas on peut se rendre compte comme il suit de la capacité qu'il convient de lui donner. Considérons une pompe à simple effet, qui élève par chaque course un volume Q d'eau. Soient, comme ci-dessus, V_0 et Q_0 le volume et la pression de l'air dans le réservoir avant l'arrivée du volume d'eau affluent, V_1 et Q_1 le volume et la pression après l'arrivée de ce volume d'eau. Si l'on admet que le mouvement ascensionnel soit à peu près uniforme, le tuyau d'ascension dépense le volume $\frac{1}{2} Q$ pendant une course du piston (montée

ou descente) et le volume $\frac{1}{2} Q$ pendant la course suivante (descente ou montée); on a donc

$$V_0 - V_1 = \frac{1}{2} Q. \quad [3]$$

On s'imposera la condition que la différence $Q_1 - Q_0$ ne dépasse pas une fraction donnée $\frac{1}{n}$ de la moyenne $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_0)$; c'est-à-dire qu'on posera

$$Q_1 - Q_0 = \frac{1}{2n} (Q_1 + Q_0). \quad [4]$$

On aura en outre, d'après la loi de Mariotte,

$$Q_0 V_0 = Q_1 V_1. \quad [5]$$

L'équation [4], mise sous la forme

$$\frac{Q_1}{Q_0} - 1 = \frac{1}{2n} \left(\frac{Q_1}{Q_0} + 1 \right),$$

se transforme, en vertu de l'équation [5], en

$$\frac{V_0}{V_1} - 1 = \frac{1}{2n} \left(\frac{V_0}{V_1} + 1 \right)$$

ou
$$V_0 - V_1 = \frac{1}{2n} (V_0 + V_1);$$

on a donc ainsi les deux relations

$$V_0 - V_1 = \frac{1}{2} Q \text{ et } V_0 + V_1 = nQ,$$

d'où l'on tire

$$V_0 = Q \cdot \frac{2n+1}{4} \text{ et } V_1 = Q \cdot \frac{2n-1}{4};$$

puis

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{2n+1}{2n-1}.$$

Pour $n = 2$, par exemple, on aurait

$$V_0 = \frac{5}{4} Q \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{3}{4} Q;$$

puis

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{5}{3}.$$

(Voy. le *Cours d'Hydraulique* de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, et le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

RÉSISTANCE DES FLUIDES, force qui tend à s'opposer au mouvement relatif des corps solides par rapport aux fluides dans lesquels ils sont plongés, ou à la surface desquels ils flottent. Sauf un petit nombre de cas exceptionnels, qui seront examinés ci-dessous, on peut, en effet, admettre que cette résistance est la même, soit qu'il s'agisse d'un corps solide en mouvement dans un fluide en repos, soit qu'il s'agisse d'un corps solide en repos dans un fluide en mouvement, soit enfin que le solide et le fluide soient en mouvement tous les deux. Nous diviserons cet article en deux parties; la première sera relative à la résistance des liquides, et en particulier à celle de l'eau; la deuxième traitera de la résistance des gaz, et en particulier de celle de l'air.

RÉSISTANCE DE L'EAU. I. Nous supposons d'abord qu'il s'agisse d'un corps solide entièrement plongé dans l'eau. Quand on examine un corps en repos dans une eau en mouvement et tenant en suspension des poussières colorées, on est frappé de l'extrême complication des mouvements qui se manifestent dans le fluide. Si l'on considère, par exemple, un plan mince mn (fig. 1) en repos dans un liquide

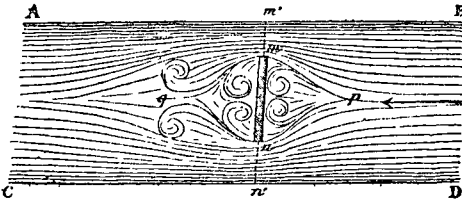


Fig. 1.

animé d'un mouvement uniforme dans le sens de la flèche, on voit les molécules liquides se séparer à une certaine distance en avant du plan, diverger pour passer latéralement, couler parallèlement lorsqu'elles sont arrivées dans le prolongement du plan fixe, puis converger ensuite pour se réunir, et reprendre enfin, à une certaine distance au delà du plan, le mouvement parallèle qu'elles avaient en deçà. En même temps, dans un certain espace mpn en avant du plan, et dans un certain espace mqn en arrière, stationnent en quelque sorte des molécules fluides qui ne sont animées que de mouvements gyrotoires; et des mouvements analogues s'observent encore au delà de l'espace mqn , de la part des molécules qui affluent des espaces mm' et nn' pour remplir l'intervalle plus large AC . Si, au lieu d'un plan mince, la forme du corps est celle d'un prisme ou d'un cylindre d'une certaine longueur, dont $abcd$ (fig. 2) représente une section

par l'axe de figure, les particules liquides commencent, comme dans l'exemple précédent, à se séparer à une certaine distance en avant du corps, elles continuent à diverger au delà de la face antérieure bc , jusqu'à ce qu'elles aient atteint une certaine section mm' , nn' où elles coulent parallèlement; puis elles divergent pour rejoindre les parois du corps, qu'elles suivent parallèlement jusqu'à sa face postérieure ad ; là elles convergent pour se rejoindre; et, à une certaine distance au delà de la face ad , elles reprennent le mouvement parallèle

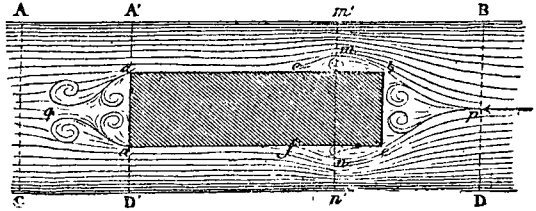


Fig. 2.

qu'elles avaient en avant du corps. Dans tous les intervalles tels que bpc , bme , cnf , aqd , stationnent des molécules animées de mouvements gyrotoires; et ces mouvements s'observent encore au delà. Les mêmes phénomènes se manifestent quand c'est le corps solide qui se meut d'un mouvement uniforme dans un liquide en repos. — Si le corps présente une proue arrondie, les espaces tels que mpn (fig. 1) ou bpc (fig. 2) dans lesquels stationnaient des molécules animées de mouvements gyrotoires quand la face antérieure était plane, se restreignent et disparaissent même, si cette proue a la forme et la saillie convenable. Pareille chose arrive pour la pouce, si le corps en présente une. Si le corps est simplement prismatique ou cylindrique, les espaces mpn , ou bpc , subsistent et forment une sorte de *proue liquide* qui accompagne le corps dans son mouvement; il en est de même pour la *poupe liquide* formée par les espaces mqn (fig. 1) ou aqd (fig. 2). Il est bien entendu que les particularités que nous venons de signaler se reproduisent tout autour du corps dans toutes les sections faites par son axe; et que les figures 1 et 2 représentent aussi bien ce qui se passe dans une section verticale que dans une section horizontale.

La complication de ce phénomène ne permet pas d'espérer qu'il puisse jamais être soumis à une analyse rigoureuse et qu'on puisse obtenir, dans tous les cas, une expression exacte de la résistance que le fluide oppose au mouvement relatif du corps, qui y est plongé. Mais on a essayé depuis longtemps d'obtenir par des moyens élémentaires une expression approchée de cette résistance. Newton dans ses *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle* (tome I, liv. II) a donné sur ce sujet deux théories, dont l'une, adoptée depuis par la plupart des auteurs, revient à ce qui suit dans le langage actuellement adopté. Soit M (fig. 3) un corps qui se meut d'un mouvement uniforme de translation, et avec la vitesse V , dans un fluide en repos; et soit M' la position qu'il occupe au bout du temps t . Chaque point de ce corps aura parcouru un espace égal à Vt ; et le corps lui-même

aura engendré dans l'espace un volume égal à celui du cylindre circonscrit dont les arêtes auraient la longueur Vt ; si l'on désigne par A l'aire de la section droite de ce cylindre, son volume sera AVt .

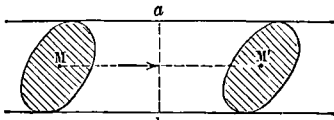


Fig. 3.

Le corps, pour se mouvoir ainsi dans le liquide, a donc déplacé un ensemble de molécules dont le volume est AVt , et auxquelles il a communiqué la vitesse V . La force vive totale de ces molécules déplacées est donc

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi \cdot AVt}{g} V^2,$$

en appelant Π le poids du mètre cube du fluide. Il faut donc que ces molécules aient éprouvé de la part du corps une pression dont le travail équivaut à cette force vive. Soit R cette pression, dirigée dans le sens de la flèche; son travail est

$$R \cdot Vt;$$

on doit donc avoir

$$R \cdot Vt = \frac{1}{2} \frac{\Pi A \cdot Vt}{g} \cdot V^2,$$

d'où

$$R = \Pi A \cdot \frac{V^2}{2g}. \quad [1]$$

Cette mesure est évidemment celle de la résistance égale et opposée que le corps a éprouvée de la part du fluide. Elle équivaut au poids d'un cylindre de liquide qui aurait pour base la section A du cylindre circonscrit au corps parallèlement au mouvement, et pour hauteur la hauteur due à la vitesse V . Dans le raisonnement de Newton c'est le fluide qui est en mouvement et le corps en repos; mais le résultat est le même.

II. Les auteurs modernes ont essayé d'évaluer la résistance en entrant plus profondément dans le sujet. M. Bélanger, dans le Cours d'hydraulique professé à l'École centrale des arts et manufactures, a traité d'une manière complète le cas d'un corps cylindrique placé dans l'intérieur d'une conduite, dans la supposition où la longueur du cylindre serait au moins le triple de son diamètre. Soit Ω l'aire de la section transversale de la conduite $ABCD$ (fig. 2), A la section droite du cylindre $abcd$; V la vitesse du courant dans les sections AC et BD ; V' la vitesse dans la section annulaire mm' , nn' que nous désignerons par Ω' , et V'' la vitesse dans la section annulaire aa' , dd' que nous appellerons Ω'' ; soient \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}' , \mathcal{P}'' les pressions par mètre supportées par le liquide dans les sections BD , AC , Ω' et Ω'' ; enfin soit R la résistance que le cylindre oppose au mouvement du liquide. — Le mouvement étant permanent (Voy. MOUVEMENT PERMANENT), si l'on considère la portion du fluide comprise entre les sections BD et AC , on voit que sa quantité de mouvement totale reste constante, et que par conséquent la somme des impulsions totales

des forces qui lui sont appliquées est nulle (Voy. QUANTITÉ DE MOUVEMENT). On a donc

$$R + \mathcal{Q}_2 \Omega - \mathcal{P}_1 \Omega = 0,$$

d'où

$$R = \Omega (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2). \quad [1]$$

Si l'on considère la portion de fluide comprise entre les sections BD et Ω' , comme le fluide n'éprouve aucune variation brusque, on a, par le THÉORÈME DE BERNOULLI (Voy. ce mot), et en appelant Π le poids du mètre cube du liquide,

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}'}{\Pi} = \frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}. \quad [2]$$

De la section Ω' à la section Ω'' , le fluide éprouve un ÉLARGISSEMENT BRUSQUE (Voy. ce mot); le théorème de Bernoulli se modifie; il faut ajouter dans le second membre la hauteur due à la différence des vitesses en amont et en aval de la partie de fluide considérée; on a donc

$$\frac{\mathcal{P}'}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}''}{\Pi} = \frac{V''^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} + \frac{(V' - V'')^2}{2g}. \quad [3]$$

De la section Ω'' à la section AC on a, par des raisons semblables,

$$\frac{\mathcal{P}''}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}_2}{\Pi} = \frac{V^2}{2g} - \frac{V''^2}{2g} + \frac{(V'' - V)^2}{2g}. \quad [4]$$

Ajoutant membre à membre les équations [2], [3], [4], on obtient

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}_2}{\Pi} = \frac{(V' - V'')^2}{2g} + \frac{(V'' - V)^2}{2g} \quad [5]$$

et, en substituant dans [1],

$$R = \Pi \Omega \left[\frac{(V' - V'')^2}{2g} + \frac{(V'' - V)^2}{2g} \right].$$

Or, entre les vitesses V , V' , V'' on a, par suite de l'incompressibilité du liquide, les relations

$$\Omega V = \Omega' V' = \Omega'' V''$$

ou bien

$$\Omega V = m (\Omega - A) V' = (\Omega - A) V'', \quad [6]$$

en appelant m un coefficient de contraction relatif à la diminution de section que le liquide éprouve en passant de la section bb' , cc' , à la section mm' , nn' . Si l'on tire de ces relations les valeurs de V' et de V'' pour les substituer dans la valeur de R , on trouvera

$$R = \Pi \Omega \frac{V^2}{2g} \left[\Omega^2 \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}{(\Omega - A)^2} + \frac{\Omega^2}{(\Omega - A)^2} \right],$$

valeur qu'on peut écrire, en posant $\Omega = An$,

$$R = \Pi A \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{n}{(n-1)^2} \left[n^2 \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + 1 \right], \quad [7]$$

expression qui est de la forme

$$R = k \Pi A \frac{V^2}{2g}, \quad [A]$$

c'est-à-dire de même forme que la formule donnée par Newton.

M. Bélanger est arrivé à des formules analogues en considérant, au lieu d'un cylindre, un disque mince, ou un disque muni d'une proue arrondie. M. Poncelet, dans un mémoire placé à la fin de son Introduction à la Mécanique industrielle, est parvenu aux mêmes résultats en appliquant directement le principe de l'effet du travail; et il a étendu ces résultats au cas où le corps se meut dans un milieu indéfini, en supposant que dans ce cas l'influence du mouvement du corps ne se fait sentir qu'à une certaine distance, et que par conséquent il peut être considéré comme placé dans un canal limité dans le sens transversal; car dès lors

les considérations qui ont été employées dans le cas d'une conduite deviennent applicables.

Ces diverses considérations théoriques conduisent à admettre que la résistance opposée par un fluide au mouvement relatif d'un corps est dans tous les cas proportionnelle au carré de la vitesse relative; et c'est ce que la plupart des auteurs ont admis depuis Newton.

Lorsque la vitesse est oblique à une surface plane, on admet que la résistance est proportionnelle au carré de la composante normale de cette vitesse; en sorte que si i désigne l'inclinaison de la vitesse sur la face considérée, l'expression de la résistance devient

$$R = k\Pi A \cdot \frac{V^2 \sin^2 i}{2g},$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la densité du fluide, à l'aire de la surface choquée, au carré de la vitesse, et au carré du sinus de l'inclinaison de cette vitesse par rapport au plan considéré.

Mais cette loi ne se vérifie que lorsque la longueur du corps est peu considérable par rapport à ses dimensions transversales; car, à mesure que cette longueur augmente, il devient de plus en plus nécessaire de tenir compte du frottement latéral qui s'exerce le long des parois. Coulomb a fait voir le premier que l'expression de ce frottement doit contenir deux termes: l'un proportionnel au carré de la vitesse, et exprimant la perte de force vive due au choc des molécules liquides contre les aspérités de la paroi du corps, l'autre proportionnel à la simple vitesse, et représentant l'effet de la cohésion détruite. M. de Prony, Eytelwein, et tous les auteurs qui se sont occupés du FROTTEMENT DES LIQUIDES (*Voy. ce mot*) ont adopté cette manière de voir. L'expression de la résistance doit donc être augmentée de deux termes proportionnels à la surface latérale mouillée, que nous nommerons S , et de la forme

$$IIS (aV + bV^2).$$

En donnant aux coefficients a et b des valeurs convenables, on pourra, à l'aide de ces deux termes, tenir compte en outre du frottement, peu considérable d'ailleurs, qui peut s'exercer à la proue et à la poupe. L'expression totale de la résistance directe serait donc

$$R = k\Pi A \frac{V^2}{2g} + IIS (aV + bV^2). \quad [B]$$

III. Un grand nombre d'auteurs ont fait des recherches expérimentales sur la résistance des fluides. Sans parler de Galilée, à qui remontent les premières études sur ce sujet, on peut citer les expériences de Newton et de Désaguliers, celles de Borda, de Hutton, de Bossut, d'Alembert et Condorcet, celles de Dubuat, celles de Coulomb, celles du colonel Beaufoy, celles de MM. Piobert, Morin et Didion, celles du colonel Duchemin, celles de Thibault, et, pour ce qui concerne particulièrement les carènes de navires, celles de M. Moll, de M. Leboulleur de Courlon, et de M. Bourgois, etc. Malgré la multiplicité de ces recherches, et malgré le soin avec lequel elles ont en général été faites, il règne encore une très-grande incertitude sur la valeur des coefficients à introduire dans la formule [B]. Cette incertitude tient à plusieurs causes: premièrement à la difficulté même du sujet; il n'est rien moins que facile, dans ce genre d'expé-

riences, d'obtenir un mouvement véritablement uniforme; la mesure de la résistance est fort délicate, et difficile à dégager de l'influence des appareils qu'on emploie. D'un autre côté les divers auteurs se sont presque toujours placés à des points de vue différents, qui rendent leurs résultats difficilement comparables. La plupart ont complètement négligé la résistance latérale; d'autres, qui en ont tenu compte, l'ont représentée par des formules d'interpolation de diverses formes, distinctes de celle qui entre dans la formule [B]. Les coefficients donnés par chaque expérimentateur conviennent aux circonstances particulières dans lesquelles il s'est placé, ou à des cas analogues, mais ne sauraient convenir à des circonstances notablement différentes.

Pour donner cependant une idée de la valeur des coefficients, nous citerons quelques résultats choisis parmi ceux qui doivent inspirer le plus de confiance. — Dubuat a fait mouvoir dans une eau en repos trois parallélépipèdes rectangles d'un pied carré de base, et ayant respectivement pour hauteur 4 lignes, 1 pied, et 3 pieds; il a obtenu pour les valeurs de k et en négligeant la résistance latérale,

$$k = 1,43 \quad k = 1,172 \quad k = 1,102.$$

Mais ces coefficients lui ont paru varier avec la vitesse, ce qui tenait sans doute à la résistance latérale négligée. Dans les expériences faites par Borda sur des plans minces mus circulairement, il a obtenu pour k des valeurs qui ont varié, suivant l'étendue de la surface, de 1,39 à 1,49 et à 1,64; le rayon de la circonférence moyenne était 1^m,20; la variation du coefficient s'explique par l'inégalité de vitesse à différentes distances de l'axe de rotation. Dans des expériences semblables, Hutton a trouvé 1,24 et 1,43; Thibault 1,525 et 1,784, mais ce dernier avec des surfaces et des vitesses plus grandes. Pour les plans minces, le colonel Beaufoy a obtenu 1,13; et le colonel Duchemin 1,254. Pour des prismes et cylindres mus dans le sens de leur axe, Beaufoy a trouvé pour k des valeurs qui ont varié de 0,88 à 1,16. D'ailleurs, dans toutes ces expériences, le coefficient s'abaisse d'une manière notable lorsque, au lieu d'une surface plane, le corps présente à sa partie antérieure une proue plus ou moins arrondie. Quant à la résistance latérale, M. Bourgois, en discutant les expériences de Beaufoy a été conduit à admettre pour a et b les valeurs suivantes:

Dans une première série d'expériences
 $a = 0,000125$, $b = 0,000102$;
 dans une deuxième série d'expériences
 $a = 0,000100$, $b = 0,000125$;
 dans une troisième série d'expériences
 $a = 0,000024$, $b = 0,000156$.

On sait que pour représenter le frottement de l'eau dans les CANAUX DÉCOUVERTS (*Voy. ce mot*) M. de Prony a adopté les valeurs

$$a = 0,000044, \quad b = 0,000309,$$

et Eytelwein, les valeurs

$$a = 0,000024, \quad b = 0,000366.$$

Pour les tuyaux de conduite, les mêmes auteurs ont adopté, savoir:

M. de Prony

$$a = 0,000172, \quad b = 0,000348;$$

M. Eytelwein

$$\alpha = 0,000022, \nu = 0,000280.$$

(Ces valeurs se rapportent à la vitesse moyenne du fluide, et non à la vitesse contre la paroi.)

On peut consulter l'Introduction à la Mécanique industrielle de M. Poncelet, et le Mémoire de M. Bourgois sur la résistance de l'eau, etc., où les principales expériences relatives au sujet qui nous occupe sont rapportées et discutées. L'incertitude dont ces différents nombres sont affectés, montre que nos connaissances sur cette matière sont encore insuffisantes, et elle explique pourquoi les recherches théoriques de Daniel Bernoulli, d'Euler, de Navier, de Poisson, de Cauchy, etc., sur l'importante question de la résistance des fluides n'ont encore amené aucun résultat pratique. Il est vraisemblable qu'on parviendrait à exprimer les effets produits en supposant chaque élément dS de la surface immergée soumis à deux forces, l'une normale, qui aurait pour expression

$$k \Pi dS \frac{(V \sin \tau)^2}{2g},$$

en appelant τ l'inclinaison de l'élément considéré par rapport à la vitesse relative, l'autre tangentielle et qui aurait pour valeur

$$\Pi dS [aV \cos \tau + bV^2 \cos^2 \tau].$$

En projetant ces forces dans la direction du mouvement, et intégrant pour toute l'étendue de la surface mouillée, on obtiendrait l'expression de la résistance pour chaque forme attribuée au corps; et un petit nombre d'expériences bien faites permettraient peut-être de déterminer par la méthode des MOINDRES CARRÉS (Voy. ce mot) les valeurs des coefficients k , a et b . Mais ce travail est encore à faire.

IV. D'après les expériences de Beaufoy, la résistance opposée au mouvement d'un corps complètement immergé augmenterait avec la profondeur de l'immersion. Jorge Juan, auteur espagnol estimé, admet, dans son *Examen politico y marítimo*, etc., que la résistance en un point extérieur d'un vase qui se meut dans un fluide est proportionnelle à la hauteur due à la vitesse relative avec laquelle le fluide entrerait dans le vase si l'on venait à percer la paroi; et le marquis de Poterat, dans sa *Théorie du navire*, a reproduit les idées de Jorge Juan. Cette hypothèse, comme on voit, fait ainsi dépendre la résistance de la profondeur d'immersion; mais, tout ingénieuse qu'elle est, elle ne conduit pas à des résultats conformes aux faits, et ne saurait par conséquent être admise. Cependant ce point demanderait d'autant plus à être élucidé par des expériences spéciales, que la déviation éprouvée par les navires à hélice ne peut guère pouvoir s'expliquer sans admettre une influence de la profondeur sur la résistance (Voy. PROPULSEURS HÉLICOÏDES).

V. Dans le cas des corps flottants, les phénomènes décrits au commencement de cet article subsistent dans les sections horizontales, et à la partie inférieure du corps; mais la surface libre du liquide présente de nouvelles particularités. Les molécules qui rencontrent la face antérieure BC (fig. 4) ne pouvant s'échapper par la partie supérieure de cette face, s'élèvent jusqu'à une certaine hauteur, proportionnelle à la hauteur due à la vitesse relative; et forment ainsi à l'avant une sorte de bourrelet

liquide. A l'arrière, il se produit au contraire un vide partiel, dans lequel les molécules voisines se précipitent, mais d'où résulte un abaissement de niveau à la face postérieure AD. La différence de

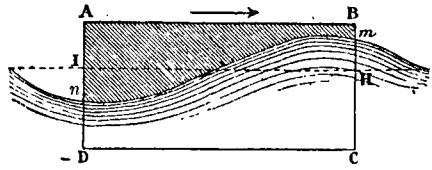


Fig. 4.

niveau qui s'établit ainsi entre l'avant et l'arrière, aux points m et n , est ce qu'on appelle la dénivellation. Les molécules qui forment le bourrelet antérieur s'échappent latéralement en suivant la pente mn . Soit IH la ligne d'eau qui répondrait à l'état de repos; si l'on mesure la pression antérieure sur HC , on la trouve supérieure à la pression statistique \mathcal{Q} , d'une quantité proportionnelle à $\frac{V^2}{2g}$, et qu'on peut représenter par $m \Pi A \frac{V^2}{2g}$, en désignant par A la section droite de la partie mouillée, et par m un coefficient numérique. Si l'on mesure au contraire la pression sur ID , on la trouve inférieure à \mathcal{Q} d'une quantité $n \Pi A \frac{V^2}{2g}$; en sorte que la différence de ces pressions peut être exprimée par

$$(m + n) \Pi A \frac{V^2}{2g} \text{ ou } k \Pi A \frac{V^2}{2g},$$

comme dans le cas d'un corps entièrement plongé. La résistance latérale peut aussi s'exprimer comme dans la formule [B]. Mais la dénivellation produit un autre effet. Elle augmente à l'avant la surface A , ou HC , d'une quantité MH , proportionnelle à $\frac{V^2}{2g}$, en appelant l la largeur du prisme; et elle diminue à l'arrière cette même surface A , ou ID , d'une quantité In proportionnelle à la hauteur due à la vitesse des molécules liquides qui arrivent en n en descendant du niveau de l'eau pour remplir le vide formé; c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle encore à $\frac{V^2}{2g}$. Il en résulte que la pression antérieure n'est plus

$$\mathcal{Q} + m \Pi A \frac{V^2}{2g},$$

mais

$$\mathcal{Q} + m \Pi \left(A + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) \frac{V^2}{2g},$$

en appelant α un coefficient numérique; de même, la pression postérieure n'est plus

$$P - n \Pi A \frac{V^2}{2g},$$

mais

$$P - n \Pi \left(A - \beta \frac{V^2}{2g} \right) \frac{V^2}{2g},$$

β étant un nouveau coefficient numérique. La différence de ces pressions n'est donc plus

$$(m + n) \Pi A \frac{V^2}{2g},$$

mais bien

$$(m+n) \Pi A \cdot \frac{V^2}{2g} + (m\alpha - n\beta) \Pi \cdot \frac{IV^4}{4g^2}$$

ou

$$k \Pi A \frac{V^2}{2g} + k' \cdot \Pi A \frac{IV^4}{2g^2}$$

Par conséquent, l'expression de la résistance totale devient :

$$R = k \Pi A \frac{V^2}{2g} + \Pi S (aV + bV^2) + k' \cdot \Pi \cdot \frac{IV^4}{4g^2}. \quad [C]$$

L'incertitude qui affecte les coefficients de résistance dans le cas des corps entièrement plongés, subsiste dans le cas des corps flottants. La plupart des auteurs n'ont tenu compte que du premier terme, et ont négligé la résistance latérale et l'effet de la dénivellation. Bossut, dans les expériences qu'il a faites sur des prismes munis de proues arrondies, a trouvé pour k des valeurs inférieures à l'unité. Dubuat a obtenu des valeurs qui ont varié de 1,11 à 1,44; cette dernière valeur est relative à un prisme dans lequel la largeur était quadruple de la hauteur de flottaison, et pour lequel par conséquent l'effet de la dénivellation, négligé par cet auteur, devait être considérable. Il faut attribuer à la même cause la grandeur des coefficients trouvés par M. le colonel Duchemin, lesquels ont varié de 1,33 à 1,85. M. Poncelet pense que le coefficient 1,1 doit se rapprocher beaucoup de la vérité dans les circonstances ordinaires; il doit, comme l'a trouvé Bossut, être inférieur à l'unité quand le prisme est muni d'une proue arrondie.

Pour ce qui concerne les carènes de navires, quoique le nombre total des expériences soit assez faible, on est plus riche néanmoins en résultats précis et comparables. L'application des PROPULSEURS HÉLICOÏDES (Voy. ce mot) à la navigation a fourni un moyen exact et relativement facile, d'obtenir un mouvement uniforme et de mesurer la résistance. Le moyen qui paraît le meilleur pour ce genre de recherches consiste à faire mouvoir uniformément, au moyen d'un remorqueur à hélice, le bâtiment sur lequel on veut opérer, et à mesurer la résistance par un DYNAMOMÈTRE (Voy. ce mot) interposé sur le trajet du câble qui sert à la remorque, en tenant compte, bien entendu, de l'excès de tension dû au poids de ce câble. M. Bourgois, commandant alors le *Pélican*, a fait au bas de la Loire plusieurs expériences sur la résistance des carènes de diverses embarcations. M. Lehoullier de Courlon a exécuté à Toulon plusieurs expériences semblables. Une série d'expériences ont été faites au bas de la Loire sur le *Pélican* lui-même par MM. Bourgois et Moll. Plusieurs commissions scientifiques ont mesuré, soit par la méthode de la remorque, soit par d'autres méthodes, la résistance de divers navires, au nombre desquels nous citerons le *Charlemagne*, le *Napoléon*, l'*Audacieuse*, le *Primauguet*, etc. Des observations du même genre ont été faites en Angleterre. M. Bourgois, en analysant et discutant, dans son mémoire déjà cité, les diverses expériences connues, a été conduit aux conclusions suivantes. Si, pour se conformer aux usages adoptés dans la marine, on remplace A par B^2 (B désignant alors le côté du carré équivalent à la surface immergée du maître-couple) (Voy. CONSTRUCTION NAVALE), on pourra écrire

$$R = B^2 V^2 \left[\frac{k \Pi}{2g} + \frac{\Pi S a}{B^2 V} + \frac{\Pi S b}{B^2} + \frac{k' \cdot \Pi I V^2}{4B^2 g^2} \right]$$

ou, en réunissant en un seul les termes de la parenthèse indépendants de la vitesse,

$$R = B^2 V^2 \left[K_1 + K_2 \frac{IV^2}{B^2} + K_3 \frac{S}{B^2 V} \right], \quad [D]$$

en posant

$$K_1 = \frac{k \Pi}{2g} + \frac{\Pi S b}{B^2}, \quad K_2 = \frac{k' \Pi}{4g^2} \quad \text{et} \quad K_3 = \Pi a.$$

M. Bourgois a trouvé que, pour les bâtiments de guerre à voiles, doublés de cuivre en bon état, et dont la longueur est moindre que 4 fois la largeur, on peut écrire

$$R = B^2 V^2 \left[2^k,00 + 0^k,16 \frac{IV^2}{B^2} + 0^k,08 \frac{S}{B^2 V} \right]. \quad [8]$$

Pour les bâtiments de guerre à vapeur, dont la carène, en bois doublé de cuivre, ou en fer, est en bon état, et dont la longueur est comprise entre 5 et 6 fois la largeur, on a

$$R = B^2 V^2 \left[2^k,20 + 0^k,14 \frac{IV^2}{B^2} + 0^k,08 \frac{S}{B^2 V} \right]. \quad [9]$$

Enfin pour les vaisseaux à vapeur, doublés de cuivre, en bon état, ayant des formes plus fines que les anciens vaisseaux à voiles, mais dont la longueur ne dépasse pas 4 fois $\frac{1}{2}$ la largeur, on peut prendre

$$R = B^2 V^2 \left[1^k,80 + 0^k,14 \frac{IV^2}{B^2} + 0^k,08 \frac{S}{B^2 V} \right]. \quad [10]$$

Pour les avisos à formes fines, le coefficient $0^k,14$ devrait être remplacé par $0^k,12$. — Ces formules donnent pour R des valeurs dont la moyenne s'écarte peu de

$$R = 3^k,3 B^2 V^2$$

pour des vitesses de 11 nœuds, soit $5^m,65$ par seconde, quand il s'agit des vaisseaux, des frégates et même des corvettes; mais la résistance croît rapidement à mesure que les dimensions absolues diminuent, ce qui tient à l'influence de la dénivellation. Ces faits s'accordent avec d'anciennes expériences de Bossut, qui ont donné $k = 1,05$ pour un prisme dont la base avait la forme du maître-couple d'un navire, et $0,22$ à $0,24$ seulement pour un modèle de navire. — Pour calculer la surface S qui entre dans ces formules, on se sert le plus souvent d'une relation empirique d'après laquelle on a sensiblement

$$S = 0,6 L (l + 2t),$$

en nommant L la longueur du navire à la flottaison, l sa largeur au maître-couple et t le tirant d'eau; ce qui revient à dire que S est les $0,6$ de la surface latérale du parallépipède circonscrit à la portion immergée de la carène.

VI. Les expériences faites en Écosse en 1833 sur les bateaux rapides employés à la navigation dans les canaux avaient un instant donné lieu de penser qu'au delà d'une certaine vitesse la résistance éprouvait une diminution considérable. Ces expériences, qui firent grand bruit alors, donnèrent lieu à beaucoup d'entreprises industrielles qui n'ont point prospéré, et à beaucoup de considérations théoriques aujourd'hui tombées dans l'oubli. Voici ce qui a occasionné l'illusion : le bourrelet ou gonflement liquide qui se forme à l'avant d'un bateau, quand il se meut dans un milieu indéfini, forme une onde qui se propage comme les ondes ordinaires; mais dans un canal, cette onde, arrêtée par les berges, qu'elle dégrade parfois, ne se propage qu'avec difficulté, ou même, si le canal est étroit,

ne se propage pas du tout; et elle forme ce que M. Scott Russel a nommé une *onde solitaire*. D'après les expériences de Mac Neil sur les canaux d'Écosse et celles de M. Morin sur le canal Saint-Denis, la vitesse de cette onde est toujours celle du bateau quand le mouvement de celui-ci est uniforme. Si le bateau prend une accélération momentanée, il peut arriver qu'il monte sur le sommet de l'onde, la proue se trouvant alors dégagée, comme l'indique la fig. 5; la résistance se trouve, en effet, mo-



Fig. 5.

mentanément diminuée d'une quantité notable. Mais on sent que c'est là une sorte d'équilibre instable qui ne peut durer. Si le bateau se ralentit, il reprend sa place sur la rampe ascendante de l'onde, et la résistance reprend sa première valeur; si le bateau s'accélère davantage, au contraire, et se place sur la rampe descendante, l'onde solitaire s'abaisse peu à peu, disparaît, et il s'en forme une nouvelle à l'avant. La diminution de la résistance se rattache donc à une sorte de *cas singulier*, et ne peut être considérée comme une loi constante, ni comme un cas normal. Lorsqu'on dégage le phénomène de l'influence de l'onde solitaire, on reconnaît que la résistance croît avec la vitesse, non pas comme son carré, ainsi que l'avait cru M. Morin, mais suivant une loi plus rapide; en sorte que les bateaux rapides rentrent dans la loi générale exprimée par la formule (C). (Voy. le Mémoire de M. Bourgois déjà cité, et l'Introduction à la Mécanique industrielle de M. Poncelet.)

VII. Nous avons dit, en commençant cet article, que les lois de la résistance devaient dépendre uniquement du mouvement relatif. Cependant des expériences précises de Dubuat et de quelques autres auteurs ont conduit à une valeur de la résistance plus grande dans le cas d'un corps solide en repos dans un fluide en mouvement, que dans le cas d'un corps solide en mouvement dans un fluide en repos. Deux considérations expliquent ce paradoxe apparent. Dans les expériences faites sur les rivières ou sur des canaux artificiels, on a généralement pris pour vitesse la VITESSE MOYENNE (Voy. ce mot), laquelle est moindre que la vitesse au milieu du courant, où se place ordinairement le corps mis en expérience. Si donc on appelle R la résistance observée, en désignant par U la vitesse moyenne, on calcule le coefficient k par la relation

$$R = k \cdot \Pi \frac{U^2}{2g},$$

d'où

$$k = \frac{R \cdot 2g}{\Pi U^2}.$$

Si l'on avait employé la vitesse au milieu V, on aurait obtenu, pour la même résistance,

$$R = k' \cdot \Pi \cdot \frac{V^2}{2g},$$

d'où

$$k' = \frac{R \cdot 2g}{\Pi V^2},$$

relations d'où l'on tire

$$k = k' \cdot \frac{V^2}{U^2}.$$

On obtient donc ordinairement un coefficient k plus grand que le coefficient k' qu'on aurait dû obtenir. En second lieu, pour qu'un liquide soit en mouvement uniforme, il faut que sa surface offre une pente; le corps et le fluide se trouvent dès lors dans la même situation relative que si le corps remontait un plan incliné formé par la surface libre du fluide; par conséquent, la résistance doit en être augmentée. (Voy. l'Hydrodynamique de Bossut, les Principes d'hydraulique de Dubuat, l'Architecture hydraulique de Bélidor, avec les notes de Navier, le Mémoire de M. Lechevalier sur le mouvement des fluides, et les ouvrages déjà cités dans le cours de cet article.)

VIII. RÉSISTANCE DE L'AIR. La plupart des auteurs qui se sont occupés de la résistance des gaz ont admis qu'elle devait être la même que pour un liquide de même densité; ils ont, en conséquence, fait usage de formules équivalentes à la formule [1], qui supposent la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Les premières expériences précises sur la résistance de l'air sont dues à Robins. Il faisait tourner autour d'un axe vertical des palettes de différentes formes et de différentes dimensions, dont le plan passait par l'axe. Ces expériences ont été reprises plus tard avec le même appareil par Hutton, de 1786 à 1788. Des observations du même genre ont été faites plus tard par Borda, au moyen d'un appareil analogue, mais dans lequel la rotation avait lieu autour d'un axe horizontal. Enfin M. Thibault, lieutenant de vaisseau, a repris ces observations à Brest en 1826, avec l'appareil de Borda. Les résultats de ces expériences sont ceux qui ont été rapportés plus haut, à l'occasion de la résistance de l'eau. Pour un même corps, la résistance croît sensiblement comme le carré de la vitesse; mais plus rapidement que l'aire de la palette, surtout lorsque celle-ci se rapproche de l'axe; ce qui tient à l'inégalité de vitesses des points de la palette situés à des distances différentes de l'axe de rotation, inégalité qui est d'autant plus sensible que la palette est plus près de l'axe. Il a été fait en 1835 et 1836 à Metz, par MM. Piobert, Morin et Didion, des expériences dans lesquelles un plan était animé d'un mouvement uniforme perpendiculaire à sa direction. Ces auteurs ont représenté la résistance au mouvement par une formule qui revient à

$$R = \Pi A \left(0,03 + 1,357 \cdot \frac{V^2}{2g} \right),$$

et dans laquelle figure un terme indépendant de la vitesse. Pour des vitesses de 4^m à 9^m, on peut sans erreur sensible négliger ce terme et écrire

$$R = 1,357 \Pi A \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

D'après l'ensemble de ces expériences, M. Poncelet pencherait vers la valeur

$$k = 1,3.$$

Les divers auteurs dont nous avons parlé ont aussi opéré sur des corps de diverses formes: coins triangulaires; demi-cylindres, cônes, demi-sphères.

sphères entières. Malheureusement ils ont négligé de comparer les coefficients obtenus à ceux qu'auraient donnés des plans minces de même surface que leur section principale perpendiculaire au mouvement, ce qui aurait permis d'apprécier l'influence des diverses formes de poupes. Pour les sphères en particulier, il résulte d'anciennes expériences de Newton et de celles de Hutton sur le même objet que, pour des vitesses qui ne dépassent pas 8 à 9 mètres, la valeur du coefficient k doit être d'environ 0,54.

IX. Les résultats dont on vient de parler cessent d'être applicables aux grandes vitesses des projectiles de l'artillerie. Les corps qui se meuvent dans l'air y sont accompagnés de piques et de poupes fluides analogues à celles dont nous avons parlé à l'occasion du mouvement dans l'eau, et dont le volume peut atteindre à plus de trois fois le volume du projectile. Ce phénomène est sensible dans le jet des bombes qu'on voit fréquemment suivies d'une masse fluide noirâtre, de forme parabolique, dont la longueur est d'environ deux ou trois fois le diamètre du projectile. En même temps, la densité de la couche d'air située à l'avant du mobile augmente rapidement avec la vitesse, et il résulte de ces diverses causes que la résistance croît plus vite que le carré de la vitesse. Comme le mouvement des projectiles est varié (Voy. BALISTIQUE), il est utile d'indiquer comment on peut déterminer par expérience la loi de la résistance qu'il éprouve. On sait, au moyen du PENDULE BALISTIQUE (Voy. ce mot), déterminer la vitesse d'un projectile en un point de son parcours. On fait l'expérience à deux distances différentes a et a' de la pièce, sur deux projectiles égaux lancés horizontalement avec la même charge de poudre. Les résultats sont les mêmes que si l'on avait opéré sur l'un des deux projectiles seulement. Si les distances a et a' diffèrent peu, on peut admettre que la résistance R n'a pas sensiblement varié dans l'intervalle, et que, par conséquent, le travail de cette force peut être exprimé par

$$R(a - a').$$

En même temps, la perte de force vive a pour valeur

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} (V^2 - V'^2),$$

en appelant P le poids du projectile et V et V' les vitesses mesurées. On doit donc avoir

$$R(a - a') = \frac{P}{2g} (V^2 - V'^2),$$

d'où

$$R = \frac{P}{2g} \cdot \frac{V^2 - V'^2}{a - a'},$$

ou, en appelant U la vitesse moyenne $\frac{1}{2}(V + V')$,

$$R = \frac{P(V - V') U}{g(a - a')} \quad [1]$$

Mais si k est le coefficient de la résistance pour la vitesse U , et que r désigne le rayon du boulet, on a

$$R = k \Pi \pi r^2 \cdot \frac{U^2}{2g},$$

d'où

$$k = \frac{2gR}{\pi r^2 U^2},$$

ou, en mettant pour R sa valeur [1],

$$k = \frac{2P(V - V')}{\Pi \pi r^2 (a - a') U} \quad [2]$$

formule qui permet d'étudier la loi des variations de k et par suite de R .

M. Piobert a été conduit, par la discussion des expériences faites à Woolwich par Hutton et de celles faites par lui-même à Metz, à représenter la résistance par une formule de la forme

$$R = k \Pi A \frac{V^2}{2g} (1 + \alpha V),$$

et qui, d'après M. Didion, doit s'écrire

$$R = \pi r^2 \cdot U^2 \cdot 0,027 (1 + 0,0023 U). \quad [E]$$

Pour les projectiles oblongs, à partie antérieure ogivale, à corps cylindrique, et à partie postérieure plane, le coefficient 0,027 paraîtrait devoir être remplacé par 0,018; et lorsque la partie postérieure est creuse, il faudrait adopter 0,020.

La formule [E] revient à

$$R = 0,4077 \cdot \Pi A \frac{V^2}{2g} (1 + 0,0023 V),$$

en appelant V la vitesse moyenne entre les deux instants considérés.

(Voyez les *Nouveaux principes d'Artillerie* de Robins; les *Nouvelles expériences d'Artillerie* de Hutton, traduites par M. O. Terquem; les *Lois de la résistance de l'air sur les projectiles*, par Is. Didion; le *Mémoire* de MM. Piobert, Morin et Didion, inséré dans le *Mémorial d'Artillerie*, 1852; et les divers ouvrages déjà cités.)

X. Nous ne pouvons terminer cet article sans dire quelques mots de la résistance éprouvée par les surfaces minces analogues aux parachutes ou aux voiles des navires. D'après M. Didion, si l'on fait mouvoir dans l'air, avec des vitesses variant de 0 à 8^m, une surface courbe dont la flèche est comprise entre le tiers et le quart de la largeur, quand la convexité est tournée en avant, la résistance n'est que les 0,77 de celle qu'éprouverait une surface plane égale à la projection de la surface courbe perpendiculairement au mouvement; tandis que, quand c'est la concavité qui est en avant, la résistance est représentée par 1,94, celle de la surface plane étant 1. M. Thibault, dans les expériences qu'il a faites sur des voiles présentant une flèche égale au septième de leur rayon, est arrivé à ce résultat remarquable que, pour des inclinaisons supérieures à 45°, la résistance est la même que si la voile était développée suivant un plan; mais elle est beaucoup plus grande que pour la voile développée quand l'inclinaison est faible. Ce résultat semble indiquer que l'élasticité de l'air joue, dans ce cas, un rôle plus important qu'on ne le suppose d'ordinaire, et que, sous de pareilles inclinaisons, il n'est plus permis d'assimiler l'air à un liquide de même densité. Le marquis de Poterat, dans l'Introduction de sa *Théorie du navire*, émet l'opinion que, quelle que soit l'incidence du vent sur une voile, son action s'exerce presque normalement en chaque point, et il rapporte plusieurs exemples frappants du désaccord qu'on remarque à cet égard entre la pratique et la théorie généralement admise (Voy. VOILES). Pour éviter des calculs souvent impraticables, on regarde ordinairement les voiles des navires comme planes. L'action véritable du vent sur ces organes, peinte si intéressante pour la navigation et malheu-

reusement si obscur encore, appelle l'attention spéciale des expérimentateurs et des géomètres.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. Branche de la Mécanique appliquée qui traite des déformations auxquelles les pièces solides sont exposées dans les constructions ou dans les machines, et de la résistance que chaque espèce de matière oppose aux efforts extérieurs qui tendent à produire ces déformations. C'est une question délicate, et l'une des plus importantes applications de la théorie de l'équilibre. On trouvera la partie théorique de la question développée aux articles ALLONGEMENT, COMPRESSION, FLEXION PLANE, PIÈCES COURBES, TORSION, VASES CYLINDRIQUES, SOLIDE D'EGALE RÉSISTANCE; des données expérimentales à ces articles et aux articles RUPTURE, ÉCRASEMENT, PRISMES CHARGÉS DEBOUT; pour les applications de la résistance des matériaux, on pourra consulter les articles PONTS, PILES, PLANCHERS, COMBLES, FERMES, POUSSÉE DES VOUTES, MURS DE SOUTÈNEMENT, REVÊTEMENTS, TIGES, BIELLES, MANIVELLES, BALANCIERS, ARBRES, TOURILLONS, BOUTONS DE MANIVELLES, BOUTONS DE BALANCIERS, VOLANTS, ENGRENAGES, GRUES, RÉSERVOIRS, CHAUDIÈRES, TUBES, AIGUILLES DE BARRAGE, etc. Voyez aussi l'article RÉSISTANCE VIVE.

Les principaux ouvrages relatifs à la résistance des matériaux sont les *Leçons de M. Navier* à l'École des ponts et chaussées, *l'Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet, *la Théorie de la résistance des solides* de M. Bélanger, *la Résistance des matériaux*, par M. Morin, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse, à l'École des ponts et chaussées; le *Traité pratique de la résistance des matériaux*, par M. Bourdais, etc.

RÉSISTANCE VIVE, nom donné par M. Poncelet au travail développé par la résistance d'un solide prismatique à l'allongement, lorsque cet allongement se produit d'une manière brusque, comme par suite d'un choc. Si l'on imagine, par exemple, qu'une masse pesante, enfilée dans une tige prismatique verticale que termine un bourrelet à son extrémité inférieure, soit tout à coup abandonnée à la pesanteur, à une certaine hauteur au-dessus de cette extrémité, elle aura acquis à l'instant du choc contre le bourrelet une certaine puissance vive (Voy. PUISSANCE VIVE) qui ne sera épuisée que lorsque le travail négatif de la résistance de la tige à l'allongement sera devenu égal à cette même puissance vive (Voy. EFFET DU TRAVAIL); d'où le nom de *résistance vive* donné à ce travail. Si l'allongement ne dépasse pas celui qui correspond à la limite d'élasticité, c'est-à-dire celui au delà duquel l'allongement cesse d'être proportionnel à la charge (Voy. ALLONGEMENT), le travail de la résistance prend le nom de *résistance vive d'élasticité*. Si l'allongement est poussé jusqu'à celui qui correspond à la rupture du prisme, le travail de la résistance s'appelle *résistance vive de rupture*.

I. Soit R la résistance correspondante à un allongement x , le travail élémentaire de cette force sera

$$R dx,$$

et, en nommant x_1 l'allongement qui répond à la limite d'élasticité, on aura pour la résistance vive d'élasticité

$$\int_0^{x_1} R dx.$$

Mais, dans ces limites, on a

$$R = E\Omega \frac{x}{L},$$

en désignant par E le coefficient d'élasticité de la matière, par Ω la section droite du prisme et par L sa longueur. Si donc on désigne par \mathfrak{C}_e la résistance vive d'élasticité, on aura

$$\mathfrak{C}_e = \int_0^{x_1} E\Omega \frac{x}{L} dx = E\Omega \frac{x_1^2}{2L};$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathfrak{C}_e = \frac{1}{2} E\Omega L \left(\frac{x_1}{L}\right)^2.$$

Mais $\frac{x_1}{L}$ est l'allongement proportionnel, ou par mètre de longueur, qui répond à la limite de l'élasticité; en le désignant par i , on aurait donc

$$\mathfrak{C}_e = \frac{1}{2} E\Omega L i^2 \quad [1]$$

Soit T_e la valeur que prend cette quantité pour

$$\Omega = 1 \text{ et } L = 1,$$

on aura

$$T_e = \frac{1}{2} E i^2. \quad [2]$$

M. Poncelet a donné à cette quantité le nom de *coefficient de la résistance vive d'élasticité*; à l'aide de ce coefficient, on met la relation [1] sous la forme

$$\mathfrak{C}_e = T_e \cdot \Omega L. \quad [3]$$

Si, par exemple, il s'agit d'une barre de fer forgé de 0^m9,0001 de section et de 5^m de longueur, on aura d'abord

$$E = 20^4 \cdot 10^9 \text{ et } i = 0,0006;$$

par suite

$$T_e = \frac{1}{2} \cdot 20^4 \cdot 10^9 \cdot (0^m,0006)^2 = 3600^{\text{km}};$$

on aura ensuite

$$\mathfrak{C}_e = 3600^{\text{km}} \cdot 0,0001 \cdot 5 = 1^{\text{km}},8.$$

Ainsi, un poids de 1^{km},8 tombant d'une hauteur de 1^m produirait un allongement très-voisin de la limite d'élasticité.}

D'après M. Poncelet, on aurait les valeurs suivantes pour T_e :

Fer ductile en barre ou en fil...	3300 ^{km}}
Fil de fer dur, recuit.....	6620
Fil de fer fort, non recuit.....	5850
Fil d'acier	15000
Fil de laiton doux, recuit.....	12500
Fil de laiton fort, non recuit...	12750
Chêne.....	1700
Sapin jaune ou blanc.....	1300
Sapin rouge ou pin.....	3100
Mélèze ou larix.....	1700
Hêtre rouge.....	1400
Frêne.....	700
Orme.....	2800

II. Pour la résistance vive de rupture, le calcul ne peut plus se faire de la même manière, parce que R n'est pas donné en fonction de x ; l'expérience ne fournit que des valeurs isolées de x correspondant à des valeurs de R. Mais si l'on trace une courbe ayant pour abscisses les valeurs de l'allongement x et pour ordonnées les valeurs correspondantes de R, l'aire de cette courbe, calculée depuis $x = 0$ jusqu'à

l'allongement X qui répond à la rupture, fera connaître la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_0^X R dx$$

qui exprime la résistance vive de rupture. On admet que si l'on désigne par T_r la résistance vive de rupture pour un prisme dont la section est 1^{m^2} et la longueur 1^m , la résistance analogue \mathcal{E}_r pour un prisme dont la section est Ω et la longueur L est encore donnée par une relation analogue à la relation [3], savoir :

$$\mathcal{E}_r = T_r \cdot \Omega L. \quad [4]$$

M. Poncelet appelle la quantité T_r la *coefficient de la résistance vive de rupture*. Des expériences spéciales seraient nécessaires pour vérifier jusqu'à quel point la résistance vive reste ainsi proportionnelle à la section et à la longueur. Quoi qu'il en soit, la relation [4] peut être considérée comme donnant une valeur approchée de la résistance vive de rupture.

Si l'on applique le calcul dont il vient d'être question aux expériences de M. Hodgkinson rapportées à l'article ALLONGEMENT, on trouve, pour le fer qui a servi à ces expériences,

$$T_r = 1028500^{km} \text{ environ.}$$

D'après M. Poncelet, on peut former le tableau suivant :

	T_r
Fer en fil ou en barre, doux ou recuit.	4000000 ^{km}
Fer en fil ou en barre, fort ou non recuit.	80000
Acier trempé et recuit.....	70000
Acier fondu de première qualité.....	160000
Fil de laiton recuit.....	4500000
Fil de laiton non recuit.....	200500
Fil de plomb, de coupelle, étiré à froid.	350000
Bois de chêne, sapin, mélèze, hêtre, frêne, orme.....	12100

Dans l'exemple que nous avons traité plus haut, on aurait

$$\mathcal{E}_r = 4497000^{km} \cdot 0,00015 = 2248^{km},5.$$

Ainsi, pour produire la rupture de la tige, il faudrait un poids de 1000^k tombant d'une hauteur de 2^m, 25 environ.

On voit, par les deux tableaux qui précèdent, que les métaux qui résistent le moins à l'allongement sont ceux qui supportent le mieux l'effet d'un choc. Ils s'allongent plus aisément, mais ils se rompent moins facilement, et offrent ainsi plus de sécurité. Pour les chatnes d'attelage, pour les câbles en fer de la marine, les fers doux et extensibles sont donc préférables aux fers durs. Il en est de même pour les autres matières.

(Voyez l'Introduction à la Mécanique industrielle de M. Poncelet et la Résistance des matériaux par M. Morin.)

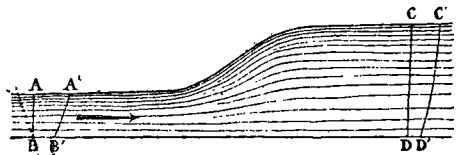
RÉSISTANCES PASSIVES, résistances que le moteur d'une machine est obligé de vaincre sans profit pour l'effet utile qu'on se propose. On réunit sous cette dénomination les FROTEMENTS, la RAIDEUR DES CORDES (Voy. ces mots); et lorsqu'il s'agit du travail, on y comprend quelquefois les pertes dues aux chocs, aux ébranlements, aux vibrations, et généralement tous les travaux qui n'entrent pas dans l'effet utile.

RESSAUT, phénomène que peuvent présenter les

eaux courantes dans les canaux découverts. Il a été observé et étudié pour la première fois par Bidone, savant piémontais (Voy. les Mémoires de l'Académie de Turin, année 1820, t. XXV). Voici en quoi consiste ce phénomène.

I. Lorsqu'on établit un barrage en travers d'un cours d'eau, le niveau s'élève, immédiatement, en amont du barrage; mais il s'abaisse peu à peu à mesure qu'on avance vers l'amont, et il a généralement un raccordement asymptotique (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS) avec le niveau qu'avait le cours d'eau avant l'établissement du barrage. Mais il peut arriver aussi qu'il y ait un changement brusque de niveau à une certaine distance en amont du barrage, c'est-à-dire qu'en allant vers le barrage l'eau s'élève tout à coup d'une quantité notable. C'est cette brusque élévation de niveau, de l'amont à l'aval, que l'on a nommée *ressaut superficiel* ou simplement *ressaut*. Ce phénomène a été pour la première fois soumis au calcul par M. Bélanger, qui a y appliqué le théorème général des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (Voy. ce mot).

Soit BD le lit du cours d'eau, qu'on suppose sen-



siblement horizontal. Soit AB une section transversale, dans laquelle les filets sont supposés couler parallèlement. Soit CD une section transversale dans laquelle les filets sont redevenus parallèles, après s'être déviés pour produire le ressaut. Nous supposons d'ailleurs le régime permanent établi. — Concevons qu'après un temps θ très-court, la portion du fluide comprise entre les sections AB et CD soit venue prendre la position A'B'C'D'. Considérons un filet quelconque traversant la section AB; soit ω sa section et v sa vitesse. Le volume écoulé dans le temps θ par la section ω est $\omega v \theta$; la masse de ce volume liquide est $\frac{\Pi \omega v \theta}{g}$, en appelant Π le poids du

mètre cube; et la quantité de mouvement correspondante est $\frac{\Pi \omega v^2 \theta}{g}$. Par conséquent la quantité de mouvement totale du liquide écoulé dans le temps θ par la section AB a pour expression $\frac{\Pi \theta}{g} \Sigma \omega v^2$. La somme $\Sigma \omega v^2$ diffère peu de ΩU^2 , Ω re-

présentant l'aire de la section AB et U la vitesse moyenne dans cette section. En effet, on peut poser

$$v = U + u, \quad [1]$$

u désignant la différence, positive ou négative, entre la vitesse du filet que l'on considère et la vitesse moyenne. On en déduit $v^2 = U^2 + 2Uu + u^2$; et par conséquent

$$\Sigma \omega v^2 = \Sigma \omega U^2 + 2 \Sigma \omega Uu + \Sigma \omega u^2. \quad [2]$$

Or, $\Sigma \omega U^2$ peut s'écrire $U^2 \Sigma \omega$ ou ΩU^2 ; le second terme du second membre est nul; car de [1] on tire $\Sigma \omega v = \Sigma \omega U + \Sigma \omega u$; mais par définition $\Sigma \omega v = \Omega U$; il vient donc $\Omega U = \Omega U + \Sigma \omega u$, ce

qui exige $\Sigma \omega u = 0$. Il en résulte que la relation [2] peut s'écrire

$$\Sigma \omega v^2 = \Omega U^2 + \Sigma \omega u^2.$$

Si l'on suppose les vitesses des divers filets assez peu différentes pour qu'on puisse négliger le second terme du second membre, on peut remplacer $\Sigma \omega u^2$ par ΩU^2 . Sous cette condition, la quantité de mouvement du fluide écoulé dans le temps θ par la section AB, c'est-à-dire du fluide compris entre AB et A'B', a donc pour valeur $\frac{\Pi \theta}{g} \Omega U^2$.

En appelant Ω' l'aire de la section CD et U' la vitesse moyenne dans cette section, on verrait de même que la quantité de mouvement du fluide écoulé par cette section dans le temps θ , c'est-à-dire du fluide compris entre CD et C'D', a pour valeur $\frac{\Pi \theta}{g} \Omega' U'^2$. D'ailleurs, à cause de la permanence du mouvement, la quantité de mouvement de la portion de fluide comprise entre A'B' et CD est la même à l'instant initial et au bout du temps θ ; l'accroissement total de quantité de mouvement entre ces deux instants se réduit donc à la différence des quantités que nous venons d'écrire, c'est-à-dire à

$$\frac{\Pi \theta}{g} (\Omega' U'^2 - \Omega U^2).$$

Il faut évaluer cette quantité à la somme des impulsions des forces qui agissent sur le fluide considéré. Les actions mutuelles des filets disparaissent d'elles-mêmes. Si la distance des sections AB et CD est peu considérable, on peut négliger la résistance du lit. La pesanteur est une force verticale qui, projetée sur la direction du mouvement, donne zéro. La pression atmosphérique, considérée comme agissant sur tout le contour BACD, est la même que si elle agissait normalement sur la projection BD (Voy. Pression d'un fluide); c'est donc encore une force verticale dont la projection sur la direction du mouvement est nulle. Il ne reste plus que les pressions d'amont et d'aval, évaluées abstraction faite de la pression atmosphérique. Les filets étant supposés se mouvoir parallèlement dans les deux sections extrêmes, on peut y calculer les pressions d'après les règles de l'hydrostatique. Si Y et Y' désignent les distances des centres de gravité des sections AB et CD au niveau du liquide dans chacune de ces sections, les pressions dont il s'agit ont pour valeur

$$\Pi \Omega Y \text{ et } \Pi \Omega' Y';$$

la somme algébrique de leurs impulsions est donc $\Pi \theta (\Omega Y - \Omega' Y')$.

L'équation fournie par la considération des quantités de mouvement est donc

$$\frac{\Pi \theta}{g} (\Omega' U'^2 - \Omega U^2) = \Pi \theta (\Omega Y - \Omega' Y'),$$

ou simplement

$$\frac{1}{g} (\Omega' U'^2 - \Omega U^2) = \Omega Y - \Omega' Y'.$$

La dépense étant la même dans les deux sections considérées, on a

$$\Omega U' = \Omega U, \text{ d'où } U' = U \cdot \frac{\Omega}{\Omega'};$$

et en substituant

$$\frac{U^2}{g} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \Omega \right) = \Omega Y - \Omega' Y',$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{U^2}{g} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - 1 \right) = Y - \frac{\Omega'}{\Omega} Y'. \quad [3]$$

Cette équation est satisfaite quand on y suppose $\Omega' = \Omega$, ce qui entraîne $Y' = Y$; mais on conçoit qu'elle puisse être vérifiée pour une autre valeur de Ω' ; et c'est ce que nous allons montrer par un exemple.

II. Supposons que la section transversale du canal soit un rectangle; soit b la base de ce rectangle ou la largeur du canal; soit h la hauteur de la ligne d'eau dans la section AB, et h' la hauteur de la ligne d'eau dans la section CD. Nous aurons $\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{h}{h'}$, $\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{h'}{h}$, $Y = \frac{1}{2} h$ et $Y' = \frac{1}{2} h'$.

A l'aide de ces valeurs, l'équation [3] prend la forme

$$\frac{U^2}{g} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(h - \frac{h'^2}{h} \right),$$

ou
$$\frac{U^2}{g} h (h - h') = \frac{1}{2} h' (h^2 - h'^2).$$

Supprimant le facteur $h - h'$ qui correspond à la solution $h' = h$, c'est-à-dire au régime uniforme, il reste

$$\frac{U^2}{g} h = \frac{1}{2} (h h' + h'^2);$$

d'où l'on tire

$$h' = -\frac{1}{2} h + \sqrt{\frac{1}{4} h^2 + \frac{2 U^2 h}{g}},$$

en ne prenant que la solution positive. Pour que cette valeur de h' soit plus grande que h , il faut qu'on ait

$$\sqrt{\frac{1}{2} h^2 + \frac{2 U^2 h}{g}} > \frac{3}{2} h, \text{ d'où } h < \frac{U^2}{g}, \quad [4]$$

c'est-à-dire que pour qu'il y ait ressaut, dans le cas d'un canal rectangulaire, il faut que la hauteur de l'eau dans la section d'amont soit moindre que le double de la hauteur due à la vitesse moyenne dans cette section.

III. Il est remarquable que la condition exprimée par l'inégalité [4] corresponde précisément au cas d'exception que présente la formule du mouvement permanent varié (Voy. Canaux découverts). L'exception a lieu en effet lorsque le rapport $\frac{dh}{ds}$ change de signe en passant par l'infini, ce qui revient à l'inégalité

$$1 - 1,1 \frac{U^2}{g} \cdot \frac{x}{\Omega} < 0, \text{ d'où } \frac{x}{\Omega} < 1,1 \frac{U^2}{g}. \quad [5]$$

Or, dans le cas d'un canal rectangulaire, on a

$$\frac{x}{\Omega} = h,$$

en appelant h la hauteur de la ligne d'eau au-dessus du fond; le cas d'exception répond donc alors à l'inégalité

$$h < 1,1 \frac{U^2}{g}, \quad [6]$$

qui ne diffère de la condition [4] que par le facteur 1,1. On peut remarquer de plus que pour établir l'équation [3] on a remplacé $\Sigma \omega u^2$ par ΩU^2 , quantité un peu plus petite, et qu'il eût été plus exact de prendre $\alpha \Omega U^2$, α désignant un coefficient un peu supérieur à l'unité, auquel cas la condition [4] eût été remplacée par

$$h < \alpha \frac{U^2}{g}, \quad [7]$$

condition qu'on peut regarder comme identique avec la condition [6].

Cette remarque conduit à penser que la relation [5] exprime, dans le cas d'un canal à section transversale constante, mais d'ailleurs quelconque, la condition nécessaire pour la production du ressaut. Cependant des études plus approfondies sur ce sujet seraient d'une utilité incontestable.

(Voy. le *Cours d'Hydraulique* professé à l'École centrale par M. Bélanger, et le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées).

Le phénomène du ressaut se produit fréquemment à l'aval des roues hydrauliques en dessous (Voy. ce mot); et il a été désigné, de temps immémorial, sous le nom de *bouillon*, par les meuniers des environs de Paris.

RÉSULTANTE, nom donné à une force, à une vitesse, à une accélération, qui peut à elle seule remplacer plusieurs forces, plusieurs vitesses, plusieurs accélérations simultanées. (Voy. COMPOSITION DES FORCES, COMPOSITION DES VITESSES, COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS, COMPOSITION DES ROTATIONS.)

RÉSULTANTE DE TRANSLATION, résultante des forces appliquées à un système matériel, supposées transportées en un même point de l'espace. Les forces appliquées à un système matériel n'ont pas toujours de résultante effective; mais elles ont toujours une résultante de translation (Voy. ÉQUILIBRE, QUANTITÉ DE MOUVEMENT), dont la considération simplifie souvent les énoncés.

RETENUE. Voy. BARRAGE.

RÉTICULE, système de fils croisés, placés au foyer de l'objectif d'une LUNETTE (Voy. ce mot), et qui sert à déterminer l'AXE OPTIQUE (Voy. ce mot) de l'instrument. Le plus souvent le réticule se réduit à une plaque métallique percée d'un trou circulaire, au centre duquel deux fils se croisent à angle droit (fig. 1). Pour que la lunette soit dirigée vers un point donné, il faut que l'image de ce point se trouve derrière le point de croisement des



Fig. 1.

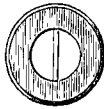


Fig. 2.

fils. Mais comme l'épaisseur des fils peut être une cause d'erreur, on préfère souvent remplacer les fils croisés par deux fils verticaux parallèles très-rapprochés; il faut alors que l'image du point observé vienne se placer entre les deux fils et à égale distance de chacun d'eux (fig. 2); cette méthode offre moins de chances d'erreur pour un observateur exercé.

Comme le foyer de l'objectif dont il vient d'être question est le *foyer conjugué* (Voir les Traités de physique) de l'objet observé, et qu'il change par conséquent avec la position de l'objet, il faut pouvoir amener à ce foyer variable les fils du réticule; pour cela, le réticule est adapté à un tuyau qui porte l'oculaire et peut s'enfoncer dans le tuyau principal ou se tirer à frottement doux, en sorte qu'on peut faire varier à volonté la distance du réticule à l'objectif. Quelquefois même ce *tirage* s'o-

père à l'aide d'une vis et d'une CRÉMAILLÈRE (Voy. ces mots), le réticule peut alors avancer ou reculer de quantités aussi petites que l'on veut.

Dans les instruments destinés aux observations qui demandent une grande précision, le réticule est un châssis mobile, qu'on peut déplacer de gauche à droite ou de haut en bas au moyen d'une ou plusieurs vis MICROMÉTRIQUES (Voy. ce mot). On amène la *croisée* des fils très-près du point observé en déplaçant convenablement la lunette; puis on achève d'opérer la coïncidence en faisant mouvoir le réticule à l'aide de la vis. Ce que nous disons des fils croisés s'applique évidemment aux fils parallèles.

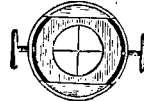


Fig. 3.

Les fils employés à la construction des réticules sont ou des fils d'araignée, ou des fils de platine. Dans le premier cas, on prend, dans une toile d'araignée, les fils qui rayonnent du centre à la circonférence; ce sont les plus résistants. Dans le second cas, on passe à la filière un cylindre de platine recouvert d'une couche d'argent; quand le fil a atteint le plus petit diamètre que puisse donner la filière, on le plonge dans l'acide azotique qui dissout l'argent; et il reste un fil de platine d'une ténuité extrême.

Dans les observations astronomiques qui se font la nuit, il est nécessaire d'éclairer les fils du réticule. Pour cela on y fait arriver de la lumière en pratiquant une ouverture latérale dans le corps de la lunette, et plaçant en regard de cette ouverture un petit miroir qui renvoie la lumière sur les fils. On peut encore projeter de la lumière diffuse sur l'objectif. Mais, lorsque les fils sont en platine, le meilleur moyen de les éclairer est de les rendre eux-mêmes lumineux en y faisant passer un courant électrique.

RETRADE, partie d'une face d'un ouvrage fortifié qui paraît coupée et reportée en arrière. Ce mot s'applique particulièrement à une partie de la coupure dans un bastion dont le cavalier est organisé en retranchement (Voy. RETRANCHEMENT). Lorsqu'une demi-lune a des flancs, il arrive quelquefois que ces flancs sont ainsi retirés en arrière; ils forment les flancs du réduit lorsqu'il y en a un. Cette disposition est peu employée.

RETRANCHEMENT, mot qui, indépendamment de sa signification générale, est pris, en FORTIFICATION (Voy. ce mot), dans un sens spécial, et désigne l'ouvrage qu'on élève à l'intérieur d'un bastion d'attaque, pour défendre la brèche et offrir un dernier refuge à l'assiégé. — Ce retranchement peut s'appuyer aux faces du bastion, à la gorge ou aux flancs.

Dans le premier cas on lui donne généralement la forme d'un REDAN (Voy. ce mot) parallèle aux faces, et se reliant avec elles par deux coupures; un retranchement de ce genre défend la brèche de plus près, et exige moins de travaux; mais il a l'inconvénient grave de pouvoir être tourné par une brèche faite à l'angle d'épaule.

Quand le retranchement est élevé à la gorge, ou plutôt un peu en arrière, il se compose généralement d'une courtine perpendiculaire à la capitale du bastion, et de deux flancs qui s'appuient sur les courtines adjacentes à ce bastion; cette disposition donne une plus grande ligne de feux, et le retranchement ne pourrait être tourné que si l'assiégeant parvenait à faire brèche à la courtine du corps de place, en arrière du flanc du retranchement, en profitant pour cela de la trouée laissée entre le bastion et les tenailles; mais les travaux entraînent à une plus grande dépense, et, ce qui est plus grave, l'ennemi, maître de la brèche, devient par cela même maître des flancs du bastion, qui cessent de défendre les bastions adjacents, lesquels peuvent dès lors être attaqués directement sans obstacle sérieux.

Le retranchement qui s'appuie aux flancs du bastion participe des avantages des deux premières dispositions, sans offrir les mêmes inconvénients. On le trace de la manière suivante : Soit ABCDE (fig 1) le bastion. Par les points *a* et *e* situés au

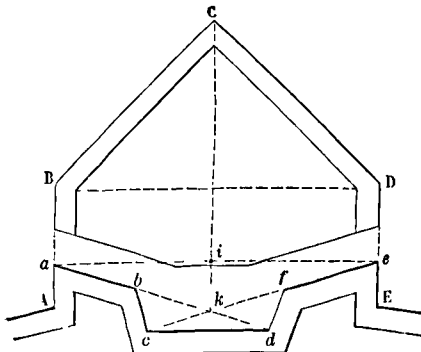


Fig. 1.

tiers des flancs, à partir des courtines, on mène une droite *ae*, sur le milieu de laquelle on élève une perpendiculaire *ik*, égale à 8° de *ae*, et l'on tire *ak* et *ek*; on prend sur ces droites les longueurs *ab* et *ef* égales au tiers de *ae*; et des points *b* et *f* on abaisse *bc* et *fd* respectivement perpendiculaires sur les prolongements de *ek* et de *ak*; puis on joint *cd*. En d'autres termes, on construit un front bastionné sur *ae* considéré comme côté extérieur. On sépare ce front de la partie antérieure du bastion par un fossé d'une largeur moyenne de 10^m . Par cette disposition, la brèche faite au saillant du bastion se trouve défendue d'assez près; le retranchement se défend par lui-même; et les portions *Aa* et *Ee* des flancs qui sont conservées après la prise du bastion, suffisent pour que les bastions voisins ne soient pas entièrement privés de flanquement; enfin le retranchement ne pourrait être tourné que par une brèche à la courtine.

Lorsque le bastion attaqué porte un CAVALIER (Voy. ce mot), on peut l'organiser en retranchement. — Soit ABS (fig. 2) la moitié d'un bastion, dont la capitale est SX; et soit *abs* la moitié correspondante du cavalier. Imaginons que par le saillant du chemin couvert de la demi-lune de gauche, et par l'extrémité de sa face la plus voisine du bastion, on mène une droite, son prolonge-

ment viendra rencontrer la face du bastion en un point C; ce sera le point le plus voisin de l'angle d'épaule B que la batterie de brèche puisse atteindre (Voy. ATTAQUE DES PLACES). En ce point C on

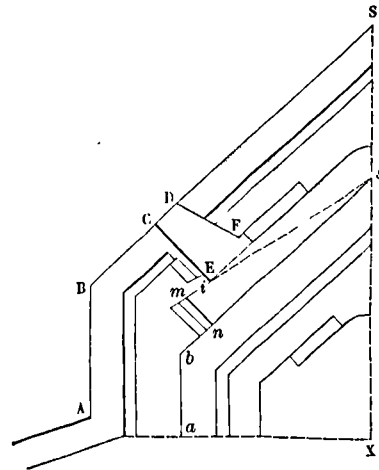


Fig. 2.

pratique une *coupure*, c'est-à-dire une solution de continuité de tout le terrassement de la face du bastion. L'escarpe de la coupure a la direction CE perpendiculaire à BC; elle doit s'élever jusqu'à la plongée pour rendre l'escalade plus difficile; et la contrescarpe a la direction DF, prolongement de la face de la demi-lune. Mais, au lieu de prolonger la masse couvrante CE jusqu'à la face du cavalier, on l'arrête en E au bord du fossé du cavalier, et l'on reporte le prolongement à 8^m en arrière, dans la position *mn*; et pour qu'un coup de feu parti du saillant *s* du cavalier ne puisse pas pénétrer par l'intervalle, on prend le point *m* sur le prolongement de la droite *sE*. Enfin on ferme l'intervalle *Ei* par un simple garde-fou. Le cavalier se trouve ainsi séparé de la partie antérieure du bastion et forme retranchement; ce retranchement se trouvant en arrière de la brèche qui peut être pratiquée à l'angle d'épaule, ne peut être tourné par cette voie; les flancs du bastion restent au pouvoir de l'assiégé lorsque l'ennemi est maître de la brèche; enfin quelques hommes postés en *i* derrière le garde-fou, suffisent pour surveiller l'angle rentrant *n*, qui eût été un *angle mort* si *mn* eût été dans le prolongement de CE. Cette partie *mn*, ainsi reportée en arrière, s'appelle la *retirade*.

Enfin on trouve dans quelques places des retranchements d'une grande étendue, laissant en avant d'eux un ou plusieurs fronts du corps de place, et formant comme une seconde enceinte, ou portion d'enceinte derrière laquelle les défenseurs peuvent se retirer lorsqu'ils ont été forcés dans la première. La condition essentielle que doivent remplir de pareils retranchements, est de s'appuyer sur des points de l'enceinte principale que l'ennemi ne puisse embrasser dans ses attaques. Les citadelles ne sont qu'un cas particulier de ce genre de retranchement. (Voy. pour plus de détails, les *Principes de fortification* par le général Noizet.)

RÉTROGRADATIONS, portion de la course apparente des planètes dans lesquelles leur mouvement paraît *rétrograde*, c'est-à-dire de sens contraire au mouvement propre du Soleil. (Voy. PLANÈTES.)

RÉVEIL, montre ou horloge munie d'une sonnerie bruyante qui se fait entendre à une heure déterminée à l'avance. Le mouvement principal d'un réveil ne diffère pas sensiblement de celui d'une horloge ordinaire ou d'une montre (Voy. ces mots); la différence essentielle consiste dans le mécanisme de la sonnerie. Il existe une grande variété de dispositions pour obtenir l'effet qu'on se propose; nous décrirons l'une des plus fréquemment employées. Le marteau a la forme d'un arc de cercle AB (fig. 1),

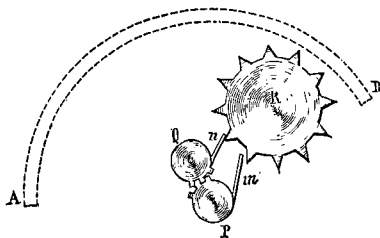


Fig. 1

mobile autour de son centre, et il peut frapper par l'une ou l'autre de ses extrémités A et B soit sur un timbre, soit sur la boîte même qui renferme le mouvement. Sur l'axe du marteau est montée une portion de pignon P, qui engrène avec une portion de pignon semblable Q. L'axe de chacune de ces portions de pignon porte une palette *m* ou *n*, qui peut être rencontrée par les dents d'un rochet R, mis en mouvement par un rouage composé de deux roues seulement, animées par un ressort spécial renfermé dans un barillet. Une dent du rochet rencontrant la palette *m*, fait tourner le pignon P, et le marteau frappe sur le timbre ou sur la boîte par son extrémité A; mais aussitôt la palette *n* est rencontrée à son tour par une autre dent du rochet; le pignon Q fait tourner le pignon P en sens contraire de tout à l'heure, et le marteau frappe par son extrémité B. Si la roue à rochet R tourne avec une certaine rapidité, il en résulte une série de coups de marteaux précipités qui produit un bruit intense, capable de réveiller une personne endormie. On remplace souvent les deux portions de pignon par une seule dent montée sur l'axe Q, et qui pénètre entre les branches d'une fourche montée sur l'axe P.

Dans l'état de repos, le marteau est arrêté par une goupille fixée à l'une des extrémités de la *détente* que nous allons décrire; quand le mouvement de la détente dégage cette goupille, le rochet, poussé par le rouage de sonnerie, fait mouvoir le marteau, et la sonnerie commence. Une pièce d'arrêt la fait cesser subitement quand le barillet qui contient le ressort a fait un nombre déterminé de tours.

La détente est une bascule *ab* (fig. 2) mobile autour d'un axe O parallèle au cadran; l'extrémité *b* porte la goupille qui arrête le marteau, et l'extrémité *a* s'appuie sur la roue du cadran ou des heures, à laquelle on laisse un peu de jeu dans le sens de son axe. Le canon de cette roue traverse

le cadran et porte l'aiguille des heures H. — Plus près du cadran se trouve l'aiguille de réveil R, qui est traversée sans frottement par le canon de la roue des heures. Cette aiguille est entaillée comme le

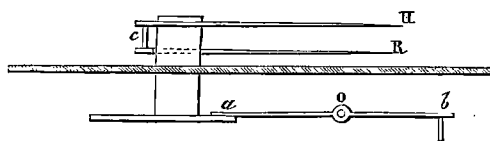


Fig. 2.

montre la figure 3, et le fond de l'entaille se raccorde avec le niveau supérieur de l'aiguille par une pente douce formant plan incliné. Une cheville *c*, perpendiculaire à l'aiguille des heures, peut péné-



Fig. 3.

trer au fond de cette entaille; mais quand l'aiguille des heures tourne sur le cadran, cette cheville monte peu à peu sur le plan incliné en entraînant dans son mouvement ascendant le canon de la roue des heures et cette roue elle-même, à cause du jeu qui lui a été laissé. Il résulte de cette disposition que si l'on a mis l'aiguille du réveil sur une certaine heure, tant que cette heure ne sera pas arrivée, la cheville *c*, parcourant le plan supérieur de l'aiguille de réveil, maintiendra la roue des heures un peu élevée, et la goupille *b* de la détente sera au contraire abaissée, malgré l'effort d'un ressort qui tend sans cesse à relever cette extrémité de la détente, et qui n'a point été indiqué sur la figure; le marteau continuera donc à être arrêté par cette goupille. Mais lorsque l'heure indiquée par l'aiguille de réveil sera arrivée, la cheville *c* tombera dans l'entaille de cette aiguille, entraînant dans son mouvement descendant le canon et la roue des heures; cette roue, cédant ainsi à la pression de l'extrémité *a* de la détente, l'extrémité *b* se relèvera par l'action du ressort dont il a été parlé; la goupille *b* cessera d'arrêter le marteau et le mécanisme de la sonnerie produira son effet.

Les réveils ne sont point en général susceptibles d'une grande précision. (Voy., pour plus de détails, les traités spéciaux d'horlogerie, et particulièrement le traité de L. Moinet.)

REVÈTEMENTS, murs de soutènement employés dans la fortification et dans quelques circonstances analogues, et qui se distinguent des murs de soutènement ordinaires en ce que le terre-plein peut s'élever en *cavalier* au-dessus du mur, qu'il recouvre quelquefois en partie, comme l'indique la figure 1.

I. Connaissant la hauteur $OA = h$ du mur, l'inclinaison $DCB = i$ de son talus extérieur, et la grandeur $BI = b$ de l'espace appelé *berme* compris entre l'arête supérieure externe B du mur et le pied I du talus extérieur du parapet, le problème consiste à déterminer l'épaisseur $OC = e$ que doit avoir la base du mur pour qu'il puisse résister à la poussée des terres, c'est-à-dire ne point être renversé au dehors en tournant autour de l'arête projetée en C, et ne

pas glisser sur sa base CO. La théorie de la POUSSÉE DES TERRES (*Voy.* ce mot) permet de déterminer la poussée F que les terres exercent sur la paroi verticale OA du mur, dont *l* est la longueur perpendi-

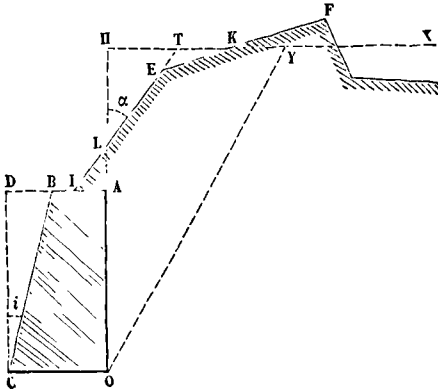


Fig. 1.

culairement au plan de la figure, et le moment M de cette poussée par rapport à l'arête C. Le poids P du mur est donné (*Voy.* MURS DE SOUÈNEMENT) par la formule

$$P = \Pi' l h \left(e - \frac{1}{2} h \tan g i \right), \quad [1]$$

en appelant Π' le poids du mètre cube de maçonnerie; et le moment de ce poids par rapport à l'arête C a pour expression, en appelant *p* le bras de levier de P,

$$Pp = \frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan g^2 i \right). \quad [2]$$

A ce poids et à ce moment nous avons à ajouter le poids et le moment du prisme de terre dont IAL est la section; il faut donc les calculer. Nous supposons, comme à l'article POUSSÉE DES TERRES, que le talus extérieur IT du parapet ait l'inclinaison du talus naturel des terres par rapport à la verticale. La surface du triangle IAL a pour expression

$$\frac{1}{2} AI^2 \cdot \cot \alpha;$$

or $AI = OC - DB - BI = e - h \tan g i - b$, l'expression du poids P' du prisme de terre considéré est donc

$$P' = \frac{1}{2} \Pi l (e - b - h \tan g i)^2 \cdot \cot \alpha. \quad [3]$$

La verticale de son centre de gravité passe aux $\frac{2}{3}$ de IA à partir du point I; le bras de levier du poids P' est donc

$$DB + BI + \frac{2}{3} AI;$$

c'est-à-dire, en le nommant *p'*,

$$p' = DB + BI + \frac{2}{3} (OC - DB - BI) = \frac{DB + BI + 2OC}{3}$$

$$\text{ou} \quad p' = \frac{2e + h \tan g i + b}{3}.$$

Le moment du poids P' est donc

$$P'p' = \frac{\Pi l}{6} (e - b - h \tan g i)^2 \cdot (2e + b + h \tan g i) \cdot \cot \alpha. \quad [4]$$

Cela posé, on pourra suivre deux méthodes, l'une géométrique, l'autre algébrique.

Si l'on adopte la première, on composera les trois forces F, P et P' dont les intensités et les directions sont connues; soit R leur résultante. Cette force, qui doit être égale et opposée à la réaction des fondations sur la base du mur, devra rencontrer cette base entre les points O et C, pas plus près de C que le tiers de OC, afin qu'il n'y ait pas de pression négative en A (*Voy.* COMPRESSION [Résistance à la]); il faudra que sa composante verticale P + P', divisée par la base du mur, donne un quotient au plus égal à la charge par mètre que la matière du mur peut supporter sans courir aucun danger de rupture, c'est-à-dire 5^k par centimètre carré pour la pierre de taille, ou 1^k pour le moellon, en moyenne; il faudra enfin, pour que le mur ne glisse pas sur sa base, que l'inclinaison de la force R par rapport à la verticale soit inférieure à l'angle du frottement du mur sur les fondations, angle dont la tangente est 0,76. Si ces conditions ne sont pas remplies, on augmentera l'épaisseur du mur.

Si l'on adopte la marche algébrique, on formera une première équation de condition relative à la rotation autour de l'arête C, en égalant la somme des moments des poids P et P' non pas au moment M de la poussée, ce qui n'assurerait que l'équilibre strict, mais au produit de ce moment par un coefficient δ supérieur à l'unité, et que l'on prend généralement égal à 1,9; on posera donc

$$Pp + P'p' = \delta M. \quad [5]$$

On formera de même une seconde équation de condition relative au glissement, en égalant le frottement *f* (P + P') sur la base du mur, non pas à la poussée F, ce qui ne se rapporterait encore qu'à l'équilibre strict, mais au produit de cette poussée par un coefficient δ' supérieur à 1, et que l'on prend ordinairement égal à 1,8; on posera donc

$$P + P' = \delta' F. \quad [6]$$

On résoudra chacune de ces deux équations par rapport à *e*, et l'on adoptera pour l'épaisseur du mur la plus grande des deux valeurs obtenues.

II. Il faut remarquer que les expressions de M et de F contiennent implicitement l'inconnue *e*. En effet ces expressions contiennent la distance HL, désignée par ζ à l'article POUSSÉE DES TERRES; or cette quantité dépend de l'épaisseur *e*, car on a

$$HL = OH - OA - AL = H - h - AI \cot \alpha,$$

ou

$$\zeta = H - h - (e - h \tan g i - b).$$

Il en résulte que l'équation [6] est généralement du 4^e degré en *e*, et l'équation [5] du 6^e; ce qui rend le calcul de *e* très-laborieux. M. Poncelet a néanmoins fait ces calculs pour le cas d'un revêtement à paroi extérieure verticale, et dans l'hypothèse où l'on a affaire à des terres et maçonneries moyennes,

ce qui suppose $\alpha = 45^\circ$, $\Pi = \frac{2}{3} \Pi'$. — Pour le cas de la rotation (formule [5]), il a dressé un tableau qui donne, pour diverses valeurs du rapport $\frac{AH}{AO}$, les valeurs de $\frac{e}{h}$ correspondantes, dans trois hypothèses sur la valeur de DI. Voici un extrait de ce tableau, suffisant pour les applications :

VALEURS de AH AO	VALEURS DE $\frac{e}{h}$		
	DI = 0	DI = 0,2 . h	DI = e
0,0	0,270	0,270	0,270
0,2	0,336	0,342	0,326
0,4	0,399	0,405	0,358
0,6	0,477	0,457	0,377
0,8	0,544	0,504	0,391
1,0	0,605	0,540	0,405
2,0	0,795	0,655	0,425
3,0	0,892	0,717	0,435
4,0	0,957	0,755	0,442
...

Pour le cas du glissement (formule [6]), M. Poncelet a fait différentes hypothèses sur le rapport entre le coefficient δ' et le coefficient f du frottement du mur sur les fondations, et de la comparaison des résultats avec les dimensions adoptées par Vauban, il a déduit pour la valeur la plus convenable de ce rapport $\delta' = 2,65 f$. Voici le résultat des calculs dans cette hypothèse.

VALEURS de AH AO	VALEURS DE $\frac{e}{h}$		
	DI = 0	DI = 0,2 . h	DI = e
1,0	0,42	0,37	0,31
1,1	0,45	0,40	"
1,2	0,74	0,42	"
1,3	0,50	0,43	"
1,4	0,52	0,45	0,33
1,5	0,55	0,46	0,34
2,0	0,68	0,54	"
3,0	0,87	0,68	0,38
4,0	1,04	0,81	"
...

Ce second tableau ne donne pas les valeurs de $\frac{e}{h}$ pour AH < AO, attendu que dans ce cas le mur court plutôt le risque d'être renversé par rotation que de glisser sur sa base; ce n'est que pour les très-grandes valeurs de AH que le danger du glissement devient plus grand que celui de la rotation.

On peut remarquer que les formules [5] et [6] se simplifient notablement dans le cas où l'on a DI = e; le second terme du premier membre disparaît dans chacune d'elles; et en même temps M et F deviennent indépendants de e, en sorte que ces équations se réduisent à

$$\frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i \right) = \delta M$$

et $f \Pi' l h \left(e - \frac{1}{2} h \tan i \right) = \delta' F$

et donnent immédiatement

$$e = \sqrt{\frac{1}{3} h^2 \tan^2 i + \frac{2 \delta M}{\Pi' l h}} \quad [7]$$

et $e = \frac{1}{2} h \tan i + \frac{\delta' F}{f \Pi' l h} \quad [8]$

La longueur des calculs auxquels donne lieu la recherche de l'épaisseur e, a engagé les ingénieurs à adopter des formules empiriques qui pussent donner rapidement cette inconnue avec une approxi-

mation suffisante. Beaucoup d'entre eux se contentent de donner au mur, supposé à parois verticales, une épaisseur égale au tiers de sa hauteur, règle qui cadre approximativement avec les proportions adoptées par Vauban, mais qui conduit à des épaisseurs exagérées dans le cas des terres légères et des maçonneries très-denses. On se rapproche davantage des dimensions exactes en faisant usage de la formule suivante, due à M. Poncelet :

$$e = 0,845 \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha (h + h') \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi'}} \quad [9]$$

où h' représente la hauteur AH.

Dans le cas des maçonneries moyennes, où $\alpha = 45^\circ$ et $\Pi = \frac{2}{3} \Pi'$, elle devient

$$e = 0,286 (h + h').$$

La règle que Vauban paraît avoir suivie consistait à composer la valeur de e de deux termes, l'un proportionnel à h + h' et l'autre constant. La formule

$$e = 0,2357 (h + h') + 1^m, 296,$$

qui a cette forme, conduit à des résultats très-voisins des dimensions généralement adoptées par cet illustre ingénieur.

III. Le cas où le revêtement a un talus extérieur se ramène au cas d'un revêtement vertical, par une méthode due à Vauban et qui porte le nom de *Méthode de la transformation des profils*. Elle consiste à calculer d'abord l'épaisseur comme si le mur devait avoir ses deux parois verticales, et à remplacer ensuite la paroi extérieure par une paroi inclinée, sous l'angle donné à l'avance, de manière que le moment du nouveau mur par rapport à l'arête externe de sa base soit égal au moment de l'ancien mur. Cette transformation n'offre aucune difficulté. D'après la relation [2] ci-dessus, si l'on appelle e l'épaisseur du mur vertical, son moment

sera $\frac{1}{2} \Pi' l h e^2$; pour que les deux moments soient égaux, on devra donc avoir

$$\frac{1}{2} \Pi' l h \left(e^2 - \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i \right) = \frac{1}{2} \Pi' l h \cdot e^2, \quad [10]$$

d'où $e = \sqrt{e^2 + \frac{1}{3} h^2 \tan^2 i} \quad [11]$

La transformation est encore plus simple dans l'hypothèse du glissement, car il est clair qu'il suffit alors de donner au mur à paroi inclinée le même poids qu'au mur à paroi verticale, ce qui exige simplement que les deux murs aient la même section droite. Après avoir calculé l'épaisseur du mur vertical, on mènera donc par le milieu de la trace verticale de sa paroi extérieure une droite ayant l'inclinaison donnée; ce sera la trace de la paroi inclinée. On peut opérer la transformation d'une manière analogue dans l'hypothèse de la rotation; si l'inclinaison de la paroi extérieure n'est pas supérieure à $\frac{1}{2}$, elle coupe l'ancienne paroi verticale sensiblement au 10^e de sa hauteur; il suffira donc pour l'obtenir de prendre sur la trace verticale de l'ancienne paroi verticale un point situé au 10^e de sa hauteur à partir de la base, et de mener par ce point une droite ayant l'inclinaison donnée; ce sera la trace de la paroi inclinée.

IV. Les revêtements sont ordinairement renforcés de distance en distance par des *contreforts*, ou

prismes en maçonneries reliés au mur lui-même et faisant corps avec lui. Ce n'est même que lorsqu'ils sont munis de contreforts que les revêtements sont appelés *revêtements complets*; ceux qui n'ont point de contreforts ne sont que des *revêtements demi-complets*. Ces saillies ont pour effet de reporter le centre de gravité du mur du côté des terres et d'augmenter ainsi le moment du poids du mur par rapport à son arête extérieure; en même temps ils rompent le prisme de poussée et diminuent son action.

Dans le calcul de la poussée, on peut ne tenir compte que des intervalles compris entre les contreforts, surtout lorsque ceux-ci ont assez de saillie pour s'étendre jusqu'à la limite du prisme de plus grande poussée; tandis que le poids de ces contreforts doit entrer dans l'évaluation du poids du mur, du frottement qui en résulte sur la base, et du moment de ce poids par rapport à l'arête externe de cette base. Les contreforts ne changent d'ailleurs rien aux règles données ci-dessus pour la transformation des profils; car, dans l'hypothèse du glissement, le poids total du mur, et par conséquent le frottement sur la base, restent encore les mêmes, avant ou après la transformation, en y comprenant le poids des contreforts; et, dans l'hypothèse de la rotation, le moment des contreforts n'est que fort peu altéré par la transformation du profil du mur, puisque l'axe des moments ne s'éloigne, par l'effet de cette transformation, que de la quantité $e - \varepsilon$,

qui diffère généralement peu de $\frac{1}{10} h \operatorname{tang} i$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, et qui est par conséquent très-petite. Rien n'empêcherait d'ailleurs de tenir compte de ce changement d'axe de rotation, en employant la méthode des approximations successives; on calculerait e sans tenir compte des contreforts; à l'aide de la valeur trouvée, on évaluerait la quantité $e - \varepsilon$, et par suite l'accroissement du moment des contreforts; on ferait entrer cet accroissement dans le premier membre de l'équation [10], d'où l'on tirerait pour e une seconde valeur plus approchée; on pourrait, de la même manière, en calculer une troisième, et obtenir e aussi exactement qu'on le voudrait.

La figure 2 représente, à l'échelle de 5 millimètres

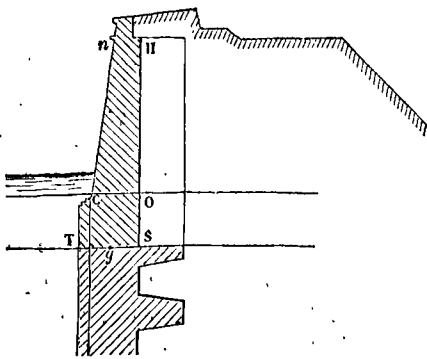


Fig. 2.

pour une toise, le revêtement complet d'un bastion de la place d'Ypres, fortifiée par Vauban en 1699. Lorsque, comme dans cet exemple, le fossé doit contenir une certaine hauteur d'eau, il faut tenir

compte de sa pression sur la face externe du revêtement, et du moment de cette pression par rapport à l'arête externe c de la base OC du mur. La pression de l'eau devra être retranchée de F dans l'équation de condition relative au glissement; et le moment de cette pression devra être de même retranché de celle de la poussée dans l'équation de condition relative à la rotation autour de l'arête C, ce qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté (Voy. *PRESSION DES FLUIDES, CENTRE DE PRESSION*).

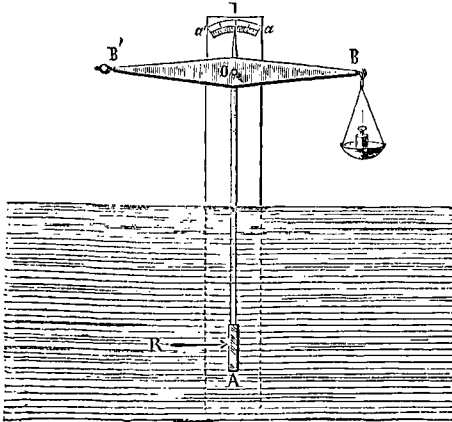
V. La fondation d'un mur de revêtement se compose d'un massif en maçonnerie, tel que OCTS (fig. 2), dont la base ST est un peu plus large que la base OC du revêtement lui-même, et qui a été établi à une profondeur suffisante pour s'appuyer sur un sol sensiblement incompressible, ou rendu tel par des moyens artificiels. Après avoir étudié les conditions de stabilité du revêtement sur la fondation, il est utile d'étudier aussi les conditions de stabilité de l'ensemble formé par le revêtement et par sa fondation, sur le sol qui supporte toute la construction. Dans cette étude, analogue à la première, on a à tenir compte non-seulement de la poussée des terres de l'ouvrage sur toute la hauteur OH, et du poids de toute la maçonnerie, ainsi que de la pression des eaux du fossé s'il y a lieu, mais encore de la BUTÉE DES TERRES (Voy. ce mot) situées en avant du revêtement et formant le fond du fossé.

On peut employer pour traiter cette question soit la méthode géométrique, soit la méthode algébrique exposées plus haut. Mais il faut remarquer que les terres qui forment le fond du fossé peuvent être d'une autre nature que celles qui forment l'ouvrage fortifié; il faut remarquer aussi que le coefficient du frottement de la maçonnerie sur le sol ne doit être pris égal à 0,76 que si le sol est formé de roc ou de béton; ce coefficient descend à 0,57 quand le sol est formé de terre battue ou de sable; il peut s'abaisser jusqu'à 0,30, si le sol est marneux, glissant, et susceptible de recevoir des infiltrations. Dans ce cas, la tendance au glissement peut être beaucoup plus grande que la tendance à la rotation. On a vu, en 1837, le revêtement d'une des faces d'un bastion de la place de Soissons s'avancer parallèlement à lui-même de 1^m,80 en son milieu, en glissant avec sa fondation sur le sol glaiseux qui les portait, lorsqu'on vint à le charger de terre jusqu'à la hauteur du cordon (n , fig. 2). Dans des circonstances semblables, il convient de porter jusqu'à 2 ou même 2,5 le coefficient de stabilité δ' . M. Poncelet conseille de remplacer ce coefficient par l'hypothèse d'une surcharge dite de stabilité, s'élevant à 5 ou 6 mètres. Nous renverrons au savant mémoire de cet habile professeur pour tous les développements dont la question des revêtements est susceptible, et qui ne pourraient entrer dans le cadre de cet ouvrage (Voy. *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*, par M. Poncelet). On pourra également consulter avec fruit divers mémoires insérés dans le *Mémorial du génie*, et en particulier ceux de MM. Audoy, Français, Petit; un mémoire du colonel Lambel sur l'*Application du principe des vitesses virtuelles à la poussée des terres et des voûtes* (Metz, 1822); et enfin le *Traité de la défense des places* par Vauban, édition du général Valazé.

RÉVOLUTION, mouvement complet de la lune

ou d'une planète sur son orbite; durée de ce mouvement. On distingue plusieurs espèces de révolutions, d'après le point, fixe ou variable, de l'orbite auquel on se rapporte. La révolution *synodique* est le retour à une même conjonction (supérieure ou inférieure s'il s'agit d'une planète inférieure); la révolution *anomalistique* est le retour au périhélie s'il s'agit de la lune, ou au périhélie s'il s'agit d'une planète; la révolution *draconitique* est le retour à un même nœud. (Voy. LUNE, PLANÈTES.)

RHÉOMÈTRE DE POLETTI (du grec *ῥέω*, couler, et *μέτρον*, mesure), instrument servant à mesurer la vitesse des courants. La partie principale est une plaque mince A que l'on fait plonger per-



pendiculairement au courant. Cette plaque est fixée à l'extrémité d'un levier OA, perpendiculaire au fléau BB' d'une balance, adaptée à un poteau planté dans la rivière. Une aiguille OI, perpendiculaire au fléau, parcourt un arc divisé $\alpha\alpha'$, et permet de juger si le fléau est horizontal. L'action du courant tend à faire marcher la plaque A dans le sens de la flèche, mais, à l'aide de poids placés dans le bassin suspendu en B, on maintient le levier OA vertical. Ces poids font connaître la vitesse du courant. Soit, en effet, R la résultante des pressions exercées sur la plaque; soit p le poids du bassin et de sa charge; soient

$$OA = L \text{ et } OB = l.$$

L'équilibre de l'appareil donne la relation

$$RL = pl. \quad [1]$$

Mais, d'après les lois connues de la **RÉSISTANCE DES FLUIDES** (Voy. ce mot), si l'on nomme v la vitesse du courant, A l'aire de la plaque, k un coefficient numérique, et H le poids du mètre cube du fluide, on a

$$R = kHA \frac{v^2}{2g}.$$

En substituant cette valeur dans [1], on obtient

$$kHA \frac{v^2}{2g} L = pl,$$

d'où

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{pl}{kHA} \quad [2]$$

ou, si l'on prend pour k la valeur 1,19, d'où

$$\frac{1}{k} = 0,84, \quad \frac{v^2}{2g} = 0,84 \cdot \frac{p}{HA} \cdot l. \quad [3]$$

On en déduirait ensuite la vitesse v , soit par le calcul, soit en se servant des tables des HAUTEURS DUES aux vitesses (Voy. ce mot).

RICOCHET (TIR à), ou *tir plongeant*, tir dans lequel le boulet, lancé sous une forte inclinaison et avec une faible charge, peut atteindre un but placé derrière un épaulement, et se relever le plus souvent pour aller frapper d'autres objets dans la même direction. C'est entre 5° et 10° que varie ordinairement l'angle du tir; cependant il peut être plus considérable (Voy. BALISTIQUE). Quand l'inclinaison est grande, le boulet qui a rasé la crête du parapet, atteint le sol plus près du pied de l'épaulement, mais les effets du ricochet sont moins dangereux, parce que le projectile a une moindre vitesse; si au contraire l'angle du tir est faible, le projectile touche le sol plus loin de la crête du parapet, mais il a une plus grande vitesse, et les effets du ricochet sont plus dangereux. On dit, dans le dernier cas, que le ricochet est plus *tendu*, et, dans le premier, qu'il est plus *mou*. Le plus souvent on emploie concurremment les deux modes, afin d'atteindre les défenseurs ou les bouches à feu placés contre l'épaulement et en même temps les hommes ou le matériel placés au delà. Lorsque le projectile a ainsi un long espace devant lui, il peut ricocher plusieurs fois, et produire des effets multipliés qui ont fait donner à ce genre de tir le nom de tir *d'enfilade*; mais généralement les défenseurs d'un ouvrage exposé à l'enfilade y élèvent des TRAVERSES (Voy. ce mot), qui atténuent les effets du ricochet.

D'après M. Plobert, une pièce de 24, tirant à ricochet, à la distance de 150^m , a atteint 10,5 fois sur 100 un blanc de $0^m,50$ de diamètre placé derrière un épaulement; à la distance de 300^m , elle a atteint, près de 6 fois sur 100, deux affûts placés dans une branche de chemin couvert; aux distances de 200^m et de 300^m , elle a atteint 4,7 fois et 2,8 fois sur 100 deux bouches à feu cachées par un épaulement; aux distances de 335^m et 640^m , elle a atteint 30 fois sur 100 le terre-plein d'un ouvrage de 95^m de long et de 8^m de large; aux distances de 366^m , 548^m , 731^m elle a atteint 62 fois, 54 fois, 39 fois sur 100 une face d'ouvrage de 55^m de long, sans traverse. Mais la chance de ricocher est d'autant moindre que la distance est plus grande; avec les dernières données, les nombres de fois que le projectile a ricoché sont respectivement 82, 64 et 45. On obtient des résultats analogues avec des pièces de moindre calibre, mais, comme on devait s'y attendre, les chances correspondantes aux mêmes distances sont un peu moindres. Avec une pièce de 12 par exemple, on a obtenu au lieu des nombres 62, 54 et 39, les nombres 60, 38 et 36; et au lieu des nombres 82, 64 et 45, les nombres 67, 42 et 43.

Le tir à ricochet, ou d'enfilade, paraît avoir été employé dès 1572 au siège de Harlem, et en 1644 au siège de Gravelines; mais ce n'est qu'en 1688 que les règles en ont été fixées par Vauban; et il n'est parvenu à un certain degré de perfection qu'au siège d'Ath, en 1697. (Voy. ATTAQUE DES PLACES.)

RIDES, légers plis ou légères dénivellations qui se produisent à la surface d'une eau courante quand

on y plonge l'extrémité d'une tige mince. Elles se présentent sous la forme de deux droites formant un angle dont l'ouverture est dirigée vers l'aval, et qui se raccordent en amont de la tige, et tout près de cette tige, par un petit arc de courbe. L'angle formé par ces droites est d'autant plus aigu que la vitesse du courant est plus grande; et la dénivellation est d'autant moins marquée que la tige plongée est plus mince. Il ne se produit aucune ride quand la vitesse du courant est inférieure à une certaine limite.

On observe des phénomènes identiques dans une eau tranquille quand on y promène en ligne droite l'extrémité d'une tige mince. Au-dessous d'une certaine vitesse on n'observe aucune ride; mais dès que la vitesse de la tige a atteint la limite convenable, les rides se forment, et leur angle est d'autant plus aigu que la vitesse de la tige est plus grande.

Ce phénomène mériterait d'être étudié par les physiciens et par les géomètres, parce qu'il pourrait servir à faire connaître la vitesse superficielle des courants. Mais, quoique M. Poncelet ait appelé sur ce point l'attention des savants dans son *Introduction à la Mécanique industrielle*, il est jusqu'ici resté sans application. Faute de mieux, nous donnerons l'aperçu suivant, qui aura du moins pour effet de faire connaître l'importance de la question.

On sait que si l'on plonge dans un liquide en repos l'extrémité d'une tige mince, l'ébranlement qui en résulte fait naître une onde superficielle, qui a été étudiée par Poisson dans un de ses savants mémoires, et qui se propage, dans le sens du rayon, avec une vitesse constante. Dans un liquide en mouvement, l'onde produite au premier instant se propage de la même manière, avec cette différence essentielle qu'elle est emportée dans le sens du courant avec la vitesse du fluide. Mais le choc du liquide en mouvement contre la tige en repos produit le même effet qu'une série non interrompue d'ébranlements successifs dans un liquide en repos, c'est-à-dire une série d'ondes identiques se succédant à des intervalles de temps infiniment courts. A nos yeux les rides ne seraient que l'enveloppe de ces ondes successives; et il est alors facile d'en déterminer la forme géométrique.

Prenons pour origine l'extrémité de la tige, des axes rectangulaires, et l'axe des x dirigé dans le sens du courant. Soit α l'abscisse du centre d'une onde au bout du temps t , ρ son rayon au bout du même temps; soit u la vitesse de propagation de l'onde dans le sens du rayon, et v la vitesse du courant. En supposant la tige infiniment petite, il sera permis de regarder l'onde comme infiniment mince; son équation sera donc celle d'un cercle dont le rayon est ρ et dont le centre est sur l'axe des x à une distance α de l'origine; c'est-à-dire qu'en appelant x et y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'onde on aura

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \rho^2. \quad [1]$$

Mais, d'après ce qui a été admis plus haut, on a

$$\alpha = vt,$$

et l'on sait qu'on a aussi

$$\rho = ut;$$

l'équation de l'onde au bout du temps t est donc

$$(x - vt)^2 + y^2 = u^2 t^2. \quad [2]$$

Il faut chercher l'enveloppe des cercles repré-

sentés par cette équation; et, pour cela, on sait qu'il faut différentier l'équation par rapport à t , et éliminer ensuite t entre l'équation obtenue et l'équation [2]. Différentiant donc par rapport au temps, on obtient

$$-vx + v^2 t = u^2 t,$$

d'où

$$t = \frac{vx}{v^2 - u^2},$$

et, en substituant dans [2], réduisant et simplifiant, on trouve

$$y^2 = \frac{u^2 x^2}{v^2 - u^2},$$

ou

$$y = \pm \frac{ux}{\sqrt{v^2 - u^2}}, \quad [3]$$

équation de deux droites passant par l'origine, et faisant avec l'axe des x des angles ayant pour sinus le rapport $\frac{u}{v}$.

Si la vitesse v est inférieure à la vitesse de propagation u de l'onde superficielle, les droites sont imaginaires, c'est-à-dire qu'il ne se forme pas de rides. Dès que v surpasse u , les rides se manifestent, et les droites qui les composent font entre elles un angle égal au double de celui qui a pour sinus le rapport $\frac{u}{v}$. Cet angle est donc d'autant plus petit que la vitesse v du courant est plus grande, ainsi qu'on l'observe en effet.

Si cette théorie était admise, il suffirait d'observer l'angle V formé par les rides pour en déduire la vitesse du courant à la surface; car on aurait

$$\sin \frac{1}{2} V = \frac{u}{v},$$

d'où

$$v = \frac{u}{\sin \frac{1}{2} V}. \quad [4]$$

Peut-être ces considérations pourraient-elles être étendues au sillage des navires; nous n'insisterons pas sur ce point.

RIVET, sorte de cheville en fer qui sert à assembler les feuilles de tôle. Un rivet se compose d'un corps cylindrique cc (fig. 1) et d'une tête t ayant

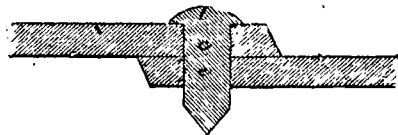


Fig. 1.

la forme d'un segment sphérique; l'extrémité opposée se termine par une pointe conique. Le rivet s'introduit à chaud ou à froid dans des trous cylindriques, pratiqués dans les feuilles qu'on veut assembler, et offrant un diamètre supérieur d'un millimètre environ à celui du corps du rivet; la pointe conique s'écrase ensuite au marteau de telle sorte que le métal comprimé remplisse entièrement la cavité dans laquelle il a été introduit; c'est ce que l'on appelle *riveter*.

On peut assembler les feuilles de tôle de plusieurs manières. On peut réunir simplement les bouts des deux feuilles par une ligne de rivets, comme l'indique la figure 1. On peut les placer bout à bout, et les réunir à l'aide d'un *couvre-joint* et de deux rangées de rivets, comme l'indique la figure 2. On peut enfin faire usage de deux couvre-

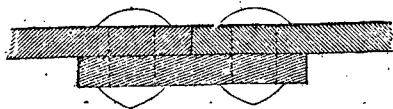


Fig. 2.

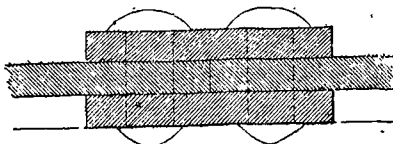


Fig. 3.

joints, comme l'indique la figure 3. Le rayon du corps du rivet est ordinairement les $\frac{3}{5}$ environ du rayon de la tête; il est fréquemment pris égal à l'épaisseur d'une des feuilles qu'on se propose d'assembler.

Le rivet résiste de deux manières : 1° à un effort de *cisaillement* exercé par les tôles dans le sens perpendiculaire à son axe ; 2° à un *glissement* qui tend à se produire entre l'une des feuilles et la tête du rivet, quand il reste du jeu entre le corps et le trou dans lequel il a pénétré. — Il résulte des expériences faites en Angleterre par M. Fairbairne et en France par M. Gouin que la résistance du rivet au cisaillement est environ les $\frac{4}{5}$ de sa résistance à l'allongement. On s'impose ordinairement la condition que la résistance des rivets au cisaillement soit égale à la résistance de la tôle à la compression dans le sens de la longueur de la feuille.

Il en résulte que si l'on prend les $\frac{4}{5}$ de la somme des sections transversales des rivets, on doit avoir un résultat égal à la section de la tête faite perpendiculairement à sa longueur suivant l'axe des rivets. Soit donc l la largeur de la feuille de tôle, e son épaisseur, r le rayon du corps d'un rivet, et n le nombre des rivets contenus dans la largeur de la feuille, on devra avoir, s'il n'y a qu'une rangée de rivets (fig. 1),

$$\frac{4}{5} \pi r^2 \cdot n = e(l - 2r \cdot n), \quad [1]$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{el}{\frac{4}{5} \pi r^2 + 2re} \quad [2]$$

et, s'il y a deux rangées de rivets (fig. 2 et 3),

$$\frac{4}{5} \pi r^2 \cdot 2n = e(l - 2rn), \quad [3]$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{el}{\frac{8}{5} \pi r^2 + 2re} \quad [4]$$

Si, par exemple, on a $r=e$, la formule [2] donne

$$n = \frac{l}{\left(\frac{4}{5} \pi + 2\right) e} = \frac{l}{4,5e} \quad \text{à peu près,}$$

et la formule [4] donne

$$n = \frac{l}{\left(\frac{8}{5} \pi + 2\right) e} = \frac{l}{7e} \quad \text{environ.}$$

La section de la tôle faite dans l'axe des rivets, et d'où dépend sa résistance, serait dans le premier cas

$$e\left(l - 2e \frac{l}{4,5e}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{5}{9} el.$$

Dans le second cas, cette section aurait pour expression

$$e\left(l - 2e \frac{l}{7e}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{5}{7} el.$$

Ainsi dans le cas de la figure 1, la résistance de la tôle seule serait réduite aux $\frac{5}{9}$; et dans le cas

des figures 2 et 3 elle serait réduite seulement aux $\frac{5}{7}$.

ROCHET, levier d'arrêt des roues à rochet (Voy. ce mot). On lui donne quelquefois le nom de *cliquet*. On étend le nom de rochet aux pièces articulées qui, dans les *encliquetages à dents* (Voy. ENCLIQUETAGES), font mouvoir la roue dentée, et servent d'intermédiaire entre cette roue et le levier moteur.

Le rochet est quelquefois appelé *pied de biche*.

Par abréviation on appelle quelquefois *rochet* la roue à rochet elle-même.

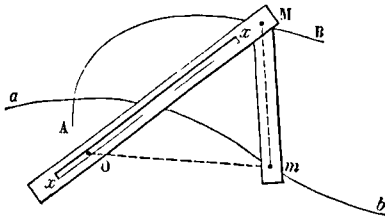
ROSE DES VENTS, figure qui montre les 32 rumbes de vent que l'on a à considérer dans la navigation (Voy. RUMBS).

ROSETTE, disque à bords ondulés qui, dans le TOUR à GUILLOCHER (Voy. ce mot), produit les oscillations de l'axe de rotation.

On donne aussi ce nom à la courbe même qui forme le contour du disque. Et, par extension, on l'applique souvent, dans le tracé mécanique des courbes, à celle que doit décrire un point déterminé de la pièce mobile, pour qu'un autre point déterminé de cette pièce trace une courbe donnée.

Si, par exemple, la pièce mobile est percée d'une rainure longitudinale ax dans laquelle s'engage une cheville fixe O , de telle sorte que cette pièce puisse tourner dans son plan autour du point O en glissant le long de la cheville, la courbe AMB que doit décrire un point déterminé M de la pièce pour qu'un autre point déterminé m de cette pièce, invariablement lié au premier, décrive une courbe donnée amb , sera ce que l'on appelle la *rosette* de amb . Pour obtenir cette rosette par points, on voit aisément qu'il faut prendre sur la courbe donnée un point quelconque m , décrire sur la droite Om un segment capable de l'angle constant et donné OMm , et du point m comme centre un

second arc de cercle avec la distance constante mM pour rayon; l'intersection des deux arcs de cercle sera le point M correspondant à m . En répétant la construction pour d'autres positions du



point m sur amb , on obtiendra autant de points qu'on voudra de la rosette AMB .

L'appareil représenté par la figure n'est qu'une modification de la RÉGLETTE DE LA CONDAMINE (Voy. ce mot).

On peut remarquer que si les trois points, O , m , M étaient en ligne droite, la différence des rayons vecteurs des deux courbes serait constante et égale à la distance Mm ; chacune des deux courbes serait donc la *conchoïde* de l'autre.

Si l'une d'elles était une droite, l'autre deviendrait la conchoïde ordinaire. (Voy. le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye.)

Dans l'horlogerie, on nomme **ROSETTE** le petit cadran intérieur sur lequel se meut l'aiguille servant à retarder ou à avancer une montre (Voy. **MONTRE**).

ROTATION (MOUVEMENT DE), mouvement dans lequel tous les points d'un même corps décrivent autour d'un même axe des arcs de cercles, dont les plans sont perpendiculaires à cet axe, en conservant leurs distances mutuelles. Tel est le mouvement d'une roue d'engrenage, d'un volant, et de toutes les pièces dites *tournantes* qui entrent dans la composition d'une machine.

I. La première propriété de ce genre de mouvement consiste en ce que, dans un même temps, tous les points du corps parcourent des arcs d'un même nombre de degrés. En effet, pour fixer les idées, supposons l'axe de rotation perpendiculaire au plan de la figure 1, et soit O le point où il rencontre ce plan. Prenons dans le corps un point quelconque, que nous nommerons A ; soit a la projection, sur le plan de la figure, de la position initiale du point A , et soit a' la projection de sa position au bout du temps t ; l'arc parcouru par le point A se projetera en vraie grandeur suivant l'arc aa' ayant son centre en O . Soit B un autre point du corps, b la projection de sa position initiale, b' la projection de sa position finale, et bb' la projection de l'arc qu'il a parcouru. Joignons Oa , Oa' , Ob , Ob' . Par le point A et par l'axe menons un plan; sa trace sur le plan de la figure sera Oa à l'instant initial, et Oa' au bout du temps t . Par le point B et par l'axe menons de même un plan; sa trace sera Ob à l'instant initial, et Ob' au

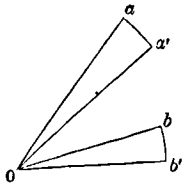


Fig. 1.

bout du temps t . Or les points A et B conservant leurs positions relatives, l'angle dièdre formé par les deux plans ainsi menés par les points A et B et par l'axe demeure constant. Mais cet angle a pour mesure à l'instant initial aOb , et à l'instant final $a'Ob'$; donc ces deux angles sont égaux. Si l'on en retranche la partie commune $a'Ob$, il reste $aOa' = bOb'$.

Donc les arcs aa' et bb' sont des arcs correspondants à des angles au centre égaux, c'est-à-dire des arcs semblables ou d'un même nombre de degrés. Cette propriété a lieu pour tous les points du corps puisque A et B sont quelconques.

Il résulte de cette proposition que les vitesses des différents points du corps, à un même instant, sont proportionnelles à leurs distances à l'axe de rotation. Supposons, en effet, que les arcs aa' et bb' soient parcourus dans un temps très-court Δt . La similitude de ces arcs donne la proportion $aa' : bb' = Oa : Ob$,

d'où $\frac{aa'}{\Delta t} : \frac{bb'}{\Delta t} = Oa : Ob$.

Mais si Δt tend vers zéro, ainsi que les arcs aa' et bb' , les rapports $\frac{aa'}{\Delta t}$ et $\frac{bb'}{\Delta t}$ tendent respectivement vers la vitesse du point A et vers la vitesse du point B ; à la limite on aura donc, en désignant par v et v' ces vitesses, et par r et r' les distances Oa et Ob ,

$$v : v' = r : r', \quad [1]$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

II. Pour connaître complètement le mouvement d'un corps tournant ainsi autour d'un axe, il suffit de connaître le mouvement de l'un de ses points. On rapporte ordinairement le mouvement de tous les points du corps à celui d'un point particulier qui serait situé à 1^m de distance de l'axe, et dont la vitesse porte le nom de **VITESSE ANGULAIRE**, et se désigne habituellement par la lettre ω . Si l'on compare la vitesse d'un point quelconque A à celle de ce point situé à l'unité de distance de l'axe, on a, en vertu de la proposition exprimée par la proposition [1],

$$v : \omega = r : 1,$$

d'où l'on tire

$$v = \omega r, \quad [2]$$

c'est-à-dire que la vitesse d'un point quelconque du système est égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance du point considéré à l'axe de rotation. Si, par exemple, la vitesse angulaire est 3, la vitesse d'un point situé à 0^m,40 de l'axe sera

$$v = 0^m,40 \times 3 = 1^m,20.$$

On tire de la relation [2]

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad [3]$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire s'obtient en divisant la vitesse d'un point quelconque du corps par la distance de ce point à l'axe. Comme exemple, cherchons la vitesse angulaire du globe terrestre. Soit R le rayon de l'équateur; la vitesse d'un point situé sur ce cercle sera

$$\frac{2\pi R}{86400'}$$

puisque'il y a 86400 secondes dans 24 heures, temps

employé par le point considéré pour accomplir un tour. Divisant cette vitesse par la distance du point considéré à l'axe, c'est-à-dire par R, on obtient pour la vitesse angulaire cherchée

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = \frac{3,1415926}{43200} = 0,000072722.$$

On tire encore de la relation [2]

$$r = \frac{v}{\omega}, \quad [4]$$

c'est-à-dire que la distance d'un point du corps à l'axe est le quotient de la vitesse du point par la vitesse angulaire. Si, par exemple,

$$v = 1^m,50 \text{ et } \omega = 0^m,8,$$

on aura

$$r = \frac{1^m,50}{0,8} = 1^m,875.$$

(Voy. VITESSE ANGULAIRE.)

III. Quand la vitesse angulaire est constante, le mouvement de rotation est uniforme. En appelant α l'arc parcouru par un point situé à 1^m de distance de l'axe, à partir de sa position initiale, et t le temps employé à parcourir cet arc, on a

$$\alpha = \omega t.$$

Si la vitesse angulaire est variable, on appelle ACCÉLÉRATION ANGULAIRE la limite du rapport entre l'accroissement de la vitesse angulaire et l'accroissement du temps (Voy. MOUVEMENT VARIÉ); cette vitesse angulaire se désigne d'ordinaire par la lettre γ ; on a donc

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} \quad [5]$$

et comme ω est lui-même la dérivée de l'arc α considéré comme fonction du temps, on voit que l'accélération est la dérivée seconde de cet arc.

Si l'accélération angulaire est constante, on tire de la relation [5]

$$d\omega = \gamma dt.$$

Intégrant une première fois, et nommant ω_0 la vitesse angulaire initiale, on obtient

$$\omega = \omega_0 + \gamma t, \quad [6]$$

d'où

$$d\alpha = \omega_0 dt + \gamma t dt.$$

Intégrant de nouveau, et supposant l'arc α compté à partir de la position initiale du point considéré, on trouve

$$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2. \quad [7]$$

On reconnaît dans les relations [6] et [7] les formules du MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ (Voy. ce mot).

IV. Lorsque, dans une question, on a plusieurs mouvements de rotation à considérer, on adopte, pour représenter les vitesses angulaires, une convention géométrique qui a l'avantage de simplifier beaucoup les énoncés. On prend sur l'axe de rotation un point arbitraire O (fig. 2), et l'on porte sur cet axe, à partir de ce point, une longueur OP proportionnelle à la vitesse angulaire ω ; et l'on convient de la porter dans un sens tel qu'un spectateur placé en P et regardant dans la direction PO, verrait le corps tourner dans le même sens que l'aiguille d'une montre; c'est-à-dire que si OP est supposé horizontal, le mouvement se ferait de gauche à droite en passant par-dessus; tandis que

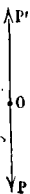


Fig. 2.

OP' représenterait la vitesse angulaire dans un mouvement de sens contraire, s'exécutant de gauche à droite en passant par-dessous. On dit alors que la vitesse angulaire, ou la rotation, est représentée pour la grandeur et pour le sens par la droite OP dans le premier cas, ou par la droite OP' dans le second. Cette convention est surtout utile dans la COMPOSITION DES ROTATIONS (Voy. ce mot).

V. Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe, sous l'action d'un système de forces quelconques, on peut se proposer de déterminer les réactions qui s'exercent sur cet axe. Soit OZ (fig. 3) l'axe

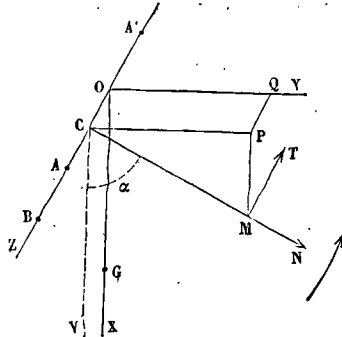


Fig. 3.

de rotation, retenu aux points A et A' et s'appuyant en outre par son extrémité B contre un plan fixe perpendiculaire. Par le centre de gravité G du corps faisons passer un plan perpendiculaire à l'axe, et qui le rencontrera en un point O; prenons le point O pour origine, l'axe OZ pour axe des z , et deux axes OX et OY perpendiculaires au premier. Considérons un point M quelconque du corps; soit m sa masse. Abaissons de ce point sur l'axe la perpendiculaire MC = r ; soit α l'angle qu'elle fait, au bout du temps t , avec une parallèle CV à l'axe des x ; et soient, au bout du même temps,

$$MP = x, CP = y \text{ et } PQ = z$$

les coordonnées du point M. Ce point étant animé d'un mouvement de rotation autour de OZ, décrit un cercle qui a le point C pour centre. Il peut donc être considéré comme soumis à une force tangentielle T et à une force normale N, ayant respectivement pour valeurs

$$T = mr \frac{d\omega}{dt} \text{ et } N = m\omega^2 r,$$

en appelant ω la vitesse angulaire au bout du temps t . Comme on en peut dire autant de tous les autres points du système, il en résulte que le corps peut être regardé comme uniquement soumis aux forces analogues à T et aux forces analogues à N. Or, en réalité, le corps se meut sous l'action d'un système de forces données F, F', F'', etc., des réactions des appuis, et des actions mutuelles qui s'exercent entre les points matériels du corps. Le système des forces F, de ces réactions et de ces actions mutuelles est donc équivalent (Voy. FORCES ÉQUIVALENTES) au système des forces analogues à T et à N. Par conséquent il doit y avoir égalité entre la somme des projections de ces deux systèmes de forces sur chacun des trois axes, et entre

la somme de leurs moments par rapport à ces mêmes axes.

Les projections de la force T sur les axes des x , des y et des z sont respectivement

$$-T \sin \alpha, \quad +T \cos \alpha, \quad \text{zéro}$$

ou

$$-my \frac{d\omega}{dt}, \quad +mx \frac{d\omega}{dt}, \quad \text{zéro.}$$

Ses moments par rapport aux mêmes axes sont, en adoptant les conventions ordinaires sur le signe des moments (Voy. MOMENT),

$$-T \cos \alpha \cdot z, \quad -T \sin \alpha \cdot x, \quad +Tr$$

ou

$$-mxz \frac{d\omega}{dt}, \quad -myz \frac{d\omega}{dt}, \quad +mr^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Les projections de la force N ont pour valeur,

$$+N \cos \alpha, \quad +N \sin \alpha, \quad \text{zéro}$$

ou

$$+m\omega^2 x, \quad +m\omega^2 y, \quad \text{zéro.}$$

Les moments de la même force par rapport aux mêmes axes ont pour expression

$$-N \sin \alpha \cdot z, \quad +N \cos \alpha \cdot x, \quad \text{zéro}$$

ou

$$-m\omega^2 yx, \quad +m\omega^2 xz, \quad \text{zéro.}$$

Quand on passera du point M à un autre point du corps, x , y , z , r et α changeront, mais ω et $\frac{d\omega}{dt}$ resteront les mêmes. — D'un autre côté, les

forces mutuelles disparaîtront attendu que la somme de leurs projections sur un axe quelconque est nulle, puisqu'elles sont deux à deux égales et opposées; la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque sera nulle par une raison analogue. Cela posé, soit R la réaction qui s'exerce au point A perpendiculairement à l'axe, si l'on néglige le frottement; soit R' celle qui s'exerce de même au point A'; soit S celle qui s'exerce au point B dans le sens de l'axe; faisons

$$OA = h \quad \text{et} \quad OA' = h';$$

nous aurons en écrivant les 6 conditions d'équivalence :

$$\Sigma F_x + R_x + R'_x = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma my + \omega^2 \Sigma mx, \quad [1]$$

$$\Sigma F_y + R_y + R'_y = +\frac{d\omega}{dt} \Sigma mx + \omega^2 \Sigma my, \quad [2]$$

$$\Sigma F_z + S = 0, \quad [3]$$

$$\Sigma \mathcal{M}_x F - R_y \cdot h + R'_y \cdot h' = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz - \omega^2 \Sigma myz \quad [4]$$

$$\Sigma \mathcal{M}_y F + R_x \cdot h - R'_x \cdot h' = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma myz + \omega^2 \Sigma mxz \quad [5]$$

$$\Sigma \mathcal{M}_z F = \frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2. \quad [6]$$

La dernière équation donne

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_z F}{\Sigma mr^2},$$

c'est-à-dire que l'accélération angulaire a pour expression la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du corps par rapport au même axe, expression à laquelle on peut arriver par une voie plus courte (Voy. ACCÉLÉRATION ANGULAIRE). Les 5 autres équations feront connaître les 5 inconnues

R_x, R_y, R'_x, R'_y et S;
des équations [1] et [5] on tirera
 R_x et R'_x ;

des équations [2] et [4] on tirera

$$R_y \quad \text{et} \quad R'_y;$$

l'équation [3] donnera la valeur de S.

VI. Si l'on ne considère le mouvement qu'à l'instant initial (qui peut d'ailleurs être quelconque), on peut faire passer l'axe des x par le centre de gravité. On a alors, en nommant M la masse totale du corps et a la distance du centre de gravité à l'axe OZ,

$$\Sigma mx = Ma \quad \text{et} \quad \Sigma my = 0$$

Si, de plus, on suppose le corps symétrique par rapport au plan XOZ, on a

$$\Sigma mxz = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma myz = 0$$

et les 6 équations du problème deviennent :

$$\Sigma F_x + R_x + R'_x = M\omega^2 a,$$

$$\Sigma F_y + R_y + R'_y = Ma \frac{d\omega}{dt}, \quad \Sigma F_z + S = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_x F - R_y \cdot h + R'_y \cdot h' = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_y F + R_x \cdot h - R'_x \cdot h' = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_z F = \frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2.$$

Les quantités $Ma \frac{d\omega}{dt}$, $M\omega^2 a$ expriment la force tangentielle et la force normale du centre de gravité, considéré comme un point matériel où toute la masse M serait concentrée.

VII. Deux cas particuliers méritent d'être considérés; c'est 1° celui où, l'axe de rotation étant horizontal, le corps aurait son centre de gravité sur cet axe, et ne serait soumis à d'autres forces extérieures qu'à la pesanteur; 2° celui où l'axe de rotation serait vertical, et où le corps aurait son centre de gravité sur l'axe et ne serait soumis qu'à son poids et à des forces extérieures formant des couples horizontaux.

1° Dans le premier cas, on aurait

$$a = 0, \quad \Sigma F_x = P, \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma F_z = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_x F = 0, \quad \Sigma \mathcal{M}_y F = 0, \quad \Sigma \mathcal{M}_z F = 0,$$

$$R_x + R'_x = -P, \quad R_y + R'_y = 0, \quad S = 0. \quad [7]$$

La 6^e équation donnerait $\frac{d\omega}{dt} = 0$, d'où il résulte

que le mouvement serait uniforme; et les équations [4] et [5] se réduiraient à

$$-R_y \cdot h + R'_y \cdot h' = -\omega^2 \Sigma myx,$$

$$R_x \cdot h - R'_x \cdot h' = +\omega^2 \Sigma mxz,$$

ou, dans le cas où le plan XOZ serait un plan de symétrie, à

$$R_y \cdot h = R'_y \cdot h' \quad \text{et} \quad R_x \cdot h = R'_x \cdot h'.$$

La première de celles-ci, comparée avec la seconde des équations [7], donne

$$R_y = 0 \quad \text{et} \quad R'_y = 0,$$

c'est-à-dire que les réactions en A et A' sont alors verticales.

2° Dans le second cas, si l'on prend l'axe OZ vertical (fig. 4), et qu'on suppose le centre de gravité sur l'axe OX à l'instant considéré comme initial, en appelant P le poids du corps, et remarquant que les forces formant un couple n'entreront que dans l'équation des moments par rapport à l'axe vertical OZ, et qu'on a comme ci-dessus $\Sigma my = 0$ et $\Sigma mx = Ma$, on trouvera

$$R_x + R'_x = \omega^2 Ma,$$

$$R_y + R'_y = Ma \frac{d\omega}{dt},$$

$$-P + S = 0,$$

$$-R_y \cdot h + R'_y \cdot h' = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz - \omega^2 \Sigma myx,$$

$$Pa + R_x \cdot h - R_x' \cdot h = - \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz + \omega^2 \Sigma mxz,$$

$$\Sigma \mathcal{N}_x F = \frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2.$$

Si l'on veut que les réactions R et R' soient nulles,

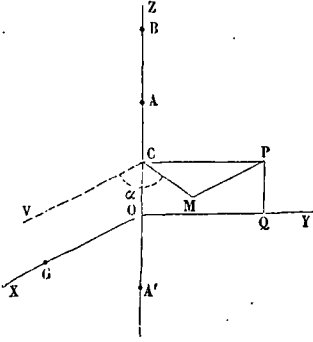


Fig. 4.

il faut, d'après les deux premières équations, qu'on ait

$$a = 0,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité soit sur l'axe de rotation. L'équation

$$-P + S = 0$$

donne

$$S = P;$$

c'est-à-dire que la charge du pivot qui soutient l'axe de rotation est égal au poids du corps. Les deux équations suivantes se réduisent en outre à

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz + \omega^2 \Sigma myz = 0$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma myz - \omega^2 \Sigma mxz = 0,$$

ce qui exige qu'on ait à la fois

$$\Sigma mxz = 0 \text{ et } \Sigma myz = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe de rotation soit un des axes principaux du corps. Dans les meules on remplit ces deux conditions par tâtonnement à l'aide de masses de plomb que l'on introduit dans des trous verticaux ménagés à cet effet. Si ces conditions n'étaient pas remplies, il pourrait arriver que la meule, quoique ayant son centre de gravité sur l'axe, et demeurant horizontale dans l'état de repos, exerçât, pendant le mouvement, des réactions latérales sur cet axe, et que par conséquent, à cause du jeu nécessaire à son mouvement, elle cessât d'être horizontale. (Voy. le Cours de Mécanique appliquée professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Bélanger. Voy. aussi le Cours de Mécanique professé à l'École polytechnique par M. Duhamel.)

ROTATIONS (MÉTHODE DES), l'une des méthodes employées en Géométrie descriptive pour la résolution des problèmes. Elle consiste à faire tourner le système géométrique donné, ou seulement une partie de ce système, d'une certaine quantité angulaire autour d'un axe, que l'on choisit le plus ordinairement perpendiculaire à l'un des plans de projections.

La méthode des rotations revient, au fond, à la méthode du CHANGEMENT DE PLANS (Voy. ce mot). Ainsi, faire tourner le système autour d'une droite verticale revient évidemment à changer de plan

vertical. Faire tourner le système autour d'une perpendiculaire au plan vertical revient à remplacer le plan horizontal par un plan toujours perpendiculaire au plan vertical, mais incliné à l'horizon. La méthode du changement de plans est même beaucoup plus simple; car, lorsqu'on change de plan vertical, par exemple, les projections et les traces horizontales sont conservées; tandis que si l'on fait tourner le système autour d'une verticale, les projections et les traces horizontales sont modifiées aussi bien que les projections et les traces verticales. L'emploi systématique des rotations, tel qu'on le trouve exposé dans les ouvrages de Th. Olivier, n'a pas été adopté par les praticiens. On comprend, en effet, qu'on fasse ainsi tourner un système géométrique abstrait; mais, s'il s'agit d'une construction solide, telle qu'une voûte ou un escalier, il répugne à l'esprit de lui imprimer un mouvement de rotation; et d'ailleurs l'application de cette méthode introduit une assez grande complication dans les épures. En général, on ne fait usage de la rotation que dans des cas particuliers, et pour certaines parties seulement du système que l'on considère. Ainsi, il peut être avantageux d'amener momentanément une droite à être parallèle au plan vertical de projection, ou d'amener un plan à lui être perpendiculaire; sauf à ramener cette droite ou ce plan dans sa position primitive quand on a obtenu la grandeur inconnue qu'on se proposait de déterminer. Mais, si l'on avait à faire tourner tout un système, il serait plus court et plus commode de changer de plan vertical.

La rotation s'effectue d'ailleurs d'une manière extrêmement simple.

Soit, par exemple, un point donné m, m' (fig. 1)

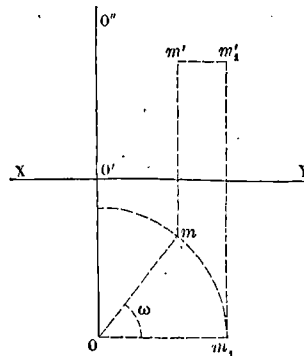


Fig. 1.

que l'on veut faire tourner d'un angle donné ω autour d'un axe vertical projeté en O et O'O''. On joint Om; du point O comme centre avec Om pour rayon on décrit un arc de cercle. On fait au point O avec Om un angle mOm , égal à l'angle donné ω ; le point m_1 où le second côté de cet angle rencontre l'arc de cercle, est la nouvelle projection horizontale du point considéré. Car la rotation se faisant autour d'une verticale, l'arc décrit dans l'espace par ce point est horizontal et se projette horizontalement en vraie grandeur. Il se projette d'ailleurs verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre menée par le point m' . Le point m'_1 où cette paral-

lèle est rencontrée par la perpendiculaire à la ligne de terre, élevée en m_1 , est la nouvelle projection verticale du point. Il faut évidemment supposer, dans ce qui précède, que le sens de la rotation est donné.

Soit $ab, a'b'$ (fig 2) une droite que l'on veut

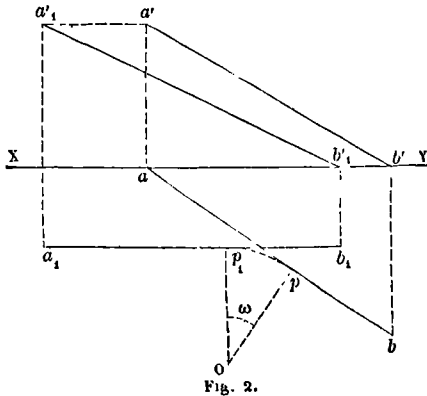


FIG. 2.

faire tourner d'un angle ω autour de la verticale projetée en O. Il est clair qu'on obtiendra le résultat désiré en faisant tourner du même angle ω deux points quelconques de la droite donnée, et en joignant les deux nouveaux points obtenus. Mais on rend l'épure plus claire en opérant comme il suit. Abaissons du point O la droite Op perpendiculaire sur la projection horizontale ab . Décrivons du point O comme centre, avec Op pour rayon, un arc de cercle; menons Op_1 faisant avec Op l'angle ω . Au point p_1 , menons une perpendiculaire à Op_1 , sur laquelle nous prendrons

$$a_1p_1 = ap \text{ et } b_1p_1 = bp.$$

Nous aurons en a_1b_1 la nouvelle position de la projection ab . Comme vérification, les distances a_1O et aO devront être égales, ainsi que les distances b_1O et bO . Cela fait, par les points a_1 et b_1 , menons des perpendiculaires à la ligne de terre, terminées à leur rencontre en a'_1 et b'_1 avec les parallèles à XY menées par les projections verticales primitives. Les points a'_1 et b'_1 seront les nouvelles projections verticales des mêmes points, et en joignant $a'_1b'_1$, on aura la nouvelle projection verticale de la droite. On voit qu'on peut, par ce procédé, amener une droite à être parallèle au plan vertical, il suffit pour cela de mener à l'arc pp_1 une tangente parallèle à la ligne de terre. C'est la nouvelle position de la projection horizontale de la droite; le reste s'achève comme il vient d'être dit.

Soit maintenant à faire tourner un plan donné $P\alpha P'$ (fig. 3) d'un angle ω autour de la verticale projetée en O. On pourrait prendre dans le plan donné trois points non situés en ligne droite, les faire tourner tous les trois de l'angle ω dans le sens indiqué, et déterminer les traces du plan qui passe par les trois nouveaux points obtenus. Mais on arrivera plus simplement au résultat en opérant de la manière suivante. Dans le plan donné, menons une horizontale $ab, a'b'$. Du point O, abaissons une perpendiculaire sur la direction des parallèles αP et ab . Soient i et k les points où cette perpendiculaire rencontre les deux droites. Au point O, faisons avec Ok un angle égal à ω , et sur le second côté de

cet angle, prenons $Ok_1 = Ok$ et $Oi_1 = Oi$. Par les points i_1 et k_1 , menons des perpendiculaires à Ok_1 ; la première $\alpha_1 P_1$ sera la nouvelle position de la trace horizontale du plan; la seconde $a_1 b_1$ sera la nouvelle position de la projection de l'horizontale $ab, a'b'$. D'ailleurs cette horizontale étant restée à

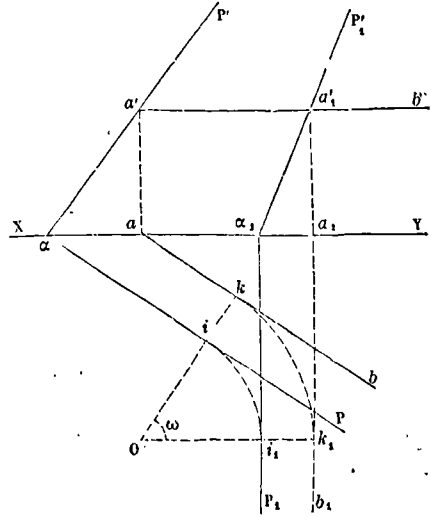


Fig. 3.

la même hauteur, sa trace verticale a'_1 se trouve sur la droite $a'b'$ parallèle à la ligne de terre. Si donc on joint $\alpha_1 a'_1$, on aura la nouvelle trace verticale $\alpha_1 P'_1$ du plan considéré.

Ce procédé servirait, comme on voit, à amener le plan à être perpendiculaire au plan vertical; il suffit pour cela que Ok_1 soit parallèle à la ligne de terre.

La rotation autour d'une perpendiculaire au plan vertical est d'un usage beaucoup plus rare. Elle s'effectue d'ailleurs d'après les mêmes principes. Pour en donner un exemple, nous supposons qu'il s'agisse de faire tourner une droite donnée $ab, a'b'$ (fig. 4)

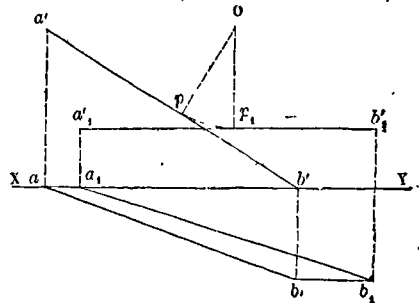


Fig. 4.

autour d'une perpendiculaire au plan vertical, projetée en O sur ce plan, de manière à l'amener à être horizontale. Du point O abaissons sur $a'b'$ la perpendiculaire Op ; par le point O, menons une verticale sur laquelle nous prendrons $Op_1 = Op$.

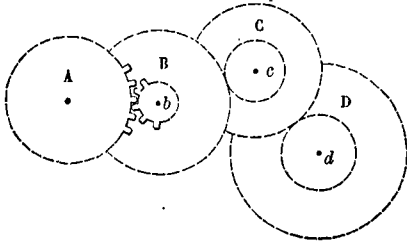
Par le point p_1 , faisons passer une parallèle à la ligne de terre, et prenons sur cette parallèle

$$p_1 a'_1 = p a' \text{ et } p_1 b'_1 = p b'.$$

Abaïssons des points a'_1 et b'_1 des perpendiculaires à la ligne de terre, terminées aux parallèles à XY menées par les points a et b ; ndus obtiendrons ainsi deux points a_1 et b_1 , et, en les joignant par une droite, nous aurons la nouvelle projection horizontale de la droite. Cette construction se justifie par des raisons analogues à celles qui ont été données à l'occasion de la figure 2, et nous ne croyons pas nécessaire d'insister sur la démonstration.

Les constructions relatives à la rotation sont quelquefois présentées d'une manière un peu différente, mais qui nous a paru moins simple. (Voy. le *Traité de Géométrie descriptive* de Th. Olivier, et le *Traité élémentaire de Géométrie descriptive* de M. Tresca.)

ROUAGE, système de roues dentées et de pignons destiné à transmettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre, de telle sorte que le rapport des vitesses angulaires reste constant. Le plus ordinairement les axes extrêmes et intermédiaires sont parallèles. Une roue A engrène avec le



pignon b d'une roue B; celle-ci engrène avec le pignon c d'une roue C; cette dernière engrène à son tour avec le pignon d d'une roue D, et ainsi de suite. C'est la disposition la plus commune.

I. Il est facile d'exprimer le rapport des vitesses angulaires extrêmes. Soient $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ les vitesses angulaires des roues A, B, C, D; soient R, R', R'' les rayons des roues A, B, C et r, r', r'' les rayons des pignons b, c, d . Les dents ou aïles dont les roues et les pignons sont armés empêchant le glissement entre les roues qui engrènent, la vitesse à la circonférence primitive (Voy. ENGRENAGE) de la roue A est la même qu'à la circonférence primitive du pignon b . On a donc

$$\omega R = \omega' r. \tag{1}$$

Par une raison semblable, on a

$$\omega' R' = \omega'' r', \tag{2}$$

et

$$\omega'' R'' = \omega''' r''. \tag{3}$$

Multipliant membre à membre les relations [1], [2], [3], supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, et divisant ensuite les deux membres par ω''' et par $R.R'.R''$, on obtient

$$\frac{\omega}{\omega'''} = \frac{r.r'.r''}{R.R'.R''} \tag{4}$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la première roue est à la vitesse angulaire de la dernière comme le produit des rayons primitifs des pignons est au produit des rayons primitifs des roues qui engrènent avec ces pignons.

Il est commode d'introduire, au lieu des rayons des circonférences primitives, les nombres de dents

de chaque roue, ou les nombres d'aïles de chaque pignon. Pour cela, si l'on désigne par N, N', N'' les nombres de dents des roues A, B, C et par n, n', n'' les nombres d'aïles des pignons b, c, d , on remarque que, lorsque deux roues engrènent, le pas (Voy. ENGRENAGE) étant nécessairement le même, on a, en nommant a le pas de l'engrenage A, b ,

$$Na = 2\pi R \text{ et } na = 2\pi r,$$

d'où
$$\frac{n}{N} = \frac{r}{R}.$$

On trouve de même

$$\frac{n'}{N'} = \frac{r'}{R'} \text{ et } \frac{n''}{N''} = \frac{r''}{R''}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\omega}{\omega'''} = \frac{n.n'.n''}{N.N'.N''}, \tag{5}$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la première roue est à la vitesse angulaire de la dernière comme le produit des nombres d'aïles des pignons est au produit des nombres de dents des roues qui engrènent avec ces pignons.

Au lieu du rapport des vitesses angulaires des roues extrêmes, on pourrait prendre le rapport des nombres de tours faits par ces roues dans un même temps, ou le rapport inverse des temps employés par ces roues pour faire un même nombre de tours. Si, par exemple, T et T''' représentent les temps employés par les roues extrêmes pour faire un tour, on aura

$$\frac{T'''}{T} = \frac{n.n'.n''}{N.N'.N''} \text{ ou } \frac{T}{T'''} = \frac{N.N'.N''}{n.n'.n''}, \tag{6}$$

c'est-à-dire que les temps employés par les roues extrêmes pour faire un tour sont entre eux comme le produit des nombres de dents des roues qui engrènent avec les pignons est au produit des nombres d'aïles de ces pignons.

II. Lorsqu'on veut que les vitesses angulaires extrêmes, ou les nombres de tours, ou les temps employés à faire un nombre donné de tours soient dans un rapport donné $\frac{p}{q}$, on a à satisfaire à une relation de la forme

$$\frac{n.n'.n''}{N.N'.N''} = \frac{p}{q}; \tag{7}$$

ce qui peut se faire généralement d'une infinité de manières. Supposons d'abord que les nombres p et q soient décomposables en autant de facteurs qu'il y a de pignons, de telle sorte qu'on ait

$$p = \alpha.\alpha'.\alpha'' \text{ et } q = \beta.\beta'.\beta''.$$

Il est clair qu'on satisfera à la relation [7] en prenant

$$n = \alpha, \quad n' = \alpha', \quad n'' = \alpha'',$$

avec $N = \beta, \quad N' = \beta', \quad N'' = \beta''.$

Il suffira que les nombres $\alpha, \alpha', \alpha''$ puissent convenir à des pignons, et ne soient par conséquent pas trop élevés. Si, par exemple,

$$p = 360 \text{ et } q = 5400,$$

on pourra écrire

$$p = 6.6.10 \text{ et } q = 15.18.20,$$

et prendre en conséquence

$$n = 6, \quad n' = 6, \quad n'' = 10,$$

$$N = 15, \quad N' = 18, \quad N'' = 20.$$

Si les nombres p et q étaient trop petits pour fournir le nombre des facteurs convenables, on pourrait les multiplier par un même nombre convenablement choisi. Soit, par exemple,

$$p = 49 \text{ et } q = 1020;$$

en multipliant par 6, on pourra prendre
 $p = 7.7.6$ et $q = 1020.6 = 17.18.20$,
 d'où $n = 7$, $n' = 7$, $n'' = 6$,
 avec $N = 17$, $N' = 18$, $N'' = 20$.
 On opérerait d'une manière analogue, quel que
 soit le nombre des roues et pignons composant le
 rouage.

Lorsque l'un des nombres p ou q est premier et
 trop grand pour qu'on ait la ressource d'introduire
 des facteurs, on se contente d'une approximation,
 et l'on remplace la fraction $\frac{p}{q}$ par une fraction plus

simple, qui en diffère peu, et dont les termes soient
 décomposables en facteurs. Un moyen naturel de
 trouver cette fraction approchée est de réduire $\frac{p}{q}$

en fraction continue et de former les réduites suc-
 cessives (*Voy. notre Algèbre élémentaire*). On sait
 que ces réduites jouissent de cette propriété que
 chacune d'elles approche plus de la fraction propo-
 sée que toute autre fraction exprimée en termes
 plus simples. Supposons, par exemple, que le rapport

donné soit celui de $2\frac{1}{2}$ à $29\frac{1}{2} 12^h 44^m$, qui est à peu
 près l'intervalle de temps entre deux retours consé-
 cutifs d'une même phase de la lune. En convertis-
 sant ces nombres en minutes, on trouve
 360^m et 4252^m ,

ou, en divisant par 4,
 $p = 900$ et $q = 10631$.

Comme ce dernier nombre est premier, on con-
 vertira la fraction $\frac{900}{10631}$ en fraction continue, et
 l'on trouve ra pour les réduites successives

$$\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{5}{59}, \frac{16}{189}, \frac{213}{2516}, \frac{229}{2705}, \frac{900}{10631}.$$

On peut prendre $\frac{16}{189}$, ou, en multipliant les deux
 termes par 24, par exemple,
 $p = 16.24 = 6.8.8$ et $q = 189.24 = 12.18.21$;
 on aura donc

$$\begin{aligned} n &= 6, & n' &= 8, & n'' &= 8, \\ N &= 12, & N' &= 18, & N'' &= 21. \end{aligned}$$

On remarque aisément que deux pignons auraient
 suffi dans ce cas; car, si l'on se contente de multi-
 plier par 3 les deux termes de la fraction $\frac{16}{189}$, on
 peut prendre

$$\begin{aligned} p &= 16.3 = 6.8 \text{ et } q = 189.3 = 21.27, \\ \text{d'où } n &= 6, & n' &= 8, \\ \text{avec } N &= 21, & N' &= 27. \end{aligned}$$

Quant à l'erreur commise, en substituant $\frac{16}{189}$ à la
 fraction proposée, on l'appréciera en posant

$$\frac{16}{189} = \frac{900}{10631 + z},$$

d'où l'on tire

$$\frac{16}{189} = \frac{900}{10631,25} = \frac{3600}{42525},$$

et par conséquent

$$\frac{16}{189} = \frac{900}{10631,25} = \frac{3600}{42525},$$

au lieu de

A chaque révolution de la dernière roue, c'est-à-
 dire à chaque retour de la même phase l'erreur
 serait donc de 1 minute.

Un autre moyen consiste à déterminer une frac-
 tion $\frac{x}{y}$ telle, que le numérateur de la différence
 entre cette fraction et la proposée soit très-petit
 par rapport au dénominateur, c'est-à-dire que l'on pose

$$\frac{p}{q} - \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{qy},$$

α étant un nombre entier très-petit par rapport à
 qy . On a donc à résoudre en nombres entiers l'é-
 quation indéterminée

$$py - qx = \alpha,$$

et l'on choisit la solution qui donne pour x et y les
 nombres les plus commodément décomposables en
 facteurs. Dans l'exemple de tout à l'heure, on au-
 rait à résoudre l'équation

$$900y - 10631x = \alpha.$$

En prenant $x = 703$ et $y = 8304$,

on trouve $\alpha = 7$,

nombre très-petit, en effet, par rapport à
 $10631.y$ ou à 88279824 .

On a d'ailleurs $703 = 19.37$ et $8304 = 48 \times 173$.

On résoudrait donc la question avec deux pi-
 gnons seulement, en posant

$$\begin{aligned} N &= 48, & N' &= 173; \text{ et } n = 19, & n' &= 37; \\ \text{dans ce cas les pignons deviendraient de véritables} \\ \text{roues. Quant à l'erreur commise, on l'obtiendrait en} \\ \text{posant} \end{aligned}$$

$$\frac{703}{8304} = \frac{3600}{42524 + z},$$

d'où $z = 0,04$,

ou $2^{\prime\prime},4$ par révolution de la dernière roue, ce qui
 revient à $30^{\prime\prime}$ par an.

Supposons, comme second exemple, que le rap-
 port des vitesses des roues extrêmes doive être celui
 du jour sidéral au jour moyen, ou celui de 24^h à
 $23^h 56^m 4^s,0906$. En convertissant ces nombres en
 secondes et négligeant les centièmes, on obtient

$$86400^{\prime\prime} \text{ et } 86164^{\prime\prime};$$

et, en divisant par 4, on peut poser
 $p = 21600$ et $q = 21541$.

On aura donc à résoudre l'équation
 $21541x - 21600y = \alpha$.

Les valeurs générales de x et de y qui satisfont à
 cette équation sont

$$\begin{aligned} x &= 3661\alpha + 21600.t, \\ y &= 3651\alpha + 21541.t. \end{aligned}$$

Parmi les valeurs entières qu'on peut donner à α
 et à t , on peut distinguer

$$\alpha = -216 \text{ et } t = 37$$

qui donnent $x = 8424$ et $y = 8401$.

Or $8424 = 39.216$ et $8401 = 31.271$;

on résoudra donc le problème en prenant
 $n = 39$, $n' = 31$ et $N = 271$, $N' = 216$.

En calculant comme plus haut l'erreur commise,
 on trouve $0^{\prime\prime},012$ de trop par jour sidéral, ce qui
 revient à $4^{\prime\prime},4$ par an.

On aurait pu prendre $\alpha = -41$ avec $t = 7$,

$$\begin{aligned} \text{ce qui donne } x &= 1099 \text{ et } y = 1096. \end{aligned}$$

Or

$1099 = 7 \times 157$ et $1096 = 8 \times 137$,
on aurait donc une autre solution du problème en prenant

$$n = 8, n' = 7 \text{ avec } N = 137, N' = 157.$$

L'erreur est alors de $0^{\circ},0586$ par jour sidéral, soit $21^{\text{h}},389$ par an.

Enfin, les problèmes du genre de celui qui nous occupe, peuvent être résolus exactement par l'emploi des ENGRENAGES DIFFÉRENTIELS (*Voy.* ce mot); la méthode consiste alors à remplacer le rapport donné par la somme ou la différence de deux autres rapports.

ROUES À AUGETS, roues hydrauliques à axe horizontal recevant l'eau à la partie supérieure. La roue se compose de deux couronnes annulaires entre lesquelles sont emboîtées des aubes polygonales ou courbes, dont les intervalles sont remplis, du côté de l'axe, par une fonçure générale; en sorte que l'eau une fois introduite entre deux aubes consécutives, s'y trouve enfermée comme dans une sorte de vase, auquel on donne le nom d'*auget*, et n'en peut sortir que lorsque, par l'effet de la rotation de la roue, ce vase est arrivé à la partie inférieure. L'eau est amenée sur la roue par un canal rectangulaire placé à la suite d'une ouverture de vanne peu distante du niveau de l'eau dans le bief supérieur. Les parois verticales de ce canal se prolongent un peu au delà du point d'introduction de l'eau, afin qu'il y ait le moins d'eau possible projetée latéralement. La levée de la vanne est toujours très-faible, de $0^{\text{m}},06$ à $0^{\text{m}},10$, et la vitesse de la lame d'eau est peu considérable. Une fois admise dans l'auget, l'eau y perd toute sa vitesse relative, et n'agit plus que par son poids. Vers le bas de la roue, elle commence à déverser, de telle sorte que l'auget est vide en arrivant à l'aplomb de l'axe. — Le mode d'introduction représenté par la figure 1 est quelquefois remplacé

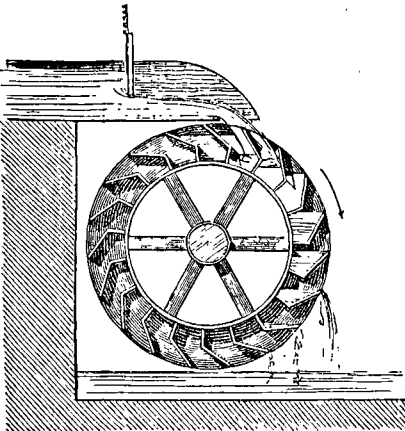


Fig. 1.

par celui qu'indique la figure 2 : le bief supérieur se termine alors par une paroi inclinée, percée d'orifices verticaux, qui occupent toute la largeur de la roue dans le sens de son axe, et qui présentent une disposition assez analogue à celle d'une persienne; c'est par ces orifices que l'eau descend

dans les augets; la roue tourne alors en sens contraire par rapport à la figure 1. Ce mode d'introduction de l'eau est désavantageux, parce que l'eau, tombant d'une plus grande hauteur, perd

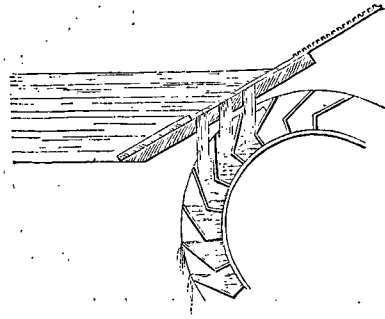


Fig. 2.

une plus grande puissance vive en prenant la vitesse de la roue; on est d'ailleurs obligé de donner à celle-ci un plus grand diamètre, ce qui la rend plus coûteuse et plus lourde. Cependant on est obligé d'avoir recours à cette disposition quand le niveau du bief d'amont est très-variable; une vanne mobile permet d'ouvrir ou de fermer à volonté un certain nombre d'orifices, de manière à régler la dépense d'après le volume d'eau dont on dispose.

On a adopté pour les aubes des tracés très-divers : voici le plus usité. On trace une circonférence à égale distance des bords extérieur et intérieur de la couronne; on forme l'aube de deux plans; on donne au premier la direction de la vitesse relative de l'eau à son arrivée sur la roue; le second est dirigé vers l'axe; leur point de jonction est sur la circonférence dont il vient d'être parlé. Pour obtenir la direction de la vitesse relative, on sait qu'il faut

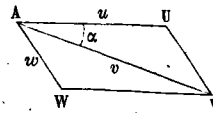


Fig. 3.

opérer de la manière suivante. Soit A (fig. 3), le point d'introduction de l'eau; soit

$$AV = v$$

la vitesse de la lame d'eau, et

$$AU = u$$

la vitesse de la roue à la circonférence; on joint UV et l'on achève le parallélogramme AUVW; la ligne AW = w représente la vitesse relative (*Voy.* COMPOSITION DES VITESSES) et sa direction est celle qu'il faut donner au premier côté de l'aube. — Lorsque l'on emploie des aubes courbes, auquel cas on les exécute en tôle et non plus en bois, on donne au premier élément de la courbe la direction de la vitesse relative. L'écartement des aubes est généralement de $0^{\text{m}},32$ à $0^{\text{m}},35$ sur la circonférence extérieure; leur nombre doit être un multiple de celui des bras qui relient les couronnes à l'axe; leur

profondeur dans le sens du rayon est de 0^m,25 à 0^m,28 environ. On règle la largeur de la roue dans le sens de son axe de manière que la dépense par mètre de largeur soit inférieure à 100 litres; et l'on adopte une profondeur telle que le volume d'eau introduit dans l'auget ne dépasse pas la moitié de la capacité de cet auget. Avec une profondeur moindre l'eau commencerait trop tôt à déverser; une profondeur plus grande permettrait à l'eau d'acquies dans sa chute une vitesse trop grande et augmenterait ainsi la perte de puissance vive due à l'introduction de l'eau dans l'auget. Il est rare que la longueur de la roue dans le sens de son axe dépasse 5^m; lorsqu'elle atteint cette dimension il est nécessaire d'employer plus de deux couronnes.

La roue ne plonge pas dans les eaux d'aval; on la tient à une petite distance au-dessus du niveau du bief inférieur.

Soit P le poids d'eau qui s'écoule dans une seconde, h la distance verticale comprise entre le point où l'eau arrive sur la roue et celui où elle la quitte, v la vitesse de l'eau à son arrivée sur le récepteur, u la vitesse de la roue à la circonférence extérieure, qui est aussi celle de l'eau au point où elle quitte la roue, \mathcal{E}_m le travail moteur pendant l'unité de temps, \mathcal{E}_f le travail des actions mutuelles et des frottements; on aura, d'après l'équation générale des RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES (Voy. ce mot)

$$\mathcal{E}_m = Ph + \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v^2 - u^2) - \mathcal{E}_f. \quad [1]$$

Mais le triangle VAU (fig. 3) donne, en appelant α l'angle VAU,

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha.$$

La perte de puissance vive due à l'introduction de l'eau dans l'auget est égale à la puissance vive relative

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} w^2,$$

ou à

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} (v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha).$$

Cette quantité forme une des deux parties principales du terme \mathcal{E}_f ; si on la remplace dans l'équation [1] et que l'on appelle \mathcal{E}'_f le reste des travaux renfermés dans \mathcal{E}_f , on trouve en réduisant

$$\mathcal{E}_m = Ph + \frac{P}{g} (v \cos \alpha - u)u - \mathcal{E}'_f. \quad [2]$$

On rendrait le second terme maximum en prenant

$$u = \frac{1}{2} v \cos \alpha,$$

ce qui donnerait

$$\mathcal{E}_m = Ph + \frac{Pv^2 \cos^2 \alpha}{4g} - \mathcal{E}'_f. \quad [3]$$

Nous dirons tout à l'heure comment il convient de mesurer la hauteur h; mais auparavant il faut expliquer comment on peut évaluer le terme \mathcal{E}'_f . Ce terme représente le travail perdu par le déversement. Il faut donc avant tout chercher pour quelle position de l'auget le déversement commence, et pour quelle position l'auget est complètement vidé. Pour cela, soit abcdef (fig. 4) un auget considéré dans une position quelconque; la quantité d'eau qui s'introduit dans l'auget étant supposée égale, pour fixer les idées, à la moitié de la capacité de celui-ci, la section droite du prisme d'eau devra être la moitié de la surface abcdef. On mènera par

le point c une droite cn qui intercepte une surface abcn égale à la moitié de abcdef; c'est un problème de Géométrie facile à résoudre (Voy. PARTAGE DES TERRES). Du centre O on abaissera

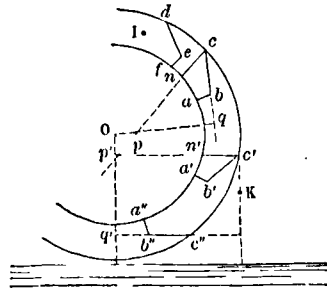


Fig. 4.

la perpendiculaire Op sur le prolongement de cn; et sur la verticale du point O on prendra une longueur Op' égale à Op. Par le point p' on mènera l'horizontale p'n'c'; par le point c' on fera passer une aube polygonale c'b'a' égale à cba; le point c' sera la position qu'aura prise le point c lorsque le déversement sera sur le point de commencer. On abaissera de même du point O sur cb prolongé la perpendiculaire Oq; et l'on prendra sur la verticale du point O une longueur Oq' égale à Oq; par le point q' on mènera l'horizontale q'c''; par le point c'' on fera passer une aube polygonale c''b''a'' égale à cba; le point c'' sera la position qu'aura prise le point c lorsque l'auget sera devenu complètement vide. Cette construction se justifie en remarquant 1° que c'n' étant horizontal, et la figure a'b'c'n' étant égale à abcn, le point c' répond à la position de l'auget pour laquelle le niveau de l'eau passe par le bord inférieur, et que par conséquent aussitôt que l'auget aura descendu d'aussi peu qu'on voudra, il y aura déversement; 2° que c''b'' étant horizontal, le point c'' répond à la position pour laquelle l'auget ne peut plus contenir d'eau.

Cela posé, désignons en général par x la hauteur du bord inférieur de l'auget au-dessus du niveau du bief d'aval, par q le poids de l'eau contenue à ce moment dans l'auget, par q₀ le poids primitivement introduit, par dq le poids d'eau écoulé pendant un déplacement infiniment petit de la roue; la chute du poids d'eau dq représente une perte de travail exprimée par xdq; par conséquent la valeur de \mathcal{E}'_f est

$$\mathcal{E}'_f = \int_0^{q_0} x dq,$$

x étant regardé comme une fonction de q. Pour évaluer approximativement cette intégrale, on pourrait chercher sur la figure les positions de l'auget pour lesquelles le poids de l'eau contenue est successivement réduit à $\frac{3}{4} q_0$, $\frac{1}{2} q_0$, $\frac{1}{4} q_0$, ou, ce qui revient au même, les positions pour lesquelles l'aire a'b'c'n' est successivement réduite d'un quart, de moitié, des trois quarts; si x₁, x₂, x₃ sont les hauteurs correspondantes du bord inférieur de l'auget

au-dessus du niveau du bief d'aval, la formule de Simpson donnera (Voy. QUADRATURE)

$$\bar{E}' = \frac{1}{12} q_0 (z' + 4z_1 + 2z_2 + 4z_3 + z''). \quad [4]$$

Mais on obtiendra en général une approximation suffisante en remplaçant sous le signe d'intégration la variable x par sa valeur moyenne, ce qui donnera

$$\bar{E}' = \frac{1}{2} q_0 (z' + z''). \quad [5]$$

Ceci revient à supposer que le déversement s'opère en un seul point situé à une hauteur

$$\frac{1}{2} (z' + z'')$$

au-dessus du niveau des eaux d'aval. La hauteur h doit être comptée du sommet de la roue au-dessus de ce point, ou même, comme le point d'introduction de l'eau est lui-même variable, il convient de substituer au sommet de la roue un point I situé au milieu de la profondeur de l'auget, c'est-à-dire sur la circonférence moyenne de la couronne. Si K désigne un point situé à la distance

$$\frac{1}{2} (z' + z'')$$

au-dessus des eaux d'aval, la distance verticale du point I au point K sera la hauteur qu'il conviendra de prendre pour la hauteur h .

Tout ceci suppose que le niveau de l'eau dans l'auget reste sensiblement horizontal et que par conséquent la roue tourne lentement. Lorsque, comme cela arrive dans diverses industries métallurgiques, la roue est au contraire animée d'une grande vitesse, l'hypothèse d'un niveau horizontal ne peut plus être admise, et il y a lieu de rechercher la figure qu'affecte alors la surface libre de l'eau dans l'auget. Pour y parvenir, M. Poncelet suppose que l'eau puisse être considérée, pendant un temps très-court, comme étant en repos relatif par rapport à l'auget, c'est-à-dire en équilibre sous l'action de son poids, et de la force centrifuge (Voy. MOUVEMENT RELATIF, THÉORÈME DE CORIOLIS). Soit alors M (fig. 5) une molécule en équilibre à la

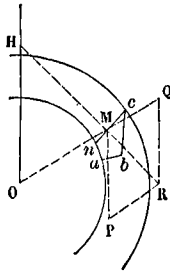


Fig. 5.

surface libre de l'eau. Soit MP la droite qui représente son poids p ou mg , en désignant par m sa masse; soit MQ la droite qui représente à la même échelle la force centrifuge $m\omega^2 r$, ω étant la vitesse angulaire de la roue, et r la distance de la molécule M à l'axe O. La résultante MR de ces deux forces devra être normale à la surface libre, sans quoi la molécule considérée se déplacerait sur la surface. Cette résultante prolongée vient rencontrer

en un point H la verticale du point O. La similitude des triangles HOM et MPR donne la proportion

$$OH : OM = MP : PR \text{ ou } MQ$$

ou bien

$$OH : r = mg : m\omega^2 r,$$

d'où

$$OH = \frac{g}{\omega^2}, \quad [6]$$

quantité indépendante de r , et par conséquent de la position de la molécule considérée à la surface du liquide. Cette surface est donc telle, que toutes les normales à sa section par le plan de la figure vont concourir en un même point H. Cette section est donc un arc de cercle décrit du point H; et la surface libre du liquide dans l'auget est une surface cylindrique droite à base circulaire ayant pour axe une parallèle à l'axe de la roue menée par le point H déterminé par l'équation [6]. On peut remarquer de plus que la valeur de OH ne dépend pas de la position particulière de l'auget; et que par conséquent toutes les surfaces libres de l'eau dans les augets sont des surfaces cylindriques ayant le même axe. On voit par la formule [6] que cet axe est d'autant plus rapproché de celui de la roue que la vitesse de celle-ci est plus grande.

Si elle était assez considérable pour que le point H descendit au-dessous de la circonférence extérieure de la roue, il pourrait arriver, pour quelques-uns des augets supérieurs, que l'arc de cercle décrit du point H comme centre avec Hc pour rayon, passât en dehors de l'auget, ce qui indiquerait que cet auget ne pourrait pas recevoir d'eau. Mais cette circonstance est rare, et il faut avoir soin de l'éviter.

Dans toutes les constructions relatives au déversement il faudrait, d'après ce qui précède, remplacer les droites telles que cn (fig. 4) par des arcs de cercles tels que cn (fig. 5) décrits du point H comme centre. Les opérations seraient un peu plus compliquées; mais la marche générale resterait la même. Il est aisé de voir que lorsque la roue est rapide, le déversement commence en un point beaucoup plus élevé; que par conséquent z' est plus grand, le point K placé plus haut; et que par suite le travail transmis à la roue est beaucoup moindre.

Pour les roues lentes, la vitesse la plus convenable est, d'après l'expérience, une vitesse de 1^m à $1^m,30$ à la circonférence; dans ce cas le rendement peut s'élever à 0,75 ou 0,80 et même au delà. Les roues rapides ont souvent une vitesse de 3^m et plus à la circonférence; mais le rendement peut descendre alors jusqu'à 0,40 et même au-dessous.

Les roues à augets conviennent aux chutes de 4 à 6 mètres. Au-dessous de 3^m une roue de côté est préférable.

Dans quelques cas spéciaux, tels qu'épuisements par seaux ou tonneaux, exploitations de mines, laminage du plomb, etc., on peut avoir besoin de roues qui puissent tourner alternativement dans un sens ou dans l'autre. On obtient ce résultat en accouplant deux roues à augets dont les augets sont dirigés en sens contraire et qui ne font qu'un seul et même récepteur; on emploie alors un double vannage qui permet de faire agir l'eau tantôt sur l'un des deux rangs d'augets tantôt sur l'autre. Quelquefois, les deux vannes sont rendues solitaires, de telle sorte que l'une s'abaisse quand

l'autre se lève; c'est ce qu'on a fait souvent dans le laminage du plomb, où le sens du mouvement doit être changé avec promptitude.

Avant l'invention des TURBINES (Voy. ce mot) on s'est quelquefois servi, pour utiliser les grandes chutes dont on dispose souvent dans les pays de montagnes, de deux roues à augets superposées, de manière que l'eau qui avait agi sur la roue supérieure vint agir sur la roue inférieure. Ce système défectueux est aujourd'hui abandonné.

(Voyez le Cours de Mécanique appliquée de M. Poncelet à l'École de Metz, le Cours d'Hydraulique de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, et les Leçons de Mécanique pratique de M. Morin.)

ROUES À CUILLER, roues hydrauliques à axe vertical et à palettes courbes, recevant à peu près horizontalement le choc d'une lame fluide amenée par un canal en planches. Les palettes sont concaves dans le sens de leur longueur et dans le sens de leur largeur; la concavité est tournée du côté de la veine affluente. Ces roues, qui ne donnaient qu'un très-faible rendement, de 0,16 à 0,33, sont aujourd'hui à peu près abandonnées et remplacées par des TURBINES (Voy. ce mot). Cependant on en trouve encore quelques-unes dans le Dauphiné, dans la Bretagne et en Algérie. — Les roues à cuiller sont également connues sous le nom de *roues à rouet volant*. Ce récepteur est trop imparfait pour qu'il soit possible d'en donner une théorie même approximative.

ROUES À CUVE, roues hydrauliques à axe vertical et à aubes courbes, se mouvant dans une cuve cylindrique en maçonnerie, et recevant l'eau à peu près tangentiellement à la circonférence. Les palettes, de forme à peu près hélicoïdale, et légèrement concaves vers le courant, reçoivent le choc de la veine fluide, qui tend à circuler à l'intérieur de la cuve, et qui, après avoir agi sur la roue, tombe par le fond de la cuve dans le bief d'aval situé à une petite distance au-dessous. Ces roues n'ont jamais donné un rendement supérieur à 0,40; et souvent elles n'ont donné que 0,15. Une trop grande partie de la puissance vive de l'eau est perdue en agitations inutiles. Ces roues ne sont plus guères en usage depuis l'invention des TURBINES (Voy. ce mot); cependant il en existe encore quelques-unes, notamment dans le midi de la France. M. Piobert a donné pour évaluer le rendement de ces récepteurs une formule empirique qui revient à la suivante

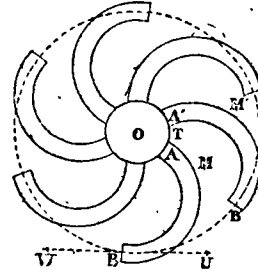
$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{4,2 \cdot n \cdot \frac{d^2}{D^2} \sqrt{h} - n^2}{39 \cdot \frac{d}{D} h}$$

dans laquelle n désigne le nombre de tours de la roue dans une seconde, d le diamètre de la roue, D celui de la cuve, et h la levée de la vanne.

ROUES À RÉACTION, roues à axe vertical mises en mouvement par le seul effet de l'écoulement de l'eau qui s'y introduit près de l'axe, et qui en sort à une certaine distance de l'axe, dans une direction perpendiculaire.

La roue se compose d'un tuyau cylindrique vertical TTT', dont la figure ne montre que la coupe, et qui est mobile autour de son axe; de ce tuyau prin-

cipal partent des tuyaux secondaires courbes, tels que AMB, dont le dernier élément est tangent à une même circonférence de rayon r , ayant le point O pour centre. L'eau s'introduit, sans vitesse sensible,



dans le tuyau central très-près de l'axe, à une hauteur h au-dessus du niveau du bief d'aval; elle en sort avec une vitesse relative w , tangentiellement à la circonférence BB', et à une distance h' au-dessous du niveau dans ce même bief. On peut appliquer au liquide en mouvement le théorème de l'effet du travail, comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, à la condition d'introduire parmi les forces qui sollicitent ce liquide une force fictive qui est ici la force centrifuge (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS). Soit v la vitesse de l'eau au point A; on aura, en appelant \mathcal{P} la pression par mètre en ce point, \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique et Π le poids du mètre cube d'eau,

$$v^2 = 2g \left(h + \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}}{\Pi} \right). \quad [1]$$

Considérons le mouvement du liquide pendant un temps très-petit θ ; et soit m la masse qui s'écoule dans ce petit intervalle de temps. Considérons l'eau contenue dans le tuyau AMB comme décomposée en portions égales ayant la masse m . Soit x la distance d'une de ces portions de liquide à l'axe O; la force centrifuge qui y est appliquée aura pour expression $m\omega^2 x$, en appelant ω la vitesse angulaire de la roue; le travail élémentaire de cette force sera $m\omega^2 x dx$; et la somme des travaux de toutes les forces analogues, depuis l'axe jusqu'au point B, aura pour expression

$$\int_0^r m\omega^2 x dx \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

ou encore

$$\frac{1}{2} m u^2,$$

en appelant u la vitesse du point B.

Soit A l'aire de la section du tuyau AMB; le travail de la pression \mathcal{P} sera $\mathcal{P}A \cdot v\theta$. Mais $A v\theta$ exprime le volume écoulé dans le temps θ , lequel a pour valeur $\frac{mg}{\Pi}$; le travail de la pression \mathcal{P} est donc $mg \frac{\mathcal{P}}{\Pi}$.

La pression au point B pouvant être évaluée comme dans l'état hydrostatique, est égale à

$$\mathcal{P}_0 + \Pi h'.$$

On trouvera donc pour le travail de cette pression

$$mg \left(\frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} + h' \right);$$

il faudra l'affecter du signe —, puisque la pression

agit en ce point en sens contraire du mouvement du liquide.

Le travail de la pesanteur est nul, puisque le liquide se meut horizontalement. On suppose que le travail des frottements soit négligeable.

L'accroissement de puissance vive du liquide est le même que si la masse m s'était transportée de A en B, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} m (w^2 - v^2).$$

On a donc

$$\frac{1}{2} m (w^2 - v^2) = \frac{1}{2} m u^2 + mg \left(\frac{P - P_0}{H} - h' \right),$$

ou simplement

$$w^2 = v^2 + u^2 + 2g \left(\frac{P - P_0}{H} - h' \right). \quad [2]$$

Si l'on ajoute membre à membre les relations [1] et [2], on obtient

$w^2 = u^2 + 2g(h - h')$ ou $w^2 = u^2 + 2gH$, [3] en appelant H la hauteur du point d'introduction de l'eau au-dessus du niveau dans le bief d'aval.

La vitesse absolue de l'eau à sa sortie de la roue est égale à

$$w - u \text{ ou } \sqrt{u^2 + 2gH} - u.$$

Cette quantité ne peut jamais être nulle. Si P désigne le poids d'eau qui s'écoule dans l'unité de temps, la perte de puissance vive résultant du mouvement de l'eau dans cette roue est, en négligeant toujours les frottements,

$$P \frac{(\sqrt{u^2 + 2gH} - u)^2}{2g}.$$

Cette quantité ne peut pas non plus s'annuler; mais elle diminue indéfiniment à mesure que u augmente. On peut faire en sorte, par exemple, que la hauteur

$$\frac{(\sqrt{u^2 + 2gH} - u)^2}{2g}$$

ne soit qu'une fraction donnée $\frac{1}{n}$ de la hauteur H.

Pour cela, si l'on désigne par x la hauteur due à la vitesse u , il suffira de poser

$$(\sqrt{x + H} - \sqrt{x})^2 = \frac{H}{n}, \quad [4]$$

le facteur $2g$ disparaissant de lui-même. On tire de cette équation

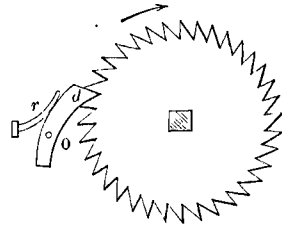
$$x = H \cdot \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

Par exemple, pour $n = 10$ on aurait $x = 2,025 H$.

Les roues à réaction n'ont point été utilisées, telles qu'on vient de les décrire, comme récepteurs hydrauliques. Il serait, en effet, impossible de débiter avec ces roues un volume d'eau un peu considérable, dans les conditions que suppose la théorie précédente, c'est-à-dire sans que le frottement ne prit une très-grande importance.

ROUE À ROCHET, roue portant à sa circonférence des dents inclinées et plus ou moins aiguës, entre lesquelles peut pénétrer un levier d nommé *rochet* ou *cliquet*, mobile autour d'un axe O, et constamment pressé contre la roue par un ressort r . Quand on fait tourner la roue dans le sens de la flèche, les dents soulèvent le cliquet d et échappent en faisant fléchir le ressort; mais si l'on veut faire tourner la roue en sens contraire, les dents vien-

nent buter contre le cliquet d , maintenu par la pression du ressort, et le mouvement est impossible. On fait usage des roues à rochet dans un



grand nombre de machines, et particulièrement dans l'horlogerie (*Voy. HORLOGE, PENDULE, MONTRE*).

On donne souvent, pour abrégé, le nom de *rochet* à la roue elle-même; et lorsqu'on dit qu'un axe ou une roue quelconque sont munis d'un rochet, il faut entendre qu'une roue à rochet est montée sur le même axe. Quelquefois aussi on donne le nom d'*encliquetage* au système formé par la roue à rochet, le cliquet et son ressort, quoique ce mot désigne, à proprement parler, un système plus complexe (*Voy. ENCLIQUEMENT*). Cette confusion dans les dénominations est fâcheuse et il serait à désirer que l'on conservât à chaque terme le sens précis qu'il doit avoir.

ROUE CHINOISE, roue destinée à élever l'eau, et à laquelle on a donné ce nom parce qu'on la croit originaire de la Chine. C'est une roue à axe horizontal, de 5 à 6 mètres de diamètre quelquefois, portant à sa circonférence des pots ou des godets en bois ou en tôle, analogues à ceux des norias (*Voy. NORIA*). Les godets sont installés de telle sorte qu'ils tournent leur orifice vers le bas en descendant et vers le haut en montant. La roue fonctionne donc comme une Noria. Ce que la roue chinoise offre de particulier, c'est que les caisses qui forment ces godets, au lieu d'être placées tangentielllement à la circonférence de la roue, sont installées un peu obliquement, de manière à déverser l'eau un peu à côté de la roue, et à favoriser ainsi le déversement, puisque le canal destiné à recevoir l'eau peut être commodément établi à côté de la roue. M. Morin pense que le rendement de ce genre de roue peut être représenté par la formule

$$0,70 \frac{h}{h + 0^m,60},$$

h désignant la différence de niveau entre le puisard et la bêche ou la rigole destinée à recevoir l'eau.

Dans des expériences faites sur un modèle de 1^m,80 de diamètre, M. Morin a obtenu un rendement de 0,59, avec une vitesse de 0^m,106 à la circonférence. Il pense qu'avec de grandes roues, on pourrait porter la vitesse à 0^m,30 ou 0^m,40; et que l'on obtiendrait un rendement de 0,60 à 0,65.

ROUE DE CHAMP, ou **ROUE A COURONNE**, roue dont les dents sont dirigées parallèlement à l'axe de rotation.

ROUE DENTÉE, roue armée de dents à sa circonférence, et destinée à engrener avec une roue dentée, soit pour la conduire, soit pour être conduite par elle. Sur l'axe d'une roue dentée est ordinairement montée une roue plus petite appelée *pi-*

gnon, et dont les dents prennent le nom d'ailes. Pour le tracé des dents, voyez l'article ENGRENAGE; pour la détermination du nombre des dents, voyez l'article ROUAGE.

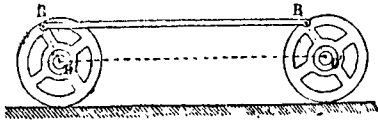
ROUE DE RENCONTRE, roue de champ dont les dents, en rencontrant alternativement deux palettes montées sur l'axe du régulateur forment l'échappement des anciennes montres et de quelques horloges anciennes (Voy. MONTRE, HORLOGE).

ROUE FOLLE, roue qui peut tourner librement sur son axe sans être entraînée par le mouvement de celui-ci. On en fait un fréquent usage dans les EMBRAYAGES et dans les MODIFICATEURS INSTANTANÉS (Voy. ces mots).

ROUE PLANÉTAIRE. Voy. MOUCHE.

ROUE SATELLITE, roue qui tourne autour d'un axe animé lui-même d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Voy. ENGRENAGE DIFFÉRENTIEL, HORLOGE à ÉQUATION). Quand la roue satellite n'a qu'un petit nombre de dents, et qu'elle tourne rapidement autour de son axe, on lui donne quelquefois le nom de *pignon valseur*.

ROUES COUPLÉES (ou *accouplées*), roues égales, situées dans un même plan, et liées en des points homologues, par une bielle articulée à ses extrémités. Il résulte de ce mode de liaison, 1° que la bielle BB' reste parallèle à la droite OO' qui joint les



centres des deux roues; car les points B et B' étant supposés homologues, les droites OB et O'B' sont égales et parallèles, et la figure OBB'O' est un parallélogramme; 2° que les angles décrits par les rayons OB et O'B', à partir d'une position initiale quelconque, sont constamment égaux, et que par conséquent les deux roues ont à chaque instant la même vitesse, et roulent de quantités égales dans un même temps. La plupart des locomotives (Voy. ce mot) offrent deux paires de roues ainsi couplées; quelquefois même une liaison analogue est établie, de chaque côté de la machine, entre les roues appartenant à trois paires consécutives. Le but de cette liaison est de faire servir à la traction l'adhérence avec les rails de toutes les roues qui sont ainsi rendues solidaires.

ROUES DE CÔTÉ, roues hydrauliques à axe horizontal, dont les aubes sont emboîtées dans un coursier circulaire, et qui reçoivent l'eau un peu au-dessous de l'axe. La roue se compose d'un certain nombre de jantes égales AAA (fig. 1), sur lesquelles sont implantés, comme dans les ROUES en dessous à PALETTES PLANES (Voy. ce mot) les *coyaux* cc, qui supportent les aubes. Ces aubes peuvent être planes, polygonales ou courbes; dans ce dernier cas on les construit en tôle; mais si elles sont planes, ou polygonales comme l'indique la figure 1, elles sont construites en bois. Les jantes sont reliées par des bras à un arbre horizontal qui forme l'axe. Les aubes sont emboîtées, depuis le point d'introduction de l'eau M jusqu'à l'aplomb de l'axe en N, dans un *coursier circulaire*, dont une

partie NP est construite en maçonnerie, et dont l'autre PM est formée d'une pièce de fonte appelée *col de cygne*. La roue est en outre comprise entre des parois latérales ou *bajoyers*. Ces bajoyers et

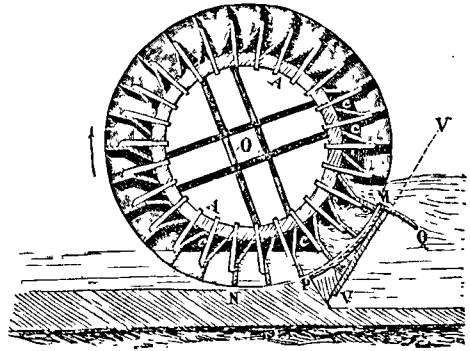


Fig 1

le coursier circulaire ne laissent entre la roue et eux que le jeu strictement nécessaire; en sorte que l'eau, une fois introduite entre deux aubes consécutives, se trouve comme enfermée dans une sorte de vase dont elle ne peut sortir que lorsqu'elle a agi sur la roue, et est arrivée, par la rotation de celle-ci, au delà du point N. — L'eau s'écoule du bief supérieur *en déversoir*; et l'écoulement est réglé au moyen d'une *vanne plongeante* (Voy. VANNE), dont la pièce courbe MQ forme le seuil. L'extrémité inférieure N du coursier circulaire doit être placée au-dessous du niveau du bief d'aval, d'une quantité égale au moins à l'épaisseur de la lame d'eau qui sort de la roue; et l'on verra plus loin que ce point N pourrait le plus souvent être placé encore plus bas.

On règle la largeur de la roue dans le sens de son axe, de manière que, pour dépenser le volume d'eau dont on dispose par seconde, il ne faille pas placer le seuil du déversoir à plus de 0^m,20 ou 0^m,27 au-dessous du niveau du bief d'amont, selon la dépense. Une plus grande épaisseur de la lame affluente occasionnerait une plus grande vitesse d'introduction, et par suite, comme on le verra, une plus grande perte de puissance vive à l'entrée; une trop faible épaisseur de la lame donnerait trop de prépondérance aux fuites d'eau inévitables entre la roue et son coursier. Cependant on peut, dans certains cas, être forcé de porter cette distance jusqu'à 0^m,45 ou 0^m,60. On espace les aubes de manière que, leur nombre étant toujours un multiple de celui des bras, leur écartement surpasse d'un tiers à une demie l'épaisseur de la lame d'eau affluente, si la roue a une faible vitesse; et si la vitesse est grande, il faut toujours que l'écartement des aubes soit un peu supérieur à l'épaisseur de la lame d'eau. On donne aux aubes, dans le sens du rayon, une hauteur telle, que la capacité du vase compris entre deux aubes consécutives soit à peu près le double du volume d'eau qui s'y introduit. Connaissant la vitesse de la roue, on connaît le nombre d'aubes qui passent devant la lame d'eau dans l'unité de temps; en divisant la dépense par ce nombre, on obtient le volume d'eau que doit recevoir chaque vase; en le doublant, on obtient sa

capacité; et l'on peut régler en conséquence la hauteur de l'aube dans le sens du rayon. — Les roues de côté ont rarement moins de 4^m de diamètre, et rarement plus de 6 à 7. L'axe est généralement placé à 0^m,40 ou 0^m,50 au-dessus du niveau du bief supérieur. La vitesse la plus convenable est, d'après l'expérience, une vitesse de 1^m,30 à la circonférence. Une vitesse moindre oblige à donner à la roue une plus grande largeur dans le sens de l'axe, à la rendre par conséquent plus coûteuse; le poids de la roue augmente, et par conséquent il en est de même du frottement sur les axes; il devient en outre nécessaire de multiplier les organes de transmission pour donner aux machines-outils que la roue doit faire marcher, la vitesse qu'ils doivent avoir; enfin il est bon que la roue ait une vitesse suffisante pour jouer le rôle de VOLANT (Voy. ce mot), par rapport aux machines qu'elle doit guider. Cependant, l'espace dont on dispose, ou d'autres circonstances, peuvent conduire à donner à la roue une vitesse plus grande que celle qui a été fixée ci-dessus; et dans des cas exceptionnels, dans les usines métallurgiques par exemple, on peut avoir à faire marcher une roue de côté avec une vitesse de 3^m et plus à la circonférence. Mais les roues lentes sont généralement préférables lorsqu'elles peuvent être employées.

La théorie fournit des indications suffisantes sur l'effet utile qu'on peut attendre de ces roues et sur les meilleures règles à suivre dans leur construction. — La vitesse de l'eau un peu en amont du déversoir pouvant être négligée, si l'on appelle u sa vitesse à la sortie de la roue, H la hauteur de chute, P le poids de l'eau qui s'écoule par seconde, \mathcal{E}_u l'effet utile et \mathcal{E}_f le travail perdu par les actions moléculaires, on a, d'après l'équation générale des RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES (Voy. ce mot),

$$\mathcal{E}_u = P \cdot \left(H - \frac{u^2}{2g} \right) - \mathcal{E}_f. \quad [1]$$

La vitesse u est sensiblement égale à la vitesse de la circonférence de la roue. Le terme \mathcal{E}_f comprend diverses parties qui peuvent être évaluées séparément.

1° *Perte de puissance vive pour amener l'eau du bief d'amont sur la roue.* Pour réduire autant que possible cette perte, il faut évaser à l'intérieur les parois de l'orifice d'écoulement, et placer la roue le plus près possible de cet orifice. Malgré ces précautions, il y a toujours en une seconde une légère perte, que M. Bresse évalue par aperçu à

$$0,05 \frac{Pv^2}{2g} \text{ ou } 0,10 \frac{Pv^2}{2g},$$

soit en moyenne

$$0,075 \frac{Pv^2}{2g},$$

en appelant v la vitesse d'écoulement. Si l'eau était amenée sur la roue par un canal d'une certaine longueur, il faudrait avoir égard au frottement des parois (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS).

2° *Perte de puissance vive pour introduire l'eau dans la roue.* L'eau qui s'introduit dans le vase formé par deux aubes consécutives, les bajoyers et le coursier circulaire, y perd toute sa vitesse relative, et sort de la roue avec la vitesse de celle-ci. Évaluons cette vitesse relative, que nous appellerons w . Soit AV (fig. 2) la vitesse v de l'eau à son arrivée sur la roue, soit AU la vitesse u à la cir-

conférence de la roue, et soit α l'angle de ces deux vitesses. Pour obtenir la vitesse relative, il suffit de se rappeler que cette vitesse et la vitesse d'entraînement u ont pour résultante la vitesse w (Voy.

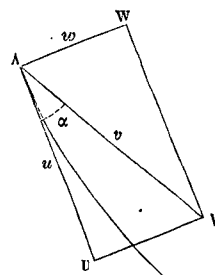


Fig. 2.

COMPOSITION DES VITESSES). On joindra donc UV, et l'on mènera AW égal et parallèle à UV; ce sera la vitesse relative w . Le triangle AUV donne

$$w^2 = v^2 + u^2 - uv \cos \alpha. \quad [2]$$

La vitesse v étant donnée, on peut chercher à déterminer u de manière que w soit un minimum. En égalant à zéro la dérivée du second membre de [2] par rapport à u , on obtient

$$u = v \cos \alpha,$$

c'est-à-dire que u doit être la projection de v , ou que l'angle UAW doit être droit. C'est pour cette raison que l'on dirige vers le centre le premier côté de l'aube quand elle est polygonale, ou son premier élément quand elle est courbe. En mettant pour u cette valeur, on trouve

$$w^2 = v^2 \sin^2 \alpha$$

et la perte de puissance vive dont nous nous occupons a conséquemment pour valeur rapportée à l'unité de temps

$$\frac{Pv^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Si le point d'introduction de l'eau est tel que l'angle α soit de 30°, comme cela arrive fréquemment, on a

$$\sin \alpha = \frac{1}{2},$$

et la perte dont il s'agit est exprimée par

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{Pv^2}{2g}.$$

Il faut bien remarquer que la valeur de u qui rend w minimum ne répond pas rigoureusement au maximum de l'effet utile, attendu que la vitesse u entre encore comme élément dans d'autres pertes dont il va être parlé. Mais la perte par l'introduction de l'eau sur les aubes formant la portion principale du travail négatif, on s'éloigne peu du maximum d'effet en adoptant la valeur

$$u = v \cos \alpha;$$

et d'un autre côté, il est commode, au point de vue de la construction, de diriger l'aube, ou du moins le premier côté de cette aube, vers l'axe de la roue. C'est aussi la disposition qui gêne le moins l'émersion de l'aube à son arrivée au bas du coursier.

3° *Perte de puissance vive due au frottement de l'eau sur le coursier.* Cette perte ne peut être évaluée que par aperçu. On assimile pour cela le frottement dont il s'agit à celui du lit d'un canal dé-

couvert. M. Bresse adopte pour le frottement par mètre carré de lit l'expression $0,4.U^2$, généralement adoptée par les ingénieurs italiens, et qui convient ici à cause de sa simplicité. Le travail résistant par seconde est alors

$$\chi L 0,4 U^2 U.$$

On y remplace χ par $b + 2h$, b désignant la largeur de la roue dans le sens de son axe et h la hauteur de la lame d'eau à la sortie de la roue; L est la longueur développée du coursier. On remplace la vitesse moyenne U par la vitesse u à la circonférence de la roue, ce qui augmente un peu l'expression du travail perdu; mais cela est sans inconvénient, attendu que l'on est obligé de négliger la perte occasionnée par les fuites d'eau qu'il serait impossible d'évaluer.

Les trois quantités que nous venons de calculer forment les trois parties principales du terme \mathcal{E}_r . Il y en aurait une quatrième, si, comme l'ont souvent fait les constructeurs, on commettait la faute de placer l'extrémité N du coursier circulaire au niveau des eaux du bief d'aval; car on perdrait ainsi en tourbillonnements inutiles toute la puissance vive due à la hauteur h , c'est-à-dire un travail représenté par Ph .

Bien au contraire, comme la vitesse u possédée par l'eau à la sortie peut être assez grande pour satisfaire à la condition du RESSAUT (Voy. ce mot), savoir

$$h < \frac{u^2}{g},$$

on peut placer le point N au-dessous du niveau d'aval d'une quantité supérieure à h de toute la hauteur du ressaut, sans craindre que les eaux d'aval envahissent la roue. A tout le moins peut-on profiter de la vitesse u pour faire en sorte que le niveau de la lame d'eau sortant de la roue aille regagner le niveau du bief d'aval par une contre-pente, que l'on calculerait à l'aide de la formule du mouvement varié dans les canaux et rivières, dans laquelle on a introduit la pente du lit (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS, équation [9]); ce qui permettrait encore de placer le point N au-dessous du niveau d'aval d'une quantité supérieure à h (Voy. le Cours d'Hydraulique de M. Bélanger à l'École centrale).

M. Bélanger, pour ne pas perdre toute la puissance vive due à la vitesse relative de l'eau à son entrée sur la roue, conseille de donner aux aubes la forme polygonale indiquée sur la figure. Le premier côté est dirigé vers l'axe de la roue; le troisième est à peu près tangent à la jante; le second fait des angles de 135° avec chacun des deux autres. Le troisième ne rejoint pas exactement l'aube qui précède; il y a en ce point une ouverture pratiquée pour la sortie et la rentrée de l'air. Cette disposition d'aube polygonale, et l'on obtiendrait le même effet avec une aube courbe, offre l'avantage que l'eau, en s'introduisant dans la roue, monte sur l'aube en vertu de sa vitesse relative, et y perd une partie de cette vitesse par l'effet de la pesanteur et non en agitations inutiles.

Une roue de côté lente, établie conformément aux principes qui précèdent, peut donner un rendement de 0,80 et même beaucoup plus, suivant M. Morin. Une roue de côté à grande vitesse donne

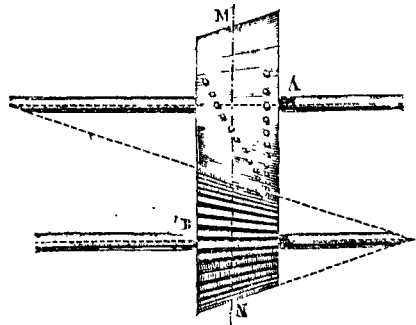
encore de 0,60 à 0,70. Les roues de côté peuvent donc être placées parmi les meilleurs récepteurs hydrauliques. Elles conviennent aux chutes moyennes de 2^m à $2^m,50$; mais elles peuvent être employées avec avantage en dehors de ces limites, soit au-dessous, soit au-dessus.

Au lieu de faire arriver l'eau en déversoir, on l'a quelquefois fait arriver par une vanne, placée vers le milieu de l'intervalle compris entre l'axe de la roue et le bas du coursier circulaire. Les roues construites dans ces conditions prennent le nom de roues mixtes, parce qu'elles tiennent le milieu entre les roues en dessous et les véritables roues de côté. On les a employées surtout sur les cours d'eau à régime variable, où l'on est obligé de marcher par éclusées, c'est-à-dire en amassant l'eau derrière la vanne pendant un certain temps; ou bien sur les cours d'eau charriant des sables capables d'engraver une vanne plongeante. Elles peuvent rendre de 0,50 à 0,60.

Enfin on a construit des roues de côté à axe mobile. Dans ce cas, l'axe repose de chaque côté de la roue sur un grand levier, tournant autour d'un point pris sur le prolongement de la circonférence du coursier. Autour de ce même point tourne un pignon qui engrène avec une grande roue dentée montée sur l'axe de la roue hydraulique; il résulte de cette disposition que lorsque l'on fait varier la position du levier, le pignon ne cesse pas d'engrèner avec la roue dentée : en sorte que la transmission se fait quelle que soit la position donnée à l'axe mobile. Le coursier, en fonte, est lié au mouvement des leviers. Ce système a été employé aux moulins de l'hôpital général à Corbeil, par M. Eastwood, pour obvier à l'engorgement de la roue par les eaux d'aval lors des crues de la Seine.

(Voy. le Cours de M. Bélanger déjà cité, le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, les Leçons de Mécanique pratique de M. Morin, etc.)

ROUES DE ROEMER, roues proposées par l'astronome danois Rømer, à la fin du dix-septième siècle, pour faire varier le mouvement dans les machines planétaires, conformément à la loi des aires. Ces roues A et B sont à axes parallèles; mais elles



sont coniques, et les sommets des deux cônes sont placés en sens opposé. La roue inférieure B présente des cannelures dirigées suivant les génératrices, et telles que la section droite du cône offre le profil d'une roue dentée ordinaire. La roue supérieure A porte des chevilles disposées de manière à s'engager dans les cannelures et à assurer

ainsi la transmission. Une série de chevilles convenablement espacées et disposées sur la circonférence d'une même section droite de la roue A produirait l'effet d'une roue dentée ordinaire engrenant avec celle que forme la section droite de la roue cannelée; et, dans ce cas, le mouvement de l'une des roues étant uniforme, il en serait de même du mouvement de l'autre. Mais si les chevilles sont disposées à différentes distances du sommet, on obtiendra un mouvement varié. Coupons, en effet, les deux cônes par un plan MN perpendiculaire aux deux axes; et soient r et r' les rayons des deux sections. Une cheville placée dans le plan MN venant à s'engager dans une des rainures, le rapport des vitesses angulaires sera l'inverse de celui des rayons r et r' . Ce rapport variera donc quand les chevilles se succéderont dans des sections droites différentes; et l'on conçoit qu'on pourrait par ce moyen transformer un mouvement circulaire uniforme en un mouvement circulaire varié suivant une loi quelconque.

M. Haton de la Goupillière, dans son *Traité des mécanismes* (p. 162), a donné, d'une manière générale, l'équation polaire de la courbe plane qu'il faudrait enrouler sur le cône à chevilles pour transmettre le mouvement dans un rapport de vitesse variable suivant une loi quelconque; et il en a fait l'application à la loi des aires. Ces questions n'ont qu'un intérêt purement théorique, et sont aujourd'hui sans application.

ROUES ÉLÉVATOIRES, roues à axe horizontal, employées à élever les eaux. On en distingue deux espèces principales : les roues à palettes, emboîtées dans un coursier circulaire, et les roues à pots ou à augets. Les premières s'emploient dans le cas où la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée ne dépasse pas 3 ou 4 mètres. Les palettes sont inclinées par rapport au rayon, comme l'indique la figure 1, afin de faciliter l'écoulement de l'eau au

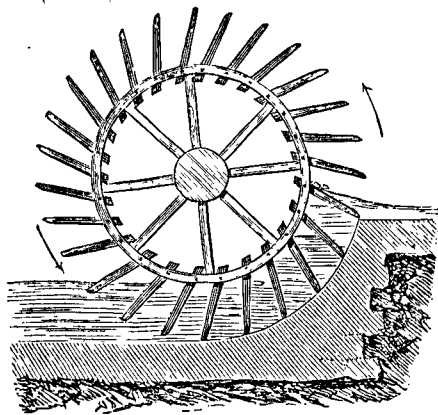


Fig. 1.

moment où elle atteint le sommet du coursier circulaire. Les *joues* ou *bajoyers* de ce coursier se prolongent, dans le bassin inférieur, un peu au delà du point d'introduction de l'eau. On laisse le moins de jeu possible entre les palettes et le coursier.

Le jeu de la machine se comprend sans diffi-

culté. La roue tournant dans le sens indiqué par la flèche, l'eau qui s'est introduite entre deux palettes consécutives se trouve bientôt contenue comme dans une sorte de vase formé par ces palettes, le coursier circulaire et ses bajoyers; et elle se trouve ainsi élevée, sauf les fuites inévitables, jusqu'au sommet du coursier où elle s'écoule dans un canal destiné à la recevoir.

La largeur de la roue dans le sens de son axe est réglée d'après le volume d'eau qu'on se propose d'élever; il convient qu'au point d'introduction la palette soit noyée à peu près sur toute sa hauteur. On donne à la roue une vitesse de 1^m à la circonférence; avec une vitesse plus grande il y aurait trop de perte de travail due au choc des palettes à l'instant de leur immersion; et avec une vitesse moindre les fuites d'eau inévitables prendraient trop d'importance. Établie dans ces conditions, une roue élévatrice à palettes planes et à coursier circulaire donne un rendement de 0,70 à 0,75, c'est-à-dire que le produit du poids d'eau élevé en une seconde par la hauteur à laquelle elle est élevée est les 0,70 ou les 0,75 du travail moteur employé à faire mouvoir la roue.

On emploie les roues élévatoires à augets quand la hauteur d'élévation dépasse 3 ou 4 mètres. La figure 2 représente une roue de ce genre. La roue

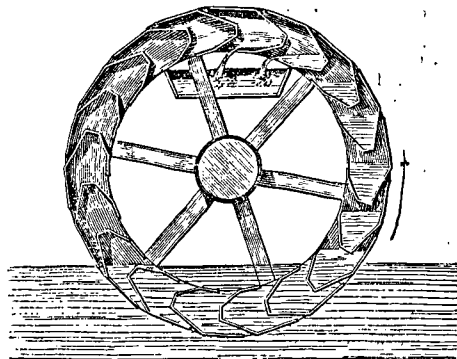


Fig. 2.

tournant dans le sens de la flèche, les augets plongent successivement dans le bassin inférieur, s'y remplissent d'eau, élèvent cette eau jusque vers le sommet de la roue, et la versent à l'intérieur de la roue dans des canaux dont l'extrémité s'engage latéralement sous les augets sans gêner le mouvement des bras de la roue placés au milieu de sa largeur. Les augets sont formés par une cloison en tôle emboîtée entre les deux couronnes qui composent la roue, et par une fonçure intérieure. La cloison pourrait être curviligne; on lui donne ordinairement quatre pans : le premier ab (fig. 3) fait avec la circonférence inférieure des couronnes un angle de 30 à 40 degrés; le second bc est dirigé suivant un rayon; le troisième cd , un peu plus long que ab , fait avec la circonférence extérieure l'angle que fait ab avec la circonférence intérieure, enfin le dernier de , plus long que cd , est une corde de la circonférence extérieure. Cette forme est justifiée par les considérations suivantes. Il faut que l'auget puisse se remplir dans une eau peu profonde : pour cela il est nécessaire que son contour

extérieur soit celui de la roue même. Il faut que l'auget ne perde pas d'eau avant d'avoir atteint le haut de la roue, ce qui exige que la fonçure intérieure qui lui sert de paroi s'élève le plus haut

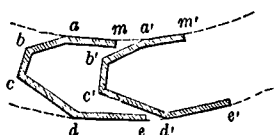


Fig. 3.

possible, en s'engageant sous l'auget suivant. Enfin il faut que l'auget se vide entièrement dans le canal supérieur, malgré la vitesse de la roue; l'expérience prouve qu'avec une vitesse qui ne dépasse pas 0^m,60 à la circonférence extérieure, cette condition est remplie en adoptant le tracé ci-dessus.

Le lecteur a compris que la fonçure intérieure n'est pas continue, et qu'on y a pratiqué, vers les côtés de la roue, et vers le sommet de l'auget, des ouvertures telles que *ma'* (fig. 3) par lesquelles l'eau s'écoule lorsque l'auget est parvenu au haut de la roue.

Les orifices d'introduction de l'eau sont les intervalles, tels que *ed'* compris entre le bord extérieur d'un auget, et l'angle *d da* de l'auget suivant. Lorsque, comme nous l'avons supposé, l'auget doit plonger entièrement dans le bassin inférieur, il est nécessaire de ménager une issue à l'air;

pour cela on munit le fond de l'auget d'un clapet qui s'ouvre par l'effet de son poids lorsque l'auget vide commence à plonger dans le bassin, et qui se referme quand l'auget rempli d'eau remonte.

La vitesse la plus convenable à donner à une roue élévatrice à augets est de 0^m,50 à 0^m,60 à la circonférence. Malgré le poids d'eau qui charge la roue et contribue à accroître le frottement des tourillons, ces roues sont susceptibles d'un bon produit. D'après les expériences de M. le maréchal Niel, alors capitaine de génie, sur une roue construite par lui à Bayonne en 1844, le rendement peut s'élever jusqu'à 0,82 et 0,83.

On peut appliquer aux roues élévatoires un moteur quelconque; le plus souvent c'est un manège ou un moteur hydraulique; la roue élévatrice à palettes établie à Saint-Ouen est mise en mouvement par une machine à vapeur; la roue à augets du maréchal Niel était mue par des hommes agissant au nombre de 5 ou 6 sur une ROUE PÉNITENTIAIRE (Voy. ce mot) ou roue à marches montée sur le même axe que la roue élévatrice.

(Voy. l'ouvrage de M. Morin ayant pour titre : *Des machines et appareils destinés à l'élévation de l'eau*.)

ROUES EN DESSOUS À AUBES PLANES, roues hydrauliques à axe horizontal recevant l'eau à la partie inférieure, et dont les aubes sont des palettes planes dirigées vers l'axe de rotation. Une semblable roue se compose d'un certain nombre de jantes égales A, A, A (fig. 1) (deux au moins) per-

pendiculairement à la circonférence desquelles sont disposées des palettes *p, p, p*; elles sont fixées dans cette position à l'aide des *coyaux c, c, c*, implantés dans les jantes elles-mêmes. Les palettes sont des

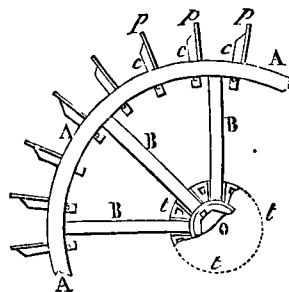


Fig. 1.

madriers de 2 à 3 centimètres d'épaisseur, de 0^m,60 à 0^m,70 de largeur dans le sens du rayon, et d'une longueur égale à l'axe de la roue; elles sont espacées de 0^m,35 à 0^m,40. Les jantes sont reliées

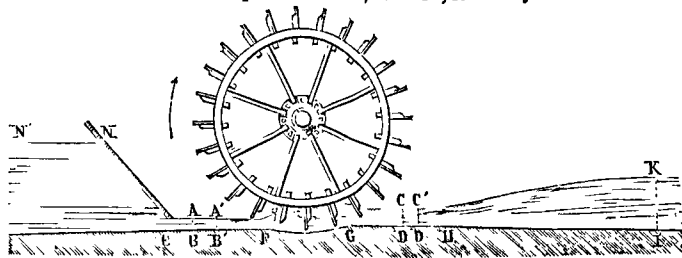


Fig. 2.

à l'axe par des bras B, B, B, au nombre de 6 à 8. Ces bras ne sont point fixés à l'arbre lui-même : celui-ci, qui est à section polygonale, est entouré de colliers en fonte appelés *tourteaux, t, t, t*, en nombre égal à celui des jantes; ces tourteaux sont calés sur l'arbre à l'aide de tasseaux en bois; et c'est dans des rainures ménagées sur le tourteau qu'entrent les extrémités des bras. Le diamètre d'une roue à palettes planes en dessous est ordinairement de 3 à 5 mètres; mais il y en a qui ont jusqu'à 6 et 7 mètres.

L'eau sort du bief supérieur par une vanne inclinée, et arrive sur la roue, sous la forme d'une lame à section rectangulaire de 0^m,15 à 0^m,20 d'épaisseur verticale, en suivant un coursier rectiligne EF (fig. 2) qui n'a que la pente strictement nécessaire pour conserver cette vitesse. Au delà du point F, le coursier devient circulaire, et embrasse l'intervalle de 3 ou 4 aubes successives, en ne laissant entre les palettes et lui que le jeu indispensable. Il en résulte que l'eau qui a choqué une palette, se trouve, au bout du temps θ après lequel chaque aube est remplacée par l'aube suivante, emprisonnée dans une sorte de vase formé par deux palettes consécutives et par le coursier circulaire; elle perd promptement dans ce vase sa vitesse relative et prend la vitesse des aubes. Arrivée en G, elle sort de la roue sous la forme d'une lame à section rectangulaire, ayant la même largeur qu'à l'entrée, mais une hauteur plus grande puisque sa vitesse a diminué. Le coursier reprend à partir du

point G une direction rectiligne, avec la pente strictement nécessaire pour conserver à l'eau sa vitesse de sortie pendant l'espace de 1^m,50 environ. Puis, comme la vitesse de l'eau est encore notablement supérieure à celle qui est nécessaire pour l'écoulement des eaux en aval, le coursier rejoint le fond du bief inférieur par une pente HI réglée de telle sorte que le niveau de la lame d'eau aille regagner le niveau des eaux d'aval soit par un ressaut, soit par une contrepente superficielle, soit le plus souvent par un ressaut suivi d'une contrepente. On verra plus loin les motifs théoriques de cette disposition dont l'idée appartient à M. Bélanger.

Considérons le mouvement du liquide compris entre une section AB faite à une petite distance en amont de la roue et une section CD faite à une petite distance en aval. Supposons que le mouvement permanent ou du moins périodique soit établi, et appliquons au liquide considéré le principe des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (*Voy. ce mot*). Soit A'B'C'D' la position qu'a prise le liquide au bout du temps θ . Appelons h la hauteur AB, l la largeur de la lame d'eau, v la vitesse de l'eau en AB, que l'on peut regarder comme sensiblement commune à tous les filets. Soit h' la hauteur CD, v' la vitesse des filets liquides qui traversent cette section. D'après ce qui a été dit ci-dessus, cette vitesse v' différera très-peu de la vitesse des aubes mesurée en leur milieu. Appelons enfin P le poids du liquide qui s'écoule dans une seconde, et H le poids du mètre cube de ce liquide. L'accroissement de quantité de mouvement du liquide écoulé dans le temps θ sera

$$\frac{P\theta}{g}(v' - v),$$

en prenant pour axe de projection la direction sensiblement horizontale de l'eau. La pression qui s'exerce sur AB est, en négligeant la pression atmosphérique,

$$Hbh \cdot \frac{h}{2};$$

et son impulsion est exprimée par

$$\frac{1}{2} Hbh^2 \theta, \text{ ce qui revient à } \frac{1}{2} P \frac{h}{v} \theta,$$

attendu que $P = Hbh \cdot v$. L'impulsion de la pression exercée sur CD sera exprimée de même par

$$-\frac{1}{2} P \frac{h'}{v'} \theta.$$

L'impulsion de la pesanteur est nulle puisque cette force est verticale; il en est sensiblement de même pour les réactions normales du coursier; on peut négliger son frottement. Il ne reste donc à exprimer que l'impulsion des forces exercées sur l'eau par les palettes. Soit F la somme des projections horizontales de ces réactions, son impulsion sera

$$- F\theta.$$

On aura donc

$$\frac{P\theta}{g}(v' - v) = \frac{1}{2} P\theta \left(\frac{h}{v} - \frac{h'}{v'} \right) - F\theta,$$

d'où

$$F = \frac{P}{g}(v - v') - \frac{1}{2} P \left(\frac{h'}{v'} - \frac{h}{v} \right).$$

La force F peut être considérée comme la résultante des actions exercées sur l'eau par les palettes, et on peut la regarder comme appliquée au centre de l'une d'elles; la vitesse de son point d'applica-

tion est alors v' ; et son travail dans l'unité de temps est Fv' . Ce travail est égal et contraire à celui que l'eau exerce sur la roue; en désignant ce dernier par \mathfrak{E}_m , on aura donc

$$\mathfrak{E}_m = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} P v' \left(\frac{h'}{v'} - \frac{h}{v} \right),$$

ou bien, en mettant h en facteur dans le dernier terme, et remarquant que de l'égalité

$$bhv' = bh'v,$$

on tire

$$\frac{h'}{v} = \frac{v}{v'},$$

$$\mathfrak{E}_m = \frac{P}{g} v'(v - v') - \frac{1}{2} Ph \left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v} \right). \quad [1]$$

Cette relation suppose que le diamètre de la roue est assez grand pour que l'on puisse négliger l'inclinaison des aubes, pendant leur passage sur le coursier circulaire.

La vitesse v de l'eau à son arrivée sur la roue et la hauteur h de la lame sont supposées données; et l'on se propose ordinairement de déterminer la vitesse v' de telle sorte que \mathfrak{E}_m soit le plus grand possible. Si l'on négligeait le second terme du second membre, ce que faisaient généralement les anciens auteurs, on aurait à prendre le maximum de $v'(v - v')$; les deux facteurs v' et $v - v'$ ayant une somme constante v , le maximum du produit répondrait au cas où les deux facteurs sont égaux, ce

qui donnerait $v' = \frac{1}{2} v$; c'est-à-dire qu'il faudrait

que les résistances utiles fussent réglées de manière à faire prendre au centre des palettes une vitesse égale à la moitié de celle que possède l'eau à son arrivée sur la roue. Des expériences faites en petit par l'ingénieur anglais Smeaton, en 1759, ont montré que le maximum d'effet utile, au lieu de correspondre à $v' = 0,50v$, répondait à des valeurs comprises entre $0,34v$ et $0,52v$, soit en moyenne à $0,43v$. Cette différence tient d'une part au terme négligé dans l'équation [1], et d'autre part à ce que le coursier employé par Smeaton étant plan, une portion notable de l'eau s'échappait au-dessous des palettes sans agir sur la roue.

Pour obtenir la vitesse v' qui convient au maximum d'effet utile, il faut évaluer à zéro la dérivée du second membre de l'équation [1] par rapport à v' . Si l'on pose

$$v' = xv, \text{ et } v^2 = 2gH,$$

on met l'équation [1] sous la forme

$$\mathfrak{E}_m = P \cdot \left[2Hx(1 - x) - \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{x} - x \right) \right] \quad [2]$$

et en égalant à zéro la dérivée du second membre par rapport à x , on obtient, par des transformations faciles, l'équation

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{h}{H} \right) x - \frac{1}{8} \cdot \frac{h}{H} = 0 \quad [3]$$

qui n'a qu'une racine positive. Si, par exemple, on suppose

$$H = 1^m,50, \quad h = 0^m,15,$$

d'où

$$\frac{h}{H} = 0,1,$$

on trouve

$$x = 0,553,$$

c'est-à-dire

$$v' = 0,553v.$$

Mais il ne faut pas perdre de vue que l'équation [1] suppose la vitesse de la roue assez lente pour que l'eau ait le temps de perdre sa vitesse relative pendant qu'une palette parcourt le coursier circulaire; il conviendrait donc de donner à v' une valeur inférieure à celle qui se rapporte au maximum du second membre de [2]. Pour

$$v' = \frac{1}{2} v$$

par exemple, on trouverait

$$\mathfrak{E}_m = P \cdot 0^m, 6375;$$

et, en divisant cette quantité par la puissance de la chute (Voy. RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES) qui est ici $P(H+h-h')$ ou $P(1^m, 5 + 0^m, 15 - 0^m, 30)$, c'est-à-dire

$$P \cdot 1^m, 35,$$

on obtient pour le rendement de la roue

$$0, 425.$$

D'après Smeaton la vitesse correspondante au maximum d'effet serait

$$v' = 0, 40 v$$

Mais la petite roue sur laquelle il opérât ne satisfaisait pas, comme nous l'avons déjà dit plus haut, aux conditions de la théorie.

La vitesse v' est généralement assez grande pour satisfaire à la condition du RESSAUT (Voy. ce mot), savoir :

$$N' < \frac{v'^2}{g}.$$

On peut profiter de cette circonstance pour placer la roue et la vanne plus bas, et faire en sorte que la lame qui sort de la roue remonte par un ressaut au niveau du bief d'aval. On calculera par la formule du ressaut la hauteur à laquelle le niveau doit s'élever au-dessus de la lame sortant de la roue; ce sera la quantité dont on pourra abaisser la roue, et par suite la vanne de travail, d'où résultera une augmentation correspondante de chute.

La théorie du ressaut donnera également la vitesse après le ressaut. Elle sera généralement supérieure à celle qui est nécessaire pour écouler les eaux d'aval. On pourra donc faire en sorte qu'après le ressaut l'eau aille regagner le niveau du bief d'aval par une contrepenne superficielle, ce qui permettra d'abaisser encore la roue et la vanne de travail, et d'augmenter ainsi la chute d'une nouvelle quantité. Pour calculer la surface de l'eau dans cette contrepenne on fera usage de l'équation du mouvement varié des eaux dans les canaux (Voy. CANAUX DÉCOUVERTS, équation [9]) transformée en y introduisant la pente du lit.

A l'aide de ces perfectionnements M. Bélanger estime que le rendement d'une roue en dessous à palettes planes peut être porté jusqu'à 0,57. — En général les roues de cette espèce ne donnent guère que 0,30; mais elles sont mal établies, et sans égard aux indications de la théorie. Il faut dire que, même dans d'aussi mauvaises conditions, ces roues rendent encore des services. Elles sont faciles à construire et à réparer, peu coûteuses, peu embarrassantes; et elles peuvent marcher à de grandes vitesses, ce qui permet de simplifier les transmissions dans beaucoup de cas.

Ces roues conviennent aux petites chutes, jusqu'à 1^m,50 environ.

Les anciens constructeurs pratiquaient, un peu

au delà de l'aplomb de l'axe de la roue, un approfondissement brusque pour faciliter l'écoulement de l'eau; il est aisé de voir que c'était une faute grave, qui faisait perdre une portion notable de la chute.

(Voy. le Cours d'Hydraulique de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, et le Cours de Mécanique appliquée de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

ROUES HYDRAULIQUES, roues à axe horizontal ou à axe vertical servant de RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES (Voy. ce mot), ou employées au contraire à élever l'eau (Voy. ROUES ÉLEVATOIRES).

ROUES PENDANTES, roues hydrauliques à axe horizontal et à aubes planes mues par un courant d'une largeur indéfinie; elles sont ordinairement portées par des bateaux, d'où le nom de *roues pendantes*; cependant on les établit quelquefois sur pilotis. La théorie exacte de ces roues serait fort difficile dans l'état actuel de la science; et l'on est obligé de se contenter d'un aperçu théorique. Soit m la masse d'eau qui agit sur la roue dans l'unité de temps, et $m\theta$ celle qui agit dans le temps très-court θ . Soit v la vitesse du courant, et u celle d'une palette, mesurée au centre de la partie plongée; l'accroissement (négatif) de quantité de mouvement du liquide considéré sera exprimé approximativement par

$$m\theta(u-v).$$

Soit F la résultante, supposée horizontale, des actions exercées par la roue sur le liquide; son impulsion sera

$$-F\theta.$$

En appliquant le principe des QUANTITÉS DE MOUVEMENT (Voy. ce mot), et négligeant les actions du reste du courant sur le liquide dont on considère le mouvement, on aura

$$m\theta(u-v) = -F\theta, \text{ d'où } F = m(v-u).$$

Le travail de la force F dans l'unité de temps, lequel est égal au travail \mathfrak{E}_m exercé par le liquide sur la roue, aura donc pour valeur

$$\mathfrak{E}_m = Fu = m(v-u)u.$$

Si l'on admet avec M. Poncelet que la masse m soit proportionnelle à la vitesse v du courant et à l'aire A de la portion immergée des aubes, on pourra écrire, en désignant par k un coefficient numérique, et par Π le poids du mètre cube d'eau,

$$m = \frac{k\Pi A v}{g}$$

et par conséquent

$$\mathfrak{E}_m = \frac{k\Pi H v}{g} (v-u)u.$$

La vitesse v étant donnée, on aurait le maximum de \mathfrak{E}_m en prenant

$$u = \frac{1}{2} v,$$

ce qui donnerait

$$\mathfrak{E}_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{k\Pi A v^3}{g}.$$

Les expériences de Bossut, de Boistard, de M. Christian, de M. Poncelet, ne confirment pas complètement ce résultat, et indiquent pour la vitesse convenant au maximum d'effet utile

$$u = 0,4.v.$$

En même temps elles montrent que la valeur du

coefficient k qui satisfait le mieux aux faits observés est

$$k = \frac{5}{6},$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_m = \frac{5}{6} \cdot 0,24 \cdot \frac{\Pi A v^3}{g} = 0,2 \cdot \Pi A \frac{v^3}{g}.$$

Le diamètre des roues pendantes varie de 4 à 5 mètres ordinairement; le nombre des aubes est généralement de 12, et leur hauteur est de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{4}$ du rayon; elles doivent plonger entièrement,

de manière cependant que leur bord intérieur soit de 4 à 5 centimètres au plus au-dessous de la surface de l'eau.

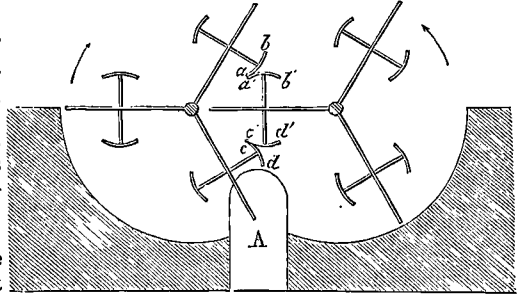
On augmente un peu l'effet utile de ces roues en inclinant les aubes de 22 à 25 degrés sur le rayon du côté d'amont, et en leur donnant un rebord latéral. L'effet est encore augmenté si la roue est comprise entre deux bateaux assez rapprochés pour former une sorte de coursier dans lequel le courant ne peut passer sans agir sur la roue.

(Voy. *la Cours de Mécanique* de M. Poncelet à l'École de Metz, les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées.)

ROUES PÉNITENTIAIRES, roues servant de récepteurs pour le travail de l'homme. Une roue pénitentiaire est une roue à axe horizontal, composée de deux couronnes circulaires dans lesquelles sont emboîtées des aubes planes dirigées vers l'axe, ou faisant un petit angle avec le rayon. A la hauteur de l'axe est établi un plancher sur lequel se placent les hommes qui doivent faire mouvoir la roue. Ils posent les mains sur une barre d'appui, et agissent avec les pieds sur les aubes comme s'ils montaient un escalier; ils font ainsi tourner la roue, et peuvent par son intermédiaire opérer un travail quelconque. Le nom de ces roues leur vient de ce qu'elles sont employées en Angleterre dans les maisons pénitentiaires. On a constaté que ces roues (*treadmill* en anglais) exerçaient à la longue une influence fâcheuse sur la santé des prisonniers. Cependant elles ont été employées en France par le génie militaire, dans des travaux d'épuisement, sans que la santé des soldats en ait paru atteinte. Mais le travail était de plus courte durée que dans les prisons (Voy. **MOTEURS ANIMÉS**).

ROUES PNEUMATIQUES, nom donné à divers ventilateurs, et particulièrement au ventilateur de M. Fabry. Il se compose de deux roues égales, à axe horizontal, portant chacune trois ailes, et tournant dans des coursiers circulaires embrassant à peu près le tiers d'une circonférence chacun. Ces deux roues tournent en sens contraire, et leurs ailes chassent au dehors l'air contenu entre elles et les coursiers, tandis qu'une nouvelle quantité d'air afflue par le canal A dans lequel on veut produire l'aérage. Les ailes approchent le plus possible des coursiers afin d'éviter les fuites. De plus, chacune d'elles porte une pièce en fonte terminée par une surface cylindrique ab , qui a la même largeur dans le sens de l'axe des roues que les coursiers eux-mêmes. Les dimensions de ces pièces et le rayon des surfaces cylindriques qu'elles portent sont déterminées de telle sorte que le contact des sur-

faces appartenant aux deux roues, comme on le voit en ab , $a'b'$ et cd , $c'd'$ intercepte la communication entre l'air venant du canal A et l'air extérieur, pendant toute la durée du mouvement des roues, afin d'empêcher les rentrées d'air. Les ailes ont 1^m,70 de long et 2^m de large; le volume d'air extrait à chaque tour des roues est d'environ 23 à 24 mètres cubes, sauf les fuites qu'on ne peut évi-



ter. Le rendement moyen de ces machines paraît être de 0,50. (Voy. pour plus de détails, le *Traité de la Chaleur* de M. Péclet, tome 1^{er}.)

ROUES PONCELET, roues hydrauliques à axe horizontal et à aubes courbes, recevant l'eau à la partie inférieure. C'est en 1827 que M. Poncelet, frappé du peu de rendement des roues en dessous à palettes planes (Voy. **ROUES EN DESSOUS**), a eu l'idée de remplacer ces palettes par des aubes courbes. L'idée mère de ce système de roues est très-simple. Concevons une aube courbe AB (fig. 1) tangente

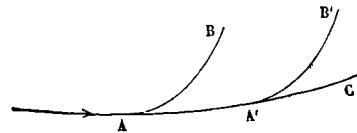


Fig. 1.

en A à la circonférence extérieure AC de la roue; et imaginons qu'une lame d'eau très-mince se présente en A, dans la direction de la tangente commune à l'aube et à la circonférence AC, avec une vitesse v . Soit u la vitesse avec laquelle l'extrémité A de l'aube se meut, dans le sens AA' sur la circonférence AC, supposée d'un très-grand rayon. La vitesse relative de l'eau par rapport à l'aube sera la différence $v - u$; et c'est avec cette vitesse relative que l'eau s'introduira sur l'aube. Si l'on néglige le frottement, l'eau s'élèvera sur cette aube

à une hauteur représentée par $\frac{(v - u)^2}{2g}$; et si rien

ne gêne son mouvement descendant, elle reviendra à l'extrémité A, qui pendant ce temps sera transportée en A', avec la vitesse $v - u$ qu'elle avait au commencement de son ascension, mais dirigée en sens contraire. La vitesse absolue de l'eau arrivée en A' sera donc la différence entre cette vitesse relative $v - u$ et la vitesse u de l'aube, attendu que l'arc AA' étant très-petit et son rayon très-grand, on peut regarder l'aube comme s'étant transportée parallèlement à elle-même suivant la tangente en A. La vitesse absolue conservée par

l'eau à sa sortie étant ainsi $v-u-u$ ou $v-2u$, la puissance vive qu'elle conserve est $p \frac{(v-2u)^2}{2g}$, en appelant p le poids de l'eau introduite; la puissance vive initiale était d'ailleurs $\frac{pv^2}{2g}$, la puissance vive perdue, égale au travail exercé par la roue sur l'eau, et par conséquent aussi au travail exercé par l'eau sur la roue, est

$$\frac{pv^2}{2g} - \frac{p(v-2u)^2}{2g} \quad \text{ou} \quad \frac{2p}{g}(v-u)u.$$

Le maximum de ce travail répond à $u = \frac{1}{2}v$, et a pour valeur $\frac{pv^2}{2g}$, c'est-à-dire la puissance vive initiale que possédait le liquide. On aurait donc ainsi réalisé les deux conditions principales que doit remplir un RÉCEPTEUR HYDRAULIQUE (Voy. ce mot); l'eau entrerait sans choc, sortirait avec une vitesse nulle, puisque $v-2u$ s'annule pour $u = \frac{1}{2}v$; et toute la puissance vive possédée par l'eau à son arrivée sur la roue aurait été transmise au récepteur.

Mais cet aperçu théorique repose sur des hypothèses qui ne peuvent se réaliser. En premier lieu, il est impossible de rendre l'aube tangente en A à la circonférence extérieure de la roue et à la direction de la lame d'eau; l'eau ne s'y introduirait pas, parce qu'elle en serait empêchée par l'aube précédente. Pour que l'eau puisse s'introduire dans la roue, il faut que sa vitesse relative fasse un certain angle avec la circonférence extérieure. On a été conduit dans la pratique à donner à cet angle une valeur de 30° . — En second lieu, la vitesse de l'eau à sa sortie ne peut être rendue nulle; cela résulte de ce que l'aube ne peut être tangente à la circonférence extérieure. — Enfin l'eau en descendant le long de l'aube est gênée par celle qui se présente pour monter, et il en résulte nécessairement une agitation, un travail moléculaire qui ne peut être négligé. — La théorie exacte de la roue Poncelet serait à peu près impossible dans l'état actuel de la science. Nous nous contenterons de décrire les dispositions adoptées par l'auteur, et les résultats fournis par l'expérience. La roue est formée de deux couronnes annulaires AAA (fig. 2), entre lesquelles sont emboîtées des aubes courbes en bois ou plus généralement en tôle. Les couronnes sont reliées par des bras à un arbre horizontal O. L'eau sort du bief supérieur par une vanne inclinée; les parois latérales de l'orifice sont évasées, comme la figure le montre en plan, pour éviter toute contraction; en sorte que le coefficient de la dépense peut s'élever à 0,75 ou même 0,80. L'orifice a la même largeur que la roue, et la levée de la vanne est réglée de manière à donner une lame d'eau de 0^m,20 à 0^m,30 de hauteur pour les chutes au-dessous de 1^m,50, et de 0^m,15 à 0^m,10 seulement pour les chutes de 2^m et au-dessus. Les parois latérales ou *bajoyers* du coursier présentent une petite retraite dans laquelle vient se loger la roue, de telle sorte que toute l'eau fournie par le bief supérieur est obligée d'entrer dans les aubes. Un peu au delà de

l'aplomb de l'axe, ces parois s'évasent de nouveau, pour faciliter l'écoulement de l'eau qui a agi sur la roue. Depuis l'orifice de la vanne jusqu'en un certain point C que nous déterminerons plus loin, le

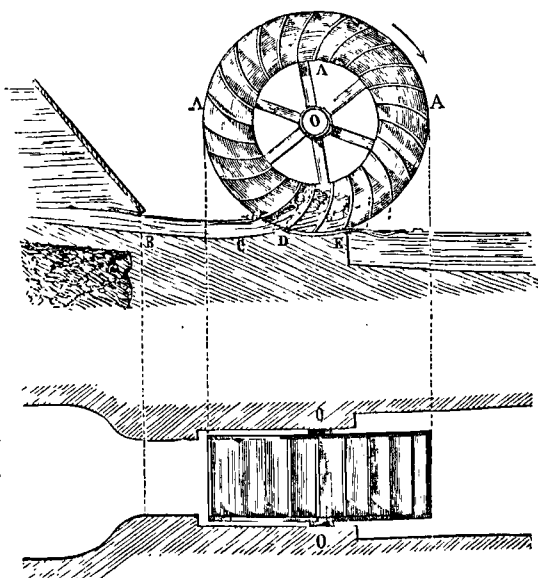


Fig. 2.

fond du coursier est rectiligne, avec une pente de $\frac{1}{10}$ environ, nécessaire pour conserver à l'eau sa vitesse. Au-dessous de l'axe et sur une longueur un peu supérieure au double de l'intervalle de deux aubes consécutives, le fond du coursier DE est circulaire, et embotte la couronne, avec un jeu de 1 centimètre à 1 centimètre $\frac{1}{2}$. De C en D le coursier affecte la forme d'une courbe que nous ferons connaître tout à l'heure. Au point E est pratiqué un approfondissement brusque, pour faciliter l'écoulement des eaux. Ce point E doit être au niveau des eaux du bief d'aval.

La forme des aubes est arbitraire; elle doit seulement satisfaire à deux conditions. Il faut d'abord, comme on l'a vu, que le premier élément de l'aube fasse un angle de 30° avec la circonférence extérieure de la roue. Il faut en outre, pour que l'eau ne soit pas projetée à l'intérieur de la roue, en premier lieu que la couronne ait une épaisseur suffisante (M. Poncelet l'a fixée au tiers de la hauteur de chute), en second lieu que le dernier élément de l'aube soit perpendiculaire à la circonférence intérieure de la couronne. On donne ordinairement à l'aube la forme d'un arc de cercle; le tracé suivant remplit les conditions ci-dessus énoncées. Soit aa (fig. 3) la circonférence extérieure de la couronne, bb sa circonférence intérieure, et A un point par lequel doit passer une aube. Soit O le centre des deux cercles; soit AC le prolongement de la droite menée par le point A de manière à faire avec la tangente en A un angle de 30° . Joignons OA, qui coupera la circonférence intérieure en un point B. Prenons $AC = OB$. Du point C comme centre avec OA pour rayon, décrivons un arc

qui coupe la circonférence intérieure en un point D. Menons AI perpendiculaire à AC, et DI tangent en D ou perpendiculaire à OD. Du point de rencontre I de ces deux droites comme centre décrivons enfi

suivront la courbure de la courbe CD, c'est-à-dire qu'elles auront leurs normales communes. Cela posé, soit mA (fig. 5) l'une de ces lames élémentaires au moment où elle va entrer dans la roue. La di-

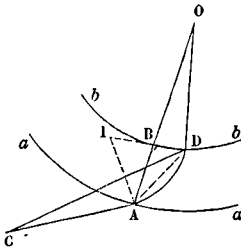


Fig. 3.

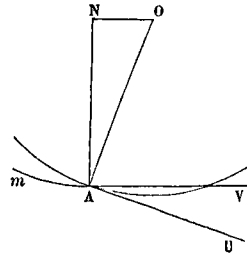


Fig. 5.

l'arc AD; ce sera la forme de l'aube. En effet, les triangles CAD et ODA étant égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles CAD et ODA sont égaux; et si l'on en retranche un angle droit, les restes IAD et IDA sont égaux. Le triangle AID est donc isocèle, et l'arc décrit du point I comme centre avec IA pour rayon passe par le point D. De plus, cet arc est tangent à AC et à OD; c'est-à-dire qu'il fait un angle de 30° avec la circonférence extérieure de la couronne, et un angle droit avec la circonférence intérieure. Le nombre des aubes est ordinairement de 36 pour les roues de 3 à 4 mètres de diamètre, et de 48 pour celles de 6 à 7 mètres.

L'expérience a montré que la vitesse qu'il faut donner à la circonférence extérieure de la roue pour obtenir le maximum d'effet n'est pas 0,50v, mais bien 0,55v. Avec cette donnée, et connaissant l'angle que l'aube doit faire avec la circonférence extérieure, on peut déterminer l'angle sous lequel la lame d'eau doit rencontrer la roue. Soit AU (fig. 4)

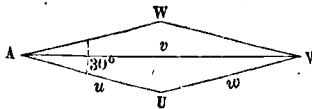


Fig. 4.

une droite représentant la vitesse u de la roue, et AW une droite faisant avec AU un angle de 30° et représentant en grandeur la vitesse relative avec laquelle l'eau s'introduit sur l'aube, vitesse que nous désignerons par w. Si sur les droites AU et AW on construit un parallélogramme, la diagonale AV de ce parallélogramme représentera, en grandeur et en direction, la vitesse absolue v avec laquelle l'eau arrive sur la roue. Dans le triangle AUV on connaît AV = v, AU = 0,55v, et l'angle en U qui est le supplément de 30°, c'est-à-dire 150°; on peut donc résoudre ce triangle, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \text{angle VAU} &= 14^{\circ} 2' 20'' \text{ environ,} \\ \text{angle AVU} = \text{VAW} &= 15^{\circ} 57' 40'' \end{aligned}$$

et $w = 0,485v$.

La connaissance de l'angle VAU permet de déterminer la courbe CD (fig. 2) que doit affecter le fond du coursier à l'approche de la roue. On peut concevoir, en effet, que la lame d'eau soit décomposée en lames élémentaires infiniment minces qui toutes

rection de son dernier élément est celle de la vitesse AV; et par conséquent la normale AN à ce dernier élément fait avec le rayon AO un angle égal à l'angle VAU, c'est-à-dire un angle de 14° 2' 20" environ; et si l'on abaisse du centre O une perpendiculaire ON sur cette normale, on voit que cette normale est tangente au cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à

$$ON = OA \sin(14^{\circ} 2' 20'').$$

Mais, d'après ce qui a été admis ci-dessus, cette normale à la courbe mA est en même temps normale au fond du coursier; donc la courbe que doit affecter ce coursier est telle que toutes ses normales doivent être tangentes au cercle ON; cette courbe est donc une développante du cercle ON. On la termine (fig. 2) en un point C tel que la normale en ce point passe par le point de rencontre de la circonférence extérieure de la roue avec le filet supérieur de la lame d'eau.

L'eau une fois engagée sur l'aube courbe, y monte à une hauteur qui, abstraction faite du frottement, est représentée par $\frac{w^2}{2g}$ ou $(0,485)^2 \frac{v^2}{2g}$,

ou enfin $0,235 \frac{v^2}{2g}$, c'est-à-dire à une hauteur moindre que le quart de la hauteur due à la vitesse v. Il suffirait donc que l'épaisseur de la couronne fût égale à $0,25 \frac{v^2}{2g}$, ou à peu près au quart de la chute; mais, pour plus de sécurité, M. Poncet prescrit de faire cette épaisseur égale au tiers de la chute.

Lorsque l'eau est descendue au bas de l'aube, elle a acquis une vitesse relative égale à w en sens contraire; et il est facile de calculer sa vitesse absolue v'.

Soit, en effet, A' (fig. 6) la position qu'a prise

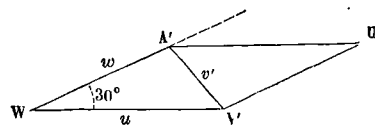


Fig. 6.

l'extrémité inférieure de l'aube. Soit A'W = w la vitesse relative de l'eau à sa sortie, A'U = v la vitesse de la circonférence de la roue; la diagonale

A'V' du parallélogramme construit sur ces deux vitesses représentera en grandeur et en direction la vitesse v'. Or, dans le triangle A'WV' on connaît A'W = 0,485v, l'angle A'WV' égal à 30°, et WV' = A'U = 0,55v. On aura donc

$$v'^2 = v'^2 \left[(0,485)^2 + (0,55)^2 - 2 \cdot 0,485 \cdot 0,55 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \right]$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$v'^2 = 0,0757v^2,$$

d'où
$$P \cdot \frac{v'^2}{2g} = P \cdot 0,0757 \frac{v^2}{2g} :$$

c'est la puissance vive possédée par l'eau à sa sortie, et qui se perd dans le bief d'aval. La vitesse v' est en effet presque verticale ; et sa valeur est trop faible d'ailleurs pour qu'on puisse songer à l'utiliser pour un ressaut ou pour une contrepente. De là l'obligation de pratiquer un peu en aval de l'aplomb de l'axe de la roue un approfondissement brusque et un élargissement qui facilitent l'écoulement des eaux du bief inférieur.

D'après M. Morin, une roue Poncelet, établie dans les conditions indiquées par son auteur, peut donner un rendement moyen de 0,60, bien supérieur, comme on voit, à celui des roues en dessous à palettes planes. Les roues Poncelet offrent, comme les roues à palettes planes, l'avantage, souvent précieux, de pouvoir marcher à de grandes vitesses. Elles conviennent aux petites chutes, jusqu'à 1^m,50 ; et dans ce cas leur rendement peut aller jusqu'à 0,65 ; le rendement diminue quand la chute est supérieure à 1^m,50.

Quoique, d'après les indications de M. Poncelet, le niveau du bief d'aval doive coïncider avec l'extrémité du coursier, les roues en dessous à aubes courbes peuvent au besoin marcher noyées dans le bief jusqu'à une hauteur égale à celle de la lame fluide, et elles donnent encore dans ce cas défavorable un rendement de 0,40.

Nous n'avons point parlé de la largeur de la roue dans le sens de son axe ; cette largeur se déduit de la dépense du courant ; connaissant, d'après la hauteur de la chute, celle de la lame d'eau sortant de la vanne, on détermine la largeur du canal, et par suite celle de la roue, de manière à débiter dans une seconde le volume que le bief d'amont peut fournir.

(Voy. le *Mémoire* de M. Poncelet sur les roues à aubes courbes, 1827 ; le *Cours d'Hydraulique* de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures ; le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, et les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin.)

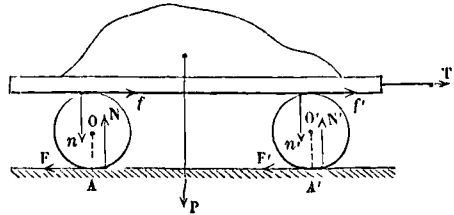
ROULEAU. VOY. MACHINES AGRICOLES.

ROULEAU DE TENSION, cylindre qu'on fait agir par son poids sur une courroie sans fin pour en augmenter la tension (Voy. COURROIE SANS FIN, EMBRAYAGE).

ROULEAUX, pièces de bois cylindriques que l'on place sous un madrier chargé d'un poids considérable, pour en faciliter le transport horizontal. Le calcul de l'effort horizontal T qu'il faut exercer pour opérer le transport par ce moyen est une application de la théorie du frottement de roulement (Voy. ROULEMENT).

Soit P le poids du madrier et de sa charge ; soient O et O' les axes des deux rouleaux. La réaction exercée par le sol sur le premier rouleau peut

se décomposer en deux forces : l'une horizontale F, l'autre verticale N agissant à une petite distance δ en avant de l'axe O ; la réaction du madrier sur ce même rouleau peut de même se décomposer en



une force horizontale f et une force verticale n agissant à une petite distance ε en arrière de l'axe O. On aura des forces analogues agissant sur le second rouleau ; nous les représenterons par les mêmes lettres accentuées. Nous désignerons par r le rayon des rouleaux ; leur poids peut être négligé vis-à-vis des réactions auxquelles ils sont soumis. Nous écrirons qu'en vertu de l'équilibre du premier rouleau, la somme des projections des forces qui le sollicitent, sur un axe vertical et sur un axe horizontal, est nulle pour chacun de ces axes ; et que la somme de leurs moments par rapport à l'axe O est aussi égale à zéro. On trouve de cette manière :

$$F = f, N = n, \text{ et } (F + f)r = N\delta + n\epsilon ; [1]$$

cette dernière se réduit en vertu des deux premières à

$$2Fr = N(\delta + \epsilon). [2]$$

On trouvera de même pour le second rouleau

$$F' = f', N' = n' \text{ et } 2F'r = N'(\delta + \epsilon). [3]$$

En considérant maintenant l'équilibre du système total et remarquant que les réactions f, n, f', n' disparaissent attendu que les rouleaux exercent sur le madrier des réactions égales et contraires, on obtient

$$F + F' = T, N + N' = P. [3]$$

D'ailleurs des équations [2] et [3] relatives aux moments, on tire

$$2(F + F')r = (N + N')(\delta + \epsilon).$$

Par conséquent il vient, en remplaçant F + F' et N + N' par leurs valeurs,

$$2Tr = P(\delta + \epsilon),$$

d'où

$$T = P \cdot \frac{1}{2} (\delta + \epsilon) / r. [4]$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$P = 2000^k, r = 0^m, 20, \delta = 0,03 \sqrt{r}$$

et

$$\epsilon = 0,001 \sqrt{r}$$

(Voy. ROULEMENT), on trouvera

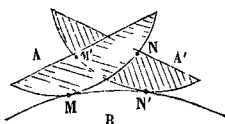
$$T = 2000^k \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,031 \sqrt{0,20} = \frac{31^k}{\sqrt{0,20}} = 69^k, 32.$$

Ce mode de transport exige l'emploi de trois rouleaux au moins : lorsque, par suite du mouvement du madrier, son extrémité postérieure est arrivée à quelques décimètres du sommet du rouleau O, on engage un troisième rouleau O'' en avant, le transport s'effectue au moyen des rouleaux O' et O'', et l'on enlève le rouleau O ; lorsque

l'extrémité postérieure du madrier est arrivée près du rouleau O' , on engage le rouleau O sous l'extrémité antérieure, le transport se fait à l'aide des rouleaux O' et O , et l'on enlève le rouleau O' , que l'on engage bientôt en avant, et ainsi de suite.

Il est utile de remarquer que le madrier a une vitesse double de celle des axes des rouleaux; car, pour un tour d'un rouleau par exemple, celui-ci avance de $2\pi r$ sur le sol, tandis que le madrier avance de $2\pi r$ par rapport au rouleau; le madrier avance donc de 2 fois $2\pi r$ par rapport au sol.

ROULEMENT, l'une des espèces de mouvements relatifs de deux corps en contact. Ne considérons d'abord qu'un seul point de contact, M ; désignons par A et B les deux corps pour faciliter le langage;



et supposons que l'on ait réduit le corps B au repos en donnant à tout le système un mouvement commun égal et contraire à celui de B , ce qui ne change pas le mouvement relatif. Soit MN la courbe lieu des points de contact successifs sur la surface du corps mobile A , et MN' la courbe lieu des points de contact sur la surface du corps fixe B . Il y aura roulement si les éléments successifs de la courbe MN viennent s'appliquer sur les éléments correspondants de la courbe MN' , chaque point de contact étant sur l'axe instantané de rotation (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ) du corps mobile. Cette condition exige que les arcs MN et MN' soient égaux. En supposant que le contact entre une roue de wagon et le rail ne se fasse que par un seul point, on aurait un exemple du mouvement relatif que nous venons de définir. Les galets qui guident le mouvement des *plaques tournantes* dans les gares de chemins de fer, en offrent un autre exemple, dans lequel le mouvement est circulaire.

Si la condition dont nous avons parlé ci-dessus n'est pas remplie, c'est-à-dire si les arcs MN et MN' ne sont pas égaux, il y a à la fois roulement et GLISSEMENT (Voy. ce mot).

Le roulement peut se faire par plusieurs points de contact simultanés; mais il est nécessaire alors que ces points de contact soient en ligne droite, puisqu'ils doivent se trouver sur l'axe instantané de rotation. C'est ce qui arrive quand un cylindre roule sur un plan ou sur un autre cylindre parallèle; les génératrices du cylindre mobile viennent coïncider tour à tour avec ce plan ou avec les génératrices du cylindre fixe, la génératrice de contact devenant chaque fois l'axe instantané de rotation. Il en est de même quand un cône roule sur un plan ou sur un cône ayant le même sommet; c'est toujours la génératrice de contact qui est l'axe instantané.

Lorsque deux corps sont ainsi constamment en contact par une droite, il peut arriver que le roulement soit accompagné d'un glissement longitudinal parallèlement à cette droite. Ce cas constitue un genre particulier de *glissement mixte*, qu'on rencontre dans quelques cas, et particulièrement

dans les engrenages hyperboloïdes (Voy. GLISSEMENT).

ROULEMENT (RÉSISTANCE AU), résistance que les corps cylindriques éprouvent lorsqu'ils roulent sur une surface plane, ou, plus généralement, lorsqu'ils roulent les uns sur les autres. Cette résistance, à laquelle on a aussi donné le nom impropre de *frottement de roulement*, est due à ce que, en vertu de la compressibilité des corps en contact, le cylindre roulant pénètre toujours d'une petite quantité dans le corps sur lequel il roule, et rencontre ainsi en avant de lui une saillie qu'il est obligé de refouler pour continuer son mouvement. La résistance au roulement est d'ailleurs très-faible si on la compare au frottement (Voy. FROTTEMENT); mais malheureusement on possède peu d'expériences précises et complètes sur ce sujet. Coulomb est le premier qui ait cherché à déterminer la valeur de cette résistance. Dans des recherches préliminaires, faites au sujet de la RAIDEUR DES CORDES (Voy. ce mot), il a fait rouler des cylindres en bois de gaïac et en bois d'orme sur deux pièces de chêne bien dressées, placées horizontalement, et parallèlement. Le rouleau mis en expérience était placé transversalement. On le chargeait au moyen de cordelettes très-flexibles portant à leurs extrémités des poids égaux. Une autre cordelette fixée au rouleau, et s'y enroulant, portait à son extrémité libre un poids moteur que l'on augmentait graduellement jusqu'à ce que le rouleau commençât à prendre un mouvement très-lent; ce poids moteur donnait la mesure de la résistance cherchée. En effet, soit O (fig. 1) l'axe du rouleau, A l'arête de

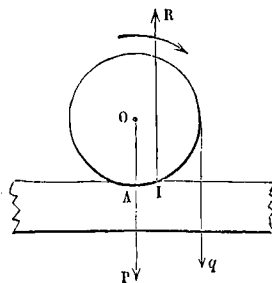


Fig. 1.

contact géométrique, P le poids du rouleau et de sa charge, r le rayon du rouleau et q le poids moteur. Le cylindre ayant un mouvement très-lent peut être regardé comme étant en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent, savoir les poids P , q et les réactions des pièces de chêne, que l'on peut, à cause de la symétrie, considérer comme égales et parallèles, et remplacer en conséquence par une force unique R parallèle et égale à leur somme. Pour l'équilibre, il faut que la force R soit égale et opposée à la résultante des forces P et q ; il faut donc qu'elle soit verticale, et qu'on ait

$$R = P + q.$$

De plus son point d'application I doit être situé à une petite distance $AI = \delta$ en avant de l'arête suivant laquelle devrait se faire le contact géométrique si le rouleau ne pénétrait pas dans les pièces de chêne qui le supportent. Si l'on prend

les moments des forces par rapport au point A, on aura donc

$$R\delta = qr \quad [1]$$

ou

$$(P + q)\delta = qr,$$

d'où

$$q = P \cdot \frac{\delta}{r - \delta}. \quad [2]$$

Si la distance δ était connue d'avance pour les diverses matières qu'on peut avoir à faire rouler l'une sur l'autre, la relation [2] donnerait le poids moteur q nécessaire pour entretenir le mouvement uniforme du rouleau, et vaincre par conséquent la résistance au roulement; ce serait la mesure de cette résistance.

Coulomb avait cru pouvoir conclure de ses expériences que, pour les mêmes substances et pour le même rayon, le rapport $\frac{q}{P + q}$ reste constant, d'où

il résulterait que la distance δ est constante pour un même rouleau, indépendamment de la charge; cela n'est point vraisemblable. Quand la charge augmente, le rouleau pénètre plus profondément dans la surface qui le porte, et le point d'application de la réaction de cette surface doit évidemment s'éloigner de plus en plus de l'arête de contact géométrique. Il avait cru reconnaître aussi que pour des rouleaux de rayons différents le rap-

port $\frac{q}{P + q}$ varie en raison inverse du rayon, ce qui supposerait δ constant. Cela est inadmissible; car, quelle que soit la valeur constante qu'on attribue à δ , on pourrait toujours imaginer un rouleau d'un rayon moindre que δ ; dès lors le point d'application de la réaction R serait en dehors du cylindre, ce qui serait absurde.

M. Dupuit, dans son *Essai sur le tirage des voitures*, publié en 1837, suppose la distance δ proportionnelle à la racine carrée du rayon du cylindre; et il pose

$$\delta = c\sqrt{r},$$

en donnant pour la constante c les valeurs suivantes :

Bois sur bois.....	$c = 0,0011$
Fer sur bois humide.....	$c = 0,0010$
Fer sur fer.....	$c = 0,0007$
Roues sur chaussées en empierrement.....	$c = 0,03$

Mais il ne tient pas compte des variations qui peuvent dépendre de la charge.

M. Morin, à la suite des expériences qu'il a exécutées à Vincennes et au Conservatoire des arts et métiers, avec des cylindres de bois roulant sur du bois, du cuir, du plâtre, s'est rallié à l'opinion de Coulomb, sans ébranler la conviction de M. Dupuit. Mais ses expériences ont montré que la résistance dépend de la largeur des bandes sur lesquelles s'opère le contact; la résistance éprouvée par un cylindre de chêne roulant sur des bandes de peuplier a été à peu près doublée en réduisant au quart la largeur des bandes.

On voit combien il serait utile que des expériences précises et complètes, tenant compte de tous les éléments du problème, fussent entreprises sur un sujet si important pour les applications. En

attendant, on peut se servir de la formule de M. Dupuit.

Au lieu de provoquer le mouvement à l'aide d'un poids moteur, on peut le déterminer par une traction horizontale, ce qui se rapproche davantage des conditions de la pratique. Dans ce cas la réaction R n'est plus verticale. Soient en effet (fig. 2) T la force

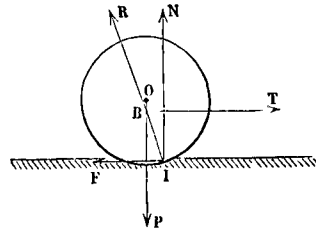


Fig. 2.

de traction qu'il faut exercer dans le sens horizontal pour entretenir le roulement uniforme, et P le poids du rouleau et de sa charge. Ces deux forces, que nous supposons situées dans la section droite du rouleau, faite à égale distance de ses deux bases; se rencontreront en un point B situé à une distance h du point A, et se composeront en une seule, qui devra, pour l'équilibre, être égale et opposée à la réaction R. Cette réaction passe donc par le point B, et elle est dirigée dans l'angle $AB'I$ et dans son opposé; son point d'application I est donc encore situé en avant de l'arête A suivant laquelle s'opérerait le contact géométrique s'il n'y avait pas pénétration. La force R se décompose en deux autres : l'une verticale N, l'autre horizontale F; et l'on doit avoir pour l'équilibre

$$N = P \text{ et } F = T \quad [3]$$

et, en prenant les moments par rapport au point I, ce qui fait disparaître le moment de R,

$$Th = P\delta,$$

d'où l'on tire

$$T = P \cdot \frac{\delta}{h}. \quad [4]$$

Si donc la distance $AI = \delta$ était connue, on déterminerait aisément la force de traction T nécessaire pour entretenir le roulement uniforme. On admet que cette distance δ est la même dans le cas d'une force motrice horizontale que dans le cas d'une force motrice verticale.

Mais il y a de plus ici une condition à remplir : il faut qu'il n'y ait pas glissement. Or, si f désigne le coefficient de frottement, il faut pour cela qu'on ait

$$F \text{ ou } T < fN,$$

c'est-à-dire

$$T < fP$$

ou, en vertu de l'équation [4],

$$P \frac{\delta}{h} < fP,$$

d'où enfin

$$h > \frac{\delta}{f}.$$

Cette condition est ordinairement remplie. Mais si la force T s'exerçait très-près du point A, il pourrait y avoir glissement.

Voyez l'ouvrage de M. Dupuit cité plus haut, les

Leçons de Mécanique pratique de M. Morin, et le Cours de Mécanique appliquée professé à l'École centrale par M. Bélanger.

— ROULETTE, courbe engendrée par un point invariablement lié à une courbe mobile qui roule sans glisser sur une courbe fixe. La propriété fondamentale des roulettes consiste en ce que la normale en un point quelconque de la roulette passe par le point de contact de la courbe mobile qui l'engendre avec la courbe fixe. Pour le démontrer on considère d'abord un polygone $abcde$ (fig. 1) qui

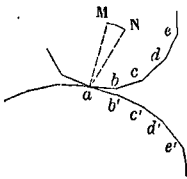


Fig. 1.

roule sur un autre polygone $ab'c'd'e'$ ayant ses côtés respectivement égaux à ceux du premier. Si l'on analyse le roulement, on voit qu'il s'effectue de la manière suivante : le polygone mobile tourne d'abord autour du sommet commun a jusqu'à ce que le côté ab vienne s'appliquer sur son égal ab' ; la rotation se fait ensuite autour du sommet b' devenu commun, jusqu'à ce que le côté bc vienne s'appliquer sur son égal $b'c'$; puis la rotation s'effectue autour du sommet c' devenu commun, jusqu'à ce que le côté cd vienne s'appliquer sur son égal $c'd'$; et ainsi de suite. Le roulement se compose donc d'une série de rotations, dont chacune s'effectue autour du point commun aux deux polygones. Si M désigne un point quelconque invariablement lié au polygone mobile, on voit que, pendant que la rotation s'effectue autour du point a , il décrit un arc de cercle MN qui a pour centre ce point a ; et que par conséquent la normale à l'arc décrit n'est autre chose que le rayon Ma .

Si maintenant on considère une courbe mobile ad roulant sur une courbe fixe ad' (fig. 2), on peut les

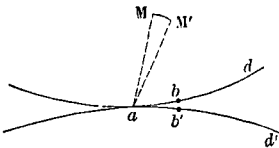


Fig. 2.

regarder comme des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits respectivement égaux, et l'on peut dès lors leur appliquer ce qui vient d'être dit de deux polygones. Au moment où les deux courbes se touchent en un point a , le roulement de la courbe mobile se réduit à une rotation infiniment petite autour du point commun a . Il en résulte qu'un point quelconque M invariablement lié à la courbe mobile décrit au moment considéré un arc de cercle infiniment petit MM' ; et que par conséquent la normale à l'élément décrit est précisément le rayon Ma . Ainsi le roulement se compose d'une série de rotations infiniment petites autour des points de contact successifs des deux courbes; et,

dans chaque position de la courbe mobile, la normale à l'élément de la roulette, décrit à l'instant correspondant, passe par le point de contact de la courbe mobile avec la courbe fixe.

Si ω désigne la vitesse angulaire de la courbe mobile (Voy. VITESSE ANGULAIRE) à l'instant où le contact a lieu en a , la vitesse v du point M qui décrit la roulette est exprimée par $\omega.Ma$; et si ω est une quantité constante, on voit que v est proportionnel à Ma , c'est-à-dire que, pour une position quelconque de la courbe mobile, la vitesse du point décrivant est alors proportionnelle à sa distance au point de contact correspondant de la courbe mobile avec la courbe fixe.

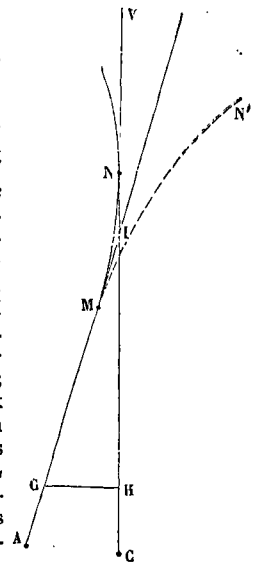
Roberval et Pascal avaient, avant l'invention du calcul infinitésimal, trouvé les principales propriétés des roulettes. Les roulettes le plus fréquemment employées sont la cycloïde, l'épicycloïde, la développante du cercle (Voy. ces mots).

ROULETTES (MÉTHODE DES), l'une des méthodes employées pour le tracé des engrenages cylindriques. Dans cette méthode on choisit une courbe arbitraire, assujettie seulement à toucher les deux circonférences primitives des deux roues au point où elles se touchent elles-mêmes; cette courbe est la roulette. On la fait rouler successivement sur chacune des circonférences primitives, et l'on prend pour profil de la dent correspondante la courbe décrite dans ce roulement par le point de contact primitif (Voy. ENGRENAGES).

ROULIS, mouvement oscillatoire d'un navire autour d'un axe parallèle à la quille et passant par le centre de gravité du bâtiment. Ce mouvement, lorsque l'inclinaison initiale est faible, peut être assimilé à celui d'un pendule. Soit C le centre de la poussée P du fluide; soit MN , MN' la courbe métacentrique latitudinale (Voy. MÉTACENTRE); M le premier métacentre; et G le centre de gravité du navire. La droite GM est tangente en M , la verticale CV est tangente en un point N ; l'angle GIC de ces deux droites est l'inclinaison i du navire. Menons l'horizontale GH . Si ω désigne la vitesse angulaire du navire, dans son mouvement de rotation autour d'un axe horizontal projeté en G , on aura (Voy. ACCÉLÉRATION ANGULAIRE)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{P.GH}{I} = \frac{P.GI.\sin i}{I},$$

en nommant I le MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot) du bâtiment. Si l'inclinaison est faible et ne dépasse pas 10 à 12 degrés, comme cela arrive d'ordinaire, la longueur MI , qui est proportionnelle à cette inclinaison (Voy. MÉTACENTRE), est négligeable,



ble, et l'on peut remplacer GI par GM, distance connue que nous représenterons par K; il viendra donc

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{PK \sin i}{I}. \quad [1]$$

Soit maintenant A un point matériel, dont nous nommerons le poids p , et dont la distance au point M sera désignée par L. Si l'on imagine que ce point matériel soit lié au point I par un fil inextensible, il formera un PENDULE SIMPLE (*Voy. ce mot*) incliné d'un angle i par rapport à la verticale; en nommant donc ω' sa vitesse angulaire à l'instant que nous considérons, on aura

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{p \cdot AI \cdot \sin i}{\frac{p \cdot AI^2}{g}} = \frac{g \sin i}{AI}$$

ou, puisqu'on néglige la distance MI,

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{g \sin i}{L}.$$

Pour que cette valeur soit constamment égale à la valeur [1], il suffit qu'on ait

$$\frac{g}{L} = \frac{PK}{I},$$

d'où

$$L = \frac{I g}{I' K}. \quad [2]$$

Le navire oscille donc comme un pendule simple dont la longueur serait donnée par cette formule.

On en déduit pour la durée de l'oscillation

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I}{PK}}. \quad [3]$$

On voit que cette durée sera d'autant plus grande que le moment d'inertie I du navire sera plus grand, c'est-à-dire que les matières pesantes seront plus éloignées du centre de gravité; et que la distance K sera plus petite, c'est-à-dire que le métacentre sera plus près du centre de gravité.

La plus grande vitesse acquise par le pendule simple est celle que prend un corps pesant en tombant de la hauteur

$$L - L \cos i \text{ ou } 2L \sin^2 \frac{1}{2} i;$$

la valeur de cette vitesse est donc

$$V = \sqrt{2g \cdot 2L \sin^2 \frac{1}{2} i} = 2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{gL}$$

et par conséquent la plus grande vitesse angulaire du navire est

$$\omega = \frac{V}{L} = 2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{g}{L}} = 2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{PK}{I}}. \quad [4]$$

Ce maximum de vitesse angulaire est d'autant moindre que I est plus grand et K plus petit, et par conséquent que la durée de l'oscillation est plus grande. — On met les formules [2] et [4] sous une forme plus simple en y introduisant le RAYON DE GYRATION (*Voy. ce mot*) du bâtiment. Si on le désigne par R et qu'on pose en conséquence

$$I = \frac{P}{g} R^2,$$

ces formules deviennent

$$T = \frac{\pi R}{\sqrt{gK}} \quad [5]$$

et

$$\omega = \frac{2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{gK}}{R}. \quad [6]$$

Si, par exemple, on suppose $R = 5^m$, comme cela a lieu fréquemment pour les navires de haut bord, $K = 1^m,50$, et $i = 12^\circ$, on trouvera

$$T = 4,1 \text{ et } \omega = 0,16.$$

Les principaux auteurs qui ont traité la question du roulis, Euler (*Scientia navalis*), Bouguer (*Traité du navire*), ont envisagé le problème comme nous venons de l'indiquer, et se sont préoccupés surtout des moyens d'augmenter la durée de l'oscillation, attendu que cette augmentation a pour effet de rendre le roulis moins dur, et de diminuer l'intensité de l'action que le roulis exerce sur toutes les parties du vaisseau, et particulièrement sur la MATURE (*Voy. ce mot*). L'accroissement de R et la diminution de K sont les deux moyens indiqués par les formules. Mais le premier de ces moyens doit être préféré au second, au moins dans certaines limites, parce qu'en diminuant K on augmente l'inclinaison que produit le choc de la lame, et que l'eau peut alors s'élever très-haut sur le côté du navire et passer par-dessus le bord. En effet, soit i l'inclinaison du vaisseau au moment où il reçoit le coup de mer, et μ le moment de la force qui résulte du choc de la lame, l'équation [1] deviendra, en appelant γ l'accélération angulaire,

$$\gamma = \frac{PK \sin i + \mu}{I}.$$

Soit i' l'inclinaison du navire en sens contraire au moment où il va se relever sous l'effort de la poussée du fluide, et après le passage de la lame; on aura, en appelant γ' l'accélération angulaire correspondante à cet instant,

$$\gamma' = \frac{PK \sin i'}{I}.$$

Mais c'est au moment où le navire va se relever que l'accélération angulaire est la plus grande; on a donc

$$\gamma' > \gamma,$$

ou

$$\frac{PK \sin i'}{I} > \frac{PK \sin i + \mu}{I},$$

d'où

$$\sin i' > \sin i + \frac{\mu}{PK}.$$

Ainsi i' est plus grand que i ; et la différence est d'autant plus grande que K est plus petit. Il y aurait donc du danger à diminuer K outre mesure, c'est-à-dire à rapprocher trop le métacentre du centre de gravité.

A l'occasion du choc des lames, il faut remarquer que la circonstance la plus favorable est celle où le roulis est isochrone à la lame, c'est-à-dire où la durée de l'oscillation est précisément égale au temps employé par la lame pour s'avancer d'une quantité égale à la moitié de l'intervalle compris entre deux lames consécutives. Dans tous les autres cas, le navire éprouve des changements brusques de vitesse qui fatiguent sa membrure et ses mâts. Mais la condition dont il s'agit ne saurait être remplie pour toutes les hauteurs de lames; et il convient de régler l'oscillation du navire d'après les lames moyennes. Le temps qu'elles mettent à s'avancer de la moitié de la distance de deux lames consécutives paraît compris entre $2 \frac{1}{2}$ et $5 \frac{1}{2}$; la moyenne de ces durées, ou 4^s , serait donc celle qu'il conviendrait de donner à l'oscillation du navire.

Les auteurs cités plus haut n'ont pas tenu compte de l'influence du vent sur la durée du roulis. Le marquis de Poterat, dans sa *Théorie du navire*, a essayé d'y avoir égard ; mais son analyse repose sur une hypothèse inexacte. Ce qu'on peut affirmer et ce que les marins savent très-bien, c'est que le vent a pour effet définitif d'augmenter la durée totale du roulis. Lorsque le navire, d'abord incliné du côté sous le vent, se relève, et que les voiles marchent ainsi en sens contraire du vent, il est manifeste que celui-ci exerce une action résistante, et que la durée de l'oscillation en doit être diminuée. Lorsqu'au contraire, pendant le mouvement inverse, les voiles marchent dans le sens du vent, celui-ci tend à augmenter leur vitesse ; mais moins qu'il ne l'a diminuée dans la première période ; attendu que les voiles fuyant ainsi devant le vent, elles ne sont choquées par lui qu'en vertu de la vitesse relative, laquelle est d'autant moindre que la vitesse angulaire du navire devient plus grande. La résistance de l'eau, un peu différente dans le mouvement varié de ce qu'elle serait dans l'état statique, exerce une influence du même genre.

On donne aussi le nom de *roulis* à un mouvement oscillatoire des locomotives autour d'un axe parallèle à la voie, et qui est dû principalement au défaut de symétrie dans l'action des bielles des deux pistons. Ce mouvement peut tenir aussi à l'imperfection de la voie (*Voy. LOCOMOTIVE*).

ROUTE, partie du sol préparée pour servir aux communications par terre. On distingue en France les *routes impériales* qui sont aux frais de l'État, et les *routes départementales* qui sont aux frais des départements. Les routes impériales réunissent entre elles les principales villes de l'empire ; on les divise en trois classes : celles qui mènent de Paris à la frontière ou aux ports militaires, celles qui mènent de Paris aux autres villes principales, celles qui font communiquer ces villes principales entre elles. Les routes départementales mettent en communication les principales villes d'un même département ou de deux départements voisins. Les voies d'une moindre importance prennent le nom de *chemins vicinaux*, ou chemins de grande communication.

Une route se compose 1° d'une *chaussée*, ou partie solide servant au passage des voitures ; 2° d'*accotements* ou *bas côtés* servant de passage aux piétons et quelquefois aux voitures, et de lieu de dépôt pour les matériaux ; 3° de *fossés* destinés à recueillir ou à faire écouler les eaux pluviales. La largeur totale des routes impériales varie ordinairement de 10 à 14 mètres ; mais elle s'élève quelquefois jusqu'à 20 mètres aux environs de Paris. La chaussée a le plus souvent de 5^m à 7^m de large ; chacun des accotements a 2^m,50 à 3^m,50 ; les fossés chacun 1^m,50. Les routes départementales ont une largeur de 8 à 10 mètres, comprenant une chaussée de 4 à 5 mètres, des accotements de 2^m à 2^m,50, et des fossés de 1^m,50. Les chemins vicinaux et autres ont une largeur de 6 à 8 mètres, comprenant une chaussée de 3 à 5 mètres, des accotements de 1^m,50 à 2^m, et des fossés de 1^m.

Si l'on coupe une route par un plan vertical perpendiculaire à sa direction, on obtient ce qu'on appelle son *profil en travers*. Quand la route est au niveau du sol, ce profil présente la disposition de

la figure 1. La chaussée, de A en B, offre une pente de $\frac{1}{25}$ et l'accotement de B en C une pente de $\frac{1}{20}$. Le fossé a 0^m,50 de profondeur ; et ses parois offrent

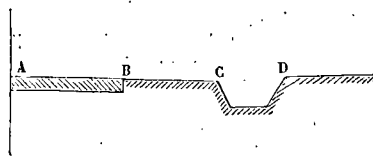


Fig. 1.

des talus à 45°. Quand la route est plus élevée que le sol environnant, auquel cas on dit qu'elle est *en remblai*, on donne au profil la disposition de la partie ABCD de la figure 2. Sur le revers d'un co-

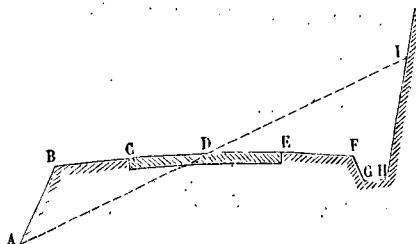


Fig. 2.

teau, le profil présente du côté de la vallée la disposition ABCD, et du côté de la montagne la disposition DEFGHI. La route est alors en remblai d'un côté et *en déblai* de l'autre. Si AI représente la pente naturelle du sol, on voit que les terres enlevées pour creuser le demi-profil DEFGHI servent à former le remblai ABCD. Quand la route est au-dessous du sol, auquel cas on dit qu'elle est *en déblai*, on donne au profil la disposition ABCD (fig. 3). La chaussée reste bombée comme dans les

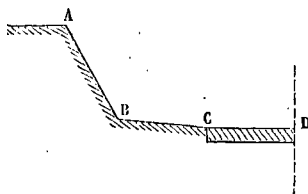


Fig. 3.

exemples précédents ; mais l'accotement BC présente une légère pente du B vers C ; en sorte que les eaux pluviales forment un ruisseau de chaque côté de la chaussée. Si la tranchée est profonde, on supprime les accotements, et l'on donne aux deux moitiés de la chaussée une légère pente vers le milieu pour ramener les eaux sur ce point.

Le profil en travers peut offrir plusieurs autres variétés. Dans les pays de montagnes, où la route borde un précipice, on incline quelquefois la chaussée tout entière vers la montagne, et l'on construit un parapet du côté opposé. Souvent on ajoute à l'accotement un trottoir, élevé de 20 à 25 centimètres, et uniquement destiné aux piétons. Quelquefois on élargit la route de distance en distance

pour ménager des emplacements destinés au dépôt des matériaux (Voy. pour plus de détails le Cours de routes et ponts professé à l'École centrale des arts et manufactures par M. Mary). Les profils en travers sont ordinairement levés à l'échelle de 0^m,005 ou 0^m,01 par mètre.

L'étude d'un projet de route exige que l'ingénieur ait à sa disposition un plan topographique détaillé de la contrée que la route doit parcourir. Si ce plan n'existe pas, il faut avant tout se le procurer, en effectuant pour cela les levés et les nivellements nécessaires (Voy. PLAN TOPOGRAPHIQUE, NIVELLEMENT).

Si l'on coupe la route par un cylindre à génératrices verticales ayant pour directrice l'axe de la route, on obtient ce qu'on appelle son *profil en long*. Ce profil ne doit pas, autant que cela est possible, présenter de pente supérieure à $\frac{1}{20}$. Il est

vrai que sur une route horizontale, les eaux s'écoulent moins facilement que sur une route inclinée dans le sens longitudinal, attendu que les bourrelets longitudinaux formés par les roues arrêtent le mouvement transversal des eaux; cependant il faut se garder d'exagérer la pente, parce que la force de traction nécessaire pour mouvoir une même charge croît très-rapidement avec la pente, toutes choses égales d'ailleurs (Voy. TIRAGE DES VOITURES). Pour la représentation du profil en long on adopte généralement une échelle de hauteurs quintuple ou même décuple de l'échelle des longueurs.

La direction d'une route est déterminée par les points principaux qu'elle doit desservir; son tracé détermine au contraire tous les points par lesquels l'axe de la route doit passer. Ce tracé doit satisfaire à des conditions très-diverses, et ne peut être obtenu que par tâtonnements. Les routes suivent fréquemment le fond des vallées, mais à un niveau supérieur à celui des inondations. Quelquefois elles sont placées près des crêtes des chaînes principales, où les ondulations des chaînes secondaires se font moins sentir. Si la route doit passer d'un bassin dans un autre, il faut qu'elle franchisse la chaîne de montagnes intermédiaires par son point le plus bas. Si la route doit traverser un cours d'eau, il faut que ce soit, autant que possible, perpendiculairement à la direction de ce cours d'eau. En plaine, il y a avantage à adopter un tracé rectiligne; dans les pays accidentés au contraire il devient indispensable de briser l'axe de la route pour suivre en zigzag le flanc des coteaux, de manière à ce que la pente ne dépasse pas la limite fixée à l'avance, $\frac{1}{20}$ par exemple. Il faut néanmoins

réduire le trajet autant que cela est possible, faire passer la route sur les terrains les plus solides, les moins chers, les plus secs, et enfin choisir les contrées où les matériaux sont à plus bas prix et de meilleure qualité. On conçoit donc qu'on ne puisse donner aucune règle générale qui puisse servir de guide dans l'étude du tracé d'une route; le coup d'œil et l'expérience sont ici les guides les plus sûrs. Cependant les considérations géométriques suivantes peuvent trouver leur application dans cette étude.

Soient M'N et PQ (fig. 4) les projections horizontales des intersections de deux plans horizontaux par un plan incliné; soit h la différence de niveau

des deux plans horizontaux; soient A et B les projections de deux points donnés, l'un sur le plan horizontal supérieur, l'autre sur le plan horizontal inférieur, et qu'il s'agit de relier par une

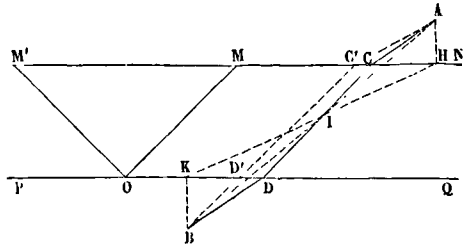


Fig. 4.

route. On commencera par fixer la pente limite que l'on ne veut pas dépasser, $\frac{1}{20}$ par exemple. On prendra à l'échelle du plan une ouverture de compas égale à $20h$; et d'un point O pris comme centre sur l'une des deux parallèles M'N ou PQ, avec cette ouverture de compas, on tracera un arc de cercle qui coupera l'autre parallèle en deux points M et M'; on joindra OM et OM', et l'on aura les projections de deux droites supposées tracées sur le plan incliné avec la pente limite adoptée.

Cela posé, on abaissera des points A et B les perpendiculaires AH et BK sur les parallèles voisines; on joindra AB et HK, qui se couperont en un point I. Par ce point on mènera CD parallèle à OM, et l'on tirera AC et BD; la ligne brisée ACDB sera la projection horizontale de la route. Pour faire voir que ce tracé est le plus court, il faut montrer que si l'on menait une droite AC' différente de AC, une droite C'D' parallèle à OM, et qu'on joignit D'B, la ligne brisée AC'D'B serait plus longue que ACDB. Pour cela, on remarque qu'on a, par des similitudes évidentes,

$$AI : IB = IH : IK = IC : ID,$$

d'où il suit que les droites AC et BD sont parallèles. Imaginons que la figure BDD'K se transporte parallèlement à elle-même, de manière que le point D vienne en C, le point D' viendra en C'. Mais d'après ce qu'on vient de dire, les droites BD et AC sont alors dans le prolongement l'une de l'autre, et l'on aura

$$AC + BD < AC' + BD';$$

ajoutant d'une part CD et de l'autre son égal C'D', on obtient

$$AC + CD + BD < AC' + C'D' + BD'$$

ou

$$ACDB < AC'D'B.$$

Ceci suppose que HK fasse avec les parallèles MN et PQ un angle MHK au plus égal à M'MO. S'il était égal à M'MO, la ligne brisée AHKB serait elle-même la projection du tracé demandé; s'il était supérieur à M'MO, il faudrait modifier le tracé. Par le point H (fig. 5) on mènerait une parallèle à OM ou à OM'; par le point K on mènerait une parallèle à OM ou à OM'; les droites ainsi menées se couperaient en un point L ou L', et la projection de la route serait AHLKB ou AHL'KB.

Les deux plans horizontaux sur lesquels sont situés les points A et B pourraient être séparés par plu-

sieurs plans inclinés successifs, d'inclinaisons différentes. Soient MN, PQ, RS, TU (fig. 6) les projections des intersections successives de ces divers plans. Soit h la différence de niveau des droites

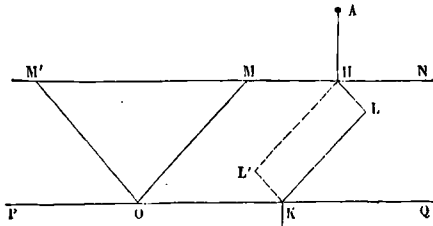


Fig. 5.

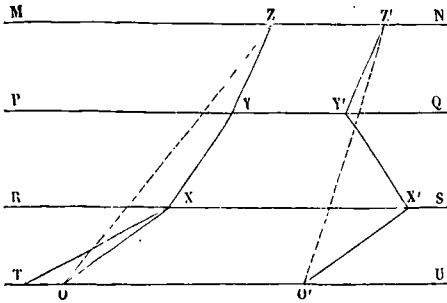


Fig. 6.

RS et TU; soit h' la différence de niveau des droites PQ et RS; soit enfin h'' la différence de niveau des droites MN et PQ. On prendra une ouverture de compas égale à $20h''$, que l'on portera de O en X, puis une ouverture de compas égale à $20h'$ que l'on portera de X en Y, enfin une ouverture de compas égale à $20h$, que l'on portera de Y en Z; la ligne brisée OXYZ sera la projection horizontale d'un chemin parcourant les plans inclinés successifs sous l'inclinaison limite de $\frac{1}{20}$. Cette ligne brisée remplacera la droite OM des figures 4 et 5; mais, pour l'exécution du tracé, elle pourra être remplacée elle-même par la droite OZ qui joint ses extrémités. Une fois le tracé exécuté, comme si OZ représentait une inclinaison uniforme entre les plans horizontaux inférieur ou supérieur, on remplacera cette droite OZ, ou la parallèle qu'on lui aura menée, par une ligne brisée égale à OXYZ. Il faut remarquer que chacune des ouvertures de compas qui fixent la position d'un côté de la ligne brisée, pouvant être portée dans deux sens, on peut donner à cette ligne brisée diverses formes, telles que OX'Y'Z' par exemple, parmi lesquelles il faudra choisir, suivant l'écartement des points A et B qu'on veut relier par une route.

Supposons maintenant que les plans inclinés qui séparent le plateau supérieur du plateau inférieur soient remplacés par une surface quelconque, et que ab, cd, ef, gh (fig. 7) représentent les projections des courbes horizontales (Voy. PLAN TOPOGRAPHIQUE, NIVELLEMENT) qui expriment le relief du

terrain entre les deux plateaux. Soit ACDEFB le tracé le plus court entre les points A et B satisfaisant à la condition qu'entre deux courbes horizontales consécutives la pente ne dépasse pas la limite adoptée,

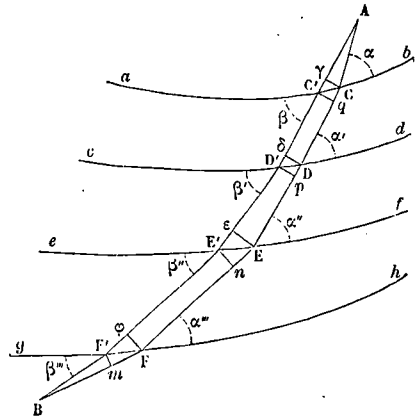


Fig. 7.

$\frac{1}{20}$ par exemple. — D'après une propriété connue du minimum, un tracé AC'D'E'F'B s'écartant très-peu du premier devra donner le même développement longitudinal; et comme C'D', D'E', E'F' diffèrent extrêmement peu de CD, DE, EF, on devra avoir

$$AC' + BF' = AC + BF,$$

d'où

$$AC' - AC = BF - BF'. \quad [1]$$

Des sommets C, D, E, F du premier tracé abaissons sur les côtés correspondants du second les perpendiculaires

$$C\gamma, D\delta, E\epsilon, F\varphi,$$

et des sommets C', D', E', F' du second abaissons, sur les côtés correspondants du premier les perpendiculaires

$$C'q, D'p, E'n, F'm.$$

Appelons

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$$

les angles que les côtés du premier tracé font avec les courbes

$$ab, cd, ef, gh;$$

$$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$$

et

ceux que les côtés du second tracé font avec ces mêmes courbes. En remarquant que ces derniers angles différeront très-peu des angles

$$C'q, D'p, E'n, F'm,$$

on aura successivement

$$Cq = CC' \cos \alpha, \quad Dp = DD' \cos \alpha', \quad En = EE' \cos \alpha'',$$

$$Fm = FF' \cos \alpha''', \quad C\gamma = CC' \cos \beta, \quad D\delta = DD' \cos \beta',$$

$$E\epsilon = EE' \cos \beta'', \quad F\varphi = FF' \cos \beta''',$$

d'où

$$Cq \cdot Dp \cdot En \cdot Fm = CC' \cdot DD' \cdot EE' \cdot FF' \cdot \cos \alpha \cos \alpha' \cos \alpha'' \cos \alpha''' \quad [2]$$

et

$$C\gamma \cdot D\delta \cdot E\epsilon \cdot F\varphi = CC' \cdot DD' \cdot EE' \cdot FF' \cdot \cos \beta \cos \beta' \cos \beta'' \cos \beta''' \quad [3]$$

Mais $A\gamma$ diffère extrêmement peu de AC, puisque l'angle A est très-petit. On a sensiblement

$$AC' - AC = A\gamma - A\gamma'.$$

On a par une raison semblable

$$BF - BF' = BF - Bm = mF;$$

par conséquent, en vertu de la relation [1], il en résulte

$$A'\gamma = mF.$$

De plus, les droites CD et C'D' étant égales et sensiblement parallèles, on a

$$CD = C'D', \quad Dq = C'\delta,$$

d'où

$$Cq = D'\delta.$$

On trouverait de même

$$Dp = E'\epsilon \quad \text{et} \quad En = F'\varphi.$$

Il résulte de ces relations que les premiers membres des relations [2] et [3] sont égaux. Il en est donc de même des seconds, et, en supprimant les facteurs communs CC', DD', EE', FF', il reste

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha . \cos \alpha' . \cos \alpha'' . \cos \alpha''' \\ = \cos \beta . \cos \beta' . \cos \beta'' . \cos \beta''' \end{aligned} \right\} [4]$$

Telle est la condition que devra remplir le tracé dont le développement est minimum. Il suffira de quelques tâtonnements pour déterminer ce tracé.

On peut remarquer que si les courbes *ab*, *cd*, *ef*, *gh* devenaient des droites parallèles, on aurait

$$\beta = \alpha', \quad \beta' = \alpha'', \quad \beta'' = \alpha''',$$

et la relation [4] donnerait en conséquence

$$\beta''' = \alpha,$$

c'est-à-dire que les directions AC et BF seraient parallèles, comme cela résulte, en effet, de la méthode indiquée plus haut.

Supposons que la route doive gravir par un versant sur un plateau supérieur pour redescendre par le versant opposé, et soit ACDOEFB (fig. 8) le tracé

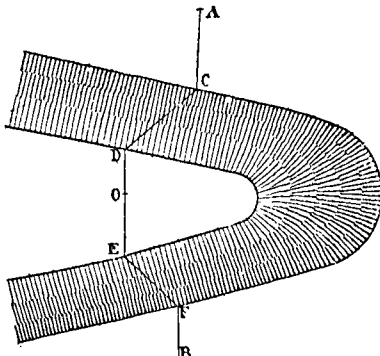


Fig. 8.

qui donne le minimum de développement. Les droites AC et DO devront être parallèles. Il en sera de même des droites OE et FB; mais, pour que DOE soit le plus court chemin de D en E, il faut que OD et OE soient en ligne droite. Il faut donc en définitive que les trois directions AC, DE et FB soient parallèles. On parviendra sans peine, par tâtonnement, à remplir cette condition.

Il est clair que ces principes ne sauraient s'appliquer d'une manière rigoureuse; mais ils peuvent servir de guide dans l'étude du tracé.

Une fois les parties rectilignes de ce tracé obtenues, il faut arrondir les angles par des courbes de RACCORDEMENT (*Voy.* ce mot). On règle le rayon de ces courbes par les considérations suivantes: soit AB = 2L (fig. 9) la longueur d'une voiture et de son attelage; soit CD = l sa largeur, et ID = λ celle de la route. Pour que la voiture puisse tourner sans que l'attelage sorte de la voie, il faudra qu'au mo-

ment où l'un des côtés devient tangent au cercle intérieur, les extrémités A et B de l'autre côté soient sur le cercle extérieur. Le rayon OA ou x sera

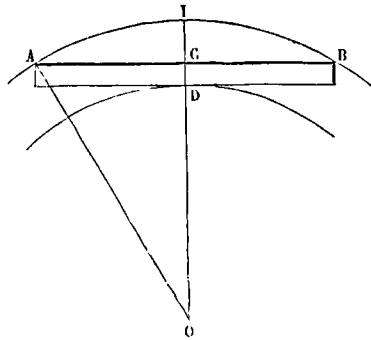


Fig. 9.

donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle ACC, dans lequel on a

$$AC = \frac{1}{2} AB = L, \quad OC = x - IC;$$

mais

$$IC = \lambda - l;$$

on devra donc avoir

$$x^2 = L^2 + (x + l - \lambda)^2,$$

d'où

$$x = \frac{L^2 + (\lambda - l)^2}{2(\lambda - l)}. \quad [5]$$

On a généralement

$$L = 11^m, 50;$$

soit

$$l = 1^m, 80 \quad \text{et} \quad \lambda = 5^m,$$

on trouvera

$$x = 22^m, 26.$$

Le rayon de l'axe de la route serait alors

$$22^m, 26 - 2^m, 50 \quad \text{ou} \quad 19^m, 76.$$

Sur une route fréquentée par des voitures formant convoi, il faut que deux convois puissent se croiser, en présentant la disposition représentée par la figure 10. Les côtés extérieurs AB et A'B' de deux

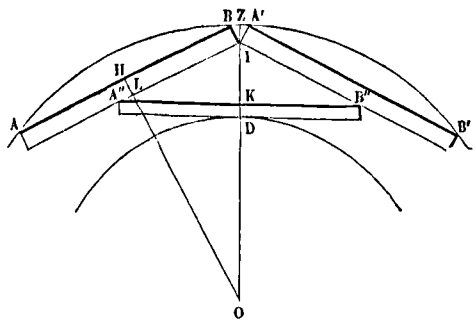


Fig. 10.

voitures consécutives du premier convoi se terminant à la circonférence externe, le côté extérieur A''B'' d'une voiture du second convoi s'appuie par ses extrémités sur les côtés intérieurs des deux premières voitures, tandis que son côté intérieur touche en D la circonférence interne de la route. La figure

est symétrique par rapport au rayon OI qui passe par le point I commun aux deux rectangles égaux qui figurent les deux premières voitures. Soit 2L la longueur d'une voiture avec son attelage; l sa longueur, y compris la charge; λ la largeur de la voie, et x le rayon de la circonférence externe. La similitude des triangles OLI et A''KI donne la relation

$$IL : IO = IK : A''I,$$

et le triangle A''KI donne

$$A''I = \sqrt{A''K^2 + IK^2};$$

mais on a

$$IL = L, \quad IO = OZ - IZ = x - l,$$

à très-peu près,

$$IK = DZ - IZ, \quad KD = \lambda - 2l, \quad A''K = L.$$

En substituant, on a donc

$$L : x - l = \lambda - 2l : \sqrt{(\lambda - 2l)^2 + L^2},$$

d'où

$$x = l + L \sqrt{1 + \left(\frac{L}{\lambda - 2l}\right)^2}. \quad [6]$$

Pour

$$L = 11^m, 50, \quad l = 2^m, 50, \quad \lambda = 10^m,$$

on trouve

$$x = 31^m, 34,$$

et, par conséquent, le rayon de l'axe de la route serait

$$31^m, 34 - 5^m \quad \text{ou} \quad 26^m, 34.$$

Dans les circonstances ordinaires, le rayon reste compris entre 20 et 25 mètres.

Quand on a arrêté le tracé d'une route, le profil en long et son profil en travers, on fait un plan horizontal exact de ce tracé, et l'on développe le profil en long, en l'accompagnant d'autant de profils en travers qu'il est nécessaire pour faire connaître, au moins en tous les points principaux, la situation de la route par rapport au terrain sur lequel elle passe. On détermine avec soin les différences de niveau entre les divers points du profil en long et de chaque profil en travers, et les points du terrain situés sur la même verticale (*Voy. COTES ROUGES*). On détermine également les lignes suivant lesquelles le projet de route coupe la surface du terrain, soit que la route, d'abord placée au-dessous du sol, passe au-dessus, soit que le contraire ait lieu. Ces lignes sont ce que l'on appelle les LIGNES DE PASSAGE (*Voy. ce mot*). On peut alors calculer le volume des terres qu'il faut enlever dans les parties du tracé où la route est au-dessous du sol : c'est ce qu'on appelle les DÉBLAIS; et le volume des terres qu'il faut rapporter dans les parties du parcours où la route est au-dessus du terrain : c'est ce qu'on appelle les REMBLAIS (*Voy. DÉBLAIS et REMBLAIS*). Au point de vue économique, il est nécessaire que ces deux volumes soient les plus faibles possible et approchent autant qu'il se peut de l'égalité. Si cela n'a pas lieu, on modifie légèrement soit le niveau de la route, soit même son tracé, jusqu'à ce qu'on arrive sensiblement à l'égalité demandée. Il faut encore que l'ingénieur se rende compte des mouvements de terrains auxquels donnera lieu la construction de la route (*Voy. TRANSPORT DES TERRES*). Ce n'est qu'après ces études préalables que l'on peut procéder à l'exécution. Quant aux détails relatifs à cette exécution même, ils ne sauraient entrer dans le cadre de cet ouvrage, et nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spéciaux, et particulièrement au Cours de M. Mary, déjà cité.

ROUTE D'UN NAVIRE, direction suivant laquelle il s'avance au moment où on le considère. La détermination de cette route exige la connaissance de trois éléments : le rumb de vent (*Voy. RUMB*) que semble suivre le navire, d'après l'indication de la boussole, la déclinaison ou variation de l'aiguille aimantée (*Voy. ces mots*) et la dérive. Le rumb indiqué par la boussole est l'angle que fait la quille du vaisseau avec la ligne nord-sud de cet instrument (*Voy. BOUSSOLE MARINE*). Mais cette ligne nord-sud ne coïncide pas en général avec le méridien. La différence, que les physiiciens appellent la déclinaison et les marins la variation de l'aiguille aimantée, varie d'un lieu à un autre, et quelquefois même avec le temps. On la détermine par des observations astronomiques (*Voy. DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE*). On peut donc, pour l'objet qui nous occupe, la regarder comme connue. La dérive est la déviation que le navire éprouve dans sa marche par l'action directe du vent, déviation qui dépend de l'intensité du vent, du plus ou moins de développement des voiles et de l'état de la mer. On la détermine en mesurant avec une boussole portative à pinnules, nommée *compas de variation*, l'angle que fait la quille ou l'axe du navire avec la *houache*, longue trace que le navire laisse après lui, et qui indique la direction réelle de sa marche. Cet angle est ce qu'on nomme proprement la *dérive*.

Pour déduire de ces éléments la route que suit le vaisseau, il n'y a que des additions ou des soustractions à faire. Pour corriger de la variation le rumb donné par la boussole, il faut supposer qu'étant placé au centre de la rose des vents, et regardant dans la direction du rumb indiqué, on tourne d'un angle égal à la variation vers la gauche ou vers la droite, selon que la déclinaison est ouest ou est. La nouvelle direction dans laquelle on aura les regards tournés sera celle du rumb corrigé de la variation. Supposons, par exemple, que le rumb indiqué par la boussole soit

$$\text{NO. } \frac{1}{4} \text{N, } 4^{\circ} 0'$$

(*Voy. RUMB*), et que la déviation soit de 18 degrés ouest; le rumb indiqué répond à 37° 45' comptés du nord vers l'ouest. La déclinaison étant ouest, il faut tourner vers la gauche, c'est-à-dire ajouter 18 degrés: ce qui donne 55° 45'. Le rumb qui s'approche le plus de cette valeur est

$$\text{NO. } \frac{1}{4} \text{O, qui répond à } 56^{\circ} 15'.$$

La différence 0° 30' doit être comptée vers le nord. Le rumb corrigé est donc

$$\text{NO. } \frac{1}{4} \text{O, } 0^{\circ} 30' \text{ nord.}$$

Supposons, comme second exemple, que le rumb donné par la boussole soit

$$\text{O.NO, } 4^{\circ} 45' \text{O,}$$

et que la déclinaison soit de 16° E. Le rumb indiqué répond à 72° 15' comptés du nord vers l'ouest. La déclinaison étant E, il faut tourner vers la droite, c'est-à-dire retrancher 16 degrés, ce qui donne 56° 15'. Ce nombre répond précisément à

$$\text{NO. } \frac{1}{4} \text{O.}$$

C'est le rumb corrigé.

Pour corriger la route de la dérive, il faut remarquer qu'elle doit toujours être comptée du côté opposé à celui d'où vient le vent; si le vent vient de tribord, ou, en termes de marine, si les amures sont à tribord, la dérive devra être comptée à bâbord, c'est-à-dire à gauche; si les amures sont à bâbord, la dérive devra être comptée à tribord, c'est-à-dire à droite. Supposons, par exemple, que le cap soit au $NE\frac{1}{4}N$, tribord amures, et que la dérive ait été trouvée de 7 degrés. Le rumb indiqué répond à $33^{\circ}45'$ comptés du nord vers l'est. La dérive devant être comptée à gauche, il faut retrancher 7 degrés: ce qui donne $26^{\circ}45'$. Le rumb le plus voisin est

N.NE, qui répond à $22^{\circ}30'$.

La différence $4^{\circ}15'$ doit être comptée vers l'est. Le rumb corrigé de la dérive est donc

N.NE, $4^{\circ}15'$ E.

Supposons, comme second exemple, que le cap soit à l'E.NE, $3^{\circ}15'$ E, bâbord amures, et que la dérive ait été trouvée de 8 degrés. Le rumb indiqué répond à $70^{\circ}45'$ comptés du nord vers l'est. La dérive devant être comptée vers la droite, il faut ajouter 8 degrés: ce qui donne $78^{\circ}45'$. Ce nombre répond à

E. $\frac{1}{4}$ NE,

qui est le rumb corrigé.

On a ordinairement à faire à la fois la correction de la variation et la correction de la dérive. Si elles sont de même sens, on les ajoute et l'on effectue une seule correction, de même sens, égale à la somme obtenue. Si elles sont de sens contraire, on en fait la différence et l'on effectue une seule correction, de même sens que la plus grande, et égale à cette différence. Supposons, pour premier exemple, que le rumb indiqué par la boussole soit NE, que la déclinaison soit de 25° E, et que, le vent venant de bâbord, la dérive ait été trouvée de 8 degrés. Les deux corrections devront être comptées à droite; elles s'ajoutent, par conséquent, et donnent 33 degrés à compter vers la droite. Or, NE répond à 45 degrés comptés du nord vers l'est. Ajoutant 33 degrés, on obtient pour somme 78 degrés, qui répond à peu près à E. $\frac{1}{4}$ NE. La différence $45'$ doit être comptée vers le nord. Le rumb corrigé de la variation et de la dérive est donc

E. $\frac{1}{4}$ NE, $0^{\circ}45'$ N.

Supposons, comme second exemple, que le cap étant NO $\frac{1}{4}$ O, 5° O, bâbord amures, la variation soit de 20° O et la dérive de 8 degrés. La variation devant être comptée à gauche et la dérive à droite, cela revient à faire une seule correction de 12 degrés à gauche. Or, le rumb indiqué répond à $61^{\circ}15'$ comptés du nord vers l'ouest; ajoutant 12 degrés, on obtient $73^{\circ}75'$. Or, le rumb

O.NO répond à $67^{\circ}30'$.

La différence $5^{\circ}45'$ doit être comptée vers l'ouest; le rumb corrigé est donc

O.NO, $5^{\circ}45'$ O.

Il est clair qu'on aurait à effectuer des calculs semblables, mais inverses, si, étant donnée la route

du navire, on voulait déterminer le rumb que doit indiquer la boussole. Les corrections de variation et de dérive devraient évidemment s'effectuer en sens contraire, c'est-à-dire qu'il faudrait compte: la variation vers la droite ou vers la gauche, selon qu'elle serait occidentale ou orientale. Et la dérive devrait être comptée du côté même d'où vient le vent. Il suffit de reprendre le dernier exemple en sens inverse, et de supposer que, devant suivre le rumb O.NO, $5^{\circ}45'$ O, on demande celui que doit indiquer le compas. En comptant 20 degrés à droite et 8 degrés à gauche, ou, ce qui revient au même, 12 degrés à droite, on retombera sur le rumb qui est donné dans l'exemple ci-dessus, c'est-à-dire

NO. $\frac{1}{4}$ O, 5° O.

La route d'un navire peut être modifiée par une autre cause dont nous n'avons pas parlé, ce sont les courants qui, sans rien changer à l'effet du vent, transportent le vaisseau dans une certaine direction avec une certaine vitesse. Lorsque cette vitesse est connue en grandeur et en direction, on la compose par la règle du PARALLELOGRAMME DES VITESSES (Voy. ce mot) avec celle dont nous venons d'apprendre à déterminer la direction, corrigée de la variation et de la dérivée, et dont la grandeur s'évalue à l'aide du LOCH (Voy. ce mot); la résultante est la vitesse réelle du vaisseau, et sa direction est la route cherchée. Quand la vitesse du courant n'est qu'imparfaitement connue, il reste évidemment de l'incertitude sur la route réelle que suit le navire. C'est ce qui arrive par malheur trop souvent, surtout dans des parages inconnus, ou mal connus (Voy. COURANT).

ROUTE ORTHODROMIQUE. Voy. ORTHODROMIQUE.

ROUTES (PROBLÈMES DES), problèmes usuels de navigation dans lesquels figurent, soit comme données, soit comme inconnues, les coordonnées géographiques du POINT DE PARTANCE (Voy. ce mot), celles du point d'arrivée, le chemin parcouru pour aller de l'un à l'autre exprimé en MILLES (Voy. ce mot) ou minutes, et l'azimut de ce chemin sur l'horizon du point de partance. Le chemin parcouru se compose ordinairement de plusieurs chemins successifs de directions différentes; mais on les réduit à un chemin unique parcouru dans une direction constante que l'on sait déterminer (Voy. RÉDUCTION DES ROUTES). Quand le chemin unique ainsi considéré est peu considérable, le chemin décrit en un jour, par exemple, il peut, sans erreur possible, être considéré comme un arc de grand cercle de la sphère (les données ne sont jamais assez exactes dans la navigation pour qu'il y ait lieu d'avoir égard à la forme elliptique du méridien); les problèmes de route sont donc des problèmes de trigonométrie sphérique ordinaire. Soit M (fig. 1) le point de départ, l sa latitude et L sa longitude; soit M' le point d'arrivée, l' et L' ses coordonnées géographiques, k la longueur MM' parcourue à la surface de la sphère, et Z l'angle M'MP que fait le chemin décrit avec le méridien PM du point de départ. Considérons le triangle qui a pour som-



Fig. 1.

met les points M, M' et le pôle P; dans ce triangle, les trois côtés sont $PM = 90^\circ - l$, $PM' = 90^\circ - l'$, $MM' = k$; de plus l'angle $MPM' = L' - L$; nous le désignerons par φ ; nous appellerons Z l'angle $MM'P$; d'ailleurs, l'angle $M'MP = Z$. On pourra donc, par les formules ordinaires de la trigonométrie sphérique, résoudre tous les problèmes dans lesquels il s'agira de déterminer trois de ces six quantités, connaissant les trois autres. Si, par exemple, on donne les coordonnées géographiques du point de partance M, le chemin MM' et l'angle $M'MP$, on connaîtra dans le triangle MPM' deux côtés PM , MM' et l'angle compris; on pourra donc calculer le troisième côté PM' , dont le complément sera la latitude du point d'arrivée, l'angle MPM' , différence de longitude des deux points M et M', ce qui fera connaître la longitude de M', et enfin l'angle $PM'M$, si on a intérêt à le connaître. Résoudre ce premier problème est ce qu'on appelle *faire le point*. Si, au contraire, on donne les coordonnées géographiques des deux points de partance et d'arrivée, on connaîtra dans le même triangle les côtés PM et PM' , compléments des latitudes données, et l'angle MPM' , différence de leurs longitudes; on pourra donc calculer le troisième côté, c'est-à-dire le chemin MM' , et l'angle $M'MP$ que fait ce chemin avec le méridien PM . Les deux problèmes que nous venons de citer sont ceux qui se présentent le plus fréquemment dans la navigation; mais tous les autres se résoudraient d'une manière aussi simple. Supposons, par exemple, que l'on donne le point de partance, par ses coordonnées géographiques, l'angle $PM'M$ sous lequel on a navigué, et la latitude du point d'arrivée; on connaîtra dans le triangle MPM' , le côté PM égal au complément de la latitude du point M, le côté PM' égal à la latitude du point M', et l'angle $PM'M$; on pourra donc calculer le troisième côté MM' , ce qui donnera la longueur du chemin parcouru, et l'angle MPM' , différence des longitudes des points de départ et d'arrivée, ce qui fera connaître la longitude de ce dernier.

Ordinairement le chemin parcouru est très-petit, et le calcul se simplifie. Menons, en effet, l'arc de parallèle MQ ; le côté MM' étant très-petit, le triangle MQM' peut être assimilé à un triangle rectiligne, rectangle en Q; et dès lors on a

$$MQ = MM' \cdot \cos M'MP \text{ ou } l' - l = k \cos Z \quad [1]$$

et $M'Q = MM' \sin M'MP = k \sin Z$.

L'arc $M'Q$ n'est pas la différence de longitude des deux points M et M'; mais c'est un arc semblable à celui qui mesure cette différence sur l'équateur. Ces arcs sont donc proportionnels à leurs rayons. Or, le rayon d'un parallèle est égal au rayon de l'équateur multiplié par le cosinus de la latitude qui répond à ce parallèle; le rayon de l'arc QM' est donc $R \cos l$, en appelant R le rayon équatorial. Ainsi on a

$$M'Q : l' - l = R \cos l : R, \text{ d'où } l' - l = \frac{M'Q}{\cos l},$$

et par conséquent

$$l' - l = \frac{k \sin Z}{\cos l} \quad [2]$$

Les formules [1] et [2] renferment la solution de tous les problèmes des routes. Si, comme dans le premier problème énoncé, on donne l , L , k et Z , on tirera de [1] $l' = l + k \cos Z$, et de [2]

$l' = l + \frac{k \sin Z}{\cos l}$. Si, comme dans le second problème, on donne l , l' , L et L' , on tirera des équations [1] et [2], en les divisant membre à membre, $\frac{l' - l}{l' - l} = \frac{\tan Z}{\cos l}$, d'où $\tan Z = \frac{l' - l}{l - l} \cos l$

L'équation [1] donnera ensuite

$$k = \frac{l' - l}{\cos Z}.$$

Si, comme dans le troisième problème, on donne l , L , Z et l' , l'équation [1] donnera k ; et l'équation [2] donnera L' .

Ces problèmes peuvent être résolus par des constructions graphiques. Supposons d'abord qu'il s'agisse du premier problème, dans lequel on donne l , L , k et Z . On tracera une droite MP (fig. 2) pour

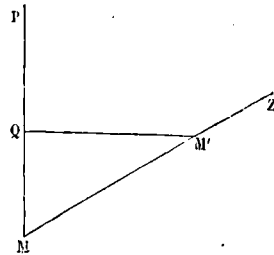


Fig. 2

représenter le méridien; on y prendra un point M pour représenter le point de partance; et l'on fera l'angle PMZ égal à Z . Ayant adopté une longueur arbitraire pour représenter la minute ou le mille, on prendra sur MZ une longueur MM' égale à k , c'est-à-dire au nombre de minutes que k renferme; et l'on abaissera $M'Q$ perpendiculaire sur MP . La distance MQ sera, à la même échelle, la quantité $l' - l$: ce qui donnera l' . La distance $M'Q$ sera $(l' - l) \cos l$. — On fera ensuite un angle CAE (fig. 3) égal à l ; on prendra AB égal à $M'Q$; on

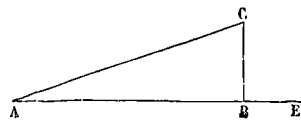


Fig. 3.

élèvera BC perpendiculaire à AB ; la ligne AC sera $l' - l$: ce qui donnera l' .

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse du second problème dans lequel on donne l , L , l' et L' . On fera un angle CAB (fig. 3) égal à l ; on prendra $AC = l' - l$; on abaissera sur AE la perpendiculaire CB ; et le côté AB sera $(l' - l) \cos l$. On prendra ensuite une longueur MQ (fig. 2) égale à $l' - l$; on élèvera une perpendiculaire QM' égale à AB ; on joindra MM' , qui sera égal à k , l'angle $M'MQ$ étant égal à Z .

On traiterait d'une manière analogue les autres problèmes. Les marins résolvent ordinairement les problèmes des routes au moyen du QUARTIER DE RÉDUCTION (*Voy. ce mot*). On peut encore les résoudre sur une CARTE MARINE (*Voy. ce mot*), ou CARTE RÉDUITE. Ces solutions graphiques ne comportent qu'une approximation assez grossière; mais

elles suffisent dans la plupart des cas, parce que d'une part les données n'étant connues le plus souvent qu'avec une approximation du même genre, le problème lui-même ne comporte pas une grande exactitude, et parce qu'en second lieu les résultats fournis par ces méthodes graphiques sont constamment contrôlés par des observations astronomiques.

Lorsque les points M et M' sont notablement éloignés, il n'est plus permis de procéder comme il vient d'être dit. Si l'on a navigué dans une direction constante, c'est-à-dire si la boussole a indiqué un angle constant pour celui que la route a fait avec le méridien, l'arc MM' ne peut plus être considéré comme un arc de grand cercle. La ligne qu'on a suivie, coupant tous les méridiens sous un même angle, est un arc de LOXODROME, et le problème des routes doit alors être résolu à l'aide des formules qui expriment les propriétés de cette courbe (Voy. LOXODROMIE).

Enfin, le problème des routes, dans le cas où le chemin décrit est peu considérable, peut encore être résolu à l'aide de tables spéciales, dans lesquelles on a calculé à l'avance les éléments d'un triangle rectangle en y faisant varier un angle de 0 à 90°.

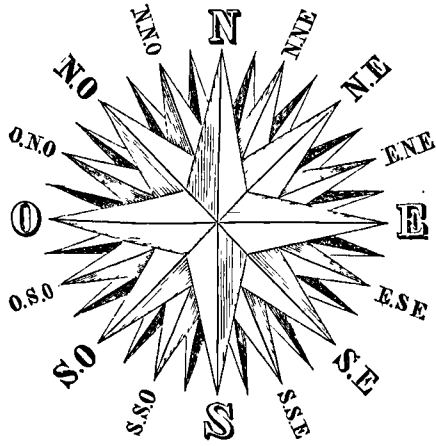
Voyez les Tables de M. Caillet (xxxvi^e de la première édition, et iv^e de la seconde) et les Tables de Guépratte (txv^e de la 3^e édition).

Voir pour plus de détails sur le problème des routes, le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier, 4^e édition, et le *Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois.

RUMBS, ou AIRS DE VENTS (AIRES suivant quelques-uns), nom donné dans la navigation à la 32^e partie de l'horizon divisé en 360°, ce qui donne 11° 15' pour chaque rumb. Ce sont de véritables azimuts (Voy. ce mot); mais, au lieu de se compter de 0 à 360° dans un même sens, ils se comptent de 0 à 90° seulement, à partir du Nord ou du Sud, en allant soit vers l'Est, soit vers l'Ouest. Les directions des quatre points cardinaux sont désignées par les mots *Nord, Sud, Est, Ouest* (Voy. POINTS CARDINAUX), et s'indiquent par les initiales N, S, E, O. Les directions qui divisent en deux parties égales les angles formés consécutivement par les quatre directions précédentes portent un nom composé de ceux des deux directions entre lesquelles elles sont comprises, mais dans lequel les mots Nord ou Sud sont toujours énoncés les premiers. Ainsi la direction intermédiaire entre le Nord et l'Est porte le nom de *Nord-Est*: elle s'indique par les lettres NE; la direction intermédiaire entre l'Est et le Sud porte le nom de *Sud-Est* et s'indique SE; la direction intermédiaire entre le Nord et l'Ouest se nomme *Nord-Ouest* et s'indique NO; enfin, la direction intermédiaire entre le Sud et l'Ouest se nomme *Sud-Ouest* et s'indique SO. On procède de même pour les directions intermédiaires entre celles-ci; mais les noms des points cardinaux s'énoncent et s'écrivent les premiers. Ainsi la direction intermédiaire entre le Nord et le Nord-Est se nomme *Nord-Nord-Est* et s'indique N. NE; la direction intermédiaire entre le Nord-Est et l'Est s'énonce *Est-Nord-Est* et s'écrit E. NE, et ainsi des autres. Enfin le nom des directions intermédiaires entre celles que nous venons de nommer se forme de celui des directions N, NE, E, SE, S, SO, O, NO

entre lesquelles elle est comprise, en énonçant d'abord celle dont elle est la plus voisine, et faisant précéder l'autre du mot *quart*; et elles s'indiquent de la même manière. Ainsi la direction comprise entre le Nord et le Nord-Nord-Est, étant aussi comprise entre le Nord et le Nord-Est, s'énonce Nord quart Nord-Est, et s'écrit N. $\frac{1}{4}$ NE; la direction comprise entre le Nord-Nord-Est et le Nord-Est, comprise comme la précédente entre le Nord et le Nord-Est, s'énonce Nord-Est quart Nord, et s'écrit NE. $\frac{1}{4}$ N; et ainsi des autres.

L'ensemble de ces 32 rumbs forme la *rose des vents*, qui est tracée comme l'indique la figure ci-contre, sur les boussoles marines. Ces directions,



exprimées en degrés à partir de la ligne Nord-Sud, se traduisent conformément au tableau ci-dessous.

DU NORD VERS		DU SUD VERS		
l'Est.	l'Ouest.	l'Est.	l'Ouest.	
Nord	Nord	0° 0'	Sud	Sud
N. $\frac{1}{4}$ NE	N. $\frac{1}{4}$ NO	11° 15'	S. $\frac{1}{4}$ SE	S. $\frac{1}{4}$ SO
N. NE	N. NO	22° 30'	S. SE	S. SO
NE. $\frac{1}{4}$ N	NO. $\frac{1}{4}$ N	33° 45'	SE. $\frac{1}{4}$ S	SO. $\frac{1}{4}$ S
NE	NO	45° 0'	SE	SO
NE. $\frac{1}{4}$ E	NO. $\frac{1}{4}$ O	56° 15'	SE. $\frac{1}{4}$ E	SO. $\frac{1}{4}$ O
E. NE	O. NO	67° 30'	E. SE	O. SO
E. $\frac{1}{4}$ NE	O. $\frac{1}{4}$ NO	78° 45'	E. $\frac{1}{4}$ SE	O. $\frac{1}{4}$ SO
Est	Ouest	90° 0'	Est	Ouest

Comme ces 32 rums ne suffiraient pas pour indiquer toutes les directions qu'on peut avoir à considérer, on y joint au besoin un certain nombre de degrés et de minutes, en indiquant celui des quatre points cardinaux vers lequel ces degrés doivent être

comptés. Ainsi NO. $\frac{1}{4}$ O, 3° 15' Ouest, répondrait à 56° 15' plus 3° 15', total 59° 30' comptés du Nord vers l'Ouest; de même E. $\frac{1}{4}$ SE, 6° 30' Sud, répondrait à 78° 45' moins 6° 30', soit 72° 15' comptés du Sud vers l'Est, et ainsi de suite.

RUPTURE (RÉSISTANCE A LA), résistance maximum qu'un prisme peut opposer à un effort longitudinal tendant à le rompre par extension ou par compression. Nous ne parlerons dans cet article que de la rupture par extension ou traction; on trouvera à l'article **ÉCRASEMENT** (Résistance à l') ce qui se rapporte à la rupture par compression. La rupture des prismes par extension a été l'objet d'un très-grand nombre d'expériences; nous citerons celles qui doivent inspirer le plus de confiance.

Bois. — Il résulte des expériences faites par Rondelet sur des tringles de chêne d'une densité de 0,861, dont la section a varié de 0^{cm},226 à 0^{cm},677 et la longueur de 0^m,027 à 0^m,487 que la résistance à la rupture est pour cette espèce de bois de 976^k,3 par centimètre carré de section.

On doit à MM. Chevandier et Wertheim des expériences sur diverses essences de bois qui ont fourni les résultats suivants :

Nature des bois.	Densité.	Charge de rupture par centimètre carré.
Acacia.....	0,717	793 ^k
Sapin.....	0,493	418
Charme.....	0,756	299
Bouleau.....	0,812	430
Hêtre.....	0,823	357
Chêne à glands pédonculés.	0,808	649
Chêne à glands sessiles...	0,872	566
Pin sylvestre.....	0,559	248
Orme.....	0,723	699
Sycomore.....	0,692	616
Frêne.....	0,697	678
Aune.....	0,601	454
Tremble.....	0,602	720
Érable.....	0,674	358
Peuplier.....	0,477	197

On peut compléter cette liste à l'aide des données fournies par divers autres expérimentateurs.

Nature des bois.	Charge de rupture
Bois de tek.....	1100 ^k
Buis.....	1400
Poirier.....	690
Acajou.....	560
Larix.....	125

Il existe d'ailleurs, pour une même essence de bois, des différences souvent notables, ce qui ne saurait étonner si l'on réfléchit aux conditions variables de la végétation.

MÉTAUX. — Les barres résistent bien moins à la traction que les fils. On remarque du reste de grandes différences, non-seulement entre les barres d'un même métal provenant de diverses origines, mais même entre celles qui viennent du même minerai et sortent de la même usine; ces différences, dues aux détails de la fabrication, sont encore inexplic-

quées. Nous réunissons dans le tableau suivant, extrait de l'ouvrage de M. Morin sur la *Résistance des matériaux*, les résultats moyens des expériences faites par divers auteurs sur la résistance des métaux à la traction.

Nature des métaux.	Charge de rupture par millimètre carré.
Fer forgé ou étiré, le plus fort, petit échantillon.....	60,0
Fer forgé ou étiré, le plus faible, très-gros échantillon.....	25,0
Fers en barre, moyen.....	40,0
Tôle, dans le sens du laminage....	41,0
Id. dans le sens perpendiculaire.	36,0
Tôle forte, corroyée dans les deux sens.....	35,0
Fer dit <i>ruban</i> , très-doux.....	45,0
Fil de fer non recuit, moyen, de 1 à 3 ^{mm} de diamètre.....	60,0
Fil de fer non recuit, de l'aigle, de 0 ^{mm} ,23 de diamètre.....	90,0
Fil de fer non recuit, le plus fort, de 0 ^{mm} ,5 à 1 ^{mm} de diamètre....	80,0
Fil de fer non recuit, le plus faible, d'un grand diamètre.....	50,0
Câble en fils de fer.....	30,0
Chaines en fer doux, ordinaires, à maillons oblongs.....	24,0
Chaines en fer doux, renforcées par des étançons.....	32,0
Fonte grise, la plus forte, coulée verticalement.....	13,5
Fonte grise, la plus faible, coulée horizontalement.....	12,5
Acier fondu, étiré au marteau....	100,0
Id. moyen.....	75,0
Id. mal trempé.....	36,0
Bronze des canons.....	16,0 à 23,0
Cuivre rouge, laminé, dans le sens de la longueur....	21,0
Cuivre rouge, laminé, de qualité supérieure.....	26,0
Cuivre rouge, battu.....	25,0
Id. fondu.....	13,4
Laiton fin.....	12,6
Arcs ou pièces d'assemblage en fer forgé ou en fonte grise.....	25,2
Fil de cuivre rouge, non recuit, le plus fort, au-dessous de 1 ^{mm} de diamètre.....	70,0
Fil de cuivre rouge non recuit, moyen, de 1 à 2 ^{mm} de diamètre..	50,0
Fil de cuivre rouge non recuit, le plus faible.....	40,0
Fil de laiton non recuit, le plus fort, au-dessous de 1 ^{mm} de diamètre..	85,0
Fil de laiton non recuit, moyen....	50,0
Fil de platine écroui, non recuit, de 0 ^{mm} ,127 de diamètre.....	116,0
Fil de platine écroui, recuit.....	34,0
Étain fondu.....	3,0
Zinc fondu.....	6,0
Id. laminé.....	5,0
Plomb fondu.....	1,28
Id. laminé.....	1,35
Fil de plomb de coupelle, fondu, passé à la filière de 4 ^{mm} de diam.	1,36

PIERRES. — Les matériaux de cette espèce sont rarement exposés à un effort de traction direct, et cela n'arrive que lorsqu'ils sont soumis à des forces obliques ou transversales qui tendent à les rompre en les infléchissant. Voici, d'après M. Poncelet, la résistance à la rupture pour les pierres, les briques, le plâtre, le mortier, qui entrent le plus fréquemment dans les constructions :

Indication des corps soumis à la traction.	Résistance à la rupture par centimètre carré.
Basalte d'Auvergne.....	77,0
Calcaire de Portland.....	60,0
Id. blanc, d'un grain fin et homogène.....	14,4
Calcaire blanc, à tissu compacte (lithographique).....	30,8
Calcaire blanc, à tissu arenacé.....	22,9
Id. oolithique.....	13,7
Briques de Provence, très-bien cuites et d'un grain très-uni.....	19,5
Briques ordinaires, faibles.....	8,0
Plâtre gâché ferme.....	11,7
Id. moins ferme.....	5,8
Id. ordinaire.....	4,0
Mortiers en chaux grasse et sable, de 14 ans.....	4,2
Mortiers en chaux grasse et sable mauvais.....	0,75
Mortiers en chaux hydraulique et sable.....	9,0
Mortiers en chaux éminemment hydraulique.....	15,0
Mortiers de ciment de Pouilly et sable (parties égales) après un an de durcissement, dans l'air ou dans l'eau.	9,6

CORDES. — La résistance des cordages à la rupture varie beaucoup avec leur mode de fabrication. D'après les expériences de M. Bodson de Noirfontaine, officier du génie, sur des cordes de fabrica-

tion ordinaire, en chanvre de Lorraine ou d'Alsace, la résistance à la rupture est conforme au tableau suivant :

	Diamètre	Résistance par millim. carré.
Aussières et grelins en chanvre de...	Strasbourg..... 13 à 17	8,8
	Lorraine..... Id.	6,5
	Strasbourg et Lorraine..... 23	6,0
	Strasbourg..... 40 à 54	5,5
	Vieille corde..... 23	4,2

Les cordes se rompent de préférence aux points d'attache ou d'enroulement et aux nœuds. Elles peuvent supporter pendant quelques minutes un effort de 5 à 6 kilogrammes par millimètre carré de section; mais, au bout de quelques heures, elles rompent sous un effort beaucoup moindre, après s'être allongées d'un sixième environ de leur longueur primitive. Il convient de ne les charger que de 2^h, 5 à 3^h par millimètre carré.

D'après M. P. Barlow les câbles en chanvre goudronnés employés dans la marine anglaise se rompent sous un effort qui est en moyenne de 3^h, 89 par millimètre carré et varie de 4^h, 43 à 3^h, 64. La résistance des câbles employés dans la marine française est de 4^h, 39 par millimètre carré.

COURROIES. — On manque d'expériences sur la résistance des courroies à la rupture. On sait seulement, d'après une observation de M. Morin, qu'elles peuvent supporter d'une manière permanente un effort de 2^h par millimètre carré de section.

(Voy. l'Introduction à la Mécanique industrielle de M. Poncelet, et la Résistance des matériaux par M. Morin.)

Voy. aussi l'art. ALLONGEMENT (Résistance à l'). Les divers modes de rupture qui se produisent dans les constructions ou dans les machines, peuvent tous se rattacher par la théorie à la rupture par allongement ou par compression.

S

SABLIÈRE, pièce de charpente horizontale dans laquelle s'assemblent les poteaux d'un pan de bois (Voy. PANS DE BOIS). Il y a deux sablières à chaque étage : l'inférieure, placée à la hauteur du plancher, est la *sablière de chambre*; la supérieure, placée à la hauteur du plafond, est la *sablière haute*. Une dernière sablière, placée au-dessus du dernier plancher, reçoit les pieds des arbalétriers du COMBLE (Voy. COMBLE).

SABORDS, ouvertures pratiquées dans la coque d'un navire, entre les PRECEINTES, ou entre le *vibord* et le *plat-bord*, dans l'intervalle des *couples* (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

SAGITTAIRE, le neuvième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

SAISONS, divisions de l'année déterminées par les EQUINOXES et par les SOLSTICES (Voy. ces mots). Le printemps commence à l'équinoxe du printemps et se termine au solstice d'été; l'été commence au solstice d'été et se termine à l'équinoxe d'automne; l'automne commence à l'équinoxe d'automne et se

termine au solstice d'hiver; l'hiver commence au solstice d'hiver et se termine à l'équinoxe du printemps. Si l'orbite de la terre était circulaire, et que sa vitesse sur cette orbite fût constante, les quatre saisons auraient la même durée; mais l'orbite réelle est elliptique; la vitesse de la terre va en diminuant du PÉRIHÉLIE à l'APHÉLIE (Voy. ces mots), pour augmenter ensuite de l'aphélie au périhélie; enfin, la ligne des équinoxes n'est point perpendiculaire au grand axe de l'ellipse; il résulte de ces circonstances que les durées des saisons ne sont point égales.

	jours	heures	minutes.
La durée du printemps est de	92	20	59
— de l'été —	93	14	13
— de l'automne —	89	18	35
— de l'hiver —	80	0	2

On voit que l'été est la saison la plus longue, et l'hiver la saison la plus courte. On remarque encore que la somme des durées du printemps et de l'été est de 186^h 11^h 12^m; tandis que la somme des durées

de l'automne et de l'hiver n'est que de $17^{\text{h}} 18^{\text{m}} 37^{\text{s}}$. Ainsi le soleil reste dans l'hémisphère boréal huit jours de plus environ que dans l'hémisphère austral.

Les causes principales des différences de température qui existent entre les saisons, sont la hauteur méridienne du soleil, et la durée du jour (*Voy. Jour*). De l'équinoxe du printemps au solstice d'été, la déclinaison du soleil, et par suite sa hauteur méridienne pour les lieux situés dans l'hémisphère boréal, vont sans cesse en augmentant, en même temps que la durée du jour surpasse de plus en plus la durée de la nuit. Le soleil restant ainsi un temps de plus en plus considérable au-dessus de l'horizon, et envoyant ses rayons dans une direction qui se rapproche sans cesse de la verticale, on conçoit que sa chaleur ait une influence de plus en plus grande sur la température du lieu que l'on considère. La hauteur méridienne du soleil et la durée du jour repassent par les mêmes valeurs; mais en sens contraire, du solstice d'été à l'équinoxe d'automne. Au delà, la déclinaison du soleil devient australe et augmente jusqu'au solstice d'hiver; ses rayons arrivent donc, dans un lieu appartenant à l'hémisphère boréal, sous une inclinaison qui s'éloigne de plus en plus de la verticale; en même temps, la durée du jour y devient inférieure à celle de la nuit, et diminue de plus en plus, jusqu'à ce que la déclinaison et la durée du jour repassent, en sens contraire, par les mêmes valeurs, depuis le solstice d'hiver jusqu'à l'équinoxe du printemps. On comprend donc que la chaleur solaire ait moins d'influence sur la température du lieu considéré pendant l'automne et l'hiver, que dans les deux autres saisons.

Mais ce n'est pas à l'époque précise des solstices que correspondent la température la plus élevée et la température la plus basse. A partir du solstice d'été, l'influence de la chaleur solaire diminue; mais tant que la chaleur émanée de cet astre reste supérieure à la chaleur perdue par le rayonnement du globe, la température continue à s'élever; et c'est quinze jours environ après le solstice d'été qu'a lieu la plus haute température. De même, à partir du solstice d'hiver, l'influence de la chaleur solaire augmente; mais, tant que la chaleur émanée de cet astre reste inférieure à la chaleur perdue par rayonnement, la température continue à décroître; et c'est quinze jours après le solstice d'hiver qu'a lieu la température la plus basse.

(C'est par une raison semblable que la température la plus élevée du jour n'a pas lieu à midi, mais à deux heures; et que la température la plus basse de la nuit correspond à deux heures après minuit et non à minuit même.)

L'inégalité de température aux diverses saisons est encore augmentée par l'inégalité d'action de l'atmosphère sur les rayons solaires; une partie de la chaleur émise par cet astre est toujours absorbée par les couches atmosphériques; mais cette absorption est d'autant plus considérable que les rayons se présentent sous une inclinaison plus éloignée de la verticale. Pour un lieu situé dans l'hémisphère boréal, c'est donc au solstice d'été que l'absorption est la plus faible, et au solstice d'hiver qu'elle est la plus grande; ainsi cette cause conspire avec les autres pour accroître l'inégalité de température aux diverses époques de l'année.

La durée des saisons éprouve une variation lente due à la PRÉCESSION DES ÉQUINOXES et au mouvement du PÉRIHÉLIE (*Voy. ces mots*). L'équinoxe du printemps et le périhélie marchent l'un vers l'autre, et se rapprochent de $50'',2 + 11'',7$ ou de $61'',9$ par an. Lorsque, dans la suite des siècles, ces deux points seront confondus, le printemps aura la même durée que l'hiver, et l'été la même durée que l'automne (ces deux dernières étant les plus longues). Il y a eu au contraire une époque peu éloignée de nous où le périhélie répondait au solstice d'hiver. La distance du périhélie à l'équinoxe du printemps étant en 1861 de $10^{\circ} 29' 31''$, le temps écoulé depuis l'époque dont il s'agit, est le quotient de ce nombre par $61'',9$. En faisant le calcul, on trouve 610 ans environ; c'est donc vers l'année 1251 de notre ère qu'a eu lieu le phénomène dont il s'agit. A cette époque, la durée de l'automne était égale à celle de l'hiver, et celle du printemps à celle de l'été (ces deux dernières étant les plus longues).

SAPINE, espèce de chèvre employée dans les travaux de construction pour élever les matériaux à une grande hauteur. Elle se compose d'un mât vertical, reposant à sa partie inférieure par un pivot, et maintenu à sa partie supérieure par des cordages fixés aux édifices voisins. Elle porte vers le haut une moise horizontale, reliée au mât par des contre-fiches. Aux deux extrémités de la moise sont établies deux poulies, et une troisième est établie au sommet du mât. Sur ces trois poulies fixes passe une corde dont une extrémité s'enroule sur un treuil à engrenage disposé au pied du mât et dont l'autre extrémité, après avoir passé sous la gorge d'une poulie mobile, remonte se fixer à la moise. C'est à la chape de la poulie mobile que l'on suspend le fardeau à élever.

Soit r le rayon du treuil, R le rayon de la circonférence primitive de la roue d'engrenage montée sur l'axe du treuil, ρ le rayon du pignon engrenant avec cette roue, l la longueur du bras de manivelle monté sur l'axe de ce pignon, T la tension de la corde qui s'enroule sur le treuil, et F la force qu'il faut appliquer au maneton de la manivelle perpendiculairement à son rayon. En négligeant le frottement on trouvera, par l'application du principe de l'EFFET DU TRAVAIL (*Voy. ce mot*),

$$F = T \cdot \frac{r\rho}{lR}$$

Mais, d'après la théorie de la poulie mobile (*Voy. POULIE*), on a

$$T = \frac{1}{2} P,$$

en désignant par P le poids à élever; il vient donc en définitive

$$F = \frac{1}{2} P \cdot \frac{r\rho}{lR}$$

Si, par exemple, on a $l = 10\rho$, et $R = 5r$, il en résultera

$$F = \frac{1}{100} P.$$

SAROS DES CHALDÉENS, période astronomique qui se composait de :

- 223 révolutions synodiques de la lune,
- 241 — tropiques,
- 239 — anomalistiques,
- 242 — draconitiques,

c'est-à-dire de 223 fois l'intervalle de temps compris

entre deux retours de la lune à la conjonction avec le soleil,

ou de 241 fois l'intervalle de temps compris entre deux retours de la lune au même équinoxe, ou de 239 fois l'intervalle de temps compris entre deux retours de la lune au périégée; ou enfin de 242 fois l'intervalle de temps compris entre deux retours de la lune au même nœud.

Si cette période n'était pas connue, on la retrouverait de la manière suivante. Le moyen mouvement du soleil est de 59' 8", 19 et le moyen mouvement du nœud de la lune est de 3' 10", 78 en sens contraire; le moyen mouvement relatif de ces deux mobiles est donc la somme de ces deux nombres, ou 1° 2' 18", 97; si l'on divise 360° par ce nombre, ou 1 296 000" par 3738", 97 on trouve pour quotient 346,6195. En nommant donc Σ la durée de la révolution synodique du nœud de la lune et σ la révolution de la lune elle-même, on a

$$\Sigma = 346,6195.$$

et $\sigma = 29,5306$

d'où $\Sigma = 11,73783 \sigma$.

Si l'on multiplie les deux membres par la série des nombres entiers jusqu'à ce qu'on obtienne pour σ coefficient de σ un nombre qui diffère peu d'un nombre entier, on arrive à

$$19\Sigma = 223,018.$$

Et, en effet, on trouve que

$$19\Sigma = 6585,78,$$

et que $223\sigma = 6585,23$.

Cette période fournissait aux anciens un moyen de prédire les *éclipses* (Voy. ce mot). Elle comprend 70 éclipses, dont 41 de soleil, et 29 de lune.

SATELLITES, planètes secondaires qui accompagnent une planète principale. La Terre a son satellite qui est la LUNE (Voy. ce mot); Jupiter a quatre satellites, Saturne en a huit, Uranus huit, Neptune un.

Les satellites sont à leur planète principale ce que les planètes elles-mêmes sont au Soleil. Ils obéissent aux lois de KÉPLER (Voy. ce mot), c'est-à-dire que, si l'on considère le mouvement relatif des satellites autour de chaque planète : 1° ils décrivent des ellipses dont la planète principale occupe l'un des foyers; 2° les aires décrites par le rayon vecteur mené de la planète à l'un de ses satellites sont proportionnelles aux temps; 3° les carrés des temps des révolutions des divers satellites d'une même planète sont entre eux comme les cubes des grands axes des orbites de ces satellites.

On sait que le satellite de la Terre tourne sur lui-même dans le temps qu'il emploie à tourner autour de notre globe, de telle sorte qu'il nous présente sans cesse la même face [sauf l'influence de la LIBRATION (Voy. ce mot)]. Cette coïncidence entre la durée du mouvement de rotation du satellite sur lui-même et celle de sa révolution autour de la planète, paraît être une loi générale du mouvement des satellites. C'est par cette considération qu'Herschel a cru pouvoir expliquer les variations périodiques d'éclat que présentent les satellites de Jupiter.

La révolution des satellites autour de la planète principale s'exécute en général dans le même sens que la révolution de celle-ci autour du Soleil.

Il y a exception pour les satellites d'Uranus.

Nous réunirons ici les données que l'observation

et le calcul ont pu fournir sur les satellites des différentes planètes :

Satellites de Jupiter.

	Distances moyennes, la planète. le rayon de celle-ci étant 1.	durée de la révolution.	Masse, celle de la planète étant 1.
1 ^{er} satellite.	6,049	1,7691	0,000017
2° —	9,623	3 5512	0,000023
3° —	15,350	7,1546	0,000088
4° —	16,998	16,6888	0,000043

Les orbites de ces satellites ne font que de très-petits angles avec l'orbite de la planète.

Les satellites de Jupiter ont été découverts par Galilée (Voy. CONFIGURATIONS des satellites de Jupiter. Voyez aussi ÉCLIPSES des satellites de Jupiter).

Satellites de Saturne.

	Distances moyennes, le rayon de la planète étant 1.	Durées des révolutions.
1 ^{er} satellite.	3,35	0,943
2° —	4,30	1,370
3° —	5,28	1,888
4° —	6,82	2,759
5° —	9,52	4,517
6° —	22,08	15,945
7° —	26,78	21,297
8° —	64,36	79,330

Le 1^{er} satellite a été découvert par Herschel, ainsi que le 2°; le 3°, le 4° et le 5° ont été découverts par Dominique Cassini; le 6° a été découvert par Huyghens; le 7° par M. Lassell en 1848; enfin le 8° avait été découvert par Dominique Cassini.

Ces satellites se meuvent à peu près dans le plan de l'anneau (Voy. ANNEAU DE SATURNE).

Satellites d'Uranus.

	Distances moyennes, le rayon de la planète étant 1.	Durées des révolutions.
1 ^{er} satellite.	7,44	2,520
2° —	10,37	4,144
3° —	13,12	5,893
4° —	17,37	8,986
5° —	19,85	10,961
6° —	23,18	13,846
7° —	45,51	38,075
8° —	91,01	107,694

Les orbites de ces satellites sont inclinées de 79 degrés sur le plan de l'écliptique, et leurs mouvements sont de sens contraire à celui de la planète dans son orbite, ce qui forme une exception à la loi ordinaire du mouvement des satellites.

Les 5°, 7° et 8° satellites d'Uranus n'ont été vus que par W. Herschel.

Satellite de Neptune.

Distance moyenne, le rayon de la planète étant 1 : 13,06.

Durée de la révolution : 51,8769.

Ce satellite a été découvert par M. Lassell.

(Voy. l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1865.)

SATURNE, l'une des planètes principales. Sa

moyenne distance au Soleil est 9,538852,

celle de la Terre étant 1 ; la durée de sa révolution sidérale est de

10759^d, 219817

ou plus de 29 ans ; et son moyen mouvement diurne est de

2' 0", 4548.

Son orbite, dont l'excentricité est

0,0559956,

fait un angle de

2° 29' 36"

avec le plan de l'écliptique. Le diamètre de Saturne est de

9,527,

celui de la Terre étant 1. Il en résulte que son volume est exprimé par

864,694

celui de la Terre étant pris pour unité. Sa masse est exprimée par

100,806,

celle de la Terre étant 1 ; et sa densité est les 0,132 de celle du globe terrestre ; densité 0,66, celle de l'éther.

Saturne tourne en 10^h 30^m, d'occident en orient, autour d'un axe qui fait un angle d'environ 61° $\frac{1}{2}$ avec le plan de l'écliptique.

Cette planète se présente à nos yeux comme une étoile un peu moins brillante que Jupiter et d'un éclat plus terne et plus plombé. Vue avec une bonne lunette, son disque offre, dans le sens de l'axe de rotation, un aplatissement considérable qu'on a évalué à $\frac{1}{11}$.

Saturne est accompagné de huit SATELLITES (Voy. ce mot). Mais la particularité la plus remarquable que présente cette planète est la présence d'une espèce de satellite annulaire que l'on appelle l'ANNEAU DE SATURNE (Voy. ce mot), et qui donne à la planète l'aspect le plus étrange.

Les astronomes représentent Saturne par le signe ♄.

(Voyez l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1865.)

SCARIFICATEUR. Voy. MACHINES AGRICOLES.

SCIÉRIES. On emploie pour débiter les bois trois espèces de scies différentes : les scies droites à mouvement alternatif, les scies circulaires à mouvement de rotation continu, et les scies à lame sans fin.

Malgré quelques différences de détails, la disposition générale des scieries à lames droites est toujours à peu près la même. Il y a trois conditions à remplir : donner à la scie un mouvement alternatif dans le sens de sa longueur ; faire avancer graduellement la pièce à débiter pour la présenter à l'action de la scie ; lui donner en outre, à volonté, un petit mouvement latéral, afin d'obtenir un nouveau trait de scie parallèle au premier. Pour satisfaire à la première condition, on tend les lames de scie verticalement et parallèlement, en les fixant aux côtés supérieur et inférieur d'un châssis, mobile verticalement entre des guides (Voy. GUIDES DU MOUVEMENT). Le mouvement est donné au châssis par une bielle articulée à un arbre coudé qui forme manivelle (Voy. BIELLE et MANIVELLE). Cet arbre reçoit lui-même le mouvement à l'aide d'une courroie sans fin, et l'on dispose ordinairement aux extrémités de l'arbre deux volants égaux qui régularisent le mouvement alternatif, et aident la manivelle à franchir les points morts. La vitesse angulaire de l'arbre coudé est ré-

glée de manière à produire de 125 à 130 coups de scie par minute. La course de la scie est de 0^m,60. La surface de sciage varie de 5 à 6 mètres carrés par heure, et même plus, pour chaque lame, suivant la nature des bois.

La pièce à débiter est posée horizontalement et solidement fixée sur un chariot mobile dans le sens de la pièce. Ce chariot est guidé par des galets roulant sur des rails fixes. Il porte en dessous une longue crémaillère, engrenant avec un pignon qui tourne dans des collets fixes. Pour faire avancer le chariot, il suffit donc de faire tourner ce pignon. Mais le chariot ne doit avancer que pendant le mouvement ascendant de la scie, et il ne doit avancer que d'une très-faible quantité, qui varie de 2 à 5 millimètres, selon la nature des bois. Voici comment ce mouvement est obtenu : sur l'axe du pignon est montée une ROUE A ROCHET (Voy. ce mot) dont le cliquet d'arrêt est fixé au bâti de la machine. Un rochet engagé dans les dents de la roue est articulé à un levier que fait mouvoir un EXCENTRIQUE (Voy. ce mot) monté sur l'arbre coudé. Quand la scie descend, le rochet glisse sur les dents de la roue, et va s'engager un peu plus bas en franchissant ainsi un certain nombre de dents ; pendant ce mouvement, la roue demeure immobile. Quand la scie remonte, l'excentrique abaisse une des extrémités du levier, et élève celle qui est articulée au rochet. Celui-ci, en remontant, tire à lui la roue, qui tourne ainsi de la quantité angulaire correspondante à un certain nombre de dents, tandis que le cliquet d'arrêt glisse à son tour sur les dents, pour se remettre en prise ensuite. Le mouvement de la roue à rochet est transmis au pignon qui est solidaire avec elle, et celui-ci, agissant sur la crémaillère, fait avancer le chariot d'une petite quantité avec la pièce de bois qu'il porte. Quand la pièce a été sciée dans toute sa longueur, on soulève le rochet et le cliquet d'arrêt, et l'on ramène le chariot dans sa position primitive.

Pour pouvoir obtenir le mouvement latéral de la pièce à débiter, on ne la fait pas reposer sur le chariot même, mais sur un support mobile entre des guides dans le sens transversal par rapport au chariot. Deux longues vis, tournant dans des collets fixés au chariot, s'engagent dans des écrous fixés au support dont on vient de parler. Si l'on fait tourner les deux vis d'une même quantité dans le même sens, comme elles tournent dans des collets fixes, elles obligent les écrous, et par conséquent le support dont ils dépendent, à se mouvoir dans le sens transversal. Pour être sûr de faire tourner les deux vis de la même quantité, on monte sur leurs axes deux roues dentées égales qui sont en saillie sur le côté du chariot, et sur lesquelles passe une chaîne sans fin. Le mouvement de rotation imprimé à l'une de ces roues, à l'aide d'une petite manivelle, se transmet ainsi identiquement à l'autre. On peut donc faire mouvoir latéralement la pièce à débiter d'une quantité aussi petite que l'on veut, et rapprocher, par conséquent, à volonté les traits de scie. On peut voir, dans le tome III de la *Publication industrielle* de M. Armengaud, la description de la scierie mécanique de M. Philippe, qui est construite d'après le système que nous venons d'exposer. On trouvera dans le tome XIV du même recueil la description d'une scierie construite par M. Cochet pour

la Cochinchine, dans laquelle le châssis reçoit le mouvement par le bas, et celle de la *scie locomobile* de M. Frey, destinée à opérer dans les forêts mêmes. Elle est portée sur une voiture à quatre roues, et reçoit le mouvement d'une *Locomobile* (*Voy. ce mot*) par l'intermédiaire d'une courroie sans fin. Cette scie, à huit lames, donne 38 mètres carrés de sciage par heure.

On emploie souvent dans les scieries des châssis horizontaux. La disposition de la machine est d'ailleurs celle que nous avons décrite plus haut, avec cette différence que les lames agissant horizontalement par leur arête inférieure, la pièce à débiter se meut dans le sens vertical, de bas en haut. La scierie de placage établie à Saint-Maur est construite dans ce système. Le châssis ne porte qu'une lame, qui donne deux cent soixante-quinze coups par minute. La pièce à débiter n'avance que d'un demi-millimètre à chaque coup de scie. La surface de sciage est de 12 mètres carrés par heure.

L'emploi des scies circulaires est dû à M. Brunel. Dans les scieries de ce genre, la scie, dont le diamètre varie et peut aller jusqu'à 1 mètre, reçoit directement le mouvement de rotation transmis par une courroie sans fin à une poulie montée sur le même axe. La vitesse de rotation varie depuis 240 jusqu'à 850 tours par minute. Les moyens employés pour guider la pièce à débiter sont d'ailleurs analogues à ceux qui ont été décrits plus haut. La surface de sciage est, toutes choses égales d'ailleurs, plus que quadruple de celle qu'on obtient avec une scie droite. Mais les scies circulaires sont plus fragiles; elles sont surtout avantageuses pour le débit des petits bois.

Le premier essai d'une scierie à lame sans fin remonte à 1818; mais c'est M. Girandon qui a exécuté la première scierie complète de ce genre, d'après les idées de M. Thouard. La lame de scie se compose d'un ruban d'acier de 9 à 10 centimètres de large et de l'épaisseur des scies ordinaires. Ce ruban est formé de plusieurs morceaux assemblés à queue d'hironde et brasés à la soudure de cuivre ou d'argent. Cette lame sans fin passe sur deux poulies de 1^m, 30 de diamètre, garnies de cuir à leur pourtour, et placées l'une au-dessus de l'autre, de manière que la partie de la lame qui agit sur le bois à débiter a un mouvement vertical continu. La même lame débite à la fois deux pièces: l'une en montant, l'autre en descendant. La lame est maintenue, dans l'intervalle des deux poulies, par d'autres rouleaux qui lui conservent sa tension et l'empêchent de se briser. La vitesse angulaire des poulies est d'au moins 160 tours par minute. La vitesse du chariot est de 4 millimètres par mètre de parcours de la lame. La surface de sciage est d'au moins 60 mètres carrés par heure, et peut aller jusqu'à 70 (*Voy. le tome V de la Publication industrielle déjà citée*).

Dans toutes les évaluations précédentes, la surface de sciage est la somme des surfaces de bois séparées par la scie.

SCIES À RECÉPER, scies à l'aide desquelles on coupe transversalement et au même niveau tous les pilots d'une fondation. On leur donne diverses dispositions suivant les circonstances. Si les pieux ne doivent pas être recépés très-rigoureusement suivant un même plan horizontal, on peut em-

ployer la *scie oscillante*, représentée fig. 1, dont l'installation et la manœuvre sont d'une grande simplicité. La lame AB est tendue entre deux pièces obliques CD, C'D', réunies par leur extrémité

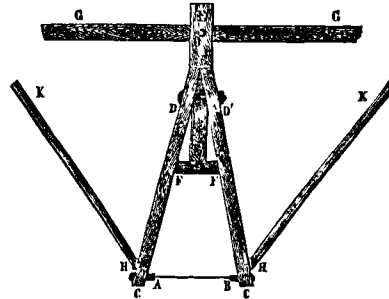


Fig. 1.

D, D' à une pièce verticale EE sur laquelle elles sont boulonnées; leur écart est maintenu par une entretoise FF, à laquelle la pièce EE est elle-même fixée par son extrémité inférieure. Le système peut osciller autour d'un axe horizontal O, engagé dans deux poutres horizontales, dont une seulement GG' est indiquée sur la figure. Pour mettre la scie en mouvement, plusieurs manœuvres agissent sur les perches ou bielles HK, H'K', articulées à leur extrémité en H et H' avec les pièces obliques CD et C'D'. Ces bielles ne sont point dirigées dans le plan de la figure; on les incline d'un même côté, de manière à appuyer la scie contre le pilot; et en leur donnant un mouvement alternatif autour de l'axe O, on fait agir la scie sur le pilot. A mesure que le sciage s'effectue, il faut déplacer l'appareil de manière à engager la scie de plus en plus profondément dans l'entaille qu'elle a faite. On peut recéper de cette manière de 16 à 18 pilots dans un jour.

Lorsque les pieux doivent être recépés très-exactement dans un même plan horizontal, il faut avoir recours à un autre système. Si le recépage doit se faire à une faible profondeur au-dessous du niveau de l'eau, on emploie la *scie de M. Vallée*, représentée par les figures 2 et 3. La figure 2 est l'élévation de l'appareil dans le sens longitudinal; la figure 3 en est la projection sur un plan vertical perpendiculaire au premier. La scie AA est tendue entre deux montants verticaux BB en fer, réunis par une croix de Saint-André EE, en fer aussi, dont la traverse inférieure CC est liée à demeure avec les montants, tandis que la traverse supérieure C'C' est unie aux montants par des vis VV qui permettent de les rapprocher ou de les écarter. Lorsqu'on les rapproche, ce mouvement écarte les extrémités inférieures des montants, et sert à bander la scie. Pour maintenir ce système dans son plan vertical, on a engagé les montants dans un châssis horizontal en bois GG, auquel les montants sont en outre reliés par des contre-fiches FF. Deux barres horizontales HH, fixées au châssis par des supports en fer, permettent de faire glisser tout l'appareil sur des pièces horizontales en bois établies sur l'échafaudage. On peut guider l'appareil de diverses manières; la plus simple consiste à établir sur ces pièces horizontales des rails en fer, sur lesquels roulent des galets fixés au châssis. En donnant

ainsi un mouvement alternatif à l'appareil, on fait agir la scie sur le pilot contre lequel elles'appuie; et en déplaçant peu à peu l'appareil dans le sens

perpendiculaire à son mouvement de va-et-vient, on achève le recépage.

Si le recépage doit s'opérer à une grande pro-

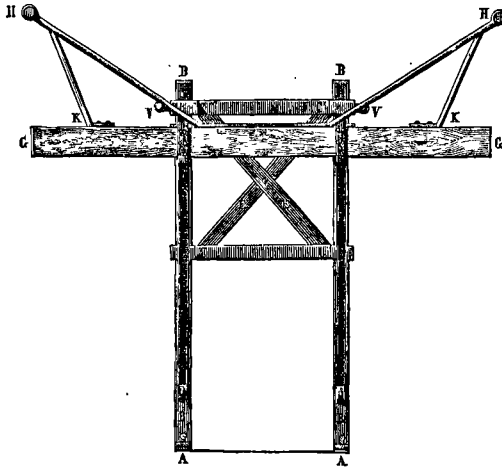


Fig. 2.

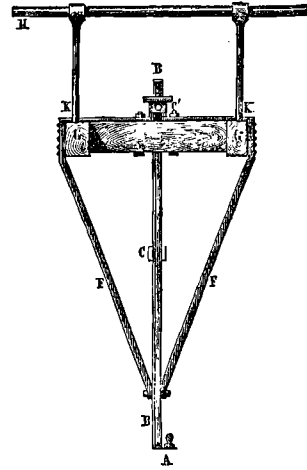


Fig. 3.

fondeur au-dessous du niveau de l'eau, on fait usage de la scie circulaire, représentée fig. 4. La lame AA, qui a la forme d'un disque, est adaptée par son centre à un axe vertical BB, dont la sec-

tion est polygonale dans le haut. On le met en mouvement à l'aide d'un pignon conique CC, monté sur cet axe, mais susceptible de glisser suivant sa longueur sans cesser d'être solidaire avec

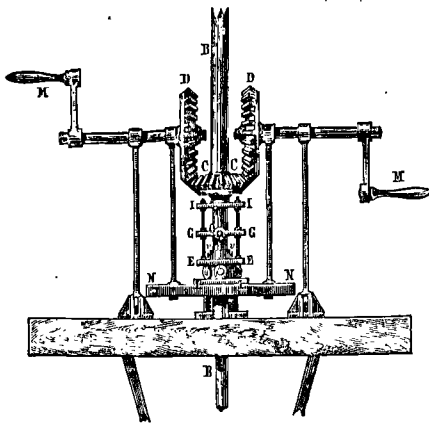


Fig. 4.

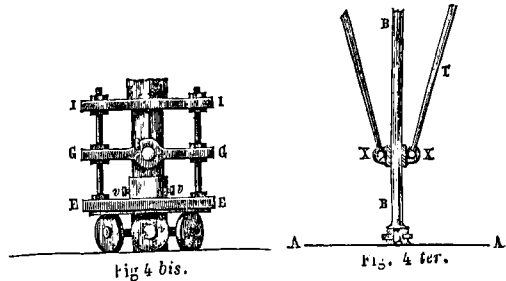


Fig. 4 bis.

Fig. 4 ter.

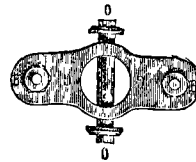


Fig. 5.

lui, et de deux roues d'angle DD, mues par les manivelles M, M. L'axe est soutenu verticalement par l'intermédiaire d'un plateau EE, serré contre l'axe par des vis de pression vv, et d'une entretoise annulaire GG, dans laquelle passe l'axe, mais qui porte elle-même un axe horizontal ou goujon OO, engagé à demeure dans l'axe vertical de la scie, comme le montre en plus grand la figure 5. Des vis verticales fixées par leur extrémité inférieure au plateau passent dans les oreilles H, H de l'entre-toise annulaire, et y sont maintenues par des écrous. Une seconde entre-toise annulaire semblable I, I, mais sans axe horizontal, réunit les extrémités de ces vis verticales. On verra tout à l'heure l'objet de ce dispositif. — Le plateau EE repose,

par l'intermédiaire de trois galets, sur un autre plateau LL fixé à un châssis en fer NN, qui porte également les supports des axes de deux roues d'angle. Ce châssis en fer peut se mouvoir, à l'aide d'une vis de rappel, sur un châssis fixe en bois, qui repose lui-même sur l'échafaudage. L'axe de la scie passe dans une bague XX, à laquelle sont articulées par un bout des tringles TT, fixées par l'autre bout au châssis mobile; ces tringles servent à maintenir l'axe dans sa position verticale. — En agissant sur les manivelles, on fait mouvoir les roues d'angle; celles-ci font tourner le pignon CC, qui entraîne l'axe vertical et fait tourner la scie; elle s'engage ainsi dans le pilot contre lequel elle s'appuie; à mesure qu'elle y pénètre, on fait mou-

voir le châsis mobile à l'aide de la vis de rappel, pour appuyer constamment la scie contre le fond de l'entaille qu'elle a faite; et en continuant ainsi on achève le recépage. Lorsqu'il faut faire varier la hauteur à laquelle la scie doit opérer, s'il ne s'agit que d'une faible variation, on desserre les vis *vv*, et en agissant sur les écrous HH de l'entre-toise GG, on peut rapprocher ou éloigner le plateau EE de l'entre-toise, d'où résulte un déplacement égal de la scie; puis on resserre les vis *vv*; s'il s'agit d'un déplacement important, comme de 12 à 15 centimètres, il faut déplacer le goujon OO lui-même, et l'engager dans l'un des autres orifices pratiqués à cet effet dans l'axe vertical de la scie.

(Voy. le Cours de routes et ponts, professé par M. Mary à l'École centrale des arts et manufactures.)

SCORPION, le huitième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

SCOTIE, sorte de moulure circulaire (Voy. MOULTURES).

SECOURS MUTUELS (SOCIÉTÉS DE), associations qui ont pour but de procurer à leurs membres divers avantages, tels que rentes viagères à partir d'un certain âge, assurance d'un capital après décès du père, ou du mari, etc. (Voy. RENTES VIAGÈRES, ASSURANCES SUR LA VIE).

Quelques-unes de ces sociétés sont constituées de telle sorte que chaque membre peut, moyennant un versement unique, obtenir jusqu'à un âge déterminé un traitement quotidien en cas de maladie. Pour traiter les questions de ce genre, il faut d'abord connaître le nombre probable de jours de maladie dans l'année pour une personne d'un âge donné. D'après les relevés statistiques, la loi suivant laquelle ce nombre varie avec l'âge peut être exprimée, de 30 ans à 70 ans, par la formule empirique

$$y = \frac{3670 (1,01)^{x-30}}{v_x} \quad [1]$$

dans laquelle *x* représente l'âge de la personne que l'on considère, et *v_x* le nombre des survivants de cet âge pris dans la table de Deparcieux. On trouvera, par exemple, qu'à 60 ans, époque pour laquelle on a

$$v_{60} = 463,$$

la valeur de *y* est

$$y = \frac{3670 (1,01)^{30}}{463} = 10,68,$$

c'est-à-dire que le nombre des jours de maladie est de 10 à 11.

D'après cela on peut calculer la somme *P* qu'il faut verser, à l'âge *n*, pour avoir droit pendant *t* années à un secours *a* par jour de maladie. Soit *y* le nombre de jours de maladie par an correspondant à l'âge *n* + *θ*. La somme à recevoir dans l'année sera *a*.*y*^θ; et sa valeur ramenée à l'époque actuelle sera

$$\frac{ay\theta}{(1+r)^\theta}$$

r étant l'intérêt annuel de 1^f. D'autre part, la probabilité pour le sociétaire de l'âge *n* d'atteindre l'âge *n* + *θ* est

$$\frac{v_{n+\theta}}{v_n};$$

l'espérance mathématique de recevoir le secours

dont il est question sera donc le produit de ces deux quantités, c'est-à-dire

$$\frac{ay\theta}{(1+r)^\theta} \frac{v_{n+\theta}}{v_n}.$$

La somme de toutes les espérances analogues, depuis l'âge *n* jusqu'à l'âge *n* + *t* - 1, qui correspond au commencement de la dernière année, exprimera la mise unique *P* que l'on cherche.

Si dans la formule [1] on met pour *x* la valeur *n* + *θ*, on obtient

$$y_\theta = \frac{3600 (1,01)^{n+\theta-30}}{v_{n+\theta}}.$$

En substituant à *y*_θ cette valeur dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{a \cdot 3600 (1,01)^{n+\theta-30}}{(1+r)^\theta v_n}.$$

En donnant à *θ* toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à *t* - 1, on aura tous les termes qui composent la valeur cherchée. La somme de ces termes peut s'écrire

$$\frac{a \cdot 3600}{v_n} \cdot (1,01)^{n+\theta-30} \times$$

$$\left[1 + \left(\frac{1,01}{1+r} \right) + \left(\frac{1,01}{1+r} \right)^2 + \left(\frac{1,01}{1+r} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1,01}{1+r} \right)^{t-1} \right].$$

La quantité entre parenthèses est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, si, comme cela a toujours lieu, on suppose *r* > 0,01. En faisant la somme de ces termes on pourra donc écrire

$$P = \frac{a \cdot 3600}{v_n} \cdot (1,01)^{n-30} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1,01}{1+r} \right)^t}{1 - \left(\frac{1,01}{1+r} \right)} \quad [2]$$

Si, par exemple, on suppose

$$n = 40, \quad t = 30, \quad r = 0,04, \quad a = 3^f,$$

on trouvera

$$v_{40} = 657,$$

et par suite

$$P = \frac{3^f \cdot 3600 \cdot (1,01)^{10}}{657} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1,01}{1,04} \right)^{30}}{1 - \frac{1,01}{1,04}} = 367^f,89.$$

Le versement unique peut être converti en une prime annuelle. Il faut pour cela considérer la prime comme une rente viagère temporaire, dont le paiement commence une année plus tôt qu'une véritable rente, attendu que celle-ci ne serait payée qu'en fin d'année, tandis que la prime se paye au commencement. Si l'on désigne par

$$A_n^{n+t-1}$$

la valeur d'une rente viagère temporaire de 1^f, de l'âge *n* à l'âge

$$n + t - 1,$$

et par *p* la prime annuelle,

$$p \cdot A_n^{n+t-1}$$

sera la valeur de la rente temporaire *p*. Cette valeur est inférieure à *P* précisément d'une prime, puisque celle-ci se paye un an plus tôt que la rente. On a donc

$$p + p \cdot A_n^{n+t-1} = P,$$

d'où

$$p = \frac{P}{1 + A_n^{n+t-1}} \quad [3]$$

Pour appliquer cette formule à l'exemple précé-

dent, il faut d'abord calculer la valeur d'une rente temporaire de 1^r, de 40 ans à 69 ans. Or, on sait qu'elle équivaut à la différence entre une rente viagère immédiate, et une rente viagère différée de 29 ans. La première a pour valeur

$$A_{40} \text{ ou } 15,1326$$

en se servant de la table de Deparcieux. La seconde a pour valeur, en général,

$$\frac{v_{n+t-1} \cdot A_{n+t-1}}{v_n \cdot (1+r)^{t-1}}$$

Ici l'on a

$$v_{n+t} \text{ ou } v_{70} = 310, \quad v_n \text{ ou } v_{40} = 657,$$

$$A_{70} = 6,3938 \text{ et } r = 0,04;$$

en effectuant les calculs, on trouvera pour la valeur de la rente différée 0,9674. La valeur de la rente temporaire est donc

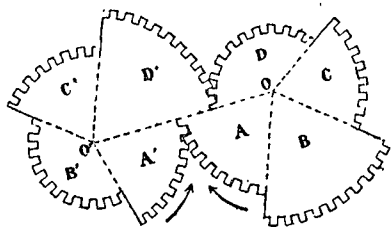
$$15,1326 - 0,9674 \text{ ou } 14,1652.$$

Par suite on aura

$$p = \frac{367^1,89}{1 + 14,1652} = 24^1,26.$$

Cette prime annuelle ne payerait le prix que de 8 jours de maladie environ; mais de 40 ans à 70, la moyenne est plus élevée, et répond à peu près à 10 jours $\frac{1}{2}$; il y a donc avantage pour le sociétaire à s'adresser à la Société de secours.

SECTEURS DENTÉS, dispositif employé pour faire varier brusquement le rapport des vitesses de deux axes parallèles pendant la durée d'une révolution. Pour cela on remplace les roues dentées par une suite de secteurs dont les angles au centre forment une somme égale à 360°. Les secteurs sont en même nombre sur les deux axes, et ils se correspondent comme A et A', B et B', C et C', D et D'.



Deux secteurs correspondants constituent un engrenage, mais un engrenage dont la course est limitée. Dans chacun de ces engrenages partiels, la longueur des arcs primitifs qui remplacent les circonférences primitives (Voy. ENGRENAGES) doit être la même sur les deux secteurs, ce qui exige que les angles au centre des secteurs correspondants soient en raison inverse de leurs rayons. Mais ces rayons doivent être en raison inverse des vitesses angulaires que l'on veut obtenir; par conséquent, les angles au centre doivent être en raison directe des vitesses angulaires. Ces conditions sont remplies dans l'exemple de la figure. Les secteurs A et A' sont de 72° chacun; leurs rayons sont égaux; par conséquent, pendant que le secteur A conduira le secteur A', le rapport des vitesses angulaires sera l'unité. Le secteur B est de 72°, le secteur B' est de 144°; mais le rayon de B' n'est que la moitié du rayon de B; pendant que le secteur B conduira le secteur B', le système O' tournera donc deux fois plus vite que le

système O. Les secteurs C et C' ont le même angle au centre de 72°, et des rayons égaux; le rapport des vitesses angulaires redeviendra donc égal à l'unité quand le secteur C conduira le secteur C'. Enfin le secteur D est de 144°, tandis que le secteur D' n'est que de 72°; mais le rayon de D' est le double du rayon de D, par conséquent, lorsque le secteur D conduira le secteur D' le système O' tournera avec une vitesse angulaire égale à la moitié de celle du système O. Le mouvement se composera donc de quatre périodes. Si l'on suppose la vitesse angulaire du système O constante et représentée par ω , pendant le 1^{er} cinquième de tour du système O, la vitesse angulaire du système O' sera ω ; pendant le 2^e cinquième de tour du système O, la vitesse de O' sera 2ω ; elle redeviendra égale à ω pendant le 3^e cinquième de tour; enfin, pendant les deux derniers cinquièmes de tour du système O, le système O' aura une vitesse angulaire égale à $\frac{1}{2}\omega$.

— On peut faire varier d'une manière quelconque le rapport des vitesses, pourvu que les conditions relatives aux angles et aux rayons des secteurs qui se correspondent soient remplies, et que la somme des angles au centre des secteurs soit 360° dans chacun des deux systèmes.

Le tracé des dents s'exécute comme pour les engrenages ordinaires; le nombre de dents doit être le même pour deux secteurs correspondants; et il faut qu'il n'y ait point d'interruption, c'est-à-dire qu'au moment où les deux dernières dents de deux secteurs qui se correspondent vont se quitter, les deux premières dents des secteurs qui suivent soient en prise sur la ligne des centres.

Le système peut être à retour, c'est-à-dire disposé de telle sorte que chacun des deux axes puisse à volonté conduire l'autre d'après les mêmes lois; c'est ce qui arrive dans l'exemple de la figure.

SECTION CONTRACTÉE, section minimum d'une veine fluide, située à une petite distance de l'orifice d'écoulement, et par laquelle il faut multiplier la vitesse pour obtenir la dépense (Voy. CONTRACTION DE LA VEINE, THÉORÈME DE TORRICELLI, ÉCOULEMENT DES FLUIDES).

SECTIONS PLANES (Géométrie descriptive), intersections des surfaces de polyèdres ou des surfaces courbes par des plans.

1. Pour construire l'intersection de la surface d'un polyèdre avec un plan donné, on détermine les projections des points de rencontre des arêtes du polyèdre avec le plan sécant, et on les unit par des droites successives qui forment le contour des projections de la section plane demandée. Si l'on veut obtenir cette section en vraie grandeur, on rabat le plan sécant sur l'un des plans de projections. Nous développerons cette méthode sur quelques exemples.

Section droite d'un prisme. Soit ABCDE (fig. 1) la base du prisme. On prend le plan vertical de projection parallèle à ses arêtes latérales; ces arêtes ont alors pour projections horizontales les droites Am, Bn, Cp, Dq, Er parallèles à la ligne de terre XY; soient A'A'', B'B'', C'C'', D'D'', E'E'' les projections verticales correspondantes. Afin de ne pas compliquer inutilement l'épure, on n'a pas figuré la projection horizontale de la base supérieure du prisme, qui n'est pas nécessaire pour

le but qu'on se propose. Soit POP' le plan sécant; puisqu'il est perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme, sa trace horizontale OP est perpendiculaire à la ligne de terre, et sa trace verticale OP' est

rencontre en un point x la trace horizontale OP. L'intersection du plan S'A' x avec le plan POP' est donc la droite qui, dans l'espace, va du point x au point x' où S'A' coupe OP'; la projection horizon-

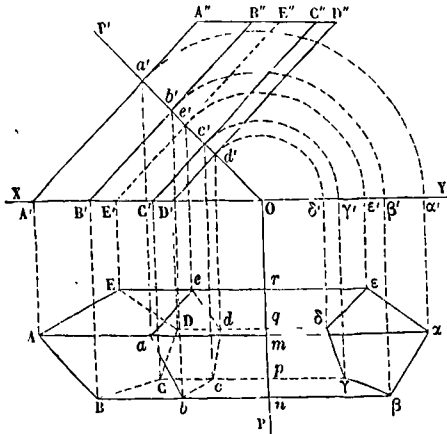


Fig. 1.

perpendiculaire aux projections A'A'', B'B'', etc., des arêtes latérales.

L'arête Am, A'A'' rencontre le plan sécant en un point qui se projette verticalement au point d'intersection a' de A'A'' avec la trace verticale du plan POP', puisque celui-ci est perpendiculaire au plan vertical de projection. La projection horizontale correspondante a se trouve à l'intersection de la droite a'a, perpendiculaire à la ligne de terre, avec la projection horizontale Am de l'arête considérée. On détermine de la même manière les projections b, c, d, e des points de rencontre des autres arêtes latérales avec le plan sécant; le polygone abcde est donc la projection horizontale de la section droite demandée; sa projection verticale est d'ailleurs sur OR' en a'b'c'd'e'.

Pour obtenir la section droite en vraie grandeur, on rabat le plan sécant sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale OP. Dans ce mouvement, les sommets de la section droite décrivent des arcs de cercle parallèles au plan vertical, et qui se projettent verticalement en a'a', b'b', c'c', d'd', e'e'; ces mêmes arcs ont pour centres les points m, n, p, q, r; et ils se projettent horizontalement suivant les droites

$$m\alpha, n\beta, p\gamma, q\delta, r\epsilon$$

parallèles à la ligne de terre. Les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sont donc le rabattement de la section droite, et $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ est cette section même rabattue en vraie grandeur.

II. Section plane d'une pyramide. Soit ABCD (fig. 2) la base de la pyramide; S et S' les projections de son sommet; les projections de ses arêtes seront les droites

$$SA, SB, SC, SD, \text{ et } S'A', S'B', S'C', S'D'.$$

Soient PO et P'O les traces du plan sécant, auquel on ne suppose aucune position particulière.

Pour construire le point de rencontre de l'arête SA, S'A' avec le plan sécant, considérons le plan qui projette cette droite sur le plan vertical; ses traces sont S'A' et A'A. Cette dernière, prolongée,

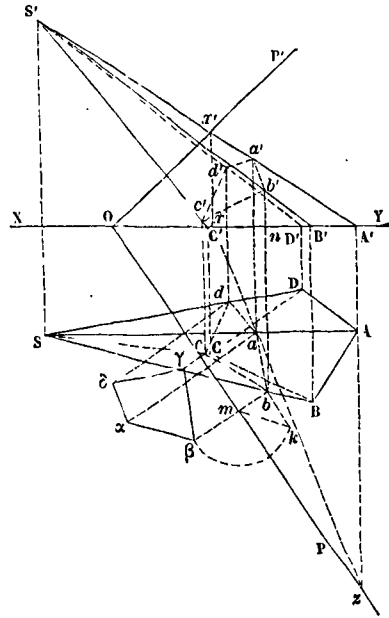


Fig. 2.

taile de cette intersection s'obtiendra donc en abaissant $x'x$ perpendiculaire sur la ligne de terre, et en joignant xz . Cette ligne de jonction coupe SA en un point a qui est la projection horizontale d'un point appartenant à la droite SA, S'A', et appartenant au plan sécant, puisqu'il est sur l'intersection de ce plan avec le plan projetant S'A' x . Le point a est donc la projection horizontale du point de rencontre de l'arête SA, S'A' avec le plan POP'. La projection verticale correspondante s'obtient en menant par le point a une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de S'A' en a'. On obtient de la même manière les projections b et b', c et c', d et d' des points où les arêtes respectives SB, SB', SC, SC', SD, SD' rencontrent le plan sécant. Le polygone abcd est donc la projection horizontale de l'intersection demandée; et le polygone a'b'c'd' est la projection verticale correspondante.

Pour obtenir la section plane en vraie grandeur, on rabat le plan POP' sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale OP. On applique pour cela la méthode expliquée à l'art. RABATTEMENT. Nous la rappellerons en l'appliquant au point b, b'. Du point b on abaisse sur la trace OP la perpendiculaire bm, que l'on prolonge. Par le point b on mène à OP une parallèle, sur laquelle on prend une longueur bk égale à la hauteur b'n du point b, b' au-dessus du plan horizontal. On joint mk; et du point m comme centre, avec mk pour rayon, on décrit un arc de cercle, qui vient couper en un point β la perpendiculaire bm; le point β est le rabattement du point b, b'. On opère de la même manière pour les autres sommets de la sec-

tion considérée; et l'on obtient en $\alpha\beta\gamma\delta$ le rabattement de cette section.

III. *Section plane d'un polyèdre.* Nous avons choisi pour exemple un cas intéressant de l'intersection d'un cube par un plan. Le cube a pour base le carré $ABDC$ (fig. 3) dont la diagonale AD est paral-

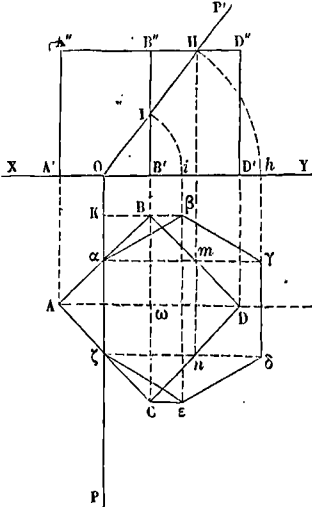


Fig. 3.

lèle à la ligne de terre. Ses arêtes latérales, égales à AB , se projettent verticalement en $A'A''$, $B'B''$, $D'D''$; sa base supérieure a pour projection horizontale $ABDC$, et pour projection verticale $A'D''$. Le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical. Sa trace horizontale OP passe par le milieu α du côté AB , et par conséquent aussi par le milieu ζ du côté AC ; sa trace verticale OP' passe par le milieu I de la projection $B'B''$ des arêtes latérales passant en B et en C . Le plan sécant coupe les six faces du cube. En premier lieu, il coupe la base inférieure suivant la droite $\alpha\zeta$. En second lieu il coupe les faces latérales correspondant à AB et AC suivant des droites qui se projettent horizontalement suivant αB et ζC , et verticalement suivant OI . Par des raisons de symétrie on voit, en troisième lieu, qu'il coupe les faces latérales correspondant à BD et à CD suivant des droites qui se projettent horizontalement suivant Bm et Cn , m et n étant les milieux des côtés BD et CD , et verticalement suivant Ih . Remarquons que ce point H est le milieu de $B''D''$ comme O est le milieu de $A'B'$; et il se trouve, avec les points m et n , sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Enfin le plan sécant coupe la base supérieure suivant une droite qui se projette verticalement au point H , et horizontalement en mn . La projection horizontale de la section est donc le polygone $\alpha BmnC\zeta$; et sa projection verticale est OH .

Pour obtenir la section en vraie grandeur, on rabat le plan POP' sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de $\alpha\zeta$. Les sommets qui se projetaient horizontalement en B et en C et verticalement en I , décrivent des arcs de cercle parallèles au plan vertical, et qui se projettent ver-

ticalement suivant l'arc Ii décrit du point O , et horizontalement suivant les droites $B\beta$ et $C\epsilon$ parallèles à la ligne de terre; ces sommets viennent donc se placer en β et en ϵ . Les sommets qui se projetaient horizontalement en m et en n , et verticalement en H , décrivent aussi des arcs de cercle parallèles au plan vertical, et qui se projettent verticalement suivant l'arc Hh décrit du point O , et horizontalement suivant les droites $m\gamma$ et $n\delta$ parallèles à la ligne de terre; ils viennent donc se placer en γ et en δ . En sorte que la section rabattue en vraie grandeur est le polygone $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$.

Il est facile de faire voir que ce polygone est un hexagone régulier. En effet désignons par R la demi-diagonale ωA du carré $ABDC$; le côté AB du cube sera exprimé par $R\sqrt{2}$. D'après la construction, on a

$$OB' = \frac{1}{2} \omega A = \frac{1}{2} R,$$

et

$$B'I = \frac{1}{2} B'B'' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} R\sqrt{2}.$$

Par suite

$$OI = \sqrt{\frac{1}{4} R^2 + \frac{2}{4} R^2} = \frac{1}{2} R\sqrt{3}.$$

Si k est le point de rencontre de βB et de OP , on a donc

$$k\beta = Oi = OI = \frac{1}{2} R\sqrt{3};$$

et par conséquent

$$\alpha\beta = \sqrt{\alpha k^2 + k\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{4} R^2 + \frac{3}{4} R^2} = R = \alpha\zeta.$$

Il résulte d'ailleurs des valeurs de αk et de $k\beta$ que l'angle $k\alpha\beta$ est un angle de 60° ; par conséquent l'angle $\zeta\alpha\beta$ est l'angle d'un hexagone régulier, c'est-à-dire de 120° . A cause de la symétrie de la figure par rapport aux droites AD et $\alpha\gamma$, on voit que tous les côtés de l'hexagone $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ sont égaux et que les angles sont tous de 120° ; donc la figure est un hexagone régulier.

Cette propriété du cube n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une propriété plus générale, savoir, que si l'on coupe un polyèdre régulier par un plan passant par le centre et par les milieux de deux arêtes consécutives, la section est un polygone régulier.

IV. L'intersection d'une surface courbe par un plan n'est qu'un cas particulier de l'intersection des surfaces, et se construit en général par la même méthode (*Voy. INTERSECTIONS DE SURFACES*), qui consiste à couper les deux surfaces données par une surface auxiliaire variable, et à chercher les points de rencontre des lignes d'intersection obtenues. Mais, quand l'une des surfaces est un plan, les surfaces auxiliaires que l'on emploie sont ordinairement des surfaces planes, dont l'intersection avec la surface courbe proposée soit facile à obtenir. Nous en développerons quelques exemples.

Section droite d'un cylindre. On prend le plan vertical de projection parallèle aux génératrices du cylindre. Dans l'exemple que nous avons choisi, la base, ou trace horizontale du cylindre, est un cercle AB (fig. 4); le contour apparent sur le plan horizontal est donc limité par les tangentes Cc , Dd parallèles à la ligne de terre; et le contour apparent sur le plan vertical est limité par les droites pa-

rallèles $A'A''$ et $B'B''$. — Le plan coupant POP' étant perpendiculaire aux génératrices du cylindre puisqu'il s'agit d'obtenir la section droite, sa trace horizontale OP est perpendiculaire à la ligne

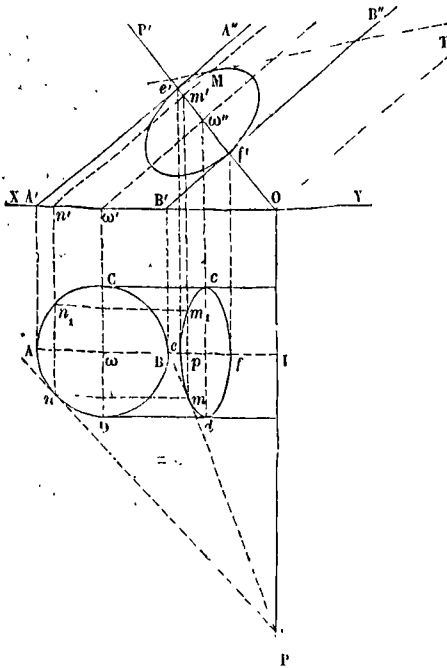


Fig. 4.

de terre, et sa trace verticale OP' est perpendiculaire à $A'A''$ et à $B'B''$. Pour obtenir deux points de la section droite demandée on mène un plan auxiliaire $nn'm'$ perpendiculaire au plan vertical et parallèle aux génératrices du cylindre. Ce plan coupe la surface cylindrique suivant deux génératrices nm , $n'm'$ et n_1m_1 , $n'_1m'_1$. Ces deux génératrices percent le plan sécant en deux points qui se projettent verticalement au même point m' , intersection de $n'm'$ et de OP' , et horizontalement en m et m_1 . Ce sont deux points de la section droite demandée. On obtient de la même manière autant de points que l'on veut de cette section. Sa projection horizontale est l'ellipse $cdef$, comprise entre les lignes Cc et Dd parallèles à la ligne de terre, et entre les lignes ce' et ff' perpendiculaires à XY . Les droites cd et ef sont les axes de cette ellipse.

Pour construire la tangente en un point m, m' de cette courbe, on remarque qu'elle est l'intersection du plan sécant POP' avec le plan tangent au cylindre suivant la génératrice dont la trace horizontale est n (*Voy. PLANS TANGENTS*). Or la trace horizontale de ce plan tangent est la tangente nt au point n de la base AB . Le point t où elle rencontre la trace horizontale du plan sécant est donc la trace horizontale de la tangente demandée; ainsi l'on obtient sa projection horizontale en joignant mt . Sa projection verticale se confond d'ailleurs évidemment avec OP' , puisque le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical de projection. Le point le plus haut et le point le plus bas de la sec-

tion sont les points e, e' et f, f' où la tangente est parallèle à la trace horizontale du plan sécant.

Si l'on veut avoir la section en vraie grandeur, on la fait tourner autour de son axe $ef, e'f'$ jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical et s'y projette en vraie grandeur. Le point m, m' qui se projetait verticalement en m' , se projettera sur une perpendiculaire à $e'f'$ menée par le point m' , à une distance de m' égale à la distance du point m, m' au plan vertical contenant la droite $ef, e'f'$, c'est-à-dire à une distance égale à mp . En prenant $m'M$ égal à mp , on aura donc le rabattement du point m, m' . On obtiendra de la même manière le rabattement de tous les points de la section. Cette section est une ellipse dont le petit axe est égal à $e'f'$, et dont le grand axe est égal au diamètre AB du cercle de base.

Pour construire la tangente au point M , on remarque que, dans le mouvement de rotation qu'on a fait subir au plan sécant, la droite It n'a pas varié de longueur, et qu'elle est venue se placer parallèlement au plan vertical, en demeurant perpendiculaire à la droite $ef, e'f'$. Si donc on mène OT perpendiculaire à OP' et égal à It , et qu'on joigne TM , on aura le rabattement de la tangente en m, m' , c'est-à-dire la tangente en M .

V. Sections coniques. La figure 5 représente l'in-

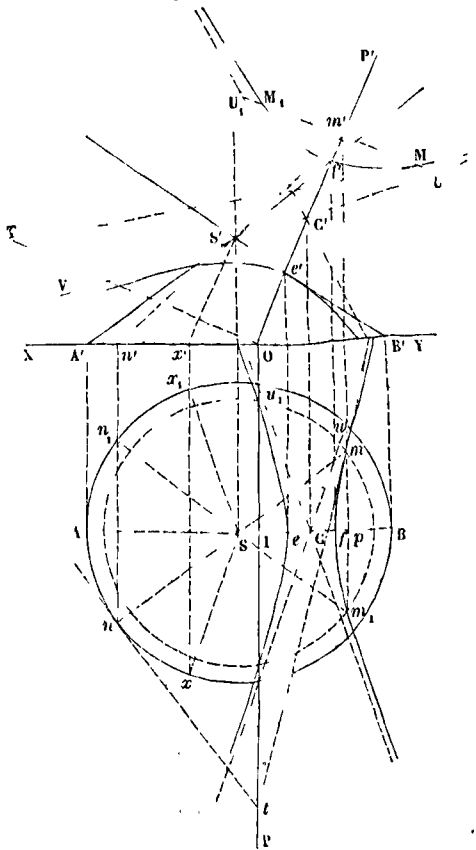


Fig. 5.

tersection d'un cône droit à base circulaire par un plan qui coupe les deux nappes. Le cône a pour

base le cercle AB , et pour sommet le point S , S' son contour apparent sur le plan vertical est limité par les droites $S'A'$ et $S'B'$. Le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical, et a pour traces OP et OP' ; la première est perpendiculaire à la ligne de terre. Pour obtenir un point de l'intersection, on mène par le sommet du cône un plan auxiliaire perpendiculaire au plan vertical. Ce plan auxiliaire coupe le cône suivant deux génératrices dont les traces horizontales n et n_1 sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, et qui ont pour projection verticale commune la droite $n'S'$. Le point m où cette projection rencontre OP' est la projection verticale de deux points de la section demandée; et, pour avoir les projections horizontales correspondantes, on abaisse du point m' une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre en m et m_1 des projections horizontales nS et n_1S des deux génératrices considérées. On obtiendrait de la même manière autant de couples de points de l'intersection cherchée qu'on le voudrait.

Pour mener la tangente en l'un de ces points, au point m , m' par exemple, on remarque qu'elle est l'intersection du plan sécant POP' avec le plan tangent au cône suivant la génératrice mS , $m'S'$. Or, la trace horizontale de ce plan tangent est la tangente en n au cercle de base. Le point t où cette tangente rencontre la trace horizontale OP du plan sécant est donc la trace horizontale de la tangente cherchée; et, en joignant mt , on obtient la projection horizontale de cette tangente. La projection verticale correspondante se confond d'ailleurs avec OP' . Le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe d'intersection sont les points f , f' et e , e' , où la tangente est parallèle à la trace horizontale du plan sécant.

Comme, dans le cas qui nous occupe, la section du cône est une hyperbole ainsi que sa projection sur le plan horizontal, il y a lieu, pour la commodité du tracé, de déterminer les asymptotes de cette projection. Le moyen le plus simple est le suivant. On remarque d'abord que si des points e' et f' où la trace verticale du plan sécant rencontre les projections verticales des génératrices extrêmes qui limitent le contour apparent, on abaisse sur la ligne de terre les perpendiculaires $e'e$ et $f'f$, l'hyperbole projection n'a pas de points entre ces parallèles; et, à cause de la symétrie de la figure par rapport à AB , les points e et f situés sur AB sont les sommets de l'axe transverse. Le milieu c de cet axe est donc le centre de la courbe; et les asymptotes doivent passer par ce point. — En second lieu, on sait que les sections faites dans une surface du second degré par des plans parallèles sont des courbes semblables; si la surface est un cône, ces courbes ont pour centre de similitude le sommet. Si ces courbes sont des hyperboles, elles ont donc leurs asymptotes parallèles. Mais parmi ces courbes semblables se trouve le système de deux droites obtenu en faisant passer le plan sécant par le sommet du cône: système que l'on peut regarder comme une hyperbole réduite à ses asymptotes. Si donc par le sommet S , S' on fait passer un plan parallèle au plan sécant, il coupera le cône suivant deux génératrices parallèles aux asymptotes de la section qu'on se propose de construire; et les pro-

jections horizontales de ces deux génératrices seront parallèles aux asymptotes de l'hyperbole projection horizontale de la section. De là cette construction très-simple. Menez par le point S' une parallèle à OP' , et par le point x' où elle rencontre XY , menez une perpendiculaire à cette ligne; elle rencontrera la base en deux points x et x_1 . Joignez Sx et Sx_1 ; par le point c menez enfin cu parallèle à Sx , et cu_1 parallèle à Sx_1 ; ce seront les asymptotes cherchées.

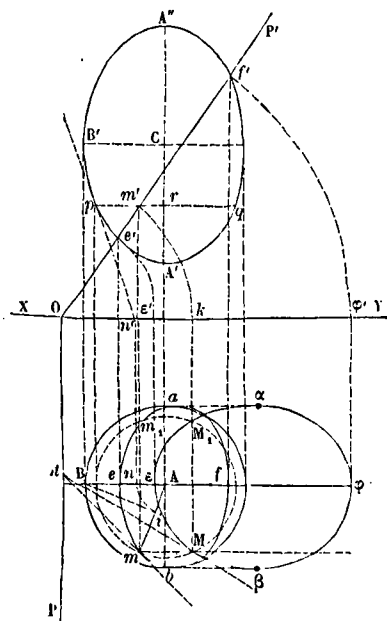
Pour obtenir la section conique en vraie grandeur, on peut imaginer, comme dans le problème précédent, qu'on la fasse tourner autour de la droite ef , $e'f'$, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical, et s'y projette par conséquent en vraie grandeur. Les points qui se projetaient en m' se projettent sur une perpendiculaire à OP' menée par le point m' , et à une distance de ce point égale à mp ou à m_1p . Si donc on prend sur cette perpendiculaire les longueurs $m'M$ et m'_1M_1 , égales à mp , on aura en M et M_1 le rabattement de deux points de la section. Si l'on veut la tangente en M , on remarquera que dans le mouvement qu'on a fait subir au plan sécant, la distance lt n'a pas varié, et que cette droite est venue se placer perpendiculairement à OP' . On mènera donc par le point O une perpendiculaire à OP' , sur laquelle on prendra une longueur OT égale à lt ; on joindra MT , et l'on aura la tangente en M .

Pour avoir les asymptotes de la section rabattue, on remarquera d'abord que le point c' , milieu de $e'f'$, est le centre de la courbe. Sur $m'M$ on prendra les longueurs $m'U$ et m'_1U_1 , égales à mu ; on joindra $c'U$ et c'_1U_1 , et l'on aura les asymptotes cherchées. — Ces éléments connus serviront à vérifier au fur et à mesure le tracé de la courbe par points.

VI. *Section plane d'une surface de révolution.* L'axe de la surface est supposé vertical; il se projette horizontalement en un point A (fig. 6), et verticalement suivant la verticale AA'' . La courbe $A'B'A''$ est la projection, en vraie grandeur, du méridien parallèle au plan vertical; le cercle AB est la projection horizontale de l'équateur CB . Le plan sécant est supposé perpendiculaire au plan vertical; ses traces sont OP et OP' . On coupe la surface et le plan sécant par un plan horizontal auxiliaire pq . Le point m' , où la trace de ce plan rencontre la trace verticale OP' du plan sécant, est la projection verticale de deux points de la section demandée. On obtient les projections horizontales correspondantes m et m_1 en abaissant du point m' une perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la projection horizontale du parallèle contenu dans le plan pq , c'est-à-dire de la circonférence décrite du point A comme centre avec pr pour rayon. On obtient de la même manière autant de points que l'on veut de la projection horizontale de la section demandée. Dans l'exemple de la figure 6, le méridien est une ellipse. La projection horizontale de la section est figurée en $aebf$; c'est une ellipse qui a pour grand axe le rayon AB de l'équateur, et pour petit axe la distance ef comprise, sur la direction AB , entre les projections e et f des points e' et f' où la trace verticale OP' du plan sécant coupe la courbe méridienne.

Pour construire la tangente en m , on construit par le procédé décrit à l'art. PLAN TANGENT (Voy.

ce mot) le plan qui touche la surface donnée au point m, m' . Pour cela, on mène la tangente en p à la section méridienne; on projette son pied n' sur AB au point n . On joint Am . Du point A comme



F. g. 6.

centre avec An pour rayon, on décrit un arc de cercle jusqu'à la rencontre de Am en un point i ; on mène enfin it perpendiculaire à Am ; c'est la trace horizontale du plan tangent. Le point t où elle rencontre la trace OP du plan sécant est donc la trace horizontale de la tangente en m, m' ; et si l'on joint mt , on a la projection horizontale de cette tangente. Sa projection verticale se confond d'ailleurs avec OP .

Le point le plus bas et le point le plus haut de la section sont les points e, e' et f, f' où la tangente est parallèle à la trace horizontale du plan sécant.

Pour obtenir la section en vraie grandeur, on rabat le plan POP' sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale OP . Dans ce mouvement, les points projetés en m' décrivent des arcs de cercle parallèles au plan vertical, et qui se projettent sur le plan suivant l'arc $m'k$ décrit du point O comme centre. Après le rabattement, ils se trouvent donc sur la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point k . — Mais ils se trouvent aussi sur les droites mM, m_1M , parallèles à la ligne de terre, et qui sont les projections horizontales des arcs décrits. Ils se trouvent donc en M et M_1 . On obtient ainsi autant de couples de points que l'on veut de la section rabattue.

Si l'on veut construire la tangente au point M , on remarque que le point t , trace horizontale de la tangente en m, m' à la section considérée, n'a pas changé de place dans le rabattement. En joignant Mt on a donc la tangente en M à la section rabattue.

Dans l'exemple de la figure 6, cette section est une ellipse qui a pour petit axe le diamètre de l'équateur de l'ellipsoïde, et pour grand axe la distance des points e et f , obtenus en rabattant les points e' et f' sur la ligne de terre en e' et f' par des arcs de cercle décrits du point O , puis en projetant ceux-ci sur la direction AB par des perpendiculaires à la ligne de terre.

VII. Lorsque la surface donnée est un hyperboloïde, la section peut être une hyperbole; cela a lieu pour l'hyperboloïde à une nappe si la trace verticale du plan sécant est parallèle à un diamètre non transverse, et pour l'hyperboloïde à deux nappes lorsque cette trace est parallèle à un diamètre transverse. On obtient alors les asymptotes par un procédé analogue à celui que nous avons indiqué pour le cône. On sait en effet que les sections faites dans un hyperboloïde et dans son cône asymptote sont des courbes semblables et semblablement placées. Si ce sont des hyperboles, elles ont donc leurs asymptotes parallèles; ces asymptotes sont donc parallèles aux génératrices suivant lesquelles on coupe le cône asymptote quand on fait passer par son sommet un plan parallèle au plan sécant. Le même parallélisme a lieu pour les asymptotes des projections horizontales des hyperboles considérées. D'ailleurs on connaît le centre de ces courbes; c'est le milieu de la distance ef , s'il s'agit de la projection, ou le milieu de la distance $e\varphi$, s'il s'agit de la courbe rabattue. Les asymptotes de ces courbes se trouvent donc déterminées.

VIII. Quand la surface est un hyperboloïde de révolution à une nappe, il peut arriver qu'elle soit donnée uniquement par son axe, et par les projections d'une génératrice. Dans ce cas, une même construction donne à la fois la courbe méridienne, et la projection de la section cherchée. Soit AA' (fig. 7) l'axe de la surface, placé dans le plan ver-

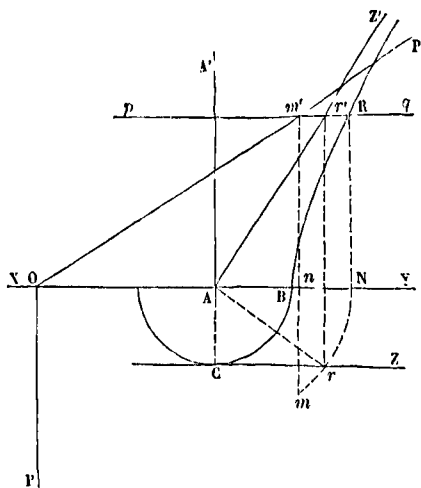


Fig. 7.

tical lui-même; soit AB le cercle de gorge; soient $CZ, A'Z'$ les projections d'une génératrice parallèle au plan vertical. Soit POP' le plan sécant perpendiculaire au plan vertical Ac projection.

Menons un plan horizontal auxiliaire quelconque pq . Il coupe la génératrice donnée en un point qui

se projette verticalement en r' , et horizontalement en r . Si l'on imagine que cette génératrice tourne autour de l'axe AA' , le point r, r' décrira un arc de cercle horizontal, qui se projettera horizontalement suivant l'arc rN décrit du point A , et verticalement suivant $r'q$. Quand il se placera dans le plan vertical de projection, sa projection horizontale sera en N sur la ligne de terre, et sa projection verticale, qui sera ici le point lui-même, sera à la fois sur une perpendiculaire à XY menée par le point N , et sur $r'q$; c'est-à-dire qu'il sera en R à l'intersection de ces deux droites. Le point R est donc un point de la section méridienne, situé sur le parallèle contenu dans le plan pq .

Maintenant, ce plan pq coupe le plan sécant POP' suivant une droite qui se projette verticalement en m' , et horizontalement suivant nm perpendiculaire à la ligne de terre. Le point m où cette projection horizontale rencontre l'arc Nr , projection du parallèle contenu dans pq , est donc un point de la projection horizontale de la section qu'on se propose de construire.

En faisant varier la position du plan auxiliaire pq , on obtiendra autant de points qu'on le voudra de la courbe méridienne, et de la projection horizontale de la section demandée. Le reste de l'épure s'achèverait comme il a été indiqué plus haut.

IX. Quand on se propose uniquement de déterminer la section en vraie grandeur, on peut abrégér les constructions en faisant usage d'une méthode, qui a été indiquée par Olivier, et qui n'exige pas la connaissance de la projection horizontale de l'intersection. Nous ferons connaître cette méthode en l'appliquant à la recherche de la section plane du tore. — Soit OA (fig. 8) l'axe du

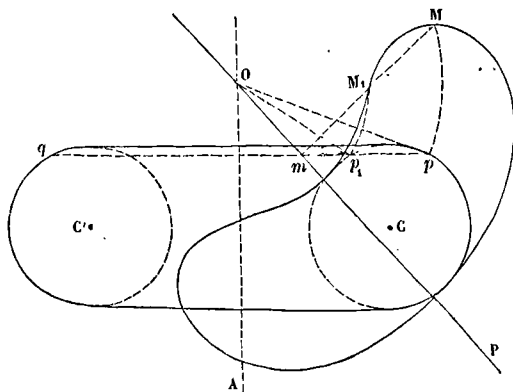


Fig. 8.

tore; soient C et C' les centres des deux circonférences qui forment la section méridienne. Soit OP la trace du plan sécant sur le plan méridien. Menons un plan auxiliaire perpendiculaire à l'axe; sa trace sur le plan du méridien, qui est celui de la figure, sera une droite pq perpendiculaire à OA . Cette trace coupe la trace du plan sécant en un point m , qui est la projection, sur le plan de la figure, des points de la section cherchée contenus dans le plan pq . Si l'on conçoit que l'on fasse tourner la section autour de OP jusqu'à ce qu'on l'amène dans le plan de la figure, ces points viendront se placer sur une perpendiculaire à OP élevée par

le point m . Il s'agit de savoir à quelles distances du point m . Or, le point O où le plan sécant coupe l'axe est à égale distance de tous les points situés sur un même parallèle de la surface. Considérons en particulier le parallèle qui passe par le point p ; tous les points de ce parallèle sont à une distance du point O égale à Op . Si donc, du point O comme centre avec Op pour rayon, on décrit un arc de cercle jusqu'à sa rencontre en M avec la perpendiculaire à OP élevée par le point m , le point M ainsi obtenu sera le rabattement d'un point de la section demandée. En considérant le parallèle qui passe par le point p_1 , on obtient un autre point M_1 du même rabattement. Et en faisant varier la position du plan auxiliaire pq , on obtient ainsi autant de points que l'on veut de la section rabattue. Suivant la position de ce plan auxiliaire on peut obtenir un ou plusieurs points de la courbe. On ne construit que la moitié de cette courbe située au-dessus de OP ; l'autre moitié s'obtient par symétrie.

X. Section plane d'une surface réglée. Pour les surfaces réglées autres que les cônes, les cylindres, ou les hyperboloïdes de révolution à une nappe, les sections planes s'obtiennent en cherchant le point où chaque génératrice rectiligne perce le plan sécant. Pour cela on mène par cette génératrice un plan convenablement choisi, on construit l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan sécant, et l'on détermine le point où la génératrice rencontre cette intersection. Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, et à axes inégaux, il est commode de faire passer les plans auxiliaires par le centre de l'ellipse de gorge qui est le centre de la surface. Dans le cas du parabolôide hyperbolique et des conoïdes, il est convenable de prendre

les plans auxiliaires parallèles au plan directeur. Dans le cas des surfaces réglées hélicoïdes qui se rencontrent le plus fréquemment dans les applications, c'est-à-dire la surface de vis à filet triangulaire et la surface de vis à filet carré, on fait passer les plans auxiliaires par l'axe.

Pour en donner un exemple, nous construirons la section plane perpendiculaire à l'axe d'une vis à filet triangulaire, et celle d'une vis à filet carré; ces sections sont utiles à connaître.

La vis à filet triangulaire est terminée par deux surfaces hélicoïdes à cône directeur, dont les génératrices sont assujetties à rencontrer l'axe $O, O'O''$ (fig. 9) et à s'appuyer sur deux hélices directrices $AB, A'B'$, et $ab, a'b'$ de même pas, et dont les origines A' et a' sont distantes d'un demi-pas. Ces deux surfaces forment en quelque sorte les deux nappes de la surface de la vis : une nappe supérieure qui va de l'hélice saillante à la portion de l'hélice rentrante située au-dessus, de $A''B''$ à $a''b''$ par exemple; et une nappe inférieure qui va de l'hélice saillante à la portion de l'hélice rentrante située au-dessous, de $A''B''$ à $a''b''$ par exemple.

Par le point a' nous menons un plan PQ perpendiculaire à l'axe de la vis; et nous nous proposons de construire son intersection avec les deux nappes de la surface. — Construisons d'abord son intersection avec la nappe supérieure comprise, en avant

du plan vertical de symétrie AB, entre les hélices projetées en $A'B'$ et en $a'b'$. Soit aO , $a'G$ la génératrice qui aboutit au point a , a' ; cette génératrice coupe en ce point même le plan sécant PQ, par

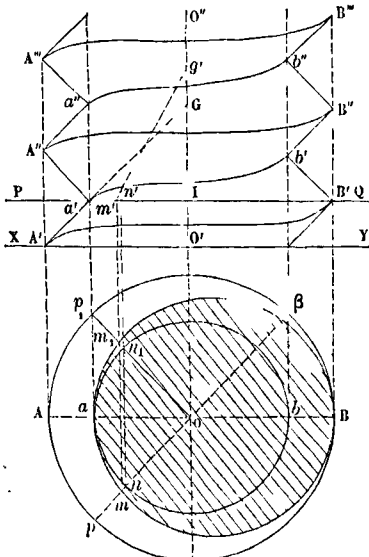


Fig. 9

conséquent le point a est un point de la projection horizontale de la courbe d'intersection cherchée. Par une raison analogue, le point B est un autre point de cette même projection. Il s'agit d'obtenir des points intermédiaires. Soit n , n' un point quelconque de l'hélice rentrante; la génératrice qui passe en ce point a pour projection horizontale nO . Pour avoir sa projection verticale, on remarquera que le point où la génératrice rencontre l'axe s'élève d'une quantité proportionnelle à l'angle dont la génératrice tourne; en sorte que si $n'g'$ est la projection cherchée on doit avoir

$$Gg' : h = aOn : 2\pi,$$

la lettre h désignant le pas de l'hélice. Cette proportion donne Gg' et par suite la projection verticale cherchée $n'g'$. Prolongeons cette projection jusqu'en m' à sa rencontre avec PQ; puis abaissons $m'm$ perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à sa rencontre en m avec le rayon nO prolongé; le point m , m' ainsi obtenu sera le point où la génératrice considérée perce le plan sécant. Ainsi le point m sera un point de la projection horizontale de la courbe d'intersection. En faisant varier la position de la génératrice, on obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de cette projection-horizontale, et l'on pourra tracer la courbe amb .

Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que cette courbe est une spirale d'Archimède. En effet, soit I la projection verticale du point où le plan sécant rencontre l'axe. Considérons le triangle ayant pour sommets le point O, I le point m , m' et le point de l'axe projeté en g' , soit O, I , g' . Ce triangle, rectangle en O, I, a d'ailleurs un angle aigu constant: c'est celui que la génératrice fait avec l'axe. Il en résulte que le côté projeté en mO reste proportionnel au côté

projeté en Ig' . Or, celui-ci croît proportionnellement à l'angle aOn ; donc mO croît proportionnellement à aOm ; c'est-à-dire que le rayon vecteur Om croît proportionnellement à l'angle polaire, et que par conséquent la courbe amb est une spirale d'Archimède. Pour la construire commodément, on divise la demi-circonférence amb en un certain nombre N de parties égales, et l'on mène des rayons à tous les points de division; on divise aussi en N parties égales la différence Aa entre les rayons des deux hélices; puis on porte successivement 1, 2, 3, etc., de ces parties sur les rayons vecteurs, à partir de la circonférence amb .

Le plan PQ coupe aussi la nappe inférieure située en arrière du plan vertical de symétrie AB, et au-dessous de la portion de l'hélice saillante qui va du point B' au point A'. Mais il est clair que l'intersection est également une spirale d'Archimède, allant du point B, B' au point a , a' . Sa projection horizontale, qui lui est égale, va donc du point B au point a . Par conséquent c'est une spirale symétrique de la première par rapport à AB, et par suite on l'obtiendra en portant au-dessus de AB des ordonnées égales à celles de la courbe amb située au-dessous. On a teinté sur la figure l'espace compris entre ces deux courbes et formant la section de la vis perpendiculairement à son axe.

Si l'on fait varier la position du plan sécant, on obtient toujours la même courbe d'intersection; mais elle se déplace en tournant autour du point O. Si, par exemple, on faisait passer le plan sécant par le point n , n' , ce point jouerait alors le rôle que jouait tout à l'heure le point a , a' . Les mêmes raisonnements et les mêmes constructions seraient applicables. On obtiendrait donc la même section; seulement cette section aurait tourné tout entière autour du point O de manière que le point a soit venu occuper la position n , et le point B la position β sur le même rayon prolongé.

XI. Construisons de même la section de la vis à filet carré (fig. 10). Menons le plan sécant PQ par le point A, A' de l'hélice saillante supérieure. Il vient couper l'hélice saillante inférieure en un point m , m' . De A, A' en m , m' , il coupe la surface cylindrique qui termine extérieurement le filet, et qui a pour base la circonférence AB. La projection horizontale de cette portion de l'intersection est donc l'arc de cercle Am . En A, A' le plan sécant passe par la génératrice de la surface supérieure du filet, laquelle se projette suivant Aa ; et en m , m' il passe par la génératrice de la surface inférieure du filet, laquelle se projette en mn suivant la direction du rayon. Au delà de m , m' , le plan sécant ne coupe que le noyau cylindrique, qui a pour base le cercle ab . La section se compose donc de deux arcs de cercle Am et nba , et des deux droites Aa et mn . L'amplitude de l'arc nba est d'autant plus grande, par rapport à celle de l'arc Am , que le pas des hélices est plus grand par rapport à l'épaisseur du filet dans le sens vertical.

Si l'on fait varier la position du plan sécant, on obtient toujours la même section; mais elle tourne tout entière autour du point O, comme dans le cas de la vis à filet triangulaire. (Voy. l'art. DÉVELOPPEMENT.)

XII. La section plane d'une surface réglée peut avoir des branches infinies; et, dans ce cas, il est

utile de déterminer les asymptotes rectilignes, s'il y en a. Tout se réduit à déterminer les génératrices parallèles au plan sécant. Soit G l'une de ces génératrices. Si la surface a un cône directeur, soit g la

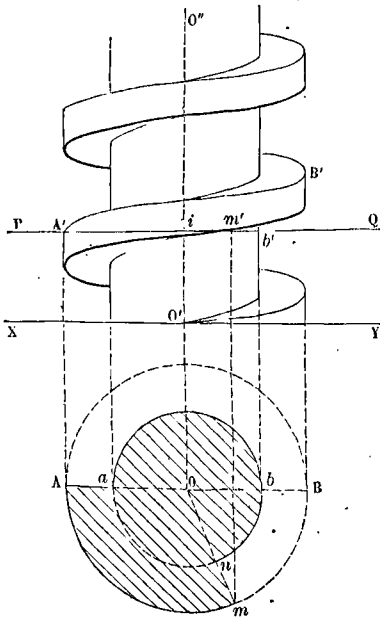


Fig. 10.

génératrice de ce cône parallèle à G. On mène le plan tangent au cône suivant la génératrice g ; par la génératrice G on mène un plan parallèle au plan tangent; ce plan parallèle coupe le plan sécant suivant une droite qui est précisément l'asymptote cherchée. — Si la surface a un plan directeur, il suffit de mener par la génératrice G un plan parallèle au plan directeur; l'intersection de ce plan parallèle avec le plan sécant détermine l'asymptote.

Nous n'insisterons pas sur cette construction générale qui trouve rarement son application pratique.

XIII. Section plane d'une surface topographique. Le relief du terrain est représenté sur les plans topographiques par une série de courbes de niveau, portant chacune une cote qui exprime sa hauteur au-dessus d'un plan horizontal de comparaison. On a souvent besoin de déterminer l'intersection d'une pareille surface par un plan, et particulièrement par un plan vertical; c'est ce que l'on appelle une coupe verticale du terrain suivant une direction donnée. Ce problème se résout d'après les mêmes principes que les précédents; les surfaces auxiliaires employées sont ici les plans des courbes de niveau eux-mêmes. On cherche l'intersection de chacun de ces plans avec le plan sécant; chaque droite horizontale ainsi obtenue coupe la courbe de niveau correspondante en des points qui appartiennent à la section cherchée; et en rabattant, s'il est nécessaire, le plan de cette section sur le plan horizontal, on obtient la section elle-même, rabattue en vraie grandeur. Soit proposé, par

exemple, de construire une coupe verticale du terrain représenté par la figure 11, suivant une direction donnée PQ. On prendra une ligne de terre XY parallèle à PQ. En un point quelconque

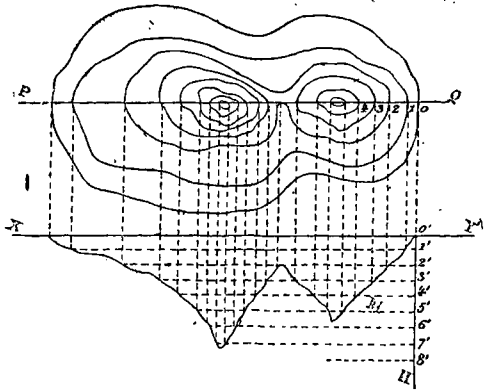


Fig. 11.

O' de cette ligne de terre, on lui élèvera une perpendiculaire O'H, sur laquelle on portera une série de longueurs égales, représentant, à l'échelle du plan, la distance des plans de deux courbes de niveau consécutives; puis, par les points de division 1', 2', 3', etc., on mènera des parallèles à XY; ce seront les projections verticales des intersections du plan sécant PQ avec les plans des courbes de niveau. Maintenant, par les points de rencontre 1, 2, 3, etc., de PQ avec ces courbes, on mènera des perpendiculaires à XY; les points où ces perpendiculaires rencontreront les parallèles à XY correspondantes à chaque courbe de niveau, appartiendront à la section plane demandée. Ainsi, le point 4, intersection de PQ avec la courbe de niveau dont la distance au plan horizontal inférieur est 4, détermine une perpendiculaire 4.M à la ligne de terre, qui, par son intersection avec l'horizontale 4'.M, donne un point M de la section demandée.

Dans le cas où le plan sécant est vertical, comme dans cet exemple, on n'a pas à le rabattre sur le plan horizontal; la section est immédiatement obtenue en vraie grandeur. Mais si le plan sécant était incliné à l'horizon, il y aurait un rabattement à opérer.

Supposons, par exemple, que le plan sécant soit donné par son échelle de pente (Voy. PLANS cotés). Prenons cette échelle pour ligne de terre (fig. 12). Au point 5 élevons la perpendiculaire 5.5' égale à 5 fois la longueur qui, à l'échelle du plan, représente la distance des plans de deux courbes de niveau consécutives, et tirons 0.5', qui fera avec 0.5 un angle égal à la pente du plan sécant. Par les points 0, 1, 2, 3, etc., menons des perpendiculaires à XY; elles rencontreront les courbes de niveau de même cote en des points qui appartiendront à la section cherchée, et dont la distance à la trace OP du plan sécant sera exprimée par les longueurs 0.1', 0.2', 0.3', etc. Pour obtenir le rabattement de la section sur le plan horizontal, on n'a donc qu'à mener par les points obtenus des parallèles à XY, sur lesquelles on prendra, à partir de OP, des longueurs égales à 0.1', 0.2'.

0.3', etc. Ainsi le point M du rabattement est obtenu en menant par le point *m*, intersection de la droite 2'.2 prolongée, avec la courbe de niveau qui a pour cote 2, une parallèle *mM* à la ligne

γράφω, je décris), description de la surface de la lune. Cette description se fait d'après les mêmes principes que celle de la surface de la terre, mais elle exige des mesures micrométriques très-déli-

cates. La projection ORTHOGRAPHIQUE (Voyez ce mot) est naturellement celle qui convient à la représentation dont il s'agit. En effet, à cause de l'éloignement de la lune, les rayons visuels menés de l'œil de l'observateur aux différents points de la surface de ce satellite peuvent être considérés comme parallèles; et la surface de la lune est vue comme si elle était projetée sur un plan perpendiculaire à la direction commune de ces rayons visuels.

La figure ci-dessous est une projection de ce genre; la lune y est représentée telle qu'on la voit dans les lunettes astronomiques. Les teintes claires figurent les parties élevées; on a donné aux principales les noms que nous reproduisons ci-dessous, avec les chiffres qui leur correspondent sur la figure.

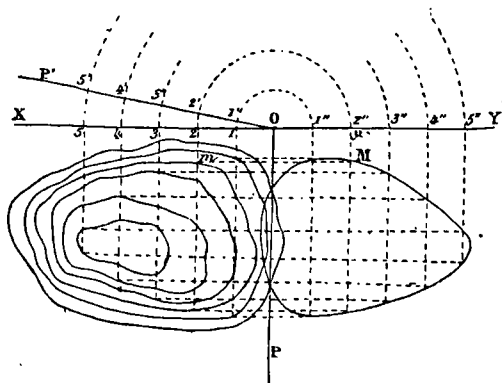


Fig. 12.

de terre, sur laquelle on a pris, à partir de OP, une longueur *nM* égale à 0.2'. Il ne reste plus qu'à joindre par un trait continu les points successifs du rabattement.

XIV. C'est à l'aide d'une section plane que l'on résout ce problème : *Trouver les points où une droite donnée perce une surface courbe donnée.* On mène par la droite un plan; on construit l'intersection de ce plan avec la surface; il n'y a plus qu'à trouver les points communs à cette intersection et à la droite donnée; ce sont les points qu'il s'agissait d'obtenir, puisqu'ils appartiennent à la fois à cette droite et à la surface.

Le choix du plan sécant demeurant arbitraire, pourvu qu'il passe par la droite donnée, on conçoit que l'on puisse, dans certains cas, simplifier la solution. Si, par exemple, la surface est un cylindre, on fera passer par la droite donnée un plan parallèle aux génératrices du cylindre; ce plan coupera la surface suivant des génératrices, et l'on n'aura plus qu'à déterminer les points communs à ces génératrices et à la droite donnée. Si la surface est un cône, on fera passer un plan par la droite donnée et par le sommet du cône; ce plan coupera encore la surface suivant des génératrices, dont on déterminera les points communs avec la droite donnée. Si la surface est une sphère, on fera passer le plan sécant par son centre; son intersection avec la surface sera un grand cercle; en rabattant sur l'un des plans de projection le plan de ce grand cercle, qui contient la droite donnée, on déterminera aisément les points communs à la droite et à la sphère. En général, le rabattement du plan sécant facilitera la solution. Nous n'insisterons pas sur ce problème qui n'offre aucune difficulté nouvelle quand on sait construire les sections planes des surfaces.

SÉLÉNOGRAPHIE (du grec σεληνη, lune, et

- | | |
|----------------|------------------------|
| 1 Grimaldus. | 14 Bulialdus. |
| 2 Galileus. | 15 Eratosthenes. |
| 3 Aristarchus. | 16 Trimocharis. |
| 4 Keplerus. | 17 Plato. |
| 5 Gassendus. | 18 Archimedes. |
| 6 Schikardus. | 19 Insula sinus medii. |
| 7 Harpalus. | 20 Pitatus. |
| 8 Heraclides. | 21 Tycho. |
| 9 Lansbergius. | 22 Eudoxus. |
| 10 Reinoldus. | 23 Aristoteles. |
| 11 Copernicus. | 24 Manilius. |
| 12 Helicon. | 25 Menelaus. |
| 13 Capuanus. | 26 Hermes. |



- | | |
|-----------------|-------------------------------------|
| 27 Possidonius. | 30 Catharina, Cyrillus, Theophilus. |
| 28 Dionysius. | 31 Fracastorius. |
| 29 Plinius. | |

32 Promontorium acutum, Cen- sorinus.	35 Proclus. 36 Cleomedes. 37 Snellius et Funerius.
33 Messala.	38 Petavius.
34 Promontorium somnia.	39 Langrenus. 40 Tarantius.

On remarquera que Keplerus, Copernicus et Tycho présentent à un haut degré l'apparence de cratères de soulèvement.

Les teintes grises représentent les parties basses; ce sont d'immenses plaines, vraisemblablement analogues à nos terrains d'alluvion. Hévélius leur avait donné le nom de *mers*; mais les observations faites avec de puissantes lunettes y ont fait apercevoir des aspérités qui sont inconciliables avec l'idée d'une masse liquide. Voici, avec les lettres qui leur correspondent sur la figure, les noms donnés aux principales de ces prétendues mers :

A Mare Humorum.	E Mare Tranquillitatis.
B Mare Nubium.	F Mare Serenitatis.
C Mare Imbrium.	G Mare Fecunditatis.
D Mare Nectaris.	H Mare Crisium.

Ce sont ces plaines, moins éclairées que les parties hautes, qui constituent à proprement parler les *taches* de la lune (*Voy. LUNE*).

Les meilleures cartes de la lune sont: celle d'Hévélius (1647); et celle qui a été dressée à Berlin, dans ces dernières années, par MM. Beer et Mœdler.

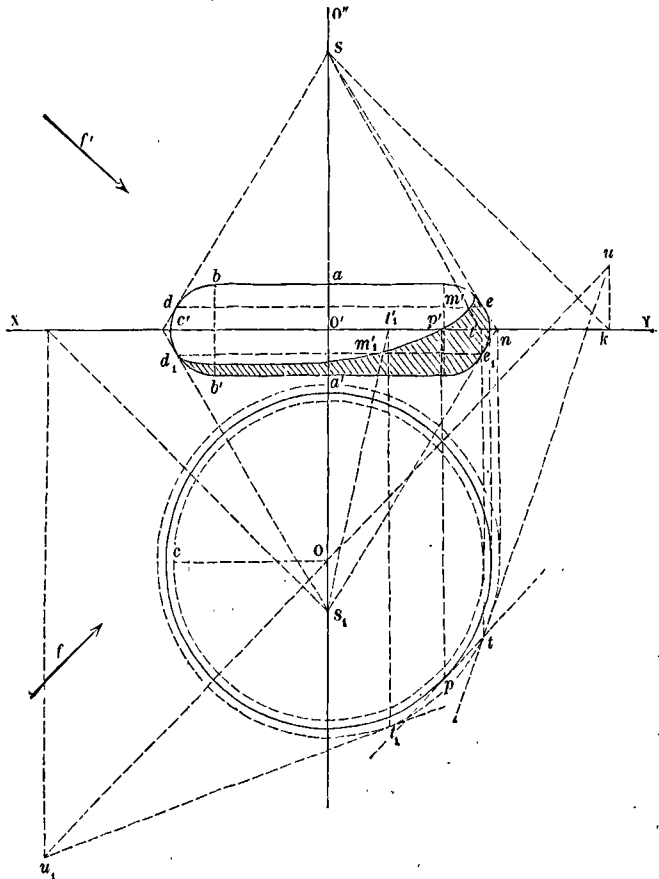
SEMOIR. *Voy. MACHINES AGRICOLES.*

SÉPARATRICE, ligne qui, sur la surface d'un corps opaque éclairé, sépare la partie obscure de la partie lumineuse. C'est par la considération des plans tangents que l'on détermine la séparatrice. Supposons, pour fixer les idées, que la lumière émane d'un point unique situé à une distance finie du corps opaque. Par le point lumineux concevons que l'on mène un plan tangent à la surface de ce corps; le rayon lumineux mené au point de contact sera tangent à la surface. Si l'on fait varier la position du plan tangent de toutes les manières possibles, les rayons menés aux divers points de contact formeront une surface conique, enveloppe des positions du plan tangent, et qui sera elle-même tangente à la surface du corps opaque. La ligne de contact de ces deux surfaces sera la séparatrice; tous les rayons menés intérieurement à la surface conique rencontreront le corps opaque; les rayons menés extérieurement à la surface conique ne rencontreront pas le corps opaque; les rayons faisant partie de la surface conique toucheront la surface du

corps opaque; la ligne des contacts séparera donc la partie éclairée de celle qui demeure dans l'ombre, d'où le nom de *séparatrice* proposé par M. de la Gournerie.

Si le point lumineux est situé à l'infini, les rayons lumineux deviennent parallèles, et la surface conique se change en une surface cylindrique; mais les résultats sont analogues; la séparatrice est encore la ligne des contacts de cette surface cylindrique avec la surface du corps opaque.

La nature de la séparatrice dépend de la nature de la surface éclairée. — Si la surface du corps opaque est un cylindre, la séparatrice se compose de deux génératrices; il en est de même si la surface d'un corps opaque est un cône. Sur une sphère, la séparatrice est un cercle; c'est un petit cercle si les rayons lumineux émanent d'un point situé à une distance finie; c'est un grand cercle si les rayons lumineux sont parallèles. En général, sur une surface du second degré, la séparatrice est toujours une courbe plane, puisque ce n'est autre chose que la ligne de contact de la surface avec un cône ou un cylindre circonscrits. — Sur l'ellipsoïde la sé-



paratrice est toujours une ellipse (ou un cercle); sur le parabolôïde hyperbolique, la séparatrice est une hyperbole ou une parabole selon que le point lumineux est situé à une distance finie ou infinie. Sur

l'hyperboloïde à une nappe, la séparatrice est une hyperbole si le point lumineux est sur un diamètre transverse, une ellipse s'il est sur un diamètre non transverse, une parabole s'il est sur une des génératrices du cône asymptote.

Pour donner un exemple de la construction de la séparatrice, nous considérerons la surface engendrée par la rotation, autour d'un axe vertical, $O, O' O''$, de la figure $abc'b'a'$ formée d'un rectangle $abb'a'$ et d'un demi-cercle $b'c'b'$. Nous prendrons pour plan horizontal le plan de l'équateur $O'c'$ de la surface. Nous supposerons que les rayons lumineux sont parallèles, et que les projections f et f' de la direction de ces rayons font avec la ligne de terre XY des angles de 45° .

Nous remarquerons d'abord que pour déterminer sur l'équateur le point qui appartient à la séparatrice, il suffit de mener au cercle Oc une tangente parallèle à f , et par le point de contact p une perpendiculaire à la ligne de terre; le point p' ainsi obtenu sur XY appartient à la séparatrice. Considérons maintenant un parallèle quelconque de . Au point e menons à la section méridienne la tangente en , qui coupera en un point S l'axe de la surface. Ce point S sera le sommet du cône circonscrit qui touche la surface suivant le parallèle considéré. Il faut lui mener un plan tangent parallèle aux rayons lumineux; ce plan sera en même temps tangent à la surface de révolution. Pour cela, menons par le sommet O, S du cône, une parallèle aux rayons lumineux, et déterminons la trace horizontale u de cette parallèle. Par le point u menons une tangente à la base du cône, c'est-à-dire au cercle décrit du point O comme centre avec $O'n$ pour rayon; le point de contact t , t' sera la trace de la génératrice de contact. Si donc on joint $t'S$, le point m' où la ligne de jonction rencontrera de sera la projection verticale du point de contact du plan tangent avec la surface de révolution. Sur le parallèle symétrique d, e , on déterminera de la même manière un nouveau point m'' , de la projection verticale de la séparatrice. Et l'on obtiendra par une construction analogue autant de points de la courbe qu'on le voudra. Il faut remarquer toutefois que quand le parallèle que l'on considère est très-voisin de l'équateur, le sommet S ou S_1 du cône circonscrit sort du cadre de l'épure. Pour trouver la direction de la tangente à mener au cercle de base, il faut alors employer un cône semblable de plus petites dimensions.

Une fois la projection verticale de la séparatrice obtenue, on détermine la projection horizontale en ramenant, par une perpendiculaire à la ligne de terre, chaque point de la projection verticale sur la projection horizontale du parallèle auquel il appartient. On n'a point indiqué cette projection parce qu'elle offre peu d'intérêt et que d'ailleurs, à l'échelle qu'il a fallu adopter, il eût été difficile de la rendre sensible.

Pour les surfaces de révolution, on peut encore employer une autre méthode, développée à l'article OMBRES, et qui consiste à chercher l'ombre portée de chaque parallèle sur le plan horizontal, et à tracer l'enveloppe des ombres ainsi obtenues; la séparatrice s'en déduit en déterminant le point de contact de l'enveloppe avec l'ombre de chaque parallèle, et par suite les projections de ce point de contact.

SEPTENTRION ou **NORD**, l'un des quatre **POINTS CARDINAUX** (*Voy.* ce mot). Dans notre hémisphère, l'observateur qui regarde le soleil à midi a derrière lui le septentrion.

SERRES D'EMPÂTURE, pièces longitudinales d'une section plus forte que le *vaigrage* et formant, de chaque côté de la *CARLINGUE*, mais à une certaine distance, une liaison très-solide (*Voy.* **CONSTRUCTION NAVALE**).

SERVICE EN ROUTE, s'applique à une **CONDUITE** (*Voy.* ce mot) qui, menant l'eau d'un réservoir supérieur à un réservoir inférieur, est chargée en outre d'alimenter sur son parcours divers écoulements déterminés (*Voy.* **DISTRIBUTION D'EAU**).

SETIER, ancienne mesure de capacité. Elle variait d'une contrée à l'autre. Le setier de Paris, pour les matières sèches, valait 156 litres. Le setier pour le vin ne valait que $7^{1/2}$, 44.

On donnait aussi le nom de *setier* à l'étendue de terre qui peut être ensemencée avec un setier de blé (*Voy.* **POIDS ET MESURES**).

SEUIL, pièce de bois ou de pierre placée horizontalement au bas d'une porte entre les deux *tableaux*. Si le seuil fait saillie au-dessus du sol, il prend le nom de *pas*. Dans ce cas il peut avoir une *feuillure* comme les jambages, pour loger le bas des *vantaux* de la porte (*Voy.* les mots soulignés, et l'art. **PORTES**).

SEXTANT, instrument propre à mesurer les angles, et qui est particulièrement employé dans la marine.

1. Il tire son nom de sa partie principale, qui est un arc divisé embrassant à peu près le sixième de la circonférence ou 60 degrés. Cet arc AB (fig. 1

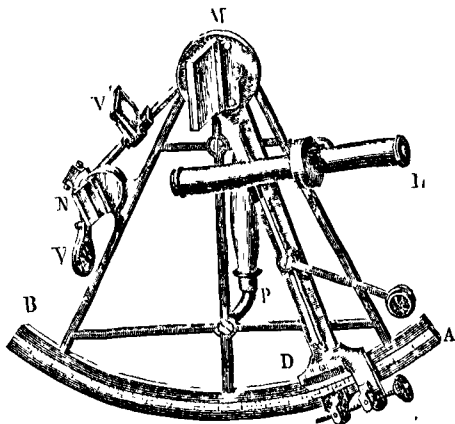


Fig. 1.

et 2) est soutenu par une sorte de charpente dont les pièces principales sont deux montants AM et BM dirigés suivant des rayons. Une alidade DM , mobile autour du centre de l'arc divisé, porte à son extrémité D un **VERNIER** qui peut parcourir le limbe; une pince avec vis de pression et **VIS DE RAPPEL** (*Voy.* ces mots) permet de conduire l'alidade par un mouvement lent à la position que l'on veut lui faire prendre; une loupe qu'on peut amener sur les divisions sert à faciliter la lecture. L'alidade porte une lunette L dont l'axe est parallèle au plan de l'instrument. Au centre M est fixé à l'alidade un **miroir** M ,

lèles au plan du limbe, paraissent perpendiculaires à la ligne qui joint les pointes du croissant; les verres colorés *V* étant abaissés, on fait mouvoir l'alidade jusqu'à ce que le bord de l'image réfléchie du soleil vienne toucher le bord de la lune au milieu de l'intervalle compris entre les fils.

Pour mesurer la distance d'une étoile à la lune, on vise directement l'étoile et l'on amène le bord de l'image réfléchie de la lune en contact avec cette étoile. Ce sera le bord occidental, si l'on observe entre la nouvelle et la pleine lune; ce sera, au contraire, le bord oriental, si l'on observe entre la pleine lune et la nouvelle lune suivante.

III. Le sextant, comme tous les instruments de mesure, doit être soumis à certaines vérifications. Il faut d'abord s'assurer que le grand miroir est perpendiculaire au plan du limbe : il suffit pour cela d'approcher l'œil de ce miroir de manière à y voir l'image réfléchie du limbe; si cette image et le limbe lui-même sont dans un même plan, le miroir est perpendiculaire au limbe. On peut aussi, pour faire la même vérification, employer ce qu'on appelle des *viseurs* (fig. 4) : ce sont de petites pièces de cuivre,



Fig. 4.

d'égale dimension, que l'on pose sur le limbe mis horizontalement; on approche l'œil du grand miroir, et si les bords supérieurs des viseurs et de leurs images sont dans un même plan, on en conclura, comme tout à l'heure, que le miroir est perpendiculaire au plan du limbe.

Il faut s'assurer en second lieu que le petit miroir est également perpendiculaire au plan du limbe. Pour cela, on vise directement un objet éloigné et l'on fait mouvoir l'alidade jusqu'à ce que l'image deux fois réfléchie de cet objet vienne se superposer à l'objet même; si la superposition peut être opérée d'une manière complète, le petit miroir est alors parallèle au grand et, par conséquent, perpendiculaire au plan du limbe.

Les miroirs sont ordinairement installés de manière qu'en faisant mouvoir de certaines vis on puisse leur faire prendre la direction convenable.

Il faut encore qu'en amenant, comme on vient de le dire, les deux miroirs à être parallèles, la ligne de foi de l'alidade soit sur le zéro de la division du limbe. Mais, si cela n'avait pas lieu, il ne serait pas nécessaire de toucher pour cela au grand miroir; il suffirait d'apprécier la différence, c'est-à-dire de lire sur le limbe lui-même l'angle marqué par la ligne de foi. Cet angle, qu'on appelle l'*erreur de rectification*, serait une quantité constante et connue que l'on ajouterait à tous les angles mesurés si la ligne de foi était, au moment du parallélisme des miroirs, en arrière du zéro de la division, ou que l'on en retrancherait si, dans la même circonstance, la ligne de foi était en avant du zéro.

Le contact des deux images doit se faire au milieu de l'intervalle entre les deux fils du réticule de la lunette. Lorsque cela n'a pas lieu, il en résulte une erreur nommée *erreur de déviation*; cette erreur peut être évaluée par une formule très-simple; mais la correction qui en résulte est rarement employée

dans la pratique. Il n'en est pas de même de l'erreur provenant du défaut de parallélisme entre les deux faces du grand miroir. Borda a calculé pour cet objet des tables de correction dont les marins font usage. (*Voy. le Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, p. 171 et suivantes, et p. 131 et suivantes.)

Enfin, pour vérifier l'exactitude de la division du limbe et du vernier, on peut promener l'alidade le long du limbe, en s'assurant que dans chaque position le vernier embrasse le même nombre de divisions. On peut aussi faire un *tour d'horizon*, c'est-à-dire mesurer les angles successifs que font entre eux les rayons visuels menés à un certain nombre de points choisis comme on voudra autour de soi, et s'assurer que la somme des angles mesurés fait exactement 360 degrés.

IV. La lunette est susceptible d'un mouvement dont nous n'avons pas parlé; on peut, à l'aide d'une vis convenablement placée, l'éloigner ou la rapprocher du limbe. Ce mouvement a pour but de diriger l'axe optique soit sur la partie étamée du petit miroir, soit sur la partie non étamée. On lui donne cette dernière position quand le soleil est très-ardent, et que, pour affaiblir son éclat, on veut recevoir son image sur la partie non étamée de la glace N. On lui donne la position contraire quand le soleil est très-faible. Habituellement, on dirige l'axe optique sur la ligne de séparation entre la partie étamée et la partie non étamée, et, dans tous les cas, il faut qu'il s'éloigne peu de cette ligne.

Quelquefois on remplace la lunette par un simple tube et l'oculaire par une plaque percée de deux trous, inégalement éloignés du limbe, et dont l'un ou l'autre peut être bouché à volonté. Mais l'inconvénient de cette disposition consiste en ce que les images sont incomplètes; on ne voit, par exemple, qu'une moitié de la lune en visant directement, et une moitié du soleil par réflexion; tandis qu'avec une lunette les deux images sont entières. On sait, en effet, que, lorsqu'on couvre une partie de l'objectif d'une lunette, on affaiblit l'image; mais qu'elle reste dans son entier, parce que des rayons émanés des points placés derrière la partie couverte peuvent, par l'effet de la réfraction, venir faire leur image au foyer de l'objectif.

Le sextant est un instrument précieux pour la navigation, parce que les mouvements du navire ne permettent point l'emploi d'un appareil à installation fixe. Il est également d'une grande utilité pour les voyageurs qui sont presque toujours obligés de se passer, dans leurs observations, d'un établissement permanent. Les mouvements inévitables que l'observateur donne à l'instrument n'altèrent en rien l'exactitude du résultat, puisqu'elle ne dépend que d'une coïncidence qu'on obtient facilement avec un peu d'exercice.

(*Voy. le Cours de Navigation et d'Hydrographie* de E. P. Dubois, déjà cité, et le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier.)

SIFFLET D'ALARME, appareil adapté aux chaudières des machines à vapeur pour avertir le chauffeur que le niveau de l'eau est au-dessous de la limite fixée (*Voy. INDICATEURS DE NIVEAU*). Dans les LOCOMOTIVES (*Voy. ce mot*) le sifflet d'alarme est à la disposition du mécanicien qui l'emploie comme signal. Un sifflet d'alarme consiste essentiellement

dans un timbre mis en vibration par un jet de vapeur sortant de la chaudière.

SIGNAUX, objets naturels ou constructions artificielles établis au centre d'une station pour servir de point de mire dans les opérations géodésiques.

On dit qu'un signal est vu par *vision positive* quand il se projette sur le terrain, et par *vision négative* lorsqu'il se projette sur le ciel. Ce second cas est le plus avantageux. On peut juger à l'avance si ce second cas aura lieu pour la station où l'on se trouve : pour cela, on prend la distance zénithale de la station précédente; on mène ensuite, du côté opposé, un rayon visuel tangent au terrain, et l'on prend la distance zénithale de ce rayon visuel. Si la somme des deux distances zénithales ainsi observées surpasse 180 degrés, on peut être assuré que le signal de la station où l'on se trouve sera vu par vision négative de la station précédente.

Un arbre dépouillé de branches est quelquefois un bon signal lorsqu'il est isolé sur un lieu élevé, et qu'il se détache sur le ciel. Une tour est encore un excellent signal, surtout si l'on peut s'établir au sommet pour observer les stations environnantes; mais il ne faut pas qu'elle offre une trop grande largeur; car elle présente alors, suivant la manière dont elle est éclairée, des *phases* ou aspects différents, qui rendent difficile le pointé sur la ligne médiane (*Voy. PHASE* [erreur de]). Les flèches sont de mauvais signaux, parce qu'elles se perdent dans le ciel quand elles sont vues d'une certaine distance. Un poteau surmonté d'un tonneau ou d'un cône renversé peut servir de point de mire. Un bon signal est un disque vertical percé d'un trou au centre, et mobile autour d'un axe vertical de manière à pouvoir être tourné en face de l'observateur. On le peint en noir s'il se projette sur le ciel, en blanc s'il se projette sur le terrain. On se sert très-souvent en France, surtout quand il est nécessaire d'abriter l'observateur, d'une charpente pyramidale (*Voy. la fig. 1*) fermée par des planches depuis le haut

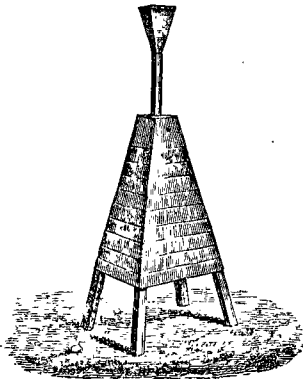


Fig. 1.

jusqu'à 2 mètres environ du sol. La partie inférieure sert aux observations. Un fil-à-plomb tombant du sommet aide à se placer dans l'axe de la construction. Le poinçon de la charpente, prolongé jusqu'à une certaine hauteur, et surmonté d'une petite pyramide renversée, sert de signal.

On fait un grand usage, en Allemagne et en An-

gleterre, de l'*héliotrope de Gauss*. Sous sa forme primitive, cet instrument n'est autre chose qu'une sorte d'héliostat dont le miroir peut être dirigé à la main. On fait passer la lumière réfléchie suivant l'axe d'un tube tourné vers la station où doit se faire l'observation; le miroir est percé d'un trou central qui permet de s'assurer que l'intérieur du tube est éclairé. Un pareil signal peut être vu d'une distance considérable. On a observé à 160 kilomètres, en Écosse, avec cet appareil. On lui donne aujourd'hui une disposition différente. Il se compose d'une assez forte lunette OA (*fig. 2*) montée sur un

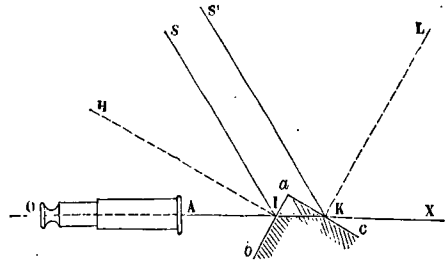


Fig. 2.




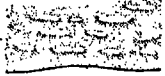






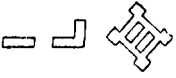



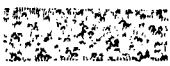
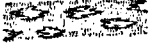

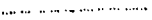
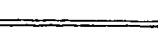









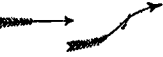

axe sensiblement vertical, autour duquel elle peut faire le tour de l'horizon, et qui est lui-même porté par trois vis calantes. On commence par diriger la lunette vers la station où l'observation doit se faire. En avant de l'objectif est disposé un système de deux miroirs plans *ab* et *ac*, formant un angle dièdre droit saillant, dont l'arête est perpendiculaire à l'axe optique OX de la lunette. Soit I un point de cet axe, et IS la direction des rayons solaires; les droites OX et IS déterminent un plan. Supposons que ce soit celui de la figure. L'arête commune des deux miroirs peut être amenée perpendiculairement à ce plan, et le miroir *ab* peut alors être dirigé de manière que le rayon SI se réfléchisse suivant IO; il suffit pour cela que la trace *ab* du miroir sur le plan de la figure soit perpendiculaire à la bissectrice IH de l'angle OIS. Soit K le point où l'axe OX rencontre alors le second miroir; soit KS' un rayon solaire, et KL la bissectrice de l'angle S'KL. Par des propriétés de Géométrie élémentaire très-simples, on sait que KL sera perpendiculaire à IH, et que, par conséquent, *ac* sera perpendiculaire à KL. Par conséquent, le rayon S'K sera réfléchi sur le second miroir suivant le prolongement KX de l'axe optique de la lunette, c'est-à-dire suivant la droite qui va à la station d'observation. Ainsi, quand l'image solaire parviendra à l'oculaire O de la lunette, on sera certain qu'un faisceau lumineux sera dirigé suivant OX par le miroir *ac*. L'héliotrope de Gauss a été employé récemment en France, sous cette seconde forme, dans une triangulation destinée à relier géodésiquement les côtes de France et d'Angleterre.











On emploie quelquefois des signaux de nuit. On avait essayé des feux de Bengale; mais on y a renoncé, parce que leur courte durée ne permet pas l'emploi des méthodes de répétition ou de réitération. Trois réverbères placés au sommet d'un triangle équilatéral sont un signal assez commode. Dans la mesure de la méridienne de France, on a fait usage de miroirs paraboliques projetant la lumière à




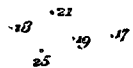





de grandes distances. Mais, en général, on préfère les signaux de jour comme plus stables et plus sûrs.

SIGNES CONVENTIONNELS, signes adoptés dans les plans topographiques et dans les cartes de géographie, pour suppléer à la représentation exacte des objets qu'on peut avoir intérêt à y consigner. Ces signes graphiques, toujours laissés à l'arbitraire du dessinateur, ont été fixés par les travaux de deux commissions nommées successivement par le gou-

vernement, l'une en 1802, l'autre en 1826. Le nombre de ces signes est très-considérable. La brochure de M. Sautrez, ayant pour titre : *Teintes et signes conventionnels*, en renferme plus de 750. Nous ne pouvons faire connaître ici que les plus indispensables; et nous renvoyons, pour les autres, aux traités spéciaux, et particulièrement à l'ouvrage que nous venons de citer. Nous renverrons aussi à l'article **TEINTES CONVENTIONNELLES** de ce Dictionnaire.

1 Archevêché.....		16 Digue.....	
2 Bancs de sable qui couvrent et decouvrent.....		17 Dunes.....	
3 Bancs de sable qui ne couvrent jamais.....		18 Etang.....	
4 Bataille gagnée.....		19 Evêché.....	
5 Bataille perdue.....		20 Fleuves.....	
6 Batiments.....		21 Forêts.....	
7 Bourgs et villages.....		22 Lac.....	
8 Broussailles.....		23 Landes.....	
9 Bruyères.....		24 Limites de Communes.....	
10 Canal.....		25 Limites de Canton.....	
11 Canton.....		26 id de Département.....	
12 Chaussée.....		27 id d'Etats.....	
13 Chemin communal.....		28 Marais.....	
14 Chemin de fer.....		29 Montagnes.....	
15 Cours des fleuves.....		30 Mouillages.....	

- 31 Places fortes.....  
- 32 Plage de sable qui couvre et découvre..... 
- 33 Port..... 
- 34 Poste aux lettres..... 
- 35 Prairies..... 
- 36 Préfecture..... 
- 37 Récifs..... 
- 38 Rivières..... 
- 39 Rochers..... 

- 40 Roches dangereuses..... 
- 41 Routes..... 
- 42 Sables..... 
- 43 Sondes..... 
- 44 Sous-Préfecture..... 
- 45 Terres labourées..... 
- 46 Vergers..... 
- 47 Vignes..... 
- 48 Villes..... 

A ces signes s'en ajoutent un très-grand nombre d'autres qui permettent de consigner sur les cartes tous les renseignements dignes d'intérêt, soit au point de vue militaire, soit au point de vue administratif, soit au point de vue scientifique, soit même au point de vue industriel.

(Voy. la brochure de M. Sautrez déjà citée.)

SIGNES DU ZODIAQUE. Voy. ZODIAQUE.

SINGLER, mesurer au cordeau et par petites parties sensiblement droites la longueur développée d'une courbe. Ce terme s'emploie surtout en architecture.

SOCLE. Voy. PLINTHE.

SOLEIL, astre qui est le centre de notre système planétaire. C'est une sphère lumineuse par elle-même, et dont le **DIAMÈTRE APPARENT** (Voy. ce mot) varie de 31'30",3 à 32'36",2; en moyenne, 32'. La connaissance de la **PARALLAXE** (Voy. ce mot) permet de calculer son diamètre réel et sa distance à la terre. Soit S le centre du soleil, T celui de la terre; soit TA une tangente à la surface du soleil et SB une tangente à la surface de la terre. Posons

$$ST = d, \quad SA = R \quad \text{et} \quad TB = r;$$

les triangles rectangles TAS et SBT donnent

$$\sin ATS = \frac{SA}{ST} = \frac{R}{d} \quad \text{et} \quad \sin BST = \frac{TB}{TS} = \frac{r}{d},$$

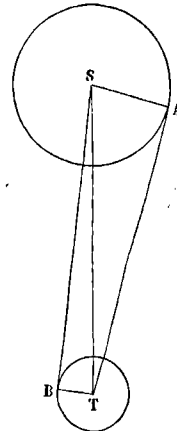
ou simplement

$$ATS = \frac{R}{d} \quad \text{et} \quad BST = \frac{r}{d}, \quad [1]$$

en remplaçant les sinus par les arcs, ce qui est permis à cause de leur petitesse. En divisant membre à membre les égalités [1], on en tire

$$\frac{R}{r} = \frac{ATS}{BST};$$

le numérateur de ce rapport est le demi-diamètre apparent du soleil, ou 16'. Le dénominateur est la parallaxe du soleil. Elle a été trouvée égale à 8",57. (L'Annuaire de 1865 donne 8",86, d'après une nou-



velle discussion des observations du passage de Vénus en 1769. Mais il est nécessaire d'attendre, pour adopter cette nouvelle valeur, qu'elle soit confirmée par d'autres observations.) Il vient donc

$$\frac{R}{r} = \frac{16'}{8",57} = \frac{960''}{8",57} = 112,01 \quad \text{ou} \quad 112 \text{ environ.}$$

(On ne trouverait que 108 1/2 en adoptant la nouvelle valeur de la parallaxe du soleil.)

Ainsi, le rayon du soleil vaut 112 fois le rayon terrestre. On tire ensuite de la seconde égalité [1]

$$d = \frac{r}{\text{arc de } 8'',57} = \frac{r \cdot 180''}{\pi \cdot 8'',57} = \frac{r \cdot 648\,000''}{\pi \cdot 8'',57},$$

par conséquent

$$d = r \cdot 24\,068,2$$

(avec la nouvelle parallaxe on trouverait $r \cdot 23\,280,4$).

Ainsi la distance de la terre au soleil est d'environ 24 000 rayons terrestres. Le rayon équatorial étant de 6377 kilomètres environ, il en résulte que la distance de la terre au soleil est de 24 000 fois 6377 kilom., ou d'environ 153 048 000 kilom. ; c'est-à-dire d'environ 38 000 000 de lieues.

On observe à la surface du soleil des *taches* formées d'une partie centrale entièrement noire et irrégulièrement entourée d'une pénombre grisâtre. Ces taches se déplacent sur le disque solaire en allant de l'orient vers l'occident, où elles disparaissent pour reparaître de nouveau à l'orient. On a conclu de l'observation de ces taches que le soleil est animé d'un mouvement uniforme de rotation, qui s'exécute en 25 jours 8 heures 10 minutes, autour d'un axe incliné de $7^\circ 19'$ sur l'axe de l'écliptique. L'équateur solaire coupe l'écliptique en deux points diamétralement opposés (appelés nœuds), dont l'un a pour longitude $80^\circ 45'$. — Le temps que nous venons d'indiquer pour la rotation du soleil autour de son axe est celui de sa rotation réelle; sa rotation apparente est un peu plus longue (27 jours, 3), à cause du déplacement de la terre, qui se fait dans le même sens. Le soleil exécute, dans le cours d'une année, 13 tours $\frac{1}{3}$ autour de son axe; mais à cause du mouvement de la terre, il paraît en exécuter un de plus, c'est-à-dire $14 \frac{1}{3}$.

Il doit résulter du mouvement de rotation du soleil autour de son axe, un léger aplatissement vers les pôles; mais cet aplatissement n'a pas été constaté par les mesures les plus précises, et l'on doit en conclure qu'il est extrêmement faible, si toutefois il existe.

L'observation attentive d'un grand nombre d'étoiles a donné à penser que le soleil n'occupe pas une position fixe dans l'espace, mais qu'il marche en entraînant à sa suite tout notre système planétaire, vers un point situé dans la constellation d'Hercule, avec une vitesse au moins égale à celle de la terre dans son orbite.

Le rayon du soleil étant égal à 112 fois le rayon terrestre, il en résulte que son volume vaut $(112)^3$ ou 1 404 928 fois le volume de la terre.

Par des considérations tirées de la GRAVITATION UNIVERSELLE (Voy. ce mot), on a pu déterminer le rapport de la MASSE (Voy. ce mot) du soleil à celle de la terre; on a trouvé que la masse du soleil vaut 355 500 fois celle de la terre. La densité moyenne d'un corps étant le quotient de sa masse par son volume, il en résulte que si l'on prend pour unité la densité moyenne de la terre, celle du soleil sera exprimée par $\frac{355\,500}{1\,404\,928}$ ou 0,25 303. Or, on sait

par l'expérience de Cavendish que la densité moyenne de la terre rapportée à celle de l'eau est exprimée par 5,44; celle du soleil, rapportée de même à la densité de l'eau, aura donc pour expression $5,44 \times 0,253$ ou 1,376.... c'est-à-dire

que la densité moyenne du soleil est de très-peu supérieure à celle de l'eau.

On remarque autour des taches du soleil des espaces plus lumineux que le reste, et que l'on nomme *facules*; on observe aussi sur toute sa surface des rides lumineuses appelées *lucules*. Les taches dont la partie obscure couvre souvent une étendue de $1'$ à $2'$, ce qui leur suppose une étendue réelle de 45 000 à 90 000 kilomètres, se forment et se dissipent quelquefois dans l'espace de quelques jours. On en a conclu que des phénomènes accomplis en aussi peu de temps et sur une aussi grande échelle, ne pouvaient avoir lieu que dans un milieu fluide, de la nature des gaz. On a fait beaucoup de conjectures sur la constitution physique du soleil; mais aucune n'a encore rallié l'opinion des physiciens et des astronomes.

Pour ce qui se rapporte à l'influence du soleil sur le globe terrestre, voyez les articles JOUR, CRÉPUSCULE, ÉCLIPTIQUE, ÉQUATEUR, SAISONS, CALENDRIER, etc., etc. Voyez aussi les articles PLANÈTES, LOIS DE KÉPLER et GRAVITATION UNIVERSELLE.

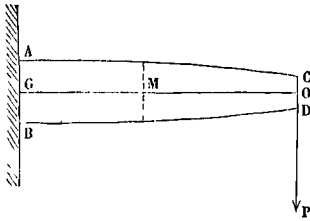
SOLIDE CAPABLE, nom donné dans la COUPE DES PIERRES (Voy. ce mot) au solide, ordinairement prismatique, duquel on doit extraire la pierre qu'il s'agit de tailler. On le choisit de manière à se rapprocher le plus possible du volume de cette pierre, afin d'éviter les déchets de matériaux.

SOLIDE COMMUN, portion de l'espace circonscrite par les surfaces de deux corps qui se rencontrent. S'il y a *pénétration*, la surface du solide commun se compose d'une paroi continue appartenant à la surface pénétrante, et de deux parois séparées appartenant à la surface pénétrée. Lorsqu'il y a *arrachement*, la surface du solide commun ne se compose que de deux parois, dont l'une appartient à la première surface et l'autre à la seconde (Voy. PÉNÉTRATION, INTERSECTION DE SURFACES).

SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE, solide dont la section transversale, supposée petite par rapport à sa longueur, varie de telle manière que, sous l'action d'une force tendant à fléchir le solide, la fibre la plus éloignée de la fibre moyenne éprouve, dans chaque section, la même tension ou la même pression. Ceci suppose que le solide, symétrique par rapport à un plan longitudinal, n'éprouve qu'une FLEXION PLANE (Voy. ce mot) parallèle à ce plan, et que la fibre moyenne ne prenne qu'une faible courbure. On peut remplir de diverses manières la condition qui a fait donner au solide le nom, assez impropre, de solide d'égal résistance. Si la section est rectangulaire, on peut faire varier la dimension perpendiculaire au plan de flexion, ou la dimension parallèle à ce plan; on peut les faire varier toutes deux de telle sorte que la section reste semblable à elle-même. Si la section est circulaire ou elliptique, c'est ce dernier moyen que l'on adopte. Nous examinerons successivement ces différents cas.

I. Soit ABDC la section du solide par le plan de flexion; soit GO la fibre moyenne. On supposera le solide encastré en AB, de manière que la fibre moyenne soit sensiblement horizontale, et chargé en O d'une force verticale P. Prenons pour axe des x la droite OG, l'axe des y suivant OP, et l'axe des z perpendiculaire aux deux premiers. La section du solide variant lentement et d'une manière continue, le solide, sur une petite étendue, peut être

assimilé à un prisme, et on peut lui appliquer les formules ordinaires relatives à la flexion plane. Si l'on fait une section en un point quelconque M de la fibre moyenne, à une distance x du point O, et que



l'on applique, à la portion MO du solide, l'équation

$$R = \frac{v\mu}{I},$$

on aura, en appelant b la demi-hauteur de la section, supposée constante, et x sa demi-largeur, supposée variable,

$$v = b, \quad I = \frac{1}{12} \cdot 2x \cdot (2b)^3 = \frac{4}{3} b^3 x, \quad \mu = Px;$$

par conséquent,

$$R = \frac{3b \cdot Px}{4b^3 x} = \frac{3Px}{4b^2 x},$$

d'où

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{b^2 R} x,$$

équation d'une ligne droite. La section du solide par un plan horizontal serait donc un triangle isocèle. Cette disposition est rarement employée.

II. Si la largeur de la section est supposée constante, et égale à a , soit y sa demi-hauteur, on aura

$$v = y, \quad I = \frac{2}{3} ay^3, \quad \mu = Px,$$

par conséquent

$$R = \frac{3y \cdot Px}{2ay^3}, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{3P}{2aR} x,$$

équation d'une parabole. La section par un plan parallèle au plan de flexion serait donc une parabole. Cette disposition est adoptée pour les balanciers des machines à vapeur ou des machines soufflantes, et dans diverses circonstances analogues.

III. Si les deux dimensions de la section varient proportionnellement, soit x la demi-largeur et y la demi-hauteur; on aura

$$x = Ky,$$

K désignant un coefficient numérique. On aura ensuite

$$v = y, \quad I = \frac{2}{3} \cdot 2x \cdot y^3, \quad \mu = Px;$$

par conséquent,

$$R = \frac{3y \cdot Px}{4x \cdot y^3} = \frac{3yPx}{4Ky^4};$$

d'où

$$y^3 = \frac{3P}{4KR} x,$$

équation d'une parabole du troisième degré. Ce serait la courbe qui limiterait la section par le plan de flexion. On en déduit

$$x^3 = \frac{5K^2P}{4R} x;$$

c'est l'équation d'une courbe analogue, qui limiterait la section par le plan horizontal conduit suivant la fibre moyenne.

IV. Pour une section circulaire, de rayon ρ , on aurait (Voy. MOMENTS D'INERTIE)

$$v = \rho, \quad I = \frac{\pi\rho^4}{4}, \quad \mu = Px;$$

par suite,

$$R = \frac{4\rho \cdot Px}{\pi\rho^4}, \quad \text{d'où} \quad \rho^3 = \frac{4P}{\pi R} x;$$

c'est l'équation d'une courbe analogue aux deux précédentes, et qui limiterait une section quelconque faite par un plan mené suivant la fibre moyenne.

V. Dans les calculs qui précèdent, on ne tient compte que de la résistance à la flexion; on s'impose la condition que la fibre la plus fatiguée soit partout soumise à la même tension ou à la même pression. Mais on n'a pas égard à l'effort tranchant qui tend à faire glisser le solide le long d'une de ses sections transversales.

M. Bélanger a remarqué qu'on se placerait dans de meilleures conditions pratiques si l'on s'imposait en outre la condition que la résultante de la résistance à la flexion et de l'effort tranchant, rapportés tous deux à l'unité de surface, restât constante dans toutes les sections, pour la fibre la plus éloignée de la fibre moyenne. Dans le cas d'une section rectangulaire à hauteur seule variable, on aurait alors, indépendamment de la condition

$$R = \frac{3Px}{2ay^2}, \quad [1]$$

à satisfaire à l'équation

$$R^2 + \left(\frac{P}{2ay}\right)^2 = C^2, \quad [2]$$

C^2 désignant une constante. En éliminant R entre ces deux relations, on trouve

$$y^4 - \left(\frac{P}{2aC}\right)^2 y^2 = 9\left(\frac{P}{2aC}\right)^2 x^2; \quad [3]$$

c'est l'équation de la courbe limitant la section du solide par le plan de flexion.

Les courbes précédemment obtenues donnaient une section nulle au point O. Ici, pour $x = 0$, on obtient

$$y = \frac{P}{2aC}, \quad \text{d'où} \quad 2ay = \frac{P}{C};$$

c'est l'aire de la section qui termine la pièce. En ce point, on aurait $R = 0$; mais l'équation [3] montre que y croît avec x ; et, par suite, en vertu de l'équation [2], il faut également que R croisse. Si X est la longueur OG de la pièce, et Y la valeur de y au point d'encastrement, on pourra disposer de a et de Y de manière qu'en mettant ces valeurs dans l'équation [1], le second membre ne dépasse pas la limite qu'on s'est imposée pour R . Si l'on met alors cette valeur de R dans l'équation [2], et y remplaçant y par Y , on en déduira la valeur de la constante C .

SOLIVE, ancienne mesure de volume usitée en France pour les bois. C'était un parallépipède rectangle de 12 pieds de hauteur, ayant pour base un carré de 6 pouces de côté, et représentant par conséquent 3 pieds cubes, ou 0^m6^t. cub., 10283.

SOLSTICE, époque de l'année où la déclinaison du soleil est arrivée à son maximum. Il y a deux solstices : le solstice d'été, qui répond au maximum de déclinaison boréale, et le solstice d'hiver, qui répond au maximum de déclinaison australe. Le nom de solstice a été donné à ces deux époques de l'année parce que, lorsque la déclinaison du soleil est voisine de son maximum, soit avant, soit après, elle varie

extrêmement peu d'un jour à l'autre, en sorte que le soleil semble s'arrêter sur la sphère céleste.

On donne aussi le nom de *solstices* aux points situés sur l'écliptique à 90° des points équinoxiaux (Voy. EQUINOXE). Ce sont les positions qu'occupe le centre du soleil sur la sphère céleste à l'époque des solstices.

SOMME DES VIVANTS, somme de tous les nombres inscrits dans une table de mortalité depuis un âge déterminé jusqu'à la limite extrême de la table (Voy. MORTALITÉ).

SOMMIERS, pierres qui occupent la partie supérieure des jambages d'une porte, et qui, dans les portes ou fenêtres rectangulaires, supportent les extrémités de la PLATE-BANDE (Voy. ce mot).

SONDAGE, opération que l'on exécute en mer pour déterminer la profondeur de l'eau. On emploie pour cela une corde, divisée en brasses (Voy. ce mot) et portant à son extrémité une masse de plomb, qui est ordinairement de 3 à 4 kilogrammes, mais qui est parfois beaucoup plus considérable. C'est surtout dans le voisinage des côtes ou à l'approche des bancs sous-marins que les sondages sont utiles à la navigation. On a imaginé des sondes mécaniques qui donnent elles-mêmes l'indication de la profondeur cherchée; mais ces indications sont rarement sûres.

SONNETTE, machine employée à la manœuvre du mouton dans le battage des pilots (Voy. PILOTS). Une sonnette se compose essentiellement de deux pièces de bois verticales AA (fig. 1 et 2), appelées

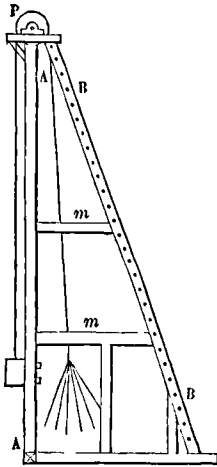


Fig. 1.

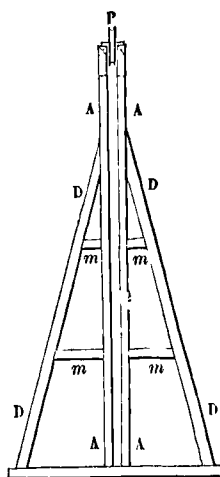


Fig. 2.

jumelles, qui ont de 9 à 10 mètres de haut, et qui laissent entre elles un intervalle où s'engagent les oreilles du mouton. Ces jumelles reposent sur un patin représenté fig. 3, et composé lui-même de deux pièces de bois perpendiculaires aa et bb, reliées par des goussets cc. Les jumelles sont maintenues par une queue BB (fig. 1) et par des *jambes de force* DD (fig. 2) reposant les unes et les autres sur le patin, et reliées aux jumelles par un certain nombre d'entretoises mm (fig. 1 et 2). Entre les jumelles est placée une poulie P dont l'axe repose sur des coussinets établis au sommet de ces pièces;

c'est sur cette poulie que s'enroule la corde qui supporte le mouton. Des chevilles saillantes transforment la queue BB en une échelle qui permet de monter jusqu'à la poulie.

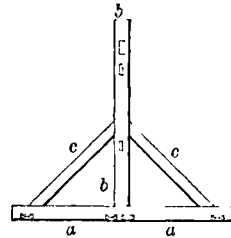


Fig. 3.

On distingue deux espèces de sonnettes : les *sonnettes à tiraudes* et les *sonnettes à déclie*. Dans les sonnettes à tiraudes, la corde est attachée directement au mouton, et son extrémité opposée se divise en un certain nombre de cordelles ou *tiraudes*, à chacune desquelles on peut appliquer un homme. La manœuvre de la machine est alors très-simple; chaque homme saisit à deux mains une tiraude en élevant les bras au-dessus de la tête; à un signal donné tous les hommes se courbent à la fois et élèvent le mouton à une hauteur de 1^m,20 environ, puis ils le laissent retomber en relevant les mains tous ensemble. Le nombre des hommes est réglé d'après le poids du mouton, de manière que chacun n'ait à exercer qu'un effort de 15^k à 20^k, soit 18^k le plus généralement. Comme néanmoins ce travail est assez fatigant, on ne bat de suite qu'une *volée* de 25 à 30 coups, qui emploient environ 80 secondes; les hommes se reposent pendant un temps égal avant de battre une autre volée. Avec les pertes de temps inévitables, une volée et le repos qui suit emploient en moyenne de 3 à 4 minutes. La journée des manœuvres est de 9 à 10 heures; mais vu le temps employé à disposer la machine et à la déplacer, la durée du travail effectif n'est que de 5 heures, ce qui suppose de 100 à 120 volées par journée de travail. Le nombre d'hommes appliqués à la manœuvre d'une sonnette à tiraudes varie depuis 18 jusqu'à 40 suivant le poids du mouton.

Dans les sonnettes à déclie la corde, au lieu de se diviser en tiraudes à l'extrémité opposée au mouton, s'enroule sur un treuil a solidement fixé au patin et aux jumelles, comme l'indique la figure 4. Sur l'axe de ce treuil est montée une roue dentée b, qui engrène avec un pignon c, que plusieurs hommes font mouvoir à l'aide de manivelles cd. Le mouton n'est pas directement suspendu à la corde; il porte à sa partie supérieure un anneau qui est saisi par les mâchoires d'une tenaille t, t' (fig. 5), fixée par son axe à une armature en bois à laquelle la corde est attachée. La figure 6 montre à part la disposition de la tenaille. On élève lentement le mouton en faisant mouvoir les manivelles. A une hauteur convenable est fixé aux jumelles un bloc de bois dans lequel les branches supérieures de la tenaille s'engagent, par suite de l'ascension du mouton; ces branches sont obligées alors de se fermer; et par conséquent les branches inférieures,

qui forment la mâchoire, sont obligées de s'ouvrir; elles abandonnent le crochet du mouton, et celui-ci retombe sur la tête du pieu. On fait alors mouvoir les manivelles en sens contraire, les tenailles

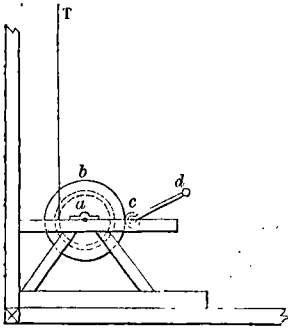


Fig. 4.

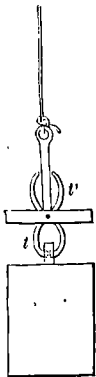


Fig. 5.

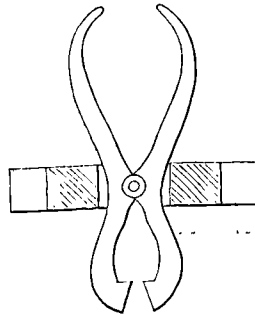


Fig. 6.

et leur armature redescendent par leur poids, et on accroche de nouveau le mouton pour recommencer la manœuvre.

Soit P le poids du mouton, T la tension du brin de la corde qui s'enroule sur le treuil, r le rayon de ce treuil, R le rayon de la circonférence primitive de la roue dentée, rho celui du pignon, N la réaction mutuelle des dents en contact, b le rayon de la manivelle, et F la force qu'il faut appliquer au mouton pour faire mouvoir l'appareil; on aura, en négligeant le frottement et la raideur de la corde,

$$\begin{aligned} T &= P, \\ NR &= Tr, \\ Fb &= N\rho, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$FbR = Pr\rho,$$

et par conséquent

$$F = P \cdot \frac{r\rho}{bR}.$$

Il conviendra d'augmenter cette valeur d'un quart ou d'un tiers environ pour tenir compte de la raideur de la corde, du frottement des axes, et du frottement de l'engrenage. Si F' est la valeur ainsi

corrigée, en la divisant par 8^t, valeur de l'effort qu'un homme peut exercer d'une manière continue sur une manivelle, on aura le nombre d'hommes nécessaires pour la manœuvre de l'appareil. La vitesse du mouton est ici de 0^m,60; on en déduit pour la vitesse angulaire omega de la manivelle et du pignon

$$\omega = \frac{0,60}{b}.$$

Si omega' est la vitesse angulaire de la roue dentée et du treuil, on a

$$\omega' = \omega \cdot \frac{P}{R};$$

et si v est la vitesse à la circonférence du treuil, laquelle est aussi celle du mouton, on a

$$v = \omega'r.$$

Multipliant ces relations membre à membre et simplifiant, on obtient

$$v = 0,60 \cdot \frac{\rho r}{bR}.$$

Si h est la levée, ou la hauteur à laquelle le mouton doit être élevé, la durée de son ascension sera

$$\frac{h}{v} \text{ ou } \frac{h b R}{0,60 \cdot \rho r}.$$

On ajoutera moitié en sus pour la descente des tenailles et le temps perdu, et l'on aura le temps employé par chaque coup de mouton. Il sera facile d'en déduire le nombre de coups que l'on est en droit d'exiger des ouvriers dans une journée de travail effectif de 6 heures.

On a souvent employé un autre système, qui consistait à se réserver les moyens d'embrayer ou de débrayer à volonté (Voy. EMBRAYAGE); quand le mouton, fixé dans ce cas à la corde, était parvenu à la hauteur voulue, on débrayait et le mouton retombait, entraînant avec lui la corde qui se déroulait en faisant tourner le treuil en sens contraire. Dans ce système la descente du mouton était un peu ralentie par la raideur de la corde, et par le frottement sur l'axe de la poulie et sur l'axe du treuil; en outre la corde s'usait rapidement. L'emploi de la tenaille est préférable.

On s'est quelquefois servi de chevaux pour la manœuvre du mouton; le cheval était attelé à une corde s'enroulant sur une poulie de grand diamètre (3^m,30), montée sur l'axe du treuil. Mais les allées et venues du cheval faisaient perdre beaucoup de temps.

Les sonnettes à tiraudes et les sonnettes à décléc ont leurs avantages spéciaux dépendant de la nature du terrain sur lequel on opère; en général il est avantageux de commencer le battage des pilots avec une sonnette à tiraudes, et de l'achever avec une sonnette à décléc.

Lorsqu'on a à battre un pilot dans l'angle d'une fouille profonde où le patin ordinaire ne pourrait pas trouver place, on fait usage d'un patin angulaire qui est représenté figure 7. Les jumelles, au lieu d'être fixées au patin même, sont alors établies, comme on le voit en AA, en avant de son angle, à l'aide des pièces horizontales mm fixées elles-mêmes au patin.

Il peut arriver que la tête des pieux qu'on doit battre soit au-dessous de la plate-forme sur laquelle

la sonnette est placée; dans ce cas, les jumelles sont établies de la même manière en avant du patin, et descendent au-dessous d'une quantité suffi-

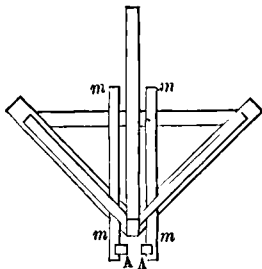


Fig. 7.

sante pour servir de guide au mouton. (Voy. MARTEAU A PILOTS.)

SOUBASSEMENT, partie inférieure d'un édifice, qui semble supporter toute la construction, et joue le rôle d'un piédestal continu. Le soubassement d'une colonnade est un véritable piédestal, qui prend nom de *stylobate*.

SOUFFLETS, machines soufflantes, destinées à lancer de l'air sur un foyer. Les soufflets employés dans les forges sont des soufflets analogues à ceux de nos foyers domestiques; ils sont placés horizontalement, et reçoivent le mouvement par l'intermédiaire d'un arbre à cames. — Cette machine soufflante, la plus ancienne de toutes, est aujourd'hui à peu près abandonnée, et ne se rencontre plus guères que chez les cloutiers et les maréchaux (Voy. MACHINES SOUFFLANTES).

SOUPAPES, organes employés dans un grand nombre de machines, et particulièrement dans les pompes, pour ouvrir ou fermer alternativement l'orifice de communication entre deux capacités. On en distingue un grand nombre d'espèces. Nous ferons connaître les principales.

La plus simple de toutes les soupapes est le *clapet*. Dans les pompes anciennes et dans beaucoup de pompes rustiques, il se compose d'une simple rondelle de cuir clouée sur l'un de ses côtés, près de l'orifice qu'il s'agit de fermer (fig. 1). On re-



Fig. 1.

couvre cette rondelle d'un morceau de plomb en forme de *goutte de suif*, destiné à augmenter le poids de la soupape et à la faire retomber d'elle-

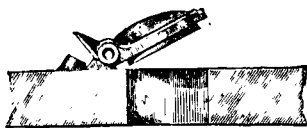


Fig. 2.

même plus facilement. Dans les appareils plus perfectionnés, le clapet est une plaque de laiton fixée à charnière sur le bord ou *siège* de l'orifice (fig. 2). La soupape et les bords du siège sont ajustés de

manière à former un joint hermétique. Cette disposition est adoptée pour la plupart des pompes à incendie et pour un très-grand nombre de pompes à élever les eaux. Le mouvement d'ascension du clapet est ordinairement limité à un angle de 45 degrés, afin qu'il retombe plus aisément. Les clapets conviennent aux pompes de moyennes dimensions, dans lesquelles l'eau se meut avec une faible vitesse. Les chocs auxquels leur fermeture donne lieu deviennent dangereux, dans les grandes pompes ou dans celles où l'eau se meut avec une grande vitesse, par les ébranlements qu'ils occasionnent.

Les *soupapes à soulèvement* sont celles qui, au lieu de tourner autour d'un axe comme les clapets, se séparent entièrement de l'orifice par un mouvement de translation perpendiculaire à son plan. Dans ce cas, la soupape et son siège ont ordinairement la forme d'un tronc de cône (fig. 3), dont les génératrices font avec l'axe des angles de 45 degrés. La surface de la soupape et celle de son siège sont rodés de manière à former un joint hermétique; la

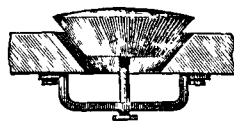


Fig. 3.

soupape est guidée par une tige traversant une bride fixée aux parois de l'orifice, et se terminant par une tête qui limite la course de la soupape. Ces soupapes s'emploient dans les mêmes circonstances que les clapets et offrent les mêmes inconvénients.

On peut ranger dans la classe des soupapes à soulèvement les *soupapes à boulet* (fig. 4), formées

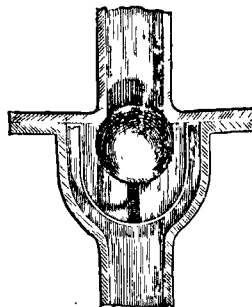


Fig. 4.

d'un boulet sphérique tourné avec soin, et reposant sur un siège ayant la forme d'une zone sphérique de même rayon. Le boulet, qui n'est retenu que par un croisillon placé à une certaine distance de l'orifice, retombe toujours sur son siège, sans qu'il soit nécessaire de le guider. Ce genre de soupapes, employé primitivement pour les *BELIERS HYDRAULIQUES* (Voy. ce mot), est aujourd'hui généralement adopté pour les pompes alimentaires des machines locomotives.

Les diverses soupapes qu'on vient de décrire conviennent aux petites pompes et aux pompes moyennes. Pour les grandes pompes, où le choc des soupapes est d'autant plus dangereux que la pression est plus grande, il est nécessaire d'employer

un genre particulier de soupapes, qui offrent au mouvement de l'eau une issue assez large sans éprouver une très-forte pression. On atteint ce double but avec les *soupapes à double siège*. La figure 5 représente une soupape de ce genre, réduite

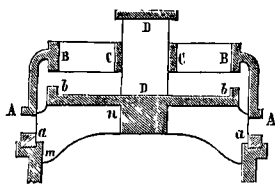


Fig. 5.

à ses parties essentielles. Elle se compose d'une couronne circulaire dont la section méridienne est représentée en ABC; la partie AB est pleine; la partie BC est évidée, et ne présente que six cloisons verticales dans les intervalles desquelles l'eau peut passer. La soupape est guidée par son contact avec un cylindre fixe DD qui occupe le centre. Le siège se compose : 1° d'un anneau aa fixé sur les bords de l'orifice; 2° d'un plateau plein bb établi au-dessus de cet orifice. L'anneau et le plateau sont reliés par des cloisons verticales mn, laissant entre elles des intervalles par lesquels l'eau peut passer. C'est sur le plateau bb qu'est établi le guide cylindrique DD. Lorsque la soupape est en place, l'anneau AA repose sur l'anneau aa, qui forme ainsi un premier siège, et l'anneau BB repose de même sur l'anneau bb, qui forme le rebord du plateau fixe. C'est le second siège de la soupape. Quand elle s'élève, l'eau passe par l'orifice annulaire que laissent entre eux les anneaux AA et aa, et l'on conçoit qu'on puisse donner à la soupape assez de course pour que cet orifice annulaire ait toute la grandeur nécessaire pour l'écoulement du liquide. Cette course est limitée par un chapeau formant saillie à la partie supérieure du cylindre DD. Quand la soupape redescend, l'eau qui s'était introduite au-dessus du plateau bb passe entre les cloisons de la soupape. Mais l'avantage de cette disposition consiste en ce que la soupape peut ainsi donner passage à un grand volume d'eau, sans qu'elle ait à supporter une pression considérable. Soit, en effet, R le rayon extérieur de l'anneau AA et r le rayon intérieur de l'anneau BB; la projection de la partie pleine de la soupape sur un plan perpendiculaire à son axe sera la différence des aires des cercles dont R et r sont les rayons, c'est-à-dire $\pi (R^2 - r^2)$.

Si \mathcal{P} est la pression par mètre au-dessus de la soupape et \mathcal{P}' la pression par mètre au-dessous, la pression qui met en mouvement la soupape sera donc exprimée par (Voy. Pression d'un fluide)

$$(\mathcal{P} - \mathcal{P}') \cdot \pi (R^2 - r^2).$$

Or, quel que soit le premier facteur, on rendra le produit aussi petit qu'on voudra en rendant r assez peu différent de R, c'est-à-dire en rapprochant suffisamment l'un de l'autre les rayons des deux sièges. L'invention des soupapes à double siège est attribuée à l'ingénieur anglais Hawthorn (Voy. Des machines et appareils destinés à l'élevation de l'eau, par M. Morin).

Les soupapes à double siège sont également employées dans les machines à vapeur de Cornouailles

pour régler le passage de la vapeur (Voy. Machines à vapeur).

SOUPAPES DE SÛRETÉ, soupapes adaptées aux chaudières à vapeur pour empêcher la pression intérieure de dépasser la limite fixée. L'orifice que la soupape ferme doit être assez grand pour livrer passage à toute la vapeur qui se forme, ou qui peut se former dans le cas où le feu aurait été poussé d'une manière excessive. Dans les générateurs fixes, il est prudent de régler cet orifice d'après une production de 100 kilogrammes par mètre carré de surface de chauffe et par heure. De ces poids de vapeur, on déduit son volume en divisant le poids par la densité donnée pour les cas les plus ordinaires à l'article GÉNÉRATEURS. Connaissant d'ailleurs la pression intérieure, on peut calculer la vitesse d'écoulement (Voy. ÉCOULEMENT DES GAZ). Soit donc V le volume qui doit pouvoir s'écouler par seconde et v la vitesse d'écoulement, $\frac{V}{v}$ désignera la section de l'orifice. Afin d'éviter les calculs, on peut prendre les valeurs de la vitesse dans le tableau suivant, donné par M. Pécelet (*Traité de la Chaleur*) :

Pressions en atmosphères.	Vitesses.	Pressions en atmosphères.	Vitesses.
1 $\frac{1}{4}$	266 ^m	6	574 ^m
1 $\frac{1}{2}$	352	8	595
1 $\frac{3}{4}$	395	10	607
2	428	12	618
3	502	14	625
4	537	16	631
5	559	18	635

Les ordonnances administratives prescrivent pour le calcul de l'aire ω de l'orifice et pour le diamètre d de cet orifice, supposé circulaire, l'emploi des formules

$$\omega = 5,3 \cdot \frac{S}{n - 0,412}$$

et

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{S}{n - 0,412}}$$

dans lesquelles S désigne la surface de chauffe en mètres carrés et n le numéro du timbre, ou le nombre d'atmosphères que la pression intérieure ne doit pas dépasser. Dans ces formules, ω est exprimé en centimètres carrés et d en centimètres. Elles donnent des nombres moindres que ceux qui résulteraient du calcul indiqué ci-dessus, parce qu'elles ne supposent qu'une production de 60 kilogrammes environ de vapeur par mètre carré de surface de chauffe et par heure, au lieu de 100 kilogrammes.

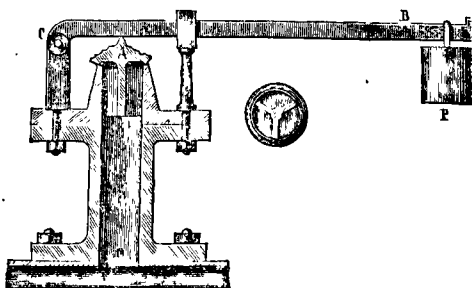
Il ne faudrait pas croire qu'on puisse augmenter arbitrairement l'aire de la soupape pour donner à la vapeur une plus large issue; au moment où elle s'ouvrirait sous un excès de pression intérieure, l'eau pourrait être projetée contre les parois avec une violence capable d'occasionner des accidents.

L'aire de la soupape étant connue, on en déduira la charge qu'elle doit porter, en multipliant cette aire, exprimée comme nous l'avons dit en centimètres carrés, par 1^{,033} (n - 1); attendu que la pression de l'atmosphère est de 1^{,033} par centimètre carré, et que la charge demandée doit représenter la différence entre la pression intérieure qui est de n atmosphères et la pression extérieure qui est d'une atmosphère.

D'après les règlements administratifs tout générateur doit être muni de deux soupapes de sûreté.

Les soupapes de sûreté se font en fonte, ou préférablement en bronze; elles reposent sur leur siège par une partie plane de petite étendue. Les ordonnances administratives exigent que la largeur de cette partie plane ou portée ne dépasse pas le trentième du diamètre, et qu'elle ne soit jamais supérieure à 2 millimètres. On évite les soupapes coniques comme trop sujettes à l'adhérence.

On donne à la charge des soupapes de sûreté deux dispositions distinctes. Quelquefois la charge est directement posée sur la soupape et mobile entre des guides verticaux. Mais, le plus souvent, on emploie un contre-poids suspendu à l'extrémité d'un levier qui appuie sur la soupape par un point intermédiaire. La figure montre cette disposition. La soupape, dont la forme est représentée en plan à part, forme, quand elle est en place, un tuyau vertical communicant avec la chaudière, et fermé par le haut; elle est maintenue au moyen d'un le-



vier BC mobile autour du point C, et qui appuie sur le sommet A de la soupape. Ce levier porte à l'extrémité B un poids P réglé de telle manière que la soupape soulève le levier et donne issue à la vapeur dès que la pression intérieure dépasse la limite voulue. Connaissant la charge que doit supporter la soupape, il est clair qu'on aura le poids P par le rapport des distances des points A et B à l'axe de la rotation C (Voy. LEVIER).

On a beaucoup varié la disposition des soupapes de sûreté, mais toutes les dispositions rentrent dans l'une ou l'autre des deux précédentes.

Dans les locomotives, l'extrémité du levier, au lieu d'être chargée d'un poids, est maintenue par un ressort à boudin renfermé dans un cylindre articulé par son extrémité inférieure avec un point fixe pris sur la partie antérieure de la boîte à feu. Dès que, la pression soulève le levier, un échappement particulier accroît tout à coup la distance de son extrémité à la boîte cylindrique, et permet à la soupape de se soulever entièrement.

On peut remarquer que si l'orifice de sortie de la vapeur était insuffisant, la pression intérieure augmenterait, mais non pas indéfiniment, attendu que la vitesse augmentant en même temps, il arriverait toujours un moment où le poids de vapeur sortant de l'orifice dans un temps donné, serait précisément égal à celui qui se forme dans le même temps, et, à partir de cet instant, il s'établirait un régime uniforme.

On peut remarquer encore que si le contact entre

la soupape et son siège se faisait par une surface trop étendue, il pourrait se produire un phénomène analogue à celui des BARRAGES A POUTRELLES (Voy. ce mot), c'est-à-dire que la veine fluide s'écoulerait par une sorte d'ajutage, la pression autour de la veine diminuerait, et que la soupape pourrait être repoussée sur son siège. Ce phénomène a été, en effet, observé par M. Griffith, mécanicien des forges de Fourchambault.

Il pourrait arriver, par l'effet d'une alimentation d'eau froide rapide, que la tension de la vapeur s'abaissât au-dessous de la pression atmosphérique. auquel cas la chaudière pourrait être écrasée par cette dernière pression. Pour éviter cet accident, on adapte à la chaudière une soupape qui s'ouvre de dehors en dedans. C'est surtout dans les chaudières à basse pression que l'on a besoin de cette soupape. Elle se place ordinairement sur le trou d'homme, et porte le nom de *reniflard*.

SOUTÈNEMENT. Voy. MURS DE SOUTÈNEMENT.

SPHÈRE ARMILLAIRE (du latin *armilla*, bracelet), appareil destiné à donner une idée des mouvements apparents des astres et à servir d'auxiliaire dans l'enseignement de la Cosmographie et de l'Astronomie élémentaire. Cet appareil est ordinairement construit dans le système de Ptolémée: un petit globe placé au centre figure la terre; elle est entourée de dix cercles dont plusieurs sont mobiles, et qui représentent le méridien, l'horizon, les colures, l'équateur, l'écliptique avec le zodiaque, les tropiques et les cercles polaires (Voy. ces mots). C'est à la présence de ces cercles que la sphère doit son nom de *sphère armillaire*. L'invention de la sphère armillaire est attribuée au philosophe Anaximandre, qui vivait dans le VI^e siècle avant Jésus-Christ.

On construit également des appareils nommés *sphères de Copernic*, qui sont conçus dans le système de l'Astronomie moderne. On leur donne plus particulièrement le nom de *planétaires*, parce que les mouvements des planètes y sont représentés.

Voyez le *Traité de la sphère* de Rivard, et les *Traités de Cosmographie et d'Astronomie élémentaire*.

SPHÈRE CÉLESTE, sphère fictive d'un rayon arbitraire, mais très-grand, ayant pour centre le centre du globe terrestre, et sur laquelle on projette les astres par des droites menées du centre à ces astres. Les projections, c'est-à-dire les points où ces droites percent la sphère, se fixent à l'aide de divers systèmes de coordonnées sphériques (Voy. ASCENSION DROITE, DÉCLINAISON, LONGITUDE, LATITUDE, DISTANCE ZÉNITHALE, AZIMUT). L'idée de la sphère céleste est née de l'apparence même que le ciel nous présente. Les distances des étoiles à la Terre étant immenses, nos yeux n'ont aucun moyen de les comparer, et nous les rapportons à une même distance, c'est-à-dire que nous les plaçons, à notre insu, sur une même sphère dont nous occupons le centre; en outre, les distances azimutales des étoiles étant constantes, la sphère étoilée semble tourner tout d'une pièce, de l'est à l'ouest, par l'effet de la rotation en sens contraire de la Terre autour de son axe; ce qui confirme pour nos sens l'idée de cette sphère céleste, à la réalité de laquelle des anciens croyaient en effet.

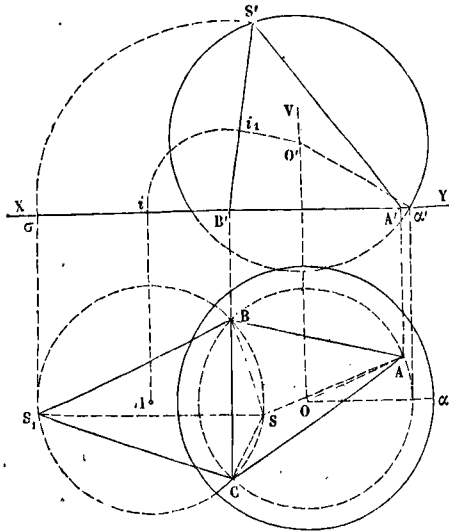
L'axe autour duquel la Terre exécute son mouvement de rotation est mobile dans l'espace; mais il

demeure sensiblement parallèle à lui-même; et les dimensions de l'orbite terrestre étant négligeables par rapport aux distances des étoiles à la Terre, cet axe paraît immobile par rapport à la sphère céleste. Les points où il perce la sphère, points qui paraissent, par conséquent, immobiles dans le ciel, sont les *pôles* de la sphère ou les *pôles du monde*. Nous ne pouvons voir à la fois que l'un des deux pôles suivant l'hémisphère dans lequel nous sommes placés. A l'équateur seulement, les deux pôles se trouvent à la fois dans le plan de l'horizon (rationnel).

La sphère est dite *parallèle* pour un observateur placé au pôle, parce que tous les parallèles à l'équateur sont en même temps parallèles à l'horizon. La sphère est *droite* pour un observateur placé à l'équateur, parce que ce cercle et tous les parallèles sont alors perpendiculaires à l'horizon. La sphère est *oblique* pour un observateur placé en tout autre lieu du globe.

SPHÈRE CIRCONSCRITE (Géométrie descriptive). On désigne sous ce nom le problème qui consiste à déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre donné par les projections de ses sommets.

On suppose la base ABC placée sur le plan hori-



zontal, et l'on prend la ligne de terre perpendiculaire à l'un des côtés BC; il en résulte que la face qui a pour trace BC est perpendiculaire au plan vertical de projection. Soient S, S' les projections du sommet. Le centre de la sphère circonscrite est sur la verticale passant par le centre O du cercle circonscrit à la base; le point O est donc la projection horizontale du centre de la sphère; et la projection verticale de ce centre est sur la perpendiculaire OV à la ligne de terre. Le centre de la sphère se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée à la face ASB par le centre du cercle circonscrit à cette face. Si nous pouvons déterminer cette perpendiculaire, sa rencontre avec la verticale du point O donnera le centre de la sphère. Pour y parvenir, rabattons la face ASB sur le plan horizontal; il suffit pour cela

d'y rabattre le point S, S' par les procédés ordinaires (*Voy. RABATTEMENT*); mais ici l'opération se simplifie : on mènera SS₁, parallèle à XY; on décrira du point B' comme centre l'arc S'σ, et l'on élèvera en σ une perpendiculaire à la ligne de terre, dont la rencontre avec SS₁ donnera le rabattement S₁ du sommet. — Soit maintenant I le centre du cercle circonscrit au triangle B S₁C. Quand on relèvera la face rabattue, ce point décrira un arc de cercle parallèle au plan vertical, et viendra, en projection verticale, prendre la position i₁. La perpendiculaire élevée de ce centre sur la face relevée, étant parallèle au plan vertical, s'y projettera suivant une perpendiculaire à B'S'; le point O' où cette perpendiculaire rencontre OV sera la projection verticale du centre de la sphère.

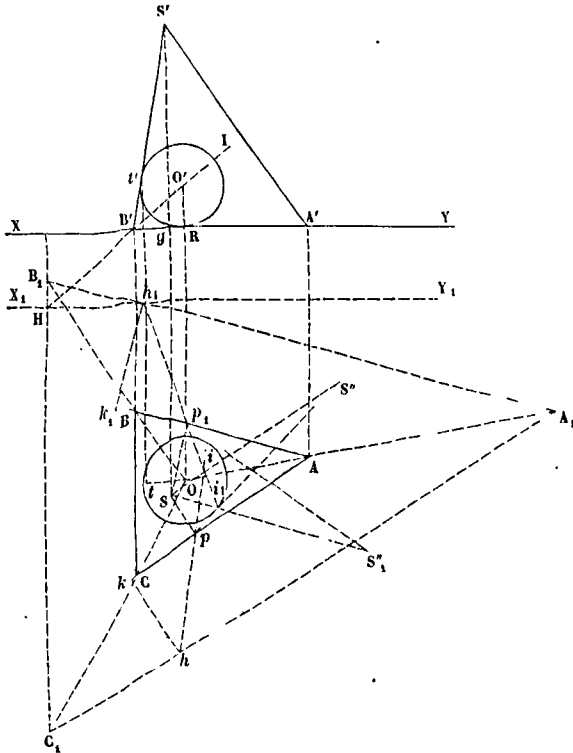
Pour obtenir son rayon, il faut chercher la distance du centre O, O', à l'un des sommets, A, A' par exemple. Pour cela, on joindra OA, que l'on amènera en Oα, parallèlement à la ligne de terre; on abaissera αα' perpendiculaire sur XY; et l'on joindra O'α' qui sera le rayon demandé.

Le contour apparent de la sphère sur chacun des plans de projection sera donc un cercle ayant O ou O' pour centre, et O'α' pour rayon.

SPHÈRE INSCRITE (Géométrie descriptive). On désigne sous ce nom le problème qui consiste à déterminer le centre et le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre donné par les projections de ses sommets. On suppose la base ABC placée sur le plan horizontal, et le côté BC perpendiculaire à la ligne de terre; par suite, la face qui a pour trace BC est perpendiculaire au plan vertical. Soient S, S' les projections du sommet. — Le centre de la sphère inscrite est à la rencontre des plans bissecteurs des dièdres. Ce centre peut être regardé comme le sommet d'une seconde pyramide ayant pour base ABC, et qu'il s'agit de construire. Pour cela, on se sert, avec avantage, d'un second plan horizontal, dont nous représenterons la trace verticale par X₁Y₁. Il coupera la pyramide à construire suivant un triangle semblable à ABC, et que nous allons chercher à obtenir.

La face qui a pour trace BC étant perpendiculaire au plan vertical, le plan bissecteur de l'angle dièdre BC a pour trace verticale la bissectrice B'I de l'angle S'B'A'. Cette bissectrice prolongée coupe en un point H le plan horizontal auxiliaire X₁Y₁; ce point est un point de l'intersection de ce plan horizontal auxiliaire avec le plan bissecteur du dièdre BC. Par conséquent, si par ce point H on mène une parallèle à BC, on aura la direction de l'un des côtés du triangle que l'on se propose de construire, laquelle se confond avec sa projection sur le plan horizontal XY. Pour obtenir le côté de ce triangle qui correspond à AC, il faut faire une opération un peu plus compliquée. Par le sommet du tétraèdre donné, menons un plan perpendiculaire à AC, il coupera la base suivant une perpendiculaire Sp, et la face qui a pour trace AC suivant une droite faisant avec Sp l'angle rectiligne qui mesure le dièdre AC. Rabattons le plan coupant sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de Sp; le point S, S' se rabattra sur une droite S''S perpendiculaire à Sp, et à une distance du point S égale à S'g, hauteur du tétraèdre. Si donc on joint pS'', on aura en SpS'' le rabattement de l'angle

qui mesure le dièdre considéré. Menons la bissectrice ip de cet angle, ce sera le rabattement de l'intersection du plan coupant $S'Sp$ avec le plan bissecteur du dièdre AC . Cherchons le point où cette bissectrice rencontre le plan horizontal auxiliaire; ce sera un point de l'intersection de ce plan horizontal avec le plan bissecteur du dièdre AC ; c'est-à-dire que ce sera un point situé sur le côté parallèle à AC dans le triangle qu'on se proposait de construire. Pour obtenir ce point, prenons sur Ap une longueur pk égale à la distance des deux plans horizontaux XY et X_1Y_1 ; et menons kh parallèle à Sp , et terminé en h au pro-



longement de la bissectrice ih . Quand on relèvera le plan SpS'' rabattu, les points k et h viendront se placer dans le plan X_1Y_1 , puisque kh est parallèle à l'horizontale Sp , et que pk est la distance des deux plans horizontaux. D'ailleurs les points k et h , dans ce mouvement, décriront des arcs de cercle verticaux, qui se projetteront horizontalement, l'un suivant kp , l'autre suivant une parallèle. Si donc par le point h on mène une parallèle à CA , on aura, en projection horizontale, la direction d'un second côté du triangle à construire. Sur l'épure, ce côté se confond évidemment avec sa projection horizontale. — Une construction tout à fait semblable, et relative au dièdre AB , donnera le troisième côté du triangle $A_1B_1C_1$ que l'on se proposait de construire.

Or ce triangle et le triangle ABC sont les bases parallèles d'un tronc de tétraèdre dont le sommet est le centre de la sphère inscrite. Si l'on joint AA_1 , BB_1 , CC_1 , on aura les projections des arêtes

latérales de ce tronc de tétraèdre. Ces trois droites concourent en un même point O , qui est la projection horizontale du centre de la sphère inscrite. La projection verticale correspondante doit se trouver sur une perpendiculaire à la ligne de terre élevée par le point O ; mais elle doit aussi se trouver sur $B'I$, trace d'un des plans bissecteurs, qui est perpendiculaire au plan vertical; elle se trouve donc à leur intersection O' .

Le rayon de la sphère est évidemment la distance $O'R$ du point O' à la ligne de terre. Le contour apparent de la sphère inscrite sur chacun des plans de projection est donc un cercle décrit des points O ou O' comme centres, avec un rayon égal à $O'R$. Le point de contact de la sphère avec la base ABC est le point O . Le point de contact avec la face BSC a pour projection verticale le point de contact f' du cercle O' avec $B'S'$; et sa projection horizontale est en f sur une parallèle à la ligne de terre menée par le point O . Si l'on voulait avoir le point de contact avec l'une des deux autres faces, il faudrait déterminer, par les procédés ordinaires, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette face.

SPHÉROMETRE, instrument qui sert à mesurer l'épaisseur des lames minces, et à déterminer le rayon des lentilles. Il se compose d'un trépied à pointes d'acier, traversé par une vis micrométrique d'un demi-millimètre de pas. Perpendiculairement à l'axe de la vis, est monté un plateau circulaire dont le limbe est divisé en 500 parties égales. La position du plateau est accusée par une règle verticale divisée en demi-millimètres et établie sur l'un des pieds du trépied. Une glace bien dressée sert de support à tout l'appareil.

Pour se servir de l'instrument, on commence par faire descendre la vis jusqu'à ce que son extrémité soit dans le plan déterminé par les extrémités des trois pointes. On en est averti par l'espèce de grincement que produisent

les oscillations de l'appareil aussitôt que la pointe de la vis dépasse le plan des trois autres. L'observation de ce point précis exige un peu d'habitude. — Quand les quatre pointes sont dans un même plan, le zéro du plateau doit correspondre au zéro de la règle. — Cette vérification étant opérée, on fait remonter la vis, et l'on place au-dessous la lame dont on veut mesurer l'épaisseur; puis on fait redescendre la vis jusqu'à ce qu'elle touche la lame, ce dont on est averti comme ci-dessus. On observe alors à quelle division de la règle correspond le plateau, et à quelle division du plateau correspond la règle; la partie entière du premier nombre donne le nombre de tours du plateau, c'est-à-dire un nombre de demi-millimètres; le second exprime des 500^{es} du pas de la vis, c'est-à-dire des 1000^{es} de millimètre; en ajoutant ce second nombre au premier, on obtient l'épaisseur de la lame.

On opère d'une manière semblable pour trouver le rayon d'une lentille. La distance observée est

alors la distance comprise entre le plan du petit cercle passant par les trois points du trépied, et le pôle de ce cercle, occupé par la pointe de la vis; c'est donc la hauteur de la calotte sphérique qui a pour base le petit cercle passant par les trois pointes. Si r représente le rayon de ce petit cercle, R celui de la sphère, et h la distance observée, on a

$$r^2 = h(2R - h);$$

$$\text{d'où l'on tire } R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

(Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, n° 704).

La difficulté de saisir l'instant précis où l'extrémité de la vis est dans le plan des trois pointes a conduit M. Perreaux à un dispositif plus exact. Dans le sphéromètre de cet habile constructeur, la pointe qui termine la vis en est indépendante et appartient à une tige d'acier qui la traverse suivant l'axe; cette tige ne peut descendre parce qu'elle est retenue à la partie supérieure par une portée qui dépasse un peu en largeur le diamètre du canon dans lequel la tige est engagée; mais rien ne l'empêche de monter. Dès que, par le mouvement de la vis, cette pointe est arrivée dans le plan des trois autres, si l'on continue à faire descendre la vis, la portée dont il a été parlé se trouve plus élevée que la partie supérieure de la vis, et soulève un levier dont le point fixe est sur la vis même; l'extrémité de ce levier fait marcher une aiguille qui parcourt une portion de cadran. La quantité dont la tige dépasse le haut de la vis se trouve ainsi amplifiée par le mouvement des deux leviers, et rendue par conséquent appréciable à l'œil.

SPIRAL, nom donné en horlogerie au ressort moteur d'une montre, d'un chronomètre ou d'une pendule d'appartement (Voy. *MONTRE*, *PENDULE*, *CHRONOMÈTRE*).

STABILITÉ, propriété de l'équilibre en vertu de laquelle il arrive qu'un corps ou un système de corps, dégagé de sa position d'équilibre, tend à y revenir sous l'action des forces qui le sollicitent.

I. Pour en donner un exemple, considérons (fig. 1) une manivelle OB, mobile autour d'un axe projeté en O, et sollicitée par une force F, exercée par l'intermédiaire d'une bielle dont l'autre extrémité parcourt la droite OX. Si le bouton de la manivelle se trouve, sans vitesse initiale, aux points A ou B, que l'on appelle les *points morts*, il y a nécessairement équilibre, car la force F est alors neutralisée par la réaction qu'exerce l'axe O. Mais l'équilibre est *stable* si le bouton de manivelle est au point A, tandis qu'il est *instable* si ce bouton est au point B. Supposons, en effet, dans le premier cas, que l'on déplace le bouton d'une petite quantité pour l'amener au point A'; l'action de la force F, dirigée de A' vers C, tendra à ramener le bouton vers le point A, c'est-à-dire vers la position d'équilibre. Supposons au contraire, dans le second cas, que l'on déplace le bouton qui était en B pour l'amener en B'; l'action de la force F, qui est dirigée de B' vers D, tendra à éloigner de plus en plus le bouton de la position d'équilibre B.

Fig. 1.

à éloigner de plus en plus le bouton de la position d'équilibre B.

II. Dans les applications, on a surtout à considérer la stabilité de l'équilibre des systèmes uniquement soumis à l'action de la pesanteur, et aux réactions des appuis et des diverses pièces du système entre elles. La condition de stabilité peut alors s'énoncer d'une manière simple si l'on peut négliger le frottement : *il faut, pour que l'équilibre soit stable, que le centre de gravité ne puisse se déplacer en descendant.* Désignons, en effet, par P le poids total du système, et par f l'une quelconque des réactions qui s'exercent aux points de contact des pièces entre elles ou de la part des appuis. L'équation du TRAVAIL VIRTUEL (Voy. ce mot) donnera pour l'équilibre

$$\mathcal{E}P + \Sigma \mathcal{E}f = 0.$$

Si aucun corps ne quitte celui avec lequel il est en contact, les réactions f étant normales aux surfaces de contact puisqu'il n'y a pas de frottement, on aura donc pour chacune d'elles $\mathcal{E}f = 0$, et par suite $\Sigma \mathcal{E}f = 0$, ce qui entraîne $\mathcal{E}P = 0$, c'est-à-dire (Voy. TRAVAIL DE LA PESANTEUR) que le centre de gravité du système demeure dans le même plan horizontal. Si l'un des corps quitte celui avec lequel il était en contact, le travail de la réaction f qu'il recevait de ce corps est positif; donc $\Sigma \mathcal{E}f$ est positif, et par suite $\mathcal{E}P$ est négatif, ce qui exige que le centre de gravité se soit élevé.

Réciproquement, si le centre de gravité ne peut se déplacer en descendant, il y a nécessairement équilibre; car, dans le cas contraire, il y aurait puissance vive produite, quantité essentiellement positive (Voy. *PUISSANCE VIVE*), tandis que le travail des forces est nul ou négatif, ce qui ne saurait avoir lieu (Voy. *EFFET DU TRAVAIL*).

La condition que nous venons d'énoncer est donc nécessaire et suffisante pour l'équilibre. Elle ne peut être remplie que si l'ordonnée verticale du centre de gravité par rapport à un plan horizontal situé au-dessous est un minimum ou un maximum. Mais, dans le second cas, si l'on déplace le système de sa position d'équilibre d'une quantité appréciable, il y a puissance vive produite, $\mathcal{E}P$ est positif, le centre de gravité descend, et s'éloigne par conséquent de plus en plus de sa position primitive. Si, au contraire, l'ordonnée du centre de gravité est un minimum, et qu'on déplace le système d'une quantité sensible, il y a encore puissance vive produite, $\mathcal{E}P$ est encore positif, le centre de gravité descend encore; mais dans ce cas il se rapproche de sa position primitive. C'est donc dans ce second cas seulement que l'équilibre est stable.

Concevons, par exemple, qu'on fasse rouler sur un plan horizontal un cylindre droit homogène à base elliptique; son centre de gravité décrira une courbe

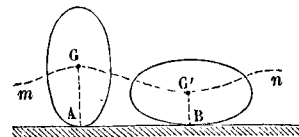


Fig. 2.

plane et sinuose mn (fig. 2). Lorsque le contact aura lieu par l'extrémité du grand axe de la section droite, l'ordonnée AG du centre de gravité sera un maximum; il y aura équilibre instable; lorsqu'au

contraire le contact aura lieu par l'extrémité du petit axe, l'ordonnée BG' du centre de gravité sera un minimum, et il y aura équilibre stable. On reconnaît aisément, en effet, que dans le premier cas le cylindre, dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, roulera en s'en éloignant de plus en plus; tandis que dans le second cas il tendra à y revenir et y reviendra effectivement par une suite d'oscillations. — Si le centre de gravité, en se déplaçant, demeurerait constamment sur une droite horizontale, ou dans un même plan horizontal, l'équilibre serait *indifférent*, attendu qu'il aurait lieu dans toutes les positions. C'est ce qui arriverait pour le cylindre considéré ci-dessus, si la section droite devenait un cercle; c'est également ce qui aurait lieu pour une sphère homogène.

III. Pour donner une application des principes qui viennent d'être exposés, on peut traiter la question suivante Aux sommets A, B, C (fig. 3) d'un triangle placé horizontalement, sont adaptées de petites pou-

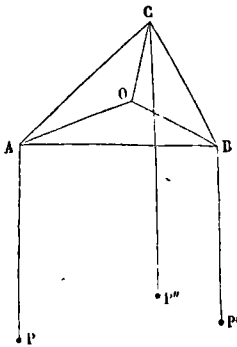


Fig. 3.

lies, dont on néglige les dimensions et le poids; sur ces poulies s'enroulent trois fils très-flexibles, dont on néglige aussi le poids, et à l'extrémité desquels sont suspendus trois poids égaux P, P', P''. On demande la position que doit occuper le point de réunion O des trois fils pour que le système des trois poids soit en équilibre. D'après ce qui a été exposé ci-dessus, il faut que le centre de gravité du système de ces trois poids ne puisse descendre, et qu'il soit par conséquent le plus bas possible. Or, si Z désigne sa distance au plan du triangle, on a par le théorème des MOMENTS (*Voy. ce mot*)

$$(P + P' + P'') \cdot Z = P \cdot AP + P' \cdot BP' + P'' \cdot C'';$$

d'où
$$Z = \frac{1}{3} (AP + BP' + CP'').$$

il faut donc que AP + BP' + CP'' soit le plus grand possible; et puisque les trois fils sont de longueur invariable, il faut que OA + OB + OC soit le plus petit possible. La question est donc ramenée à trouver dans le plan d'un triangle un point O dont les distances aux trois sommets fassent une somme minimum. On trouve que ce point est situé à l'intersection de trois segments capables de 120°, décrits respectivement sur les trois côtés du triangle. (Pour l'équilibre des corps flottants, voyez ci-après l'article STABILITÉ HYDROSTATIQUE.)

IV. On donne aussi le nom de *stabilité* à la propriété que peut offrir l'équilibre d'un corps solide de subsister entre certaines limites quand on fait

varier une ou plusieurs des forces extérieures qui le sollicitent. Pour en donner un exemple, considérons un parallélépipède rectangle ABCD (fig. 4), un mur, par exemple, sollicité d'une part par son poids P, force verticale appliquée à son centre de gravité G, et de l'autre par une force horizontale F, qui tend à le renverser en le faisant tourner autour de l'arête projetée en A, et que nous supposons appliquée dans le plan vertical de symétrie du mur qui contient le point G. — L'expérience prouve que l'équilibre subsiste quand on fait varier F depuis zéro jusqu'à une certaine limite, que nous assignerons tout à l'heure. Cela tient à ce que la réaction du sol se modifie de manière à faire équilibre aux forces F et P. Ces deux forces se composent effectivement en une seule, dirigée suivant une certaine droite KL, et la réaction R du sol se modifie de manière à demeurer égale et opposée à cette résultante. Si l'on prend les moments des trois forces F, P et R par rapport au point L, point d'application de R, le

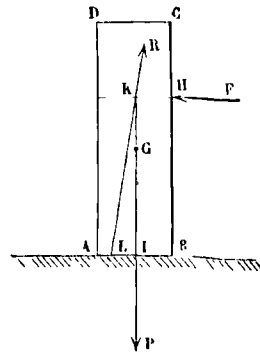


Fig. 4.

moment de cette dernière force est nul, et il reste

$$F \cdot BH - P \cdot IL = 0, \text{ d'où } IL = BH \cdot \frac{F}{P}. \quad [1]$$

A mesure que la force F augmente, il en est de même de IL; c'est-à-dire que le point d'application de la réaction du sol se rapproche de plus en plus de l'arête A autour de laquelle la force F tend à faire tourner le mur. Mais il est clair que ce point d'application doit rester compris dans l'intérieur de la base du mur, et que par conséquent le maximum de IL est IA. La valeur correspondante de F est

$$F_1 = P \cdot \frac{IA}{BH}, \quad [2]$$

c'est la plus grande valeur que cette force puisse avoir pour l'équilibre. On voit donc que l'équilibre subsistera depuis F=0 jusqu'à F=F₁; et l'équilibre sera *stable* entre ces limites. Le moment de la force F₁ est

$$F_1 \cdot BH = P \cdot IA;$$

on lui donne le nom de *moment de stabilité*. Ce moment pouvant être calculé à l'avance, on peut en déduire les limites entre lesquelles F peut varier. Si h désigne la hauteur du mur, e son épaisseur, II le poids du mètre cube de la pierre, l la longueur du mur, on aura P = IIh₁el; et l'expression du moment de stabilité sera

$$P \cdot \frac{l}{2} e, \text{ ou } \frac{1}{2} II h l e^2.$$

V. Plus généralement, considérons un corps reposant sur le sol par une base polygonale quelconque *abcde* (fig. 5), dont la projection verticale est AD. Soient G et *g* les projections de son centre de gravité. Soit P son poids, et F, F', F'', etc., une série de forces qui lui sont appliquées. Supposons que *ab* soit l'arête de la base la plus voisine du point *g*. La réaction R du sol étant nécessairement appliquée dans l'intérieur de la base, son point d'application ne peut être placé à gauche de l'arête *ab*. Supposons-le placé sur cette arête, et prenons les moments des forces qui sollicitent le corps par rapport à *ab*; la force R disparaîtra, et il restera

$$\sum \mathcal{M}F - P \cdot gi = 0, \quad [3]$$

gi étant la perpendiculaire abaissée du point *g* sur *ab*. La somme $\sum \mathcal{M}F$ ne peut donc être supérieure à $P \cdot gi$, et cette valeur maximum est encore ce que l'on appelle le *moment de stabilité*; c'est le produit du poids du corps par la distance entre la verticale de son centre de gravité et l'arête de la

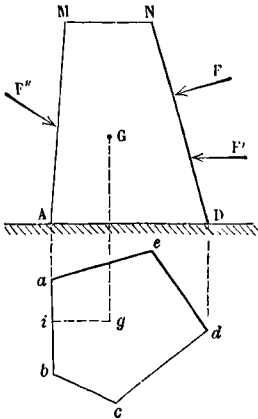


Fig. 5.

base la plus voisine. La quantité $\sum \mathcal{M}F$ pourra varier depuis *zéro* jusqu'à $P \cdot gi$ sans que l'équilibre cesse d'avoir lieu; l'équilibre sera donc *stable* entre ces limites. On pourrait considérer ainsi successivement chacune des arêtes autour desquelles le corps peut tourner; mais, puisque *ab* est l'arête la plus voisine de *g*, le moment de stabilité calculé par rapport à cette arête est le plus petit que l'on puisse obtenir; c'est donc celui qu'il y a lieu de considérer dans les applications.

VI. Enfin, on désigne encore sous le nom de *stabilité* la propriété qu'ont les constructions de demeurer en équilibre permanent, sans que les matériaux employés, non-seulement soient exposés à la rupture ou à l'écrasement, mais même perdent leur élasticité naturelle, condition essentielle à laquelle on s'efforce de satisfaire dans les applications.

Voyez, sur ce genre de stabilité, les articles MURS, POUSSEE DES VOÛTES, MURS DE SOUTÈNEMENT, PONTS, et tous les articles relatifs à la résistance des matériaux.

STABILITÉ HYDROSTATIQUE, état d'équilibre d'un corps flottant qui tend à revenir à sa position quand il en a été écarté d'une petite quantité. On sait qu'un corps flottant éprouve de la part du

fluide une *poussée* verticale de bas en haut égale au poids du volume de liquide qu'il déplace, et qui peut être regardée comme appliquée au centre de gravité de ce volume, qu'à cause de cela on nomme *centre de poussée*. D'un autre côté, le corps est soumis à son poids, force verticale dirigée de haut en bas et appliquée au centre de gravité du corps. Pour que ces deux forces se fassent équilibre, il faut qu'elles soient égales et opposées, ce qui exige 1° que le poids du volume de fluide déplacé soit égal au poids du corps; 2° que le centre de poussée et le centre de gravité soient dans la même verticale. Si ces conditions sont remplies, il y a équilibre; mais cet équilibre peut être *stable* ou *instable*, c'est-à-dire que le corps étant dérangé de sa position peut tendre à y revenir ou à s'en écarter de plus en plus. Si le centre de gravité du corps est au-dessous du centre de poussée, l'équilibre est stable; car soit AB (fig. 1) le niveau du liquide, C le centre de poussée, G le centre de gravité du corps. Supposons qu'il s'incline vers la droite d'une

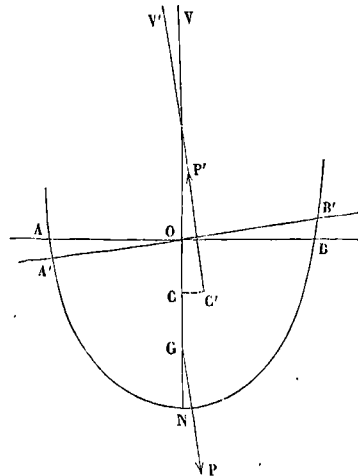


Fig. 1.

petite quantité, en tournant autour du point G; ou, pour ne pas compliquer la figure, admettons que ce soit le niveau qui se déplace en sens contraire et vienne prendre la position A'B'. Le centre de poussée sera venu à droite de la première verticale CV; car, pour passer du volume AOB au volume A'OB', il faut enlever de la gauche AOA' et ajouter à droite le volume BOB'. Or, le volume total immergé est resté le même; car, puisque le centre de gravité ne se déplace pas, la résultante de translation reste nulle (Voy. MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ, RÉSULTANTE DE TRANSLATION), c'est-à-dire que la poussée reste égale au poids du corps; et par conséquent celui-ci déplace le même volume de fluide. Il en résulte que les volumes AOA' et BOB' sont égaux, et que par conséquent le centre de gravité du volume total s'est transporté un peu à droite. Le poids P du corps, appliqué en G, et la poussée égale P' appliquée en C' sont alors perpendiculaires au nouveau plan de niveau A'B', et tendent à faire tourner le corps en ramenant AB vers A'B', c'est-à-dire en ramenant le corps à sa position

primitive; donc l'équilibre est stable. Mais il n'est pas indispensable pour la stabilité que le point G soit au-dessous du point C. Imaginons que la rotation se fasse autour d'un axe projeté en G et perpendiculaire au plan de la figure (fig. 2); et pour fixer les idées, supposons que le corps soit symétrique par rapport à ce plan. Le centre de poussée ne sortira pas du plan de la figure, et y décrira une courbe CC' C''... Soit M le centre de courbure de cette courbe au point C, centre que l'on nomme le MÉTACENTRE (Voy. ce mot); c'est le sommet de la développée MM' de la courbe des centres de poussée. La verticale menée par le point C' sera perpendiculaire à A'B' et par conséquent tangente à cette développée, comme on le démontre à l'article cité; cette tangente sera donc la direction de la poussée. Quant à la direction du poids P, elle sera également perpendiculaire à A'B', mais de sens contraire. Pour la stabilité de l'équilibre il suffira donc que le point G soit au-dessous du point M, comme l'indique la figure; car alors les forces P et

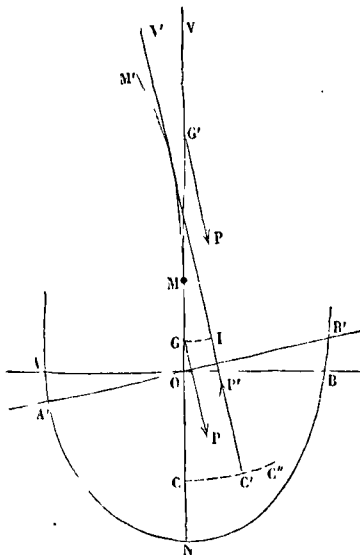


Fig. 2.

P' tendront à faire tourner le corps pour ramener AB vers A'B', c'est-à-dire pour ramener le corps à sa position primitive. Le contraire arriverait si le point G était au-dessus du point M, car les deux forces P et P' tendraient à faire tourner le corps dans un sens opposé, et à l'éloigner par conséquent de plus en plus de sa position primitive, auquel cas l'équilibre serait instable. Si le point G se confondait avec le point M, les deux forces P et P' seraient directement opposées; le corps ne prendrait aucun mouvement, et par conséquent l'équilibre aurait lieu dans la seconde position comme dans la première, auquel cas l'équilibre est dit *indifférent*. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est donc que le centre de gravité du corps soit au-dessous du métacentre.

Ces considérations s'appliquent naturellement à l'équilibre des navires. La mesure de la stabilité est le moment de la poussée P' par rapport au cen-

tre de gravité. Si du point G on abaisse sur la direction C'V la perpendiculaire GI, le moment dont nous parlons aura pour expression

$$P'.GI \text{ ou } P.GI$$

ou, en appelant α l'angle CMC',

$$P.GM \sin \alpha$$

ou enfin

$$P(CM - CG) \sin \alpha.$$

La première partie de cette expression ne dépend que de la forme du navire; car une fois cette forme arrêtée, les positions du centre de poussée, qui prend ici le nom de CENTRE DE CARÈNE (Voy. ce mot), et la position du premier métacentre, se trouvent complètement déterminées. Pour cette raison, cette première partie est dite la mesure de la *stabilité de formes*. La partie soustractive, au contraire, ne dépend que de la position du centre de gravité du navire et de sa charge, ce qu'on appelle quelquefois CENTRE DE SYSTÈME (Voy. ce mot); et la stabilité sera d'autant plus grande que cette partie soustractive sera moindre, c'est-à-dire que le point G sera plus bas. Cette condition est une des plus importantes à remplir lors de l'ARRIMAGE (Voy. ce mot). Cette partie soustractive est dite, pour la raison que nous venons de donner, la mesure de la *stabilité de poids*. La position du point G joue également un rôle des plus importants dans l'étude de la STABILITÉ SOUS VOILES (Voy. ce mot).

Nous venons de voir que l'équilibre est indifférent quand le centre de gravité du corps coïncide avec le métacentre. Cela peut avoir lieu dans une autre circonstance: c'est lorsque le centre de poussée conserve sa position quand on fait tourner le corps autour de son centre de gravité. Un cylindre homogène qui flotte, son axe placé horizontalement, est dans ce cas si on le fait tourner autour de cet axe; car alors le volume déplacé reste identique à lui-même, et le centre de poussée ne se déplace pas. Une sphère homogène est dans le même cas, quelque mouvement qu'on lui donne autour de son centre de gravité. Dans les deux cas l'équilibre a lieu bien que le centre de gravité soit au-dessus du centre de poussée, comme il est facile de le reconnaître.

STABILITÉ SOUS VOILES, qualité d'un navire qui tend à conserver le mouvement de translation rectiligne et uniforme qu'il a reçu. Cette qualité n'est pas absolue: elle dépend de circonstances variables, telles que la vitesse et la direction du vent, la disposition de la voilure, l'état de la mer, et même la charge du navire.

1. Un vaisseau en marche peut être considéré comme soumis à trois forces: son poids P, force verticale appliquée à son centre de gravité, la force F que le vent exerce normalement aux voiles, appliquée au centre de voilure (Voy. VOILES), et la résistance R que la mer exerce sur la carène. L'action de ces trois forces produit en général un mouvement de translation rectiligne du centre de gravité, et un mouvement de rotation autour de ce centre, mouvement que l'on décompose d'ordinaire en mouvement de ROULIS, mouvement de TANGAGE et mouvement d'ÉVOLUTION (Voy. ces mots). Le mouvement de translation tend toujours à devenir uniforme; parce que si la force motrice augmente, la vitesse augmentant aussitôt, la résistance augmente elle-même; et si la force motrice diminue,

μ' , μ'' , et μ''' Supposons que i augmente; les équations [b] et [c] montrent que, pour une même valeur de F , la composante R'' de la résistance diminue, tandis que la composante R''' augmente. Par cette double raison μ' diminue. La tendance au roulis diminue donc quand l'inclinaison s'accroît. — Si l'on examine la valeur de μ'' , on reconnaît aisément que la quantité entre parenthèses atteint son maximum, pour la valeur de i donnée par la relation [1]; si donc i augmente, cette quantité entre parenthèses diminue; et comme R''' augmente, on voit que μ'' diminue. Ainsi la tendance au tangage diminue également lorsque l'inclinaison s'accroît. A la vérité la force F varie elle-même avec l'inclinaison; mais en déduisant sa valeur des formules [3], [6] et [7] établies à l'article VOILES, on reconnaît qu'elle ne contient que $\cos i$ qui varie très-peu entre les limites où l'inclinaison i reste comprise, et que d'ailleurs $\cos i$ entre avec le même signe au numérateur et au dénominateur, en sorte que la variation de F peut être négligée dans la discussion qui nous occupe. On peut également admettre que les coordonnées x , y , z du point d'application de la force R demeurent sensiblement les mêmes quand le navire s'incline plus ou moins. Examinons les variations de μ''' . Pour la valeur de i fournie par l'équation [1] la quantité entre parenthèses dans la valeur de μ''' disparaît; et comme on doit alors avoir

$$\mu''' = 0,$$

il en résulte

$$R''x - R'y = 0.$$

On peut admettre que lorsque l'inclinaison augmente, la quantité $R''x - R'y$ reste sensiblement nulle et que par conséquent μ''' prend le signe de $h \sin \alpha \sin i - d \cos \alpha \cos i$.

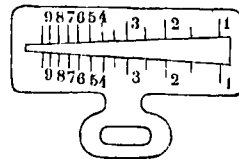
Or cette expression augmente avec i ; puisque $\sin i$ augmente et que $\cos i$ diminue; il en résulte que pour les valeurs de i supérieures à celle que donne [1], le moment μ''' est positif, et que par conséquent le navire a une tendance à *loffer*, c'est-à-dire que la proue tend à se tourner du côté d'où vient le vent. Pour des valeurs de i inférieures à celle que donne [1], μ''' serait au contraire négatif; le bâtiment tendrait à *arriver*, c'est-à-dire que sa proue tendrait à se tourner du côté où va le vent. Toutes ces conclusions se vérifient dans la pratique. Pour faire varier l'inclinaison i , on ne peut disposer ni de F , ni de P , ni de l ; α est ordinairement donné par la direction du vent et celle de la route qu'on veut suivre; mais on peut jusqu'à un certain point disposer de h . En diminuant la voilure dans le haut on fera décroître h et par suite i ; dès lors la tendance à *loffer* diminuera; les moments μ' et μ'' relatifs au roulis et au tangage diminueront également; en augmentant au contraire la voilure vers le haut, ou en la diminuant vers le bas, la tendance au roulis et au tangage augmentera; et le navire tendra à venir au vent ou à *loffer*, auquel cas les marins disent que le navire est *ardent*. On peut également disposer de la quantité d qui figure dans les valeurs de μ'' et de μ''' . Si l'on diminue la voilure vers l'avant, d diminuera; dès lors μ'' diminuera aussi, tandis que μ''' augmentera; c'est-à-dire que le navire tendra moins à tanguer et plus à *loffer*; l'inverse aurait lieu si l'on augmentait d en diminuant

la voilure à l'arrière (Voy. ÉVOLUTION). Ceci fait comprendre la nécessité de répartir les voiles sur plusieurs mâts et à diverses hauteurs sur chacun d'eux.

Quoiqu'on ne puisse pas disposer de la charge, il est utile de se rendre compte de l'influence qu'elle exerce sur la marche du navire. Si la charge augmente, le centre de gravité s'abaisse; le centre de voilure restant le même, la distance h augmente; par suite μ''' augmente, et le navire tend à *loffer*. Si la charge diminue, h diminue; il en est de même de μ''' , et le navire tend à arriver. Si la charge se transporte vers l'avant, d diminue; μ''' augmente, et le navire tend à *loffer*; si la charge se transporte vers l'arrière, d augmente, μ''' diminue, et le navire tend à arriver. Dans les valeurs de μ' et de μ'' , h et R''' croissent avec la charge; mais R'' , qui est supérieur à P , a une influence prépondérante; il en résulte que la tendance au roulis et au tangage diminue quand la charge augmente; l'inverse a lieu quand elle diminue. Toutes ces conséquences sont vérifiées par l'observation.

III. Jusqu'ici nous n'avons point parlé de l'effet des lames; cet effet est en général défavorable à la stabilité; mais il tend à se corriger de lui-même. Supposons que le vaisseau navigue au plus près; si le choc d'une lame le fait arriver, il reçoit momentanément l'action du vent sous une incidence moins oblique, il s'incline davantage, et dès lors il y a tendance à *loffer*. Si au contraire le navire *loffait* sous l'action d'une lame, ce qui pourrait arriver par une mer houleuse dans laquelle la marche des lames ne coïnciderait pas encore avec celle du vent, il recevrait momentanément l'action du vent sous une incidence plus oblique; il s'inclinerait moins; et dès lors il y aurait tendance à arriver. Cette tendance du navire à corriger lui-même les effets de la lame vient en aide à l'action du GOUVERNAIL (Voy. ce mot); cet appareil ne doit être employé du reste que pour résister au mouvement d'évolution produit par les lames; son action permanente serait nuisible, attendu qu'elle a toujours pour résultat de diminuer la vitesse.

STADIA MILITAIRE, petit instrument qui sert à évaluer approximativement la distance à laquelle se trouve un fantassin ou un cavalier. C'est un verre plan, auquel on donne quelquefois la forme



d'un Iorgnon, et sur lequel on a tracé deux obliques s'écartant également de l'horizontale; elles portent des divisions qui se correspondent. Les divisions marquées 1 indiquent la hauteur apparente du fantassin, par exemple, lorsqu'on le voit à 100^m au travers du verre tenu à bras tendu, les divisions marquées 2 indiquent sa hauteur apparente à 200^m, et ainsi de suite. Ces divisions sont établies d'après ce principe connu que les hauteurs apparentes sont en raison inverse des distances. Pour

reconnaître la distance à laquelle se trouve un fantassin, on le regarde avec la stadia tenue à bras tendu, et on l'amène à être exactement compris entre les deux obliques; la division sur laquelle il se trouve alors fait connaître sa distance.

Cet instrument n'a aucune précision, mais il donne une approximation qui peut suffire en campagne dans beaucoup de circonstances.

STATIONS, positions dans lesquelles une planète paraît s'arrêter avant de passer du mouvement apparent direct au mouvement apparent rétrograde ou *vice versa* (Voy. PLANÈTES).

STATIQUE, partie de la Mécanique qui traite de l'équilibre des corps solides (Voy. EQUILIBRE). On a longtemps enseigné la Statique avant la Mécanique, en établissant par des procédés artificiels les règles de la composition des forces. Mais depuis une vingtaine d'années on a reconnu l'avantage qu'il y a à déduire ces règles de l'étude du mouvement (Voy. les ouvrages de Coriolis, de M. Poncelet, de M. Bélanger, etc.). Cependant dans les traités de *Mécanique rationnelle* on suit encore l'ancienne marche (Voy. le *Cours de Mécanique* de M. Duhamel, et la *Statique* de M. Poinsot, qui est l'ouvrage le plus complet et le plus original sur cette matière).

STÈRE, unité de volume employée pour les bois de chauffage. Le stère équivaut à un mètre cube (Voy. SYSTÈME MÉTRIQUE).

STÉRÉOBATE (du grec στερεός, solide, et βάσις, base), soubassement sans moulure, qui règne le long d'un édifice.

STÉRÉOGRAPHIE (du grec στερεός, solide, et γράφω, je décris), représentation des objets en relief sur une surface plane (Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS).

STÉRÉOGRAPHIQUE (PROJECTION), projection perspective de la surface de la terre ou de la sphère céleste, dans laquelle le point de vue est à l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan du grand cercle qui est pris pour plan du tableau (Voy. CARTES GÉOGRAPHIQUES, CARTES CÉLESTES).

STÉRÉOTOMIE (du grec στερεός, solide, et τέμνω, couper), application de la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE à la COUPE DES PIERRES et à la CHARPENTE (Voy. ces mots).

STUFFENBOX, boîte à étoupes, qui garnit l'orifice par lequel la tige du piston d'une machine à vapeur pénètre dans le cylindre. Toutes les fois qu'une tige mobile traverse une capacité dont la communication avec l'extérieur doit être interceptée, les orifices par lesquels elles passent doivent être garnis de stuffenbox. L'étoupe serrée contre la tige mobile ferme la communication.

STYLOBATE (du grec στύλος, colonne, et βάσις, base), piédestal commun portant une rangée de colonnes. Le stylobate présente les mêmes proportions transversales et les mêmes moulures que le piédestal d'une colonne, suivant l'ordre auquel il appartient (Voy. ORDRES).

SUD, l'un des quatre POINTS CARDINAUX (Voy. ce mot). On a devant soi le sud, dans notre hémisphère, lorsqu'on regarde le soleil à midi, c'est-à-dire au moment de son passage au méridien.

SUPERFICIE DE LA TERRE ET DE SES PARTIES. Quand on suppose la terre sphérique, sa superficie est facile à évaluer, ainsi que celle d'une zone, d'un

fuseau ou d'un triangle sphérique, par les règles données en Géométrie élémentaire. Nous rappellerons seulement qu'en nommant T l'aire d'un triangle sphérique, A, B, C ses angles exprimés en degrés, et R le rayon de la sphère, on a

$$T = \pi R^2 \left[\frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ} \right]. \quad [1]$$

Quand les côtés du triangle sont très-petits, on peut les considérer comme rectilignes et appliquer la formule

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad [2]$$

dans laquelle a et b sont deux côtés adjacents exprimés en mètres, et c l'angle compris entre ces côtés.

Soit Z l'aire d'une zone dont les bases répondent aux latitudes l et l' , sa hauteur sera exprimée par $R \sin l' - R \sin l$;

et l'on aura par conséquent

$$Z = 2\pi R^2 (\sin l' - \sin l) \\ = 4\pi R^2 \sin \frac{1}{2} (l' - l) \cos \frac{1}{2} (l' + l). \quad [3]$$

Si l'on veut, par exemple, l'aire d'une zone glaciale, on fera

$$l' = 90^\circ \text{ et } l = 66^\circ 32' 32'', 76,$$

complément de l'obliquité de l'écliptique (à 1^{er} janvier 1862), et l'on trouvera

$$0,0413226, \text{ ou à peu près } 0,04,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{25}$, pour le rapport de l'aire cherchée à celle de la sphère entière.

Si l'on veut l'aire d'une des zones tempérées, il faut faire

$$l' = 66^\circ 32' 32'', 76 \text{ et } l = 32^\circ 27' 27'', 24$$

et l'on trouve 0,259643 ou un peu plus de $\frac{1}{4}$ pour le rapport de la zone à la sphère entière.

Enfin, si l'on veut l'aire de la zone torride, il faut faire

$$l' = 23^\circ 27' 27'', 24, \quad l = 0,$$

et doubler le résultat, ce qui donne pour le rapport de cette zone à la sphère entière 0,39807, ou à peu près $\frac{2}{5}$.

Quant à l'aire de la sphère entière, si l'on prend pour rayon le rayon moyen, c'est-à-dire la moyenne arithmétique entre les trois axes de l'ellipsoïde, dont deux sont égaux au rayon équatorial 6376821^m, et le troisième au rayon polaire 6355565^m (Voy. l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1865), ce qui donne

$$R = 6369735^m, 67\dots$$

on trouve pour la surface cherchée

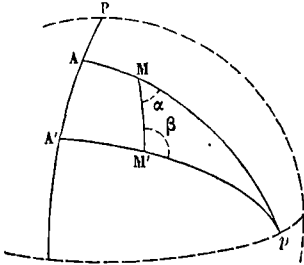
$$5098623^m, 40.$$

Il y a une autre partie de la surface de la terre qu'il est bon de savoir évaluer, lorsqu'on rapporte les différents sommets d'un réseau au méridien principal par une PERPENDICULAIRE A LA MÉRIDienne (Voy. ce mot); c'est le trapèze rectangulaire compris entre le méridien AA', deux perpendiculaires AM, A'M' à ce méridien, et l'arc de grand cercle MM' qui joint leurs extrémités. On sait que les deux perpendiculaires AM et A'M' vont se couper sur l'équateur en un certain point p . Le triangle birectangle ApA' a pour mesure l'angle p , en prenant pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité

de superficie celle du triangle trirectangle. Dans les mêmes hypothèses, le triangle MPM' a pour mesure

$$\alpha + \beta + p - 2,$$

en désignant par α et β les angles en M et en M'. Le trapèze rectangulaire AMM'A' a donc pour me-



sure la différence entre ces expressions, c'est-à-dire

$$2 - (\alpha + \beta).$$

Quand cette quantité sera déterminée, on aura pour l'aire S du trapèze

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{2 - (\alpha + \beta)}{1}$$

ou

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{180^\circ}, \quad [4]$$

selon que les angles α et β seront rapportés à l'angle droit ou au degré.

Pour obtenir $\alpha + \beta$ on a recours à l'une des analogies de Néper qui donne, en désignant par a et b les côtés M'p et Mp opposés à α et β ,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cos \frac{1}{2} p;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} [180^\circ - (\alpha + \beta)] &= \cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} p. \end{aligned}$$

Mais si x et y désignent les coordonnées sphériques rectangulaires AP et AM du point M, x' et y' les coordonnées A'P et A'M' du point M', on a

$$a = 90^\circ - y', \quad b = 90^\circ - y, \quad p = x' - x;$$

par suite

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} [180^\circ - (\alpha + \beta)] \\ = \frac{\sin \frac{1}{2} (y' + y)}{\cos \frac{1}{2} (y' - y)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} (x' - x), \quad [5] \end{aligned}$$

formule calculable par logarithmes, donnée par Lagrange dans le VI^e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, page 276.

Quand on a égard à la forme elliptique du méridien, on peut, pour les superficies peu étendues, substituer au rayon moyen du globe le rayon de la sphère transversalement osculatrice (Voy. Calcul des COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES), et appliquer les formules qui précèdent. Pour les superficies d'une

grande étendue, on décompose la surface terrestre en trapèzes formés par des méridiens et des parallèles, que l'on évalue comme on va le voir, et s'il reste, en dehors de ces trapèzes quelques parties, nécessairement peu étendues, on les considère comme planes; l'on emploie une méthode graphique pour les évaluer, d'après des mesures prises sur la carte même, en appliquant la FORMULE DE TH. SIMPSON (Voy. ce mot) ou toute autre méthode approximative équivalente, qui aura toujours un degré d'exactitude suffisant dans la pratique.

Exprimons d'abord l'aire du trapèze élémentaire compris entre deux méridiens inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle φ , et entre deux parallèles très-voisins, interceptant sur le méridien un arc élémentaire ds . La zone entière comprise entre ces deux parallèles pouvant être assimilée à la surface latérale d'un tronç de cône, son expression serait, en appelant x et $x + dx$ les rayons des deux parallèles,

$$ds \times 2\pi \left(x + \frac{1}{2} dx\right),$$

ou simplement

$$2\pi x ds.$$

Si, au lieu de considérer la zone entière, on ne considère que la portion de cette zone comprise entre deux méridiens faisant entre eux l'angle φ , on devra multiplier l'expression précédente par le rapport

$\frac{\varphi}{360^\circ}$, ce qui donnera

$$\frac{\varphi}{180^\circ} \cdot \pi x \cdot ds.$$

Or le rayon x d'un parallèle, répondant à la latitude l , a pour expression (Voy. ELLIPSOÏDE TERRESTRE)

$$x = \frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}$$

et l'élément ds de l'ellipse s'exprime en fonction des mêmes quantités par la formule

$$ds = \frac{b^2 dl}{a(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par conséquent, en appelant $d\Sigma$ l'aire du trapèze élémentaire considéré, on a

$$d\Sigma = \frac{\pi b^2 \cos l dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\varphi}{180^\circ}, \quad [6]$$

formule qu'il ne reste plus qu'à intégrer entre deux latitudes données l et l' pour avoir la valeur de Σ . L'intégration peut s'effectuer exactement, et donne une expression contenant un logarithme népérien; mais l'excentricité e étant très-petite (Voy. FIGURE DE LA TERRE), il est plus commode pour les applications de développer l'expression [6], et d'intégrer de 0 à l . On trouve ainsi

$$\Sigma = \frac{\varphi}{180^\circ} \cdot \pi b^2 \left[\sin l + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 l + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 l \dots \right]. \quad [7]$$

Il est inutile de pousser l'approximation plus loin. Pour une autre latitude l' , on aurait une expression semblable; et, en faisant la différence, on obtient l'aire du trapèze compris entre deux méridiens faisant entre eux l'angle φ , et deux parallèles répondant aux latitudes l et l' .

Il existe pour le même objet d'autres formules plus ou moins compliquées, mais pouvant avoir leur utilité spéciale; on les trouvera dans le *Traité de Géodésie* de M. Puissant, tome I, art. 210

L'aire de l'ellipsoïde entier s'obtient en faisant dans la formule [7]

$$\varphi = 360^\circ, \quad l = 90^\circ,$$

et doublant le résultat. On obtient ainsi

$$5098596^{\text{m}^2},$$

nombre qui diffère très-peu de celui qui a été donné au commencement de cet article. (Dans ce calcul, on a pris pour valeur de l'APLATISSEMENT (Voy. ce mot) la fraction $\frac{1}{300}$, donnée dans l'Annuaire de 1865, ce qui entraîne

$$e^2 = 0,00665555\dots)$$

SURFACE DE RÉVOLUTION, surface engendrée par la rotation d'une ligne génératrice, généralement plane, autour d'un axe (Voy. SURFACES COURBES).

SURFACE DÉVELOPPABLE, surface réglée, lieu des tangentes à une courbe à double courbure appelée *arête de rebroussement*. Deux génératrices consécutives peuvent toujours être considérées comme étant dans un même plan, en négligeant les infiniment petits du 3^e ordre; et les éléments successifs de la surface peuvent être amenés dans un même plan, sans déchirer ni duplicature. Une surface développable peut donc aussi être engendrée par le mouvement d'un plan (Voy. SURFACES COURBES).

SURFACE GAUCHE, surface réglée dont deux génératrices consécutives ne sont point dans un même plan (Voy. SURFACES COURBES).

SURFACE HÉLICOÏDE, surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une ligne génératrice autour d'un axe. On ne considère dans les applications que les surfaces hélicoïdes réglées, et parmi celles-ci, trois surfaces seulement : l'hélicoïde développable, la surface de vis à filet triangulaire, et la surface de vis à filet carré (Voy. SURFACES COURBES).

SURFACE RÉGLÉE, surface engendrée par le mouvement d'une droite (Voy. SURFACES COURBES).

SURFACES COURBES (Géométrie descriptive). Hors des cas tout à fait exceptionnels, on n'emploie dans les applications que deux classes de surfaces courbes : les *surfaces de révolution* et les *surfaces réglées*. Nous nous proposons, dans cet article, d'en rappeler la classification, le mode de génération, le mode de représentation, et les propriétés essentielles.

Nous dirons ensuite quelques mots des surfaces accidentellement employées et qui ne rentrent pas dans ces deux classes.

I. SURFACES DE RÉVOLUTION. Une surface de révolution est une surface engendrée par une ligne, ordinairement plane, appelée *génératrice*, qui tourne autour d'un *axe fixe*, lequel peut ne pas être situé dans le même plan. Chaque point de la génératrice décrit, dans ce mouvement, un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et qui a son centre sur cet axe. Ce cercle est ce que l'on nomme un *parallèle* de la surface. Tout plan mené par l'axe coupe la surface suivant une courbe qui porte le nom de *section méridienne* ou de *méridien*. D'après le mode de génération de la surface tous les méridiens sont égaux. Il en résulte que la surface peut encore être supposée engendrée par sa section méridienne qui tournerait autour de l'axe, c'est-à-dire que l'on peut prendre pour généra-

trice la section méridienne. — Une surface de révolution est déterminée par son axe et par une position de sa génératrice, ou par sa section méridienne. Le plus souvent l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple. Dans ce cas, la surface est représentée par les projections O, O'' (fig. 1) de

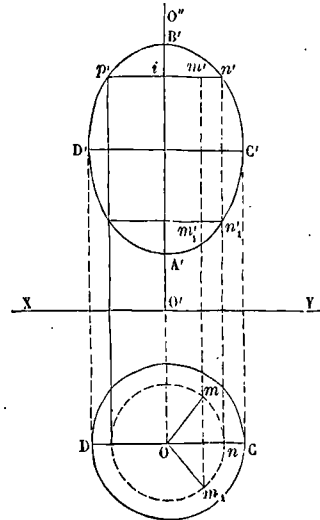


Fig. 1.

son axe, et par les projections $CD, A'C'B'D'$ de sa section méridienne parallèle au plan vertical. Les parallèles ont pour projection verticale des droites parallèles à la ligne de terre, et ils se projettent horizontalement en vraie grandeur suivant des cercles décrits du point O comme centre. Les plans méridiens ont pour trace horizontale des droites menées par le point O ; et si on fait tourner l'un quelconque d'entre eux autour de l'axe, jusqu'à ce que ce plan devienne parallèle au plan vertical, la section méridienne qui y est contenue se projette verticalement suivant $A'C'B'D'$.

Étant donnée la projection horizontale m d'un point M de la surface, on détermine aisément la projection verticale correspondante. Pour cela, on décrit du point O comme centre, avec Om pour rayon, un cercle, qui est la projection horizontale du parallèle sur lequel se trouve le point cherché M . On remarque ensuite que, si l'on faisait tourner la section méridienne contenant ce point M , autour de l'axe O, O'' jusqu'à ce que son plan devint parallèle au plan vertical, la section méridienne contenant le point cherché viendrait se projeter verticalement suivant $A'C'B'D'$. Si donc on mène le rayon On parallèle à la ligne de terre, et que par le point n on élève une perpendiculaire à cette ligne, le point n' où elle coupe la courbe méridienne $A'C'B'D'$ sera la projection verticale de la position qu'a prise le point M après la rotation dont il s'agit. Si l'on ramène le plan méridien dans sa position, le point M décrira un arc de parallèle qui se projettera horizontalement suivant nm et verticalement suivant une parallèle $n'p'$ à la ligne de terre. Élevant donc au point m une perpendicu-

laire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en m' avec la droite $n'p'$, on aura la projection verticale m' du point M . Il y aura généralement plusieurs solutions, c'est-à-dire qu'il y aura plusieurs points de la surface ayant la même projection horizontale donnée m . Ainsi, dans l'exemple de la figure, la perpendiculaire nn' coupe la courbe méridienne en un second point n' ; il en résulte qu'à la projection horizontale donnée m correspond un second point de la surface, dont la projection verticale est en m' sur la verticale mm' . Il pourrait, suivant la forme de la section méridienne, y avoir plus de deux points de la surface correspondant à une même projection horizontale donnée.

Si c'est la projection verticale m' qui est donnée, on mène par ce point une droite $n'p'$ parallèle à la ligne de terre : c'est la projection verticale du parallèle contenant le point M cherché ; et le rayon de ce parallèle est la longueur in' . Du point O comme centre, avec cette longueur in' ou On pour rayon, on décrit un cercle : c'est la projection horizontale de ce même parallèle. Pour avoir la projection horizontale qui correspond à la projection verticale donnée m' , il suffit donc d'abaisser de ce point une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre du cercle On . Le point de rencontre m sera le point cherché. Il y a généralement une seconde solution m_2 ; c'est-à-dire qu'il y a généralement sur la surface deux points qui ont la même projection verticale.

On trace ordinairement sur le plan horizontal les projections du plus grand et du plus petit parallèle; c'est entre ces deux cercles que se projettent tous les points de la surface. Il peut arriver que le plus petit soit nul; c'est ce qui a lieu dans l'exemple de la figure 1 qui représente un ellipsoïde de révolution; les points de la surface se projettent dans l'intérieur du cercle CD , projection du plus grand parallèle de la surface, auquel on donne le nom d'*équateur*. Il peut arriver que le plus grand parallèle soit infini; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'hyperboloïde de révolution à une nappe; tous les points de la surface se projettent alors horizontalement en dehors du plus petit parallèle, auquel on donne le nom de *cercle de gorge*. Si les deux circonstances se présentaient à la fois, c'est-à-dire si le plus petit parallèle était nul et que le grand fût infini, tous les points du plan horizontal seraient la projection horizontale de points appartenant à la surface.

Quant aux projections verticales, elles sont toujours comprises dans l'intérieur de la projection verticale de la méridienne parallèle au plan vertical.

Les propriétés des surfaces de révolution dont on fait le plus fréquent usage sont les suivantes :

Tout point pris sur l'axe est également distant de tous les points d'un même parallèle.

Les tangentes aux méridiens, menées par les points appartenant à un même parallèle, concourent en un même point de l'axe.

Les normales aux méridiens, menées par les points appartenant à un même parallèle, concourent également en un même point de l'axe.

Si l'on suppose l'axe vertical, comme dans la figure 1, les traces horizontales des tangentes menées aux divers méridiens par les points appartenant à

un même parallèle sont sur une circonférence de cercle, qui a son centre au pied de l'axe. Il en est de même pour les traces horizontales des normales.

(Voy. les articles PLAN TANGENT, SECTIONS PLANES, INTERSECTIONS DE SURFACES.)

Le cylindre droit à base circulaire, le cône droit à base circulaire, la sphère, l'ellipsoïde de révolution, le parabolôïde de révolution, l'hyperboloïde de révolution à une nappe, le tore, sont les surfaces de révolution que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications.

II. SURFACES RÉGLÉES. On appelle *surface réglée* toute surface engendrée par le mouvement d'une ligne droite; ces surfaces sont ainsi nommées parce que l'on peut y appliquer la règle, en la faisant passer par un point donné quelconque de la surface. Le cylindre et le cône droits, que l'on étudie dans la Géométrie élémentaire, offrent des exemples de surfaces réglées. — La droite mobile qui engendre la surface porte le nom de *génératrice*, et chacune des positions que cette droite peut prendre est ce que l'on appelle une *génératrice* de la surface. — Le mouvement de la génératrice peut être déterminé d'un grand nombre de manières.

Si la génératrice se meut parallèlement à elle-même, en rencontrant toujours une courbe *directrice* donnée, elle engendre une *surface cylindrique*.

Si la génératrice est assujettie à passer par un point fixe, en glissant sur une *directrice* donnée, elle engendre une *surface conique*, dont le point fixe est le *sommet*.

Si la génératrice est assujettie à demeurer tangente à une même courbe à double courbure, elle engendre une surface dont tous les éléments successifs peuvent être considérés comme plans, et développés sur une surface plane. Une pareille surface est ce que l'on appelle une *surface développable*; elle est formée de deux nappes, séparées par la courbe à double courbure dont on vient de parler, laquelle porte le nom d'*arête de rebroussement*. Les surfaces coniques n'en sont qu'un cas particulier, celui où l'arête de rebroussement se réduit à un point; et les surfaces cylindriques ne sont elles-mêmes qu'un cas particulier des surfaces coniques : celui où le sommet est à l'infini. Parmi les surfaces développables on peut encore citer l'*hélicoïde développable*, qui est le lieu des tangentes à une même hélice.

Si par un point quelconque de l'espace on mène des parallèles aux génératrices de la surface, on obtient une surface conique à laquelle on a donné le nom de *cône directeur*, et dont la considération est utile dans diverses questions, particulièrement dans celles qui sont relatives aux plans tangents (Voy. PLAN TANGENT). Dans l'hélicoïde développable le cône directeur est un cône de révolution, puisque les tangentes à l'arête de rebroussement, c'est-à-dire les génératrices de la surface, font des angles égaux avec l'axe de l'hélice.

Une surface développable peut encore être considérée comme engendrée par un plan mobile. Les intersections successives de chaque position de ce plan avec celle qui précède ou qui suit immédiatement, sont les génératrices de la surface. Parmi les surfaces développables considérées surtout sous ce point de vue, on peut citer les SURFACES D'EGALE PENTE

(Voy. ce mot) qui sont employées dans diverses constructions, et dans divers travaux de terrassement.

Les surfaces réglées qui ne sont pas développables portent le nom général de *surfaces gauches*. Si la génératrice est assujettie à rencontrer trois directrices fixes, on a ce qu'on appelle la *surface gauche générale*. Par un même point de l'espace on mène des parallèles aux génératrices; on obtient ainsi une surface conique qui porte le nom de *cône directeur*, et qui est d'une grande utilité dans les problèmes relatifs aux surfaces gauches, en particulier dans ceux qui se rapportent au **PLAN TANGENT** (Voy. ce mot).

Il peut arriver que l'une des directrices soit droite (Voy. **BIAIS PASSÉ**, **ARRIÈRE-VOUSSURE DE MARSEILLE**).

Si les trois directrices sont droites, on a l'*hyperboloïde à une nappe*, dont le cône directeur est le cône asymptote (Voy. la *Géométrie analytique à trois dimensions*). Si les trois directrices sont deux hélices de même pas tracées sur deux cylindres ayant le même axe, et l'axe même de ces deux cylindres, on a un *hélicoïde réglé à cône directeur*, tel que la *surface de vis à filet triangulaire*; le cône directeur est alors un cône de révolution.

La génératrice d'une surface gauche peut être assujettie à rencontrer deux directrices fixes seulement, et à demeurer parallèle à un même plan, qui prend le nom de *plan directeur*. La surface ainsi obtenue porte le nom général de *conoïde*. Mais on applique plus particulièrement ce nom au cas où l'une des deux directrices est droite.

Si les deux directrices sont droites, on a le *paraboloïde hyperbolique* (Voy. la *Géométrie analytique à trois dimensions*).

Si les deux directrices sont une hélice et son axe, et que le plan directeur soit perpendiculaire à cet axe, on a une *surface hélicoïde réglée à plan directeur*: la *surface de vis à filet carré*.

Une même surface peut appartenir à la fois à plusieurs classes de surfaces. Ainsi le cylindre droit à base circulaire et le cône droit à base circulaire sont en même temps des surfaces développables et des surfaces de révolution. L'hyperboloïde de révolution à une nappe est en même temps une surface de révolution et une surface gauche.

Nous allons reprendre successivement les surfaces réglées dont il vient d'être question, et faire connaître leur mode de représentation, ainsi que leurs propriétés les plus utiles à connaître au point de vue des applications.

III. SURFACES CYLINDRIQUES. Une surface cylindrique est déterminée quand on connaît sa directrice et la direction de ses génératrices. On prend ordinairement pour directrice la trace horizontale de la surface, que l'on nomme la *base* du cylindre. Soit ABCD (fig. 2) cette trace; c'est le lieu des traces horizontales de toutes les génératrices. Soient ab , $a'b'$ les projections d'une droite parallèle aux génératrices, et donnée. On mène à la courbe ABCD les tangentes BB_1 et DD_1 parallèles à ab ; ce sont les traces de deux plans verticaux comprenant entre eux toute la surface, et qui la touchent suivant les génératrices ayant pour traces horizontales les points de contact B et D; les droites BB_1 et DD_1 déterminent ce que l'on appelle

le *contour apparent* du cylindre sur le plan horizontal. On mène de même à la base ABCD deux tangentes AA' et CC' perpendiculaires à la ligne de terre, et par les points A' et C' on mène les

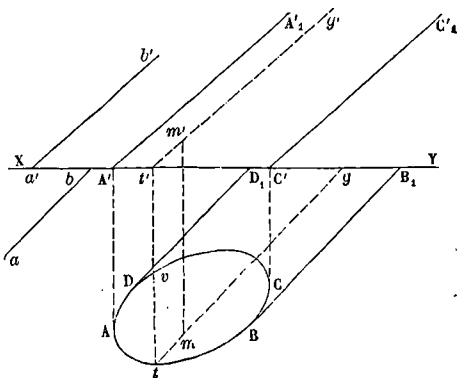


Fig. 2.

droites $A'A_1$ et $C'C_1$ parallèles à $a'b'$. Ce sont les traces verticales de deux plans perpendiculaires au plan vertical, comprenant entre eux toute la surface, à laquelle ils sont tangents suivant les génératrices qui ont pour traces horizontales les points de contact A et C. Les droites $A'A_1$ et $C'C_1$ déterminent ce que l'on appelle le *contour apparent* du cylindre sur le plan vertical. Tous les points de la surface se projettent horizontalement entre les droites BB_1 et DD_1 ou sur ces droites, et verticalement entre les droites $A'A_1$ et $C'C_1$ ou sur ces droites elles-mêmes.

Étant donnée la projection horizontale m d'un point M de la surface, on se procure facilement la projection verticale correspondante. Pour cela, par le point m on mène une droite tg parallèle à ab , ou à BB_1 ; c'est la projection horizontale de la génératrice G qui contient le point M. Cette génératrice a pour trace horizontale le point t ; si l'on projette ce point sur la ligne de terre, en t' , et que par le point t' on mène une droite $t'g'$ parallèle à $a'b'$ ou à $A'A_1$, on obtient la projection verticale de la génératrice G. Si donc on abaisse du point m une perpendiculaire sur la ligne de terre, le point m' où cette perpendiculaire rencontre la projection $t'g'$ est la projection verticale du point M. Il y a ordinairement deux solutions, parce que la droite tg menée par le point m rencontre la base en deux points; c'est-à-dire que la droite tg est la projection horizontale de deux génératrices, dont l'une a pour trace le point t et l'autre un autre point u ; et chacune de ces génératrices contient un point qui se projette horizontalement en m . Généralement, il y a autant de solutions qu'il y a de points communs entre la droite tg et la trace horizontale du cylindre.

Si l'on donne la projection verticale m' d'un point M, on se procure aussi facilement la projection horizontale correspondante. Pour cela, on mène par le point m' une parallèle $t'g'$ à $A'A_1$; c'est la projection verticale de la génératrice G qui contient le point M. Sa trace horizontale a pour projection verticale t' ; on obtient cette trace elle-

même en élevant au point t' une perpendiculaire à la ligne de terre : le point t où cette perpendiculaire rencontre la base du cylindre est la trace que l'on cherche. Par le point t on mène tg parallèle à BB_1 , c'est la projection horizontale de la génératrice G qui contient le point M . Abaisant donc du point m' une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en m avec tg , on obtient la projection horizontale du point M . Il y a ordinairement, deux solutions parce que la droite $t't$ rencontre la base en un second point v qui est la trace horizontale d'une autre génératrice contenant aussi un point qui se projette verticalement en m' . En général il y a autant de solutions qu'il y a de points communs entre $t't$ et la base.

Tout plan vertical dont la trace horizontale est parallèle à BB_1 coupe la surface du cylindre suivant des génératrices qui ont cette trace pour projection horizontale. De même, tout plan perpendiculaire au plan vertical et dont la trace verticale est parallèle à $A'A''$ coupe la surface suivant des génératrices qui ont cette trace pour projection verticale. Tout plan parallèle à la droite $ab, a'b'$ coupe la surface suivant des génératrices.

Tout plan horizontal coupe la surface suivant une courbe égale à $ABCD$. Généralement des plans parallèles entre eux, mais non parallèles aux génératrices, coupent la surface suivant des courbes égales.

IV. SURFACES CONIQUES. Une surface conique est déterminée quand on connaît sa directrice et son sommet. On prend ordinairement pour directrice la trace horizontale de la surface, que l'on appelle la *base* du cône. Soit $ABCD$ (fig. 3) cette base, et

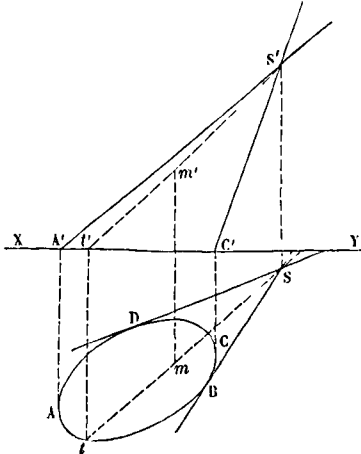


Fig. 3.

soient S et S' les projections du sommet. On mène par le point S les tangentes SB et SD à la base; ce sont les traces horizontales des deux plans verticaux comprenant entre eux la surface, et la touchant suivant les génératrices ayant pour traces horizontales B et D . Les tangentes SB et SD déterminent le *contour apparent* du cône sur le plan horizontal. On mène les tangentes AA' et CC' perpendiculaires à la ligne de terre, et l'on joint $A'S'$ et $C'S'$; ce sont les traces verticales de deux plans

perpendiculaires au plan vertical, comprenant entre eux la surface et la touchant suivant les génératrices qui ont pour traces horizontales les points de contact A et C . Les tangentes $S'A'$ et $S'C'$ déterminent le *contour apparent* du cône sur le plan vertical. Tous les points de la surface se projettent horizontalement dans l'angle BSD et dans son opposé, ou sur les droites SB et SD elles-mêmes; ils se projettent verticalement dans l'angle $A'S'C'$ et dans son opposé, ou sur les droites $S'A'$ et $S'C'$.

Étant donnée la projection horizontale m d'un point M de la surface, on obtient comme il suit la projection verticale correspondante. On joint mS ; cette droite rencontre la base en un point t , qui est la trace horizontale de la génératrice G contenant le point M . Abaisant donc $t't$ perpendiculaire sur la ligne de terre et joignant $t'S'$, on a la projection verticale de la génératrice G . La projection verticale demandée est donc en m' à la rencontre de $t'S'$ avec la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point m . Il y a autant de solutions qu'il y a de points communs entre $t't$ et la base.

Étant donnée la projection verticale m' , on procède d'une manière inverse pour avoir la projection m : on joint $S'm'$, qui rencontre la ligne de terre en t' ; on mène par le point t' une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en t avec la base du cône; on joint tS , et l'on abaisse du point m' une perpendiculaire à XY , terminée en m à sa rencontre avec tS . Il y a autant de solutions qu'il y a de points communs entre $t't$ et la base.

Tout plan vertical dont la trace passe par le point S , coupe la surface suivant deux génératrices qui ont cette trace pour projection horizontale.

Tout plan perpendiculaire au plan vertical, et dont la trace verticale passe par le point S' , coupe la surface suivant des génératrices qui ont cette trace pour projection verticale.

Tout plan passant par le sommet coupe la surface suivant des génératrices.

Tout plan horizontal coupe la surface suivant une courbe semblable à la base. Généralement, toute série de plans parallèles coupe la surface suivant des courbes semblables et semblablement placées, qui ont pour centre de similitude le sommet du cône.

La surface se compose de deux nappes, séparées par le sommet.

V. SURFACES DÉVELOPPABLES. Une surface développable est déterminée quand on connaît son arête de rebroussement. Prenons pour exemple l'hélicoïde développable, dont l'arête de rebroussement est une hélice. Soient AnB et $A'B', A''B'', \dots$ (fig. 4) les projections de cette hélice. Soient n, n' les projections d'un point N pris sur la courbe. La tangente en N à cette courbe a pour projection horizontale la tangente en n au cercle AB , base du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, et pour projection verticale la tangente $n't'$ en n' à la courbe $A'B'$. La trace horizontale de la tangente est le point t, t' . Or, d'après les propriétés fondamentales de l'hélice (*Voy. HÉLICE*), la longueur nt est égale à l'arc de cercle nA développé. Il en résulte que le lieu des traces horizontales des tangentes à l'hélice est la DÉVELOPPANTE (*Voy. ce mot*) du cercle AB . Mais les tangentes à l'hélice sont les génératrices de l'hélicoïde développable; la trace horizontale de la surface est donc une développante de cercle.

la génératrice; et faisons tourner le plan vertical OA autour de l'axe pour l'amener à la position Op. Le point A, A' vient en p, p' et s'élève, en vertu de la définition de l'hélice, d'une quantité proportionnelle

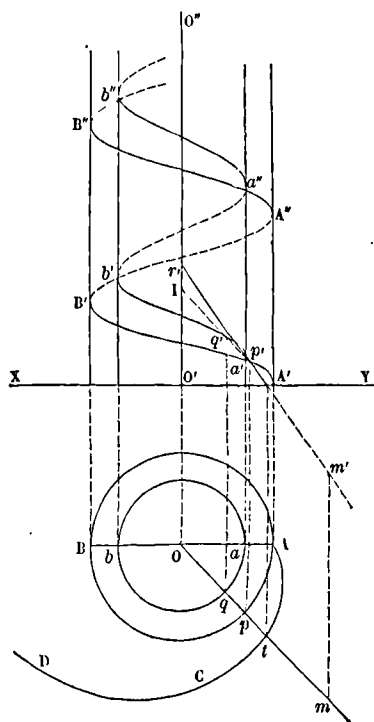


Fig. 5.

à l'angle AOp. Si z désigne la quantité dont ce point s'élève, h le pas de l'hélice, et ω l'angle AOp, on a

$$z : h = \omega : 2\pi, \text{ d'où } z = \frac{h}{2\pi} \omega. \quad [1]$$

Le point a, a' vient en q, q' , et s'élève de la même quantité puisque les deux hélices ont le même pas. (Il en est ainsi de tous les points de la génératrice, et en particulier du point où elle rencontre l'axe.) Il en résulte que la génératrice, dans son mouvement, fait un angle constant avec l'axe.

Construisons la trace horizontale t, t' de cette génératrice, et considérons le triangle rectangle dont les sommets sont t, O et le point O, r' où la génératrice rencontre l'axe. En appelant i l'angle que la génératrice fait avec l'axe, on a

$$Ot = O'r' \cdot \text{tang } i.$$

Mais la distance $O'r'$, primitivement égale à OI , s'est accrue de la quantité z , donnée par la relation [1]; on a donc

$$O'r' = OI + z;$$

et par conséquent

$$Ot = OI \cdot \text{tang } i + \frac{h \text{ tang } i}{2\pi} \cdot \omega = R + \frac{h \text{ tang } i}{2\pi} \omega. \quad [2]$$

Ainsi la distance Ot , primitivement égale à OA ou R , s'accroît d'une quantité proportionnelle à l'angle ω ou AOp. Cela démontre que le point t décrit une spirale d'Archimède, qui est la trace horizontale de la surface.

Si l'on transportait le plan horizontal parallèle-

ment à lui-même, on obtiendrait toujours pour trace horizontale de la surface une spirale égale; mais elle tournerait autour de l'axe, de façon que son origine A, A' soit toujours la trace horizontale de l'hélice de plus grand rayon; c'est-à-dire que la surface hélicoïde peut être considérée comme engendrée par une spirale d'Archimède qui tournerait autour de l'axe O, O'' , et qui s'élèverait en même temps de quantités proportionnelles à sa rotation.

Étant donnée la projection horizontale m d'un point de la surface, on joindra mO , qui rencontrera en p et q les bases des deux cylindres; on élèvera aux points p et q des perpendiculaires à la ligne de terre, terminées en p' et q' à leur rencontre avec les projections verticales des deux hélices; on joindra $p'q'$; du point m on abaissera une perpendiculaire à XY ; le point m' où elle rencontrera $p'q'$ sera la projection verticale correspondante. Il y a théoriquement une infinité de solutions, puisque chacune des droites pp' ou qq' rencontre l'hélice correspondante en une infinité de points.

Si c'était la projection verticale qui fût donnée, on ne pourrait déterminer la projection horizontale correspondante que par tâtonnement.

La génératrice faisant un angle constant avec l'axe, il s'ensuit que le cône directeur est un cône de révolution. La surface pourrait être définie par son cône directeur, sa directrice droite et une de ses hélices directrices. Dans ce cas, le point m étant donné comme ci-dessus, on déterminerait, comme nous l'avons dit, p et p' . On ferait tourner la génératrice autour de l'axe de manière à l'amener parallèlement au plan vertical; le point p viendrait en A , le point p' en p' , sur une parallèle à la ligne de terre; par le point p' , on mènerait une droite faisant avec l'axe un angle égal au demi-angle au sommet du cône directeur, ce qui ferait connaître le point r' , et par suite la projection verticale $p'r'$; le reste s'achèverait comme il a été dit plus haut.

VII. Si les trois directrices sont droites, la surface est un hyperboloïde à une nappe, surface que l'on étudie dans la Géométrie analytique à trois dimensions, et qui, rapportée à ses axes principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Elle a pour sections principales une ellipse, qu'on appelle l'ellipse de gorge, et deux hyperboles, qui ont le même axe imaginaire. Toutes les sections parallèles au plan de l'ellipse de gorge sont des ellipses semblables et semblablement placées, qui ont leurs centres sur l'axe principal perpendiculaire aux plans de ces sections. Il en résulte que la surface peut être engendrée par une droite assujettie à rencontrer trois ellipses semblables et semblablement placées, ayant leur centre sur une perpendiculaire commune à leurs plans, mais convenablement choisies; le plus souvent on prend l'ellipse de gorge, et deux ellipses semblables, égales entre elles et situées à des distances égales de part et d'autre du plan de la première ellipse; et c'est sous ce point de vue que l'on considère le plus souvent la surface dont il s'agit. — La propriété la plus saillante de l'hyperboloïde à une nappe, c'est qu'il peut être engendré de deux manières différentes par une droite glissant sur ces trois ellipses, ou, en d'autres termes, qu'elle admet deux

systèmes de génératrices rectilignes. On démontre aisément les propriétés suivantes :

Trois génératrices appartenant à un même système ne sont jamais parallèles à un même plan.

Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan.

Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.

Toute génératrice se projette sur le plan d'une section principale tangentielllement à cette section.

Si l'on prend le centre de la surface pour le sommet du cône directeur, c'est-à-dire si l'on mène par ce centre des parallèles aux diverses génératrices, on obtient une surface conique qui est ASYMPTOTE de l'hyperboloïde.

Les sections faites par un même plan dans l'hyperboloïde et dans le cône asymptote sont des courbes semblables et semblablement placées.

Tout plan mené par une génératrice coupe l'hyperboloïde suivant une seconde génératrice (appartenant à un système différent).

Pur chaque point de l'hyperboloïde passent deux génératrices de systèmes différents; et le plan de ces deux droites est tangent à la surface au point considéré (Voy. PLAN TANGENT).

On ne peut mener sur la surface aucune droite autre qu'une génératrice de l'un ou de l'autre système.

On définit ordinairement un hyperboloïde à une nappe par son ellipse de gorge placée horizontalement et par deux sections parallèles faites à égale distance au-dessus et au-dessous.

Soient O et O' (fig. 6) les projections du centre

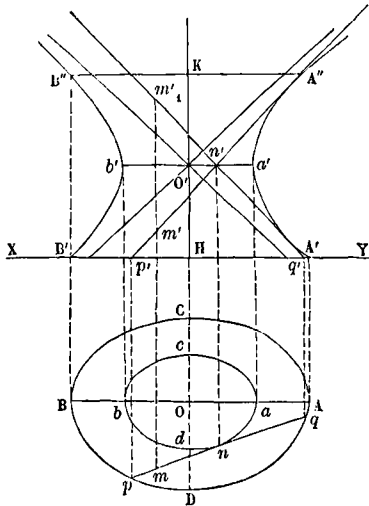


Fig. 6.

de la surface. Soient $acbd$, $a'b'$ les projections de l'ellipse de gorge dont le grand axe ab est parallèle à la ligne de terre; $ACBD$, $A'B'$ celles de la section parallèle faite par le plan horizontal; $ACBD$, $A''B''$ celles d'une section parallèle faite à une distance $O'K$ égale à $O'H$. L'hyperboloïde est représenté par ces sections; mais on y ajoute d'ordinaire la projection verticale, en vraie grandeur, de l'hyperbole section principale faite par le plan vertical mené suivant

AB , c'est-à-dire parallèlement au plan vertical de projection.

Soit m la projection horizontale d'un point de la surface. Par ce point on mènera la tangente mn à la projection $acbd$ de l'ellipse de gorge; ce sera la projection horizontale des deux génératrices qui ont un point ayant pour projection le point m . Au point de contact n on élèvera une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de $a'b'$ en n' ; ce sera la projection verticale du point de l'ellipse de gorge projeté horizontalement en n . Les génératrices considérées ont pour trace horizontale l'une le point p et l'autre le point q . Considérons la première. La trace p se projette en p' sur la ligne de terre; si donc on joint $p'n'$, on obtiendra la projection verticale de la première génératrice; et en menant par le point m une perpendiculaire à XY jusqu'à sa rencontre avec $p'n'$, on aura en m' la projection verticale du point de cette première génératrice qui a pour projection horizontale le point m . En opérant de même pour le point q , on obtiendra la projection verticale $q'n'$ de la seconde génératrice, et la projection verticale m' du second point correspondant à m .

Si un point de la surface était donné par sa projection verticale m' , on obtiendrait comme il suit la projection horizontale correspondante. On mènerait par le point m' une tangente à l'hyperbole $A'a'A''$; par le point n' où cette tangente rencontre $a'b'$, on abaisserait une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en n avec l'ellipse $acbd$; au point n on mènerait la tangente np à cette ellipse; enfin du point m' on abaisserait sur XY une perpendiculaire qui rencontrerait np au point m que l'on voulait obtenir. Comme la perpendiculaire $n'n$ rencontre l'ellipse $acbd$ en deux points, il y aurait une seconde solution; c'est-à-dire qu'il y a généralement deux points de la surface qui ont une même projection verticale donnée.

Comme d'ailleurs, par chacun de ces points, il passe deux génératrices, on voit que l'on peut varier la construction de plusieurs manières.

Une remarque semblable peut être faite dans le cas où c'est la projection horizontale m qui est donnée.

Lorsque l'ellipse de gorge se change en un cercle, la surface se transforme en un hyperboloïde de révolution à une nappe (Voy. plus haut). Le cône directeur devient un cône droit à base circulaire, et toutes les génératrices, soit de ce cône, soit de l'hyperboloïde, font des angles égaux avec l'axe de révolution. Il en résulte que, dans ce cas, la surface peut être engendrée par une droite qui tourne autour de l'axe, en restant à la même distance de cet axe et en faisant avec lui un angle constant (Voy. SECTIONS PLANES).

VIII. CONOÏDES. Un conoïde est déterminé quand on donne ses deux directrices D et D_1 et son plan directeur P . Pour obtenir une génératrice de la surface, il suffit de mener un plan parallèle au plan P et qui coupe les deux directrices; car si m et m_1 sont les points d'intersection, la droite mm_1 est une génératrice du conoïde, puisqu'elle rencontre les deux directrices et qu'elle est parallèle au plan directeur.

On peut citer comme exemple la surface à laquelle Frézier (Coupe des pierres) a donné le nom

da *cylindroïde*, et qui a été parfois employée comme intrados des voûtes rampantes aboutissant à des plans verticaux non parallèles. Considérons, pour fixer les idées, un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre, et qui est terminé par deux plans verticaux ayant pour traces AB et DE (fig. 7). La section AB est rabattue en AHB

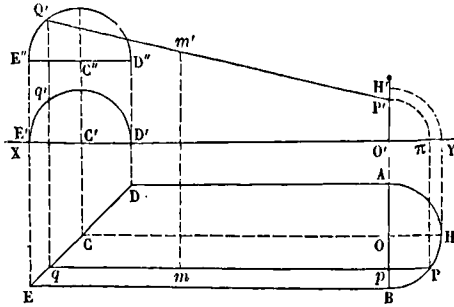


Fig. 7.

pour la facilité des constructions; mais elle se projette verticalement suivant la verticale O'H'. La section DE se projette suivant la courbe D'q'E'. Soit pq la projection horizontale d'une génératrice du cylindre; la projection verticale correspondante sera une droite P'q' parallèle à XY et facile à déterminer. Imaginons maintenant que la section DE s'élève verticalement d'une certaine quantité et vienne se projeter verticalement en D'Q'E'. Le point de cette section qui se projetait en q' se projettera en Q' sur la même verticale. Menons la droite qui va du point q, Q' au point p, P' demeuré fixe. Elle aura pour projections pq et P'Q'. Ce sera une génératrice du cylindroïde. On voit que les génératrices du cylindroïde rencontrent les sections extrêmes aux mêmes points que les génératrices du cylindre. Elles sont encore parallèles au plan vertical; mais elles ne sont plus parallèles entre elles, comme cela avait lieu sur le cylindre. Le cylindroïde peut donc être considéré comme engendré par une droite qui s'appuie sur deux courbes AB, O'H' et DE, D'Q'E', en restant parallèle au plan vertical. Cette surface rentre dans la classe générale des conoïdes.

Étant donnée la projection horizontale m d'un point de la surface, on obtient aisément la projection verticale correspondante. Pour cela, on mène par le point m la droite pq parallèle à la ligne de terre. Elle rencontre en P le rabattement de la section AB; on projette le point P en π sur la ligne de terre, et, du point O' comme centre, on décrit l'arc πP' terminé à O'H', ce qui donne le point P'. La même droite pq rencontre au point q la trace DE de l'autre section extrême; par le point q, on élève une verticale jusqu'à sa rencontre en Q' avec la projection verticale de la section, ce qui donne le point Q'. On joint P'Q'; les droites pq et P'Q' sont les projections de la génératrice qui contient le point considéré. Si donc on élève au point m une perpendiculaire à XY, le point m' où elle rencontrera P'Q' sera la projection verticale demandée.

Le cylindroïde est une surface algébrique du quatrième degré.

IX. Dans les cas les plus ordinaires, l'une des di-

rectrices du conoïde est une droite. Si cette droite est perpendiculaire au plan directeur, la surface prend le nom de *conoïde droit*. On a un *conoïde oblique* si la directrice droite n'est pas perpendiculaire au plan directeur. Le conoïde droit est celui qui est le plus fréquemment employé. Dans le conoïde oblique, comme dans le conoïde droit, on détermine une génératrice en menant par la directrice droite un plan Q quelconque. Ce plan coupe la directrice courbe en un point M; par ce point, on mène un plan P parallèle au plan directeur: l'intersection des plans P et Q est la génératrice demandée.

Nous donnerons ici deux exemples de conoïdes droits; on en trouvera un troisième à l'article VOÛTE D'ARÊTE EN TOUR RONDE.

1. La directrice droite est une verticale O (fig. 8);

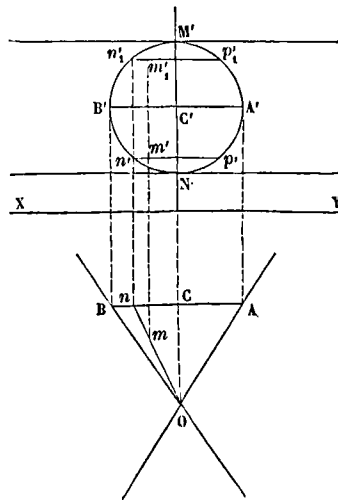


Fig. 8.

la directrice courbe est un cercle parallèle au plan vertical ACB, A'M'B'; le plan directeur est horizontal; la directrice droite se projette verticalement suivant une droite passant par le centre C' du cercle A'M'B'. Tous les points du conoïde se projettent horizontalement dans l'angle AOB et dans son opposé, et verticalement entre les deux parallèles à la ligne de terre menées par les extrémités M' et N' du diamètre perpendiculaire à cette ligne.

Soit m la projection horizontale d'un point de la surface. Joignons Om; ce sera la trace d'un plan passant par la directrice droite, et qui rencontrera la directrice courbe en deux points n, n' et n, n'. Considérons le premier de ces points. Le plan horizontal qui passe par ce point est parallèle au plan directeur, et a pour trace verticale la droite n'p' parallèle à la ligne de terre. L'intersection de ce plan avec le plan sécant On est la génératrice qui contient le point projeté en m. Or, cette intersection a pour projections On et n'p'; pour obtenir la projection verticale correspondante à m, il suffit donc d'élever par le point m une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en m' avec la droite n'p'. On trouve un second point m' correspondant également à m.

Si c'est le point m' qui est donné, on mène par

ce point $n'p'$ parallèle à XY , puis $n'n$ perpendiculaire à cette ligne; on joint On , et du point m' on abaisse une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en m avec la droite On .

X. 2. La directrice courbe est une hélice; la directrice droite est l'axe de cette hélice; le plan directeur est, par conséquent, perpendiculaire à cet axe. La surface ainsi déterminée est un *hélicoïde réglé à plan directeur* ou *surface de vis à filet carré*. Soit $AB, A'B'$ (fig. 9) l'hélice directrice; $O, O'O''$

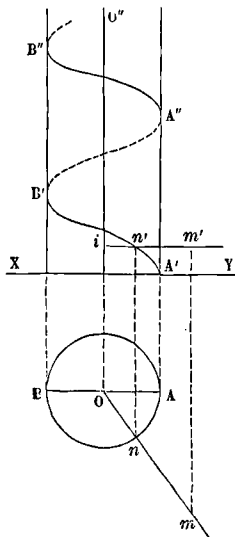


Fig. 9.

son axe. Pour se procurer une génératrice, il suffit de prendre un point quelconque n, n' sur l'hélice directrice; la génératrice qui passe par ce point devant être horizontale et devant rencontrer l'axe, on obtiendra ses projections en joignant le point n avec le point O , et en menant par le point n' une parallèle à la ligne de terre. Si m est la projection d'un point de la surface, on joindra mO , qui coupera en un point n le cercle AB projection de l'hélice; on élèvera en n une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre avec $A'B'$ en un point n' ; par le point n' , on mènera $n'i$ parallèle à XY ; enfin du point m on abaissera une perpendiculaire à la ligne de terre; le point m' où elle rencontrera in' sera la projection verticale correspondante à m . Il y aura un nombre infini de solutions, attendu que la verticale nm' rencontre la projection verticale de l'hélice en une infinité de points.

Si le point m' était donné, une construction inverse, facile à suivre sur la figure, donnerait le point correspondant m .

XI. Lorsque les deux directrices du conoïde sont droites, la surface est un *paraboloïde hyperbolique*, surface étudiée en Géométrie analytique, et qui, rapportée à son sommet et à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{x^2}{2q} = z.$$

Les sections principales faites suivant l'axe, qui passe par le sommet, sont des paraboles qui ont respectivement pour paramètres $2p$ et $2q$, et toutes les sections parallèles à celles-là sont des paraboles égales. Les sections perpendiculaires à l'axe sont des hyperboles semblables. Quand les paramètres $2p$ et $2q$ sont égaux, le paraboloides est dit *isocèle*. Chacune des sections parallèles aux plans principaux rencontre toutes les génératrices; il en résulte que la surface peut être considérée comme engendrée par une droite assujettie à rencontrer deux paraboles égales semblablement placées dans des plans parallèles (et dont les axes déterminent un

plan perpendiculaire aux deux premiers), et à rester en même temps parallèle à un même plan directeur. Mais la propriété la plus remarquable du paraboloides hyperbolique, c'est de pouvoir être engendrée de deux manières différentes par une droite glissant sur ces deux paraboles. En d'autres termes, la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes, dont chacun est parallèle à un plan directeur particulier. Les deux plans directeurs sont parallèles à l'axe principal, et chacun d'eux fait avec le plan de l'une quelconque des paraboles principales un angle aigu qui a pour tangente la racine carrée du rapport entre le paramètre de l'autre parabole principale et le paramètre de celle que l'on considère. Si l'on fait passer ces plans directeurs par l'axe, ils sont symétriquement inclinés par rapport aux plans des deux sections principales.

On démontre aisément les propriétés suivantes :
Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan

Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.

Toute génératrice se projette sur le plan d'une section principale tangentiellement à cette section.

Tout plan mené suivant une génératrice coupe le paraboloides suivant une seconde génératrice appartenant à l'autre système.

Par chaque point du paraboloides passent deux génératrices de systèmes différents, et le plan de ces deux droites est tangent à la surface au point considéré.

On ne peut mener sur la surface aucune droite autre qu'une génératrice de l'un ou de l'autre système.

On définit souvent le paraboloides hyperbolique par deux sections paraboliques faites à égales distances de part et d'autre d'une des sections principales, et par la projection de l'autre section principale, perpendiculaire à la première. On donne, par exemple, les projections $UAV, A'X'$ et $UAV, A''X''$ (fig. 10) de deux paraboles égales situées à égale distance de la section principale $uav, a'x'$ supposée horizontale, et les projections $Ax, A'a''$ de la seconde section principale supposée parallèle au plan vertical. Ces données dispensent de faire intervenir les plans directeurs.

Si l'on veut se procurer les projections d'une génératrice, il suffit de mener une tangente pq à la projection horizontale uav de la section principale, située dans le plan horizontal $a'x'$. Les points p et q où cette tangente rencontre la parabole UAV sont les traces horizontales de deux génératrices de système différent ayant pour projection horizontale commune la droite pq . Par le point de contact n élevons une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de $a'x'$ en n' ; les points n et n' seront les projections du point où les deux génératrices considérées rencontrent la section principale $uav, a'x'$. Si donc on projette p et q sur la ligne de terre en p' et q' , et qu'on joigne $p'n'$ et $q'n'$, on aura les projections verticales des deux génératrices qui se projettent horizontalement suivant pq .

Si l'on donne la projection horizontale m d'un point de la surface, on mènera par ce point la tangente pq à la courbe uav , et, après avoir déter-

miné, comme il vient d'être dit, les génératrices qui ont pour projection horizontale pq , on élèvera par le point m une perpendiculaire à XY , qui donnera en m' sur $p'n'$ et en m_1 sur $q'n'$ les projections

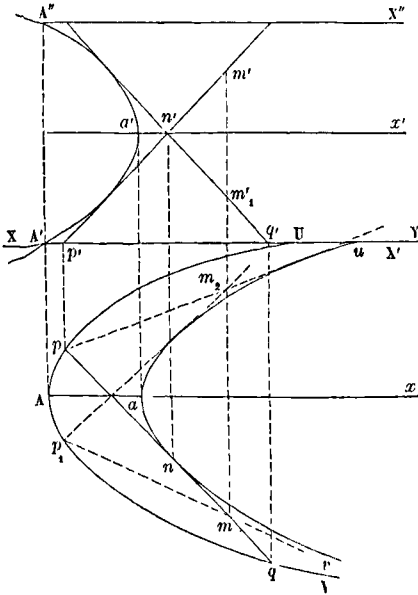


Fig. 10.

verticales des deux points de la surface qui ont pour projection horizontale commune le point m .

Si l'on donnait le point m' , on mènerait par ce point une tangente $m'p'$ à la parabole $A'a'A''$; par le point n' , où elle rencontre $a'x'$, on abaisserait une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la parabole uav en n ; par le point n , on mènerait une tangente $p'q'$ à cette parabole; enfin on abaisserait du point m' une perpendiculaire à XY : le point m où elle rencontre $p'q'$ serait la projection horizontale correspondante à m' . Comme $n'n$ rencontre uav en deux points, il y aurait une seconde solution. Il y a toujours, en effet, deux points de la surface qui ont la même projection verticale, et, comme par chacun de ces points il passe deux génératrices, la construction peut être variée de plusieurs manières. Une remarque analogue peut être faite pour le cas où l'on donne la projection horizontale m .

Si l'on voulait avoir la direction de l'un des plans directeurs, on déterminerait deux génératrices d'un même système, c'est-à-dire qui ne se rencontrent pas, et l'on mènerait un plan parallèle à ces deux droites. On opérerait de même pour le second système.

XII. Indépendamment des surfaces de révolution et des surfaces réglées, nous avons dit qu'on employait accidentellement d'autres surfaces. Nous citerons d'abord l'ellipsoïde à trois axes inégaux qui sert d'intrados aux voûtes elliptiques. Cette surface, étudiée en Géométrie analytique, est celle qui, rapportée à son centre et à ses axes principaux, est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ses sections principales sont des ellipses, et toutes les sections parallèles sont des ellipses semblables et semblablement placées, ayant leurs centres sur un même diamètre. La surface pourrait donc être considérée comme engendrée par une ellipse variable rencontrant une ellipse fixe, et restant semblable à elle-même.

On définit un ellipsoïde par deux de ses sections principales. Soit, par exemple, $ACBD$ (fig. 11) l'une

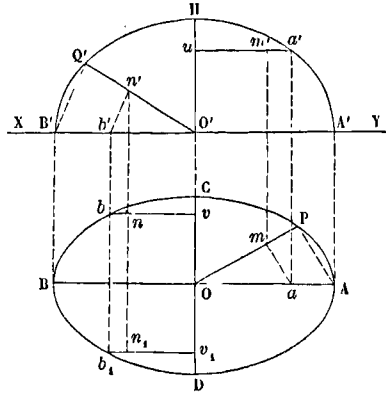


Fig. 11.

de ces sections, supposée située dans le plan horizontal, l'un des axes AB parallèle à la ligne de terre, et soit $A'HB'$ la projection verticale d'une seconde section principale, celle qui a pour trace horizontale AB : la surface sera complètement déterminée.

Supposons que l'on donne la projection horizontale m d'un point de la surface. Le point correspondant M de la surface est sur une section horizontale, dont la projection horizontale passe au point m . Il est facile d'obtenir l'extrémité a de son axe. En effet, toutes les sections horizontales étant des courbes semblables et semblablement placées, qui se projettent en vraie grandeur sur le plan horizontal, la section dont il s'agit et la section principale $ACBD$ sont des courbes semblables ayant pour centre de similitude le point O . Si donc on tire le rayon OP passant par le point m , qu'on joigne PA et qu'on lui mène la parallèle ma , on aura au point a le point homologue de A , c'est-à-dire le sommet de l'ellipse considérée. Le point a est la projection horizontale du sommet correspondant de la section contenant le point M . Si donc on élève aa' perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à sa rencontre en a' avec la courbe $A'HB'$, et qu'on mène $a'u$ parallèle à XY , on aura la trace du plan horizontal contenant le point M . Elevant donc mm' perpendiculaire à XY jusqu'à la rencontre de $a'u$, on aura en m' la projection verticale du point M .

Supposons, au contraire, que l'on donne la projection verticale n' d'un point N de la surface. Concevons, mené par le point N , un plan parallèle au plan vertical; il coupera l'ellipsoïde suivant une ellipse semblable à $A'HB'$, qui se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical et passera par le point n' . Cette projection et $A'HB'$ auront pour centre de

similitude le point O' . Si donc on tire le rayon $O'Q'$ passant par n' , qu'on joigne $Q'B'$ et qu'on lui mène a parallèle $n'b'$, on aura en b' le sommet de l'ellipse dont il s'agit. Par le point b' , menons une perpendiculaire à la ligne de terre, elle rencontrera la section $ACBD$ en deux points b et b_1 qui seront les sommets de deux sections parallèles au plan vertical. Considérons l'une d'elles, celle qui a pour sommet b : sa trace horizontale sera la droite bv parallèle à la ligne de terre. Si donc on abaisse du point n' une perpendiculaire à XY , le point n où elle rencontrera bv sera la projection horizontale du point N . Si l'on mène b_1v_1 , et que l'on prolonge $n'n$ jusqu'à sa rencontre avec cette droite en m_1 , on aura la projection horizontale d'un second point N , ayant aussi pour projection verticale le point n' .

On trouvera à l'article **ARRIÈRE-VOUSSURE** un autre exemple d'une surface engendrée par une ellipse variable. Cette surface est d'ailleurs fort peu usitée.

XIII. Il nous reste à parler des *surfaces topographiques*, c'est-à-dire des surfaces qui expriment le relief du terrain. Dans les plans topographiques, ces surfaces sont représentées par des courbes de niveau équidistantes, c'est-à-dire par les projections d'une série de sections faites dans la surface par des plans horizontaux équidistants. Chaque courbe de niveau est accompagnée d'une cote qui exprime sa distance à un plan horizontal de comparaison (*Voy. PLAN TOPOGRAPHIQUE, FIGURÉ DU RELIEF*).

Quand un point est donné par sa projection horizontale, sa cote s'en déduit immédiatement si cette projection est sur une courbe de niveau, puisque la cote de cette courbe est celle du point considéré. Si la projection donnée tombe entre deux courbes de niveau, comme le point m (fig. 12), il y a une

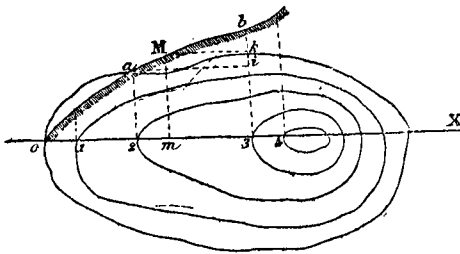


Fig. 12.

construction à exécuter pour obtenir sa cote. On mène par le point m une droite quelconque mX , que l'on regarde comme la trace d'un plan vertical. Ce plan coupe le terrain suivant une courbe $0.ab$ que l'on rabat sur le plan de l'une des courbes de niveau, de la courbe cotée 0, par exemple. Pour cela, il suffit d'élever par les points 1, 2, 3, 4, etc., où la droite mX coupe les courbes de niveau, des perpendiculaires à cette droite sur lesquelles on porte, à l'échelle du plan, des longueurs respectivement égales à 1, 2, 3, 4 fois, etc., la distance de deux courbes de niveau consécutives. Par le point m , on élève alors sur mX une perpendiculaire mM terminée à la section rabattue : la longueur mM mesurée à l'échelle du plan est la cote du point dont la projection m était donnée.

Si les courbes de niveau sont très-rapprochées, on peut se dispenser de tracer la courbe $0ab$; on se contente d'élever sur mX les perpendiculaires 2.a et 3.b respectivement égales aux cotes des courbes 2 et 3, et de joindre les points a et b par une droite. Élevant ensuite en m une perpendiculaire à mX , on obtient, par sa rencontre avec ab , la longueur mM qui exprime la cote du point M .

Quand les courbes de niveau directement obtenues par le nivellement ne sont pas suffisamment rapprochées pour la solution commode des problèmes que l'on a en vue, on trace après coup, sur le plan, des courbes de niveau *intercalaires*. Supposons, par exemple, qu'on se propose de tracer une de ces courbes entre les courbes 2 et 3, et au tiers de la hauteur qui les sépare, comptée à partir du plan de la courbe 2; on procédera comme il suit : on trace une ligne 2.3 qui soit à peu près normale aux deux courbes de niveau qui doivent comprendre entre elles la courbe intercalaire; on construit comme ci-dessus le rabattement ab de la section verticale qui a pour trace la ligne 2.3; on mène ai parallèle à 2.3; on prend, à partir du point i , le tiers ik de la distance ib ; par le point k , on mène une parallèle à ia ; elle rencontre la section ab en un point M ; on abaisse de ce point une perpendiculaire sur 2.3 : le pied m de cette perpendiculaire est un point de la courbe intercalaire demandée. On construit de la même manière autant de points que l'on veut de cette courbe. On l'a représentée en points sur la figure. Dans la plupart des cas, les courbes de niveau primitives sont assez rapprochées pour qu'on puisse regarder l'arc ab comme une ligne droite, ce qui simplifie beaucoup les constructions; car il suffit alors de prendre 2.m égal au tiers de l'intervalle 2.3.

On conçoit que les constructions se feront d'après la même méthode, quel que soit le rapport dans lequel on divise la distance entre les plans des courbes de niveau primitives. Si la courbe intercalaire devait être tracée au milieu de l'intervalle qui sépare les courbes primitives, on prendrait le point k au milieu de ib , et si ab était sensiblement droit, l'opération reviendrait à prendre le point m au milieu de 2.3.

Pour compléter la représentation d'une surface topographique, on y trace souvent les *lignes de plus grande pente* (*Voy. FIGURÉ DU RELIEF*); elles sont représentées par des courbes coupant à angle droit toutes les lignes de niveau. Ces courbes sont faciles à tracer, avec une approximation suffisante, quand les lignes de niveau sont elles-mêmes suffisamment rapprochées.

Sur un plan topographique, une *ligne d'égale pente* est représentée par une ligne qui coupe toutes les lignes de niveau en des points successifs équidistants (*Voy. PENTE, SURFACES D'ÉGALE PENTE*).

SURFACES D'ÉGALE PENTE, surfaces dont tous les plans tangents sont également inclinés par rapport à un plan horizontal. Un cône de révolution à axe vertical, un hélicoïde développable à axe vertical, sont des surfaces d'égale pente (*Voy. SURFACES COURBES, PLANS TANGENTS*). En général toute surface développable dans laquelle la tangente à l'arête de rebroussement fait un angle constant avec la verticale, est une surface d'égale pente. Car le cône directeur d'une pareille surface est un

cône de révolution à axe vertical. Si G et G' sont deux génératrices infiniment voisines sur la surface développable, et si g et g' sont les deux génératrices qui leur sont respectivement parallèles sur le cône directeur, le plan des deux premières est parallèle au plan des deux dernières. Or, le plan des génératrices g et g' est tangent au cône directeur, et fait par conséquent un angle constant avec l'horizon; donc il en est de même du plan des deux génératrices G et G' , c'est-à-dire du plan tangent à la surface développable considérée; donc c'est une surface d'égalé pente.

Réciproquement : toute surface d'égalé pente est une surface développable. En effet, si l'on transporte tous les plans tangents parallèlement à eux-mêmes, de manière à les faire passer par un même point de l'espace, ces plans, également inclinés sur l'horizon, auront pour enveloppe un cône de révolution à axe vertical. Considérons un des plans tangents T de la surface, et soit t le plan tangent au cône qui est parallèle à T . Si le plan T se déplace infiniment peu, et prend la position T' , le plan t se déplacera lui-même infiniment peu, et prendra la position t' parallèle à T' . Or, sur le cône, la position t étant donnée, la position t' infiniment voisine est parfaitement déterminée, si le sens du déplacement est d'ailleurs connu. Donc il en est de même sur la surface considérée. Donc cette surface peut être regardée comme engendrée par un plan qui se meut suivant une loi déterminée, et de telle sorte que, dans chaque position, il coupe la position infiniment voisine. Donc cette surface est composée d'éléments plans qui pourraient être amenés successivement dans le plan de l'un quelconque d'entre eux; donc c'est une surface développable.

On a à construire une surface d'égalé pente toutes les fois qu'une route curviligne offre des talus réglés à une pente uniforme. Pareille circonstance se présente dans la construction des canaux. Le problème consiste à faire passer par une ligne donnée, qui est l'arête d'une route, par exemple, arête saillante ou rentrante suivant que la route est en remblai ou en déblai (Voy. ROUTES), une surface d'égalé pente dont l'inclinaison constante est donnée. Voici la marche à suivre pour cela.

Pour fixer les idées, nous supposons d'abord la route en remblai. Soit A la ligne formée par l'arête saillante de la route, et soit p la pente que doit avoir le talus. Pour construire ce talus, il faut connaître la ligne B suivant laquelle la surface d'égalé pente coupera la surface S du terrain situé en contre-bas de la route. On prend sur la ligne A un point M , que l'on considère comme le sommet d'un cône de révolution à axe vertical, dont les arêtes font avec l'axe un angle complémentaire de celui dont la tangente est p . Ce cône est donc déterminé, et l'on peut construire son intersection C avec la surface S du terrain. Si l'on opère de même pour tous les points de l'arête A , on déterminera sur la surface S une série de courbes analogues à C , et dont l'enveloppe sera la courbe B que l'on cherche; car la surface d'égalé pente peut être elle-même considérée comme l'enveloppe des cônes dont il vient d'être question.

La même marche serait évidemment applicable

si la route était en déblai, ou s'il s'agissait d'un canal.

Le problème se simplifie quand le terrain est horizontal. Sur le plan topographique on a la cote de hauteur de chaque point de l'arête A au-dessus du plan du terrain, c'est-à-dire la hauteur de chaque cône; il est facile d'en déduire le rayon de la base, puisque l'angle au sommet est connu. De chaque point de la projection A comme centre, avec un rayon égal au rayon correspondant à ce point, on décrit un cercle; et l'enveloppe des cercles ainsi décrits est la projection horizontale de la courbe B , ou cette courbe elle-même si l'on prend le plan du terrain pour plan horizontal de comparaison. Si la route est elle-même horizontale, tous les rayons deviennent égaux, et la courbe B n'est autre chose qu'une courbe équidistante de A , c'est-à-dire la courbe qu'on obtient en portant sur les normales à cette courbe des longueurs égales, comptées dans un même sens à partir de la courbe.

(Voy. pour plus de développement le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie, deuxième partie, p. 104 et suiv.)

SUSPENSION À LA CARDAN, mode de suspension qui permet à un objet de conserver sensiblement sa position par rapport à l'horizon malgré les déplacements du support. Pour obtenir cet effet, on suspend l'objet par deux tourillons, en sorte qu'il peut prendre un mouvement de rotation autour de l'axe de ces tourillons; mais ceux-ci reposent sur un cadre, mobile lui-même autour de deux autres tourillons, ayant une direction perpendiculaire aux deux premiers, et qui reposent sur le support. Par cette disposition, malgré les déplacements du support, l'objet suspendu est sans cesse ramené par la pesanteur dans sa position primitive d'équilibre, à l'aide de deux rotations simultanées autour de deux axes perpendiculaires.

Ce mode de suspension, dû à Cardan, géomètre du seizième siècle, est appliqué depuis un temps immémorial aux boussoles marines (Voy. BOUS-SOLE MARINE).

SYMPIEZOMÈTRE (du grec σὺν, avec, μέτρον, mesure), instrument imaginé par M. Darcy pour apprécier la vitesse d'un courant. C'est le TUBE DE PILOT (Voy. ce mot) tourné vers l'aval au lieu de l'être vers l'amont. Le niveau du fluide dans le tube s'abaisse d'une certaine quantité au-dessous du niveau du courant; et cet abaissement peut servir à apprécier la vitesse. Soit, en effet, x la hauteur du niveau du courant au-dessus de l'orifice inférieur du tube, h l'abaissement du niveau dans le tube, P la pression par mètre sur un plan fictif remplaçant l'orifice, Π le poids du mètre cube du fluide, v sa vitesse, et k' un coefficient numérique moindre que l'unité, on aura, d'après les expériences de Dubuat (Voy. NON-PRESSION)

$$P = \Pi \left(x - k' \frac{v^2}{2g} \right).$$

D'un autre côté, le liquide étant sensiblement en équilibre dans le tube, on a

$$P = \Pi (x - h).$$

En comparant les deux formules, on en conclut

$$h = k' \frac{v^2}{2g}$$

d'où

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{k'}$$

D'après Dubuat on aurait, dans le cas d'un plan mince,

$$k' = 0,67,$$

d'où

$$\frac{1}{k'} = 1,49.$$

Mais il reste beaucoup d'incertitude sur cette valeur, et d'ailleurs l'abaissement h est très-difficile à observer.

SYMPIÉZOMÈTRE DIFFÉRENTIEL, appareil imaginé par M. Baumgarten pour apprécier la vitesse des courants liquides. Il se compose d'un TUBE DE PITOT et d'un SYMPIÉZOMÈTRE de M. Darcy (Voy. ces mots) réunis par la partie supérieure en une tubulure par laquelle on peut aspirer. Si l'on place l'appareil dans le courant, le tube de Pitot en amont et le tube de Darcy en aval, il se produit une élévation de niveau h dans le premier et un abaissement h' dans le second. En nommant v la vitesse du courant, k et k' des coefficients numériques, on a (Voy. PRESSION VIVE, NON-PRESSION)

$$h = k \frac{v^2}{2g} \quad \text{et} \quad h' = k' \frac{v^2}{2g}$$

d'où

$$h + h' = (k + k') \frac{v^2}{2g} \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{h + h'}{k + k'}$$

Le coefficient k ayant pour valeur moyenne 1,19 et k' la valeur moyenne 0,67, il en résulterait

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h + h'}{1,86}$$

Mais l'abaissement h' étant difficile à observer, on aspire par la tubulure; les deux colonnes montent simultanément d'une même quantité dans les deux tubes; et quand les deux niveaux sont au-dessus du courant, on lit la somme $h + h'$ sur ces tubes, gradués à cet effet.

SYSTÈME ARNOUX, système de trains articulés destinés à circuler sur les chemins de fer dans les courbes du plus petit rayon. Dans ce système, chaque wagon est monté sur 4 roues, et offre un avant-train et un arrière-train comme les voitures qui circulent sur les routes ordinaires. Chaque essieu peut tourner horizontalement autour d'une cheville ouvrière par laquelle il est lié à la flèche. Les roues tournent sur leurs essieux comme dans les voitures ordinaires. Chaque wagon est relié à celui qui le suit par un timon rigide qui s'articule par ses extrémités avec la cheville ouvrière du dernier essieu du premier wagon et avec celle du premier essieu du wagon suivant.

Dans les parties rectilignes de la voie, tous les essieux demeurent parallèles. Dans les parties courbes, le premier essieu, par un dispositif que nous expliquerons tout à l'heure, prend toujours une direction normale à la courbe. Les essieux successifs sont liés entre eux de manière à se placer à leur tour dans cette direction normale. Pour obtenir cet effet, M. Arnoux père plaçait sous chaque essieu un disque circulaire horizontal, solidaire avec cet essieu; et sur les disques de deux essieux consécutifs il enroulait une chaîne sans fin à brins croisés, de telle sorte que l'un des

essieux ne pouvait s'incliner dans un sens sans que l'essieu suivant ne s'inclinât en sens contraire, ces deux essieux convergeant ainsi vers le centre du cercle décrit par les chevilles ouvrières. Ce système était compliqué et ne permettait que difficilement le mouvement en arrière. M. Henri Arnoux fils y a substitué un système beaucoup plus simple. — Chaque essieu est lié à la flèche et au timon par quatre bielles égales AM, BM, AN, BN (fig. 1) qui s'articulent d'une part en deux points

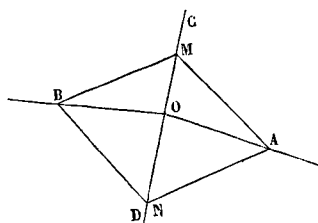


Fig. 1.

A, B pris sur le timon et sur la flèche à égale distance de la cheville ouvrière O, et d'autre part à deux manchons M et N qui glissent librement le long de l'essieu CD. Sur les parties rectilignes de la voie, ces quatre bielles forment un losange dont une diagonale est CD, et dont l'autre est la direction commune du timon et de la flèche. Mais dans les parties courbes, le timon OA faisant un certain angle avec la flèche OB, les manchons glissent le long de l'essieu, et celui-ci se place suivant la bissectrice de l'angle AOB. En effet, les deux triangles AON et BON ont par construction les côtés OA = OB et AN = BN; le troisième côté ON, qui est variable, est commun; ces triangles sont donc égaux et l'angle AON est égal à l'angle BON. Il en résulte que l'essieu se place de lui-même normalement au cercle décrit par le point O; car les lignes OA et OB étant deux cordes égales de ce cercle, la bissectrice de l'angle qu'elles font entre elles va passer par le centre. Tous les essieux viennent ainsi successivement prendre une direction normale à la courbe; mais ils ne la prennent qu'au moment de leur entrée sur cette courbe, c'est-à-dire au moment où le timon cesse d'être dans le prolongement de la flèche.

Nous avons dit que le premier essieu était forcé de se placer normalement à la courbe décrite; il y est contraint par un appareil directeur dont il est muni. Cet appareil directeur consiste en une traverse solidaire avec l'essieu et parallèle à sa direction; cette traverse se partage en deux branches à chacune de ses extrémités, et chacune de ces branches porte un galet qui s'appuie obliquement sur la face interne du rail correspondant. La figure 2 montre ces galets vus latéralement au wagon, et la figure 3 les montre vus par derrière. Les deux galets qui roulent sur un même rail maintiennent l'essieu dans une direction telle que sa projection horizontale est toujours perpendiculaire au milieu de la corde de l'arc embrassé par les points de contact; et par conséquent l'essieu demeure normal à la voie.

On a reproché au système Arnoux sa complication et les frais d'entretien qu'il exige. Mais le

reproche le plus grave qui lui ait été adressé est de ne pouvoir se prêter à l'emploi de machines puissantes, vu l'impossibilité de relier par des toutes les roues de la machine de manière

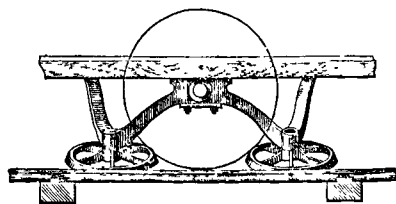


Fig. 2.

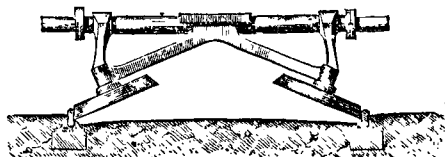


Fig. 3.

à obtenir une grande adhérence. M. Arnoux s'est beaucoup occupé de cette difficulté dans ces derniers temps, mais le problème ne peut être encore considéré comme résolu. Cependant M. Arnoux est parvenu à construire des locomotives assez puissantes, pouvant tourner dans des courbes de petit rayon (*Voy. LOCOMOTIVE*).

Ce système présente une autre particularité : c'est que, toutes les voitures étant solidaires et se mettant en mouvement à la fois, l'effort nécessaire pour vaincre l'inertie au départ est beaucoup plus grand que dans les trains d'un autre système, où chaque voiture n'est mise en mouvement qu'à son tour, et à mesure que les chaînes de traction se tendent.

Le système Arnoux n'a été appliqué jusqu'ici qu'au chemin de fer de Sceaux; il ne convient qu'à des trains légers, et à des vitesses modérées. (*Voy. le Traité élémentaire des chemins de fer de M. Perdonnet.*)

SYSTÈME ATMOSPHÉRIQUE, système de traction des convois sur les chemins de fer, imaginé primitivement par Medhurst, ingénieur danois, et appliqué en dernier lieu par MM. Clegg et Samuda à une partie du chemin de fer de Saint-Germain. Ce système consiste à lier la première voiture du train à un piston qui se meut dans l'intérieur d'un large tube en fonte placé sur la voie, et dans lequel on fait le vide du côté antérieur du piston; celui-ci est alors poussé par la pression atmosphérique qui agit sur la face postérieure, et le train est entraîné avec lui. — La difficulté principale consistait à ouvrir et fermer la rainure longitudinale ménagée à la partie supérieure du tube pour donner passage à la *barre d'attelage* qui lie le piston à la première voiture. La soupape employée pour cela est une lanterne de cuir, consolidée par des lames de fer de même longueur, placées au-dessus et au-dessous. Cette lanterne est fixée sur l'un des bords de la rainure et fermée sur l'autre bord à l'aide d'une composition de cire et de suif qui la soude pour ainsi dire sur la fonte. La barre d'attelage est précédée d'un galet placé à

l'intérieur du tube et qui sert à ouvrir la soupape pour laisser passer cette barre. A l'arrière du premier wagon est établi un autre galet qui a pour fonction de refermer la soupape derrière la barre d'attelage. On fait le vide par l'extrémité antérieure du tube à l'aide de puissantes machines aspirantes. — Pour prévenir les effets d'un choc accidentel, la barre d'attelage est liée au premier wagon par un mode d'assemblage dont l'organe principal est un boulon en bois; en cas de choc ce boulon se brise, et le train cesse d'être solidaire avec le piston.

Au chemin de fer de Saint-Germain ce système était employé à faire franchir aux trains la rampe du Pecq à Saint-Germain. Les trains redescendaient par la seule action de la pesanteur. Un mécanisme particulier permettait dans ce dernier cas de placer le piston obliquement afin d'éviter son frottement contre les parois du tube.

Après avoir été employé pendant quelques années, le système atmosphérique a été abandonné. Il a l'inconvénient de ne pouvoir être facilement appliqué aux grandes lignes, de se prêter avec peine aux passages à niveau, et surtout d'être extrêmement dispendieux. Il n'a réellement d'avantage que pour le service des plans inclinés; et il pourra peut-être s'appliquer, en certains points au moins, pour franchir les hautes montagnes, problème dont on se préoccupe beaucoup aujourd'hui. Mais cette question réclame de nouvelles études.

SYSTÈME MÉTRIQUE, système de poids et mesures qui a pour base le MÈTRE (*Voy. ce mot*), et qui a été adopté en France par les lois du 18 germinal an III (7 avril 1795), et du 4 juillet 1837. — Dans ce système, toutes les unités de mesure dérivent du mètre ou s'y rattachent intimement. — L'unité de superficie, pour l'évaluation des surfaces ordinaires, est le *mètre carré*, ou le carré qui a 1 mètre de côté. L'unité des mesures agraires est l'*are*, ou le carré dont le côté a 10 mètres. L'unité de volume est le *mètre cube*, ou le cube dont l'arête a 1 mètre; il prend le nom de *stère* quand il s'agit de l'évaluation des bois de chauffage. L'unité de capacité est le *litre*, ou le cube dont l'arête est la 10^e partie du mètre. L'unité de poids est le *gramme*, ou le poids d'eau pure et au maximum de densité qui serait contenu dans un cube ayant pour arête la 100^e partie du mètre. L'unité monétaire elle-même, ou le *franc*, se rattache au mètre par son poids, qui est exactement de 5 grammes.

Les multiples et sous-multiples de ces mesures suivent l'échelle décimale. Pour former leurs noms, on place les mots *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria* devant le nom de l'unité principale s'il s'agit d'exprimer son multiple par 10, 100, 1000, ou 10 000, et les mots *déci*, *centi*, *milli*, s'il s'agit des sous-multiples équivalents à $\frac{1}{10}$, à $\frac{1}{100}$, à $\frac{1}{1000}$ de l'unité principale. Mais tous ces multiples et sous-multiples ne sont pas également usités. Voici le tableau du système métrique, avec sa nomenclature et les valeurs des diverses unités.

MESURES DE LONGUEUR.

MÈTRE, dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

	MULTIPLES	
Décamètre	ou	10 mètres.
Hectomètre	—	100 —
Kilomètre	—	1000 —
Myriamètre	—	10000 —
	SOUS-MULTIPLES.	
Décimètre	ou	0,1 de mètre.
Centimètre	—	0,01 —
Millimètre	—	0,001 —

MESURES DE SUPERFICIE.

1° Pour les surfaces ordinaires ou pour les surfaces topographiques.

MÈTRE CARRÉ : carré qui a 1 m. de côté, ou 1^{m²}.

MULTIPLES.

Décamèt. carré : carré qui a 10 m. de côté, ou 100^{m²}.
Hectomèt. carré : carré qui a 100 m. de côté, ou 10 000^{m²}.

Kilomètre carré : carré qui a 1000 m. de côté, ou 1 000 000^{m²}.

Myriamètre carré : carré qui a 10 000 m. de côté, ou 100 000 000^{m²}.

SOUS-MULTIPLES.

Décimètre carré : carré qui a 0,1 m. de côté, ou 0,01 de mètre carré.

Centimètre carré : carré qui a 0,01 m. de côté, ou 0,0001 de mètre carré.

Millimètre carré : carré qui a 0,001 m. de côté, ou 0,000001 de mètre carré.

2° Pour les mesures agraires.

ARE : carré qui a 10 m. de côté, et vaut 100 m. carrés.

MULTIPLE.

Hectare : carré qui a 100 m. de côté, et vaut 100 ares.

SOUS-MULTIPLE

Centiare : carré qui a 1 m. de côté, et vaut 0,01 de l'are.

MESURES DE VOLUME.

1° Pour les volumes ordinaires.

MÈTRE CUBE : cube dont l'arête a 1 mètre.

(Les multiples ne sont pas usités)

SOUS-MULTIPLES.

Décimètre cube : cube qui a 0,1 m. de côté, ou 0,001 du mètre cube.

Centimètre cube : cube qui a 0,01 m. de côté, ou 0,000001 du mètre cube.

Millimètre cube : cube qui a 0,001 m. de côté, ou 0,000000001 du mètre cube.

2° Pour les bois de chauffage.

STÈRE ou mètre cube.

MULTIPLE.

Décastère ou 10 mètres cubes.

SOUS-MULTIPLE.

Décistère ou 0,1 de mètre cube.

MESURES DE CAPACITÉ,

LITRE ou décimètre cube.

MULTIPLES.

Décalitre ou 10 litres.

Hectolitre ou 100 litres.

Kilolitre ou 1000 litres; c'est le mètre cube.

(Le myrialitre n'est pas usité.)

SOUS-MULTIPLES.

Décilitre ou 0,1 de litre.

Centilitre ou 0,01 de litre.

Millilitre (peu usité) ou 0,001 de litre.

POIDS.

GRAMME : poids d'un centimètre cube d'eau pure et au maximum de densité...

MULTIPLES.

Décagramme ou 10 grammes.

Hectogramme ou 100 grammes.

Kilogramme (unité courante) ou 1000 grammes; poids d'un litre d'eau.

Myriagramme ou 10 000 grammes.

(L'étalon prototype, en platine, du kilogramme est déposé aux Archives.)

SOUS-MULTIPLES.

Décigramme ou 0,1 de gramme.

Centigramme ou 0,01 de gramme.

Milligramme ou 0,001 de gramme; poids d'un millimètre cube d'eau.

MONNAIES.

FRANC, pièce d'argent au titre de 0,835, pesant 5 grammes.

(Le franc n'a pas de multiples.)

SOUS-MULTIPLES.

Décime ou 0,1 de franc, en cuivre.

Centime ou 0,01 de franc, en cuivre.

(Voy. MONNAIES FRANÇAISES.)

Toutes les mesures effectuées d'après ce système s'expriment par des nombres décimaux, et se transforment les unes dans les autres avec la plus grande facilité par un simple déplacement de virgule (Voy. les *Traité d'Arithmétique*).

Conformément à la loi du 18 germinal an III, chaque mesure de poids ou de capacité a son double et sa moitié : double kilogramme, demi-kilogramme, double litre, demi-litre; et ainsi des autres.

Le commerce fait usage de deux unités de poids qui ne font point partie du système métrique quoiqu'elles soient des multiples décimaux du kilogramme; ce sont : le *quintal métrique*, qui vaut 100 kilogrammes, et le *nouveau tonneau de mer* ou *tonneau métrique*, qui vaut 1000 kilogrammes, et représente le poids d'un mètre cube d'eau.

Le système métrique est adopté en Suisse, en Belgique, dans le royaume d'Italie, en Grèce. Le congrès international de Statistique, réuni à Berlin en 1863, a arrêté à l'unanimité que ce système serait recommandé à l'attention des gouvernements. Enfin un acte du Parlement anglais, en date du 29 juillet 1864, a autorisé l'usage du système métrique dans tout le Royaume-Uni.

Les mesures de capacité, bien qu'exprimées en unités cubiques, n'ont pas la forme géométrique du cube; pour la commodité du commerce, on leur a donné la forme d'un cylindre. Pour les matières sèches et pour le lait, la hauteur du cylindre doit être égale à son diamètre; pour les autres liquides, la hauteur est le double du diamètre.

D'après cette règle, les dimensions absolues sont faciles à obtenir. Supposons qu'il s'agisse du litre à mesurer le lait; en désignant par D son diamètre, on devra avoir

$$\frac{1}{4} \pi D^2 \cdot D = 0^m \cdot \text{cub.}, 001,$$

d'où
$$D = \sqrt[3]{\frac{0^m \cdot \text{cub.}, 001 \cdot 4}{3,1416}} = 0^m, 10833,$$

ou à peu près 0^m, 108.

En multipliant par la racine cubique de 10, qui est 2,15443, on aura le diamètre du décalitre; on trouve 0^m,233497... ou 0^m,2335.

Multipliant de nouveau par 2,15443, on obtient le diamètre de l'hectolitre; on trouve 0^m,503.

Supposons qu'il s'agisse du litre pour les liquides autres que le lait; en nommant D le diamètre, on devra avoir

$$\frac{1}{4} \pi D^2 \cdot 2D = 0^{\text{m}} \cdot \text{cub}, 001,$$

d'où
$$D = \sqrt[3]{\frac{0^{\text{m}} \cdot \text{cub}, 001 \cdot 2}{3,1416}} = 0^{\text{m}}, 086025,$$

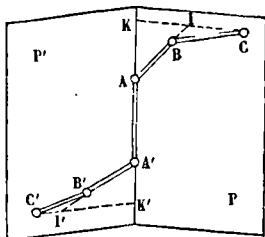
ou à peu près 0^m,086. Le double de ce nombre, ou 0^m,172, exprimera la hauteur du litre.

En multipliant ces dimensions par $\sqrt[3]{10}$, ou 2,15443, on obtient les dimensions correspondantes du décalitre; on trouve pour le diamètre 0^m,18528... et pour la hauteur 0^m,37056, ou 0^m,185 et 0^m,370.

Il faudrait au contraire diviser par 2,15443 pour obtenir les dimensions du décilitre. Pour le lait, on trouverait que le diamètre est 0^m,0503.

Pour les autres liquides, on obtiendrait un diamètre de 0^m,03993; et par conséquent une hauteur de 0^m,07986. On opérerait de la même manière pour trouver les dimensions des autres mesures de capacité.

SYSTÈME SARRUT, dispositif imaginé par M. Sarrut pour guider, d'une manière exacte, le mouvement rectiligne d'une tige. Soit AA' la tige qu'il



s'agit de guider dans sa direction propre. Par la droite AA' faisons passer deux plans distincts P et P'. Soit CB un balancier mobile autour d'un axe C perpendiculaire au plan P, et assujéti à rester dans ce plan; soit BA une bielle mobile dans le même plan P, autour d'une articulation B dont l'axe est parallèle à l'axe C. Soient C'B' un balancier et B'A' une bielle disposés de la même manière par rapport au plan P'. Il est clair que la tige AA', articulée avec les deux bielles, savoir en A autour d'un axe perpendiculaire au plan P, et en A' autour d'un axe perpendiculaire au plan P', ne pourra pas cesser d'appartenir à ces deux plans; elle sera donc obligée de se mouvoir suivant leur intersection AA'.

L'application du THÉOREME DE M. CHASLES (Voy. ce mot) fournit une relation simple entre les vitesses angulaires ω et ω' des balanciers CB et C'B'. Abaissons, en effet, du point C une perpendiculaire CK sur le prolongement de AA'; le point I où cette perpendiculaire rencontrera le prolongement de la bielle AB sera le centre instantané de rotation du système ABC; par conséquent, si v est la vitesse de la tige AA', on aura

$$v = \omega \cdot IK.$$

Abaissons de même du point C' une perpendiculaire C'K' sur le prolongement de AA', et soit I' le point où cette perpendiculaire rencontrera le prolongement de A'B'; on aura par une raison semblable

$$v = \omega' \cdot I'K'.$$

De ces deux relations il résulte

$$\omega \cdot IK = \omega' \cdot I'K', \text{ ou } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{I'K'}{IK},$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires des balanciers sont en raison inverse des distances IK et I'K', faciles à déterminer pour chaque position du système.

Théoriquement, l'angle des deux plans P et P' peut être quelconque, pourvu qu'il ne soit pas nul. Dans la pratique, il convient que cet angle se rapproche de 90°.

SYSTÈMES ARTICULÉS, systèmes solides composés de pièces dont chacune a, avec celle qui la précède, un point commun ou une droite commune, autour duquel ou de laquelle elle peut tourner. L'articulation est dite *sphérique* dans le premier cas, et *cylindrique* dans le second. On peut concevoir que le premier mode d'articulation soit réalisé en terminant l'une des pièces par une sphère, que saisissent deux demi-sphères de même rayon liées à la seconde pièce, comme cela a lieu dans le *genou à coquilles* qui sert à réunir un graphomètre à son support. Le second mode d'articulation peut être réalisé au moyen de tourillons reposant sur des coussinets cylindriques de même rayon. Du reste un système articulé est plutôt une conception idéale, à laquelle on compare, pour simplifier la théorie, certains assemblages de pièces solides, tels que les fermes en charpente, les chaînons d'une chaîne de pont suspendu lorsqu'ils vont d'une tige à l'autre, dans certains cas même les vousoirs d'une voûte, etc.

I. Si toutes les articulations sont sphériques, on a pour chacune des pièces six équations d'équilibre (Voy. EQUILIBRE), et si elles sont en nombre n , le nombre des équations d'équilibre est $6n$. Le nombre des articulations est $n - 1$, donnant lieu à autant de réactions mutuelles; de plus, la première et la dernière pièce, reposant sur des appuis, reçoivent chacune une réaction de l'appui correspondant, ce qui porte à $n + 1$ le nombre des réactions; et comme chacune d'elles peut être décomposée en trois autres parallèlement à trois axes rectangulaires, le nombre total des forces inconnues provenant des articulations et des appuis est $3(n + 1)$. Si entre les $6n$ équations on élimine ces $3(n + 1)$ forces, il reste $3(n - 1)$ conditions auxquelles les données doivent satisfaire pour l'équilibre. Si ces conditions sont remplies, on aura le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les forces inconnues.

II. Si toutes les articulations sont cylindriques, leurs axes sont ordinairement parallèles; ce sont, par exemple, des droites perpendiculaires à un même plan vertical. Le mouvement de chaque pièce ne pouvant avoir lieu que parallèlement à ce plan, le nombre des conditions d'équilibre se réduit à 3 pour chacune d'elles, ce qui fait en tout $3n$ équations. Les forces appliquées au système sont généralement symétriques par rapport à un plan perpendiculaire aux axes des articulations, et peuvent par conséquent se réduire à des forces situées

dans ce plan. Les réactions sont alors elles-mêmes dans ce plan, et n'ont dans ce plan que deux composantes, ce qui donne $2(n + 1)$ pour le nombre des forces inconnues. En éliminant ces forces, il reste $n - 2$ équations de condition entre les données. S'il n'y avait que deux pièces, le nombre de ces conditions serait donc *zéro*, et l'équilibre aurait lieu de lui-même, ce qui est alors évident *a priori*. Dans tous les cas, si les équations de condition sont satisfaites, il restera le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les forces inconnues. Pour la commodité du calcul, au lieu d'écrire alors les trois conditions d'équilibre relatives à chaque pièce, M. Bélanger recommande d'écrire successivement :

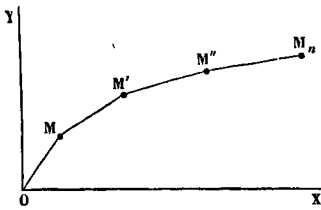
3 conditions d'équilibre pour la première pièce;
3 id. id. pour l'ensemble des deux premières pièces;

3 conditions d'équilibre pour l'ensemble des trois premières pièces, et ainsi de suite; enfin

3 équations d'équilibre pour l'ensemble de toutes les pièces.

On obtient, en effet, plus facilement de cette manière les équations de condition et les réactions inconnues.

III. Comme application, considérons une série de pièces droites OM, MM', M'M'', etc., articulées aux



points M, M', M'', etc., et chargées de poids uniformément répartis par rapport à leur projection horizontale. On suppose les points d'appui et les points d'articulation situés dans un même plan vertical, dans lequel nous mènerons par le premier point d'appui O un axe horizontal OX et un axe vertical OY que nous prendrons pour axes coordonnés. Soient $x, y, x', y', x'', y'', \dots, x_n, y_n$, les coordonnées des points d'articulation et du dernier appui. Soient R_x et R_y les composantes, parallèlement aux axes, de la réaction qu'exerce l'appui O; soient $X, Y, X', Y', X'', Y'', \dots, X_n, Y_n$, les composantes des réactions qui s'exercent aux points d'articulation et au dernier point d'appui. Soit enfin p la charge par mètre de projection horizontale que supporte le système. En suivant la marche indiquée ci-dessus, on aura pour la première pièce :

$$R_x = X, \quad R_y = Y + px, \quad Xy = Yx + \frac{1}{2} px^2,$$

les moments étant pris par rapport au point O. A l'aide des deux premières équations, on met la 3^e sous la forme

$$R_x y = R_y x - \frac{1}{2} px^2.$$

En remplaçant ainsi la troisième équation, on a donc pour la première pièce

$$R_x = X, \quad R_y = Y + px, \quad R_x y = R_y x - \frac{1}{2} px^2. \quad [1]$$

On trouvera de même pour l'ensemble des deux premières :

$$R_x = X', \quad R_y = Y' + px', \quad R_x y' = R_y x' - \frac{1}{2} px'^2, \quad [2]$$

puis pour l'ensemble des trois premières :

$$R_x = X'', \quad R_y = Y'' + px'', \quad R_x y'' = R_y x'' - \frac{1}{2} px''^2, \quad [3]$$

et ainsi de suite; enfin, pour l'ensemble de toutes les pièces :

$$R_x = X_n, \quad R_y = Y_n + px_n, \quad R_x y_n = R_y x_n - \frac{1}{2} px_n^2. \quad [4]$$

Les troisièmes équations de ces divers groupes montrent que tous les points d'articulation et les deux points d'appui doivent être sur une même parabole à axe vertical ayant pour équation :

$$R_x y = R_y x - \frac{1}{2} px^2.$$

Si l'on se donne, outre le point O, deux autres points de cette courbe, par exemple le dernier appui et la position d'un point d'articulation, le premier par exemple, on aura deux équations [1] et [4] pour déterminer R_x et R_y . Les premières équations des divers groupes donneront les composantes horizontales X, X', X'', \dots , des réactions inconnues; et les secondes équations de ces mêmes groupes donneront les composantes verticales de ces mêmes réactions.

IV. Un système articulé est dit *complexe* quand le nombre des articulations surpasse $n - 1$, n étant toujours le nombre des pièces du système. Dans ce cas, l'équilibre a lieu de lui-même si le nombre des forces inconnues provenant des réactions des appuis équivaut au nombre des équations d'équilibre. Supposons, par exemple, que toutes les articulations soient sphériques; si m est le nombre des articulations et p le nombre des points d'appui, l'équilibre aura lieu de lui-même (abstraction faite des conditions relatives à la résistance des matériaux) si l'on a

$$3(m + p) = 6n, \quad \text{ou} \quad m + p = 2n.$$

Supposons que toutes les articulations soient cylindriques, l'équilibre aura lieu de lui-même si l'on a

$$2(m + p) = 3n.$$

V. Un système articulé est dit à *liaison complète* lorsque chacune des pièces qui le composent ne peut prendre qu'un seul mouvement. Tels sont, par exemple, la BALANCE DE QUINTENZ, les PONTS-LEVIS, etc. (Voy. ces mots). Dans ce cas, il suffit pour l'équilibre que l'équation du TRAVAIL VIRTUEL (Voy. ce mot) soit satisfaite pour le mouvement possible, si toutefois on peut négliger le frottement. Soit, en effet, F une quelconque des forces extérieures, et f une quelconque des réactions qui s'exercent aux points d'articulation ou aux points d'appui. On devra avoir pour l'équilibre

$$\sum \mathcal{E}F + \sum \mathcal{E}f = 0. \quad [5]$$

Mais, puisqu'il n'y a pas de frottement, chacune des forces f est normale à la surface de contact à laquelle elle correspond; on a donc pour chacune d'elles $\mathcal{E}f = 0$; donc aussi $\sum \mathcal{E}f = 0$; et par suite

$$\sum \mathcal{E}F = 0, \quad [6]$$

c'est-à-dire que la somme des travaux virtuels des forces extérieures doit être égale à zéro. Réciproquement, si cette condition est remplie, il y a équilibre; car, s'il n'y avait pas équilibre, il y aurait une vitesse, et par conséquent une puissance

vive produite; ce qui est impossible, puisque la somme des travaux est nulle (Voy. EFFET DU TRAVAIL).

VI. Parmi les systèmes articulés, il y a encore lieu de considérer ceux qui sont uniquement soumis à la pesanteur. L'équilibre dépend alors de la position du centre de gravité. On a coutume d'énoncer la condition d'équilibre en disant qu'il faut que le centre de gravité soit le plus bas possible. Il est plus exact de dire : il faut que le centre de gravité ne puisse commencer à se mouvoir en descendant. Et il faut avoir soin d'ajouter en outre que l'on néglige le frottement. — Soit, en effet, P le poids total du système, et f l'une quelconque des réactions qui s'exercent aux points d'articulation ou de la part des appuis. L'équation du travail virtuel donne

$$\mathcal{E}P + \Sigma \mathcal{E}f = 0. \quad [7]$$

Si aucun corps ne quitte son appui, les réactions f étant normales aux surfaces de contact puisqu'on néglige le frottement, on a comme plus haut $\Sigma \mathcal{E}f = 0$. Il en résulte $\mathcal{E}P = 0$; c'est-à-dire que dans le mouvement virtuel considéré, le centre de gravité du système reste à la même hauteur, et par conséquent ne descend pas. S'il arrive qu'un des corps quitte son appui, pour ce corps $\mathcal{E}f$ est une quantité positive, puisque la réaction f est dirigée de l'appui vers le corps. La somme $\Sigma \mathcal{E}f$ est donc positive, et par conséquent $\mathcal{E}P$ est négatif, ce qui exige que le centre de gravité s'élève (Voy. TRAVAIL DE LA PESANTEUR).

Réciproquement, si le centre de gravité ne peut que rester au même niveau ou s'élever, il y a équilibre; car, dans le cas contraire, il y aurait une puissance vive acquise, quantité essentiellement positive, ce qui est impossible puisque $\Sigma \mathcal{E}f$ est nul et que $\mathcal{E}P$ est négatif.

La condition soulignée ne peut être remplie que si l'ordonnée du centre de gravité par rapport à un plan horizontal inférieur est un minimum ou un maximum par rapport à la ligne verticale ou à la surface qu'il peut décrire. Dans le premier cas, si le système est dérangé de sa position d'équilibre d'une quantité tant soit peu notable, le centre de gravité s'élève; si l'on abandonne alors le système à l'action de la pesanteur, il se met en mouvement, il y a puissance vive produite, quantité positive, donc la somme des travaux est positive, et comme $\Sigma \mathcal{E}f$ est nul, $\mathcal{E}P$ est positif, c'est-à-dire que le centre de gravité descend; il tend donc à revenir à sa position d'équilibre, et l'on dit dans ce cas que l'équilibre est stable. Si, au contraire, l'ordonnée du centre de gravité est un maximum, quand on dérange le système d'une quantité appréciable, il y a encore puissance vive produite, $\mathcal{E}P$ est encore positif, et le centre de gravité descend encore; mais alors il tend à s'éloigner de plus en plus de sa position d'équilibre, et l'on dit dans ce cas que l'équilibre est instable. Si l'ordonnée du centre de gravité était constante, il y aurait équilibre dans toutes les positions, et dans ce cas on dit que l'équilibre est indifférent. Une balance ordinaire (Voy. BALANCE) réalise ordinairement les conditions de l'équilibre stable; une balance folle offre un exemple d'équilibre instable; la BALANCE DE ROBERVAL (Voy. ce mot) est un exemple d'équilibre indifférent.

SYSTÈMES ASTRONOMIQUES, hypothèses ad-

mises à diverses époques pour expliquer les phénomènes astronomiques.

Le plus anciennement connu est le système de Ptolémée, ainsi appelé du nom du célèbre astronome d'Alexandrie qui l'a consigné dans ses ouvrages. Dans ce système, la Terre est placée au centre de l'univers; autour d'elle se meuvent la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne. Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne décrivent chacun un cercle, nommé épicycle, dont le centre parcourt uniformément un second cercle appelé déférent qui a pour centre le centre de la Terre. Le rayon vecteur qui joint Mercure au centre de son épicycle est constamment dirigé vers le Soleil; il en est de même pour Vénus. Pour Mars, Jupiter et Saturne, le rayon vecteur mené de la planète au centre de son épicycle reste constamment parallèle à la droite qui joint le centre du Soleil au centre de la Terre. C'est à l'aide de ces hypothèses compliquées que les anciens essayaient de rendre compte du mouvement apparent des planètes, et particulièrement de leurs STATIONS et RÉTROGRADATIONS (Voy. ces mots), sans d'ailleurs se faire aucune idée des distances relatives des corps célestes.

L'ensemble des planètes et des étoiles était supposé se mouvoir autour de l'axe du monde, de manière à faire un tour complet dans un jour sidéral.

Copernic, né à Thorn en 1473, substitua au système de Ptolémée celui qui porte son nom, et dans lequel il a fait revivre quelques idées émises par les Pythagoriciens et particulièrement par Philolaüs. Dans le système de Copernic, le Soleil est fixe au centre du monde; les planètes et la terre circulent autour de cet astre; la Lune est réduite au rôle de satellite de la Terre. Le globe terrestre est animé d'un mouvement de rotation qui produit les apparences du mouvement diurne. Copernic attribuait en outre aux planètes et à la Terre des distances au Soleil peu éloignées de celles que l'astronomie moderne leur assigne aujourd'hui. Ce système, malgré l'appui de Galilée, ne fut adopté qu'avec une extrême lenteur, tant il en coûtait alors de renoncer à l'immobilité de la Terre.

Tycho-Brahé essaya, à la fin du seizième siècle, de concilier les principales hypothèses de Copernic avec celle de l'immobilité du globe terrestre. Dans le système de Tycho-Brahé, les planètes circulent autour du Soleil comme dans le système de Copernic, mais elles sont entraînées avec lui dans un mouvement commun autour de la Terre. Ce système, qui n'est qu'un retour au système de Ptolémée avec des notions plus saines sur les mouvements des planètes, ne fut pas généralement adopté; et avec le progrès des sciences on revint au système de Copernic qui est généralement adopté aujourd'hui.

Les preuves abondent en effet en faveur des hypothèses de cet illustre astronome. Les notions que l'on a acquises sur la distance qui nous sépare du Soleil, des planètes, et à plus forte raison des étoiles, ne permettent plus d'admettre un mouvement diurne de ces corps autour d'un axe; l'hypothèse de la rotation du globe explique au contraire les apparences de la manière la plus simple. Une raison du même ordre empêche d'admettre la translation annuelle du Soleil autour de la Terre; et la translation du globe autour du Soleil est infiniment plus probable. La probabilité se change presque en cer-

titude quand on observe l'analogie de ce mouvement avec celui des planètes.

A ces motifs s'ajoute la preuve tirée du phénomène de l'ABERRATION (Voy. ce mot) qui serait inexplicable si la Terre était immobile, et dont le mouvement de translation du globe fournit au contraire l'explication la plus simple. Enfin, la découverte de la GRAVITATION UNIVERSELLE (Voy. ce mot), qui per-

met d'expliquer et de prévoir dans leurs moindres particularités les mouvements des corps célestes, est venue donner aux hypothèses de Copernic la plus éclatante confirmation.

SYZIGIES (du grec σὺν, avec, et ζυγός, joug), nom commun donné à la nouvelle lune et à la pleine lune; les syzgies répondent aux époques où la lune est en conjonction ou en opposition (Voy. PHASES).

T

TABARRE, règle en sapin de 5 à 6 mètres de longueur, employée pour le tracé des grandes EPURES (Voy. ce mot).

TABEAU, paroi interne du jambage d'une porte ou d'une fenêtre, placée perpendiculairement au parement du mur (Voy. PORTE, FENÊTRE).

TABEAU, terme de Perspective; surface sur laquelle les objets doivent être représentés. Le plus souvent c'est un plan vertical. Le tableau est quelquefois une surface cylindrique ou une sphère.

TABEAU, partie de la poupe d'un navire située au-dessus de la VOÛRE (Voy. ce mot et CONSTRUCTION NAVALE).

TABEAU DE DÉPLACEMENT, tableau qui donne, pour tous les tirants d'eau, le volume et le poids de l'eau déplacée par un navire (Voy. DÉPLACEMENT). Pour construire un pareil tableau, on part d'une flottaison inférieure à celle du navire à l'état léger, et l'on calcule le déplacement pour cette flottaison. On augmente le tirant d'eau d'une petite quantité; on évalue la surface de la nouvelle ligne d'eau, et on évalue le volume de la nouvelle tranche ainsi formée en multipliant la moyenne des deux sections horizontales par la quantité dont le tirant d'eau a augmenté. On fait croître le tirant d'eau d'une nouvelle quantité, et l'on calcule le volume de la nouvelle tranche horizontale ainsi ajoutée. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un tirant d'eau supérieur à celui que le navire puisse jamais atteindre. Dans l'intervalle de deux sections horizontales consécutives, on admet que le volume croisse proportionnellement à la hauteur, en sorte qu'en divisant le volume de la tranche par sa hauteur exprimée en centimètres, on a le déplacement moyen par centimètre correspondant à cette tranche. On consigne les résultats dans un tableau, en plaçant à côté des volumes les poids d'eau de mer correspondants, qui s'en déduisent en multipliant par 1,026, densité de l'eau de mer.

Voici un exemple de tableau de déplacement, pour une frégate à vapeur.

ÉPAISSEUR des tranches.	TIRANTS D'EAU.	VOLUMES des tranches.		POIDS des tranches.		DÉPLACEMENT total en volume.		DÉPLACEMENT total en poids.		DÉPLACEMENT MOYEN par centimètre.
		m.	m. cub.	ton.	m. cub.	ton.	m. cub.	ton.		
0,54	3,05	853,211	875,394	853,211	875,394	875,394	875,394	875,394	5,829	
0,54	3,59	314,816	323,001	323,001	1168,027	1198,395	1198,395	1198,395	6,422	
0,54	4,13	346,794	355,811	355,811	1514,821	1554,206	1554,206	1554,206	6,915	
0,54	4,67	373,198	382,901	382,901	1838,019	1937,107	1937,107	1937,107	7,325	
0,54	5,21	395,567	406,852	406,852	2283,586	2343,959	2343,959	2343,959	7,822	
0,54	5,75	413,997	424,761	424,761	2697,583	2768,720	2768,720	2768,720	8,315	

Quelquefois le tableau donne en outre le déplacement pour 1 centimètre d'accroissement de tirant d'eau à chacune des sections horizontales considérées. Ces nombres diffèrent peu de la moyenne entre les déplacements par centimètre correspondants à deux tranches consécutives.

Les tableaux de déplacement peuvent être remplacés par des courbes (Voy. ÉCHELLE DE SOLIDITÉ).

Les tableaux de déplacement donnent ordinairement le déplacement pour une variation d'un centimètre de tirant d'eau, à la flottaison en charge.

Voici les valeurs de ce déplacement pour les principaux bâtiments à hélice.

	tonneaux.	tonneaux.
Vaisseau de 1 ^{er} rang.	12,510	Corvette de 400 chevaux. 5,144
— de 2 ^e —	10,317	Aviso de 1 ^{re} classe. 4,732
— de 3 ^e —	8,886	— 2 ^e classe. 3,358
Frégate de 1 ^{er} rang.	9,442	Canonnière à vapeur. . . 2,811
— de 2 ^e —	7,816	Chaloupe canonnière. . . 1,567
— de 3 ^e —	6,103	Batterie cuirassée. 6,534

TABLES DE TIR, tables qui donnent, pour les canons et obusiers de divers calibres, les HAUSSES (Voy. POINTAGE) correspondantes aux diverses charges et aux diverses portées, et pour les mortiers les valeurs de l'angle de tir correspondantes à ces mêmes éléments. Connaissant les dimensions d'une bouche à feu, le poids de la charge et celui du projectile, on peut calculer la vitesse initiale de ce dernier (Voy. BALISTIQUE INTÉRIEURE); on peut aussi la déterminer expérimentalement (Voy. PENDULE BALISTIQUE); et en contrôlant les deux méthodes l'une par l'autre, on a pu arriver à des résultats assez précis. Connaissant la vitesse initiale du projectile et l'angle de tir, on peut en déduire la portée; on peut aussi résoudre la question inverse, c'est-à-dire se donner la vitesse initiale et la portée, et en déduire par le calcul l'angle du tir (Voy. BALISTIQUE). Là aussi l'expérience fournit des résultats qui, comparés à ceux que donne le calcul, ont permis d'arriver à des règles suffisamment certaines. De l'angle de tir on peut, dans le cas des canons et des obusiers, déduire les hausses correspondantes (Voy. POINTAGE). Les résultats doivent être corrigés des diverses DÉVIATIONS (Voy. ce mot) auxquelles le projectile peut être soumis. On peut donc se procurer ainsi tous les éléments des tables de tir. Ces tables sont du reste constamment rectifiées par les expériences journalières faites dans les écoles de tir. Nous donnons ci-dessous un extrait des plus importantes de ces tables :

TABLE DE TIR DES CANONS DE CAMPAGNE, DE SIÈGE ET DE PLACE, A LA CHARGE DU TIERS DU POIDS DU BOULET.

DÉSIGNATION des canons.	HAUSSES POUR LES DISTANCES DE												DÉSIGNATION des canons.	HAUSSES POUR LES DISTANCES DE											
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m		m	m	m	m	m	m	m	m	m	m		
Campagne. { 8 6	12	25	19	12	4	5	14	24	35	47	60	75	Siège et place. { 24 16 12	24	55	47	38	28	16	2	13	29	54	26	80
	21	15	8	0	9	17	28	40	53	68	85	49		41	32	21	11	1	15	30	46	63	81		
	15	10	4	3	11	20	31	45	61	79	98	42		34	26	16	5	7	19	32	46	61	79		

Les hausses sont exprimées en millimètres.

TABLE DE TIR DES CANONS ET DES CARONADES DE MARINE, AU MAXIMUM DE CHARGE

DÉSIGNATION des canons.	HAUSSES POUR LES DISTANCES DE												CHARGES.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
Canon de 30, long.....	62	45	24	0	27	61	98	140	186	235	287	341	5 ^k
Id. court.....	75	59	39	16	10	41	77	115	159	204	251	301	5
Id. n° 3.....	92	73	52	27	0	31	66	105	148	195	249	308	3
Canon-obusier de 30.....	27	6	19	49	83	120	162	205	250	296	»	»	2
Caronade de 30.....	75	59	41	22	1	26	53	80	107	136	»	»	1,60
Id. de 24.....	65	51	36	16	4	26	51	76	102	128	»	»	1,30
Id. de 18.....	60	47	33	15	6	28	52	78	»	»	»	»	1,00
Id. de 12.....	50	37	20	2	19	42	»	»	»	»	»	»	0,65

(Les caronades sont des caons à chambre analogues aux obusiers.)

TABLE DE TIR DES OBUSIERS DE L'ARTILLERIE DE TERRE.

DÉSIGNATION des obusiers.	CHARGES.	HAUSSES POUR LES DISTANCES DE											
		200 ^m	300 ^m	400 ^m	500 ^m	600 ^m	700 ^m	800 ^m	900 ^m	1000 ^m	1100 ^m	1200 ^m	1300 ^m
<i>En bronze :</i>													
Montagne.....	12 ^c	k	0	7	15	24	34	45	»	»	»	»	»
Campagne.....	16	1,50	21	13	3	8	20	33	47	63	81	102	125
Id.....	Id.	1,00	14	2	10	23	38	55	74	»	»	»	»
Id.....	15 ^c	1,00	16	8	2	13	25	38	53	69	87	108	130
Id.....	Id.	0,50	5	6	18	31	45	60	77	»	»	»	»
Siège.....	22 ^c	2,00	6	4	15	27	40	54	69	84	100	116	132
Id.....	Id.	1,00	11	28	46	66	88	»	»	»	»	»	»
<i>En fonte de fer :</i>													
Place.....	22 ^c	k	»	»	10	6	23	41	60	80	101	123	147
Id.....	Id.	2,00	35	18	0	20	42	»	»	»	»	»	»
Côte.....	22 ^c	3,50	48	38	25	11	4	21	40	60	82	105	130
Id.....	Id.	2,00	42	28	13	4	24	45	68	93	120	148	177

TABLE DE TIR DES BOUCHES A FEU DE LA MARINE AVEC PROJECTILES CREUX, A LA CHARGE MAXIMA.

DÉSIGNATION des bouches à feu.	CHARGES.	HAUSSES POUR LES DISTANCES DE											
		m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
Canons de 30, longs.....	k	3,75	62	48	30	6	23	60	105	159	222	293	»
Id. courts.....	3,75	73	61	45	21	6	40	83	133	192	257	»	»
Id. n° 3.....	2,50	93	77	55	28	3	39	82	131	187	253	330	421
Obusier de 22, n° 1.....	3,50	48	25	4	40	82	130	184	244	305	369	434	505
Id. n° 2.....	3,00	68	44	15	21	64	112	166	226	291	361	344	403
Canon-obusier de 30.....	2,00	30	13	7	34	67	108	156	210	270	332	»	»
Caronade de 30.....	1,60	73	59	43	20	5	35	69	105	142	181	»	»

TABLE DE TIR DES MORTIERS A CHAMBRE TRONCONIQUE.

DÉSIGNATION des mortiers.	ANGLES de tir.	PORTÉES AVEC LES CHARGES DE													
		k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
		0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00
15 cent.....	45°	200	275	350	725	1100	1440	1710	»	»	»	»	»	»	
16 cent.....	45	145	200	260	585	925	1250	1525	»	»	»	»	»	»	
22 cent.....	30	»	»	105	295	570	805	»	»	»	»	»	»	»	
Id.....	45	»	»	120	355	635	890	1125	1915	»	»	»	»	»	
27 cent.....	30	»	»	»	»	»	»	480	1010	»	»	»	»	»	
Id.....	45	»	»	»	»	»	»	515	1150	1605	1945	2220	2480	»	
Id.....	60	»	»	»	»	»	»	365	»	»	»	»	»	»	
32 cent.....	45	»	»	»	»	»	»	300	725	1140	1465	1720	1945	2350	2640

Les portées sont exprimées en mètres.
(Voy. le *Traité d'Artillerie* de M. Piobert. *Voy.*
aussi l'art. ARMES RAYÉES.)

TABLES GRAPHIQUES, tracés dont l'emploi peut remplacer celui des tables numériques. On sait qu'un très-grand nombre de quantités variables ne sont connues que par des valeurs numériques isolées consignées dans des tables. Parmi ces tables, les unes sont à simple entrée, les autres sont à double entrée. Dans les premières, la quantité dont on consigne les valeurs ne dépend que d'une seule quantité variable, à laquelle on donne le nom d'argument. Ainsi dans une table de TENSION DE LA VAPEUR (Voy. ce mot), l'argument est la température; c'est-à-dire qu'en regard des températures, variant de degré en degré, ou suivant tout autre intervalle, la table donne la valeur correspondante de la tension. Ainsi encore dans une TABLE DE MORTALITÉ (Voy. ce mot), l'argument est l'âge des survivants, c'est-à-dire qu'en regard de chaque âge la table donne le nombre des survivants de cet âge, sur un nombre donné de naissances simultanées. — Dans les tables à double entrée, la quantité dont on consigne les valeurs dépend de deux arguments. Ainsi dans une *Table de Pythagore*, où sont inscrits les produits des nombres entiers deux à deux, depuis 1 jusqu'à 10, les arguments sont les deux facteurs du produit. Ainsi encore dans une table des diamètres des conduites d'eau, les arguments seraient la dépense par seconde (Voy. DÉPENSE) et la charge par mètre de longueur.

Quand on n'a pas besoin d'une très-grande exactitude, ou quand la nature de la question ne comporte pas une solution rigoureuse, à cause de l'incertitude des données, l'emploi d'une table numérique peut être remplacé par celui d'un tracé équivalent.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une table à simple entrée. Désignons par x l'argument et par y la quantité dont les valeurs sont consignées dans la table. On peut regarder les couples de valeurs correspondantes de x et de y comme les coordonnées rectangulaires d'autant de points, que l'on peut construire, en adoptant une échelle convenable. Si par tous les points ainsi marqués on fait passer une courbe continue, elle remplacera la table, puisque, pour chaque valeur de x elle fera connaître la valeur correspondante de la quantité y . Ce tracé aura en outre sur la table deux avantages : en premier lieu, elle parlera aux yeux, et

peindra d'une manière plus frappante les variations de la grandeur considérée; en second lieu, elle se prêtera beaucoup plus facilement à l'interpolation (Voy. INTERPOLATION GRAPHIQUE). Mais, comme les procédés graphiques entraînent avec eux des erreurs inévitables, tenant à l'emploi des instruments, et à la grandeur nécessairement très-limitée de l'échelle, la table numérique reprendrait son avantage si l'on tenait à une grande exactitude.

Dans la plupart des cas l'emploi d'une courbe est préféré; cette courbe forme une de ces *tables graphiques* dont on fait aujourd'hui un usage général. Ainsi, l'on représente par des courbes la plupart des lois physiques, comme, par exemple, l'état hygrométrique en fonction de la température, ou même des lois chimiques, comme la solubilité des sels en fonction de la température; des lois mécaniques, comme l'allongement des tiges élastiques en fonction de la charge, ou comme le travail d'une machine en fonction de la vitesse de régime; des lois purement humaines, comme les lois de la mortalité; enfin de simples faits sociaux, comme la hausse ou la baisse des fonds publics, ou comme la variation des recettes journalières sur les grandes lignes de chemins de fer. Les variations ainsi représentées par une courbe donnent une notion beaucoup plus nette de la grandeur que l'on étudie, et laissent dans l'esprit un souvenir beaucoup plus durable que l'aspect d'une simple table numérique.

Les tables graphiques à simple entrée ont un autre avantage dont nous n'avons pas parlé encore : c'est qu'on y réunit avec la plus grande facilité les courbes relatives à plusieurs grandeurs analogues que l'on a intérêt à comparer, et que la comparaison s'y fait d'une manière immédiate. C'est ainsi que, pour les lois de la mortalité, on peut réunir sur une même feuille les courbes correspondantes aux données fournies par divers auteurs ou relatives à diverses localités, et rendre ainsi très-facile l'étude comparative de ces divers documents. C'est ainsi encore que, sur une même feuille, on réunit les courbes de solubilité de différents sels, afin de comparer plus aisément les propriétés de ces diverses substances.

On emploie, dans l'exploitation des chemins de fer, des tableaux où sont tracées, non pas des courbes, mais des lignes brisées représentant la marche des trains. Dans cette représentation, on prend pour abscisses les temps, et pour ordonnées les distances itinéraires; comme la vitesse d'un même

train est supposée constante, sa marche, d'une station à l'autre, se trouve exprimée par une ligne droite. A l'aide de ces tableaux on reconnaît à la simple vue le lieu et l'heure de la rencontre des trains, la manière dont ils se succèdent, et toutes les circonstances qui peuvent intéresser la direction du mouvement.

On peut consulter sur le sujet de cet article l'Atlas de Berghaus, et la Notice de M. Minard, inspecteur des ponts et chaussées, ayant pour titre : *Des tableaux graphiques et des cartes figuratives.*

La représentation graphique des tables à double entrée est une idée beaucoup plus récente. Elle est fondée sur le mode de représentation employé pour les surfaces topographiques (Voy. SURFACES COURBES). On sait que pour représenter ce genre de surfaces sur un plan on y trace la projection de ses courbes de niveau, ou la projection des intersections de la surface par une série de plans horizontaux. Si, par exemple, on conçoit que la surface soit représentée par une équation de la forme

$$z = f(x, y), \quad [1]$$

on trace sur le plan les courbes que cette équation représente quand on y fait successivement

$$z = 0, \quad z = 1^m, \quad z = 2^m, \text{ etc.}$$

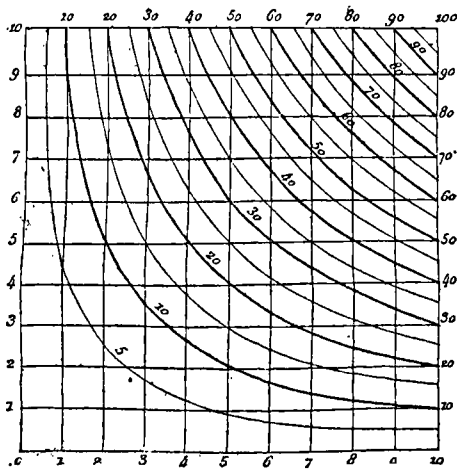


Fig. 1.

présente, d'après Koemtz, la température moyenne dans la ville de Halle, suivant le mois de l'année et suivant l'heure du jour. Les abscisses dans cette table sont les mois, comptés à partir de mars, et les ordonnées sont les heures du jour, comptées à partir de 6 heures du matin. On reconnaît que l'ordonnée correspondante au 1^{er} juillet coupe la ligne horizontale de midi à peu près à égale distance entre la courbe répondant à 21° et la courbe répondant à 22°; on en conclut que la température moyenne à midi, le 1^{er} juillet, est d'environ 21° $\frac{1}{2}$.

On reconnaît de même que l'ordonnée correspondante au 1^{er} février coupe la ligne horizontale de minuit, à égale distance entre les courbes corres-

Ces courbes, marquées chacune de la cote qui lui correspond, suffisent pour faire connaître la surface. C'est ce mode de représentation qu'on applique aux tables à deux entrées. Pour en donner un exemple très-simple, supposons qu'il s'agisse de la table de Pythagore. Les nombres qui figurent dans cette table satisfont à l'équation

$$z = xy. \quad [2]$$

Si donc on fait successivement

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \text{ etc.},$$

on aura les équations

$$xy = 0, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \text{ etc.},$$

dont la première représente les axes, et toutes les autres des hyperboles équilatères de puissance de plus en plus grande. La table pourrait donc être représentée par un tracé analogue à celui de la figure 1, dans lequel on n'a marqué que les courbes de niveau répondant aux valeurs de z exprimées par 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... jusqu'à 95. Il est clair que, pour effectuer réellement les multiplications, une pareille table serait tout à fait insuffisante. Nous ne l'avons donnée que comme un exemple; le simple d'une table graphique à deux entrées.

On trouve un exemple plus intéressant dans la table suivante (fig. 2) empruntée au *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie, et qui re-

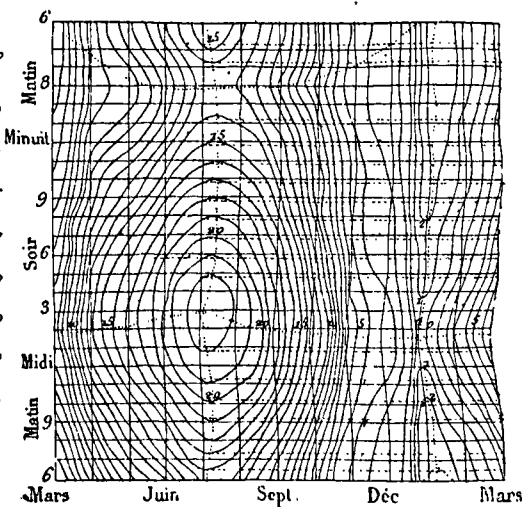


Fig. 2.

pondantes à 1° et à 2°; la température moyenne à minuit, et au 1^{er} février, est donc de 1° $\frac{1}{2}$. En suivant les lignes verticales, on peut étudier les variations de la température pour un même jour aux différentes heures du jour. En suivant au contraire les lignes horizontales, on peut étudier les variations de la température pour une même heure du jour aux différentes époques de l'année. En suivant le contour d'une même ligne de niveau, on peut étudier les conditions de date et d'heure qui correspondent à une même température. On peut faire sur ce tableau beaucoup d'autres remarques; ainsi l'on voit qu'en juillet la température moyenne ne descend pas au-dessous de 13 à 14 degrés; tandis

qu'en janvier elle ne s'élève pas au-dessus de 2 à 3.

On fait quelquefois subir aux tables graphiques à deux entrées une transformation qui simplifie les courbes de niveau, et à laquelle on a donné le nom d'*anamorphose* des tables graphiques. Un exemple fera comprendre en quoi consiste cette méthode.

Supposons que l'équation de la surface soit

$$z = e^x \cos \frac{\pi y}{n}$$

On posera

$$x' = e^x \quad \text{et} \quad y' = \cos \frac{\pi y}{n},$$

d'où

$$z = x'y'.$$

Les courbes de niveau seront donc des hyperboles équilatères comme dans la figure 1. Mais au lieu de porter sur le cadre, à partir du point O, la suite naturelle des nombres, il faudra y porter d'une part la suite des grandeurs $e^1, e^2, e^3, \text{etc.}$, d'autre part la suite des quantités

$$\cos \frac{\pi}{n}, \quad \cos \frac{2\pi}{n}, \quad \cos \frac{3\pi}{n}, \quad \text{etc.}$$

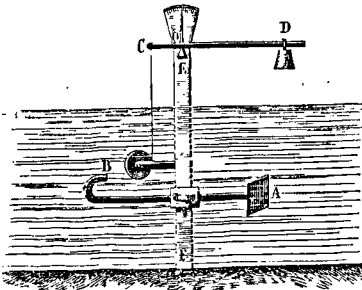
La graduation des axes en sera plus compliquée; mais les courbes tracées seront plus simples.

Cette transformation est d'ailleurs peu usitée.

(Voy. pour plus de détails le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie, troisième partie, p. 196 et suiv.)

TACHOMÈTRE (du grec *τάχος*, vitesse, et *μέτρον*, mesure), instrument employé sur les chemins de fer pour mesurer la vitesse des trains. Il se compose d'un mécanisme à force centrifuge semblable au *régulateur de Flaud* (Voy. *RÉGULATEURS À FORCE CENTRIFUGE*). Son axe, mis en communication avec un essieu, participe à la vitesse du véhicule; les boules s'écartent plus ou moins suivant la vitesse, et l'extrémité mobile du losange avance ou recule le long de l'axe, en tendant plus ou moins le ressort en hélice. Un style est adapté à cette extrémité mobile. Au-dessous est installé un plateau horizontal auquel un mécanisme d'horlogerie imprime un mouvement de rotation uniforme. Le style trace sur ce plateau une courbe qui se rapproche d'autant plus du centre du plateau que les boules s'écartent davantage, c'est-à-dire que la vitesse du train est plus grande. Les variations de la vitesse du convoi sont ainsi accusées par les variations du rayon vecteur de la courbe décrite.

TACHOMÈTRE DE BRÜNINGS, instrument em-



ployé pour mesurer la vitesse des courants à une profondeur quelconque. La partie principale est

une plaque A que l'on expose perpendiculairement à l'action du courant au point où l'on se propose de mesurer la vitesse. Une tige horizontale, à l'extrémité de laquelle la plaque est fixée, traverse à frottement doux le support EF de l'appareil, de telle sorte que, sous l'action du courant, la plaque recule en faisant glisser cette tige, dont l'extrémité opposée tire à elle un fil passant sur une petite poulie et venant se fixer à l'extrémité C d'une petite romaine. On règle la position D du poids curseur de la romaine, de manière que ce poids fasse équilibre à la pression du courant, transmise en C par l'intermédiaire du fil. Si F est la force exercée sur la plaque, et p le poids du curseur, on a

$$F = p \cdot \frac{OD}{OC}.$$

Mais on a aussi, en appelant A l'aire de la plaque, k un coefficient numérique, et V la vitesse du courant au centre de la plaque (Voy. *RÉSISTANCE DES FLUIDES*)

$$F = kAV^2.$$

On en conclut

$$kAV^2 = p \cdot \frac{OD}{OC}, \quad [1]$$

d'où l'on pourra déduire V lorsque le coefficient k sera connu. Pour le déterminer, on peut mesurer la vitesse V à la surface au moyen d'un flotteur, placer ensuite la plaque A près de la surface et mesurer la valeur de OD pour faire équilibre à la pression que la plaque éprouve dans cette position; par cette double expérience on connaîtrait dans l'équation [1] toutes les quantités à l'exception du coefficient k. Une fois le coefficient k ainsi déterminé, on se servira de l'équation [1] pour calculer la vitesse V du courant à une profondeur quelconque.

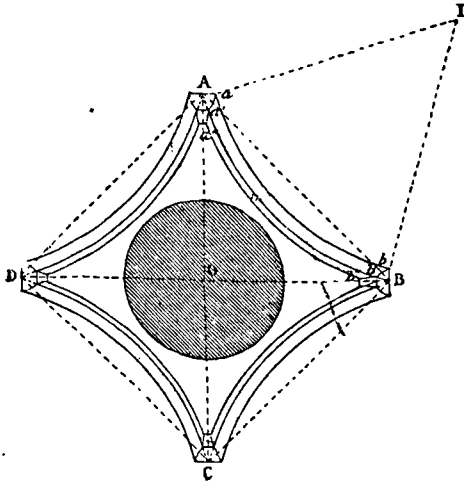
Cet appareil a été peu employé en France; on lui préfère généralement le MOULINET DE WOLTMANN (Voy. ce mot).

TAILLE, partie de la coupe des pierres qui a pour objet de donner à un bloc de pierre la forme déterminée par une épure. On la désigne aussi sous le nom d'*application du trait sur la pierre* (Voy. *COUPE DES PIERRES*). On distingue la taille par *EQUARRISSEMENT* ou *DÉROBEMENT*, et la taille par *BEUVEAU* (Voy. ces mots).

TAILLOIR, tablette placée à la partie supérieure du chapiteau d'une colonne, et sur laquelle repose l'architrave. On lui donne aussi le nom d'*abaque*. Dans les ordres toscan, dorique et ionique, le tailloir est carré; dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite il affecte une forme différente, et il se trace comme il suit. On construit un carré ABCD, dont la diagonale a quatre modules (ou le double du diamètre de la colonne). Sur chaque côté on élève un triangle équilatéral, tel que AIB; et du sommet I comme centre, on décrit l'arc AmB qui détermine la forme de l'abaque. Dans ce genre de tailloir, les moulures ne se rencontrent pas dans le plan vertical de la diagonale AC ou BD du carré; elles s'arrêtent à une petite face f formant pan coupé et présentant les mêmes moulures. A sa partie supérieure, ce pan coupé a une largeur de 4 parties de module dans l'ordre corinthien, et de 5

parties dans l'ordre composite. Dans la figure, le tailloir est supposé vu en dessous; les projections *ab, a'b', a''b''* des arêtes des moulures se décrivent du point *I* comme centre.

Dans l'ordre toscan, le tailloir se compose, en allant de haut en bas, d'un *listel*, d'un *congé*, et



d'une face verticale plane, qui forme le tailloir proprement dit, et à laquelle on donne le nom de *face* ou de *larmier*.

Dans l'ordre dorique, le tailloir ne comprend qu'un *filet* et un *talon*, au-dessous duquel se trouvent les volutes, laissant entre elles et lui, du côté de l'axe, un espace appelé le *canal des volutes*.

Dans l'ordre corinthien et dans l'ordre composite, le tailloir est formé d'un *quart de rond*, d'un *filet*, et d'une face. Dans l'ordre composite, cette face est en partie cachée par les volutes. (Voy. pour les dimensions relatives de ces différentes parties, l'art. ORDRES. (Voy. aussi l'art. MOULURES).

TALON, sorte de moulure circulaire (Voy. MOULURES).

TALUS NATUREL DES TERRES, talus sous lequel les terres se maintiennent d'elles-mêmes, sans mur de soutènement, et sans aucun moyen artificiel. L'inclinaison de ce talus par rapport à la verticale est de 60° pour le sable fin et très-sec, de 54° pour la terre humectée, de 46° à 47° pour la terre sèche et pulvérisée, de 35° pour les terres fortes et denses; inclinaisons qui répondent respectivement à 1,70 — 1,34 — 1,05 — 0,69 de base pour 1 de hauteur. Pour les terres moyennes on adopte généralement l'inclinaison de 45°, qui répond à 1 de base pour 1 de hauteur.

TAMBOUR, nom que l'on donne à un treuil d'un grand diamètre, lorsque, au lieu d'être formé d'un cylindre plein, il ne présente qu'une enveloppe cylindrique rattachée à l'axe par des bras (Voy. TREUIL).

TANGAGE, mouvement oscillatoire d'un navire autour d'un axe perpendiculaire au longitudinal et passant par le centre de gravité (Voy. CONSTRUCTION NAVALE). La question du tangage se traite comme celle du roulis (Voy. ce mot). En supposant

l'inclinaison initiale peu considérable, on trouve pour la durée du tangage

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{PK}} = \frac{\pi R}{\sqrt{gK}}, \quad [1]$$

I désignant le moment d'inertie du navire par rapport à l'axe de rotation, P la poussée de l'eau, ou le poids du navire, K la distance du centre de gravité au premier métacentre longitudinal (Voy. MÉTACENTRE) et R le RAYON DE GYRATION (Voy. ce mot) par rapport à l'axe considéré. La plus grande vitesse angulaire a pour valeur

$$\omega = 2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{PK}{I}} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} i \sqrt{gK}}{R}, \quad [2]$$

i désignant l'inclinaison initiale.

Les quantités R et K ont des valeurs beaucoup plus grandes dans le tangage que dans le roulis; pour des vaisseaux de dimensions moyennes, on a par exemple

$$R = 17^m \text{ et } K = 40^m;$$

d'où résulte

$$T = 2^s,697,$$

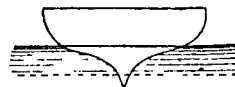
ou à très-peu près

$$2^s,7; \text{ et } \omega = 0,05$$

environ, pour une inclinaison initiale de 12°.

Il y aurait avantage, dans le tangage comme dans le roulis, à rendre les oscillations du navire isochrones à la lame, afin d'éviter les changements brusques de vitesse qui exercent une influence fâcheuse sur la membrure du navire et sur les mâts. Mais, quand le vaisseau navigue au plus près, la vitesse avec laquelle il va au-devant de la lame, diminue beaucoup l'intervalle entre deux coups de mer consécutifs; il faut donc, pour atteindre le but désiré, diminuer d'une manière notable la durée T du tangage, soit en diminuant R, soit en augmentant K. Mais, par des considérations qui tiennent au gouvernement du vaisseau (Voy. GOUVERNAIL, STABILITÉ SOUS VOILES) on préfère diminuer R, en rapprochant les matières les plus pesantes du milieu de la longueur du bâtiment. Il en résulte une légère diminution dans la durée du tangage, et une augmentation correspondante de la vitesse maximum. — Quoi qu'il en soit, le tangage est un des mouvements qui fatiguent le plus la mâture (Voy. MÂTURE).

Il se présente dans le tangage une particularité qu'on ne rencontre pas dans le roulis. C'est la *dé-nivellation* considérable (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES) qui se manifeste quand le navire court au plus près du vent et à la rencontre de la lame, dé-nivellation due à leur vitesse relative, et dont l'effet est de surélever notablement l'eau à la proue; aussi cette partie du navire est-elle beaucoup plus exposée à être envahie par la mer dans le tangage, que ne



l'est le côté dans le roulis. Une autre circonstance défavorable résulte, dans certains navires, de ce que, du côté de l'avant, les façons présentent, dans le sens transversal, une inflexion brusque à la hau-

teur de la flottaison, ou a une petite distance au-dessous. Lorsque la proue, d'abord soulevée par la lame, est abandonnée, après son passage, à l'action de la pesanteur, elle retombe brusquement, et éprouve de la part de l'eau un choc violent qui a l'influence la plus fâcheuse sur les mâts et sur toutes les parties du navire. Lorsque le navire court vent arrière, en fuyant en quelque sorte la lame, leur vitesse relative étant alors beaucoup moindre, la dénivellation est elle-même bien moins considérable; quant au danger d'immersion de la poupe, il est toujours beaucoup moindre que pour la proue. (Voy. la *Science navale* d'Euler, le *Traité du navire* de Bouguer, la *Théorie du navire* du marquis de Poterat).

On donne aussi, mais improprement, le nom de *tangage* à un mouvement alternatif d'avance et de recul que prennent les locomotives. Ce défaut peut tenir aux réactions des rails; mais il dépend surtout des réactions exercées par la base des cylindres (Voy. LOCOMOTIVE).

TARARE. Voy. MACHINES AGRICOLES.

TARAUD, outil à l'aide duquel on taille les écrous des vis. (Voy. MACHINE A TARAUDER.)

TASSEAUX, morceaux de bois, ayant la forme de parallélépipèdes rectangles, qui servent à soutenir les *pannes* d'un comble, aux points où elles reposent sur les arbalétriers. Les tasseaux sont assemblés à tenon avec l'arbalétrier et avec le chevron. Au-dessous des arêtières ou des noues les tasseaux ont une forme plus compliquée, parce qu'ils doivent soutenir les bouts des pannes des deux pans de toiture; les détails relatifs à ce cas sont donnés à l'article PANNES.

TAUREAU, le deuxième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

TÉ, tranchée circulaire que l'assiégeant ouvre à 30^m du saillant du chemin couvert, et qui a ce saillant pour centre; cette tranchée s'arrête aux prolongements des lignes de feu du chemin couvert, et reçoit à ses extrémités les *cavaliers de tranchée* (Voy. ATTAQUE DES PLACES). C'est du té que partent les dernières sapes dirigées sur le saillant du chemin couvert.

TEINTES CONVENTIONNELLES, teintes adoptées dans le dessin topographique pour les diverses espèces de terrains, les bois, les eaux, etc. Le lavis des plans topographiques a été longtemps abandonné au goût et à l'arbitraire du dessinateur. Mais, en 1802, le gouvernement nomma une commission pour s'occuper de cette question et introduire dans le lavis des plans la simplicité et l'uniformité qui avaient manqué jusqu'alors. Les indications données par cette commission ne furent pas également suivies dans tous les services publics. Une nouvelle commission, nommée en 1826, réussit, après un examen approfondi et de nombreux essais, à faire accepter par tous les services les décisions nouvelles qu'elle crut devoir prendre. Ces décisions n'ont pas modifié notablement, du moins en ce qui concerne les teintes conventionnelles, celles de la commission précédente. On peut les résumer comme il suit :

Terres labourées. Dans les pays entièrement cultivés, on laisse en blanc tout ce qui est labouré, en indiquant par de petits rectangles ponctués les différentes pièces de terre, et figurant les arbres frui-

tiers (Voy. SIGNES CONVENTIONNELS). Dans les pays de montagnes, où les terres labourées n'occupent qu'une médiocre étendue, on les indique par une teinte brune de terre d'ombre ou de terre de Siègne calcinée, que l'on compose de la manière suivante : 3 parties de gomme-gutte, 1 partie de carmin, $\frac{1}{4}$ de partie d'encre de Chine, et 8 parties d'eau.

Vignes. Brun-rouge, composé de 1 partie de gomme-gutte, 1 partie de carmin, $\frac{1}{4}$ de partie d'encre de Chine, et 8 parties d'eau. On couvre quelquefois la teinte de petits échelas noirs.

Prairies. Vert d'herbe, composé de 3 parties de gomme-gutte, 1 partie de bleu indigo, et 8 à 10 parties d'eau.

Vergers. Le même vert que pour les prairies, réduit à moitié de son ton.

Friches. Teinte panachée de vert pistache et d'aurore léger. Le vert est le même que pour les vergers, sauf un peu plus de gomme-gutte, pour obtenir la couleur pistache. L'aurore léger est composé d'une partie de gomme-gutte, $\frac{2}{3}$ de partie de carmin et 10 à 12 parties d'eau.

Forêts et bois. Jaune jonquille, composé de 1 partie de gomme-gutte et de 7 à 8 parties d'eau.

Broussailles. Panachée de jaune paille et de vert léger. Le jaune paille est composé de 1 partie de gomme-gutte et 14 à 16 parties d'eau. Le vert léger est le même que celui des vergers, auquel on ajoute un peu de bleu.

Bruyères. Panachée de vert et de rose. La teinte rose est composée de 1 partie de carmin et 12 parties d'eau. La teinte verte est la même que pour les vergers, sauf qu'on y ajoute un peu de bleu.

Landes. Vert olive et aurore. Le vert olive est composé de 1 partie de gomme-gutte, $\frac{1}{2}$ partie de bleu indigo et $\frac{1}{4}$ partie de la teinte rose des bruyères et 8 parties d'eau. La teinte aurore est la même que pour les friches. Elle sert principalement à indiquer les flaques de sable recouvertes d'eau pendant l'hiver.

Sables. Aurore. 2 parties de gomme-gutte, $\frac{2}{3}$ de partie de carmin et 16 parties d'eau. Quand la teinte est sèche, on renforce un peu le bord des bancs, en allant en adoucissant vers le milieu. Les sables sont ordinairement pointillés.

Vase. Couleur boue. 1 partie de gomme-gutte, $\frac{1}{2}$ de partie d'encre de Chine, un peu de carmin et de bleu, et 20 et 24 parties d'eau. On renforce les contours, mais sans pointillé.

Terres humides. Panachée horizontalement de vert et de bleu. Le vert est celui des prairies; le bleu se compose de 1 partie d'indigo et 8 à 10 parties d'eau.

Marais. Vert d'herbe et bleu léger. Le vert est le même que ci-dessus; le bleu léger se compose de 1 partie d'indigo et de 18 à 20 parties d'eau.

Étangs, lacs, rivières, fleuves. Bleu léger. 1 partie d'indigo et 18 à 20 parties d'eau. On renforce les bords avec une teinte un peu plus foncée. Les étangs doivent être ondulés horizontalement, plus fort du côté de l'ombre que du côté du jour. Les lacs, les rivières et les fleuves doivent être filés avec du bleu, parallèlement à leurs bords, en écartant les filets et adoucissant la teinte à mesure qu'on s'éloigne des rives. Le côté du jour doit être filé avec des teintes plus légères que le côté de l'ombre.

Mers. Bleu verlatre. 1 partie d'indigo, $\frac{1}{2}$ partie de gomme-gutte et 20 à 24 parties d'eau. On renforce aussi les bords par une teinte plus forte, qu'on n'applique pas immédiatement contre le bord, mais à 1 millimètre de distance. On imite les vagues par des sillons ondulés, en les écartant et diminuant la teinte à mesure qu'on avance vers le large.

Bâtiments et constructions. Carmin (*Voy. SIGNES CONVENTIONNELS*).

Dans tout ce qui précède, il faut entendre par le mot *partie* la quantité de couleur que contient un pinceau plein. Les couleurs sont supposées délayées au plus haut degré de force qu'elles puissent atteindre sans cesser d'être liquides.

(*Voy. la brochure de M. Sautrez, ayant pour titre : Teintes et signes conventionnels, 1865.*)

Le dessin des machines et le dessin des constructions emploient aussi des teintes conventionnelles. Elles sont en petit nombre. Les bois reçoivent une teinte brun très-clair; la fonte est teintée en gris-bleuâtre; le fer et l'acier en bleu; le cuivre ou l'aiton en jaune; les maçonneries en rose clair. Les ombres sont indiquées par une teinte analogue plus foncée. Pour les autres matériaux qui se rencontrent accidentellement dans le dessin graphique, on cherche à se rapprocher de la teinte naturelle.

TEMPS, notion primitive qui n'est point susceptible d'une définition. On admet que deux phénomènes identiques ont la même durée. De là l'idée de deux temps égaux, et par suite de la mesure du temps. Les **CHRONOMÈTRES** et les **HORLOGES** (*Voy. ces mots*) sont des appareils destinés à mesurer le temps par la succession d'une série de mouvements identiques de très-courte durée chacun.

L'unité de temps adoptée en Mécanique est la seconde sexagésimale de **TEMPS MOYEN** (*Voy. ce mot*). Dans la Géodésie, on peut avoir besoin de se servir du **TEMPS VRAI** ou du **TEMPS SIDÉRAL** (*Voy. ces mots; Voy. aussi l'article CONVERSION DES TEMPS*). Dans les usages ordinaires, on n'emploie plus que le temps moyen. Mais, quelle que soit la manière de compter le temps, on divise le jour en 24 heures, chaque heure de 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes.

TEMPS MOYEN, temps évalué d'après la marche moyenne du soleil. Pour définir cette marche moyenne, les astronomes imaginent un premier soleil fictif parcourant l'écliptique d'un mouvement uniforme, et passant au périégée et à l'apogée en même temps que le soleil vrai; puis ils conçoivent un second soleil fictif, ou *soleil moyen*, parcourant l'équateur avec la même vitesse que le premier soleil fictif parcourt l'écliptique, et passant en même temps que lui à l'équinoxe. Le mouvement de ce second soleil fictif est ce que l'on appelle le *mouvement solaire moyen*. La durée du *jour solaire moyen*, ou l'intervalle entre deux passages successifs du soleil moyen au méridien d'un même lieu, est constante, puisque ce soleil moyen parcourt uniformément l'équateur. De plus, au bout d'un grand nombre d'années, le soleil moyen aura fait autant de fois le tour de la sphère que le soleil vrai, et aura, par conséquent, passé au méridien le même nombre de fois. L'intervalle de temps écoulé entre deux passages consécutifs de ce soleil moyen au méridien du lieu sera donc la moyenne entre un

très-grand nombre de jours solaires, c'est-à-dire que ce sera le *jour solaire moyen*.

Les astronomes comptent le temps moyen, à partir du *midi moyen*, de 0 à 24 heures. Mais, dans les usages civils, le jour moyen commence à *minuit* et se compte de 0 à 12 jusqu'à *mid*, puis encore de 0 à 12 jusqu'au minuit suivant.

Pour comparer le temps moyen au temps vrai, il faut connaître l'**ÉQUATION DU TEMPS** (*Voy. ce mot*); en l'ajoutant (algébriquement) au temps vrai, on obtient le temps moyen.

Pour comparer le temps moyen au temps sidéral, on remarque que le nombre de jours moyens contenus dans l'année tropique est de $365\frac{1}{4}$, ou plus exactement 365,242217; mais, dans le cours d'une année, le soleil passe au méridien une fois de moins qu'une étoile quelconque; le nombre de jours sidéraux contenus dans l'année est donc 366,242217. Le rapport de ces deux nombres, c'est-à-dire

$$\frac{366,242217}{365,242217} \text{ ou } 1,0027379091,$$

exprime donc le rapport du jour moyen au jour sidéral.

Le raisonnement qu'on vient d'employer, évident pour un nombre entier de jours, pourrait le paraître moins pour un nombre de jours fractionnaires. Mais

soit $365 + \frac{1}{n}$ le nombre fractionnaire de jours de l'année tropique; pour n années, on aura

$$365.n + 1 \text{ jours.}$$

Mais, dans cette période de temps, une étoile aura passé au méridien n fois de plus que le soleil; le même intervalle de temps exprimé en jours sidéraux sera donc

$$365.n + 1 + n \text{ ou bien } 366.n + 1.$$

Par conséquent, la durée de l'année tropique exprimée en jours sidéraux est

$$366 + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, il a suffi d'ajouter un jour à l'expression en jours moyens (**VOY. CONVERSION DES TEMPS**).

TEMPS SIDÉRAL, temps évalué à l'aide de la marche des étoiles. On appelle *jour sidéral* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages successifs d'une même étoile au méridien du lieu; cet intervalle se divise en 24 heures sidérales, chaque heure en 60 minutes sidérales et chaque minute en 60 secondes sidérales. Le temps sidéral se compte à partir du passage d'une étoile déterminée au méridien, depuis 0 jusqu'à 24 heures.

Le jour sidéral est constant (*Voy. MOUVEMENT DIURNE*); sa durée est un peu moindre que celle du jour solaire; la différence est de 4 minutes environ (*Voy. TEMPS VRAI, et CONVERSION DES TEMPS*).

TEMPS VRAI ou *temps solaire*, temps évalué à l'aide de la marche du Soleil. On appelle *jour solaire* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages successifs du centre du soleil au méridien d'un même lieu; le jour solaire se subdivise en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Le temps solaire ou vrai se compte de 0 à 24 heures à partir de l'instant du passage du centre du soleil au méridien, instant auquel on a donné le nom de *midi vrai*.

Le jour solaire est un peu plus long que le jour sidéral (*Voy. TEMPS SIDÉRAL*). Si l'on considère, en effet, le soleil au moment de son passage au méridien et un jour sidéral après, on voit que, pendant que le globe a fait une révolution complète sur son axe, le soleil a parcouru sur l'écliptique un certain arc dans le sens de son mouvement propre, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement diurne des étoiles : il faut donc un intervalle de temps un peu plus long qu'un jour sidéral pour que le soleil revienne au méridien. Le jour solaire surpasse le jour sidéral de 4 minutes environ. Mais le jour solaire n'est pas constant : cela tient, d'une part, à ce que la vitesse du soleil sur l'écliptique est elle-même variable. Elle diminue du périhélie à l'apogée et augmente, au contraire, de l'apogée au périhélie ; en sorte que l'arc parcouru par le soleil sur l'écliptique pendant un jour sidéral, par exemple, est une quantité variable. D'autre part, à cause de l'obliquité de l'écliptique, deux arcs égaux de cette courbe étant projetés sur l'équateur par des arcs de méridiens ne donnent pas en général des projections égales ; d'où il résulte que ces arcs d'écliptique n'emploient pas le même temps à passer au méridien. L'inégalité des jours solaires est l'effet de cette double cause. Le jour solaire le plus long a lieu le 23 décembre ; il surpasse le jour moyen de 30 secondes. Le jour solaire le plus court a lieu le 16 septembre ; il ne surpasse le jour sidéral que de 21 secondes (*Voy. TEMPS MOYEN, ÉQUATION DU TEMPS, CONVERSION DES TEMPS*).

TENAILLE, ouvrage de fortification très-bas, compris parmi les dehors, et destiné à couvrir la courtine et à défendre le fossé. Son tracé se compose ordinairement d'une partie centrale *ab* (fig. 1) parallèle

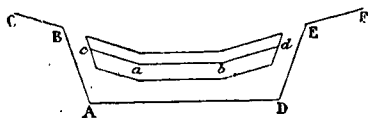


Fig. 1.

à la courtine, et de deux ailes *ac* et *bd* placées dans le prolongement des faces des bastions adjacents. Son relief, analogue à celui des autres ouvrages, doit être assez bas pour ne pas gêner l'action des flancs de chaque bastion sur la face du bastion opposé. Si l'on conçoit une ligne partant de l'un des flancs *AB* pour aboutir à un point situé à 1 mètre au-dessus du fond du fossé et à 30 mètres environ de l'angle d'épaule *E*, dans la direction *EF*, on aura la direction approchée d'un coup de feu destiné à défendre la brèche du bastion ; il faut que le relief de la tenaille reste à 1^m, 20 au-dessous de cette ligne pour que le vent du boulet ne gêne pas ses défenseurs. On ne revêt l'escarpe de la tenaille que sur une hauteur de 4 mètres ; on donne 4 mètres seulement d'épaisseur à son parapet ; on incline son terre-plein vers la courtine pour mieux abriter les défenseurs.

Les tenailles sont destinées à couvrir la poterne de la courtine ; à donner des feux rasants sur le terre-plein de la demi-lune ; à en défendre la gorge à bout portant ; à servir de point de rassemblement dans les derniers moments d'un siège ; enfin à four-

nir quelques feux dans le fossé. Mais ces ouvrages gênent toujours plus ou moins l'action des flancs, des bastions, et ils présentent des angles morts ou l'assaillant peut se tenir à couvert (*Voy. FORTIFICATION*). On n'emploie les tenailles que devant les courtines qui aboutissent à un bastion d'attaque.

Vauban, dans ses premiers tracés, donnait des flancs à ses tenailles et les disposait comme un front bastionné, ainsi qu'on le voit sur la figure 2. Il corrigeait ainsi le défaut des angles morts ; mais il finit par abandonner ce système, parce qu'il avait

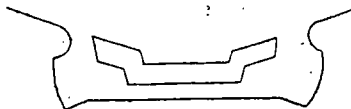


Fig. 2.

reconnu que les flancs de la tenaille pouvaient être pris à dos par les feux de l'ennemi établi au saillant du chemin couvert du bastion, surtout lorsque l'aile de la tenaille n'est pas abritée par un orillon ou par une *CONTRE-GARDE* (*Voy. ce mot*).

TENON, saillie prismatique ménagée à l'extrémité d'une pièce de charpente, pour l'assembler avec une autre pièce, dans laquelle a été pratiquée une cavité appelée *mortaise* destinée à recevoir le tenon. On peut donner au tenon diverses formes (*Voy. ASSEMBLAGES*).

TENSION, résistance qu'un solide de forme prismatique oppose à un effort longitudinal qui tend à accroître sa longueur (*Voy. ALLONGEMENT, FLEXION PLANE, TORSION*). La *tension par unité de surface* est le quotient de la tension totale par l'aire de la section droite du prisme.

TENSION DE LA VAPEUR, pression que la vapeur saturée exerce sur les parois des vases qui la contiennent. Cette tension varie avec la température conformément aux tableaux suivants. Le premier donne, d'après M. Regnault, la tension exprimée par une colonne de mercure, pour les températures comprises entre 0 et 100°. Le second donne, d'après MM. Dulong et Arago, la température correspondante aux tensions exprimées en atmosphères, depuis 1 atmosphère jusqu'à 30 atmosphères. Ces tableaux suffisent pour les applications aux machines à vapeur : on trouvera dans les traités de Physique des tableaux plus étendus.

1^{er} TABLEAU.

TEMPÉRATURE.	TENSION en millimètres.	TEMPÉRATURE.	TENSION en millimètres.	TEMPÉRATURE.	TENSION en millimètres.
0°	4,60	35°	41,83	70°	233,09
5	6,53	40	54,91	75	288,52
10	9,17	45	71,39	80	354,64
15	12,70	50	91,98	85	433,04
20	17,39	55	117,48	90	525,45
25	23,55	60	148,79	95	633,78
30	31,55	65	186,95	100	760,00

II^e TABLEAU.

FORCE ÉLASTIQUE en atmosphères.	PRESSON en kilogrammes par centimètre carré.	TEMPÉRATURE.	FORCE ÉLASTIQUE en atmosphères.	PRESSON en kilogrammes par centimètre carré.	TEMPÉRATURE.
1	k 1,033	100°	8	k 8,264	172,1
1 $\frac{1}{2}$	1,549	112,2	9	9,297	177,1
2	2,066	121,4	10	10,330	181,6
2 $\frac{1}{2}$	2,582	128,8	11	11,363	186,0
3	3,099	135,1	12	12,396	190,0
3 $\frac{1}{2}$	3,615	140,6	13	13,429	193,7
4	4,132	145,4	14	14,462	197,2
4 $\frac{1}{2}$	4,648	149,1	15	15,495	200,5
5	5,165	153,1	16	16,528	203,6
5 $\frac{1}{2}$	5,681	156,8	17	17,561	206,6
6	6,198	160,2	18	18,594	209,4
6 $\frac{1}{2}$	6,714	163,5	19	19,627	212,1
7	7,231	166,5	20	20,660	214,7
7 $\frac{1}{2}$	7,747	169,4	"	"	"

Les nombres inscrits dans le premier tableau peuvent être représentés par une formule empirique de la forme

$$\log f = a + b. \alpha' + c. \beta' \quad [1]$$

indiquée par M. Biot, dans laquelle f représente la tension en millimètres et t la température. On détermine les coefficients a , b , c , α , β par cinq observations convenablement espacées, par exemple, par celles qui correspondent aux températures 0°, 25°, 50°, 75° et 100°.

Les nombres du second tableau satisfont très-approximativement à cette autre formule empirique, due à Dulong et Arago,

$$F = (1 + 0,007153. e)^{\beta}, \quad [2]$$

dans laquelle F désigne la force élastique en atmosphères, et e l'excès de la température sur 100°.

Plusieurs autres formules ont été proposées pour exprimer la loi qui lie les forces élastiques de la vapeur avec les températures. Telles sont la formule

$$T = 0,85 \sqrt[3]{P - 75} \quad [3]$$

due à Tredgold, et dans laquelle T désigne la température en degrés centigrades, et P la force élastique en centimètres de mercure; la formule

$$T = \frac{11[\log. P - \log. 760]}{0,1644 - 0,03[\log P - \log. 760]}, \quad [4]$$

due à M. Roche, dans laquelle T est l'excès de la température sur 100°, exprimée en degrés centigrades, et P la force élastique en millimètres de mercure; la formule

$$p = \left(\frac{1 + 0,01878.t}{1 + 0,01878.100} \right)^{0,555} \quad [5]$$

due à Coriolis, dans laquelle p est la pression en atmosphères, et t la température en degrés centigrades; enfin la formule

$100 p = 1,300172 + 0,0187457.t^{0,677}$ [6]
due à M. Combes, et dans laquelle p exprime la pression en kilogrammes par centimètre carré, et t la température en degrés centigrades. Cette der-

nière est applicable depuis 30° jusqu'à 160°, température qui répond à une force élastique de 6 atmosphères.

Jusqu'à 140° on peut se servir de la formule de Tredgold; celle de Dulong et Arago convient mieux aux températures élevées; il en est de même de celle de Coriolis; la formule de M. Roche convient au contraire mieux aux températures moyennes.

TENUE DES LIVRES, art de régulariser et d'éclaircir la comptabilité commerciale. On distingue pour cela deux méthodes: la tenue des livres *en partie simple* et la tenue des livres *en partie double*.

I. La première méthode consiste uniquement à inscrire à chaque article ce que chacun doit ou ce que l'on doit à chacun.

Le compte de chaque client est composé de deux parties: la première, intitulée *Doit*, est celle où l'on inscrit les valeurs dues par le client; la seconde, intitulée *Avoir*, est celle où l'on inscrit les valeurs fournies par ce même client. Le *Doit* occupe le verso de chaque feuille, et l'*Avoir* occupe le recto de la feuille suivante. Quand le négociant veut connaître sa situation vis-à-vis du client dont il s'agit, il fait la somme de toutes les valeurs inscrites dans la colonne *Doit*, puis la somme de toutes celles inscrites dans la colonne *Avoir*; la différence, appelée *Balance*, exprime la situation demandée. Cette différence s'écrit au-dessous de la plus petite des deux sommes, et la rend ainsi égale à l'autre, d'où le nom de balance. En rouvrant le compte, on inscrit la balance du côté de la plus grande somme.

Ce mode de tenue, extrêmement facile, est encore usité dans le petit commerce.

II. Mais dans une grande maison, où un contrôle de tous les instants est indispensable, la tenue des livres en partie simple est insuffisante; et on lui a substitué la tenue en partie double, qui exige plus d'écritures, mais dans laquelle toutes les opérations se contrôlent mutuellement. Nous ne pouvons, dans un article de Dictionnaire, faire connaître que le principe de cette méthode. Le négociant, indépendamment des comptes ouverts à ses clients, tient six *comptes généraux* qui portent les noms de *Capital*, de *Caisse*, de *Marchandises générales*, de *Effets à recevoir*, de *Effets à payer*, et de *Profits et pertes*. Ce sont, en quelque sorte, six personnages fictifs, que le négociant fait intervenir dans ses opérations. Toute somme d'argent, toute traite, toute marchandise, qui entre ou qui sort de la maison, est reçue ou fournie par l'un de ces six personnages fictifs, et doit figurer dans son compte. Mais en même temps elle doit figurer aussi dans le compte du client réel avec lequel la transaction a eu lieu: de là un contrôle régulier et continu. Tout article inscrit au journal doit en outre faire connaître celui qui (client réel ou personne fictive) a fourni la valeur qui fait l'objet de cet article, et celui qui l'a reçue. Le dernier est considéré comme débiteur du premier, et l'article s'inscrit sous la forme: *tel doit à tel*. La valeur en question s'inscrit au *débit* (ou *Doit*) de celui qui est considéré comme débiteur, et en même temps au *crédit* (ou *Avoir*) de celui qui est considéré comme créancier, c'est-à-dire comme ayant fourni la valeur dont il s'agit. Quelques exemples éclairciront ces généralités.

Pour l'intelligence de ce qui va suivre, il faut savoir que les opérations du commerçant sont inscrites, au fur et à mesure qu'elles se présentent, sur un livre appelé *Brouillard* ou *main-courante*. Les articles du *Brouillard* sont ensuite *passés* au livre *Journal*, qui est la mise au net du *Brouillard*; ils sont ensuite transportés au *Grand-Livre*, qui est la réunion de tous les comptes particuliers ou généraux ouverts par le commerçant.

III. 1. Dans les ventes et les achats au comptant, le client ne figure sur les livres que pour mémoire, et l'article du *Journal* ne débite ou ne crédite que les deux comptes généraux *Marchandises générales* et *Caisse* qui participent réellement à l'opération.

Par exemple, supposons un article du *Brouillard* ou *main-courante* ainsi conçu :

Vendu à *Bernard*, au comptant, 10 caisses de sucre, pesant 200^k, ensemble 2000^k à fr. 1,25. 2500^f.

Pour passer cet article au *Journal* on se fera ces deux questions : *qui reçoit? qui fournit?* Les réponses sont faciles : c'est *Caisse* qui a reçu la valeur; c'est *Marchandises générales* qui a fourni la marchandise. L'article devra donc être passé sous la forme : *Caisse à Marchandises générales*, c'est-à-dire *Caisse* doit à *Marchandises*. Il en résulte que la valeur dont il s'agit devra être inscrite au *débit* de *Caisse* et au *crédit* de *Marchandises générales*.

Supposons, au contraire, un article du *Brouillard* ainsi conçu :

Acheté à *Urbain*, au comptant, une pièce de vin de Bordeaux..... 1200^f.

A la question *qui reçoit?* on répondra évidemment *Marchandises générales*; à la question *qui fournit?* on répondra *Caisse*. L'article devra donc être passé au *Journal* sous la forme *Marchandises générales à Caisse*, c'est-à-dire *Marchandises* doit à *Caisse*. Il en résulte que la valeur dont il s'agit devra donc être inscrite au *débit* de *Marchandises générales* et au *crédit* de *Caisse*.

2. Si le paiement, au lieu de se faire en espèces, se fait à l'aide d'un effet de commerce, ce n'est plus le compte de *Caisse* qui doit intervenir, mais bien le compte d'*Effets à recevoir* s'il s'agit d'une vente, et le compte d'*Effets à payer* s'il s'agit d'un achat.

Supposons, en effet, un article du *Brouillard* ainsi conçu :

Vendu à *Bernard*, contre son billet à mon ordre, payable fin octobre prochain, 10 caisses de sucre, pesant chacune 200^k, ensemble 2000^k à fr. 1,25..... 2500^f.

Qui reçoit? *Effets à recevoir*, puisque le paiement s'effectue au moyen d'un billet. Qui fournit? *Marchandises générales*. L'article devra donc être passé sous la forme : *Effets à recevoir à Marchandises générales*. Et la valeur dont il s'agit devra être inscrite au *débit* d'*Effets à recevoir*, et au *crédit* de *Marchandises générales*.

Supposons, au contraire, cet autre article du *Brouillard* :

Acheté à *Urbain*, contre mon billet à son ordre, payable fin novembre prochain, une pièce de vin de Bordeaux..... 1200^f.

Qui reçoit? *Marchandises générales*. Qui fournit? *Effets à payer*, puisque le paiement s'effectue à

l'aide d'un billet. L'article du *Journal* devra donc être passé sous la forme : *Marchandises générales à Effets à payer*. Et la valeur dont il s'agit devra être inscrite au *débit* de *Marchandises générales* et au *crédit* d'*Effets à payer*.

3. S'il s'agit d'une vente ou d'un achat à *crédit*, le nom du client intervient d'une manière essentielle, en même temps que *Marchandises générales*.

Exemple :

Vendu à *Richard* 1 barrique d'huile d'olive pesant 100^k, à fr. 2,50..... 250^f.

Qui reçoit? *Richard*. Qui fournit? *Marchandises générales*. L'article devra donc être passé sous la forme : *Richard* doit à *Marchandises générales*. La valeur dont il s'agit devra être inscrite au *débit* du compte de *Richard*, et au *crédit* de *Marchandises générales*.

Autre exemple :

Acheté à *Simon* une pièce de drap de Sedan, contenant 30 mètres, à fr. 20..... 600^f.

Qui reçoit? *Marchandises générales*. Qui fournit? *Simon*. L'article devra donc être passé sous la forme : *Marchandises générales à Simon*. Et la valeur dont il s'agit devra être inscrite au *débit* de *Marchandises générales* et au *crédit* de *Simon*.

4. Deux exemples feront comprendre l'intervention du compte de *Profits et pertes*. Supposons cet article du *Brouillard* :

Dû par *André* pour ma commission de 5 pour 100 sur les sucres que j'ai vendus pour son compte..... 3000^f.

5 pour 100..... 150^f.

Il faut évidemment débiter *André*, puisqu'il doit les 150^f. Par contre il faut créditer *Profits et pertes*, compte qui est censé fournir tous les bénéfices, et recevoir toutes les pertes. On écrira donc :

André à Profits et pertes. Et la valeur 150^f devra être inscrite au *débit* du compte d'*André* et au *crédit* du compte de *Profits et pertes*.

Supposons, au contraire, cet autre article :

Payé au courtier qui a vendu les sucres d'*André* à $\frac{1}{2}$ pour 100 de courtage..... 45^f.

C'est *Caisse* qui fournit; c'est *Profits et pertes* qui reçoit. On devra donc écrire :

Profits et pertes à Caisse. Et la valeur en question devra être inscrite au *débit* du compte de *Profits et pertes* et au *crédit* de *Caisse*.

Pour toutes les questions de ce genre, il faut se rappeler que *Profits et pertes* doit être *débité* des pertes et *crédité* des bénéfices.

5. Il peut arriver que, pour une même opération, on ait à débiter ou à créditer plusieurs comptes. Nous en donnerons deux exemples.

Supposons cet article du *Brouillard* :

Acheté à *Dumont* 6 tonneaux de vin de Bordeaux, à fr. 800 chaque, 4800 fr., sur lesquels je lui ai remis à compte fr. 800 en espèces, et mon billet à son ordre de ce jour, payable fin décembre, de fr. 3000..... 4800^f.

Qui reçoit ici? *Marchandises générales*. Qui fournit? *Caisse* pour les 800^f en espèces, *Effets à payer* pour le billet de 3000^f, *Dumont* pour le reste. On passe en conséquence cet article comme il suit :

Marchandises générales aux suivants : fr. 4800.

Pour achat à Dumont de 6 tonneaux de vin de Bordeaux, à fr. 800 chaque, fr....	4800	
A Caisse, fr. 800 pour ma remise en espèces à compte.....	800	
A Effets à payer, fr. 3000, pour mon billet à son ordre de ce jour, payable fin décembre.....	3000	
A Dumont, pour excédant....	1000	4800

Supposons cet autre article du Brouillard :

Pris de M. Troncin, de Paris, à l'escompte, un billet Noiraud, de Paris, à son ordre, du 16 décembre à fin de mars, de fr... 10000		
Escompte, 77 jours à 5 pour 100.....	106,95	
	9895,05	10000

Qui reçoit? *Effets à recevoir*. Qui fournit? *Caisse* pour les 9893,05. Le reste est le bénéfice du négociant; il faut en créditer *Profits et pertes*, d'après ce qui a été dit plus haut. On passe en conséquence l'article sous cette forme :

<i>Effets à recevoir</i> aux suivants: fr. 10000 pour billet Noiraud, du 16 décembre à fin mars, que j'ai pris à l'escompte de Troncin, au bénéfice duquel il est souscrit		
A Caisse, fr. 9893,05 pour ma remise en espèces à Troncin en échange de ce billet.....	9893,05	
A <i>Profits et pertes</i> , fr. 106,95 pour escompte.....	106,95	10000

Ces exemples suffiront pour faire comprendre le principe de la tenue des livres en partie double. Il est clair qu'ils seraient insuffisants pour mettre en état de traiter sans hésitation tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, mais on pourra consulter sur ce point les ouvrages spéciaux, et particulièrement les *Principes de tenue des livres* par E. Cadres-Marmet (chez Hachette et Cie), ouvrage élémentaire très-lucide et très-méthodique, que nous recommandons au lecteur.

IV. Indépendamment des comptes dont nous avons parlé jusqu'ici, le négociant en tient ordinairement plusieurs autres. S'il a intérêt, par exemple, à savoir d'une manière précise ce que produit une espèce particulière de marchandises, il ouvre à cette marchandise spéciale un compte particulier, qui est une subdivision du compte de *Marchandises générales*. S'il fait le commerce des denrées coloniales, et qu'il veuille suivre d'une manière particulière ses opérations sur les cafés, par exemple, il ouvre un compte à *Cafés*; et toutes les fois que cette marchandise spéciale intervient dans un article, au lieu de débiter ou de créditer le compte de *Marchandises générales*, il débite ou crédite le compte de *Cafés*.

Les dépenses que fait un négociant pour ses magasins, ses bureaux, sont inscrites au compte de *Frais généraux*. Il ouvre de même un compte spécial pour les dépenses particulières de sa maison, lequel prend le nom de *Compte de maison*.

Le négociant peut avoir en dépôt les marchandises d'un autre négociant qui l'a chargé de les vendre. Il est indispensable, dans ce cas, qu'il ait un compte spécial pour cet objet : ce compte prend le nom de *Marchandises d'un tel*. Il peut au con-

traire avoir chargé quelqu'un de la vente d'une partie de ses marchandises; dans ce cas encore il est nécessaire d'ouvrir pour cet objet un compte spécial qui prend le nom de *Marchandises chez un tel*.

V. Quand ses livres sont régulièrement tenus en partie double, le négociant a tous les éléments nécessaires pour se rendre un compte exact de ses opérations, et pour contrôler ses écritures les unes par les autres.

Nous avons dit plus haut comment on fait la balance d'un compte dans la tenue des livres en partie simple; elle se fait de même dans la tenue des livres en partie double.

Il est d'usage de faire chaque mois la balance de tous les comptes. Cette *balance de mois* a pour objet de contrôler les écritures, et de s'assurer que tous les articles du Journal ont été exactement transportés au Grand-Livre. On remarquera, en effet, que chacune des sommes inscrites au Journal, figurant à la fois au débit d'un compte et au crédit d'un autre compte, si l'on fait le total de toutes les sommes inscrites au Journal, le total des débits de tous les comptes, et le total de leurs crédits, on doit obtenir trois résultats égaux. Il est donc difficile qu'une erreur puisse échapper.

VI. Indépendamment de la balance de mois, qui n'est que le contrôle des écritures, le négociant fait une fois par an la *balance générale* des comptes. Cette opération a pour objet de lui faire connaître d'une manière précise son actif et son passif. Elle sert de base au *bilan* (ou inventaire général).

La balance générale exige de nouvelles écritures; et l'intervention d'un nouveau personnage fictif qui porte le nom de *Balance de sortie*, et qui n'est autre chose que la personnification du négociant lui-même.

On commence par passer en revue tous les comptes qui peuvent donner lieu à un bénéfice, savoir, *Marchandises générales* et ses subdivisions. Si, en ajoutant au total du crédit de ce compte la valeur des marchandises restant en magasin, on obtient un résultat supérieur au total du débit de ce même compte, la différence exprime le bénéfice; et l'on en passe écriture au Journal sous la forme :

Marchandises à Profits et pertes ;

c'est-à-dire qu'on débite *Marchandises* du bénéfice en en créditant *Profits et pertes*.

On passe ensuite en revue les comptes qui peuvent donner lieu à une perte : comme les comptes de *Frais généraux*, de *Maison*, etc. La balance de ces comptes exprime une perte, et l'on en passe écriture au Journal sous la forme :

Profits et pertes aux suivants ;

c'est-à-dire qu'on débite *Profits et pertes* de la perte en en créditant les autres comptes dont il s'agit.

On balance alors le compte de *Profits et pertes* et tous les comptes personnels. Puis faisant intervenir *Balance de sortie*, on débite ce compte de l'excédant du débit sur le crédit de tous les comptes dans lesquels le crédit est inférieur au débit, et l'on en passe écriture au Journal sous la forme :

Balance de sortie aux suivants.

On crédite au contraire *Balance de sortie* de l'excédant du crédit sur le débit de tous les comptes

dans lesquels le débit est inférieur au crédit, et l'on en passe écriture au Journal sous la forme :

Les suivants à Balance de sortie.

On voit que tous les comptes, à l'exception de *Capital*, sont venus ainsi se résumer dans le compte de *Balance de sortie*, qui présente à son débit l'actif du négociant, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les valeurs qu'il a en sa possession ou qui lui sont dues; et à son crédit le passif du négociant, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les valeurs qu'il doit. La différence est précisément le capital du négociant. On termine donc l'opération en balançant le compte de *Balance de sortie*, et en débitant *Capital* de la différence, ce qui exige qu'on en passe écriture au Journal sous la forme :

Capital à Balance de sortie.

VII. Quand la balance générale est terminée, il faut ouvrir tous les comptes à nouveau, et pour cela il faut suivre une marche inverse de la précédente. On fait intervenir, à cet effet, un nouveau personnage fictif appelé *Balance d'entrée*, dont les fonctions sont inverses de celles de *Balance de sortie*. Celui-ci était débité de l'actif du négociant et crédité de son passif; *Balance d'entrée*, au contraire, sera débité de son passif et crédité de son actif. On aura à passer une série d'écritures inverses de celles qui ont été nécessaires pour opérer la balance générale. Les comptes qui avaient été fermés à l'aide d'un article *Balance de sortie aux suivants*, seront rouverts à l'aide d'un article *Les suivants à Balance d'entrée*, en conservant les mêmes détails. Ceux qui avaient été fermés par un article *Les suivants à Balance de sortie*, seront rouverts par un article *Balance d'entrée aux suivants* avec le même contenu. Dans ces écritures à nouveau ne figureront ni les comptes qui ont été soldés par *Profits et pertes*, ni le compte de *Profits et pertes* lui-même, qui a été soldé par *Capital*. Mais nous avons un article *Capital à Balance de sortie*; nous aurons un article inverse *Balance d'entrée à Capital*, conçu dans les mêmes termes.

VIII. Ce mécanisme, compliqué en apparence, devient très-simple quand on en a acquis l'habitude. On comprend que, dans une pareille matière, la pratique soit indispensable. — Il y a d'ailleurs, indépendamment des principes à appliquer, une foule de règles à observer pour la disposition des livres, pour la manière de rédiger les articles, etc. Nous ne pouvons que renvoyer aux ouvrages spéciaux. *Voy. les Principes de tenue des livres* de E. Cadrès-Marmet, déjà cités; la *Tenue des livres en partie double* de M. l'Épine; le *Cours complet de tenue des livres* de MM. Goujon et Sardou.

TERRE, l'une des planètes dites principales. Dans l'ordre des distances au soleil, elle est placée entre Mars et Vénus. Sa distance au Soleil est d'environ 38 000 000 de lieues, ou plus exactement 153 048 000 kilomètres. — La terre est un sphéroïde, qu'on peut assimiler à un ellipsoïde de révolution; le rayon de son équateur est de 6 376 821^m; et le rayon du pôle de 6 355 565^m; d'où résulte un aplatissement de $\frac{1}{300}$ (*Voy. FIGURE DE LA TERRE*). Le globe est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour de son axe de figure, qui s'exécute en 24 heures sidérales, et qui produit les apparences du MOUVEMENT DIURNE (*Voy. ce mot*). La terre est

animée en second lieu d'un mouvement de translation autour du Soleil, en vertu duquel son centre décrit l'ÉCLIPTIQUE (*Voy. ce mot*), dans l'espace d'une ANNÉE TROPIQUE (*Voy. ce mot*). Ce mouvement s'exécute conformément aux LOIS DE KÉPLER (*Voy. ce mot*) et aux principes de la GRAVITATION UNIVERSELLE (*Voy. ce mot*). L'axe de la Terre est incliné sur le plan de l'écliptique d'environ 66° 32' 46", mais il ne reste pas exactement parallèle à lui-même; il exécute autour de l'axe de l'écliptique un mouvement lent et rétrograde, auquel est due la PRÉCESSION DES ÉQUINOXES (*Voy. ce mot*) et en vertu duquel les équinoxes rétrogradent d'environ 50",2 par an. Enfin, indépendamment de sa rotation lente autour de l'axe de l'écliptique, l'axe de la Terre a encore un autre mouvement autour de sa position moyenne, et en vertu duquel le pôle décrit dans le ciel, dans l'espace de 18 ans $\frac{2}{3}$, une petite ellipse dont les axes ont 19",3 et 14",4. Ce mouvement est la NUTATION (*Voy. ce mot*). — La Terre a un satellite, qui est la LUNE (*Voy. ce mot*). *Voy. aussi les articles JOUR, SAISONS, CALENDRIER, TEMPS MOYEN*, qui ont rapport aux mouvements de la Terre; densité 5,48 = celle du silicatar.

TERRE-PLEIN, terrain uni situé sur un rempart, derrière le parapet et la banquette, et où les défenseurs peuvent circuler à l'abri des feux rectilignes. On y arrive par une rampe. Chaque ouvrage de FORTIFICATION (*Voy. ce mot*) a son terre-plein. Le sol même de l'ouvrage porte quelquefois le nom de *terre-plein bas*. On applique aussi le nom de terre-plein au sol du chemin couvert. Un terre-plein est ordinairement horizontal; cependant les exigences du DÉFILEMENT (*Voy. ce mot*) peuvent conduire à lui donner une légère pente, soit de l'extérieur à l'intérieur, soit parallèlement à la crête de l'ouvrage, si elle n'est pas horizontale. Dans tous les cas on doit lui donner la pente nécessaire pour l'écoulement des eaux, c'est-à-dire environ $\frac{1}{60}$. On donne généralement 13^m de largeur au terre-plein, à partir de l'aplomb de la crête intérieure; une plus grande largeur serait superflue et accroîtrait inutilement l'épaisseur du relief; mais lorsqu'on ne dispose pas d'un espace suffisant, on peut se contenter d'une largeur un peu moindre. On donne généralement 10^m aux terres-pleins du chemin couvert.

THALWEG (de l'allemand, *thal*, vallée, et *weg*, chemin), ligne d'écoulement naturel des eaux, ou ligne la plus basse d'une vallée entre deux coteaux; c'est une LIGNE DE PLUS GRANDE PENTE (*Voy. ce mot*) caractérisée par cette propriété qu'on ne peut s'en éloigner perpendiculairement sans monter. On peut remarquer aussi que si l'on suit un thalweg en descendant, il rencontre les COURBES DE NIVEAU (*Voy. ce mot*) par leur convexité (*Voy. FIGURÉ DU RELIEF*).

THÉODOLITE (de *θεᾶσμαι*, regarder, et de *δολεῖς*, long, éloigné?), instrument employé en Géodésie pour mesurer les DISTANCES ZÉNITHALES (*Voy. ce mot*) et les angles réduits à l'horizon. Il se compose essentiellement de deux cercles divisés, l'un vertical et qui porte une lunette mobile autour d'un axe horizontal, l'autre horizontal et traversé en son centre par un axe vertical autour duquel le premier cercle peut tourner. Si on le fait tour-

ner de manière à pouvoir viser successivement avec la lunette deux objets éloignés, deux étoiles par exemple, l'angle dont il aura tourné, mesuré sur le cercle horizontal, exprimera l'angle des deux rayons visuels *réduit à l'horizon*; et l'angle fait

par l'axe optique de la lunette avec la verticale dans chacune des deux visées (angle mesuré sur ce cercle vertical) donnera la distance zénithale du point observé. Le théodolite est doublement répétiteur; c'est-à-dire que les deux cercles sont

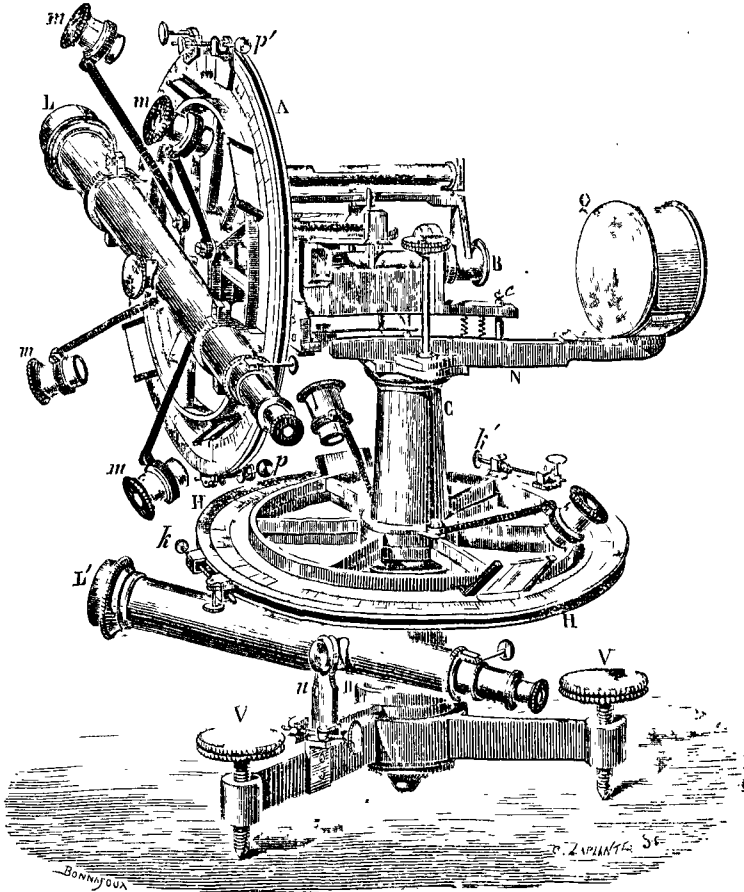


Fig. 1.

disposés de manière que l'on puisse appliquer à la mesure des angles, soit horizontaux, soit verticaux, le principe de la *RÉPÉTITION* (*Voy. ce mot*), comme nous l'expliquerons tout à l'heure.

On conçoit que les dispositions de détail varient d'un théodolite à un autre d'après les idées de chaque constructeur; l'instrument représenté par la figure 1 ci-contre, et que nous allons décrire, est le théodolite de Gambey.

Le cercle vertical A se compose réellement de deux cercles, dont le plus extérieur est mobile autour d'un axe horizontal B, tandis que l'autre est invariablement lié à cet axe; mais le cercle mobile peut être fixé à celui qui ne l'est pas au moyen d'une pince *p* munie d'une vis de pression avec *VIS DE RAPPEL* (*Voy. ce mot*). La lunette L, mobile autour du même axe horizontal que le cercle A, fait corps avec un cercle intérieur au cercle A, mais faisant saillie sur ce dernier,

comme le montre la figure, et jouant le rôle d'une alidade; aussi lui donne-t-on le nom d'*alidade concentrique*. Cette alidade peut être fixée au cercle A au moyen d'une pince *p'* avec vis de pression et vis de rappel. Elle porte en outre quatre verniers, dont les indications sont lues à l'aide d'autant de microscopes *m, m, m, m*; les divisions des verniers sont éclairées par de petits réflecteurs en verre dépoli, que la figure montre sous la forme de petits rectangles. On voit que, par cette disposition, si l'on serre la pince *p* et qu'on desserre la pince *p'*, on fixe le cercle A, et la lunette avec son alidade peuvent se mouvoir par rapport à ce cercle; si au contraire on serre la pince *p'* et qu'on desserre la pince *p*, le cercle A avec l'alidade et la lunette peuvent tourner ensemble par rapport au cercle fixe.

I. On peut dès lors comprendre déjà comment il est possible de mesurer et de *répéter* une distance

zénithale. Le plan du cercle vertical étant dirigé dans l'azimut du point à viser, d'une étoile E (fig. 2) par exemple, on commence par amener le zéro de l'alidade concentrique sur le zéro du limbe intérieur

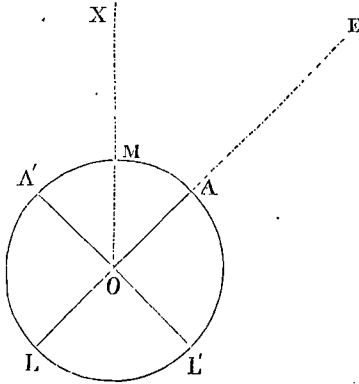


Fig. 2.

du cercle A; fixant alors l'alidade au cercle, on fait mouvoir leur ensemble de manière que le point E vienne se placer dans le champ de la lunette, et on l'amène doucement derrière le point de croisement des fils du réticule au moyen de la vis de rappel p' . Les deux pinces p et p' étant serrées, on fait faire à tout l'appareil un demi-tour entier autour de l'axe vertical passant par le centre du cercle horizontal (on verra plus loin comment ce mouvement peut être opéré et mesuré). L'axe optique de la lunette, qui avait la position LA, est venu ainsi prendre la position LA', symétrique par rapport à la verticale OZ. Rendant alors l'alidade libre, on ramène la lunette dans la direction LA; elle parcourt ainsi un arc A'A, qui est le double de la distance zénithale demandée MA, et que l'on pourrait lire sur le limbe. Mais, si l'on veut répéter l'angle, les deux pinces p et p' étant serrées, on fait faire un second demi-tour à l'appareil autour de son axe vertical; rendant alors le cercle A libre, on le fait tourner avec l'alidade de manière à ramener la lunette dans la direction LA; puis, après avoir fait faire à l'appareil un troisième demi-tour autour de son axe vertical, on fixe le cercle A, on rend l'alidade libre, et l'on ramène de nouveau la lunette dans la direction LA. Il est aisé de voir que par cette manœuvre, on a fait décrire au cercle A un angle égal à A'OA, en sens contraire des divisions, et que l'index de l'alidade mesure maintenant sur le limbe un angle double de A'OA, et par conséquent quadruple de MOA. En répétant encore la même manœuvre, on ferait décrire de nouveau au cercle A un angle égal à A'OA en sens inverse des divisions; et le zéro de l'alidade correspondrait à la mesure d'un angle triple de A'OA, ou sextuple de MOA. En continuant ainsi, on obtiendrait tel multiple pair de MOA qu'on voudra. On lira alors sa valeur sur le limbe, en tenant compte du nombre de tours entiers faits par le cercle A, et en prenant, pour évaluer les fractions de division, la moyenne des indications fournies par les quatre verniers. Si l'angle a été répété 10 fois, on

prendra le 10^e du résultat obtenu. Dans les théodolites de 33 centimètres de diamètre, les verniers donnent les angles à 10" près; une série de 10 répétitions donnerait donc l'angle à 1" près. Dans les théodolites de 20 centimètres de diamètre, les verniers donnent les angles à 20" près; il faudrait donc une série de 20 répétitions pour obtenir la même approximation. — Il faut remarquer que l'axe vertical autour duquel tourne l'appareil ne passe pas par le centre du cercle A; mais il n'en est distant que de 17 à 18 centimètres au plus, et, lorsqu'on vise un objet terrestre un peu éloigné, et à plus forte raison une étoile, cette distance est sans influence, et n'empêche pas de ramener la lunette au même point de repère quand on a fait faire un demi-tour exact à l'instrument.

II. L'axe horizontal B autour duquel tourne le cercle A, repose par des tourillons sur un ensemble de pièces M et N fixées à la colonne C, qui est mobile autour d'un axe vertical. Un contre-poids Q, adapté à la pièce N, est destiné à ramener le centre de gravité des pièces supérieures dans la verticale de l'axe de la colonne. Au bas de cette colonne est fixée une alidade circulaire, analogue à celle du cercle A, et qui peut se mouvoir concentriquement à l'intérieur du cercle horizontal H.

Ce cercle horizontal, appelé aussi cercle azimutal, est double comme le cercle vertical; le cercle supérieur H est mobile autour de l'axe de la colonne C; tandis que le cercle inférieur est fixé à la colonne inférieure D. Le cercle mobile H peut être fixé au cercle inférieur à l'aide d'une pince k avec vis de rappel; et l'alidade concentrique peut être fixée au cercle H à l'aide d'une pince k' , avec vis de rappel également. On voit que dès lors l'appareil peut fonctionner comme un CERCLE RÉPÉTITEUR (Voy. ce mot) et servir comme lui à mesurer, avec une approximation indéfinie, au moins théoriquement, les angles réduits à l'horizon. Une lunette L', fixée à la colonne inférieure D, sauf un léger mouvement que l'on règle avec la vis u , sert, comme dans le cercle répétiteur, à viser un point éloigné qui sert de repère pour s'assurer que l'appareil ne s'est point dérangé pendant les manœuvres. Le tout est porté sur un trépied avec vis calantes V, V.

III. Afin de rendre les observations indépendantes de l'excentricité de la lunette L, on peut mesurer chaque angle deux fois : une première fois avec le cercle vertical à sa gauche, et une seconde fois avec le cercle vertical à sa droite, et prendre la moyenne des résultats obtenus (Voy. RÉDUCTION AU CENTRE DE LA STATION). C'est ce que l'on désigne sous le nom d'observations croisées.

IV. Le théodolite est muni de deux NIVEAUX à BULLE D'AIR (Voy. NIVEAU), dont l'un n fixe appelé le grand niveau, et l'autre n' mobile. Le premier est disposé parallèlement au cercle vertical A; il sert à s'assurer de la verticalité de l'axe autour duquel peut tourner tout l'appareil, en suivant pour cela la même marche que pour le cercle répétiteur; avec cette seule différence que, comme le niveau n ne peut pas être retourné bout pour bout, les corrections se font en partie avec les vis calantes V, V, en partie avec une vis de réglage du niveau qui ne peut être vue dans la figure, et à l'aide de laquelle on peut soulever légèrement

l'une des extrémités du niveau. Le niveau n' sert à s'assurer de l'horizontalité de l'axe B; il repose sur cet axe par deux pieds à fourche, et on peut le retourner bout pour bout, afin de s'assurer que dans ces deux positions opposées la bulle demeure entre ses repères. Si cela n'avait pas lieu, la différence serait généralement très-faible, et il suffirait d'un très-petit mouvement de l'axe B dans le sens vertical pour le ramener à sa véritable position. Voici comment ce petit mouvement peut s'opérer : les deux pièces M et N sont liées, d'une part, par une vis e , de l'autre par une plaque métallique mince que l'on voit en f ; cette plaque est assez élastique pour qu'en faisant jouer la vis e on puisse la faire légèrement fléchir dans un sens ou dans l'autre, ce qui produit le mouvement qu'on voulait donner à l'axe B.

On peut voir sur la figure deux longues vis qui unissent la pièce N à la colonne C; elles n'ont d'autre fonction que de servir à démonter l'appareil pour le transporter plus facilement.

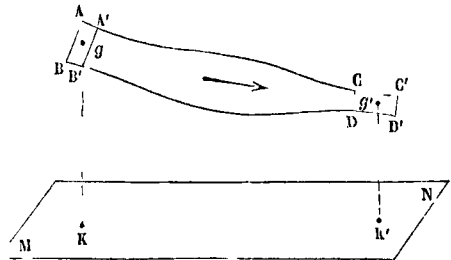
V. Il faut, au moment de la mise en station, rectifier l'axe vertical C, et l'axe horizontal B à l'aide des niveaux et des vis calantes, comme il est expliqué à l'article NIVEAU. Il faut de plus rectifier l'axe optique de la lunette (après l'avoir mise au point), c'est-à-dire rendre cet axe perpendiculaire à l'axe horizontal B. Cette opération est fondée sur le principe de symétrie. On vise un point situé à une grande distance, en ayant le cercle vertical à droite; on vise une seconde fois le même point, en ayant le cercle vertical à gauche: les deux lectures faites sur le limbe horizontal doivent différer de 180° exactement si l'axe optique est perpendiculaire à l'axe horizontal B; car on peut négliger les dimensions de l'instrument par rapport à la distance du point visé. S'il en est autrement, on corrige la moitié de la différence en faisant marcher l'alidade concentrique, et l'autre moitié en agissant sur la vis qui fait mouvoir horizontalement le réticule; la première correction place l'axe horizontal perpendiculairement au plan vertical dans lequel doit se faire la visée, la seconde amène l'axe optique dans ce plan.

VI. On peut déterminer expérimentalement, à l'aide du théodolite lui-même, à quelle inclinaison correspond une division du niveau n , ou grand niveau. Pour cela, après avoir rendu ce niveau parallèle à la droite qui joint deux des vis calantes, et l'avoir réglé, on vise un point de l'horizon, et l'on fait une première lecture sur le cercle vertical. En agissant sur l'une des deux vis calantes, on fait sortir la bulle de ses repères, d'un certain nombre de divisions, ce qui dérange l'axe optique de la lunette; on rectifie le pointé, et l'on fait une seconde lecture. La différence des deux lectures est évidemment la mesure de l'inclinaison que l'on a donnée au niveau, en déplaçant la bulle. On a donc ainsi l'inclinaison correspondante à un nombre connu de divisions, et il est facile d'en déduire celle qui correspond à une seule de ces divisions (Voy. le Cours de Géodésie de M. Laussedat à l'École polytechnique).

L'emploi du théodolite à lunette excentrique peut donner lieu à une correction du genre de celle qui est connue sous le nom de RÉDUCTION AU CENTRE DE LA STATION (Voy. ce mot).

VII. Le théodolite paraît être d'invention anglaise; et les premiers instruments précis de ce genre sont dus à Ramsden. La forme des théodolites a beaucoup varié; parmi les variétés dignes de remarque nous ne citerons que le *théodolite souterrain* de M. Combes, dans lequel le cercle vertical a son centre un peu au-dessous du cercle azimutal. Ce théodolite est disposé pour opérer dans l'intérieur des mines.

THÉORÈME DE D. BERNOULLI, l'un des théorèmes fondamentaux de l'hydraulique. Il se rapporte au MOUVEMENT PERMANENT (Voy. ce mot) d'un liquide dans un canal contre les parois duquel il n'exerce qu'un frottement insensible, et il s'énonce généralement comme il suit: la différence des hauteurs dues aux pressions dans deux sections transversales quelconques est égale à la différence de niveau des centres de gravité de ces sections, diminuée de la différence des hauteurs dues aux vitesses en aval et en amont. La démonstration de ce théorème est une application du principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot). Soit ABCD un



canal dans lequel un liquide se meut d'un mouvement permanent; on suppose que les filets fluides traversent normalement les sections AB et CD; que ces sections soient assez peu distantes pour qu'on puisse négliger le frottement des parois; on néglige de même le frottement des filets les uns contre les autres; enfin on suppose que la section transversale du courant varie d'une manière continue, de telle sorte qu'il n'y ait pas de changement brusque de section. Ces hypothèses sont nécessaires, et il faut toujours les avoir présentes à l'esprit lorsqu'on veut appliquer le théorème de Daniel Bernoulli.

I. Cela posé, concevons que le fluide qui occupait à l'instant initial la position ABCD, se soit transporté, au bout d'un instant très-court, dans la position très-voisine $A'B'C'D'$; et appliquons à ce déplacement le principe de l'effet du travail. Désignons par Π le poids du mètre cube du liquide en mouvement, par \mathcal{P}_0 la pression moyenne par mètre carré dans la section AB, par \mathcal{P} la pression moyenne par mètre carré dans la section CD, par ω_0 la section AB, par ω la section CD, par e_0 la distance des plans AB et $A'B'$, par e la distance des plans CD et $C'D'$, par q le volume de liquide compris entre AB et $A'B'$; cette lettre désignera aussi le volume compris entre les deux plans CD et $C'D'$, car, en vertu de l'incompressibilité du liquide, ces deux volumes sont nécessairement égaux; soit v_0 la vitesse commune des molécules liquides qui traversent la section AB, v la vitesse de celles qui traversent la section CD; enfin soient x_0 et x les distances gk et g'

des centres de gravité des volumes ABA'B' et CDC'D' à un plan horizontal de comparaison MN, situé au-dessous du courant.

On remarquera d'abord qu'en vertu de la permanence du mouvement la puissance vive totale du liquide compris entre les plans A'B' et CD est la même à l'instant final qu'à l'instant initial; l'accroissement de puissance vive de la masse liquide considérée se réduit donc à la différence entre la puissance vive du volume CDC'D' et la puissance vive du volume ABA'B', c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2} \frac{\Pi q}{g} v^2 - \frac{1}{2} \frac{\Pi q}{g} v_0^2.$$

D'après les hypothèses admises, les réactions des parois sont des forces normales qui ne produisent aucun travail; il reste donc à évaluer le travail des pressions qui s'exercent en AB et en CD, et le travail de la pesanteur.

La pression sur AB a pour expression $\mathcal{P}_0 \omega_0$; et son travail a pour valeur

$$+ \mathcal{P}_0 \omega_0 z_0 \text{ ou } + \mathcal{P}_0 q.$$

La pression sur CD a pour expression $\mathcal{P} \omega$; et comme elle agit en sens contraire du mouvement, son travail a pour valeur

$$- \mathcal{P} \omega z \text{ ou } - \mathcal{P} q.$$

D'après une propriété connue, le TRAVAIL DE LA PESANTEUR (*Voy. ce mot*) se réduit au travail de la partie non commune AB A'B', et il est le même que si les molécules liquides occupant cet espace s'étaient directement transportées en CD C'D'; ce travail a donc pour expression

$$\Pi q (z_0 - z).$$

Par conséquent, en appliquant le principe de l'effet du travail, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{\Pi q}{g} v^2 - \frac{1}{2} \frac{\Pi q}{g} v_0^2 = \mathcal{P}_0 q - \mathcal{P} q + \Pi q (z_0 - z)$$

ou, en divisant par Πq ,

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}}{\Pi} + z_0 - z. \quad [1]$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} = z_0 - z - \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \right),$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

On peut mettre la même équation [1] sous une forme plus frappante et plus facile à retenir; il suffit pour cela de faire passer dans le second membre tous les termes contenant des quantités affectées de l'indice zéro, et dans le premier membre tous les autres; on obtient ainsi :

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} + z = \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0, \quad [2]$$

ce qui revient à dire que : la hauteur due à la pression dans une section transversale quelconque, plus la hauteur due à la vitesse dans cette section, plus encore la hauteur du centre de gravité de cette section au-dessus du plan horizontal fixe, forment une somme qui est constante.

Si le canal était horizontal, on aurait partout

$$z = z_0;$$

il en résulte que la somme

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}$$

de la hauteur due à la pression et de la hauteur due à la vitesse, serait la même dans une section quelconque.

Si la section du canal était constante, la vitesse

serait la même dans toutes les sections, puisque, en vertu de l'incompressibilité du liquide, il passe le même volume de liquide dans chaque section pendant un même temps; on aurait alors

$$v = v_0;$$

et c'est la somme

$$\frac{\mathcal{P}}{\Pi} + z$$

de la hauteur due à la pression et de la hauteur au-dessus du plan horizontal fixe qui serait constante pour toutes les sections.

Si les deux circonstances avaient lieu à la fois, c'est-à-dire si le canal était horizontal et à section constante, u et z seraient constants; il faudrait donc que \mathcal{P} fût constant aussi; c'est-à-dire que la pression serait la même dans toutes les sections.

II. Il existe pour le mouvement permanent des gaz un théorème analogue au théorème de Bernoulli, et que nous croyons devoir placer ici.

Soit ω une section transversale du courant, z la hauteur de son centre de gravité au-dessus d'un plan horizontal fixe, \mathcal{P} la pression dans la section considérée. Imaginons une section infiniment voisine, où la pression sera

$$\mathcal{P} + d\mathcal{P},$$

et dont le centre de gravité sera à la hauteur

$$z - dz$$

au-dessus du plan horizontal de comparaison. Considérons le volume élémentaire de gaz compris entre ces deux sections, et appliquons le principe de l'effet du travail à un déplacement infiniment petit ds de ce volume. L'accroissement de puissance vive ne sera autre chose que la différentielle de

$$\frac{1}{2} m v^2,$$

c'est-à-dire

$$m v d v,$$

en appelant m la masse élémentaire dont il s'agit, ou bien

$$\frac{\Pi q}{g} v d v,$$

en désignant par Π le poids du mètre cube de gaz au point du courant que l'on considère, et q le volume élémentaire de gaz dont il a été parlé. Le travail élémentaire de la pression d'amont sera

$$+ \mathcal{P} \omega ds \text{ ou } + \mathcal{P} q;$$

le travail de la pression d'aval sera

$$- (\mathcal{P} + d\mathcal{P}) \omega ds \text{ ou } - (\mathcal{P} + d\mathcal{P}) q.$$

Le travail de la pesanteur sera

$$\Pi q \cdot dz.$$

On aura donc

$$\frac{\Pi q}{g} v d v = - q d \mathcal{P} + \Pi q dz$$

ou, en divisant par Πq ,

$$\frac{v d v}{g} = - \frac{d \mathcal{P}}{\Pi} + dz. \quad [1]$$

Or, le poids Π du mètre cube de gaz, à la pression \mathcal{P} et à la température t , est, en appelant Π_0 le poids du mètre cube à la pression atmosphérique normale \mathcal{P}_0 et à la température zéro,

$$\Pi = \Pi_0 \cdot \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0 (1 + at)},$$

a désignant le coefficient de dilatation du gaz. En substituant pour Π cette valeur dans l'équation [1], on obtient

$$\frac{v d v}{g} = - \frac{\mathcal{P}_0 (1 + at)}{\Pi_0} \frac{d \mathcal{P}}{\mathcal{P}} + dz. \quad [2]$$

Intégrant et désignant par v_0, \mathcal{P}_0, z_0 les valeurs initiales de v, \mathcal{P}, z , on trouvera

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = - \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} + z_0 - z,$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2g} + \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \mathcal{P} + z \\ = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \mathcal{P}_0 + z_0 \end{aligned}$$

ou simplement

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{\mathcal{P}_0(1+at)}{\Pi_0} \log' \mathcal{P} + z = \text{constante, [3]}$$

relation tout à fait analogue au théorème de Bernoulli.

Pour l'air on a

$\Pi_0 = 1^{\cdot}3$; $\mathcal{P}_0 = 10334^{\cdot}$, $a = 0,00366$; substituant ces valeurs, et mettant pour $\log' \mathcal{P}$ son égale $2,3026 \log \mathcal{P}$ et simplifiant, on trouve

$$\frac{v^2}{2g} + 18304 \log \mathcal{P} + z = \text{constante. [4]}$$

Cette équation repose sur les mêmes hypothèses que le théorème de Bernoulli. Elle donnerait lieu à des conséquences analogues à celles que nous avons déduites plus haut. (M. Bresse, dans son *Cours de Mécanique appliquée*, a établi la formule [3], en partant des équations différentielles du mouvement permanent des fluides).

THÉORÈME DE J. BERNOULLI, l'une des propositions les plus importantes du calcul des probabilités résultant des épreuves répétées des mêmes hasards; il peut s'énoncer comme il suit :

A mesure qu'on multiplie les épreuves, on a une probabilité toujours croissante que le rapport du nombre des événements A à celui des événements contraires B ne s'écartera pas du rapport de leurs probabilités respectives au delà d'une limite donnée, en plus ou en moins; et, quelque resserrée que soit cette limite, la probabilité dont il s'agit pourra approcher de l'unité autant qu'on le voudra, pourvu qu'on augmente suffisamment le nombre des épreuves.

On sait (Voy. PROBABILITÉS) que les diverses probabilités de répartition des événements A et B dans un nombre m d'épreuves sont les termes du développement de $(p+q)^m$, p et q désignant les probabilités respectives des événements simples A et B. On démontre que la probabilité maximum répond au terme dans lequel les exposants $m-n$ et n de p et de q sont précisément dans le rapport de p à q ; que les probabilités exprimées par des termes distants de r rangs du terme maximum, croissent avec le nombre des épreuves, et se rapprochent indéfiniment du terme maximum; qu'enfin, le nombre des épreuves restant le même, le rapport du terme situé à r rangs du terme maximum, avant ou après lui, à ce terme maximum lui-même, peut être rendu aussi petit qu'on le voudra en prenant r suffisamment grand. C'est sur ces remarques qu'est fondé le théorème de J. Bernoulli. Voici, sauf la notation, la démonstration de l'auteur :

Désignons par $T_1, T_2, T_3, \dots, T_r$ les termes distants du terme maximum de 1, 2, 3, ..., r , rangs après ce terme maximum, pour fixer les idées.

Soit M le terme maximum. Soient $T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}, \dots, T_{2r}$, les r termes qui suivent T_r . Le rapport de chaque terme à celui qui le précède allant

en diminuant à mesure qu'on s'éloigne de M, le rapport inverse va en augmentant; ainsi l'on a :

$$\frac{M}{T_1} < \frac{T_r}{T_{r+1}}; \quad \frac{T_1}{T_2} < \frac{T_{r+1}}{T_{r+2}}; \quad \frac{T_2}{T_3} < \frac{T_{r+2}}{T_{r+3}}; \dots; \frac{T_{r-1}}{T_r} < \frac{T_{2r-1}}{T_{2r}},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{M}{T_r} < \frac{T_1}{T_{r+3}} < \frac{T_2}{T_{r+2}} < \frac{T_3}{T_{r+3}} \dots < \frac{T_{2r}}{T_r}. \quad [1]$$

Or, on a identiquement

$$\frac{M}{T_r} = \frac{\frac{M}{T_r} \cdot T_{r+1} + \frac{M}{T_r} \cdot T_{r+2} + \frac{M}{T_r} \cdot T_{r+3} \dots + \frac{M}{T_r} \cdot T_r}{T_{r+1} + T_{r+2} + T_{r+3} \dots + T_{2r}}.$$

Si, dans le second membre, on remplace $\frac{M}{T_r}$ par

les rapports successifs $\frac{T_1}{T_{r+1}}, \frac{T_2}{T_{r+2}}, \dots$, tous plus grands que $\frac{M}{T_r}$, on aura donc

$$\frac{M}{T_r} < \frac{\frac{T_1}{T_{r+1}} \cdot T_{r+1} + \frac{T_2}{T_{r+2}} \cdot T_{r+2} \dots + \frac{T_r}{T_{2r}} \cdot T_{2r}}{T_{r+1} + T_{r+2} \dots + T_{2r}}$$

ou

$$\frac{M}{T_r} < \frac{T_1 + T_2 + T_3 \dots + T_r}{T_{r+1} + T_{r+2} + T_{r+3} \dots + T_{2r}}. \quad [2]$$

Il résulte de là que la valeur de r qui rend $\frac{M}{T_r}$ plus grand qu'une quantité k , rend à plus forte raison le second membre de l'inégalité [2] plus grand que cette même quantité k .

Supposons maintenant que l'on fasse $m-n=rp$ et $n=rq$.

Le terme M, qui contient q avec l'exposant n , en aura n ou rq après lui. Le terme T_r , situé r rangs après M, en aura donc $rq-r$ ou $r(q-1)$ après lui. Ces termes peuvent se partager en $q-1$ groupes de r termes chacun, et, puisqu'ils vont en diminuant, la somme des termes de chaque groupe sera moindre que la somme des termes de T_1 à T_r . Or, en prenant la quantité k égale à $N(q-1)$, on a, en vertu de l'inégalité [2] et de la conséquence qui en a été déduite,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_r \\ > N(q-1)(T_{r+1} + T_{r+2} + T_{r+3} + \dots + T_{2r}). \end{aligned}$$

Par conséquent, le premier membre, formant le premier groupe de r termes après M, peut être rendu plus grand que N fois la somme des groupes qui suivent, ou plus grand que la somme de tous les termes placés au delà de T_r .

On démontrerait de la même manière que la somme des r termes qui précèdent immédiatement M, et que nous pouvons désigner, en remontant, par $T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_r$, peut être rendue plus grande que N fois la somme de tous les termes qui précèdent T'_r . Il en résulte que la somme des termes compris depuis T'_r jusqu'à T_r , sans même y comprendre le terme maximum M, peut être rendue plus grande que N fois la somme de tous les termes compris dans le développement avant T'_r et au delà de T_r .

Désignons par S_r la somme des termes depuis T'_r jusqu'à T_r inclusivement, et par R le reste du développement de $(p+q)^m$; on pourra donc prendre r assez grand pour qu'on ait

$$S_r = NR.$$

L'ensemble de tout le développement sera alors $NR + R$.

En appelant donc P la probabilité correspondante à S_r , on aura

$$P = \frac{NR}{NR + R} = \frac{1}{1 + \frac{R}{N}}$$

quantité qu'on pourra rendre aussi voisine de l'unité qu'on le voudra en prenant N suffisamment grand, c'est-à-dire en multipliant le nombre des épreuves.

Par exemple, le nombre des figures, dans un jeu de 52 cartes étant 12, la probabilité d'extraire au hasard une figure du paquet est $\frac{12}{52}$ ou $\frac{3}{13}$. En vertu

du théorème de J. Bernoulli, la probabilité qu'en répétant un grand nombre de fois la même épreuve, le rapport du nombre des figures tirées au nombre

total des tirages ne dépassera pas $\frac{3}{13}$ de plus de $\frac{1}{13}$,

par exemple, en plus ou en moins, et restera compris entre $\frac{2}{13}$ et $\frac{4}{13}$, tendra vers l'unité et pourra

être rendue aussi voisine de l'unité qu'on le voudra en répétant suffisamment les épreuves. On

pourrait remplacer la limite $\frac{1}{13}$ par toute autre li-

mite plus petite, à la condition de multiplier suffisamment les épreuves.

Ce théorème conduit à la détermination des probabilités *a priori*, et sert de base aux applications les plus utiles du calcul des probabilités.

THÉORÈME DE CORIOLIS, théorème qui ramène l'étude du mouvement relatif (Voy. ce mot) à celle d'un mouvement absolu. On peut l'énoncer de la manière suivante : *Pour traiter le mouvement relatif d'un point matériel par rapport à un système mobile, comme si ce mouvement était absolu, il faut regarder ce point comme soumis, indépendamment de la force qui agit réellement sur lui, à deux autres forces fictives : la première est égale et directement opposée à celle qui serait capable de produire le mouvement d'entraînement (c'est-à-dire celui que le point matériel prendrait s'il était tout à coup lié invariablement avec le système mobile); la deuxième force fictive est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation du système mobile et à la vitesse relative, et elle a pour mesure le double produit de la masse du point matériel par la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe instantané et par la projection de la vitesse relative sur cet axe instantané.*

I. Considérons d'abord le cas où le mouvement d'entraînement se réduirait à un mouvement de translation parallèlement à un axe, que nous prendrions pour axe des x . Soient x, y, z les coordonnées du point matériel, dont la masse est m , par rapport à des axes rectangulaires fixes dans l'espace, et ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport à des axes parallèles aux premiers, mais entraînés avec le système mobile. On aura

$$\begin{aligned} x &= \xi, & y &= \eta \\ z &= \zeta + f(t), \end{aligned} \quad [1]$$

$f(t)$ désignant la fonction du temps qui exprime la loi du mouvement de translation suivant lequel les

axes mobiles sont entraînés. On tirera de ces relations

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= m \frac{d^2 \xi}{dt^2}, & m \frac{d^2 y}{dt^2} &= m \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m f''(t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2}, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= m \frac{d^2 z}{dt^2} - m f''(t). \end{aligned}$$

Soit F la force qui agit réellement sur le point matériel considéré; soient X, Y, Z ses composantes suivant les axes fixes; soit F_r la force qui produirait le mouvement relatif; soient X_r, Y_r, Z_r ses composantes suivant les axes mobiles; soit enfin F_e la force qui produirait le mouvement d'entraînement, c'est-à-dire celle qu'il faudrait appliquer au point matériel pour l'obliger à prendre le mouvement de translation des axes mobiles; et soient X_e, Y_e, Z_e ses composantes suivant les axes fixes. On aura (Voy. MOUVEMENT CURVILIGNE)

$$\begin{aligned} X &= m \frac{d^2 x}{dt^2}, & Y &= m \frac{d^2 y}{dt^2}, & Z &= m \frac{d^2 z}{dt^2}, \\ X_r &= m \frac{d^2 \xi}{dt^2}, & Y_r &= m \frac{d^2 \eta}{dt^2}, & Z_r &= m \frac{d^2 \zeta}{dt^2}, \\ X_e &= 0, & Y_e &= 0, & Z_e &= m f''(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu des équations ci-dessus établies, il viendra

$$X_r = X, \quad Y_r = Y, \quad Z_r = Z - Z_e, \quad [2]$$

c'est-à-dire que la force F_r , qui a pour composantes X_r, Y_r, Z_r , est la résultante de la force F, qui a pour composantes X, Y, Z, et d'une force F_e ayant pour composantes 0, 0 et $-Z_e$; en d'autres termes, pour pouvoir traiter le mouvement relatif comme si c'était un mouvement absolu, il suffit de regarder le point matériel comme soumis (indépendamment de la force F qui le sollicite en réalité) à une force fictive égale et opposée à celle qui produirait le mouvement d'entraînement.

Cette force fictive ou apparente serait nulle si le mouvement d'entraînement était un mouvement de translation uniforme.

II. Supposons, en second lieu, que le mouvement d'entraînement se réduise à un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des x . Rapportons toujours le point matériel à deux systèmes d'axes rectangulaires : l'un fixe dans l'espace, l'autre entraîné avec le système mobile. Prenons pour les deux systèmes la même origine : soient x, y, z les coordonnées du point matériel par rapport aux axes fixes; ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux axes mobiles. Supposons que l'axe des ζ coïncide avec l'axe des z ; soit ω la vitesse angulaire d'entraînement : si l'axe des ξ est d'abord supposé coïncider avec l'axe des x , au bout du temps t il fera avec lui un angle exprimé par ωt , et à cet instant on aura, en vertu des formules connues de transformation des coordonnées,

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \\ y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t; \end{aligned} \right\} [3]$$

à quoi il faut ajouter

$$z = \zeta,$$

puisque'il n'y a pas de mouvement parallèle à l'axe des x .

Désignons par u, v, w les composantes, parallèles aux axes fixes, de la vitesse absolue V du point matériel; par u_r, v_r, w_r les composantes, suivant les axes mobiles, de la vitesse relative V_r ; et par u_e, v_e, w_e les composantes, suivant les axes fixes, de la vitesse d'entraînement V_e , c'est-à-dire de la vitesse qu'il prendrait s'il était tout à coup entraîné avec le système mobile. On aura, par les règles de la COMPOSITION DES VITESSES (*Voy. ce mot*),

$$u = u_r + u_e, \quad v = v_r + v_e, \quad w = w_r, \quad [4]$$

attendu qu'ici w_e est nul.

Pour obtenir u_r, v_r et w_r , il faut différentier les équations [3] en y regardant t comme constant; car, si les axes des ξ, η, ζ restaient un instant immobiles, la vitesse absolue se réduirait à la vitesse relative. On aura donc

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{d\xi}{dt} \cos \omega t - \frac{d\eta}{dt} \sin \omega t, \\ v_r &= \frac{d\xi}{dt} \sin \omega t + \frac{d\eta}{dt} \cos \omega t, \\ w_r &= \frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned} \right\} [5]$$

Si l'on conserve les notations établies plus haut, on tirera de ces équations, en différentiant une seconde fois sans faire varier le temps t et en multipliant par la masse m ,

$$\left. \begin{aligned} X_r &= m \frac{d^2\xi}{dt^2} \cos \omega t - m \frac{d^2\eta}{dt^2} \sin \omega t, \\ Y_r &= m \frac{d^2\xi}{dt^2} \sin \omega t + m \frac{d^2\eta}{dt^2} \cos \omega t, \\ Z_r &= m \frac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{aligned} \right\} [6]$$

On aura u_e, v_e, w_e en différentiant les équations [3], sans faire varier les coordonnées ξ, η, ζ ; car, si le point matériel était tout à coup entraîné avec le système mobile e , ses coordonnées par rapport aux axes mobiles ne varieraient pas. On trouvera ainsi

$$\left. \begin{aligned} u_e &= -\xi \omega \sin \omega t - \eta \omega \cos \omega t, \\ v_e &= +\xi \omega \cos \omega t - \eta \omega \sin \omega t, \\ w_e &= 0. \end{aligned} \right\} [7]$$

Différentiant une seconde fois, sans faire varier ξ et η , on obtiendra, après avoir multiplié par m ,

$$\left. \begin{aligned} X_e &= -m\omega^2 \xi \cos \omega t + m\omega^2 \eta \sin \omega t, \\ Y_e &= -m\omega^2 \xi \sin \omega t - m\omega^2 \eta \cos \omega t, \\ Z_e &= 0. \end{aligned} \right\} [8]$$

Maintenant, on aura les vitesses absolues u, v, w , en faisant tout varier dans les équations [3], ce qui redonnerait les équations [4] déjà écrites; et l'on aura les valeurs des composantes X, Y, Z de la force F agissant réellement sur le mobile en différentiant une seconde fois les équations [4] par rapport au temps, les coordonnées ξ, η, ζ et l'angle ωt variant à la fois, et multipliant ensuite par m , ce qui donnera

$$\left. \begin{aligned} X &= m \frac{du}{dt} = m \frac{du_r}{dt} + m \frac{du_e}{dt}, \\ Y &= m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv_r}{dt} + m \frac{dv_e}{dt}, \\ Z &= m \frac{dw}{dt} = m \frac{dw_r}{dt}. \end{aligned} \right\} [9]$$

Or, on tire des équations [5]

$$\begin{aligned} m \frac{du_r}{dt} &= m \frac{d^2\xi}{dt^2} \cos \omega t - m \frac{d^2\eta}{dt^2} \sin \omega t \\ &\quad - m\omega \frac{d\xi}{dt} \sin \omega t - m\omega \frac{d\eta}{dt} \cos \omega t, \end{aligned}$$

ou, en ayant égard aux relations [6] et aux relations [5] elles-mêmes,

$$\left. \begin{aligned} m \frac{du_r}{dt} &= X_r - m\omega v_r, \\ \text{On trouvera de même} \\ m \frac{dv_r}{dt} &= Y_r + m\omega u_r, \\ m \frac{dw_r}{dt} &= Z_r. \end{aligned} \right\} [10]$$

On tire pareillement des équations [7]

$$\begin{aligned} m \frac{du_e}{dt} &= -m\omega^2 \xi \cos \omega t + m\omega^2 \eta \sin \omega t \\ &\quad - m\omega \frac{d\xi}{dt} \sin \omega t - m\omega \frac{d\eta}{dt} \cos \omega t, \end{aligned}$$

ou, en ayant égard aux relations [8] et [5],

$$\left. \begin{aligned} m \frac{du_e}{dt} &= X_e - m\omega v_r, \\ \text{On trouve de même} \\ m \frac{dv_e}{dt} &= Y_e + m\omega v_r, \\ m \frac{dw_e}{dt} &= Z_e = 0. \end{aligned} \right\} [12]$$

En substituant enfin, dans les équations [9], on obtiendra

$$\left. \begin{aligned} X &= X_r + X_e - 2m\omega v_r, \\ Y &= Y_r + Y_e + 2m\omega u_r, \\ Z &= Z_r; \end{aligned} \right\} [12]$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{aligned} X_r &= X - X_e + 2m\omega v_r, \\ Y_r &= Y - Y_e - 2m\omega u_r, \\ Z_r &= Z. \end{aligned} \right\} [13]$$

Ces équations montrent que la force F_r qui produirait le mouvement relatif est la résultante de trois forces : 1° de la force F réellement appliquée au point matériel; 2° d'une force dont les composantes sont $-X_e, -Y_e$ et néro , c'est-à-dire d'une force égale et opposée à celle qui produirait le mouvement d'entraînement; 3° d'une force qui a pour composantes $+2m\omega v_r, -2m\omega u_r$ et néro .

La force qui produirait le mouvement d'entraînement serait la FORCE CENTRIFÈTE (*Voy. ce mot*); une force égale et opposée n'est donc autre chose que la FORCE CENTRIFUGE. C'est aussi ce que montre le calcul.

D'après les équations [8], on a

$$F_e = \sqrt{X_e^2 + Y_e^2 + Z_e^2} = m\omega^2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = m\omega^2 \rho,$$

en appelant ρ la distance du point matériel considéré à l'axe de rotation. Cette force est perpendiculaire à l'axe des ζ , puisque $Z_e = 0$. De plus, si l'on appelle α l'angle que le rayon ρ fait avec l'axe des ξ , et ε celui que fait la force F_e avec l'axe des x , on a (*Voy. COMPOSITION DES FORCES*)

$$\tan \varepsilon = \frac{Y_e}{X_e} = \frac{\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t}{\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t} = \frac{\tan \omega t + \tan \alpha}{1 - \tan \omega t \tan \alpha}$$

ou $\tan \varepsilon = \tan(\omega t + \alpha),$

d'où

$$\varepsilon = \alpha + \omega t,$$

c'est-à-dire que cette force est dirigée suivant le

rayon ρ , lequel fait effectivement avec l'axe des x un angle égal à α augmenté de ωt . D'ailleurs la signe de Y_s suffit pour montrer que cette force agit de l'axe vers le point matériel : cette force n'est donc autre chose que la FORCE CENTRIFUGE. Désignons par φ la force qui a pour composante

$$+ 2m\omega v_r, - 2m\omega u_r \text{ et zéro.}$$

Cette force est perpendiculaire à l'axe de rotation, puisque sa composante parallèle à cet axe est nulle. Soient φ_x et φ_y les deux autres composantes, et β l'angle qu'elle fait avec l'axe des x ; on aura, comme plus haut,

$$\text{tang } \beta = \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = - \frac{2m\omega u_r}{2m\omega v_r} = - \frac{u_r}{v_r};$$

par conséquent, la force φ est perpendiculaire à la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et, par suite, au plan projetant, et enfin à la vitesse relative elle-même. Sa valeur est donnée par la relation $\varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 2m\omega \sqrt{v_r^2 + u_r^2} = 2m\omega V_r$, c'est-à-dire qu'elle a pour mesure le double produit de la masse du point matériel par la vitesse angulaire de rotation et par la vitesse relative. On voit, en outre, par les signes de ses composantes, qu'elle tend à s'opposer au mouvement de rotation; en sorte qu'on obtient sa direction en projetant la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et faisant tourner cette projection de 90 degrés en sens contraire de la vitesse de rotation ω .

Quelques personnes désignent cette seconde force fictive par le nom de *force centrifuge composée*, ou simplement de *force composée*.

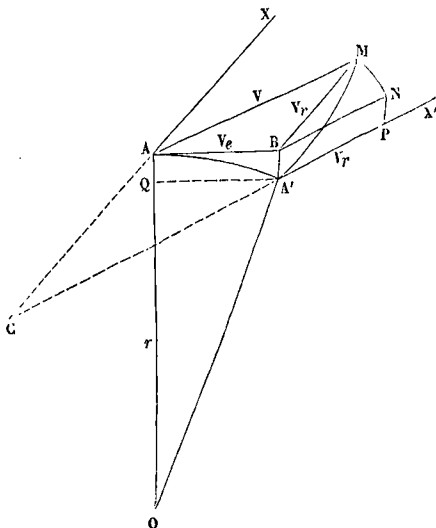
On peut remarquer que, pour obtenir sa direction, on peut décomposer préalablement la vitesse relative suivant deux directions quelconques situées avec elle dans un même plan, projeter ses composantes sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, faire tourner chacune des projections de 90 degrés en sens contraire de ω , et construire le parallélogramme sur ces composantes ainsi placées. Ce procédé est souvent utile dans l'application du théorème.

III. On peut, comme l'a fait M. Bélanger, démontrer géométriquement la proposition pour le cas particulier qui vient de nous occuper. Supposons d'abord que le mobile ne soit soumis à aucune force réelle. Soit O la projection de l'axe de rotation, supposé perpendiculaire au plan de la figure. Soit A la position initiale du point matériel considéré; au bout d'un temps θ infiniment petit, il sera venu occuper une certaine position M , en parcourant, avec la vitesse absolue V un arc infiniment petit, se confondant sensiblement avec sa corde $AM = V\theta$. Décomposons la vitesse absolue V en deux vitesses simultanées, dont l'une soit précisément la vitesse d'entraînement V_e ; l'autre composante sera la vitesse relative. La même décomposition peut s'appliquer aux chemins élémentaires décrits dans le temps θ avec ces vitesses. Si donc on prend sur la tangente en A , au cercle décrit du point O comme centre avec $OA = r$ pour rayon, une longueur AB égale à $\omega r \theta$, et qu'on joigne BM , cette droite sera parallèle à la vitesse relative V_r et sera égale à $V_r \theta$. Menons par le point A une parallèle AX à la droite BM ; ce sera la direction de V_r .

Mais pendant le temps θ , le point A , considéré comme entraîné avec le système tournant, serait venu en A' , en décrivant l'arc de cercle

$$AA' = \omega r \theta = AB.$$

Pour un observateur entraîné lui-même avec le système, et n'ayant pas conscience de sa rotation, la direction de la vitesse relative serait une droite $A'X'$ faisant avec OA' un angle égal à OAX , et le point matériel paraîtrait s'être transporté de A' en M , en décrivant un arc de courbe infiniment petit $A'M$. Et comme, pour cet observateur, la vitesse initiale



est V_r , suivant $A'X'$, et qu'en vertu de cette vitesse le mobile aurait parcouru dans le temps θ un espace

$$A'P = V_r \theta,$$

il paraîtra soumis, en outre, à une force capable de le transporter dans ce même temps θ du point P au point M . Menons BN égal et parallèle à $A'P$, joignons NP ; et, puisque

$$BN = A'P = V_r \theta = BM,$$

décrivons du point B avec BM pour rayon un arc de cercle, il passera par le point N . La force capable de transporter le mobile du point P au point M dans le temps θ peut être décomposée en deux autres : l'une φ_1 capable de faire décrire au mobile la droite PN , et l'autre φ_2 capable de lui faire parcourir simultanément l'arc MN , lequel peut être confondu avec sa corde. Pour déterminer les intensités de ces deux forces, il suffit de poser

$$PN = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1}{m} \theta^2 = A'B \quad \text{et} \quad MN = \frac{1}{2} \frac{\varphi_2}{m} \theta^2;$$

d'où

$$\varphi_1 = \frac{2m}{\theta^2} A'B \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{2m}{\theta^2} MN.$$

Or, AA' étant égal à AB , la droite $A'B$ diffère infiniment peu de sa projection AQ sur le rayon OA . On a d'ailleurs, en regardant AA' comme confondu avec sa corde,

$$AA'^2 = 2r \cdot AQ;$$

d'où

$$AQ = \frac{AA'^2}{2r} = \frac{\omega^2 r^2 \theta^2}{2r} = \frac{\omega^2 r \theta^2}{2};$$

par suite,

$$\varphi_1 = \frac{2m}{\rho^2} \cdot \frac{\omega^2 r^2 \theta}{2} = m\omega^2 r.$$

La force φ_1 , égale en valeur absolue à la force centripète, mais dirigée dans le sens de A' vers B, lequel diffère aussi peu qu'on voudra du prolongement de OA', n'est donc autre chose que la force centrifuge.

Maintenant, les droites BM et BN étant respectivement parallèles à AX et à A'X', l'angle MBN est égal à l'angle ACA' formé par les prolongements des droites AX et A'X'. Mais les angles OAX et OA'X' étant égaux, il en est de même de leurs suppléments OAC et OA'C; par conséquent les quatre points A', A, O, C sont sur une même circonférence de cercle, et, par suite, les angles en O et en C sont égaux. Il en résulte que les secteurs MBN et AOA' sont des secteurs semblables, et que l'on a la proportion

$$MN : AA' = BM : OA \quad \text{ou} \quad MN : \omega r \theta = V_r \theta : r;$$

d'où

$$MN = \omega V_r \theta^2,$$

et, par suite,

$$\varphi_2 = \frac{2m}{\rho^2} \omega V_r \theta^2 = 2m\omega V_r.$$

Cette force est dirigée de N vers M, c'est-à-dire perpendiculairement à BN ou à la vitesse relative. Elle est d'ailleurs dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation; ce qui est conforme à ce qui a été établi dans la démonstration analytique. On peut ajouter que cette force tend à s'opposer au mouvement de rotation.

Si le point matériel est soumis à une force F, il paraîtra, pour l'observateur entraîné dans le mouvement de rotation, soumis à cette force et, en outre, aux deux forces fictives dont il vient d'être question. On peut remarquer, en effet, que cette force F, qu'on peut toujours regarder comme constante en intensité pendant la durée infiniment petite θ , peut aussi être considérée comme constante en direction par rapport au système tournant pendant cette même durée; car le déplacement que subit le point matériel en vertu de cette force, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \frac{F}{m} \theta^2$, est infiniment petit par rapport au chemin que le point décrirait en vertu du mouvement d'entraînement, savoir, $\omega r \theta$.

Si le point matériel avait une vitesse initiale qui ne fût pas, comme on l'a supposé, dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe, on la décomposerait en deux autres : l'une parallèle à l'axe, l'autre perpendiculaire. On appliquerait à cette dernière le théorème qui vient d'être démontré. Quant au mouvement dû à la vitesse parallèle à l'axe, il serait vu par l'observateur tel qu'il a lieu réellement, et il n'exigerait l'introduction d'aucune force fictive nouvelle.

IV. Les deux cas que nous venons de traiter sont des deux cas *pratiques* auxquels on peut avoir l'occasion d'appliquer le théorème de Coriolis. On trouvera la démonstration générale de ce théorème dans le *Traité de la Mécanique des corps solides*, 1844, par G. Coriolis. Elle est trop étendue pour trouver place dans ce Dictionnaire.

Lorsqu'on applique le principe de l'effet du travail (*Voy. EFFET DU TRAVAIL*) au mouvement rela-

tif, comme on le fait, par exemple, dans la théorie des TURBINES (*Voy. ce mot*), il faut introduire parmi les forces qui sollicitent chaque point matériel les deux forces fictives ou *apparentes* que nous avons définies plus haut. Mais il est à remarquer que la seconde disparaît d'elle-même, attendu que, comme elle est perpendiculaire à la vitesse relative et, par conséquent, au chemin élémentaire que décrit le mobile dans le mouvement relatif, son travail élémentaire est constamment nul. Il ne reste que le travail de la force égale et opposée à celle qui produirait l'entraînement, c'est-à-dire, dans le cas où le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme, la force centrifuge. Son travail est alors égal à l'accroissement de puissance vive dû à la seule vitesse d'entraînement; en sorte que, si l'on désigne par V_0 la vitesse relative initiale, par V_r la vitesse relative finale, par F la résultante des forces qui sollicitent le point matériel considéré, et par V_e la vitesse d'entraînement qu'il aurait dans sa position finale, si, dans l'une ou l'autre de ces positions, il était tout à coup entraîné dans le mouvement de rotation, l'équation de l'effet du travail sera

$$\frac{1}{2} m V_r^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \int F ds + \frac{1}{2} m V_e^2 - \frac{1}{2} m V_0^2.$$

Les termes qui contiennent les vitesses d'entraînement disparaîtraient si le mobile restait à la même distance de l'axe de rotation, puisqu'on aurait alors

$$V_e = V_0.$$

THÉORÈME DE GULDIN, théorème relatif à la mesure de l'aire des surfaces de révolution, et des volumes compris sous ces surfaces. Il doit son nom au père Guldin, de l'ordre des Jésuites, qui l'a fait connaître dans son *Traité De cent'o gravitatis* publié à Vienne en 1635. Mais le théorème est beaucoup plus ancien; il est énoncé dans la préface du VII^e livre des *Collections mathématiques* de Pappus, l'un des derniers géomètres de l'école d'Alexandrie, écrites en grec vers la fin du quatrième siècle. La démonstration de Guldin est peu satisfaisante; depuis la découverte du calcul infinitésimal, on a démontré le théorème de plusieurs manières.

Le théorème de Guldin se compose en réalité de deux propositions que l'on peut énoncer de la manière suivante :

1° *L'aire de la surface engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe tracé dans son plan sans la couper, a pour mesure la longueur de la ligne génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité;*

2° *Le volume engendré par une figure plane qui tourne autour d'un axe tracé dans son plan sans la couper, a pour mesure l'aire de la figure génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

I. Soit AB (fig. 1) une courbe plane, dont nous représenterons la longueur par S; soit MM' = ds un élément de cette courbe. Soit OX l'axe autour duquel s'effectue la révolution, et soient x et y les coordonnées du point M par rapport à cet axe et à une perpendiculaire OY. La zone élémentaire décrite par l'élément MM' peut être considérée comme la surface d'un tronç de cône, dont la génératrice est ds, et dont les bases ont respectivement pour

rayons $MP=y$ et $M'P'=y+dy$; l'aire de cette zone a donc pour expression

$$ds \cdot \frac{1}{2} [2\pi y + 2\pi(y+dy)] \text{ ou } 2\pi y ds,$$

en négligeant dy vis-à-vis de y . En appelant U l'aire

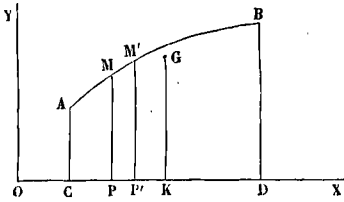


Fig. 1.

de la surface engendrée, et a et b les abscisses des extrémités A et B de l'arc générateur, on a donc

$$U = \int_a^b 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b y ds.$$

Mais si Y désigne l'ordonnée du centre de gravité G de l'arc générateur, on trouve en prenant les moments des éléments de cet arc par rapport à un plan mené suivant OX perpendiculairement au plan de la figure

$$SY = \int_a^b y ds.$$

Remplaçant cette intégrale par sa valeur dans l'expression de U , on obtient donc

$$U = 2\pi \cdot SY = S \cdot 2\pi Y,$$

ce qui revient à l'énoncé de la première proposition

S'il s'agit, par exemple, du *tore*, engendré par la révolution d'une circonférence de rayon r qui tourne autour d'un axe tracé dans son plan à une distance d de son centre, on aura

$$S = 2\pi r \text{ et } Y = d;$$

par suite $U = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 r d$.

II. Pour démontrer la seconde proposition, considérons d'abord un rectangle $ABCD$ (fig. 2) qui

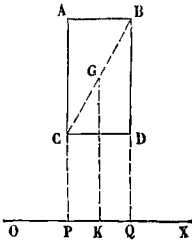


Fig. 2.

tourne autour d'un axe OX parallèle à l'un de ses côtés. Prolongeons les deux autres côtés jusqu'à la rencontre de l'axe aux points P et Q . Le volume annulaire v engendré par le rectangle proposé est la différence entre les volumes des deux cylindres engendrés par les rectangles $ABQP$ et $CDQP$; il a donc pour expression

$$v = \pi \cdot AP^2 \cdot AB - \pi \cdot CP^2 \cdot CD,$$

ou

$$v = \pi \cdot PQ (\overline{AP^2} - \overline{CP^2}) = \pi \cdot PQ (AP + CP) (AP - CP).$$

Or, si G est le centre de gravité du rectangle, la distance GK de ce centre à l'axe est la moyenne arithmétique entre BQ et CP , ou entre AP et CP , on a donc $AP + CP = 2GK$, et par conséquent

$$v = \pi \cdot PQ \cdot 2GK \cdot AC = AC \cdot PQ \cdot 2\pi GK;$$

or, $AC \cdot PQ$ représente l'aire du rectangle proposé; on peut donc écrire

$$v = ABDC \cdot 2\pi GK,$$

ce qui revient à l'énoncé de la seconde proposition pour le cas particulier qui nous occupe.

Considérons maintenant une figure plane quelconque (fig. 3), tournant autour d'un axe OX tracé

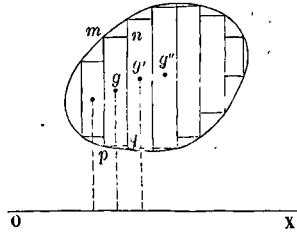


Fig. 3.

dans son plan sans la couper. On peut décomposer cette figure, par des perpendiculaires et des parallèles à l'axe, en rectangles tels que $mnpq$; ou plutôt on peut y inscrire une suite de rectangles analogues dont la somme a pour limite l'aire Ω de la figure proposée lorsque les distances entre les perpendiculaires à l'axe tendent vers zéro. Soit ω l'aire d'un de ces rectangles élémentaires, et y la distance de son centre de gravité g à l'axe; on aura pour l'expression du volume V engendré la somme des volumes qu'engendrent séparément ces rectangles; c'est-à-dire que l'on aura

$$V = \Sigma \omega \cdot 2\pi y = 2\pi \Sigma \omega y,$$

d'après ce qui a été démontré ci-dessus. Mais si Y désigne la distance du centre de gravité de la figure génératrice à l'axe, on a en prenant les moments des rectangles élémentaires par rapport à un plan mené suivant l'axe perpendiculairement au plan de la figure

$$\Omega Y = \Sigma \omega y.$$

Remplaçant $\Sigma \omega y$ par sa valeur dans l'expression de V , on obtient donc

$$V = 2\pi \cdot \Omega \cdot Y = \Omega \cdot 2\pi Y,$$

ce qui revient à l'énoncé de la deuxième proposition.

Pour le *tore*, on trouverait par exemple

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 \cdot r^2 d.$$

III. On peut donner au théorème de Guldin une extension qui trouve son utilité dans les applications. Si la ligne ou la figure génératrice, au lieu de faire une révolution entière autour de l'axe, ne faisait qu'une fraction de tour, l'aire ou le volume décrits seraient la même fraction de l'aire ou du volume correspondants à une révolution entière. En sorte que si α est l'arc décrit par un point supposé placé à l'unité de distance de l'axe, on aura, dans le cas de la première proposition,

$$U_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot S \cdot 2\pi Y = S \cdot \alpha Y,$$

c'est-à-dire que l'aire engendrée est le produit de la

ligne génératrice par l'arc αY que décrit son centre de gravité. Dans le cas de la deuxième proposition, on aurait de même

$$V_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \Omega \cdot 2\pi Y = \Omega \cdot \alpha Y,$$

c'est-à dire que le volume engendré est le produit de l'aire de la figure génératrice par l'arc que décrit son centre de gravité.

Ces résultats subsistent encore lorsque la ligne ou la figure génératrice ne tourne que d'une quantité infiniment petite. Par conséquent, si l'on suppose que cette ligne ou cette figure tourne successivement de quantités infiniment petites autour d'une série d'axes infiniment voisins, on pourra dire que l'aire ou le volume engendrés équivalent au produit de la ligne ou de l'aire génératrice par le chemin que décrit son centre de gravité.

Cette proposition très-générale trouve son application dans le calcul des DÉBLAIS (Voy. ce mot) auquel donne lieu la construction d'un canal à section constante. On peut imaginer que cette section se meut en restant verticale, et normale à une certaine ligne horizontale droite ou courbe, qui la perce toujours au même point, tous ses autres points décrivant simultanément des lignes horizontales. Son mouvement se compose alors d'une série continue de translations ou de rotations instantanées (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ) autour d'autant d'axes verticaux successifs. Par conséquent le volume du déblai, au-dessous du plan horizontal du terrain que l'on creuse, est égal à l'aire de la section constante du canal multipliée par la ligne horizontale que décrit le centre de gravité.

La même proposition s'applique à l'évaluation du volume du LIMON ou de l'ÉCHIFFRÉ d'un escalier (Voy. ces mots). Ici la figure génératrice reste normale à une courbe hélicoïde qui la perce constamment au même point; et l'on peut se représenter son mouvement comme composé d'une série de rotations instantanées dont chacune s'exécute autour d'un axe mené par le centre de courbure de la ligne directrice perpendiculairement au plan osculateur. Le volume décrit est donc encore égal à la section normale multipliée par la ligne que décrit son centre de gravité.

THÉORÈME DE LEGENDRE, théorème qui permet de ramener le calcul d'un triangle sphérique très-peu courbe à celui d'un triangle rectiligne ayant des côtés de même longueur que ceux du triangle sphérique. Il consiste en ce que les angles du triangle rectiligne s'obtiennent en retranchant de chacun des angles du triangle sphérique le tiers de l'excès sphérique (Voy. ce mot). Soient, en effet, a, b, c les côtés du triangle sphérique tracé sur une sphère dont le rayon est r ; soient A, B, C les angles opposés. Sur la sphère dont le rayon est 1 le triangle sphérique semblable au triangle proposé aura pour côtés les quotients $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$, que

nous désignerons par α, β, γ ; et la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donnera

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Développant, dans le second membre, les sinus et cosinus en fonction des arcs, et s'arrêtant aux termes du quatrième ordre, ce qui est permis, at-

tendu que les côtés a, b, c sont supposés très-petits par rapport au rayon r , on obtient

$$\cos A = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right)}{\left(\beta - \frac{\beta^3}{6}\right) \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6}\right)}$$

ou, en effectuant, et négligeant toujours les puissances supérieures à la quatrième,

$$\cos A = \frac{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24}}{\beta\gamma \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)}.$$

Multipliant, haut et bas, par

$$1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6},$$

on obtient

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma}$$

ou, en remettant pour α, β, γ leurs valeurs en a, b, c et r

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bc \cdot r^2}.$$

Maintenant si A' désigne l'angle qui correspond à A dans le triangle rectiligne, on a

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

et

$$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}$$

Il en résulte

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc \sin^2 A'}{6r^2}.$$

D'un autre côté, si l'on pose $A - A' = x$, quantité toujours très-petite, on pourra écrire

$$\cos A = \cos(A' + x) = \cos A' - x \sin A',$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{bc \sin A'}{6r^2}.$$

Mais si S désigne l'aire du triangle rectiligne,

$$\text{on a } S = \frac{bc \sin A'}{2},$$

$$\text{par conséquent } x = \frac{S}{3r^2}.$$

Ainsi on obtient

$$A = A' + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{r^2}.$$

On obtiendrait de même

$$B = B' + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{r^2} \quad \text{et} \quad C = C' + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{r^2}.$$

Ajoutant membre à membre, on trouve

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{S}{r^2}.$$

Ainsi, en appelant ϵ l'excès sphérique, il vient

$$\epsilon = \frac{S}{r^2},$$

et l'on peut écrire

$$A = A' + \frac{1}{3} \epsilon, \quad B = B' + \frac{1}{3} \epsilon, \quad C = C' + \frac{1}{3} \epsilon,$$

ou

$$A' = A - \frac{1}{3} \epsilon, \quad B' = B - \frac{1}{3} \epsilon, \quad C' = C - \frac{1}{3} \epsilon,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On peut remarquer ensuite que si T désigne l'aire du triangle sphérique, on a aussi

$$\epsilon = \frac{T}{r^2}$$

(Voy. EXCÈS SPHÉRIQUE). Il en résulte $S=T$, c'est-à-dire que la surface du triangle rectiligne équivaut à celle du triangle sphérique.

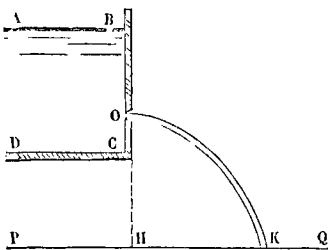
Pour donner une idée de l'approximation fournie par le Théorème de Legendre, on cite ordinairement les résultats du calcul de M. Puissant sur l'un des plus grands triangles mesurés en Espagne par MM. Biot et Arago. L'un des côtés de ce triangle, calculé par les formules de la Trigonométrie sphérique, a été trouvé égal à 82555^T, 64 ; le même côté, calculé par les formules de la Trigonométrie rectiligne, mais après avoir corrigé les angles de l'excès sphérique, a été trouvé de 82555^T, 62.

Cependant, dans les triangulations, on peut avoir à satisfaire à d'autres conditions : il faut, par exemple, que la somme des angles formés autour d'un point soit de 360° ; c'est ce qu'on appelle la condition relative au *tour d'horizon*. Pour concilier les conditions diverses auxquelles les angles doivent satisfaire, il est nécessaire de recourir à la méthode des *moindres carrés* (Voy. Théorie des ERREURS, MOINDRES CARRÉS).

THÉORÈME DE M. CHASLES, théorème relatif au mouvement d'une figure plane dans son plan. Il consiste en ce que si une figure plane se déplace d'une manière quelconque dans son plan, on peut toujours l'amener de la position initiale à la position finale par une rotation autour d'un point de ce plan (Voy. MOUVEMENT INSTANTANÉ). On le nomme aussi *Théorème de MM. Bobillier et Chasles*. La démonstration donnée à l'article cité pour un déplacement élémentaire s'applique sans modification à un mouvement fini.

THÉORÈME DE TORRICELLI, théorème relatif à l'écoulement d'un liquide par un orifice percé en mince paroi. Il consiste en ce que chaque molécule liquide possède au sortir de l'orifice la vitesse qu'elle aurait acquise en tombant verticalement dans le vide d'une hauteur égale à la distance du niveau supérieur du liquide au-dessus du centre de cet orifice.

Ce théorème se démontre expérimentalement en observant la parabole décrite par la veine fluide. Soit O l'orifice, AB le niveau supérieur du liquide



dans le vase d'où il s'écoule, PQ un plan horizontal situé au-dessous du point O. On observe la distance HK à laquelle la veine vient rencontrer le plan PQ, en avant de la verticale OH ; on mesure cette verticale. La paroi BC étant supposée verticale, le liquide s'échappe normalement à cette paroi, c'est-à-dire horizontalement ; le point O est donc le sommet de la parabole ; on a déterminé le point K ; la courbe est donc elle-même déterminée. Or on sait (Voy. MOUVEMENT DES PROJECTILES)

que l'équation de cette courbe s'obtient en éliminant le temps t entre les deux équations

$$x = v_0 t \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

v_0 représentant la vitesse en O ; ce qui donne

$$y = \frac{g x^2}{2 v_0^2},$$

d'où

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{x^2}{4y}.$$

On a donc en particulier

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{HK^2}{4.OH}$$

et, en effectuant le calcul, on obtient à très-peu de chose près la hauteur OB du niveau supérieur AB au-dessus du centre de l'orifice.

Mais le théorème de Torricelli peut aussi se démontrer théoriquement, car c'est un cas particulier du THÉORÈME DE D. BERNOULLI (Voy. ce mot). En vertu de ce théorème, la hauteur due à la vitesse, la hauteur due à la pression, et la hauteur au-dessus d'un plan horizontal fixe forment une somme constante pour chaque section, la hauteur au-dessus du plan horizontal étant comptée du centre de gravité de cette section. Prenons pour plan horizontal de comparaison celui qui passe par le centre de gravité de l'orifice ; et appliquons le théorème à l'orifice lui-même et à la section représentée par le niveau supérieur AB. Pour l'orifice,

la hauteur due à la vitesse sera $\frac{v^2}{2g}$, en appelant v cette vitesse ; la pression en ce point n'est autre que la pression atmosphérique (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE), que nous désignerons par \mathcal{P}_0 ; la hauteur au-dessus du plan de comparaison est nulle. Pour la section supérieure, comme elle est ordinairement très-grande par rapport à l'orifice, la vitesse y est insensible et peut être négligée : la pression y est égale à \mathcal{P}_0 ; la hauteur au-dessus du plan horizontal de comparaison est OB, que nous désignerons par h . Nous aurons ainsi

$$\frac{v^2}{2g} + \mathcal{P}_0 + 0 = + \mathcal{P}_0 + h,$$

d'où

$$\frac{v^2}{2g} = h \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gh}, \quad [1]$$

ce qui démontre le théorème, quelle que soit la direction de l'orifice.

Mais ce théorème est fondé sur les mêmes hypothèses que le théorème de Bernoulli : il faut que le mouvement puisse être considéré comme permanent, ce qui exige que le niveau AB demeure à peu près constant ; il faut qu'on puisse négliger les frottements, ce qui exige que les mouvements dans le vase soient très-lents, et que par conséquent la section supérieure AB soit très-grande par rapport à l'orifice ; il faut en outre que, depuis le niveau supérieur jusqu'à l'orifice, la section du vase varie d'une manière continue et sans changements brusques.

Lorsqu'on veut, à l'aide du théorème de Torricelli, évaluer la *dépense*, c'est-à-dire le volume de liquide qui s'écoule par l'orifice dans l'unité de temps, il faut avoir égard au phénomène que l'on désigne sous le nom de **CONTRACTION DE LA VEINE** (Voy. ce mot), et qui consiste en ce que les filets

liquides qui affluent à l'orifice s'y présentant dans des directions diverses sont obligés de s'infléchir et ne deviennent parallèles qu'à une certaine distance de l'orifice où la contraction est parvenue à son maximum. La section faite en ce point porte le nom de *section contractée*; c'est une fraction de l'aire de l'orifice; si cette dernière est représentée par ω , la section contractée est représentée par $m\omega$, m désignant un coefficient, qui porte le nom de *coefficient de contraction* et qui pour l'eau peut être pris égal en moyenne à 0,62 dans les circonstances ordinaires. Le volume déposé par seconde représente un prisme ayant pour base la section contractée, et pour hauteur la vitesse du liquide dans cette section, laquelle est sensiblement la même que dans l'orifice. En appelant Q la dépense on a donc

$$Q = m\omega \cdot v$$

ou, en vertu du théorème de Torricelli,

$$Q = m\omega \sqrt{2gh}, \quad [2]$$

h désignant la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de gravité de l'orifice.

Si, par exemple, l'orifice est un cercle de 0^m,05 de diamètre, et que la hauteur h soit de 1^m,50, ou aura, en adoptant pour m la valeur 0,62,

$$Q = 0,62 \cdot 3,1416 \cdot (0,025)^2 \sqrt{2 \cdot 9,8088 \cdot 1^m,50},$$

ce qui donne

$$Q = 0^m,0066042$$

ou environ

$$6^{11},6.$$

Il faudrait modifier la formule qui donne la vitesse d'écoulement, et par suite celle qui donne la dépense, si les pressions en AB et en O étaient différentes. Si \mathcal{P} est la pression en AB et \mathcal{P}' la pression extérieure, à l'orifice, le théorème de Bernoulli donnera

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{\mathcal{P}'}{\Pi} + 0 = 0 + \frac{\mathcal{P}}{\Pi} + h,$$

Π désignant le poids du mètre cube du fluide considéré. On tire de là

$$v = \sqrt{2g \cdot \left(h + \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}'}{\Pi} \right)} \quad [3]$$

et par suite

$$Q = m\omega \sqrt{2g \left(h + \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}'}{\Pi} \right)}. \quad [4]$$

Les anciens auteurs, n'ayant point égard à la contraction de la veine, mettaient ω à la place de $m\omega$ dans les formules [2] et [4]; la dépense ainsi calculée s'appelait la *dépense théorique*; et pour la ramener à la dépense réelle on l'affectait du coefficient m , qui portait alors le nom de *coefficient de dépense*. En définitive le résultat était donc le même; mais le coefficient doit en réalité affecter la section, et le nom de dépense théorique doit être banni du langage.

THÉOREME DE VARIGNON, théorème qui établit une relation entre deux forces appliquées à un même point matériel, leur résultante, et les distances de ces forces à un même point pris dans le plan qui les contient. Pour énoncer commodément ce théorème, et comprendre tous les cas dans un même énoncé, on a adopté les conventions suivantes. On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de cette force par sa distance à ce point. La perpendiculaire qui mesure cette

distance se nomme le *bras de levier* de la force. Le moment est regardé comme positif, quand la force tend à faire tourner son bras de levier autour du point fixe dans un sens déterminé; il est regardé comme négatif, quand la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens contraire.

Cela posé, le théorème de Varignon est celui-ci: *Si deux forces P et Q (fig. 1) sont appliquées à un*

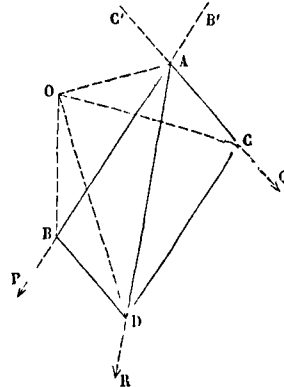


Fig. 1.

même point, la somme algébrique de leurs moments, par rapport à un point pris dans leur plan, est égale au moment de leur résultante R. Soient, en effet, AB, AC, AD les droites qui représentent les forces P, Q et leur résultante R; achevons le parallélogramme ABCD. Soit O un point quelconque pris dans le plan des forces; joignons OA, OB, OC, OD. D'après le théorème fondamental des projections, la projection de la diagonale AD sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des côtés consécutifs AC et CD sur le même axe; et, comme la projection de CD est égale à celle de AB, on peut dire que la projection de la diagonale AD est égale à la somme algébrique des projections de AB et de AC sur le même axe. Si l'on prend pour axe de projection une perpendiculaire à OA, les projections de AD, de AB, de AC ne seront autre chose, en grandeur absolue, que les hauteurs respectives des triangles OAD, OAB, OAC, qui ont pour base commune OA. Il y aura donc entre les surfaces de ces triangles la même relation algébrique qu'entre leurs hauteurs, c'est-à-dire qu'on aura

$$OAD = OAB + OAC,$$

le signe + indiquant une addition algébrique. Mais on peut prendre pour bases de ces triangles les droites AD, AB, AC, leurs hauteurs étant alors les distances de ces droites au point O, distances qui sont les bras de levier des forces R, P et Q, et que nous nommerons respectivement r , p et q . On pourra donc écrire

$$\frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{1}{2} AB \cdot p + \frac{1}{2} AC \cdot q$$

ou, en supprimant le facteur $\frac{1}{2}$, et remplaçant les longueurs AD, AB, AC par les forces qu'elles représentent et qui leur sont proportionnelles,

$$Rr = Pp + Qq,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On s'assurera facilement que les moments de P et de Q sont de même signe quand le point O est situé dans l'angle BAC' ou dans son opposé par le sommet, et qu'ils sont de signe contraire quand le point O est dans l'angle BAC ou dans son opposé. Mais le théorème sur les projections subsistant toujours, il en est de même du théorème des moments, pourvu qu'on entende par la somme de ces moments une somme algébrique.

Si le point O était situé sur AD, r serait nul; la somme algébrique des moments des forces P et Q par rapport à ce point serait donc égale à zéro; c'est-à-dire que, par rapport à un point quelconque pris sur la direction de la résultante, les moments des deux composantes sont égaux et de signe contraire. Cette proposition peut être établie directement de la manière suivante: soient AB et AC (fig. 2) les droites qui représentent deux forces P

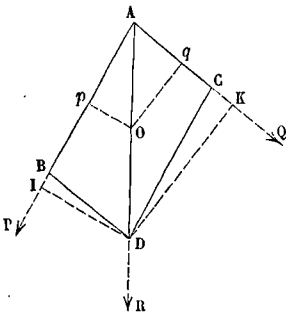


Fig. 2.

et Q appliquées à un même point A; soit AD la diagonale du parallélogramme ABCD construit sur AB et AC, laquelle représentera la résultante R. D'un point O pris sur la direction de la force R abaissons sur les directions AB et AC les perpendiculaires Op et Oq; abaissons du point D sur ces mêmes directions les perpendiculaires DI et DK. Par des similitudes évidentes, on aura

$$Op:DI = AO:AD = Oq:DK,$$

d'où l'on déduit

$$Op:Oq = DI:DK. \quad [2]$$

Mais les triangles ABD et ACD étant égaux comme moitiés d'un même parallélogramme, on a

$$\frac{1}{2} AB \cdot DI = \frac{1}{2} AC \cdot DK,$$

d'où

$$DI:DK = AC:AB = Q:P. \quad [3]$$

En comparant les proportions [2] et [3], il vient donc

$$Op:Oq = Q:P,$$

d'où

$$P \cdot Op = Q \cdot Oq,$$

c'est-à-dire que les moments des forces P et Q par rapport au point O sont égaux en valeur absolue; d'ailleurs ils sont évidemment de signes contraires, puisque les forces P et Q tendent à faire tourner en sens contraire les perpendiculaires Op et Oq; la proposition se trouve donc démontrée.

Le théorème de Varignon s'étend aisément à un nombre quelconque de forces F, F', F'', F''', ... F⁽ⁿ⁾ situées dans un même plan et appliquées à un même point. Soit, en effet, r la résultante des forces F et F'; r' la résultante de r et de F''; r'' la

résultante de r' et de F''', et ainsi de suite; enfin R la résultante de r⁽ⁿ⁻²⁾ et de F⁽ⁿ⁾, laquelle sera la résultante totale; on aura successivement:

$$\text{mom. } r = \text{mom. } F + \text{mom. } F',$$

$$\text{mom. } r' = \text{mom. } r + \text{mom. } F'',$$

$$\text{mom. } r'' = \text{mom. } r' + \text{mom. } F''',$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{mom. } R = \text{mom. } r^{(n-2)} + \text{mom. } F^{(n)}.$$

Ajoutant membre à membre, et supprimant ensuite les termes communs aux deux membres, on obtient

$$\text{mom. } R = \text{mom. } F + \text{mom. } F' + \text{mom. } F''$$

$$+ \text{mom. } F''' \dots + \text{mom. } F^{(n)},$$

c'est-à-dire que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Enfin on étend encore le théorème de Varignon aux projections sur un même plan d'un système de forces concourantes. En effet, soient d'abord deux forces P' et Q' appliquées en un même point A' de l'espace. Désignons par A'B', A'C' et A'D' les droites qui représentent les forces P'Q' et leur résultante R'. Projétons ces forces sur un plan quelconque, qui sera, par exemple, celui de la figure 1. Le parallélogramme A'B'C'D' se projettera suivant un autre parallélogramme ABCD. Prenons un point quelconque O situé dans le plan de cette projection, et par ce point O concevons qu'on élève une perpendiculaire au plan ABCD; elle rencontrera en un point O' le plan du parallélogramme A'B'C'D'. Et si l'on imagine qu'on ait joint O'A', O'B', O'C', O'D', on aura en vertu du théorème de Varignon,

$$O'A'D' = O'A'B' + O'A'C',$$

le signe + indiquant toujours une addition algébrique. Mais les triangles OAD, OAB, OAC sont respectivement égaux aux triangles O'A'D', O'A'B', O'A'C' multipliés par un même facteur, qui est le cosinus de l'angle formé par les plans des deux parallélogrammes. On a donc

$$OAD = OAB + OAC,$$

ce qui démontre le théorème de Varignon pour les forces représentées par les droites AB, AC, AD, c'est-à-dire pour les projections des forces P', Q' et R'.

Le théorème étant établi pour deux forces, on l'étendrait comme ci-dessus à autant de forces concourantes qu'on voudrait projetées sur un même plan.

Le théorème de Varignon peut encore être étendu aux forces parallèles situées dans un même plan. Considérons d'abord deux forces parallèles et de

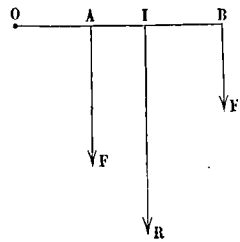


Fig. 3.

même sens F et F' (fig. 3) et leur résultante R. Si d'un point quelconque O, pris dans le plan de ces forces, on abaisse sur la direction de ces forces une

perpendiculaire OB, on pourra supposer les forces appliquées aux points A, B, I, où la perpendiculaire les rencontre. Cela posé, d'après la composition des forces parallèles (Voy. COMPOSITION DES FORCES), on a

$$F \cdot AI = F' \cdot BI$$

ou

$$F(OI - OA) = F'(OB - OI),$$

relation que l'on peut écrire

$$(F + F') \cdot OI = F \cdot OA + F' \cdot OB$$

ou

$$R \cdot OI = F \cdot OA + F' \cdot OB$$

et qui exprime que le moment de la résultante est la somme des moments des composantes. Ce résultat subsisterait quelle que soit la position du point O.

Considérons en second lieu deux forces parallèles et de sens contraire; F et F' (fig. 4) et leur

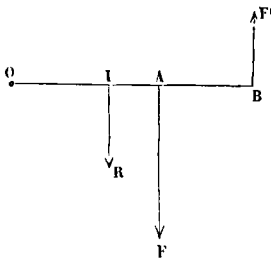


Fig. 4.

résultante R; et soit OB la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du plan de ces forces sur leur direction commune. On aura

$$F \cdot AI = F' \cdot BI$$

ou

$$F(OA - OI) = F'(OB - OI),$$

relation que l'on peut écrire

$$(F - F') \cdot OI = F \cdot OA - F' \cdot OB$$

ou

$$R \cdot OI = F \cdot OA - F' \cdot OB$$

et qui exprime encore que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes. Le résultat ne dépend pas de la position du point O.

Si les composantes F et F' étaient égales et de sens contraire, il n'y aurait plus de résultante et la proposition n'aurait plus lieu. Mais on aurait, en prenant le sens de F' pour le sens positif des moments,

$$F' \cdot OB - F \cdot OA = F(OB - OA) = F \cdot AB,$$

c'est-à-dire que le moment d'un couple, ou la somme des moments des deux forces qui le constituent, par rapport à un point quelconque de son plan est constant, et égal au produit de l'une des forces par la distance des deux forces. Cette proposition trouve fréquemment son application, et particulièrement dans la résistance des matériaux (Voy. FLEXION PLANE).

Le théorème de Varignon étant démontré pour deux forces parallèles quelconques, on l'étendrait sans peine, par des compositions successives, à autant de forces parallèles qu'on voudrait, pourvu qu'elles fussent situées dans un même plan (Voy. MOMENTS).

THÉORÈMES DE GALILÉE, nom sous lequel on

désigne deux propriétés du mouvement descend d'un point matériel pesant sur un plan incliné.

1. La première consiste en ce que si un mobile, parti sans vitesse initiale d'un certain point B (fig. 1), parcourt successivement sous l'action de la

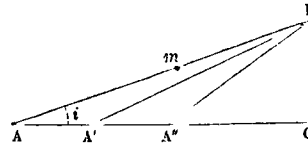


Fig. 1.

pesanteur divers plans inclinés, dont les lignes de plus grande pente, représentées par BA, BA', BA'', etc., sont terminées à la même horizontale AC, il arrivera, dans chaque cas, au bas du plan avec la même vitesse. Ce théorème pourrait se déduire du théorème de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot), attendu que dans les différents cas le travail de la pesanteur est toujours le même, savoir

$$p \cdot BC,$$

en appelant p le poids du mobile, et que par conséquent l'accroissement de puissance vive est la même, c'est-à-dire que la vitesse finale est la même. Mais on peut aussi le déduire des équations du mouvement. L'accélération a pour valeur

$$j = g \sin i,$$

en appelant i l'inclinaison du plan (Voy. PLAN INCLINÉ); les équations du mouvement sont donc

$$v = g \sin i \cdot t \text{ et } e = \frac{1}{2} g \sin i \cdot t^2, \quad [1]$$

d'où l'on tire en éliminant le temps t

$$v = \sqrt{2g e \sin i} = \sqrt{2g \cdot AB \cdot \sin i}.$$

Or, dans le triangle ABC, on a

$$AB \sin i = BC;$$

il vient donc

$$v = \sqrt{2g \cdot BC},$$

expression indépendante de l'inclinaison i, et qui par conséquent s'applique à tous les plans tels que BA', BA'', etc.; et même à la verticale BC.

Le second théorème est celui-ci : Si sur une verticale quelconque BD (fig. 2) on décrit une demi-cir-

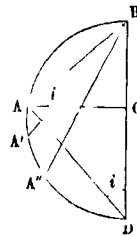


Fig. 2.

conférence, et qu'on tire diverses cordes partant du point B, telles que BA, BA', BA'', etc., qui peuvent représenter les lignes de plus grande pente d'autant de plans inclinés, un mobile, parti du point B sans vitesse initiale, emploiera le même temps à parcourir sous l'action de la pesanteur l'une quelconque de ces cordes. En effet, par la deuxième équation [1] on a

$$AB = \frac{1}{2} g \sin i \cdot t^2,$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\frac{2 AB}{g \sin i}}$$

Or, si l'on joint AD, qui fera avec la verticale BD un angle égal à i , on aura dans le triangle BA

$$AB = BD \sin ADB = BD \sin i,$$

d'où

$$\frac{AB}{\sin i} = BD,$$

par suite

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot BD}{g}},$$

valeur indépendante de l'inclinaison de la corde, et qui, par conséquent, convient à toutes les cordes telles que BA, BA', BA'', etc., et même à la verticale BD.

II. Ces théorèmes subsistent avec une légère modification quand on a égard au frottement. Dans le premier cas, au lieu d'arrêter les plans inclinés à une même horizontale, on les arrête à une droite

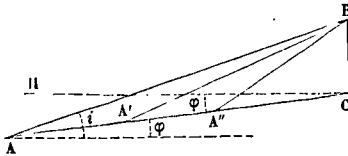


Fig. 3.

C (fig. 3) faisant avec l'horizon un angle égal à l'angle φ du frottement. On a toujours

$$v = \sqrt{2 j \cdot AB}.$$

Mais ici

$$j = g \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi},$$

il vient donc

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{AB \sin(i - \varphi)}{\cos \varphi}}$$

Or, dans le triangle ABC on a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin ACB}{\sin BAC} = \frac{\sin(90^\circ + \varphi)}{\sin(i - \varphi)}$$

En mettant pour AB sa valeur tirée de cette relation, on obtient donc

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot BC \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin(i - \varphi)}} = \sqrt{2g \cdot BC},$$

quantité indépendante de l'inclinaison i , et qui convient par conséquent à tous les plans terminés à la droite AC.

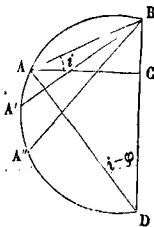


Fig. 4.

Dans le second cas, on décrit sur la verticale BD (fig. 4) un segment capable de $90^\circ + \varphi$.

On a toujours

$$e = \frac{1}{2} j^2,$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2e}{j}} = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{j}}$$

Dans ce cas

$$j = g \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi},$$

il vient donc

$$t = \sqrt{\frac{2 AB \cos \varphi}{g \sin(i - \varphi)}}.$$

Or, si l'on joint AD, on a, dans le triangle ABD, l'angle

$$ABD = 90^\circ - i;$$

par suite l'angle

$$ADB = 180^\circ - (90^\circ + \varphi) - (90^\circ - i) = i - \varphi.$$

Par conséquent

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin ADB}{\sin BAD} = \frac{\sin(i - \varphi)}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi}$$

et, en mettant pour AB sa valeur tirée de cette relation,

$$t = \sqrt{\frac{2 \cos \varphi}{g \sin(i - \varphi)} \cdot BD \cdot \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos \varphi}} = \sqrt{\frac{2 BD}{g}},$$

valeur indépendante de l'inclinaison de la corde, et qui par conséquent convient à tous les plans inclinés tels que BA, BA', BA'', etc., et même à la verticale BD.

THÉORIE THERMODYNAMIQUE, théorie de la transformation de la chaleur en travail et réciproquement (*Voy. ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR*).

THERMIDOR, le onzième mois du calendrier républicain. Il correspondait à peu près à l'intervalle compris entre le 19 juillet et le 19 août (*Voy. CALENDRIER*).

TIGES, pièces prismatiques, dont la section transversale est ordinairement faible par rapport à leur longueur, et qui servent, dans les machines, à transmettre le mouvement rectiligne alternatif. Les dimensions transversales d'une tige se déterminent d'après l'effort qu'elle doit transmettre. Soit F cet effort, Ω l'aire de la section, et R la tension ou la pression par unité de surface qu'il convient de ne pas dépasser; on devra avoir

$$F = \Omega R.$$

Prenons pour premier exemple la tige du piston d'une pompe aspirante et foulante. Soit \mathcal{P}_0 la pression atmosphérique par unité de surface, h la hauteur du niveau supérieur au-dessus du piston, et h' la hauteur du piston au-dessus du niveau inférieur. Le piston reçoit de haut en bas une pression exprimée par

$$\mathcal{P}_0 + \Pi h$$

par unité superficielle, Π désignant le poids du mètre cube d'eau; et il reçoit de bas en haut une pression représentée par

$$\mathcal{P}_0 - \Pi h';$$

la pression effective qu'il supporte est la différence de ces deux pressions, c'est-à-dire

$$\Pi(h + h')$$

ou à très-peu près ΠH , en nommant H la différence de niveau des deux biefs.

Soit $H = 21^m$, $A = 0^m,04$,

A désignant l'aire du piston, on aura

$$F = 1000^k \cdot 21 \cdot 0,04 = 840^k.$$

Supposons la tige en fer; on prend pour ce métal

$$R = 6000000^k$$

lorsqu'il s'agit d'une pression ou d'une tension permanente; mais dans le cas du mouvement alternatif, et pour tenir compte des vibrations et des chocs, on réduit ce coefficient à moitié ou au tiers; nous prendrons

$$R = 2500000.$$

Il viendra donc

$$840 = 2500000 \cdot \Omega,$$

d'où

$$\Omega = 0^m,000336$$

Si la section est circulaire et que x représente son diamètre, on aura

$$\frac{1}{4} \pi x^2 = \Omega,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{4 \Omega}{\pi}} = 0^m,02068$$

ou environ

$$0^m,021.$$

Prenons pour second exemple la tige du piston d'une machine à vapeur à haute pression et à condensation. Supposons que l'aire du piston soit $0^m,25$ et que la machine marche à 4 atmosphères $\frac{1}{2}$; comme il faut en déduire $\frac{1}{3}$ d'atmosphère environ pour la pression en sens contraire provenant du condenseur, il reste $4 \frac{1}{6}$ d'atmosphère, c'est-à-dire par mètre carré

$$10334 \cdot 4 \frac{1}{6} \text{ ou } 43058^k,3;$$

et par conséquent sur la surface du piston

$$43058^k,3 \cdot 0,25 \text{ ou } 10764^k,6.$$

En appelant x le diamètre de la tige, que nous supposons également en fer, nous aurons

$$10764,6 = \frac{1}{4} \pi x^2 \cdot 2500000,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{10764,6 \cdot 4}{2500000 \cdot \pi}}$$

ou

$$x = 0^m,074.$$

Lorsque la tige est horizontale, il faut tenir compte de sa flexion, surtout si elle a une grande longueur. On applique la formule de la FLEXION PLANE (Voy. ce mot)

$$R = \frac{v \mu}{I} + \frac{T}{\Omega},$$

Ici

$$v = \frac{x}{2}, \quad I = \frac{\pi x^4}{64};$$

donc

$$\frac{v}{I} = \frac{32}{\pi x^3};$$

d'ailleurs le moment fléchissant μ , qui est maximum au milieu de la longueur l de la tige, a pour expression

$$\mu = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \pi x^2 \cdot \Pi l^2,$$

en appelant Π le poids du mètre cube du métal; on a enfin

$$\Omega = \frac{1}{4} \pi x^2;$$

il vient donc

$$R = \frac{\Pi l^2}{x} + \frac{4T}{\pi x^2},$$

équation du second degré d'où l'on tirera x . Dans l'exemple précédent, si l'on suppose

$$l = 3^m,20,$$

comme on a

$$\Pi = 7788^k,$$

il viendra

$$2500000 = \frac{79749,12}{x} + \frac{13705,7}{x^2},$$

d'où l'on tire

$$x = 0^m,0917.$$

TIRAGE DES VOITURES, calcul de la force mouvante qu'il faut appliquer aux voitures pour entretenir leur mouvement uniforme. La théorie du tirage des voitures est une application des principes admis sur la RÉSISTANCE AU ROULEMENT (Voy. ce mot).

I. Nous considérerons d'abord le cas d'une voiture à deux roues; et nous supposons en premier lieu que l'essieu soit fixe, ce qui est le cas le plus ordinaire. Soit O (fig. 1) le centre de l'une des deux

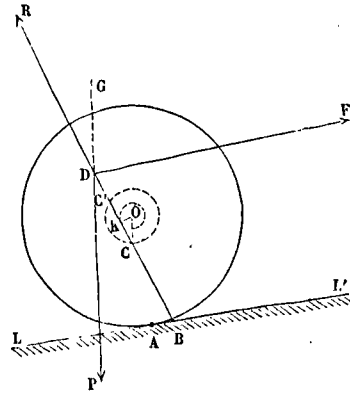


Fig. 1.

roues, A son point de contact géométrique avec le sol, représenté par la droite LL'. Soit r le rayon de la roue, ρ celui de la fusée autour de laquelle tourne la roue. Soit F le tirage ou la force mouvante cherchée, P le poids de la voiture et de sa charge, et R la réaction du sol sur l'une des roues. D'après la théorie du frottement de roulement, cette réaction n'est point appliquée au point A, mais en un point B situé en avant à une petite distance δ qui dépend de la nature du sol et du rayon de la roue. Si l'on néglige le poids de la roue elle-même vis-à-vis des réactions considérables auxquelles elle est soumise, on voit qu'elle est en équilibre sous l'action de la force R et d'une réaction égale et contraire provenant de l'essieu. Si l'on considère ensuite l'équilibre de la voiture, on voit qu'il a lieu sous l'action d'une force égale à R, appliquée en un certain point C de l'essieu, d'une autre force égale appliquée au point de contact de l'essieu avec l'autre roue, du poids P de la voiture, et de la force mouvante F. Les deux forces R égales et parallèles se composent en une seule égale à leur somme, de même direction, et que nous représenterons par R₁.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que la force CR passe à une distance OK de l'axe de l'essieu qui peut être déterminée à l'avance. Car cette force fait avec la normale, c'est-à-dire avec le rayon OC, un angle égal à l'angle φ du frottement; la distance OK est donc égale à

$$\rho \sin \varphi \text{ ou } f_1 \rho,$$

en désignant par f_1 le sinus de φ , quantité qui est égale à

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}},$$

en appelant f le coefficient de frottement.

Cela posé, les trois forces F, P, R, étant en équilibre doivent concourir en un même point, et chacune d'elles doit être égale et opposée à la résultante des deux autres. On peut négliger, comme nous l'avons fait, le jeu qui existe toujours entre la fusée et la roue, et supposer que le centre de la roue coïncide avec celui de la fusée. On est alors conduit à la construction suivante.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à $f_1 \rho$, on décrira une circonférence; du point B on mènera à cette circonférence une tangente, en arrière du point O: ce sera la direction de la réaction R. Cette direction rencontrera en un point D la direction de la force mouvante. Il faudra pour l'équilibre que le centre de gravité de la voiture et de sa charge soit sur la verticale du point D. Cette condition étant supposée remplie, on prendra une verticale ab (fig. 2) pour représenter le poids P; par le

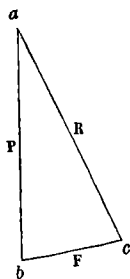


Fig. 2.

point b on mènera une droite bc dans la direction de la force F, et par le point a une droite ac dans la direction de la force R; le côté bc du triangle ainsi formé représentera la force F ou le tirage.

Si l'essieu était mobile, comme dans les voitures destinées à circuler sur les chemins de fer, la construction serait encore la même. Le rayon ρ serait alors celui de l'essieu. Mais il faut bien remarquer que la tangente menée par le point B à la circonférence de rayon $f_1 \rho$ coupe en deux points C et C' la circonférence de rayon ρ ; dans le cas de l'essieu fixe, c'était le point C qui représentait le point de contact de l'essieu fixe avec la roue; dans le cas actuel ce serait le point C' qui représenterait le point de contact de l'essieu mobile avec la botte dans laquelle il tourne.

II. La construction qui vient de nous servir pour déterminer le tirage, donne lieu à plusieurs remarques importantes.

La première est relative à la direction de la force F. On voit par le triangle abc (fig. 2), que F sera minimum quand l'angle en c sera droit; c'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la force mouvante sera la plus petite possible quand sa direction sera perpendiculaire à la réaction du sol.

La seconde est relative à l'inclinaison du sol. La roue étant supposée conserver sa position, si le sol fait un plus grand angle avec l'horizon, le point A, et par suite le point B, s'avancent; la direction de la tangente BK fait avec la verticale un plus grand angle; l'angle a du triangle abc augmente; et par

suite le côté bc , ou le tirage, devient plus grand. Si au contraire l'inclinaison du sol diminue, ou si, à plus forte raison, d'ascendant il devient descendant, les points A et B reculent, l'angle de BK avec la verticale diminue; l'angle en a devenant moindre, le côté bc devient plus petit; par conséquent le tirage diminue.

La troisième observation se rapporte à la position du centre de gravité de la voiture et de sa charge. Si le point G est au-dessus du point D, il arrive dans les montées que la direction du poids P passe en arrière du point D; le moment de la charge par rapport au point O augmente; et comme les moments de F et de R ne changent pas, l'équilibre ne s'établit que parce que le cheval résiste à la pression de bas en haut qu'il éprouve de la part de la sous-ventrière. Dans les descentes au contraire, la direction du poids P passe en avant du point D; le moment de cette force diminue, et l'équilibre s'établit encore aux dépens du cheval, qui est obligé de supporter une pression de haut en bas par l'intermédiaire de la bretelle du brancard. L'inverse a lieu quand le point G est au-dessous du point D. — Dans l'un et l'autre cas, les inégalités d'inclinaison de la route sont une cause de fatigue pour le cheval; en sorte que la position la plus avantageuse à donner au point G est le point D lui-même. Le cheval n'éprouve alors ni pression de bas en haut dans les montées, ni pression de haut en bas dans les descentes.

Le point D devant se trouver toujours sur la droite BF, on voit en outre que si l'effort F s'exerce plus haut, le point D se trouve reporté en arrière; et que si la force F agit plus bas, ce même point se trouvera reporté en avant. La charge doit donc être placée d'autant plus en arrière de l'essieu que le tirage se fait plus haut; si au contraire le tirage se fait très-bas, la charge devra être rapprochée de l'essieu, et même en avant de l'essieu.

Si l'on admettait la loi de Coulomb, suivant laquelle la distance AB ou δ , varie proportionnellement au rayon de la roue, les roues d'un grand diamètre n'auraient aucun avantage marqué sur les petites. Mais si l'on adopte la loi admise par M. Dupuit, suivant laquelle la distance AB est exprimée par une formule de la forme

$$\delta = k \sqrt{r},$$

auquel cas la distance AB croît moins vite que le rayon, il en résulte qu'à mesure que le diamètre de la roue augmente, la direction de la réaction R se rapproche de la verticale; l'angle en a , dans le triangle abc , diminue, et le côté bc , ou le tirage, devient plus petit. Ce résultat paraît confirmé par l'expérience.

L'influence du frottement de l'essieu est facile à déterminer, aussi bien que celle de la grandeur du rayon ρ . A mesure que le produit $f_1 \rho$ diminue, la tangente menée du point B à la circonférence décrite du point O avec le rayon $f_1 \rho$ prend une direction plus voisine de la verticale; et, d'après ce qui vient d'être dit, le tirage doit diminuer. —

Dans les charrettes de roulage, et dans les voitures de messageries, on a ordinairement

$$\rho = 0^m,032 \text{ et } f_1 \rho = 0,00208.$$

Dans les équipages d'artillerie on a

$$\rho = 0^m,038 \text{ et } f_1 \rho = 0,00247.$$

Dans les voitures de luxe on a généralement $\rho = 0^{\circ},027$ et $f_1\rho = 0,00175$.

On peut remarquer enfin que, dans le cas d'un essieu fixe, le point de contact C de l'essieu avec la roue est généralement placé en avant de l'axe O, mais qu'il peut se trouver sur la verticale du point O et même en arrière. Ce dernier cas est celui qui a ordinairement lieu dans les descentes. Du reste ce détail a peu d'importance.

III. Au lieu de déterminer le tirage par une construction graphique, on peut calculer la valeur de la force F.

Soit h la distance de la direction de F à l'axe O, et d la distance de la force P au même axe. En prenant les moments des forces F, P et R, par rapport à cet axe, on aura

$$Fh - Pd + R_1 \cdot f_1\rho = 0.$$

Mais le triangle abc donne

$$R_1^2 = F^2 + P^2 + 2FP \cos \angle FP;$$

par conséquent, en mettant pour R_1 sa valeur dans l'équation précédente, il vient

$Fh - Pd + f_1\rho \sqrt{F^2 + P^2 + 2FP \cos \angle FP} = 0$, relation d'où l'on pourrait tirer la valeur de F, soit directement, soit par la méthode des approximations successives.

La discussion de cette formule conduirait d'ailleurs, quoique moins simplement, aux conclusions auxquelles nous sommes parvenus plus haut.

IV. Étudions maintenant le tirage d'une voiture à 4 roues. Soient R' et R'' les réactions exercées par le sol sur les roues de devant et sur les roues de derrière. Soit P le poids total de la voiture et de sa charge, et F la force mouvante appliquée au premier train.

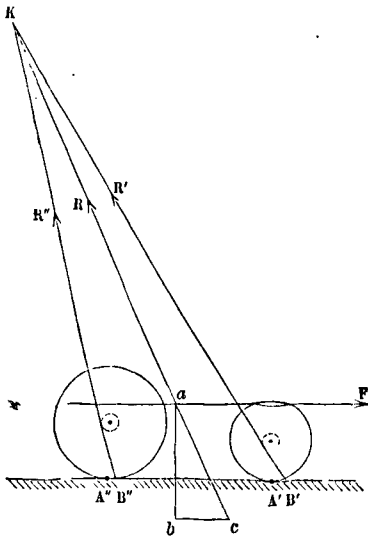


Fig. 3.

Les essieux des deux trains étant généralement égaux, en admettant même la loi de Coulomb d'après laquelle δ serait proportionnel au rayon de la roue, on voit aisément que la réaction R' du sol sur les roues du train de devant est plus inclinée sur l'horizon que la réaction R'' sur les roues du train de derrière. Cet effet est encore plus sen-

sible si l'on admet la loi de M. Dupuit, d'après laquelle on a

$$\delta = k \sqrt{r};$$

car on en déduit

$$\frac{\delta}{r} = \frac{k}{\sqrt{r}};$$

et l'on voit que le rapport de δ au rayon augmente quand le rayon diminue. Les points d'application B' et B'' (fig. 3) des deux réactions ne sont donc pas placés de la même manière par rapport aux roues correspondantes; le point B' est plus en avant, relativement au rayon de la roue de devant, que B'' ne l'est par rapport au rayon de la roue de derrière. Il en résulte que les réactions R' et R'' prolongées vont se rencontrer en un point K, en arrière de l'essieu de derrière. D'un autre côté les forces F et P se rencontrent en un point a. Il faut donc, pour l'équilibre du système, que la résultante R des forces R' et R'' soit dirigée suivant la droite aK, et qu'il en soit de même de la résultante des forces F et P. Par conséquent, si l'on prend la verticale ab pour représenter le poids P, on n'aura qu'à joindre Ka, à prolonger cette droite, et à mener bc parallèle à la direction de la force F; le côté bc du triangle abc représentera le tirage.

Cette construction montre que le tirage sera d'autant plus faible que la charge sera reportée plus près de l'essieu de derrière; car plus le point a s'éloignera en arrière, plus l'angle en a, dans le triangle abc, diminuera; plus, par conséquent, le côté opposé bc, qui représente le tirage, sera petit.

Les voituriers ont reconnu depuis longtemps l'avantage qu'il y a à charger ainsi le train de derrière. Il ne faudrait cependant pas que le point a fût dans la verticale de l'essieu de derrière, parce qu'alors, dans les montées, le centre de gravité de la charge passerait en arrière de cet essieu, et le train de devant pourrait être soulevé.

V. On pourrait aussi déterminer le tirage par le calcul. Supposons le sol horizontal. Soient P' et P'' les composantes de la charge, agissant à des distances données d' et d'' des essieux correspondants. Soit h la distance de la force F à l'essieu de devant; soit X la tension de la pièce qui lie les essieux supposée horizontale; soient h' et h'' les distances de cette force aux deux essieux. On aura, en considérant l'équilibre du train du devant,

$$Fh - Xh' - P'd' + f_1\rho' \sqrt{P'^2 + (F-X)^2} = 0;$$

en considérant l'équilibre du train de derrière, on aura de même

$$Xh'' - P''d'' + f_1\rho'' \sqrt{P''^2 + X^2} = 0.$$

En éliminant X entre ces deux équations on aurait une relation d'où l'on pourrait tirer la valeur de F.

VI. Il résulte des expériences exécutées par M. Morin à Metz en 1837, et à Courbevoie de 1839 à 1841, que le tirage est sensiblement proportionnel à la charge. Voici, d'après cet auteur, les valeurs du rapport du tirage à la charge pour différentes natures de routes, et pour un même véhicule (charrette de roulage):

Route en empierrement, avec boue épaisse	$\frac{1}{18}$ à $\frac{1}{19}$
Id. très-dégradée..	$\frac{1}{14}$ à $\frac{1}{15}$

Pavé en grès, ordinaire, sec.....	$\frac{1}{59}$ à $\frac{1}{60}$
Id. couvert de boue	$\frac{1}{46}$
Tablier de pont en madriers.....	$\frac{1}{42}$ à $\frac{1}{43}$
Accotement en terre, sec et en bon état.	$\frac{1}{27}$ à $\frac{1}{28}$
Id. recouvert de gravier.....	$\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{10}$
Route couverte de neige, non frayée....	$\frac{1}{14}$ à $\frac{1}{15}$
Sol en terre ferme, recouverte de sable fin.....	$\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{8}$
Route en empièrrement, sèche et en bon état.....	$\frac{1}{50}$
Route en empièrrement, un peu humide ou couverte de poussière avec quelques cailloux à fleur du sol....	$\frac{1}{35}$
Route en empièrrement, très-solide, mouillée, avec gros cailloux à fleur du sol.....	$\frac{1}{43}$
Route en empièrrement, solide, avec boue molle.....	$\frac{1}{27}$
Route en empièrrement, solide, avec ornière et boue.....	$\frac{1}{22}$

Pour les voitures de messageries et pour les équipages d'artillerie, le rapport du tirage à la charge est généralement moindre.

Il résulte des mêmes expériences que sur les routes solides le tirage est sensiblement en raison inverse du diamètre des roues. La largeur de la jante augmente le tirage sur un sol mou, mais sur les routes solides cet élément est sans influence. — La vitesse n'a pas d'influence sensible quand le sol est mou; mais sur les routes solides, et particulièrement sur les routes pavées, le tirage augmente avec la vitesse, et d'autant plus que les aspérités du sol sont plus grandes, ce qui s'explique par les chocs réitérés auxquels la voiture est alors soumise.

Nous avons vu que pour les voitures à deux roues le tirage est minimum quand sa direction est perpendiculaire à la direction du sol. Il paraît en être autrement pour les voitures à 4 roues; et M. Morin conseille de donner à la force mouvante une direction parallèle au sol dans tous les cas. Le même auteur conseille aussi de rapprocher les trains, et d'engager l'essieu de derrière autant que possible sous la charge; nous en avons vu plus haut la raison. (Voy. le *Mémoire* de M. Piobert sur le tirage des voitures, les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bélanger à l'École centrale, etc.)

TIRANT, pièce de charpente placée horizontalement dans une ferme, et sur laquelle reposent les bouts des arbalétriers (Voy. *FERMES*).

TIRANT D'EAU, hauteur verticale comprise entre

la face inférieure de la quille d'un navire et la ligne de flottaison. Cette hauteur s'évalue à l'aide de divisions tracées, à l'avant et à l'arrière, sur l'étrave et sur l'étambot.

TIRE-LIGNE, instrument qui sert à tracer des lignes droites ou des cercles. Il se compose de deux lames d'acier arrondies, dont les bouts peuvent être rapprochés ou écartés à l'aide d'une vis; et qui sont adaptées à un manche ou à une branche de compas. L'encre s'introduit avec une plume ou avec un pinceau entre les deux lames, dont on règle ensuite l'écartement d'après l'épaisseur que l'on veut donner au trait.

TIROIR, organe qui, dans le mécanisme des machines à vapeur, règle la distribution alternative de ce fluide sur les deux faces du piston (Voy. *MACHINES A VAPEUR, LOCOMOTIVES, DÉTENTE*).

TITRE, rapport entre le poids d'or ou d'argent fins contenus dans un lingot, un bijou ou une pièce de monnaie, et le poids total de l'objet. Le titre s'évalue en millièmes. Dire que le titre d'un alliage d'or est 0,960, par exemple, c'est dire que sur 1000 grammes d'alliage, il y a 960 grammes d'or pur (Voy. *MONNAIES, MÉTAUX PRÉCIEUX*).

TOISE, ancienne mesure de longueur usitée en France. Elle valait 1^m,949. Elle se subdivisait en 6 pieds.

TOISE DU PÉROU, étalon en fer, mesurant une toise à la température de 16° $\frac{1}{4}$, qui avait servi à la mesure d'un arc de méridien au Pérou, et qui a été adopté pour unité en France dans toutes les mesures de ce genre jusqu'à l'établissement du système métrique (Voy. *FIGURE DE LA TERRE*). La longueur de la toise exprimée en mètres est, d'après Bessel, 1^m,94886... ou environ 1^m,949.

TONNAGE, capacité d'un navire évaluée en TONNEAUX D'ARRIMAGE (Voy. ce mot et *JAUGEAGE DES NAVIRES*).

TONNE, unité de poids employé dans le commerce des transports. Elle équivaut à 1000 kilogrammes. On lui donne aussi le nom de TONNEAU MÉTRIQUE.

TONNEAU D'ARRIMAGE, volume moyen occupé à bord d'un navire par un poids de 1000^{kg}. C'est en tonneaux d'arrimage qu'on évalue la capacité intérieure d'un navire laissée libre pour le chargement (Voy. *JAUGEAGE DES NAVIRES*). Le tonneau d'arrimage équivaut à 1^m·^{cu}·500. Avant le système métrique, on l'évaluait à 42 pieds cubes; en mesures actuelles, ce serait environ 1^m·^{cu}·440; on a préféré adopter, en nombre rond, 1^m·^{cu}·500.

TONTINES, établissements de prévoyance imaginés par L. Tonti, banquier italien, qui les a introduites en France sous le ministère de Mazarin, en 1653. Les tontines sont des associations dont les membres mettent en commun, pendant un certain nombre d'années, soit un capital une fois versé, soit des mises annuelles, qui, au terme de l'association, sont partagés, ainsi que les intérêts qu'ils ont produits, entre les membres survivants. Il existe plusieurs espèces de tontines. Les calculs relatifs à ces associations sont toujours une combinaison des règles des INTÉRÊTS COMPOSÉS avec l'emploi des TABLES DE MORTALITÉ (Voy. ces mots).

I. Pour prendre d'abord l'exemple le plus simple, supposons que 650 personnes, âgées de 41 ans,

mettent chacune 10000^f dans une association de 20 ans de durée, et que le capital soit placé à 4 pour 100 et à intérêts composés; on peut demander quelle sera la part de chaque associé au terme de l'association Or, 10000^f, placés à 4 pour 100 et à intérêts composés pendant 20 ans, produisent un capital définitif exprimé par 10000^f.(1,04)²⁰ ou 21911^f,23. D'autre part, on trouve dans la table de Deparcieux que, sur 650 personnes âgées de 41 ans, 450 seulement atteindront vraisemblablement l'âge de 61 ans. Pour avoir la part des survivants, on n'a donc qu'à multiplier 21911^f,23 par le nombre primitif 650 des membres de l'association, et à diviser le produit par le nombre 450 des survivants, ce qui donne

$$\frac{21911^f,23 \times 650}{450} = 31649^f,55.$$

Nous avons supposé toutes les mises égales; il pourrait en être autrement. Dans ce cas, on peut imaginer que les mises soient toutes de 1^f, et que chaque sociétaire contribue pour un certain nombre de mises; il est évident que sa part, au moment de la liquidation, devra être proportionnelle à ce nombre de mises.

II. Nous avons supposé que tous les sociétaires entraient dans l'association à la même époque; cela n'est pas non plus nécessaire. Lorsqu'un sociétaire nouveau se présente dans le courant de l'association, on ramène sa mise à ce qu'elle eût été s'il y fût entré au début. Soit *n* l'âge des sociétaires primitifs, *t* la durée de l'association; et supposons qu'un sociétaire nouveau se présente au bout d'un nombre *θ* d'années, et dépose une mise *P*. La mise réelle s'obtiendra en remarquant qu'elle doit produire le capital *P* au bout de *θ* années; en nommant donc *x* cette mise réelle, et *r* l'intérêt annuel de 1^f, on doit avoir

$$x(1+r)^{\theta} = P;$$

d'où $x = \frac{P}{(1+r)^{\theta}}$. [1]

La part définitive de ce nouvel associé sera donc

$$\frac{x(1+r)^t \cdot v_{n+t}}{v_n}, \text{ ou } \frac{P(1+r)^{t-\theta} \cdot v_{n+t}}{v_n},$$

en nommant *v_n* le nombre des vivants de l'âge *n* et *v_{n+t}* le nombre des survivants de l'âge *n+t*; ce résultat est égal à la part que le nouveau sociétaire aurait eue s'il avait versé la mise *a* au début, divisée par (1+r)^θ.

III. On peut concevoir que des tontines en nombre quelconque soient gérées par une même administration; on a alors ce que l'on appelle une association générale, qui peut comprendre des personnes de tout âge. Pour la commodité de la gestion, cette association est ordinairement subdivisée en autant de sociétés particulières qu'il y a d'époques de liquidation différentes. La part d'un sociétaire se calcule, comme ci-dessus, d'après son âge, sa mise et l'époque de son entrée dans la société.

IV. Au lieu d'une mise unique, les sociétaires préfèrent ordinairement payer une mise annuelle. Cette mise n'est autre chose qu'une RENTE VIAGÈRE (Voy. ce mot) temporaire que le sociétaire paye à l'association, mais qui commence une année plus tôt qu'une véritable rente; car celle-ci ne se payerait qu'en fin d'année, tandis que la mise dont il s'agit se paye au commencement de chaque année.

Considérons, pour plus de simplicité, une des so-

ciétés particulières dont se compose l'association générale; soit *n* l'âge commun de ses membres au moment de l'association, et *t* la durée de cette association. Désignons par *p* la mise annuelle qui doit remplacer le capital *P*.

La somme payée au début de la société par un nombre de sociétaires égal à *v_n* sera *pv_n*; et, à l'époque de la liquidation, elle sera devenue *pv_n(1+r)^t*.

La somme payée au bout d'un an sera *pv_{n+1}*; et, à l'époque de la liquidation, elle aura produit une somme..... *pv_{n+1}(1+r)^{t-1}*.

La somme payée au bout de deux ans sera *pv_{n+2}*; et, à l'époque de la liquidation, elle aura produit..... *pv_{n+2}(1+r)^{t-2}*, et ainsi de suite.

Enfin, la somme payée à la fin de l'avant-dernière année sera *pv_{n+t-1}*; et à la fin de cette même année elle sera devenue..... *pv_{n+t-1}(1+r)*.

Soit *C* la somme des capitaux ainsi produits, on pourra écrire :

$$C = pv_n(1+r)^t \left[1 + \frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^2} + \dots + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}} \right].$$

La série qui suit l'unité dans la grande parenthèse n'est autre chose que la valeur d'une rente viagère temporaire de 1^f, pendant *t-1* années. Si on la désigne par *A_{n+t-1}* on pourra écrire

$$C = pv_n(1+r)^t (1 + A_{n+t-1}^{n+t-1}).$$

Mais d'ailleurs le capital *C* a pour valeur

$$C = Pv_n(1+r)^t. \quad [2]$$

Il en résulte

$$p = \frac{P}{1 + A_{n+t-1}^{n+t-1}}. \quad [3]$$

Prenons pour exemple le problème traité en commençant; nous aurons *P* = 10000^f, *n* = 41, *t* = 20. La valeur de *A_{n+t-1}* ou *A₆₁* est la différence entre la valeur d'une rente viagère immédiate de 1^f sur une tête de 41 ans, et la valeur d'une rente viagère de 1^f, différée de 9 ans. La première a pour expression *A₄₁*; et d'après la table de Deparcieux (Voy. RENTES VIAGÈRES), on a *A₄₁* = 14,9075. La seconde a pour expression

$$\frac{A_{n+t-1}}{(1+r)^{t-1}} \cdot \frac{v_{n+t-1}}{v_n} \text{ ou } \frac{A_{60}}{(1,04)^{19}} \cdot 650.$$

Or, *A₆₀* = 9,7130; en effectuant les calculs, on trouve 3,2839.

Il vient donc

$$A_{41}^{61} = 14,9075 - 3,2839 = 11,6236;$$

par suite $p = \frac{10000^f}{1 + 11,6236} = 792^f,16.$

V. Un sociétaire, après avoir payé sa mise annuelle pendant un certain nombre d'années, peut, s'il le désire, se libérer entièrement au moyen d'une mise unique, calculée de manière à produire le même capital définitif que les mises annuelles qu'il restait à payer. On résoudra cette question au moyen de la formule [3], dans laquelle *n* désignera l'âge actuel du sociétaire et *t* le nombre d'années qui restent à s'écouler jusqu'à la fin de l'association. On obtiendra ainsi :

$$P = p(1 + A_{n+t-1}^{n+t-1}). \quad [4]$$

Si, par exemple, le sociétaire dont il a été question ci-dessus, après avoir payé pendant 7 ans sa mise annuelle de 792^f,16, voulait se libérer en un seul paiement, la somme *P* qu'il aurait à payer se-

rait exprimée par

$$P = 792^f, 16 (1 + A_{48}^{80})^f$$

On a $A_{48} = 13,0765$; $v_{48} = 599$.

La valeur de la rente différée serait ici

$$\frac{A_{68} \cdot 463}{(1,04)^{12} \cdot 599} \text{ ou } \frac{9,7130 \cdot 463}{(1,04)^{12} \cdot 599}$$

c'est-à-dire 4,6893.

La valeur de A_{68}^{80} serait donc

$$13,0765 - 4,6893 \text{ ou } 8,3872.$$

Par conséquent il viendrait

$$P = 792^f, 16 \cdot (1 + 8,3872) = 7436^f, 16.$$

VI. Dans les tontines où les mises sont annuelles, toute personne qui entre dans l'association un certain nombre d'années après son ouverture, doit, pour obtenir une part égale à celle des autres sociétaires, payer une mise annuelle calculée d'après la date de son entrée. Soit θ le nombre d'années écoulées depuis le début de l'association jusqu'au moment où se présente un nouveau sociétaire; et soit x la mise annuelle qu'il devra verser. Le capital produit au bout de t années par les mises p des v_n associés est

$$pv_n(1+r)^t(1+A_n^{n+t-1}).$$

Le capital produit au bout de $t-\theta$ années par les mises x des $v_{n+\theta}$ membres survivants, après θ années, serait exprimé de même par

$$xv_{n+\theta}(1+r)^{t-\theta}(1+A_{n+\theta}^{n+t-1}).$$

En égalant ces deux expressions, on aura la valeur de x . On trouve

$$x = p \cdot \frac{v_n}{v_{n+\theta}} (1+r)^\theta \cdot \frac{1+A_n^{n+t-1}}{1+A_{n+\theta}^{n+t-1}}. \quad [5]$$

Si, par exemple, on a $p = 792^f, 16$, $n = 41$, $\theta = 7$, $r = 0,04$, on aura

$$x = 792^f, 16 \cdot \frac{v_{41}}{v_{48}} \cdot (1,04)^7 \cdot \frac{1+A_{41}^{80}}{1+A_{48}^{80}}$$

$$= 792^f, 16 \cdot \frac{650}{599} \cdot (1,04)^7 \cdot \frac{1+11,6236}{1+8,3872}$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$x = 1521^f, 17.$$

VII. Il y a des tontines dans lesquelles l'association a pour but d'accroître le capital primitif des mises, sans priver les associés des intérêts annuels. L'accroissement du capital ne résulte alors que des mises abandonnées par les sociétaires qui meurent avant l'époque de la liquidation.

Soit P la mise de chacun des associés, supposés âgés de n années; soit t la durée de l'association, et r l'intérêt annuel de 1^r. Supposons, pour plus de simplicité, que le nombre primitif des associés soit v_n .

Au bout de la première année, le nombre des morts sera $v_n - v_{n+1}$; et la somme abandonnée par eux à la société, c'est-à-dire $P(v_n - v_{n+1})$, produira, au bout de $t-1$ années, un capital représenté par..... $P(v_n - v_{n+1})(1+r)^{t-1}$.

Au bout de la deuxième année, le nombre des morts sera accru de $v_{n+1} - v_{n+2}$, et la somme laissée par eux, savoir $P(v_{n+1} - v_{n+2})$, produira, au bout de $t-2$ années, un capital exprimé par..... $P(v_{n+1} - v_{n+2})(1+r)^{t-2}$.

On trouvera de même que les mises abandonnées par les membres décédés au bout de la 3^e année produiront, au bout de $t-3$ années..... $P(v_{n+2} - v_{n+3})(1+r)^{t-3}$; et ainsi de suite.

Enfin, au bout de la dernière année, la somme laissée sera..... $P(v_{n+t-1} - v_{n+t})$, et ne produira pas d'intérêts, puisqu'on est arrivé au terme de la liquidation.

Si, à la somme de tous ces capitaux, on ajoute les mises des v_{n+t} survivants, c'est-à-dire $P \cdot v_{n+t}$, on obtiendra un capital total C , qui, divisé par v_{n+t} , donnera la part de chacun de ces survivants.

Or, le terme $+P \cdot v_{n+t}$ fait disparaître un terme égal et de signe contraire; et, en réunissant les termes positifs entre eux, et les termes négatifs entre eux, on peut écrire

$$C = Pv_n(1+r)^{t-1} \left[1 + \frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \dots \right. \\ \left. + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}} \right] \\ - Pv_n(1+r)^t \left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \dots + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}} \right]$$

La somme des termes qui suivent l'unité dans la première parenthèse, et qui se reproduisent dans la seconde, est la valeur d'une rente viagère temporaire de 1^r pendant $t-1$ années, sur une tête de l'âge n ; en la désignant par A_n^{n+t-1} , on pourra écrire

$$C = Pv_n(1+r)^{t-1} (1 - rA_n^{n+t-1}), \quad [6]$$

et si x désigne la part de chacun des survivants, on aura

$$x = P \cdot \frac{v_n}{v_{n+t}} \cdot (1+r)^{t-1} (1 - rA_n^{n+t-1}). \quad [7]$$

VIII. Il y a au contraire des tontines dans lesquelles, au décès de chaque sociétaire, le capital formant sa mise primitive est remis à ses héritiers; le capital social ne s'accroît alors que des intérêts produits par les mises des sociétaires vivants. Conservons les notations ci-dessus adoptées.

L'ensemble des mises primitives sera $P \cdot v_n$. Au bout de la première année, ce capital sera devenu $Pv_n(1+r)$; mais il devra être diminué des mises des sociétaires décédés pendant l'année, c'est-à-dire de $P(v_n - v_{n+1})$, ce qui donne pour reste

$$Pv_n(1+r) - P(v_n - v_{n+1}).$$

Au bout de la seconde année, ce capital sera multiplié par $(1+r)$, mais diminué des mises des sociétaires morts dans l'année, c'est-à-dire de $P(v_{n+1} - v_{n+2})$, ce qui donne pour reste

$$Pv_n(1+r)^2 - P(v_n - v_{n+1})(1+r) - P(v_{n+1} - v_{n+2}).$$

Au bout de la troisième année, ce capital sera multiplié par $1+r$, mais diminué de $P(v_{n+2} - v_{n+3})$; et ainsi de suite. En continuant ainsi, on verra qu'au bout de la $t^{\text{ème}}$ année, c'est-à-dire à l'époque de la liquidation, le capital social C aura pour valeur

$$C = Pv_n(1+r)^t - P(v_n - v_{n+1})(1+r)^{t-1} \\ - P(v_{n+1} - v_{n+2})(1+r)^{t-2} \dots - P(v_{n+t-1} - v_{n+t}).$$

Cette valeur peut s'écrire

$$C = P(1+r) [v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} \dots \\ + v_{n+t-1}] + Pv_{n+t} \\ - P[v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} \dots + v_{n+t-1}],$$

ou

$$C = Pr [v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} \dots + v_{n+t-1}] \\ + Pv_{n+t},$$

ou encore

$$C = Prv_n(1+r)^{t-1} \left[1 + \frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \dots \right. \\ \left. + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}} \right] + P \cdot v_{n+t};$$

ou enfin

$$C = Prv_n(1+r)^{t-1}(1+A_n^{n+t-1}) + Pv_{n+t},$$

et par conséquent la part x de chaque survivant à l'époque de la liquidation sera exprimée par $\frac{C}{v_{n+t}}$,

ou par

$$x = Pr \cdot \frac{v_n}{v_{n+t}} (1+r)^{t-1} (1+A_n^{n+t-1}) + P. \quad [8]$$

Le premier terme de cette formule exprime la quantité dont le capital primitif P s'est accru.

TONTURE, nom donné dans la CONSTRUCTION NAVALE (Voy. ce mot) à la courbure des ponts d'un navire dans le sens longitudinal, et quelquefois à la flèche qui mesure cette courbure. (Voy. LIVER DE PONR.) Par l'effet de la tonture, les ponts présentent, vers le milieu de leur longueur, une moindre hauteur au-dessus de la quille que vers les extrémités; cette disposition a pour objet de résister à l'arcure en sens contraire que le navire tend à éprouver. C'est surtout au mouillage et à l'instant de la marée haute que cette arcure tend à se produire, parce qu'alors la poussée de la mer soulève la partie moyenne du vaisseau, tandis que ses extrémités retenues par les ancres ne peuvent suivre le mouvement ascendant. Dans une frégate à voiles, il y a une différence de 0^m,86 entre la hauteur au-dessus de quille du point le plus bas du pont (situé entre le maître-couple et le premier couple avant) et la hauteur de ce pont à la poupe; la différence n'est que de 0^m,56 entre le point le plus bas et la proue. Ces différences sont proportionnellement plus grandes dans un vaisseau de haut bord.

TOPOGRAPHIE (du grec τόπος, lieu, et γράφω, je décris), partie de la Géodésie qui a pour objet de déterminer les positions relatives des principaux points d'une contrée dont on veut lever la carte, et dont l'étendue est assez petite pour qu'on puisse négliger la sphéricité du globe. On a à effectuer, en Topographie, deux opérations distinctes : 1° projeter les divers points du terrain sur un même plan horizontal, et déterminer les positions relatives des projections obtenues; c'est ce qu'on appelle lever le plan du terrain; 2° mesurer la distance de chaque point du terrain à sa projection, c'est ce qu'on appelle faire le nivellement du terrain. Le plan horizontal sur lequel on projette est un plan tangent à la surface sphérique des mers, choisi de telle sorte que le point de contact soit la projection d'un point du terrain situé vers le centre de la contrée qu'on se propose d'embrasser. La distance des points du terrain à ce plan s'appelle leur altitude (Voy. LEVER DES PLANS, NIVELLEMENT, ALTITUDE).

Les opérations topographiques peuvent embrasser une étendue de terrain assez considérable. Pour en donner une idée, supposons que la contrée dont il s'agit soit comprise dans un cône ayant pour sommet le centre du globe et pour angle au sommet un degré. Négliger la sphéricité du globe revient à substituer à la calotte sphérique embrassée par ce cône le cercle qu'il détermine sur le plan tangent au sommet de la calotte; en d'autres termes, cela revient à remplacer l'arc d'un demi-degré par sa tangente. Or on a en général

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{1.3} + \frac{2\alpha^5}{1.3.5} + \dots$$

et pour un arc très-petit on a sensiblement

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3},$$

d'où

$$\frac{\tan \alpha - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{3}.$$

Pour

$$\alpha = 30'$$

ou, en parties du rayon,

$$\frac{\pi}{360},$$

l'erreur relative sera donc

$$\frac{\pi^2}{3 \cdot (360)^2}, \text{ ou } 0,00002538 \dots;$$

c'est-à-dire qu'elle sera moindre que 3 cent-millièmes. Sur l'arc d'un degré, dont la longueur est

$$111111^m, 111 \dots$$

l'erreur serait donc

$$0,00002538 \times 111111^m, 111 \dots \text{ ou } 2^m, 8199 \dots$$

c'est-à-dire que l'erreur commise serait moindre de 3^m, sur une distance totale de 111111^m, 111 ou plus de 25 lieues de poste.

Les principaux ouvrages de Topographie à consulter sont : le *Traité de Géodésie* de L. Puissant; la *Géodésie* de L. B. Francœur; le *Cours de Topographie et de Géodésie* de A. Salneuve; le *Cours complet de Topographie et de Géodésie* de M. Benoît; l'*Essai* du colonel Clerc sur l'*application des éléments de l'art d'écrire le terrain à l'exécution des levés et du nivellement*; le *Cours de Topographie élémentaire* de de Lalobre; l'*Instruction sur la Topographie* du colonel Tournemine, à l'*usage des écoles régimentaires*, etc., etc.

TOPOGRAPHIE (PROBLÈMES DE). Nous plaçons sous ce titre diverses questions qui sont d'une application fréquente.

I. *Trouver la distance d'un point accessible A (fig. 1) à un point inaccessible B*. Par le point acces-

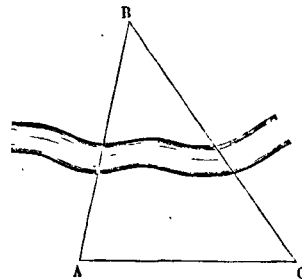


Fig. 1.

sible A, on mène sur le terrain une droite AC que l'on mesure; on mesure à la station A l'angle BAC formé par le rayon visuel AB avec la direction de la base AC; et à la station C on mesure de même l'angle BCA. On a alors, dans le triangle ABC,

$$AB = AC \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = AC \cdot \frac{\sin C}{\sin(A+C)},$$

formule logarithmique dans laquelle tout est connu (Voy. CHAÎNE, GRAPHOMÈTRE).

Si le terrain est sensiblement horizontal et si l'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut lever le plan du triangle ABC avec la planchette;

on obtient ainsi un triangle semblable abc ; et l'on a

$$AB = ab \cdot \frac{AC}{ac}$$

On peut mesurer ab ; et le rapport $\frac{AC}{ac}$ est connu; c'est l'inverse du nombre qui exprime l'échelle du plan (*Voy. PLANCHETTE, ÉCHELLE*).

II. *Trouver la distance de deux points inaccessibles A et B* (fig. 2). — On trace sur la partie du terrain

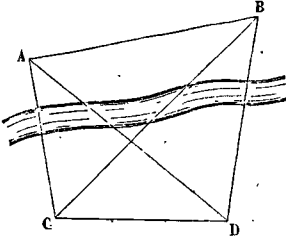


Fig. 2.

que l'on occupe une base CD que l'on mesure. A la station C on mesure les angles ACD, ACB, BCD (qui peuvent ne pas être dans un même plan), et à la station D les angles ADC et BDC. Dans le triangle ACD on connaît alors un côté CD et les deux angles adjacents; on peut donc calculer AC. Dans le triangle BCD on connaît de même un côté CD et les deux angles adjacents; on peut donc calculer BC. Dans le triangle ABC on connaît alors deux côtés AC, BC, et l'angle compris ACB, on peut donc calculer le côté AB. On fait voir en Trigonométrie qu'il suffit pour cela de connaître les logarithmes des côtés AC et BC; en sorte qu'une fois ces logarithmes obtenus il n'est pas nécessaire de passer aux nombres.

Si les points A, B, C, D étaient dans un même plan sensiblement horizontal, on pourrait lever le plan du quadrilatère ABCD et mesurer à l'échelle du plan le côté qui représenterait AB; mais ce procédé n'est pas susceptible d'une exactitude aussi grande que le procédé trigonométrique.

III. *Prolonger une droite AB* (fig. 3) *au delà d'un obstacle qui arrête la vue*. — On trace sur le ter-

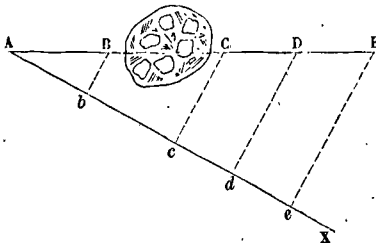


Fig. 3.

rain une droite AX, qui dépasse l'obstacle. Du point B où la droite donnée s'arrête, on abaisse sur AX, à l'aide de l'équerre d'arpenteur, une perpendiculaire Bb. On se transporte ensuite en un point c de AX, d'où l'on puisse apercevoir le prolongement de AB, et en ce point c on élève sur AX une perpendiculaire, qui rencontrera le prolongement demandé en un

point C facile à obtenir; car la similitude des triangles BAb, CAc donne

$$Cc = Bb \cdot \frac{Ac}{Ab};$$

or, toutes les lignes qui figurent dans le second membre peuvent être mesurées; on pourra donc porter, à partir du point c, une longueur cC égale à la valeur de ce second membre, ce qui déterminera le point C. Par un procédé semblable on déterminera un second point D du prolongement demandé, et l'on pourra tracer la droite CD qui sera ce prolongement lui-même. Mais, en général, il vaudra mieux déterminer un troisième point E de la droite demandée; ce point servira de vérification.

On peut encore procéder de la manière suivante: on mène par le point B (fig. 4) une droite BO que

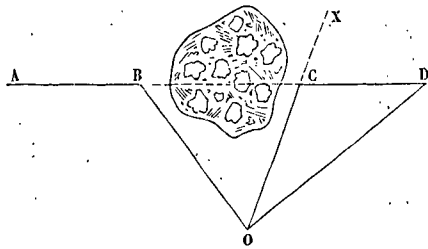


Fig. 4.

l'on puisse mesurer, et de l'extrémité de laquelle on puisse apercevoir le prolongement de AB; on mesure l'angle ABO, ce qui donne son supplément CBO; on se transporte ensuite au point O, et l'on fait planter un jalon dans une direction OX suffisamment voisine de l'obstacle, et l'on mesure l'angle BOX; on a alors dans le triangle BOC

$$OC = OB \cdot \frac{\sin CBO}{\sin BCO} = OB \cdot \frac{\sin CBO}{\sin (CBO + BOC)};$$

la longueur OC étant calculée, on peut la porter sur OX à partir du point O, et l'on obtient ainsi un point C du prolongement demandé. Par un procédé semblable, on peut se procurer un second point D de ce prolongement, et l'on peut alors tracer la droite CD. Si l'on veut se procurer un troisième point du prolongement demandé, afin d'avoir une vérification, on l'obtient de la même manière. Ce procédé sera plus souvent applicable que le précédent, qui exige l'emploi d'une droite AX de grande étendue, et qui suppose en outre que le prolongement de AB soit accessible de la région cX, ce qui n'a pas toujours lieu.

La théorie des transversales, ou méthode des alignements, fournit une troisième solution du même problème.

On mène par les points A et B (fig. 5) deux droites qui se coupent en un point b; sur ces droites, on prend deux points a et c, de manière que la direction ac rencontre le prolongement de AB au delà de l'obstacle, et puisse être parcourue et mesurée. Si C est l'intersection de AB et ac, on a, par le théorème fondamental des transversales,

$$Aa \cdot Bb \cdot Cc = Ca \cdot Ab \cdot Bc$$

ou

$$Aa \cdot Bb \cdot (Ca - ac) = Ca \cdot Ab \cdot Bc;$$

d'où l'on tire

$$Ca = \frac{Aa \cdot Bb \cdot ac}{Aa \cdot Bb - Ab \cdot Bc};$$

en portant cette distance dans la direction *ac*, on

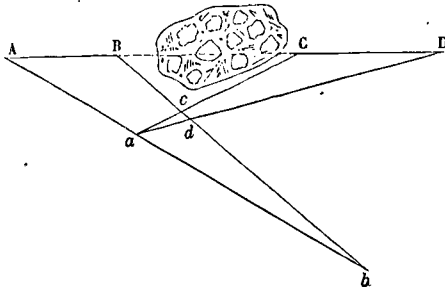


Fig. 5.

déterminera le point C. Remplaçant le point *c* par un autre point *d* pris sur *Bb*, on déterminera de même un second point D sur le prolongement demandé.

Cette solution n'exige que des jalons et une chaîne ; mais elle suppose qu'on puisse opérer librement autour de l'obstacle.

IV. Trouver un point sur le prolongement d'une droite inaccessible AB (fig. 6). — Ce problème trouve

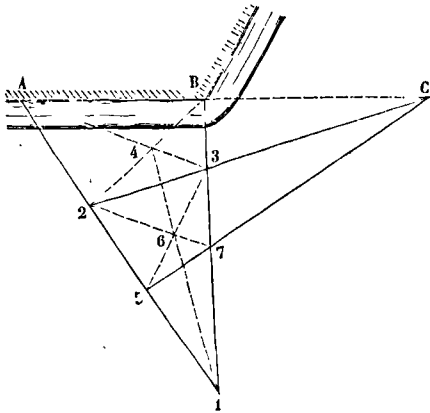


Fig. 6.

son application dans l'attaque des places fortes : lorsqu'on veut établir une batterie qui prenne en flanc une batterie de l'assiégé, il faut se procurer un point sur le prolongement du front de la batterie ennemie. La théorie des transversales fournit la solution du problème. On fait planter dans la campagne un jalon en un point quelconque 1 ; sur les directions A—1 et B—1, on marque par des jalons les points 2 et 3, choisis arbitrairement, mais de manière cependant que la direction 2—3 aille rencontrer le prolongement de AB en un point C accessible et peu éloigné. Cela fait, on plante successivement : le jalon 4 à l'intersection des directions A—3 et B—2 ; le jalon 5 en un point quelconque de 2—1 ; le jalon 6 à l'intersection des directions 3—5 et 1—4 ; le jalon 7 à l'intersection des directions 1—3 et 2—6 ; enfin le jalon C à l'intersection des directions 2—3 et 5—7. Ce dernier

jalon marque le point demandé (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, chap. ix). Pour exécuter cette construction dans un siège, on utilise les sillons rectilignes tracés sur le terrain par les boulets partis de la place. Ainsi, les lignes A—1 et A—3 pourraient être choisies parmi les sillons des boulets partis du point A, et les lignes B—1, B—2 parmi les sillons des boulets partis du point B.

En répétant la construction, on pourrait se procurer un second point sur le prolongement de AB, et résoudre ainsi ce problème : *prolonger une droite inaccessible*.

V. Par un point donné, mener une parallèle à une droite inaccessible AB (fig. 2). — On déterminera, comme au problème II, le triangle ABC, dans lequel on calculera l'angle BAC ; puis on mènera par le point C une droite CX qui fasse avec AC un angle égal au supplément de BAC (Voy. GRAPHOMÈTRE).

On pourrait encore lever le plan du quadrilatère ABDC ; mener sur le dessin, par le point qui représente C, une parallèle à la droite qui représente AB ; cette parallèle couperait en un certain point la droite qui représente BD ; on mesurerait, à l'échelle du plan, la distance de ce point de rencontre au point qui représente D ; enfin on porterait sur le terrain cette distance réelle sur la direction de DB, de D en I : la droite joignant les points C et I serait la parallèle demandée.

VI. Par un point O (fig. 7) donné sur le terrain,

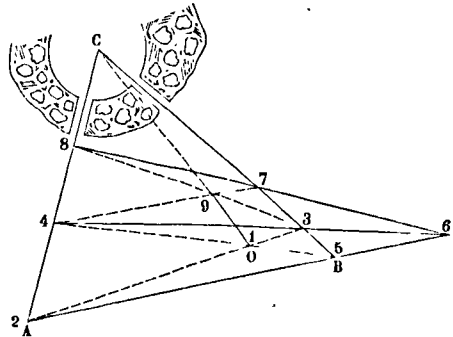


Fig. 7.

mener une droite qui aille concourir avec deux droites données AC, BC dont le point de rencontre C est invisible du point O. — On aurait à résoudre ce problème si, par exemple, étant données deux routes traversant une forêt et dont les axes AC et BC aboutissent à un rond-point, on se proposait d'en ouvrir une nouvelle dont l'axe, devant aboutir au même rond-point, serait en outre assujéti à passer par un point donné O. La théorie des transversales résout aisément ce problème. On aura à planter 9 jalons, savoir : le jalon 1 au point O ; le jalon 2 au point A, pris comme on voudra sur AC ; le jalon 3 à l'intersection de O—2 et de BC ; le jalon 4 en un point quelconque de AC, différent de A ; le jalon 5 à l'intersection de 4—O et de C—3 ; le jalon 6 à l'intersection de AB et de 4—3 ; le jalon 7 en un point pris arbitrairement sur BC ; le jalon 8 à l'intersection de 6—7 et de AC ; enfin le jalon 9 à l'intersection de 4—7 et de 3—8. La droite joignant le

point donné O au jalon 9 sera la direction demandée (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, chap. ix).

Il est clair qu'on pourrait aussi, pour résoudre ce problème, lever le plan des triangles ACB et AOB; mener sur ce plan la droite OC; mesurer au rapporteur l'angle AOC, et le reporter sur le terrain à l'aide du graphomètre.

VII. *Mener la bissectrice de l'angle formé par deux droites inaccessibles AB et AC (fig. 8).* — On

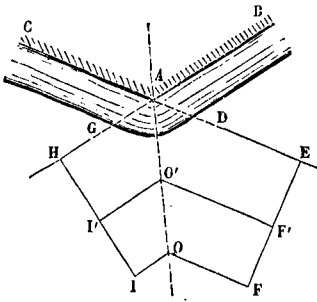


Fig. 8.

rencontre ce problème dans l'attaque des places fortes. Si AB et AC sont les traces horizontales des deux faces d'un bastion, la bissectrice de l'angle BAC est ce qu'on nomme la *capitale* du bastion, et c'est suivant cette ligne qu'on doit diriger l'attaque. Pour la déterminer, on peut prolonger le côté AC en DE, le côté AB en GH; élever à l'équerre, en E et en H, des perpendiculaires à ces prolongements; prendre sur ces perpendiculaires des longueurs égales EF et HI; mener par le point F une parallèle à DE et par le point I une parallèle à GH; déterminer le point de rencontre O de ces deux parallèles: ce point, étant également distant de DE et de GH, appartiendra à la bissectrice de l'angle HAE et de son opposé BAC: cette bissectrice sera donc la droite qui joindra le point O au point A. On peut, pour vérification, déterminer de la même manière un troisième point O' de la bissectrice.

VIII. *Trouver le rayon d'une enceinte circulaire inaccessible et dont le centre est invisible.* — On trace sur le terrain une droite AB (fig. 9) que l'on mesure.

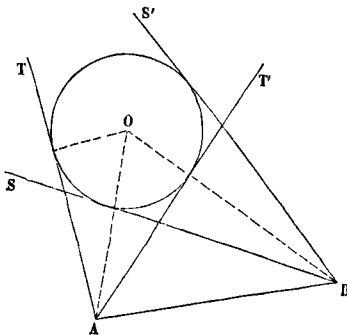


Fig. 9.

A la station A, on mène des rayons visuels tangents au cercle, et l'on mesure les angles TAB, T'AB que

font ces rayons avec la base AB: la demi-somme de ces angles donne l'angle OAB que forme avec la base la droite AO menée au centre du cercle. A la station B, on mène de même des rayons visuels tangents au cercle, et l'on mesure les angles SBA, S'BA que ces rayons font avec la base: leur demi-somme est l'angle OBA. On connaît alors dans le triangle AOB la base et les deux angles adjacents; on peut donc calculer AO. Cela fait, si M est le point de contact du rayon TA, on remarque que dans le triangle AMO, rectangle en M, on connaît l'hypoténuse AO et l'angle MAO, qui est la demi-différence des angles TAB et T'AB; on peut donc calculer OM, qui est le rayon demandé.

IX. *Tracer sur le terrain l'arc de cercle qui passe par trois points donnés A, M, A' (fig. 10).* — Ce pro-

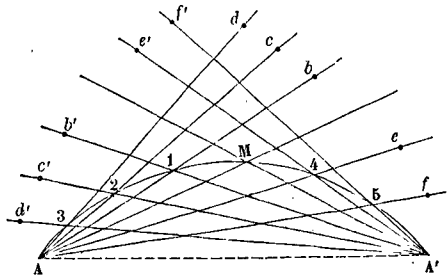


Fig. 10.

blème trouve son application dans le tracé des parties courbes des voies ferrées, des routes, des canaux, etc. On place un graphomètre au point A; on dirige la ligne de foi sur A', et l'alidade mobile sur M; puis on déplace l'alidade à droite et à gauche du point M, de manière à lui faire parcourir des angles égaux $aAb, bAc, cAd, \text{etc.}, aAe, aAf, \text{etc.}$, par exemple des angles de 10 degrés, et l'on a soin, à chaque position nouvelle de l'alidade, de faire planter un jalon dans sa direction: soient $b, c, d, \text{etc.}, e, f, \text{etc.}$, les jalons ainsi plantés. On transporte ensuite le graphomètre au point A'; on dirige la ligne de foi sur A et l'alidade mobile sur M; puis on fait mouvoir l'alidade à gauche et à droite, en lui faisant de nouveau parcourir des angles successifs de 10 degrés, et dans chacune des directions que prend l'alidade, on fait planter un jalon; soient $b', c', d', \text{etc.}, e', f', \text{etc.}$, ces nouveaux jalons. Cela fait, on place une dernière série de jalons, savoir: le jalon 1 à l'intersection des directions Ab et A'b'; le jalon 2 à l'intersection des directions Ac et A'c'; le jalon 3 à l'intersection des directions Ad et A'd', etc.; le jalon 4 à l'intersection des directions Ae, A'e'; le jalon 5 à l'intersection des directions Af, A'f', etc. Les points 1, 2, 3, etc., 4, 5, etc., ainsi déterminés appartiennent à l'arc de cercle passant par les points A, M, A'; car, si l'on considère, par exemple, les triangles AMA' et A.1.A', on voit que l'angle 1.AA' surpasse MAA' de 10 degrés; mais que 1.A'.A est inférieur à MA'A précisément de 10 degrés; d'où il suit que, dans les deux triangles comparés, la somme des angles à la base est la même. Par conséquent, les angles A.1.A' et AMA' au sommet sont égaux aussi, ce qui exige que le point 1 soit sur l'arc du cercle qui passe par les

points A, M, A'. Même démonstration pour les points 2, 3, 4, 5, etc.

X. *Raccorder deux droites par un arc de cercle.*— Ce problème trouve encore son application dans le tracé des chemins de fer, des canaux ou des routes; mais il y a deux cas à distinguer :

1° On donne le rayon R du cercle qui doit raccorder les deux droites AB et CD (fig. 11). Dans ce

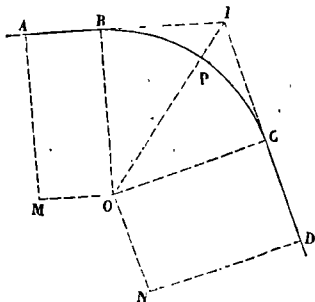


Fig. 11.

cas, on élève à l'équerre, sur ces droites, les perpendiculaires AM et DN toutes deux égales à R, et, par leurs extrémités, on mène des parallèles à AB et à CD, qui se rencontrent en un point O.

De ce point, on abaisse sur les droites données les perpendiculaires OB et OC; on obtient ainsi les points de contact ou de raccordement B et C. Soit I le point de rencontre des deux droites; si l'on porte sur la direction OI, à partir du point O, une longueur OP égale à R, on aura un point de l'arc. Ayant trois points B, P, C de l'arc demandé, on achèvera son tracé comme dans le problème précédent.

2° Le rayon de l'arc n'est pas donné, mais on donne l'un des points de raccordement, le point B, par exemple (fig. 12). On déterminera le point O

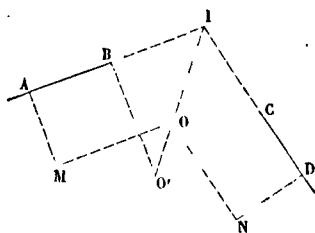


Fig. 12.

comme tout à l'heure, en donnant aux perpendiculaires AM et DN une longueur arbitraire; puis au point B on élèvera une perpendiculaire à AB, et l'on déterminera le point O' d'intersection de cette perpendiculaire avec la bissectrice IO ou avec son prolongement: ce point O' sera le centre de l'arc. Le reste s'achèvera comme dans le premier cas.

XI. *Trois points A, B, et C (fig. 13) situés sur une côte, étant rapportés sur une carte marine, trouver sur cette carte le point O, d'où les distances AB et BC ont été vues sous des angles dont on a conservé la mesure.* — Ce problème trouve son application dans l'hydrographie pour la détermination des filots, des écueils ou des points de sondage.

C'est aussi le problème que doit résoudre un capitaine de navire qui, obligé de couper son câble et de prendre le large à la hâte dans une tempête, veut, au retour du beau temps, retrouver son an-

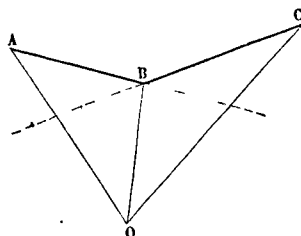


Fig. 13.

cre. On le résout graphiquement en décrivant sur AB et sur BC des segments capables des angles observés; les cercles ainsi décrits, ayant déjà le point B commun, se coupent en un second point O, qui est le point cherché.

Mais on peut aussi résoudre le problème par la Trigonométrie. Posons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad AOB = \alpha, \quad BOC = \beta, \\ ABO + OBC = \omega;$$

en égalant les valeurs de OB prises dans les deux triangles, on a

$$OB = \frac{a \sin A}{\sin \alpha} = \frac{b \sin C}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

On peut poser

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \tan \varphi,$$

et déterminer l'angle φ ; on a alors

$$\frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C} = \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1} = \tan(\varphi - 45^\circ)$$

ou

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A - C)}{\tan \frac{1}{2}(A + C)} = \tan(\varphi - 45^\circ). \quad [1]$$

Mais, si le point O est placé dans l'angle formé par les prolongements de AB et de BC, on a

$$A + C + \alpha + \beta + \omega = 360^\circ;$$

donc

$$\frac{1}{2}(A + C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \omega)$$

et

$$\tan \frac{1}{2}(A + C) = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \omega).$$

Par conséquent,

$$\tan \frac{1}{2}(A + C) = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \omega) \cdot \tan(\varphi - 45^\circ),$$

Connaissant ainsi $\frac{1}{2}(A + C)$ et $\frac{1}{2}(A - C)$, on en déduira A par addition et C par soustraction. Dès lors tout sera connu dans le quadrilatère ABCO, et le point O sera déterminé.

Le cas de la figure ne présente aucune ambiguïté; mais si les trois points donnés étaient placés comme dans la fig. 14, il pourrait arriver que le quadrila-

tère ABCO fût inscriptible, et dans ce cas le problème serait indéterminé, attendu que tous les points de l'arc de cercle circonscrit passant par les points A, O et C satisferaient à la question.

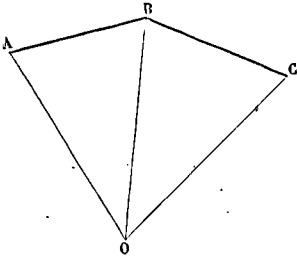


Fig. 14.

Si, comme dans la fig. 15, le point O se trouvait dans l'angle ABC formé par le côté AB et par le prolongement du côté BC, la relation [1] subsisterait toujours; mais on aurait, en égalant la somme

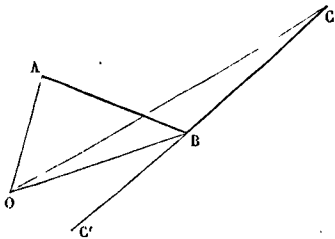


Fig. 15.

des angles du triangle AOB à la somme des angles du triangle BOC,

$$A + AOB + ABO = C + BOC + OBC;$$

d'où

$$A - C = BOC + OBC - ABO - AOB = BOC + ABC - AOB,$$

ou, en posant $ABC = \omega$,

$$A - C = \beta + \omega - \alpha$$

et

$$\frac{1}{2}(A - C) = \frac{1}{2}(\omega + \beta - \alpha).$$

Il faudrait donc tirer de la relation [1] la valeur de $\tan \frac{1}{2}(A + C)$.

Mais ce cas ne se présente pas dans la pratique quand les points A, B, C, auxquels on rapporte le point O, ont été convenablement choisis.

TOPOGRAPHIE HYDROGRAPHIQUE, partie de l'HYDROGRAPHIE (Voy. ce mot) qui a pour objet la représentation détaillée d'une partie étendue de côtes, comme une baie, une rade, etc., avec les flots, brisants et dangers divers qui peuvent s'y trouver. Les procédés et les instruments mis en usage pour lever un pareil plan ne diffèrent pas de ceux qu'on emploie dans la topographie ordinaire (Voy. ТОПОГРАФИЯ). On détermine, comme il est expliqué à cet article, le *polygone topographique* en procédant soit par cheminement, soit par intersections, et les côtés de ce polygone servent de bases pour relever les détails par intersections et *recoupements*, c'est-à-dire que chaque point doit

être déterminé par la rencontre de trois rayons visuels menés par des points de second ou de premier ordre. On fait le NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE (Voy. ce mot) de la côte; mais il est nécessaire d'y joindre ce qu'on peut appeler le *nivèlement sous-marin*, qui s'exécute par voie de sondages (Voy. NIVELLEMENT SOUS-MARIN).

Il peut arriver qu'on ait à fixer sur une carte la position d'un danger placé hors de la vue des côtes; on procède alors de la manière suivante: on fait mouiller une embarcation sur le danger même si cela est possible, ou très-près de ce point; on place des bateaux auxiliaires entre le danger et la côte, de manière qu'ils soient aperçus de la côte et qu'ils puissent eux-mêmes apercevoir le danger. A des instants convenus, de 10 minutes en 10 minutes, par exemple, des observateurs placés sur les bateaux auxiliaires relèvent la position de l'embarcation placée sur le danger, tandis que d'autres observateurs placés à terre relèvent la position des bateaux auxiliaires. C'est ainsi que M. Beautemps-Beaupré a déterminé la position de la roche orientale de Rochebonne, près de Rochefort.

TORRE, moulure circulaire placée à la partie inférieure du fût d'une colonne (Voy. MOULURES).

TORSION (RÉSISTANCE À LA), résistance qu'un solide de forme prismatique oppose à un effort transversal qui tend à faire tourner une de ses sections droites autour d'un axe intérieur au prisme et parallèle à sa longueur.

I. Pour se rendre compte du mode de déformation qui tend à se produire, considérons un cylindre OO'BA (fig. 1), dont la base inférieure est supposée fixe. Imaginons que ce cylindre soit formé de N tranches égales très-minces; et que chacune d'elles, tournant autour de l'axe OO' du cylindre, se déplace par rapport à celle qui la précède d'une même quantité angulaire ϵ , la base supérieure du cylindre aura tourné, par rapport à la base inférieure, d'un angle égal à $N\epsilon$, et que nous désignons par Θ ; et une tranche quelconque MC, occupant le rang n à partir de la base inférieure, aura tourné par rapport à cette base d'un angle égal à $n\epsilon$, et que nous désignerons par θ . Soit H la hauteur AB du cylindre, h la distance MB entre la base inférieure du cylindre et la base supérieure de la n^{ème} tranche; soit δ la hauteur d'une tranche; on aura

$$H = N\delta \text{ et } h = n\delta.$$

Des relations précédentes on tire

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{N\epsilon}{n\epsilon} = \frac{N}{n} \text{ et } \frac{H}{h} = \frac{N\delta}{n\delta} = \frac{N}{n},$$

d'où

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{H}{h}$$

ou, comme les angles Θ et θ sont mesurés par les arcs AOA' et MCM',

$$\frac{AOA'}{MCM'} = \frac{H}{h} = \frac{AB}{MB} \quad [1]$$

Cette relation subsistera encore si les nombres N

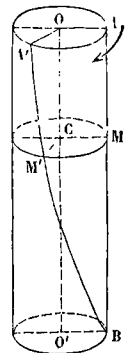


Fig. 1.

et n deviennent un même nombre de fois plus grands; elle subsistera donc encore lorsque ces nombres seront infiniment grands, et que les tranches seront devenues infiniment minces. La relation [1], qui donne

$$MCM' = AOA' \cdot \frac{MB}{AB},$$

montre que chacune de ces tranches infiniment minces aura tourné d'une quantité proportionnelle à sa distance MB à la base fixe; c'est en cela que consiste la déformation à laquelle on donne le nom de *torsion*.

La relation [1] montre aussi que les trois points A, M, B, placés primitivement sur une même génératrice du cylindre, sont venus prendre les positions A', M', B qui appartiennent à une hélice (*Voy. ce mot*), puisque les arcs AA' et MM' sont proportionnels aux hauteurs AB et MB.

Généralement, la torsion est une déformation qui consiste en ce que les diverses sections du prisme tournent autour d'un certain axe parallèle à ses arêtes latérales, et que nous déterminerons tout à l'heure, de quantités angulaires proportionnelles aux distances de ces sections à la base fixe. Dans ce mouvement, les points qui étaient placés sur une même parallèle à l'axe, comme A, M, B (fig. 1), viennent se placer sur une même hélice. Toutes les droites parallèles à l'axe, que l'on peut concevoir dans l'intérieur du prisme ou à sa surface, se transforment ainsi en hélices; ces hélices ont des inclinaisons différentes; mais elles ont toutes le même pas. En effet, le pas d'une hélice est la distance entre deux points consécutifs de cette hélice placés sur une même parallèle à l'axe; imaginons, en prolongeant pour cela le prisme par la pensée si cela est nécessaire, qu'une certaine section S, située à la distance L de la base fixe, ait tourné d'un tour entier; tous les points de cette section auront fait un tour complet et seront revenus à leur position primitive, par conséquent sur la parallèle à l'axe où ils se trouvaient; le pas de chacune des hélices est donc la distance L de la section S considérée à la base fixe.

II. On appelle *angle de torsion par unité de longueur* l'angle θ décrit par la section placée à 1^m de distance de la base fixe. On en conclut que l'angle θ décrit par la section située à la distance h de cette base a pour valeur θ, h . L'expression numérique de cet angle est celle de l'arc décrit par un point de cette section situé à l'unité de distance de l'axe. Par conséquent l'arc décrit par un point de cette même section situé à la distance r de l'axe est exprimé par $\theta, h r$. L'arc décrit par un point de la base mobile situé à la distance r de l'axe serait de même exprimé par $\theta, h r$; et l'arc Θ décrit par un point de cette même base situé à 1^m de l'axe aurait pour valeur

$$\Theta = \theta, h.$$

III. Supposons maintenant que, la base inférieure étant fixe, le prisme soit sollicité par deux forces égales, parallèles et de sens contraire P, — P, appliquées dans le plan de la base supérieure à la distance $\frac{1}{2} p$ de l'axe, et par conséquent à la distance p l'une de l'autre; et considérons l'équilibre de la portion du prisme comprise entre la base mobile et une section quelconque située à la distance h de la

base fixe. Les forces P et —P feront éprouver au prisme une certaine torsion; et l'équilibre ne pourra s'établir que parce que cette déformation fait naitre, dans la section considérée, des forces moléculaires f , que l'on nomme *forces élastiques*, et qui tendent à s'opposer à la rotation de la section considérée, par rapport à la section qui la précède. On conçoit qu'on ne puisse, par des expériences directes, déterminer la valeur de chacune de ces forces; mais on fait une hypothèse sur la loi que suit cette valeur; et les conséquences auxquelles on est conduit peuvent être vérifiées par l'expérience, et se vérifient en effet.

On admet que la force f (fig. 2) qui s'exerce sur

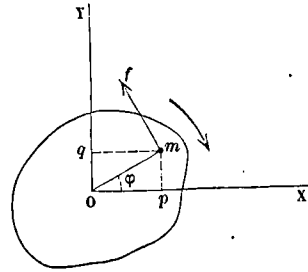


Fig. 2.

un élément $d\omega$ de la section, est proportionnelle à l'étendue de cet élément, à l'arc qu'il a décrit autour de l'axe O pour venir prendre la position m , et en raison inverse de la distance h de la section considérée à la base fixe. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, l'arc décrit par le point m situé à la distance $Om = r$ de l'axe, et à la distance h de la base fixe, a pour expression

$$\theta, h r;$$

on a donc, en désignant par G un coefficient numérique,

$$f = G d\omega \cdot \frac{\theta, h r}{h}$$

ou

$$f = G d\omega \cdot \theta, r. \quad [2]$$

Le coefficient G est ce que l'on appelle le *coefficient de torsion*. On appelle *résistance par mètre carré sur l'élément $d\omega$* , le quotient $\frac{f}{d\omega}$; et on désigne cette résistance par F. En vertu de l'équation [2] on a donc

$$F = G \theta, r. \quad [3]$$

La portion du prisme que nous considérons est donc en équilibre sous l'action du couple P, —P, et des forces élastiques f que nous venons de définir. Il s'exerce bien entre deux tranches consécutives quelconques, comprises dans cette portion de prisme, des forces élastiques analogues; mais ce sont des forces *mutuelles*; c'est-à-dire que les actions exercées par l'une des deux tranches consécutives sur l'autre sont respectivement égales et opposées à celles que cette autre exerce sur la première; et par conséquent ces forces disparaissent quand on considère l'équilibre de la portion de prisme dont il s'agit; et l'on n'a à tenir compte que du couple P, —P, et des forces élastiques f exercées, dans le plan situé à la distance h de la base fixe, de la part de la tranche immédiatement infé-

rière à ce plan, sur celle qui a sa base inférieure dans ce même plan.

IV. Appliquons au système des forces f et des forces P et $-P$, les conditions d'équilibre (Voy. EQUILIBRE). Prenons deux axes rectangulaires OX et OY passant par le point O . Projétons d'abord les forces sur l'axe des x ; la somme algébrique des projections des forces P et $-P$ sera nulle, et il restera

$$\Sigma f \cos \varphi = 0,$$

en appelant φ l'angle de la droite Om avec l'axe des x . Si l'on met pour f sa valeur $G \, d\omega \, \theta_1 \, r$ et pour $\cos \varphi$ sa valeur $\frac{x}{r}$, en appelant x l'abscisse du point m , il viendra

$$\Sigma G \, d\omega \, \theta_1 \, r \cdot \frac{x}{r} = 0 \text{ ou } G \theta_1 \Sigma x \, d\omega = 0. [4]$$

Projétons de même les forces sur l'axe des y , il viendra

$$\Sigma f \sin \varphi = 0$$

ou, en remplaçant f par sa valeur et $\sin \varphi$ par $\frac{y}{r}$, y étant l'ordonnée du point m ,

$$\Sigma G \, d\omega \, \theta_1 \, r \cdot \frac{y}{r} = 0 \text{ ou } G \theta_1 \Sigma y \, d\omega = 0. [5]$$

Or, si X et Y désignent les coordonnées du centre de gravité de la section considérée, et Ω l'aire de cette section, on a (Voy. CENTRE DE GRAVITÉ)

$$\Sigma x \, d\omega = \Omega X \text{ et } \Sigma y \, d\omega = \Omega Y;$$

les équations [4] et [5] deviennent donc

$$G \theta_1 \Omega X = 0 \text{ et } G \theta_1 \Omega Y = 0,$$

équations qui exigent qu'on ait

$$X = 0 \text{ et } Y = 0;$$

c'est-à-dire que le centre de gravité de la section n'est autre que le point O . Et comme on en pourrait dire autant pour une section quelconque, on voit que l'axe de torsion est celui qui passe par les centres de gravité de toutes les sections transversales du prisme.

V. Prenons maintenant les moments des forces par rapport à l'axe, nous aurons

$$\Sigma fr = Pp$$

ou, en mettant pour f sa valeur,

$$G \theta_1 \Sigma r^2 \, d\omega = Pp.$$

Mais $\Sigma r^2 \, d\omega$ n'est autre chose que le MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot) de la section par rapport à l'axe; en le désignant par I on aura donc

$$G \theta_1 I = Pp. [6]$$

On tire de là

$$G = \frac{Pp}{\theta_1 I} = \frac{PpH}{\Theta I}. [7]$$

Cette relation permet de déterminer le coefficient de torsion G . Pour cela, il suffit de déterminer l'intensité P des forces qui produisent la torsion, la distance p de ces forces, la longueur H du prisme, l'angle Θ dont la base mobile a tourné par rapport à la base fixe, et enfin le moment d'inertie I de la section transversale par rapport à l'axe de torsion.

C'est ainsi qu'on a pu déterminer les valeurs de G consignées dans le tableau suivant.

Nature des matériaux.	Coefficient de torsion.
Fer.....	6.10^9 à $6,66.10^9$
Acier.....	10.10^9
Fonte.....	2.10^9
Cuivre.....	$4,37.10^9$
Chêne.....	$0,4.10^9$
Sapin.....	$0,43.10^9$

VI. La résistance F par mètre carré, donnée par l'équation [3], peut s'écrire, en vertu de la relation [7],

$$F = \frac{Pp}{I} \cdot r. [8]$$

Cette force est donc, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la distance r de l'élément considéré à l'axe de torsion. Son maximum a donc lieu pour le point de la section transversale qui est le plus éloigné de cet axe.

Si, par exemple, la section est un cercle de rayon ρ , le maximum de F aura lieu pour

$$r = \rho.$$

En même temps on aura

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho^4;$$

il viendra donc pour le maximum de F ,

$$F = \frac{2 Pp \cdot \rho}{\pi \rho^4} = \frac{2 Pp}{\pi \rho^3}. [9]$$

Si la section est un carré dont le côté soit c , le maximum de F aura lieu pour l'un des points situés à l'extrémité d'une des diagonales, c'est-à-dire pour

$$r = \frac{1}{2} c \sqrt{2}.$$

En même temps on aura

$$I = \frac{1}{6} c^4;$$

on aura donc pour le maximum de F

$$F = \frac{6 Pp \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{2}}{c^4} = \frac{3 Pp \sqrt{2}}{c^3}.$$

VII. D'après les propriétés connues de l'hélice, la tangente en M' (fig. 1) à l'hélice $A'M'B$ fait avec l'axe du cylindre un angle α dont la tangente est donnée par la relation

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AB} = \frac{\theta_1 h r}{h} = \theta_1 r = \frac{F}{G}. [11]$$

L'expérience a montré que, pour le fer, le maximum de l'angle α , correspondant à la fibre la plus éloignée de l'axe, c'est-à-dire la valeur de cet angle qu'il ne faut pas atteindre pour que la limite d'élasticité de la matière ne soit pas dépassée, est celle qui répond à

$$\tan \alpha = 0,0023.$$

On a donc, en appelant F le maximum de résistance à la torsion pour ce métal,

$$F = G \, 0,0023 = 6.10^9 \cdot 0,0023,$$

ce qui donne

$$F = 13800000^k,$$

ou environ 14^k par millimètre carré.

Dans la pratique, on ne dépasse pas 6^k par millimètre carré, ce qui donne

$$\tan \alpha = \frac{6 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^9} = 0,001,$$

d'où

$$\alpha = 3'26''.$$

Pour la fonte, on ne dépasse pas 2^k par millimètre carré, ce qui donne également

$$\tan \alpha = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^9} = 0,001$$

ou

$$\alpha = 3'26''.$$

(La valeur $\tan \alpha = 0,0023$ répond à $\alpha = 7'54''$.)

On voit qu'en réalité les hélices que forment les fibres longitudinales du prisme, lorsqu'il a été tordu

de manière à ne pas altérer l'élasticité de la matière, n'ont qu'une très-faible inclinaison par rapport à l'axe de torsion.

On pourrait, comme pour l'ALLONGEMENT (Voy. ce mot) diviser la torsion en deux parties : l'une qui subsiste après que la cause qui a produit la torsion a disparu, et que l'on pourrait nommer la *torsion permanente*; l'autre qui disparaît quand cette cause cesse d'agir, et qu'on pourrait appeler la *torsion élastique*. La torsion permanente est insensible tant qu'on se renferme dans les limites indiquées ci-dessus.

VIII. Comme application de la théorie qui précède, nous supposons qu'une barre de fer de 10^m de long, à section carrée, solidement maintenue par l'une de ses extrémités, soit tordue à l'aide de deux forces formant un couple, appliquées à l'autre extrémité à 0^m,25 de l'axe, de manière que cette extrémité fasse un quart de tour, et nous nous proposerons de déterminer la section de telle sorte que la résistance à la torsion ne dépasse pas 12^k.10⁶ par millimètre carré.

Nous aurons ici

$$\Theta = \frac{\pi}{2} H = 10^m, \quad p = 0,50, \quad F = 12^k.10^6.$$

La formule [3], qu'on peut écrire

$$F = G \cdot \frac{\Theta}{H} \cdot r,$$

d'où

$$r = \frac{F}{G} \cdot \frac{H}{\Theta},$$

donnera donc

$$r = \frac{12.10^6}{6.10^9} \cdot \frac{10.2}{\pi} = 0^m,0127,$$

d'où

$$\frac{1}{2} c \sqrt{2} = 0^m,0127$$

et

$$c = \frac{0^m,0127 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 0,01796.$$

L'équation [10] donnera ensuite

$$P = \frac{F \cdot c^3}{3 p \sqrt{2}} = \frac{F \cdot c^3 \sqrt{2}}{6 p} = \frac{12.10^6 (0,01796)^3 \cdot 1.4142}{6,0^m,50}$$

ou

$$P = 16^k,388.$$

(Voy. la *Théorie de la Résistance des solides*, par M. Bélanger.)

TOUAGE, traction d'un bateau à l'aide d'une corde sur laquelle on agit d'un point fixe, soit à bras, soit à l'aide d'un CABESTAN (Voy. ce mot). Cette traction peut s'opérer de deux manières : ou bien le câble, fixé au bateau par l'une de ses extrémités, s'enroule par l'autre sur un cabestan établi à terre; ou bien l'une des extrémités du câble est fixée à terre, et l'autre extrémité s'enroule sur un cabestan établi à bord. Le résultat est le même dans les deux cas.

On nomme *touage à chaîne fixe*, un mode de transport des bateaux à l'aide d'une chaîne reposant sur le lit de la rivière (Voy. NAVIGATION INTÉRIEURE).

TOUPIE GYROSCOPIQUE, appareil qui sert à démontrer expérimentalement certaines propriétés relatives à la rotation des corps. Cette toupie n'est autre chose qu'un tore métallique très-pesant M (fig. 1), rempli à l'intérieur, mobile autour d'un

axe OA qui coïncide avec son axe de figure, et sur lequel il peut tourner à frottement doux. On imprime au tore un mouvement rapide de rotation autour de son axe, par le procédé que les enfants

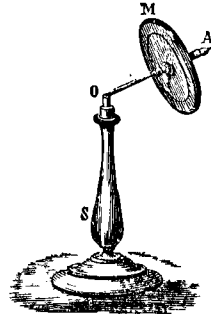


Fig. 1.

emploient pour faire tourner une toupie, c'est-à-dire à l'aide d'une ficelle. On pose alors l'une des extrémités de l'axe sur le bout d'un support S, et l'on voit l'axe OA prendre un mouvement lent de rotation autour de la verticale du point O, en continuant à faire un angle constant avec cette verticale, jusqu'à ce que le frottement vienne à ralentir le mouvement de rotation du tore autour de OA; cet axe s'incline alors peu à peu vers le sol, et le tore finit par tomber.

La théorie de cet appareil se rattache à celle du mouvement relatif (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS); et voici, sauf quelques modifications de détail, comment M. Bélanger en a rendu compte en 1859, dans son cours de Mécanique appliquée à l'École polytechnique :

Soit OX (fig. 2) l'axe de rotation du tore, ω sa

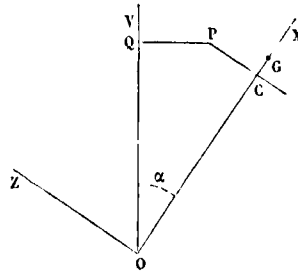


Fig. 2.

vitesse angulaire autour de cet axe. Soit OV la verticale du point d'appui, α l'angle de l'axe OX avec la verticale. Désignons par M un point matériel quelconque faisant partie du tore, et se projetant en P sur le plan des deux droites OX et OV. Soit m la masse de ce point matériel; soient x, y, z ses coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires, OX et OZ dans le plan VOX, et OY perpendiculaire à ce plan. Enfin soit ω la vitesse angulaire avec laquelle le système de ces trois axes tourne autour de OV. En vertu du théorème sur le mouvement relatif auquel nous venons de renvoyer, le point M se meut, par rapport aux axes OX, OY, OZ, comme s'il était soumis à trois forces : 1° une force F, résultante du poids du point matériel et des forces

moléculaires qu'il reçoit des autres points du système (si le point considéré était celui qui se trouve en O, il faudrait ajouter à ces forces la réaction du support); 2° une force φ_1 , qui n'est autre que la force centrifuge correspondante à la rotation du point considéré autour de OV; 3° une seconde force apparente ou fictive φ_2 définie de la manière suivante: Soit ρ la distance du point M à l'axe OX, la vitesse relative du point M est $\omega\rho$; soit u la projection horizontale de cette vitesse relative; la force φ_2 a pour valeur

$$\varphi_2 = 2mwu,$$

et on obtient sa direction en faisant tourner u de 90° dans son plan, dans le sens contraire à la rotation w .

Cela posé, le mouvement relatif du point M étant uniforme, la somme des moments des trois forces considérées par rapport à l'axe OY doit être nulle; et il en sera de même pour tout autre point matériel appartenant au tore. Si l'on écrit pour chaque point que cette somme de moments est nulle, et que l'on fasse la somme de toutes les équations écrites, l'équation résultante exprimera que la somme des moments de toutes les forces réelles et apparentes appliquées aux différents points du système est égale à zéro. Mais, dans cette somme, toutes les forces moléculaires disparaissent comme étant mutuelles, et donnant par conséquent des moments qui sont deux à deux égaux et de signe contraire. Le résultat exprime donc que l'on obtient zéro en faisant la somme des moments des poids de tous les points matériels, de toutes les forces centrifuges analogues à φ_1 , et de toutes les deuxièmes forces fictives analogues à φ_2 . (Le moment de la réaction de l'appui disparaît puisqu'elle rencontre l'axe OY.)

Soit P le poids du tore, qu'on peut supposer appliqué en son centre de gravité G, situé sur l'axe de figure OX; soit l la distance OG; le moment dû à la pesanteur sera

$$Pl \sin \alpha.$$

La force φ_1 a pour expression $m w^2 r$, en appelant r la distance du point M à l'axe OV. Si, pour avoir son moment, on la projette d'abord sur le plan ZOY perpendiculaire à OY, on obtient pour projection $m w^2 \cdot PQ$ (PQ étant la perpendiculaire abaissée de P sur OV); et le moment cherché est exprimé par

$$m w^2 \cdot PQ \cdot OQ.$$

Mais on a

$$PQ = x \sin \alpha - x \cos \alpha \quad \text{et} \quad OQ = x \cos \alpha + x \sin \alpha;$$

par conséquent

$$m w^2 PQ \cdot OQ = m w^2 [\sin \alpha \cos \alpha (x^2 - x^2) + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) x x];$$

ce qu'on peut écrire

$$m w^2 [\sin \alpha \cos \alpha (x^2 + x^2) - 2 x^2 + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) x x].$$

En faisant la somme de tous les moments analogues, on aura donc

$$\Sigma \mathcal{L} \varphi_1 = w^2 [\sin \alpha \cos \alpha (\Sigma m (x^2 + x^2) - 2 \Sigma m x^2) + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \Sigma m x x].$$

Or, le plan ZOY étant un plan de symétrie du tore, on a $\Sigma m x x = 0$. Le terme $\Sigma m (x^2 + x^2)$ n'est autre chose que le moment d'inertie (Voy. ce mot) du corps par rapport à l'axe OY; nous le désignerons par I_y . La quantité $\Sigma m x^2$ est la moitié du moment d'inertie du tore par rapport à l'axe OX,

car, ce corps étant de révolution autour de OX, on a

$$\Sigma m x^2 = \Sigma m y^2 = \frac{1}{2} \Sigma m (y^2 + x^2) = \frac{1}{2} \Sigma m \rho^2 = \frac{1}{2} I_x,$$

en désignant par I_x le moment d'inertie du tore par rapport à son axe de figure. Il vient donc

$$\Sigma \mathcal{L} \varphi_1 = w^2 [\sin \alpha \cos \alpha (I_y - I_x)].$$

Pour obtenir le moment de la force φ_2 , remplaçons d'abord la vitesse relative $\omega\rho$ (dont la projection horizontale est u) par ses composantes parallèles aux axes OZ et OY. Comme cette vitesse relative est perpendiculaire au rayon ρ , ses composantes suivant les deux directions indiquées seront respectivement ωy et ωx . La projection horizontale de la première est $\omega y \cos \alpha$; multipliant par $2mw$ et faisant tourner d'un angle droit dans le sens contraire à la rotation w , on obtiendra $2m w \omega y \cos \alpha$ pour l'une des composantes de la force φ_2 , et cette composante sera dirigée dans le sens des y . Le moment de cette force par rapport à OY est donc nul, et il n'y a pas à s'en occuper. La projection horizontale de la deuxième composante de $\omega\rho$, c'est-à-dire la projection horizontale de ωx , est ωx lui-même; multipliant par $2mw$, on obtient $2m w \omega x$ pour l'expression de la deuxième composante de φ_2 , et, en la faisant tourner d'un angle droit dans le sens contraire à la rotation w , on voit qu'elle est dirigée perpendiculairement à l'axe des y , c'est-à-dire parallèlement à l'horizontale PQ, et que son moment est $-2m w \omega x \cdot OQ$ ou

$$-2m w \omega x (x \cos \alpha + x \sin \alpha).$$

La somme de tous les moments analogues est donc

$$-(2w \omega \cos \alpha \Sigma m x x + 2w \omega \sin \alpha \Sigma m x^2).$$

Mais on a vu que $\Sigma m x x = 0$ et que $\Sigma m x^2 = \frac{1}{2} I_x$;

la somme des moments des forces φ_2 se réduit donc à

$$\Sigma \mathcal{L} \varphi_2 = -w \omega I_x \sin \alpha.$$

L'équation exprimant que la somme de tous les moments est nulle, est donc

$$Pl \sin \alpha + w^2 \sin \alpha \cos \alpha (I_y - I_x) - w \omega \sin \alpha \cdot I_x = 0. [1]$$

Cette condition est satisfaite d'elle-même pour $\sin \alpha = 0$ ou $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand l'axe de révolution du tore est placé verticalement. Si l'on supprime le facteur $\sin \alpha$, il reste

$$Pl + w^2 \cos \alpha (I_y - I_x) - w \omega I_x = 0. [2]$$

Telle est la condition qui doit être remplie pour que les deux mouvements de rotation se maintiennent, en dépit de l'action de la pesanteur.

On peut remarquer que la condition [2] est satisfaite par $l = 0$ et $w = 0$. L'expérience montre en effet que lorsque le centre de gravité du tore est au point de suspension, la rotation du tore autour de son axe de figure se maintient sans que cet axe change de position dans l'espace.

Dans le cas particulier où $\alpha = 90^\circ$, il reste

$$Pl - w \omega I_x = 0, \quad \text{d'où} \quad w = \frac{Pl}{\omega I_x}. [3]$$

Pour toute autre valeur de α , l'équation [2] donne pour w deux valeurs. Elles sont réelles quand on a

$$\omega^2 I_x^2 > 4 (I_y - I_x) Pl \cos \alpha.$$

Mais la plus grande ne convient pas à la question, car elle tend vers l'infini à mesure que α tend vers zéro; et l'expérience montre, en effet, que c'est la plus petite des valeurs de w qui se réalise. Cette plus petite valeur de w change de signe quand α

devient plus grand que 90° . Ainsi la rotation w est de même sens que la rotation ω pour $\alpha < 90^\circ$, et elle est de sens contraire pour $\alpha > 90^\circ$. Mais quand cette seconde circonstance se réalise, le tore ne tarde pas à tomber.

Le même changement de sens a lieu quand le moment Pl change de signe, c'est-à-dire quand le centre de gravité du corps tournant, au lieu d'être placé au-dessus du point de suspension, se trouve placé au-dessous. On réalise cette disposition à l'aide d'un appareil connu sous le nom de *BALANCE GYROSOPHIQUE* (*Voy. ce mot*) auquel cette théorie est applicable.

Les considérations qui précèdent montrent bien comment la double rotation autour de OX et autour de OY peut se maintenir, malgré l'effort de la pesanteur; mais on peut demander comment la seconde rotation peut naître de la première. Pour le concevoir, il faut imaginer qu'au moment où l'on pose l'axe OA (fig. 1) du tore sur le support S , on empêche la rotation de cet axe autour de OY . En vertu de la pesanteur, le système tendra à tourner autour de l'axe OY avec une certaine vitesse angulaire w' . Si l'on rend alors au système la liberté de tourner autour de OY , un point quelconque M du tore se mouvra par rapport au système des axes OX , OY , OZ définis plus haut, comme s'il était soumis: 1° à son poids et aux autres forces moléculaires provenant des autres points matériels; 2° à une force centrifuge φ'_1 , correspondante à la rotation w' autour de OY ; 3° à une seconde force fictive φ'_2 , définie comme il suit; w' étant la projection de la vitesse relative $\omega\rho$ sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation OY , la force φ'_2 a pour expression $2mw'w'$; et pour obtenir sa direction, il faut faire tourner w' de 90° dans un plan perpendiculaire à OY , et dans le sens contraire à la rotation w' .

Prenons les moments de ces diverses forces par rapport à l'axe OZ . Le moment de la pesanteur est nul, puisque le point G étant sur OX , la verticale de ce point rencontre l'axe OZ prolongé. Les moments des forces moléculaires, qui sont mutuelles, sont deux à deux égaux et de signe contraire, et disparaissent par conséquent. En vertu d'un théorème de M. Poncelet, étendu aux figures à trois dimensions (*Voy. FORCE CENTRIFUGE*), la résultante des forces centrifuges φ'_1 est la force centrifuge du centre de gravité; en conséquence, son moment par rapport à OZ est nul, puisqu'elle est dirigée suivant GO .

Restent donc les forces φ'_2 . La vitesse relative $\omega\rho$ étant dirigée perpendiculairement à ρ , sa projection w' sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation OY , c'est-à-dire sur le plan ZOX , est ωy . La valeur de φ'_2 est donc $2mw'\omega y$; et pour avoir sa direction, il faut la faire tourner de 90° en sens contraire de la rotation w' , en sorte qu'elle est dirigée parallèlement à OX . Son moment est donc $2mw'\omega y^2$; et la somme de tous les moments analogues est $2w'\omega \Sigma m y^2$. Mais on a vu plus haut que $\Sigma m y^2 = \frac{1}{2} I_x$, la somme des moments des forces φ'_2 a donc pour valeur $w'\omega I_x$, quantité différente de zéro. Il en résulte pour le système une tendance à tourner autour de OZ . Cette rotation peut se décomposer en deux autres, dont l'une autour de la verticale OV ; c'est cette composante

qui produit la vitesse w que nous avons admise d'abord. (*Voy. APPAREIL DE BOHNENBERGER.*)

TOUR, nom par lequel on désignait autrefois le **TREUIL**, mais qui est rarement employé aujourd'hui (*Voy. TREUIL*).

TOUR, machine-outil dont la fonction est de donner aux corps la forme d'un solide de révolution. Le principe de cette machine consiste à donner au corps un mouvement de rotation autour d'un axe, sous l'action d'un outil tranchant qui reste fixe pendant une même révolution, mais qu'on peut déplacer, soit parallèlement à l'axe, soit perpendiculairement à cet axe. Tant que l'outil demeure fixe, il trace un parallèle de la surface de révolution demandée; la nature de cette surface ne dépend donc que de la loi suivant laquelle s'effectue le déplacement de l'outil. Malgré la variété de leurs dispositions et de leurs dénominations, les tours ne forment que deux classes: les *tours à pointes* et les *tours en l'air*. Un tour à pointe est un tour dans lequel l'axe de la pièce à tourner est maintenu par les deux extrémités au moyen de pointes coniques. Un tour en l'air est un tour dans lequel la pièce à tourner n'est maintenue qu'à l'une des extrémités de son axe de rotation. Presque toujours un tour est disposé de manière à pouvoir servir à volonté de tour à pointes ou de tour en l'air; on en verra plus loin l'utilité.

I. Comme exemple de tour à pointes, nous décrirons le *tour parallèle*, qui répond à des besoins variés et qui forme aujourd'hui l'un des éléments essentiels d'un atelier de construction de machines. Nous aurons à décrire en premier lieu l'outil, avec le système qui lui sert de guide, en second lieu le tour proprement dit.

L'outil, auquel on donne le nom de *crochet*, est une lame d'acier trempée au degré convenable, et qui a l'une des formes indiquées par les figures 1 ou 2; la première s'emploie pour les métaux non

Fig. 1.



Fig. 2.

ductiles, comme la fonte; la seconde pour les métaux ductiles, comme le fer et le cuivre. Cet outil est porté par une pièce susceptible d'un double mouvement et que l'on appelle le *chariot*. Ce chariot repose sur deux pièces longitudinales parallèles, horizontales et de même hauteur, faisant partie du bâti de la machine, et auxquelles on donne le nom de *jumelles*, AA (fig. 3 et 4). A leur partie supérieure, elles offrent une section triangulaire. La partie inférieure du chariot présente des rainures de même forme; et le chariot, à l'aide de ces rainures, peut prendre un mouvement de translation suivant la longueur des jumelles. Pour déterminer ce mouvement, on se sert d'une vis VV , qui tourne dans des collets fixes, faisant partie des traverses T, T qui unissent les jumelles, et dans un écrou fixé au chariot; si, à l'aide de la manivelle M , on donne un mouvement de rotation à la vis,

comme elle ne peut avancer dans le sens de son axe, c'est l'écrou qui est obligé de prendre ce mouvement de translation en entraînant le chariot auquel il est fixé. La partie inférieure du chariot en

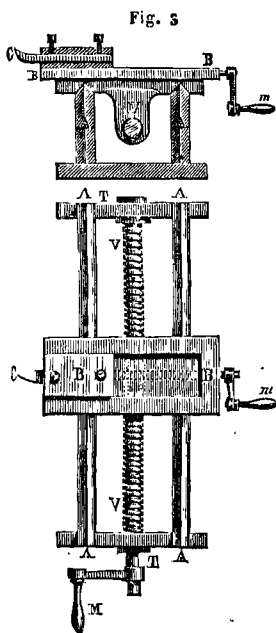


Fig. 4.

contact avec les jumelles porte une partie supérieure BB mobile, à l'aide de languettes et de rainures, perpendiculairement à la direction des jumelles; une manivelle *m* faisant mouvoir une vis mobile entre des collets fixés au chariot et dans un écrou fixé à la pièce BB, fait avancer ou reculer cette pièce, exactement de la même manière que la manivelle M et la vis VV font avancer ou reculer le chariot. C'est cette pièce mobile BB qui porte le crochet C. Cet outil peut donc se mouvoir à volonté d'un mouvement de translation parallèle aux jumelles, à l'aide de la manivelle M, et d'un mouvement de translation perpendiculaire aux jumelles, à l'aide de la manivelle *m*. Les guides de ces deux mouvements sont dressés avec soin, afin de les rendre aussi précis et aussi doux que possible.

II. Sur les jumelles AA (fig. 5) sont établis des

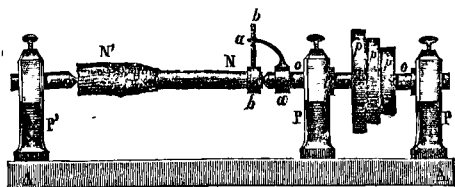


Fig. 5.

appuis P, P', auxquels on donne le nom de *poulies*. Les deux premières P, P' sont fixes, et portent les tourillons de l'axe moteur OO. Le mouvement peut être donné à celui-ci de diverses manières; le plus souvent, c'est au moyen d'une courroie sans

fin passant sur des poulies étagées *p, p, p*, qui permettent de faire varier la vitesse de rotation. Il est nécessaire, en effet, que cette vitesse soit réglée suivant la matière soumise à l'action de l'outil. Pour la fonte grise, les points en contact avec l'outil doivent avoir une vitesse de 6 à 7 centimètres par seconde; pour la fonte blanche, leur vitesse ne doit pas dépasser 2 centimètres; pour le fer, la vitesse doit être de 10 à 12 centimètres; pour le cuivre jaune, elle doit être de 8 à 9 centimètres. — L'axe OO se termine par une pointe, précédée d'une partie filetée; sur cette partie filetée, on visse un anneau muni d'une queue courbe *aa*, auquel on donne le nom d'*écrou à toc*. La pièce à tourner NN est pressée par l'un de ses bouts contre la pointe; ce bout reçoit un anneau muni d'une queue droite ou *toc bb*, qui vient se croiser avec la queue courbe de l'écrou à toc. Quand l'axe moteur est en mouvement, le crochet *aa* entraîne la queue *bb*, et la pièce NN est obligée de tourner avec l'axe moteur. La poupée P' est mobile sur les jumelles; elle peut y être fixée par une vis de pression. Elle est traversée par un cylindre terminé lui-même par une pointe placée sur le prolongement de l'axe moteur OO. C'est cette pointe qui, pressée contre la pièce à tourner NN, détermine, avec la première pointe, l'axe de rotation de cette pièce.

Lorsqu'on maintient l'outil à une distance constante de l'axe de rotation, en se contentant de faire mouvoir graduellement le chariot parallèlement à la direction des jumelles, on obtient des surfaces parfaitement cylindriques, ce qui fait donner quelquefois à ce genre de tour le nom de *tour cylindrique*. Mais il est clair qu'en donnant en même temps à l'outil un mouvement perpendiculaire à la direction des jumelles, pour le rapprocher ou l'éloigner de l'axe, on peut obtenir une surface de révolution à génératrice quelconque.

Cependant, pour les surfaces les plus usitées, on emploie des dispositions spéciales.

Lorsqu'on veut obtenir des surfaces coniques, on fait porter le chariot sur des jumelles particulières que l'on peut placer obliquement par rapport à l'axe de rotation.

Nous verrons tout à l'heure la disposition adoptée pour obtenir les sphères.

Dans les grands ateliers de construction, on rencontre quelquefois des tours parallèles de dimensions considérables. M. Calla a construit pour les ateliers de la marine un tour parallèle de 14^m de longueur, sur 3^m de large, dans lequel l'ouvrier qui manœuvre le porte-outil, est porté par le chariot même.

III. Pour transformer un tour à pointes en un tour en l'air, il suffit d'enlever la poupée mobile, et de remplacer l'écrou à toc par un mandrin dans lequel on encastre la pièce à tourner. Cette disposition permet de tourner la pièce parallèlement à son axe, comme dans le tour à pointes; mais de plus, en plaçant l'outil dans une position oblique à l'axe, ou parallèlement à l'axe, ou suivant l'axe lui-même, on peut tourner la pièce par le bout, la percer et l'évider concentriquement à sa surface extérieure.

Pour obtenir les surfaces sphériques, on se sert d'un support tournant autour d'un axe vertical fixe C (fig. 6), et qu'on fait mouvoir à l'aide d'un engrenage à vis sans fin. Dans chacune de ses positions, la pointe *e* de l'outil trace dans la pièce dégrossie,

fixée à l'extrémité de l'axe moteur OO, un parallèle *ee'* de la sphère; et, en faisant décrire à cette pointe un demi grand cercle de cette sphère, on obtient la

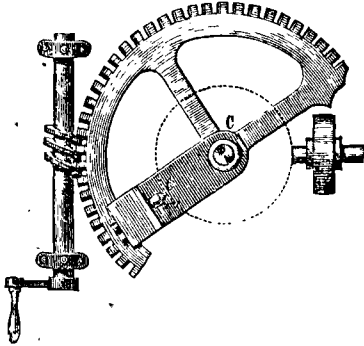


Fig. 6.

surface entière, sauf le point par lequel elle était fixée à l'axe, sur laquelle on revient après coup.

On peut, à l'aide du tour en l'air, dresser une surface plane. Pour cela, on remplace le mandrin par une plate-forme que l'on fixe au bout de l'axe, perpendiculairement à sa direction. On fixe sur cette plate-forme, à l'aide de boulons, ou par tout autre moyen, la pièce que l'on veut dresser; et on l'attaque avec un outil porté sur un chariot mobile dans le sens perpendiculaire à l'axe, mais placé sur ce chariot parallèlement à l'axe. On obtient ainsi une série de bandes circulaires concentriques situées dans un même plan.

IV. Le tour n'est pas toujours muni d'un support à chariot. Le plus souvent, le support de l'outil se fixe en un point quelconque de la jumelle à l'aide d'un boulon à vis. La tête du support est formée de deux bandes horizontales entre lesquelles on engage l'outil, qui peut être maintenu dans sa position par une vis. L'outil peut ainsi se mouvoir parallèlement à lui-même dans toute l'étendue de l'espèce de boîte où il est engagé; mais si l'on veut aller au delà, il faut déplacer le support, et le fixer en un autre point de la jumelle. Il en résulte une perte de temps et une plus grande difficulté pour obtenir des surfaces parfaitement régulières.

V. On donnait autrefois le nom de *tour* à la machine simple qui porte généralement aujourd'hui le nom de *TREUIL* (Voy. ce mot).

TOUR À FILETER, machine-outil servant à tailler des filets carrés ou triangulaires en hélice autour d'une tige cylindrique donnée. Le tour à fileter employé pour l'exécution des fortes vis qu'on rencontre dans les machines, ne diffère du tour ordinaire qu'en ce que l'axe du tour et la vis qui conduit le chariot dans son mouvement parallèle à cet axe, sont liés par un engrenage; de telle sorte que le chariot avance d'une quantité proportionnelle à la rotation effectuée. Il en résulte que le *crochet* (Voy. *Tour*) trace à la surface du cylindre sur lequel il opère une rainure en hélice, dont le pas dépend du rapport des circonférences primitives de l'engrenage. En faisant agir l'outil à plusieurs reprises dans cette rainure, on la creuse à la profondeur nécessaire pour que le filet ait la saillie voulue; ce filet est carré ou triangulaire suivant la forme du *crochet*. On donne à cet outil un épau-

lement pour éviter qu'il ne pénètre dans le cylindre à une profondeur plus grande que celle que l'on veut atteindre.

Le moyen que nous venons d'indiquer ne laisse rien à désirer au point de vue d'une bonne exécution; mais il serait trop dispendieux pour les vis qu'on a le plus fréquemment à faire dans les ateliers, à cause de la nécessité de changer le rapport des engrenages chaque fois que l'on veut obtenir un autre pas. La disposition la plus fréquemment employée est la suivante. L'arbre du tour porte plusieurs séries de filets de vis triangulaires V, V', V'' de différents pas, comme le montre la figure 1, et

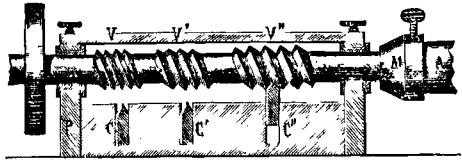


Fig. 1.

appelées *vis-mères*. Il repose sur les poupées PP de manière à pouvoir tourner sur lui-même et à glisser au besoin dans le sens longitudinal. Au-dessous de ces diverses vis, sont placées des *clefs* C, C', C'' dont la disposition est représentée figure 2. Quand on

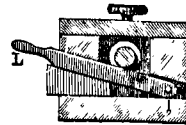


Fig. 2.

soulève le levier L, mobile autour de son extrémité I, son tranchant s'introduit entre deux filets consécutifs de la vis, et joue à l'égard de cette vis le rôle d'un écrou fixe, il en résulte que le mouvement de rotation du tour détermine en même temps un mouvement de translation suivant l'axe; c'est-à-dire, en résumé, un mouvement hélicoïdal. Le cylindre à fileter AA (fig. 1) est encastré dans un mandrin M vissé à l'extrémité de l'arbre du tour, et repose par son autre extrémité sur un support qui n'a pas été figuré. Lorsque l'on fait prendre un mouvement hélicoïdal à l'arbre du tour en soulevant une des clefs, l'outil ou crochet fixe creuse dans le cylindre M une vis de même pas que celle qui correspond à la clef soulevée, et qui peut d'ailleurs être à filet carré ou triangulaire suivant la forme du crochet. Pour les vis triangulaires, qui sont d'un usage très-fréquent, on emploie un crochet en forme de peigne, représenté par la figure 3.

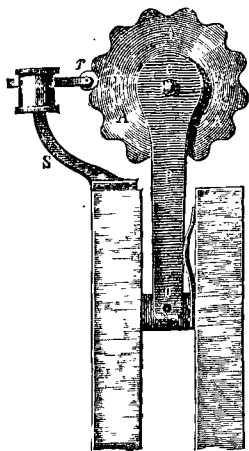


Fig. 3.

Les vis triangulaires de petites dimensions s'exécutent aussi à la *FILETÈRE* (Voy. ce mot).

TOUR À GULLOCHER, machine-outil qu'on emploie pour exécuter les *gullochis*, sortes d'ornements résultant de courbes ondulées, juxtaposées ou

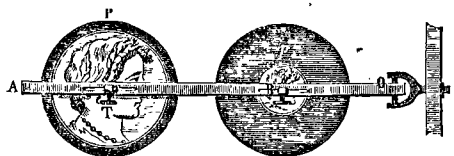
entre-croisées. Cette machine est analogue à un tour en l'air (Voy. TOUR), disposé pour dresser les surfaces planes; c'est-à-dire que, le chariot étant mobile perpendiculairement à l'axe du tour, l'outil



est placé parallèlement à cet axe. La pièce à guillocher est fixée sur un mandrin vissé à l'extrémité du tour. Mais les poupées P ne sont pas fixes; elles descendent entre les jumelles et sont mobiles autour d'un axe O parallèle à celui-ci du tour C, comme l'indique la figure. Sur l'axe C sont montées une série de 15 à 20 disques métalliques à contours ondulés, auxquels on donne le nom de *rosettes*; AAA représente une de ces rosettes. Elle s'appuie par son contour contre une roulette r mobile autour d'un axe fixé à l'extrémité d'un support S adapté à l'une des jumelles, mais pouvant glisser parallèlement à l'axe du tour pour passer d'une rosette à l'autre. Un fort ressort appuie constamment les poupées du côté où se trouve le support S. Il résulte de ce dispositif que lorsque l'arbre du tour est en mouvement, la rosette, sans cesse ramenée vers la roulette, la touche successivement par ses saillies et par ses creux; et comme l'axe de la roulette est fixe, il faut que ce soit l'axe C du tour qui se déplace, en prenant un mouvement oscillatoire autour de l'axe O des poupées. C'est ce mouvement oscillatoire qui produit le guillochis; si l'axe de la rosette était fixe, l'outil ou *crochet*, qui est fixe, tracerait une circonférence sur la surface plane soumise à son action; mais les oscillations de l'axe C font qu'au lieu d'une circonférence il trace une courbe ondulée. En déplaçant l'outil, c'est-à-dire en le rapprochant ou en l'éloignant du centre, on lui fait tracer ainsi des courbes semblables qu'on rapproche ou qu'on éloigne elles-mêmes à volonté. On peut déplacer angulairement ces courbes les unes par rapport aux autres en faisant tourner un peu la rosette sur son axe; on peut les entre-croiser en déplaçant la pièce sur laquelle on opère, etc.; et c'est ainsi que l'on obtient ces ornements variés qu'on remarque sur les boîtes de montres, sur les boutons, etc. Lorsqu'on veut opérer sur une surface légèrement bombée, il faut faire appuyer l'outil à l'aide d'un ressort.

TOUR À PORTRAIT, appareil imaginé par Hulot, pour reproduire les médailles, ou les bas-reliefs de

petite dimension, en les réduisant dans un rapport donné. Le modèle et la matière à travailler sont placés aux centres de deux plateaux P et p fixés perpendiculairement à l'extrémité de deux axes pa-



rallèles. Sur ces axes sont montées deux roues dentées égales qui engrenent avec une même vis sans fin, en sorte que les plateaux tournent constamment de quantités angulaires égales. Devant ces tableaux est établie une barre OA, articulée à l'aide d'un JOINT UNIVERSEL (Voy. ce mot), en un point quelconque O situé dans le plan des deux axes. Cette barre porte en T une *touche*, ou pointe fine, perpendiculaire à sa direction, et en B un *burin* propre à entailler la matière; la touche et le burin sont mobiles dans des rainures où on les fixe à l'aide de vis de pression. Cela posé, si, pendant que les plateaux sont en mouvement, on fait appuyer la touche sur la médaille, sa pointe décrira une certaine courbe; le burin tracera en même temps dans la matière à travailler une courbe semblable, mais réduite dans le rapport de OB à OT. Et si l'on fait mouvoir lentement la barre, de manière que la touche T, partant du centre de la médaille, la traverse dans toute son étendue, les courbes décrites à chaque tour par son extrémité, et dont l'ensemble forme la surface de la médaille, seront reproduites, avec réduction dans un rapport constant, par la pointe du burin entaillant la matière à travailler; on aura donc donné ainsi à cette matière une surface semblable à celle de la médaille; c'est-à-dire qu'on aura obtenu une réduction fidèle de cette médaille. Le mouvement de la vis sans fin qui fait tourner les deux plateaux lui est communiqué par un moteur quelconque; le mouvement lent de la barre OA peut aussi être réglé mécaniquement; enfin on peut, à l'aide d'un ressort convenable, faire appuyer constamment la touche sur le modèle, de telle sorte que la machine fonctionne sans le secours de la main du graveur.

En déplaçant les points B et T, on peut faire varier entre des limites assez éloignées le rapport des distances OB et OT, c'est-à-dire le rapport dans lequel les dimensions linéaires de la médaille sont réduites.

Le tour à portrait rend chaque jour de grands services aux graveurs en médailles.

TOURILLONS, cylindres placés aux extrémités d'un treuil ou de l'arbre horizontal d'une roue et par lesquels il repose sur ses appuis. Ces cylindres ont le même axe que le treuil ou que l'arbre, mais ils sont d'un plus petit diamètre. On diminue le frottement en faisant ce diamètre aussi petit que possible; aussi les tourillons sont-ils généralement en métal et particulièrement en fer (Voy. TREUIL, ARBRES).

Les dimensions transversales des tourillons se déterminent d'après les efforts auxquels ils sont soumis. Si l est la longueur du tourillon et F la

réaction de son appui, s'exerçant au milieu de cette longueur, on peut considérer ce tourillon comme une pièce prismatique encastree à son point de jonction avec l'arbre, et soumise à une force F appliquée en son milieu. On applique en conséquence la formule (Voy. FLEXION PLANE)

$$R = \frac{v\mu}{I} = \frac{vFl}{2I} \quad [1]$$

En représentant par ρ le rayon du tourillon, on a

$$v = \rho \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{4} \pi \rho^4,$$

par suite

$$R = \frac{2Fl}{\pi \rho^3},$$

d'où

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{2Fl}{\pi R}} \quad [2]$$

On fait assez généralement $l = 1,5 \rho$; la formule ci-dessus devient alors

$$R = \frac{3F\rho}{\pi \rho^3},$$

d'où

$$\rho = \sqrt{\frac{3F}{\pi R}} \quad [3]$$

Indépendamment de la flexion, le tourillon peut éprouver aussi un cisaillement; c'est-à-dire que l'effort tranchant qui s'exerce au point d'encastrement tend à séparer le tourillon de l'arbre en le faisant glisser sur le bout de celui-ci. Il faut que le tourillon puisse résister à cet effort; pour cela il faut qu'on ait au plus

$$R' = \Omega F, \quad [4]$$

en appelant Ω la section du tourillon et R' la résistance à la rupture par unité de section. En mettant pour Ω sa valeur $\pi \rho^2$ on tire de cette relation

$$\rho = \sqrt{\frac{F}{\pi R'}}$$

Le coefficient R' est toujours supérieur à R , quand il s'agit de fer forgé; on a donc à plus forte raison

$$R' > \frac{R}{3};$$

il en résulte que la seconde formule donnerait toujours pour ρ une valeur plus petite que celle qu'indique la formule [3]; il suffit donc d'employer l'équation [3].

Il ne faudrait pas, comme on l'a enseigné quelquefois, ajouter la résistance au cisaillement à la résistance à la flexion; ce ne sont pas deux forces différentes qui s'ajoutent; ce sont deux manières d'envisager l'effet d'une même force.

TOURNANT D'UNE VOITURE, angle que font entre eux les deux essieux, et duquel dépend le rayon du cercle dans lequel la voiture tourne.

Soient, en projection horizontale (fig. 1), aa' et bb' les deux essieux, A et B leurs milieux, O le point où l'avant-train est réuni à la voiture, et autour duquel il peut tourner, C le point de rencontre des prolongements des essieux; $ACB = \alpha$ l'angle du tournant; soit T l'extrémité du timon; faisons

$$OA = a, \quad OB = b, \quad AC = R, \quad BT = f.$$

Prolongeons AO jusqu'à sa rencontre en I avec

l'essieu de l'avant-train. Le triangle OIB donne

$$OI = \frac{b}{\cos \alpha}$$

et par suite

$$AI = a + \frac{b}{\cos \alpha}.$$

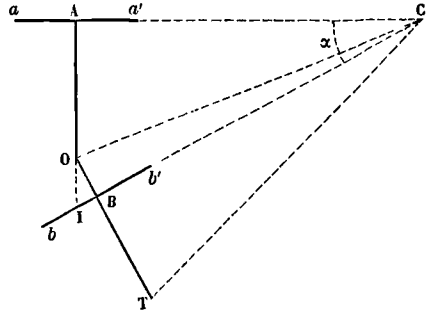


Fig. 1.

Le triangle AIC donne ensuite

$$AI = AC \cdot \tan \alpha$$

ou

$$a + \frac{b}{\cos \alpha} = R \tan \alpha,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{a}{\tan \alpha} + \frac{b}{\sin \alpha} \quad [1]$$

On aura ensuite, en nommant h , l , L les distances des points O, B et T au point C,

$$h = \sqrt{R^2 + a^2}, \quad l = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{R^2 + a^2 - b^2}$$

et

$$L = \sqrt{l^2 + f^2} = \sqrt{R^2 + a^2 - b^2 + f^2}.$$

Si l'on veut avoir les distances du point C aux extrémités extérieures des essieux, on devra ajouter aux longueurs R et l la demi-longueur des essieux.

L'espace nécessaire pour faire faire un demi-tour à la voiture est la somme des distances Ca et Cb , ou Ca et CT , si CT est plus grand que Cb . Cet espace a donc pour expression, en nommant e la demi-longueur des essieux, savoir :

$$R + e + l + e$$

ou

$$R + 2e + \sqrt{R^2 + a^2 - b^2}. \quad [2]$$

et dans le second,

$$R + e + L$$

ou

$$R + e + \sqrt{R^2 + a^2 - b^2 + f^2}. \quad [3]$$

Lorsque les roues de devant ne peuvent pas s'engager sous la voiture, on dit que le tournant est limité; l'angle α a dans ce cas un maximum, et ce maximum répond au minimum de l'espace nécessaire pour faire faire un demi-tour à la voiture.

Lorsque les roues de devant peuvent s'engager librement sous la voiture, le tournant est dit illimité. Le minimum d'espace nécessaire pour faire faire un demi-tour à la voiture répond alors à la position dans laquelle le prolongement de l'essieu de devant va passer par le point A, comme l'indique la figure 2. Le centre de rotation C, de la figure 1, est alors confondu avec le point A; l'angle α du

P désignant le poids total du train, roues et essieux non compris, et *p* le poids total de ces roues et de ces essieux.

V. Si la voie fait avec l'horizon un angle α , chaque poids se décompose en une force perpendiculaire à la voie, qu'on obtient en multipliant ce poids par $\cos \alpha$, et en une force parallèle à la voie, qui s'obtient en multipliant ce même poids par $\sin \alpha$. La pression sur les fusées devient donc

$$P \cos \alpha, \text{ au lieu de } P;$$

la pression normale des roues sur les rails devient de même

$$(P + p) \cos \alpha, \text{ au lieu de } P + p.$$

En même temps la composante du poids total parallèlement à la voie, c'est-à-dire

$$(P + p) \sin \alpha,$$

produit un travail résistant dont il faut tenir compte. La formule [4] devient donc, toujours pour l'unité de parcours,

$$T = fP \cos \alpha \frac{\rho}{r} + f'(P + p) \cos \alpha + \theta \epsilon Av^2 + (P + p) \sin \alpha. \quad [5]$$

L'inclinaison α est généralement assez faible pour qu'on puisse remplacer $\cos \alpha$ par l'unité et $\sin \alpha$ par $\tan \alpha$; on écrit en conséquence

$$T = fP \frac{\rho}{r} + f'(P + p) + \theta \epsilon Av^2 + (P + p) \tan \alpha. \quad [6]$$

Si la pente était descendante, il faudrait changer le signe du dernier terme.

VI. Supposons maintenant que la voie soit courbe; désignons par $2a$ la largeur de la voie et par R son rayon moyen; le rayon du rail extérieur sera $R + a$, et celui du rail intérieur sera $R - a$. Les chemins parcourus dans le même temps par les deux roues l'un même essieu sont dans le rapport des rayons. Pour un parcours du milieu B de l'essieu (fig. 1)

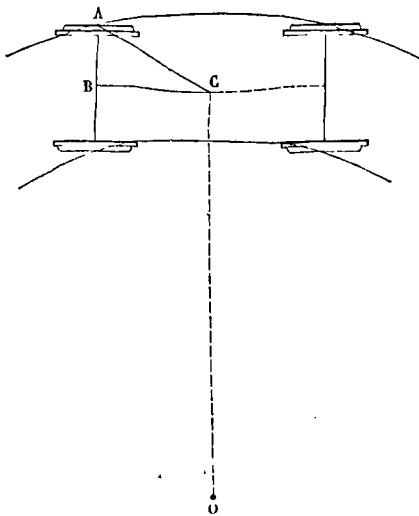


Fig. 1.

exprimé par $2\pi R$, le chemin parcouru par la roue extrême serait $2\pi(R + a)$; d'où il résulte qu'elle aurait glissé de $2\pi a$. Pour un parcours égal à l'unité, le glissement sera donc le quotient $2\pi a$ par

$2\pi R$, c'est-à-dire $\frac{a}{R}$. Il en sera de même pour la roue intérieure; mais le glissement aura lieu en sens contraire. En désignant donc par f'' le coefficient de glissement des roues sur les rails, on aura pour la résistance due au glissement dont il vient d'être parlé, ou pour le travail de cette résistance relatif à l'unité de parcours,

$$f''(P + p) \cdot \frac{a}{R}. \quad [7]$$

Mais ceci suppose que les roues restent tangentes aux cercles qu'elles parcourent. Lorsque, comme cela a lieu d'ordinaire, les essieux sont fixes et parallèles, les roues restent dirigées suivant la corde de l'arc compris, soit entre les deux roues extérieures, soit entre les deux roues intérieures, et alors la formule [7] doit être modifiée. Il y a alors à la fois un glissement tangentiel et un glissement suivant le rayon, et les choses se passent comme si, le centro de figure C du système des essieux, se mouvant uniformément sur le cercle de rayon OC , le wagon tournait uniformément autour de la verticale de ce point C , de manière à accomplir une révolution dans le même temps. Le point C parcourant l'espace $2\pi R$, le point frottant A parcourrait l'espace $2\pi \cdot AC$; par conséquent, le point C parcourant l'unité de longueur, le point frottant A parcourra un chemin marqué par $\frac{2\pi \cdot AC}{2\pi R}$ ou $\frac{AC}{R}$, ou $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R}$, en désignant par b la distance BC . Le travail du frottement pour l'unité de parcours est donc dans ce cas

$$f''(P + p) \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R}. \quad [8]$$

VII. Le wagon est maintenu dans le cercle qu'il décrit par une force centripète qui a pour expression

$$\frac{(P + p) \cdot v^2}{g \cdot R},$$

si l'on suppose toute la masse concentrée en un point situé à égale distance des deux rails, ce qui n'est point rigoureux, mais peut cependant être admis approximativement dans la pratique. Il en résulte, de la part du rebord de la roue contre la partie latérale du rail, un frottement exprimé par

$$\frac{f'''(P + p) \cdot v^2}{g \cdot R},$$

f''' désignant le coefficient de ce frottement. Quant au chemin parcouru dans l'unité de temps par le

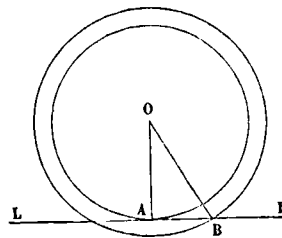


Fig. 2.

point frottant, on l'obtient de la manière suivante. Soit OA (fig. 2) le rayon de la roue et OB celui du rebord; soit LL la tangente en A , représentant le rail. La circonférence OA roulant sur LL , le centre

instantané de la rotation est le point A. Le chemin parcouru par le point frottant B est donc au chemin parcouru par le point O, c'est-à-dire par le wagon lui-même, dans le rapport de AB à AO; et, pendant que le wagon parcourt l'unité de longueur, le point B parcourt un chemin qui est le quotient de AB par AO. Ainsi, le travail du frottement correspondant a pour expression

$$\frac{f'''(P+p)}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \frac{AB}{OA}$$

Or, si l'on désigne par e la largeur du rebord ou OB — OA, on trouve aisément

$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{(r+e)^2 - r^2} = \sqrt{2re + e^2}$.
L'expression du travail dû au frottement latéral pour l'unité du parcours devient donc

$$\frac{f'''(P+p)}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\sqrt{2re + e^2}}{r} \quad [9]$$

Ainsi, le travail additionnel dû au passage sur une courbe est la somme des expressions [8] et [9].

VIII. Le travail total pour l'unité de parcours dans l'hypothèse d'une voie courbe et inclinée serait la somme des expressions [6], [8] et [9], c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= fP \frac{v^2}{r} + f'(P+p) + \theta \cdot Av^2 + (P+p) \tan \alpha \\ &+ f''(P+p) \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{B} \\ &+ \frac{f'''(P+p)}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\sqrt{2re + e^2}}{r} \end{aligned} \right\} [10]$$

On peut remarquer que cette formule exprime à la fois le travail de la traction en kilogrammètres et l'effort de traction en kilogrammes, puisque le chemin parcouru est supposé égal à 1.

IX. D'après l'expérience, le coefficient f est de 0,05 dans un état moyen des fusées. Il descendrait à 0,017 avec un graissage parfait. On prend généralement

$$f = 0,035.$$

Le coefficient f' a été trouvé égal à

$$0,001.$$

Le coefficient θ est

$$0,004823.$$

Le coefficient ϵ varie de

$$1,43 \text{ à } 1,05.$$

On le prend égal à ce dernier nombre pour les trains de plus de quinze wagons, et l'on augmente la surface antérieure du premier wagon d'autant de fois 0^m,10 qu'il y a de wagons.

On prend

$$f''' = 0,16.$$

Quant au coefficient f''' , on manque à cet égard de données certaines; mais on peut le prendre égal à f'' sans grand inconvénient.

Avec ces données, et en remarquant que le rapport $\frac{b}{r}$ a généralement pour valeur 0,075, la formule [10] prend la forme

$$\left. \begin{aligned} T &= 0,0036 P + 0,001 (P+p) + 0,005 Av^2 \\ &+ (P+p) \tan \alpha + 0,16 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{g} (P+p) \\ &+ 0,16 \frac{(P+p)}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\sqrt{2re + e^2}}{r} \end{aligned} \right\} [11]$$

Cette formule montre que le travail à vaincre croît avec le poids du convoi, avec sa vitesse, avec la pente ascendante de la voie, et qu'il est d'autant

plus grand que le rayon des courbes parcourues est plus petit.

Pour les grandes vitesses de 60 à 100 kilomètres à l'heure, et pour des trains dont le poids total est compris entre 20 et 100 tonnes, M. Harding a donné une formule empirique qui fait connaître en kilogrammes la résistance totale par tonne. Si T' désigne cette résistance et Q le poids du train exprimé en tonnes, on a, d'après cet auteur,

$$\left. \begin{aligned} T' &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 72 + 0,094 v \\ &+ 0,00484 \frac{Av^2}{Q} + 1000 \tan \alpha \end{aligned} \right\} [12]$$

X. Indépendamment des résistances régulières dont il a été parlé jusqu'ici, le convoi peut éprouver des résistances accidentelles qui ne sauraient être soumises au calcul. L'une des plus importantes est celle qui est due à l'action du vent. D'après les expériences de MM. Lardner et Morin, cette action augmente la résistance d'une quantité proportionnelle au poids du convoi, et qui varie de

$$0,005 (P+p) \text{ à } 0,010 (P+p)$$

environ. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que le vent *debout*, n'agissant que sur une surface réduite, a beaucoup moins d'influence qu'un vent de côté sous une incidence oblique.

XI. L'expression de T donnée par l'équation [11] représentant le travail résistant du convoi pour l'unité de parcours, le produit Tv exprimera le travail résistant par seconde : c'est celui que la locomotive doit fournir. En nommant donc N le nombre effectif de chevaux-vapeur représentant le travail réellement transmis aux roues motrices, on devra avoir

$$Tv = N \cdot 75. \quad [13]$$

En mettant pour T la valeur [11], on aura une relation qui permettra de calculer la puissance motrice nécessaire pour remorquer, avec une vitesse donnée, un train dont le poids et les dimensions sont connues.

Si, au contraire, on regarde cette puissance motrice comme connue, la relation [13] fera connaître, à l'aide de quelques tâtonnements, soit le poids du convoi que la locomotive pourra remorquer à une vitesse donnée, soit la vitesse avec laquelle elle pourra remorquer un convoi dont le poids est connu.

(Voy. le *Traité élémentaire des chemins de fer* de M. Perdonnet.)

TRAIN DE MOUFLES, dispositif dans lequel plusieurs palans sont combinés de telle sorte que la chape mobile du premier est attachée au garant du second (Voy. PALAN), la chape mobile du second au garant du troisième, et ainsi de suite, la chape mobile du dernier recevant la charge ou l'effort résistant à vaincre.

Si, par exemple, on se sert de trois palans dont les nombres de courants ou brins soient respectivement n , n' et n'' , en appelant F la force mouvante, P la force résistante, T' et T'' les tensions des garants des deux derniers palans, on aura, en négligeant le frottement et la raideur des cordes,

$$F = \frac{T'}{n}, \quad T' = \frac{T''}{n'}, \quad T'' = \frac{P}{n''};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$F = \frac{P}{n \cdot n' \cdot n''}.$$

Pour

$$n = n' = n'' = 6,$$

on aurait ainsi

$$F = \frac{P}{6^3} \text{ ou } F = \frac{P}{216}.$$

TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX, rouages dans lesquels certaines roues tournent autour d'un axe qui se transporte lui-même dans l'espace en tournant autour d'un axe fixe, de telle sorte que chaque point de ces roues décrit dans l'espace une épicycloïde plane ou sphérique (*Voy. ÉPICYCLOÏDES*). Avant de considérer la question à son point de vue le plus général, nous étudierons d'abord deux cas particuliers, qui sont le plus fréquemment employés dans la pratique, et le plus fréquemment deux types auxquels on peut ramener tous les autres.

I. *Type de train épicycloïdal plan.* Autour d'un axe AA (fig. 1) tournent deux roues dentées α et

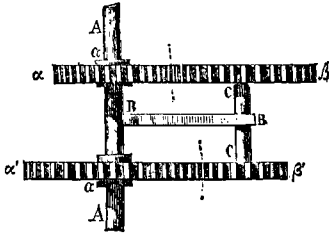


Fig. 1.

α' , montées chacune sur un canon qui embrasse cet axe; elles sont par conséquent indépendantes, et reçoivent le mouvement d'un mécanisme extérieur qu'il est inutile de figurer. Sur l'axe AA lui-même est montée une roue, ou un simple bras BB, que l'on nomme le *bras-porte-train*, et qui reçoit également, d'un mécanisme extérieur, ou transmet à ce mécanisme, un mouvement indépendant des deux premiers. La dépendance est établie au moyen de deux roues solidaires β et β' , montées sur un axe CC fixé au bras BB, et qui engrenent respectivement avec les roues α et α' . Il s'agit de trouver les relations qui lient les vitesses angulaires de l'axe AA et des quatre roues. Nous appellerons r, r', ρ, ρ' les rayons primitifs des roues $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$; ω la vitesse angulaire de la roue α , ω' celle de la roue α' , Ω celle de l'axe AA et du bras porte-train, W celle des roues β et β' par rapport à l'axe CC supposé fixe. Dans le cas de la figure, les quatre rayons doivent remplir la condition

$$r + \rho = r' + \rho', \quad [1]$$

puisque les deux membres expriment la distance des axes AA et CC. Si l'une des roues α ou α' embrassait la roue correspondante de manière que l'engrenage devint intérieur, il y aurait à changer le signe de ρ ou de ρ' ; si, par exemple, l'engrenage α, β' était intérieur, on devrait avoir

$$r + \rho = r' - \rho'. \quad [2]$$

Cela posé, supposons d'abord, pour fixer les idées, les trois vitesses ω, ω' et Ω de même sens; W sera de sens contraire. Considérons l'engrenage α, β ; si, sans changer le mouvement relatif de ces deux roues, on réduit le bras porte-train au repos en imprimant à tout le système une vitesse autour de AA égale et contraire Ω , la vitesse de la roue α deviendra $\omega - \Omega$; et celle de la roue β sera W ;

on devra donc avoir, d'après les règles ordinaires de l'engrenage,

$$(\omega - \Omega)r = W\rho. \quad [3]$$

En appliquant les mêmes raisonnements à l'engrenage α', β' , on trouvera de même

$$(\omega' - \Omega)r' = W\rho'. \quad [4]$$

Si l'on élimine W entre ces deux relations, on en déduit

$$\text{d'où } \Omega \left(\frac{r}{\rho} - \frac{r'}{\rho'} \right) = \omega \frac{r}{\rho} - \omega' \frac{r'}{\rho'}. \quad [5]$$

Dans le cas où ω' est nul, ce qui arrive fréquemment, et revient à supposer la roue α' fixe dans l'espace, il reste

$$\Omega \left(\frac{r}{\rho} - \frac{r'}{\rho'} \right) = \omega \frac{r}{\rho},$$

$$\text{ou } \omega = \Omega \left(1 - \frac{\rho r'}{\rho' r} \right). \quad [6]$$

Si l'engrenage α', β' était intérieur, les vitesses ω, Ω et W , conservant leur sens, il faudrait que ω' en changeât; l'équation [3] subsisterait, mais la vitesse angulaire relative de la roue α' par rapport au bras porte-train ramené au repos serait $\omega' + \Omega$ en valeur absolue; on devrait donc avoir

$$\frac{(\omega - \Omega)r}{(\omega' + \Omega)r'} = \frac{\rho}{\rho'},$$

$$\text{d'où } \Omega \left(\frac{r}{\rho} + \frac{r'}{\rho'} \right) = \omega \frac{r}{\rho} - \omega' \frac{r'}{\rho'}, \quad [7]$$

relation qui se déduit de la relation [5] en changeant les signes de ρ' et de ω' .

Si, comme cas particulier, on avait $r = r'$ et $\rho = \rho'$, il en résulterait

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega - \omega'), \quad [8]$$

c'est-à-dire que dans ce cas la vitesse angulaire du bras porte-train est la demi-différence des vitesses angulaires des roues α et α' qui tournent autour du même axe.

L'hypothèse $\omega' = 0$, introduite dans [7] donne

$$\omega = \Omega \left(1 + \frac{\rho r'}{\rho' r} \right). \quad [9]$$

II. *Type de train épicycloïde sphérique.* Ce second type diffère du premier en ce que les roues à axe mobile β et β' (fig. 2) sont des roues d'angle, tou-

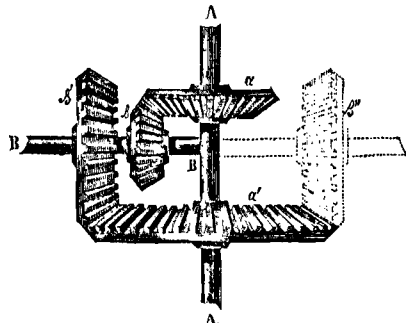


Fig. 2.

jours solidaires, mais montées sur le bras porte-train lui-même.

Si l'on suppose aux roues α et α' des vitesses angulaires ω et ω' de sens contraire, en raisonnant comme on l'a fait pour le premier type, et conser-

vant les mêmes notations, on trouvera

$$\Omega \left(\frac{r}{\rho} + \frac{r'}{\rho'} \right) = \omega \frac{r}{\rho} - \omega' \frac{r'}{\rho'}, \quad [10]$$

c'est-à-dire l'équation [7]. Si la roue β' était transportée en β'' de l'autre côté de l'axe AA, les roues α et α' auraient des vitesses angulaires ω et ω' de même sens; et en employant toujours la même méthode, on trouverait

$$\Omega \left(\frac{r}{\rho} - \frac{r'}{\rho'} \right) = \omega \frac{r}{\rho} - \omega' \frac{r'}{\rho'}, \quad [11]$$

c'est-à-dire l'équation [5].

Si l'on supposait aux roues α et α' des vitesses de même sens, cela reviendrait à changer le signe de ω' ; dans le cas de la figure 2 on aurait alors la relation [11]; et si la roue β' était transportée en β'' , on aurait la relation [10].

Il peut arriver, comme cas particulier de la figure 2, qu'on supprime la roue β' , et qu'on fasse engrener directement β avec α' ; ceci revient à supposer $r=r'$ et $\rho=\rho'$; et l'équation [10] donne alors

$$\Omega = \frac{1}{2} (\omega - \omega'), \quad [12]$$

c'est-à-dire la relation [8]. Ce cas particulier se rencontre dans la haute horlogerie; mais la roue d'angle β est alors remplacée par une roue cylindrique dont les dents ont une certaine étendue dans le sens de l'axe, tandis que les roues d'angle α et α' sont remplacées par des *roues de champ*, c'est-à-dire par des roues dont les dents sont perpendiculaires au plan de la roue, ou, ce qui revient au même, parallèles à l'axe AA.

On peut s'assurer, par une discussion, que les équations [5] ou [11] s'appliquent à tous les cas lorsqu'on adopte les conventions ordinaires relativement aux signes.

III. Le principe sur lequel sont fondés les deux mécanismes dont il vient d'être question, peut être généralisé, en supposant que les roues β et β' soient liées aux roues α et α' par une série de pignons et de roues intermédiaires, ayant leurs axes parallèles à AA et fixés au bras porte-train. Au lieu d'avoir alors, comme le suppose la relation [3],

$$\frac{\omega - \Omega}{W} = \frac{\rho}{r},$$

on aurait

$$\frac{\omega - \Omega}{W} = k \frac{\rho}{r}; \quad [13]$$

k désignant le rapport entre le produit des rayons des pignons intermédiaires et le produit des rayons des roues qui engrenent avec ces pignons (*Voy. ROUAGE*). L'équation [4] deviendrait de même

$$\frac{\omega' - \Omega}{W} = k' \frac{\rho'}{r'}; \quad [14]$$

k' désignant le rapport analogue à k ; et, en éliminant W , on trouverait

$$\frac{\omega - \Omega}{\omega' - \Omega'} = \frac{k \rho r'}{k' \rho' r},$$

d'où $\Omega \left(\frac{r}{k \rho} - \frac{r'}{k' \rho'} \right) = \omega \frac{r}{k \rho} - \omega' \frac{r'}{k' \rho'}$, [15]

équation tout à fait analogue à l'équation [5], et qui n'en diffère qu'en ce que les rayons ρ et ρ' des roues à axe mobile sont remplacés par les produits $k \rho$ et $k' \rho'$.

Dans le cas où la roue α' est fixe, c'est-à-dire où

l'on a $\omega' = 0$, on aurait

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{k \rho r'}{k' \rho' r} \right), \quad [16]$$

équation analogue à l'équation [6].

IV. Plus généralement, les axes fixés au bras porte-train, au lieu d'être tous parallèles à AA, pourraient rencontrer cet axe, ou même ne pas être chacun dans un même plan avec cet axe. Les règles de la composition des rotations permettraient toujours évidemment d'obtenir la relation entre les vitesses ω , ω' , et Ω . On trouvera dans le *Traité de Cinématique* de M. Bélanger des détails relatifs à la solution générale de cette question. Mais, dans la pratique, on donne toujours aux axes intermédiaires une direction parallèle à celle de l'axe AA.

L'équation générale [15] ou les équations particulières [5], [7], [10], [11] permettent de résoudre les questions dans lesquelles deux des quantités ω , ω' ou Ω étant données, on se propose de déterminer la troisième, ce qui n'offre aucune difficulté.

V. Les trains épicycloïdaux sont employés à divers usages. Quelquefois ils ont uniquement pour objet de tracer des courbes épicycloïdales, qui trouvent dans les arts un grand nombre d'applications (*Voy. ÉPICYCLOÏDE*). On s'en sert souvent aussi pour obtenir des mouvements de rotation très-lents, ou pour établir entre les vitesses angulaires de deux arbres un rapport exprimé par des nombres dont les facteurs premiers sont très-grands. Les rouages employés portent alors le nom d'ENGRENAGES DIFFÉRENTIELS (*Voy. ce mot*).

Voyez l'ouvrage de M. Willis ayant pour titre *Principles of mechanism*, le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye, celui de M. Bélanger, déjà cité plus haut, et le *Traité des Mécanismes* de M. Haton de la Goupillière.

TRAIT, nom que l'on donne en stéréotomie à l'épave renfermant la solution d'un problème; et, par extension, aux principes théoriques sur lesquels cette solution est fondée. *L'art du trait* est fort ancien.

TRAIT DE BARROT. *Voy. QUART DE NONANTE.*

TRAIT RESENTI, ou *trait de force*, trait plus marqué que les autres, qu'on emploie dans les croquis pour remplacer une ombre. On marque par un trait ressenti les arêtes qui séparent les faces éclairées de celles qui sont dans l'ombre (*Voy. REPRÉSENTATION DES CORPS*).

TRAITE. *Voy. LETTRE DE CHANGE.*

TRAJECTOIRE, ligne droite ou courbe que décrit un point matériel dans l'espace (*Voy. MOUVEMENT*).

TRAJECTOIRES (TRACÉ DES), méthode en partie analytique et en partie graphique pour tracer les trajectoires planes. Cette méthode a été indiquée par M. Poncelet dans ses *Leçons de Mécanique industrielle* (Metz, 1828 et 1829), et reproduite par M. Didot, sous une forme un peu différente, dans son *Traité de Balistique*. Voici en quoi elle consiste: Supposons qu'un mobile se meuve dans un plan sous l'action d'une force F ; on peut le considérer comme étant soumis à deux forces: l'une T tangente à la trajectoire, l'autre N normale à cette courbe, et qui ne sont autre chose que les composantes de la force F . On sait, de plus, qu'en appelant m la masse du mobile, v sa vitesse et ρ le rayon de courbure au point de la trajectoire que l'on con-

sidère, on a pour l'expression de la force centripète N (Voy. FORCE CENTRIFÈTE)

$$N = \frac{mv^2}{\rho}$$

d'où

$$\rho = \frac{mv^2}{N}; \quad [1]$$

en sorte que si l'on connaît, au point considéré, la direction de la tangente et les valeurs de v et de N , on en pourra déduire la valeur de ρ et tracer, par conséquent, l'élément de trajectoire que décrit le mobile à partir de ce point. De là un moyen de construire la trajectoire par petits arcs de cercles successifs. Soient M_0 (fig. 1) la position initiale du

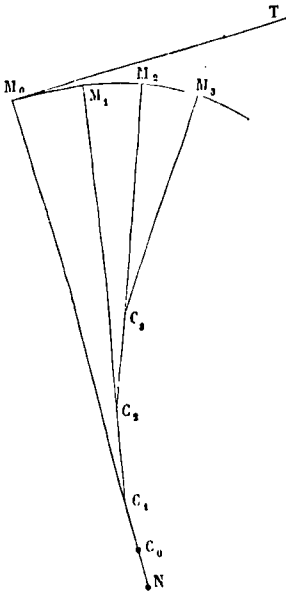


Fig. 1.

mobile, M_0T la direction de la tangente en ce point, M_0N celle de la normale, v_0 la vitesse du mobile. Cette vitesse étant supposée connue, ainsi que la force F au point M_0 , et par suite ses composantes, que nous désignerons par T_0 et N_0 . on peut calculer le rayon de courbure au point M_0 et déterminer le centre de courbure C_0 . Décrivant du point C_0 comme centre, avec M_0C_0 pour rayon, un très-petit arc M_0M_1 , on aura en M_1 un point qui pourra être regardé comme appartenant à la trajectoire. D'un autre côté, si l'on applique au mouvement du mobile de M_0 en M_1 le principe de l'effet du travail (Voy. EFFET DU TRAVAIL), en remarquant que le travail de N_0 est nul, puisque cette force est normale, et que le travail de T_0 est sensiblement $T_0 \times M_0M_1$, puisque cette force tangentielle peut être regardée comme constante, on aura, v_1 désignant la vitesse au point M_1 ,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = T_0 \times M_0M_1,$$

relation qui fera connaître v_1 . Connaissant la vitesse au point M_1 , si la force F est connue en ce point, on pourra déterminer ses composantes, et par suite le rayon de courbure au point M_1 , et en déduire le centre de courbure C_1 ; décrivant de C_1 comme centre

avec M_1C_1 pour rayon un très-petit arc M_1M_2 , on aura en M_2 un nouveau point de la trajectoire. Si l'on applique de nouveau le principe de l'effet du travail au mouvement du mobile de M_1 en M_2 , on aura, en appelant T_1 la valeur de la force tangentielle en M_1 et v_1 la vitesse en M_2 ,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_1 \times M_1M_2,$$

relation qui fera connaître v_2 . Connaissant la vitesse au point M_2 , si la force F est connue en ce point, on déterminera ses composantes; par suite le rayon de courbure en M_2 et le centre de courbure C_2 ; décrivant de C_2 comme centre, avec M_2C_2 pour rayon, un très-petit arc de cercle M_2M_3 , on aura en M_3 un nouveau point de la trajectoire, et ainsi de suite. La seule condition nécessaire pour qu'on puisse appliquer la méthode est que la force F qui produit le mouvement soit connue en intensité et en direction pour toutes les positions du mobile, et que l'on donne la vitesse initiale en direction et en grandeur.

Cette méthode est particulièrement applicable aux trajectoires des projectiles de l'artillerie. La force F est alors la résultante de deux forces, dont l'une est constante de direction et d'intensité, c'est le poids p du mobile, qui agit verticalement, et dont l'autre, toujours tangentielle et de sens contraire au mouvement, est exprimée en fonction de la vitesse par la formule

$$f(v) = \pi r^2 \cdot 0,027 (1 + 0,0023 \cdot v) \cdot v^2,$$

r désignant le rayon du projectile et v sa vitesse; c'est la résistance de l'air (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES, BALISTIQUE). La composante N est alors uniquement due à la pesanteur; on l'obtiendra en prenant sur la verticale du point M_0 (fig. 2) une lon-

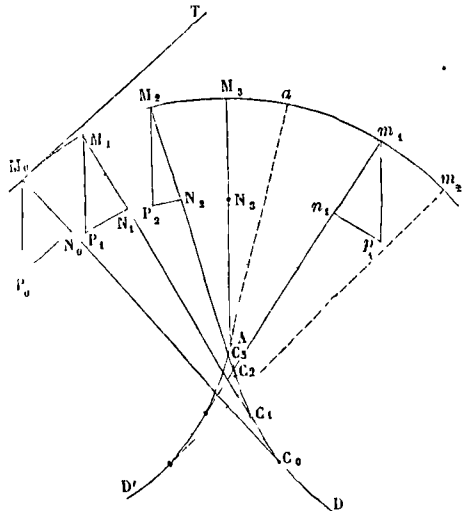


Fig. 2.

gueur M_0P_0 , représentant le poids p du mobile, et menant P_0N_0 parallèle à la tangente en M_0 , jusqu'à la rencontre de la normale; la longueur M_0N_0 représente la valeur de la force normale au point M_0 . Quant à la force tangentielle, sa valeur absolue est

$$T_0 = f(v_0) + P_0N_0.$$

et sa direction est de sens contraire au mouvement.

On aura donc, d'une part,

$$\rho_0 = \frac{mv_0^2}{M_0 N_0},$$

ce qui fera connaître le point C_0 ; et de l'autre

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -[P_0 N_0 + f(v_0)]. M_0 M_1,$$

ce qui fera connaître la vitesse v_1 . On prendra sur la verticale du point M_1 une longueur $M_1 P_1$ égale à $M_0 P_0$; on mènera $P_1 N_1$ perpendiculaire au rayon $M_1 C_0$. On aura alors d'une part

$$\rho_1 = \frac{mv_1^2}{M_1 N_1},$$

ce qui fera le point C_1 ; et puis de l'autre

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -[P_1 N_1 + f(v_1)]. M_1 M_2,$$

ce qui donnera la vitesse v_2 , et ainsi de suite. On sera arrivé au point culminant de la trajectoire, lorsque la composante tangentielle du poids du mobile sera nulle, comme en M_2 sur la figure. A partir de ce point, c'est-à-dire sur la branche descendante, la valeur absolue de la composante du poids est de sens contraire à la résistance de l'air. Soit, par exemple, m_1 un point de la branche descendante; $m_1 p_1$ une verticale égale à $M_0 P_0$ et représentant le poids du mobile; on mènera $p_1 n_1$ perpendiculaire sur la normale en m_1 , et $m_1 n_1$ représentera la composante normale de ce point. On aura donc d'abord

$$\rho = \frac{m \cdot v^2}{m_1 n_1},$$

ce qui fera connaître le point C_1 ; ensuite, en appelant v' la vitesse au point m_2 ,

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = +[p_1 n_1 - f(v)]. m_1 m_2,$$

ce qui donnera la vitesse v' , et ainsi de suite.

On sait que la série des points C_0, C_1, C_2 , etc., appartient à la développée de la trajectoire. Lorsqu'on exécute avec soin le tracé que nous venons d'expliquer, on reconnaît que le sommet A de cette développée n'est point situé sur la verticale du point culminant M_2 de la trajectoire; il est placé un peu au delà. Il en résulte que le rayon de courbure du point M_2 n'est point le rayon de courbure minimum; ce minimum répond à un point a situé au delà du point culminant, et c'est à ce point a que correspond le minimum de vitesse.

La longueur des arcs $M_0 M_1, M_1 M_2, M_2 M_3$, etc., reste arbitraire; on peut les prendre égaux ou, mieux encore, proportionnels à leurs rayons, ce qui revient à faire égaux les angles en C_0, C_1, C_2 , etc.

On peut déduire de ce qui précède le temps employé par le mobile à décrire chacun des arcs partiels, et par suite la durée totale du trajet. En effet, si l'on regarde l'arc $M_0 M_1$ comme une ligne droite parcourue sous l'action de la force constante T_0 , on aura, en vertu des lois du mouvement uniformément varié,

$$v_1 = v_0 - \frac{T_0}{m} t, \quad [3]$$

d'où

$$t = \frac{mv_0 - mv_1}{T_0},$$

ou, plus simplement encore,

$$M_0 M_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) t, \quad [4]$$

d'où

$$t = \frac{2 M_0 M_1}{v_0 + v_1}$$

(Voy. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ). L'une ou l'autre de ces formules donnera le temps employé par le mobile à parcourir l'arc $M_0 M_1$. On obtiendra de la même manière le temps employé à parcourir les arcs $M_1 M_2, M_2 M_3$, etc., et, en faisant la somme, on aura la durée totale du trajet.

On peut, au contraire, se donner le temps t , en déduire la vitesse v_1 par la relation [3], puis l'arc $M_0 M_1$ par la relation [4]. Dans ce cas, on fait ordinairement en sorte que les arcs successifs $M_0 M_1, M_1 M_2, M_2 M_3$, etc., soient parcourus dans des temps égaux. Les centres de courbure se déterminent toujours par la formule [1] et ses analogues.

La méthode est susceptible de plusieurs autres variantes, mais elle est toujours fondée sur l'emploi de la formule [1]. Quoique les méthodes graphiques ne soient pas susceptibles d'une grande rigueur, le tracé des trajectoires est employé avec succès pour l'étude du tir des bombes.

Quand il s'agit des obus, il faut nécessairement modifier la méthode, parce que les rayons de courbure étant alors très-grands, il devient impossible de s'en servir. On opère alors de la manière suivante : soient toujours M_0 (fig. 3) la position initiale

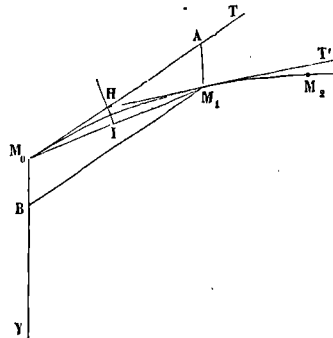


Fig. 3.

du mobile, v_0 sa vitesse en ce point; désignons par R_0 la fonction $f(v_0)$, qui exprime la résistance de l'air; si la pesanteur n'agissait pas sur le mobile, il parcourrait la droite $M_0 T$ tangente en M_0 à la trajectoire, et si t est un temps assez court pour que R_0 puisse être considéré comme constant pendant cet intervalle, le mobile parcourrait dans ce temps un chemin $M_0 A$ donné par la relation

$$M_0 A = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_0}{m} t^2.$$

Mais, pendant le même temps, le mobile parcourrait dans le sens vertical, sous l'action de la pesanteur, un chemin $M_0 B$ donné par l'équation

$$M_0 B = \frac{1}{2} g t^2.$$

Si le temps t est suffisamment court, on pourra, en considérant l'action simultanée des deux forces composer les deux chemins qu'elles feraient décrire isolément au mobile, et, en construisant le parallé-

logramme BM_0AM_1 , on aura en M_1 la position du mobile au bout du temps t . On obtiendra la vitesse v_1 en composant de la même manière les vitesses

$$v_0 - \frac{R_0}{m} t \text{ et } gt,$$

que les deux forces produiraient dans ce même temps t . Pour avoir la direction de la vitesse au point M_1 , on pourra regarder l'arc de trajectoire comme un arc de cercle osculateur; on tirera la corde M_0M_1 ; sur le milieu I de cette corde, on élèvera la perpendiculaire IH qui coupera en H la tangente M_0T ; en joignant HM_1 , on aura la direction de la tangente en M_1 , c'est-à-dire de la vitesse v_1 .

Il reste à tracer l'arc de trajectoire, ce qui peut se faire de deux manières. On peut continuer à le regarder comme un arc de cercle osculateur. Si on

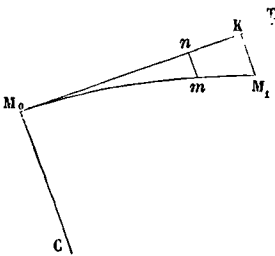


Fig. 4.

le rapporte à la normale M_0C (fig. 4) et à la tangente M_0T , son équation sera de la forme

$$x^2 + y^2 - 2py = 0;$$

on déterminera le rayon ρ en remplaçant x et y par les longueurs M_0K et M_1K , coordonnées du point M_1 , que l'on obtiendra sur la figure, et l'on calculera ensuite l'ordonnée mn correspondante à une abscisse quelconque M_0n .

On peut encore regarder l'arc M_0M_1 comme un arc de parabole. Pour le construire sous ce point de vue, on divisera la longueur M_0A (fig. 3) en n parties égales, et la longueur AM_1 en n^2 parties égales; par les points de division 1, 2, 3, etc., de M_0A , on mènera des verticales (fig. 5), et par les points de

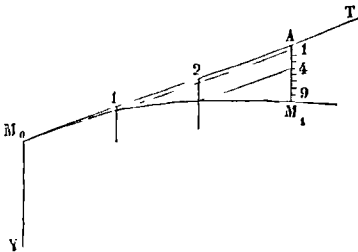


Fig. 5.

division $1^2, 2^2, 3^2$, etc., ou 1, 4, 9, etc., de AM_1 , on mènera des parallèles à la tangente M_0T ; les points où ces parallèles rencontreront les verticales correspondantes appartiendront à la parabole.

Ayant ainsi tracé l'arc de trajectoire M_0M_1 , et connaissant la grandeur et la direction de la vitesse au point M_1 , on pourra opérer pour ce point comme on a opéré pour le point M_0 ; on obtiendra un nou-

vel arc de trajectoire M_1M^2 , la grandeur et la direction de la vitesse au point M_2 , et ainsi de suite. On prendra, en général, le même temps t pour déterminer chacun des arcs partiels. On obtiendra de la sorte la trajectoire entière, ainsi que la durée du trajet.

Enfin, M. Didion a donné, dans son *Traité de balistique*, des procédés graphiques propres à remplacer l'emploi des formules dont il fait usage, ainsi que l'emploi des fonctions \sqrt{b} , \int , \odot , φ , qui entrent dans ces formules (*Voy. BALISTIQUE*).

TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS, dispositifs employés pour obtenir, à l'aide d'un mouvement dont on dispose, un autre mouvement assigné. Monge a, le premier, classé ces transformations d'après la nature géométrique des mouvements. On ne fait usage dans les arts que de deux mouvements principaux : le mouvement de translation *rectiligne* et le mouvement *circulaire* ou de rotation autour d'un axe (le mouvement épicycloïdal et le mouvement hélicoïdal n'étant qu'une combinaison des précédents); mais chacun de ces mouvements peut être *continu* ou *alternatif*, c'est-à-dire qu'il peut s'effectuer constamment dans le même sens, ou alternativement dans un sens et dans le sens opposé. De là, en n'excluant pas la combinaison d'un mouvement avec un autre de même espèce, 4 fois 4 ou 16 transformations possibles; c'est la base de la classification adoptée par Hachette d'après les idées de Monge. Lantz et Béthancourt, en y ajoutant le mouvement suivant une courbe donnée, ont porté à 21 le nombre des transformations, dont chacune est susceptible d'un plus ou moins grand nombre de solutions. Mais toutes ne sont pas également pratiques; et il n'y a lieu de s'occuper que de celles qui sont réellement employées dans les machines.

La classification dont nous venons de parler a été adoptée par M. Poncelet, par M. Morin et par M. Laboulaye, à quelques changements près dans l'ordre des transformations. M. Bélanger, dans son *Traité de Cinématique*, et M. Haton de la Goupillière, dans son *Traité des Mécanismes*, ont proposé des classifications différentes, qu'ils regardent comme plus simples ou plus avantageuses; mais les raisons qu'ils donnent de leur préférence ne nous ont pas paru assez décisives pour changer un usage généralement adopté. Nous passerons donc en revue les transformations de mouvements usitées, en suivant la classification de Monge, et nous ferons connaître pour chacune les solutions sanctionnées par la pratique. Un grand nombre de ces solutions sont l'objet d'articles spéciaux dans ce Dictionnaire; nous nous contenterons de les mentionner en les soulignant pour renvoyer le lecteur aux articles dont il s'agit.

I. RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU: Dans ce genre de transformation, on ne se propose de modifier que la direction du mouvement, et quelquefois aussi sa vitesse. Lorsqu'on ne veut modifier que la direction du mouvement, on fait usage de la **POULIE FIXE**; les deux mouvements ont lieu dans des directions situées dans un même plan. En employant deux poulies fixes, on peut changer le mouvement rectiligne qui a lieu suivant une certaine droite en un autre mouvement rectiligne-

ayant lieu suivant une droite quelconque qui ne serait pas située dans un même plan avec la première.

Lorsqu'on veut modifier à la fois la direction et la vitesse du mouvement, on peut faire usage de la **POULIE MOBILE**, des **MOUFLES** ou **PALANS**, et des **PALANS CONJUGUÉS**.

Le **PLAN INCLINÉ** est encore une solution de la transformation qui nous occupe; on l'emploie généralement pour changer un mouvement rectiligne suivant une direction donnée, en un mouvement rectiligne suivant une direction perpendiculaire, en faisant varier la vitesse dans un rapport donné.

II. **RECTILIGNE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU**, ou *vice versa*. Les solutions de cette transformation sont nombreuses. Les plus usitées sont le **TREUIL**, le **TREUIL DIFFÉRENTIEL**, le **PALAN DIFFÉRENTIEL**, la **CRÉMAILLÈRE**, la **VIS**, dans lesquels le rapport des vitesses est constant, le **TREUIL CONIQUE**, les **BOBINES**, dans lesquels ce rapport est variable.

On peut ajouter les **ROULEAUX cylindriques** sur lesquels on fait rouler un madrier portant une charge.

III. **CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU**. Si les axes sont parallèles, on peut employer les **cylindres** qui se conduisent par simple contact, les **ENGRENAGES CYLINDRIQUES** extérieurs ou intérieurs, les **COURROIES SANS FIN**, les **ROUES COUPLÉES**, les **TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX**. Si les axes se rencontrent, on a recours aux **ENGRENAGES CONIQUES**. Si les axes ne se rencontrent pas, on peut, en se servant d'un axe auxiliaire qui coupe les deux premiers, ramener ce cas au précédent. On peut aussi recourir aux **ENGRENAGES HYPERBOLOÏDES**, à la **VIS SANS FIN** ou aux **COURROIES SANS FIN**.

Dans toutes les solutions qui précèdent, le rapport des vitesses demeure constant.

Les solutions dans lesquelles le rapport des vitesses est variable sont, pour le cas des axes parallèles, le **JOINT D'OLDHAM**, les **ENGRENAGES ELLIPTIQUES**, les **SECTEURS DENTÉS**, les **ROUES DE RÈMER**; pour le cas des axes qui se coupent, le **JOINT UNIVERSEL**, l'**ENGRENAGE D'HUYGHENS**. Il faut ajouter à cette liste les **ENGRENAGES INTERMITTENTS**. Les autres solutions qui ont été proposées sont plutôt théoriques que pratiques, et nous renverrons à cet égard aux **Traitéés spéciaux** de cinématique.

IV. **CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF**, ou *vice versa*. Les principales solutions de cette transformation sont les **EXCENTRIQUES**, les **AMES à ONDES**, le **système BIELLE ET MANIVELLE**, l'**ENGRENAGE DE LAHIRE**, le **BALANCIER DE CARTHWRIGHT**, l'**arbre à cames** soulevant un **PILON**. On peut ajouter les quatre dispositifs suivants.

1. Sur l'axe vertical projeté en O (fig. 1) est monté

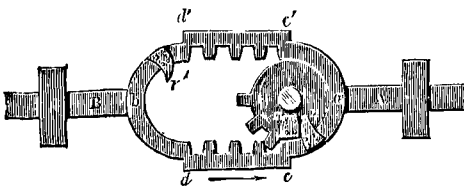


Fig. 1.

tée une roue qui n'est dentée que sur une petite portion de sa circonférence, et n'a que 3 ou 4 dents.

Elle est entourée d'une sorte de cadre $acdbd'c'$, formé de deux crémaillères $cd, c'd'$, raccordées par deux demi-circonférences cac', dbd' ; chaque crémaillère présente un nombre de creux égal au nombre de dents de la roue. Aux extrémités du cadre sont fixées, dans le prolongement l'une de l'autre, deux tiges rectilignes A et B mobiles entre des guides. La roue étant supposée tourner dans le sens de la flèche, ses dents agissant sur celles de la crémaillère cd feront d'abord mouvoir le cadre dans le sens de B vers A; la partie non dentée de la roue se trouvera alors en contact avec la demi-circonférence dbd' ; et le cadre demeurera immobile jusqu'à ce que la première dent de la roue vienne engrener avec la crémaillère $c'd'$; le cadre sera alors poussé dans le sens de A vers B; la partie non dentée de la roue se trouvant alors en contact avec la demi-circonférence cac' , le cadre restera immobile jusqu'à ce que la roue ait repris la position indiquée sur la figure, et ainsi de suite. Le mouvement circulaire continu se trouvera ainsi transformé en un mouvement rectiligne alternatif avec intermittences. Pour atténuer le choc qui se produit chaque fois que la partie dentée de la roue se met en prise avec l'une des crémaillères, on vient la roue d'une petite plaque saillante qui vient buter contre une sorte de came n ou n' fixée au cadre; ce premier choc, qui a lieu avec la vitesse de la plaque m , un peu moindre que celle des dents de la roue, donne au cadre un commencement de vitesse qui atténue le choc des dents. La plaque et la came ont d'ailleurs une légère courbure qui fait que le contact se fait successivement et que le choc est en quelque sorte graduel.

2. Le second dispositif (fig. 2), analogue au premier

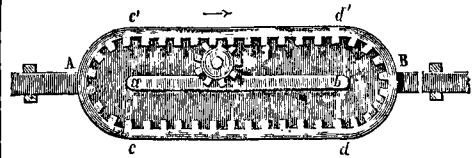


Fig. 2.

dans son ensemble, en diffère en ce que le cadre est denté sur tout son pourtour, ainsi que le pignon qui engrène avec lui; de plus, l'axe du pignon, qui repose à sa partie inférieure par un pivot, est maintenu à sa partie supérieure dans une simple rainure horizontale perpendiculaire à la direction de la tige à guider. Une barre rectiligne ab , fixée à l'intérieur du cadre, mais mobile avec lui, appuie sur l'axe du pignon et l'oblige à engrener constamment avec les dents du cadre. Si l'on imagine que le pignon tourne dans le sens de la flèche, il agira d'abord sur la crémaillère $c'd'$ et obligera le cadre à marcher de A vers B, jusqu'à ce qu'il engrène avec la première dent de la demi-circonférence du cadre située du côté A. A cet instant, le pignon ne pouvant faire mouvoir le cadre dans le sens perpendiculaire à AB, sera forcé de rouler sur la partie circulaire de l'engrenage intérieur, jusqu'à ce qu'il engrène avec la crémaillère cd . Le cadre sera alors obligé de se mouvoir de B vers A, jusqu'à ce que le pignon engrène avec la première dent de la demi-circonférence du cadre située du côté B; le pignon roulera sur cette seconde partie circulaire

comme il a roulé sur l'autre, et le cadre demeurera immobile jusqu'à ce que le pignon engrène de nouveau avec la crémaillère *cd*; et ainsi de suite.

3. Le troisième dispositif (fig. 3) est fondé sur les

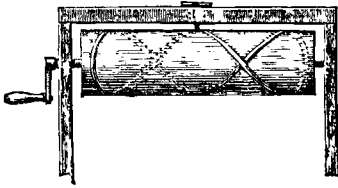


Fig. 3.

propriétés de l'hélice. Sur un cylindre mobile autour d'un axe horizontal est tracée une rainure formée de deux hélices de sens contraire qui se raccordent aux extrémités du cylindre. Une cheville, mobile dans le sens de l'axe du cylindre, est engagée par son extrémité dans cette rainure. Quand on fait tourner le cylindre autour de son axe, la cheville, obligée de suivre la rainure, chemine en ligne droite, parallèlement à l'axe du cylindre; arrivée au point de raccordement, elle demeure un instant immobile, et revient ensuite sur ses pas, jusqu'au point de raccordement opposé, où elle change de nouveau le sens de sa marche. Le mouvement circulaire continu imprimé au cylindre est ainsi transformé en un mouvement rectiligne alternatif.

4. On peut soulever un pilon en y adaptant une courte crémaillère qui engrène avec une roue partiellement dentée. Tant que la roue engrène avec la crémaillère, la tige du pilon est soulevée; mais, lorsque la dernière dent échappe, le pilon retombe.

V. CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE ALTERNATIF, et *vice versa*. Les principales solutions sont l'arbre à cames soulevant un marteau; le système BALANCIER, BIELLE ET MANIVELLE, dont la *pédale du rémouleur* n'est qu'un cas particulier; la MOUCHE; les ENCLIQUETAGES, le BALANCIER INTERMITTENT. On peut ajouter les trois solutions suivantes :

1. La première est le dispositif employé dans les machines à vapeur à cylindre oscillant. Le cylindre (fig. 4) est porté par des tourillons comme une pièce

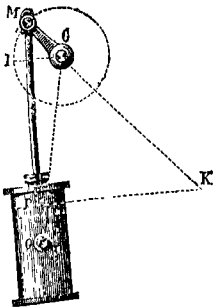


Fig. 4.

d'artillerie; et l'extrémité de la tige du piston s'articule directement avec une manivelle. Le mouvement circulaire de celle-ci donne à la tige du piston un mouvement rectiligne alternatif par rapport au cylindre; mais celui-ci est obligé de prendre un mouvement circulaire alternatif autour de ses tou-

rillons. Le rapport entre la vitesse v du bouton de la manivelle et la vitesse u du piston s'obtient, comme dans le cas d'une bielle et d'une manivelle ordinaire, par l'application du THÉORÈME DE M. CHASLES (*Voy. ce mot*). Si l'on élève au centre P du piston (fig. 4) et dans le plan de la manivelle, une perpendiculaire à la tige du piston, puis que l'on prolonge la direction de la manivelle jusqu'à la rencontre de cette perpendiculaire, le point de rencontre K sera le centre instantané de rotation; et l'on aura par conséquent

$$\frac{u}{v} = \frac{KP}{KM}.$$

Mais, si on abaisse CI perpendiculaire sur MP , on a, par une similitude évidente,

$$\frac{KP}{KM} = \frac{CI}{CM},$$

et par conséquent

$$\frac{u}{v} = \frac{CI}{CM}, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{v}{CM} \cdot CI.$$

Si v est constant, on voit que u est proportionnel à CI . Il en résulte que la vitesse du piston devient nulle toutes les fois que la direction de la tige du piston passe par le centre de la manivelle, et qu'elle atteint au contraire son maximum toutes les fois que la tige du piston devient tangente à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle.

2. La seconde est employée pour faire mouvoir les cisailles à l'aide desquelles on coupe les métaux dans les usines métallurgiques, dans les laminoirs, etc. La branche mobile de la cisaille forme un levier OA (fig. 5) mobile autour d'un axe horizontal O .

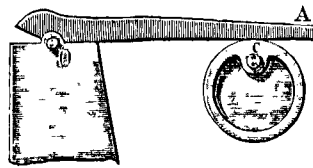


Fig. 5.

La queue de ce levier est soulevée par un excentrique, mobile autour d'un axe C . Le mouvement circulaire continu de cet excentrique communique à la queue OA un mouvement circulaire alternatif, qui fait fermer et ouvrir alternativement la cisaille.

3. La troisième est employée dans les filatures. Elle se compose d'une roue, formée d'un disque portant des chevilles implantées sur une portion de sa circonférence, mais à une certaine distance de son bord. L'espace occupé par les chevilles est entouré des deux côtés par une rainure continue dans laquelle s'engage l'axe vertical d'un pignon P (fig. 6) qui engrène avec les chevilles; il repose inférieurement par un pivot, et est maintenu à la partie supérieure par une bride marquée en points sur la figure. Si l'on imagine que le pignon tourne d'une manière uniforme dans le sens de la flèche, son axe étant engagé dans la rainure extérieure, il forcera le disque à tourner en sens inverse, jusqu'à ce que l'extrémité B arrive en regard du pignon. A ce moment, le pignon, s'appuyant sur la dernière cheville du côté B , passera de la rainure extérieure dans la rainure intérieure, et il forcera le disque à tourner dans le sens de la flèche, jusqu'à ce que ce soit l'extrémité A qui vienne en regard du pignon.

Mais alors celui-ci, s'appuyant sur la dernière cheville du côté A, repassera de la rainure intérieure dans la rainure extérieure, et le mouvement du disque se fera de nouveau en sens contraire de la

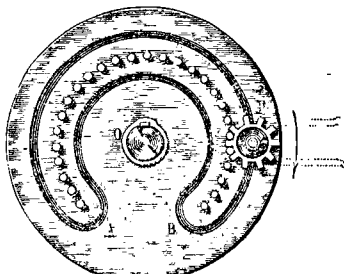


Fig. 6.

flèche, et ainsi de suite. On voit que par l'effet du mouvement circulaire continu du pignon, le disque prendra un mouvement circulaire alternatif. — Il existe plusieurs mécanismes de même genre, dont on trouvera la description dans le *Traité de Cinématique* de M. Ch. Laboulaye. — On peut remarquer dans l'exemple de la figure 6 que lorsque le pignon passe de la rainure extérieure dans la rainure intérieure, ou *vice versa*, le rapport des vitesses n'est pas altéré, attendu que la denture de la roue a la même circonférence primitive, soit qu'on la considère comme denture extérieure ou comme denture intérieure. Il y a nécessairement un petit temps d'arrêt chaque fois que le pignon, tournant autour de la dernière cheville A ou B, passe d'une rainure à l'autre, et que par conséquent le mouvement du disque change de sens.

VI. CIRCULAIRE ALTERNATIF EN RECTILIGNE ALTERNATIF, ou *vice versa*. Les solutions les plus usitées sont le BALANCIER AVEC PARALLÉLOGRAMME DE WATT, le système BALANCIER ET CONTRE-BALANCIER, le BALANCIER À BOUTON, le BALANCIER À RAINURE, le ZIGZAG, les VALETS, et le mécanisme des sonnettes que tout le monde connaît. On peut ajouter les solutions suivantes.

1. Dans l'ancienne machine à vapeur de Newcomen, le balancier (fig. 7) portait à ses extrémités

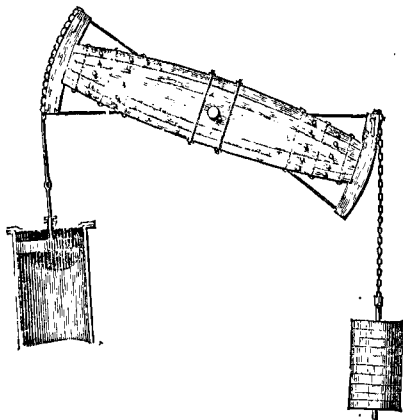


Fig. 7.

deux arcs de cercle égaux, ayant leur centre sur l'axe de rotation. Sur ces arcs de cercle s'enrou-

laient des chaînes fixées par une de leurs extrémités à la partie supérieure de l'arc, et dont l'une était reliée à la tige du piston, tandis que l'autre supportait un contre-poids. Pendant la durée d'une demi-oscillation, l'action de la vapeur faisait descendre le piston et soulevait le contre-poids; pendant la seconde demi-oscillation, la pesanteur faisait descendre le contre-poids et soulevait le piston. Le mouvement rectiligne alternatif du piston produisait donc ainsi le mouvement circulaire alternatif du balancier.

2. Soit AB (fig. 8) une tige verticale mobile entre

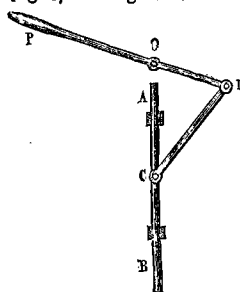


Fig. 8.

des guides. En un point C de cette tige s'articule l'une des extrémités d'une bielle CD, articulée par l'autre au bout d'un balancier PD, mobile autour d'un axe horizontal O. En agissant sur la poignée P, on donne au balancier un mouvement circulaire alternatif qui, par l'intermédiaire de la bielle, communique à la tige guidée un mouvement rectiligne alternatif. Ce système est analogue au système BIELLE ET MANIVELLE; la différence consiste en ce que la manivelle, susceptible d'un mouvement circulaire continu, est remplacée par un balancier qui n'est susceptible que d'un mouvement circulaire alternatif; mais le rapport des vitesses se déterminerait de la même façon. Ce mode de transformation est souvent appliqué à la manœuvre des pompes ménagères.

3. Sur un cylindre mobile autour d'un axe horizontal sont enroulées 3 courroies (fig. 9); celle du

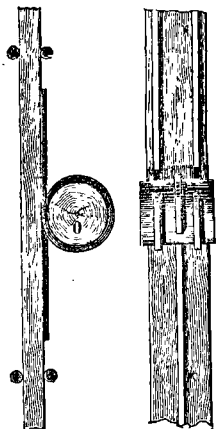


Fig. 9.

milieu vient se fixer par son extrémité supérieure au haut d'une tige verticale mobile entre des guides;

les deux extrêmes s'attachent de même au bas de la même tige. Si l'on fait mouvoir cette tige entre ses guides de manière à lui donner un mouvement alternatif, le cylindre tourne alternativement autour de son axe, dans un sens ou dans l'autre. Réciproquement, le mouvement circulaire alternatif du cylindre produirait le mouvement rectiligne alternatif de la tige.

4. *L'archet à foret*, employé dans diverses industries, offre un exemple du même mode de transformation. La corde de l'archet s'enroule autour du cylindre C (fig. 10) qui porte le foret ; et suivant

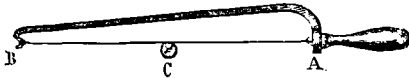


Fig. 10.

qu'on fait mouvoir l'archet de A vers B ou de B vers A, on imprime au cylindre un mouvement circulaire dans un sens ou dans l'autre.

5. Le *trépan ou drille*, dont on se sert aussi pour forer, offre un autre exemple de la transformation qui nous occupe. La tige verticale (fig. 11) qui porte

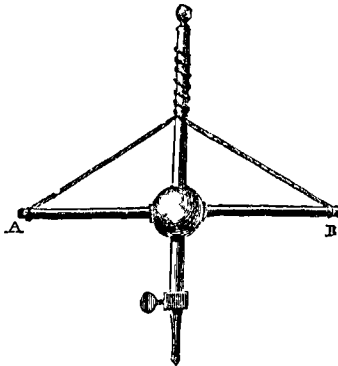


Fig. 11.

le foret traverse une boule qu'on peut faire monter ou descendre à l'aide d'une traverse horizontale AB ; aux extrémités de cette traverse sont fixées, par leur extrémité, deux cordes qui viennent s'enrouler en hélices et dans le même sens sur la tige verticale, et s'y fixer par le bout opposé. Si l'on fait descendre vivement la traverse, les cordes en se déroulant obligent la tige verticale à tourner dans un certain sens ; quand les cordes sont entièrement déroulées, le mouvement de rotation de la tige continuant en vertu de la vitesse acquise, les cordes s'enroulent de nouveau, mais en sens contraire, et la traverse AB remonte. Si on la fait descendre de nouveau, les cordes en se déroulant font tourner la tige verticale dans un sens opposé à sa première rotation, et ainsi de suite.

6. Un disque circulaire, ou demi-circulaire, mobile autour d'un axe projeté en O (fig. 12) est entouré d'une corde dont les brins, après s'être croisés sur la demi-circonférence ACB, vont s'enrouler sur deux poulies p et p', et se fixer à un corps

quelconque M auquel on veut donner un mouvement rectiligne alternatif. Il suffit pour cela d'imprimer au disque un mouvement circulaire alternatif autour de son axe O, en agissant pour cela sur les poignées m et n.

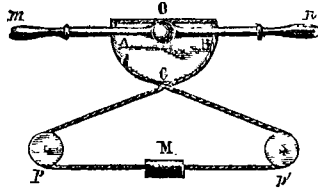


Fig. 12.

Ajoutons que toutes les transformations d'un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu pourraient donner une transformation analogue entre deux mouvements alternatifs ; il suffirait pour cela de limiter l'amplitude des mouvements et d'en changer périodiquement le sens.

VII. Les transformations répondant aux autres combinaisons entre les mouvements élémentaires, ou n'ont point de solution directe, ou n'ont que des solutions peu pratiques. On leur substitue avec avantage une combinaison plus complexe, en introduisant un mouvement auxiliaire. Si, par exemple, on avait à transformer un mouvement rectiligne continu en rectiligne alternatif, on transformerait d'abord le mouvement rectiligne continu en circulaire continu, puis celui-ci en rectiligne alternatif.

(Voyez la *Cinématique* de M. Morin, le *Traité de Cinématique* de M. Laboulaye, celui de M. Bélanger, le *Traité des Mécanismes* de M. Haton de la Goupillière, les *Leçons de Cinématique* de M. Faure à l'École centrale des arts et manufactures, etc.)

TRANSLATION (MOUVEMENT DE), mouvement dans lequel tous les points matériels d'un corps sont animés à chaque instant de vitesses égales et parallèles. Si l'on mène dans l'intérieur du corps trois axes rectangulaires, fixes par rapport à ce corps, pendant toute la durée du mouvement ces axes demeurent parallèles à leur direction primitive, quel que soit d'ailleurs le mouvement d'un point quelconque du corps, de l'origine des axes par exemple. Cette origine peut avoir un mouvement curviligne varié quelconque ; si les axes conservent leur parallélisme, le corps est animé d'un mouvement de translation. Tel est le mouvement de chacune des bielles d'accouplement qui, dans certaines locomotives, transmettent le mouvement des roues motrices à une ou plusieurs autres paires de roues ; tous les points de la bielle parcourent des courbes égales, qui sont des cycloïdes raccourcies, et ils ont à chaque instant la même vitesse ; mais la bielle demeure horizontale, et si l'on pouvait tracer dans l'intérieur de cette bielle un plan quelconque, il resterait parallèle à lui-même pendant toute la durée du mouvement.

Le plus souvent, le mouvement de translation est rectiligne ; en sorte que tous les points du corps décrivent, d'après la même loi, des droites égales

et parallèles, et ont à chaque instant des vitesses égales. Ce cas est celui d'un piston qui se meut dans un cylindre fixe; c'est encore celui d'un wagon sur les parties rectilignes d'un chemin de fer.

Pour connaître complètement le mouvement d'un corps animé d'un mouvement de translation, il suffit de connaître celui d'un quelconque de ses points.

Si la vitesse commune à tous les points du corps est constante, le mouvement de translation est uniforme; et si l'on appelle v cette vitesse constante, e l'espace parcouru par l'un des points du corps, au bout du temps t , à partir de la position initiale, on aura (Voy. MOUVEMENT UNIFORME)

$$e = vt,$$

relation qui servira à résoudre divers problèmes. Par exemple les suivants :

1. *Un convoi marche avec une vitesse de 14^m par seconde; quelle distance parcourt-il dans une heure?* On a

$$e = 14^m \cdot 3600 = 50400^m, \text{ ou } 50 \text{ kil}^m, 4.$$

2. *Une diligence a une vitesse de 2^m, 5 par seconde; quel temps emploiera-t-elle à parcourir avec cette vitesse une distance de 40 kilomètres?* On a ici :

$$t = \frac{e}{v} = \frac{40000^m}{2^m, 5} = 16000^s = 4^h 26^m 40^s.$$

3. *Un cheval a parcouru un espace de 4 kilomètres en 5 minutes 15 secondes; quelle était sa vitesse?* On a

$$v = \frac{e}{t} = \frac{4000^m}{315^s} = 12^m, 7.$$

En réalité, le mouvement d'un corps solide n'est presque jamais rigoureusement uniforme; mais il suffit ordinairement pour les besoins de la pratique de le considérer comme tel. Ainsi la vitesse d'un convoi de wagons, celle d'un attelage, d'un navire, etc., est rarement constante; mais on la regarde approximativement comme telle: et pour l'apprécier on divise l'espace total qu'a parcouru le mobile par le temps total qu'il a employé à le parcourir. La vitesse ainsi obtenue est ce qu'on nomme la VITESSE MOYENNE du mobile (Voy. ce mot).

Si le mouvement de translation rectiligne est tel que la vitesse commune à tous les points du corps varie proportionnellement au temps, le mouvement est uniformément varié. Ce cas serait celui d'un corps solide qui tomberait, dans le vide, d'une certaine hauteur, sans tourner sur lui-même. En nommant h cette hauteur, t le temps employé par un point quelconque du mobile à la parcourir, v la vitesse acquise par le mobile au bout de ce temps, et g l'accélération due à la pesanteur, on aurait (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES)

$$v = gt$$

et

$$h = \frac{1}{2} gt^2.$$

Si le corps était lancé verticalement de bas en haut, on aurait pour chacun de ses points, en nommant v_0 la vitesse initiale, et h la hauteur dont le point considéré s'est élevé au bout du temps t

$$v = v_0 - gt,$$

et

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

On pourrait encore appliquer ces formules au mouvement d'un corps dans l'air, si l'espace qu'il parcourt était peu considérable, que la densité du corps fût grande, et que sa forme fût à peu près sphérique, circonstances qui tendraient à rendre négligeable la résistance de l'air (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES).

TRANSMISSION DE MAUDSLAY. On nomme ainsi une application du système BELLE ET MANIVELLE (Voy. ce mot) dans laquelle l'extrémité de la bielle est guidée par un galet qui roule dans une rainure rectiligne. Ce mode de transmission tire son nom de la machine à vapeur de Maudslay dans laquelle elle a été employée pour la première fois.

TRANSMISSION DU TRAVAIL (PRINCIPE DE LA), relation qui existe entre le travail utile d'une machine, le travail moteur et le travail des résistances passives. Sans ce dernier travail, le travail utile serait égal au travail moteur qui se trouverait ainsi transmis, par l'intermédiaire de la machine, aux corps sur lesquels elle est destinée à agir (Voy. MACHINES).

TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX. Ce transport ne constitue pas un travail dans le sens attribué à ce mot en Mécanique (Voy. TRAVAIL), puisque le chemin parcouru est perpendiculaire à la direction de la force. Cependant, comme l'effet utile est évidemment proportionnel au poids transporté et à la distance parcourue, on a été conduit par analogie à prendre pour mesure de cet effet utile le produit de ce poids par cette distance, et pour unité le produit de l'unité de poids, ou le kilogramme, par l'unité de longueur, ou le mètre. Et comme cette unité était déjà employée en Mécanique sous le nom de *kilogrammètre*, on lui a conservé ce nom, ainsi que la notation *km* par laquelle on la désigne. Ainsi un poids de 1000^k transporté à une distance de 6 kilomètres représente un effet utile de

$$1000 \times 6000 \text{ ou } 6000000^{\text{km}}.$$

Dans le transport horizontal des fardeaux comme dans le travail mécanique des MOTEURS ANIMÉS (Voy. ce mot), il y a non-seulement des limites d'effort, de vitesse et de durée journalière qu'il convient de ne pas dépasser, mais il y a entre ces variables une dépendance mutuelle, si l'on veut que l'effet utile qu'on a en vue puisse se renouveler d'une manière continue sans que la santé de l'homme ou de l'animal ait à en souffrir. On peut exiger du moteur un plus grand effort; mais il faut alors diminuer la vitesse ou la durée de son action; on peut au contraire exiger de lui une vitesse plus grande, mais il faut alors lui demander un effort moindre, ou le lui imposer moins longtemps; on peut prolonger la durée de son action, mais il faut diminuer son effort ou sa vitesse. En sorte qu'on peut prévoir, et c'est ce que l'expérience confirme en effet, qu'il y a des valeurs simultanées de l'effort, de la vitesse, et de la durée journalière de l'action, qui donnent le maximum d'effet utile. Voici, d'après M. Navier, le tableau des effets utiles que peuvent produire l'homme et le cheval dans le transport horizontal des fardeaux.

NATURE DU TRANSPORT.	POIDS transporté.	VITESSE.	EFFET UTILE par seconde.	NOBRE DE L'ACTION journalière.	EFFET UTILE par jour.
	k	m	km	h	km
Un homme marchant sur un chemin horizontal, sans fardeau, et n'ayant à transporter que le poids de son corps...	65	1,50	97,5	10	3510000
Un manoeuvre transportant des matériaux dans une petite charrette à deux roues et revenant à vide.....	100	0,50	50	10	1800000
Un manoeuvre transportant des matériaux dans une brouette, et revenant à vide.....	60	0,50	30	10	1080000
Un homme voyageant en portant des fardeaux sur son dos.....	40	0,75	30	7	756000
Un manoeuvre transportant des matériaux sur son dos, et revenant à vide.....	65	0,50	32,5	6	702000
Un manoeuvre transportant des fardeaux sur une civière et revenant à vide.....	50	0,33	16,5	10	594000
Un manoeuvre employé à jeter de la terre à la pelle à une distance horizontale de 4 ^m	2,7	0,68	1,8	10	84800
Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette, et marchant au pas.....	700	1,10	770	10	27720000
Un cheval attelé à une voiture et marchant au trot.....	350	2,20	770	4,5	12474000
Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette, au pas, et revenant à vide.....	700	0,60	420	10	15120000
Un cheval chargé sur le dos et allant au pas...	120	1,10	132	10	4752000
Un cheval chargé sur le dos et allant au trot...	80	2,20	176	7	4435000

On voit par ce tableau que le mode le plus avantageux pour l'homme, est de lui faire traîner une charrette à deux roues; et pour le cheval le mode le plus avantageux est de l'atteler à une charrette, au pas.

Les nombres inscrits dans ce tableau se rapportent à une viabilité moyenne. Sur une route raboteuse, difficile, les résultats seraient évidemment moindres. Pour le cheval attelé, par exemple, le rapport du tirage à la charge peut varier de 0,005 à 0,250 suivant la nature de la voie (Voy. TIRAGE DES VOITURES); et il est clair que l'effet utile varierait, sinon dans le même rapport, du moins dans le même sens. (Voy. l'Introduction à la Mécanique industrielle, de M. Poncelet.)

TRANSPORT DES TERRES. Dans toutes les constructions qui exigent de grands mouvements de terrains, comme dans l'établissement d'une route, d'une voie ferrée, d'un canal, d'une enceinte fortifiée, etc., on a à résoudre deux questions, dont l'une consiste dans l'évaluation de la distance moyenne du transport des terres, l'autre dans l'organisation la plus avantageuse de ce transport. Nous nous occuperons d'abord de la première.

I. Si V désigne le volume total des déblais à transporter pour former un remblai déterminé (Voy. DÉBLAIS ET REMBLAIS), les frais de transport seront proportionnels à V; mais ils dépendront également des distances auxquelles devront être transportées les différentes parties du volume V. Si $v, v', v'',$ etc., représentent les différents éléments qui composent le volume total V; et si $d, d', d'',$ etc., représentent les distances respectives que doivent parcourir ces volumes élémentaires, les frais de transport seront en définitive proportionnels à la quantité

$$vd + v'd' + v''d'' + \dots$$

Soit D une distance telle qu'on ait

$$vd + v'd' + v''d'' + \dots = VD : [1]$$

ce sera la distance moyenne de transport, et les frais seront proportionnels au produit VD. On conçoit donc l'utilité de la détermination de cette distance moyenne.

Le cas le plus simple et en même temps le plus fréquent est celui où tous les transports s'effectuent sur une même direction rectiligne, comme cela arrive en général dans la construction d'une route. La distance moyenne de transport n'est autre chose alors que la distance entre le centre de gravité du déblai et le centre de gravité du remblai. En effet, soient $x_0, x'_0, x''_0, \dots; X_0,$ les distances primitives des centres de gravité des volumes élémentaires $v, v', v'', \dots,$ et du volume total à un plan quelconque, mais fixe, perpendiculaire à l'axe de la route; et soient x, x', x'', \dots, X les distances des mêmes centres au même plan après le transport.

On aura

$$d = x - x_0, \quad d' = x' - x'_0, \quad d'' = x'' - x''_0, \dots;$$

par conséquent l'équation [1] pourra s'écrire

$$v(x - x_0) + v'(x' - x'_0) + v''(x'' - x''_0) + \dots = VD$$

ou

$$[vx + v'x' + v''x'' + \dots]$$

$$- [vx_0 + v'x'_0 + v''x''_0 + \dots] = VD.$$

Mais en vertu du théorème des Moments (Voy. ce mot) la première parenthèse peut être remplacée par VX, et la seconde par VX₀; l'équation ci-dessus peut donc s'écrire

$$VX - VX_0 = VD$$

d'où

$$D = X - X_0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée; car X - X₀ est la distance entre le centre de gravité du même volume V après et avant le transport.

Pour l'application de cette règle, les ingénieurs suivent ordinairement un procédé graphique qu'il est utile de connaître. Soit XX' (fig. 1) l'axe de la route; et soient A, B, C, des points de cet axe pour lesquels on a des profils en travers de la route et du terrain (Voy. ROUTES); nous supposons que le premier profil, A, présente une surface de déblai d et une surface de remblai r, le second profil, B, une surface de déblai d' et une surface de remblai r'; le troisième, C, un remblai sans déblai. Si par le point de passage du déblai au remblai sur le profil B on conçoit un plan vertical parallèle à l'axe de la route, il divisera le remblai du profil C en deux parties, l'une p correspondante au déblai d', l'autre p' correspondante au remblai r'. Aux points A, B, C, on élève sur XX' des perpendiculaires sur lesquelles on porte, vers le haut, des longueurs Aa, Bb proportionnelles aux surfaces de déblais d et d', et vers le

teur à laquelle on doit s'élever; la rampe étant au 12°, on a

$$b = 12h,$$

et, puisque 20 mètres sur une rampe semblable équivalent à 30 mètres sur un terrain horizontal, la distance 12h sur la rampe équivaldra à 18h sur un chemin de niveau. On voit que la règle dont il s'agit revient à allonger le chemin horizontal d'une quantité égale à six fois la hauteur parcourue. Pour faire comprendre l'application de cette règle, soit AMNB (fig. 2) la section droite d'une fouille d'où

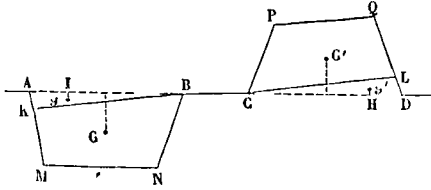


Fig. 2.

l'on doit tirer les terres destinées à élever un remblai dont la section droite est CPQD. Par les points B et C, menons les droites BK et CL inclinées au 12°, c'est-à-dire faisant avec l'horizontale des angles d'environ 4°46'. Soient g le centre de gravité du triangle AKB, g' celui du triangle CLD, G celui du quadrilatère LMNB, G' celui du quadrilatère CPQL; soient h, h', H, H' les distances de ces centres respectifs à l'horizontale ABCD; abaïssons sur cette horizontale les perpendiculaires gI et g'H. Considérons les volumes correspondants à une même longueur de fouille et de remblai perpendiculaire au plan de la figure. On aura à amener les terres au point B, à les transporter de B en C, et à les répartir sur toute l'étendue du remblai. On peut admettre que le travail est le même que si les volumes étaient concentrés en leurs centres de gravité. D'après cette supposition, pour amener les terres du prisme AKB en B, on aura à transporter un volume que nous appellerons v, à une distance qui se composera de IB, pour le transport horizontal, plus 6h pour tenir compte de la rampe. Le produit du volume par la distance sera donc

$$v(IB + 6h).$$

Pour le transport de B en C, le produit analogue sera

$$v.BC.$$

Pour le transport des terres du point C aux divers points du prisme CLD, dont nous désignerons le volume par v', on trouverait d'une manière analogue

$$v'.(CH + 6h').$$

Soient maintenant V le volume du prisme KMNB et V' celui du prisme CPQL; on aura pour le transport au point B le produit

$$V.18H;$$

pour le transport de B en C, le produit

$$V.BC;$$

enfin, pour le transport de C aux différents points du prisme CPQL, le produit

$$V'.18H'.$$

Il faut remarquer que, pour ne pas dépasser l'inclinaison au 12°, on est obligé d'allonger le parcours des volumes V et V' en leur faisant suivre des rampes

pratiquées sur le talus intérieur BN de la fouille et sur le talus CP. On espace ces rampes de 20 en 20 mètres; en sorte que chacune d'elles reçoit les terres ou les distribue à une distance de 10 mètres de chaque côté. Le centre de gravité du volume reçu ou distribué ainsi de chaque côté d'une rampe est donc à 5 mètres de cette rampe. Il en résulte qu'il faut ajouter 5 mètres à la distance du transport de chacun des volumes V et V'; en sorte que la somme totale des produits des volumes par les distances est

$$\left. \begin{aligned} &v.(1B + 6h + BC) + v'(CH + 6h') \\ &+ V(18H + BC + 5m) + V'(18H' + 5m). \end{aligned} \right\} [2]$$

Cette somme, divisée par le volume total v + V', donnera la distance moyenne de transport.

Les deux premiers termes de l'expression [2] sont généralement négligeables vis-à-vis des deux autres, à moins que la fouille ne soit très-large et peu profonde, ou le remblai très-large et peu élevé. Quand ces deux premiers termes peuvent être négligés, on a sensiblement

$$V = V',$$

et l'expression [2] se réduit à

$$V[18(H + H') + BC + 10m]:$$

la distance moyenne de transport est donc

$$18(H + H') + BC + 10m, \quad [3]$$

c'est-à-dire 18 fois la différence de niveau des centres de gravité du déblai et du remblai, plus la distance du bord du déblai au pied du remblai, augmentée de 10 mètres. Dans cet énoncé, il s'agit du déblai entier et du remblai entier, puisqu'on néglige les prismes AKB et CLD.

Si le sol allait en s'élevant du point B au point C, H désignant la différence de niveau des points G et B, H' celle des points G' et C, x celle des points B et C, ou aurait pour la distance moyenne de transport

$$18H + BC + 6x + 18H' + 10m$$

ou

$$18(H + H') + BC + 6x + 10m,$$

ce qui revient à ajouter, conformément à la règle donnée plus haut, six fois la différence de niveau des points B et C.

Si le sol allait, au contraire, en s'abaissant du point B au point C, on conserverait la formule [3], sans tenir compte de cette circonstance, à moins toutefois que le point G' ne descendît à un niveau égal ou inférieur à celui du point B, auquel cas on ajouterait simplement à 18H + 10m, la distance horizontale des points B et G'. On voit qu'on ne tient pas compte des rampes descendantes. L'expérience prouve, en effet, qu'elles n'offrent qu'un avantage peu appréciable.

II. Quand les terres ne doivent être déplacées que de 2 à 4 mètres dans le sens horizontal, ou de 1m,60 à 2 mètres dans le sens vertical, le transport se fait à la pelle. Pour des distances plus grandes, on fait usage de la brouette, et le transport se fait par relais. La terre est dite à un seul homme si un seul ouvrier suffit pour charger une brouette pendant qu'un autre ouvrier parcourt un relai de 30 mètres, aller et retour. La terre est dite à un homme et demi s'il faut deux chargeurs contre un piocheur pour alimenter deux brouettes parcourant ce même relai. La terre peut être à deux hommes, à trois hommes. En général, si T désigne le temps employé par un piocheur pour piocher un certain volume de

terre et t le temps employé par un chargeur pour charger ce même volume sur une brouette, le rapport $\frac{T}{t}$ exprime le nombre de piocheurs nécessaire pour qu'un chargeur puisse travailler sans interruption. Le nombre nécessaire pour alimenter un rouleur est alors

$$\frac{T}{t} + 1 \text{ ou } \frac{T+t}{t},$$

et la terre est à $\frac{T+t}{t}$ hommes.

Quant à la longueur du relai, elle se fixe par les considérations suivantes : on admet qu'un rouleur peut parcourir 30 000 mètres dans une journée de 10 heures, et qu'un chargeur peut charger 20 mètres cubes de terres dans le même temps ; d'un autre côté, la capacité ordinaire d'une brouette de terrassier répond à 0^m,04, c'est-à-dire qu'il faut compter 25 brouettées par mètre cube. Si donc on désigne par x la distance parcourue par le rouleur pendant que le chargeur remplit une brouette, on devra avoir

$$20 : 0,04 = 30\,000 : x,$$

d'où

$$x = 60^m.$$

La moitié de cette distance, c'est-à-dire 30 mètres, sera donc la longueur du relai. Ce relai est à peu près le même dans toutes les localités, bien que la capacité de la brouette varie, suivant les pays, depuis $\frac{1}{33}$ jusqu'à $\frac{1}{20}$ de mètre cube. Il est utile de connaître le temps employé pour transporter un mètre cube à la distance d'un relai. Puisque le rouleur parcourt 30 000 mètres en 10 heures, ou 3000 mètres par heure, il parcourt un double relai ou 60 mètres en 0^h,02 ; mais il ne transporte dans ce temps que $\frac{1}{25}$ de mètre cube ; pour transporter un mètre cube à la distance de 30 mètres, il emploiera donc un temps marqué par

$$0^h,02 \times 25 \text{ ou } 0^h,50.$$

Pour de plus grandes distances, on fait usage du camion, du tombereau, ou du wagon de terrassement. Le camion est un petit tombereau dont la capacité est de 0^m,20, et qui est ordinairement traîné par trois hommes. Les relais sont généralement de 100 mètres, et il faut 0^h,40 ou 24 minutes pour transporter 1 mètre cube de terre à cette distance. — La capacité des tombereaux varie depuis 0^m,50 jusqu'à 1^m,50. Ils sont traînés par un cheval, ou par deux chevaux, suivant leur capacité. Il faut 0^h,33, ou environ 20 minutes, pour transporter 1 mètre cube de terre à une distance de 100 mètres, avec un tombereau de capacité moyenne, le temps du chargement, de la marche et du déchargement compris.

Pour de très-grandes distances, on fait usage de wagons de terrassement, traînés soit par des chevaux, soit par une locomotive, et le transport ne se fait plus par relais. Dans les travaux de la tranchée de Clamart, chemin de fer de Versailles, rive gauche, les wagons avaient une capacité de 1^m,50. Trois chevaux en traînaient dix avec une vitesse de 25 000 mètres en 10 heures. Une locomotive en remorquait vingt avec une vitesse quadruple. Il y avait dans les deux cas une perte de 10 minutes à

chaque voyage pour le chargement et le déchargement. Le chemin avait une pente de 0^m,004 par mètre. Sur un chemin horizontal, il eût fallu cinq chevaux au lieu de trois.

Généralement on emploie la brouette ou le camion pour des distances qui ne dépassent pas 100 mètres ; le tombereau pour des distances de 100 à 500 mètres ; les wagons traînés par des chevaux pour des distances de 500 à 2000 mètres, et enfin des wagons remorqués par une locomotive pour des distances de 2000 mètres et au-dessus. Dans les pays de montagnes, on transporte souvent les terres à dos d'homme ou à dos d'âne : dans le premier cas, on fait usage de paniers appelés *banastes* ou *couffins*, suivant les localités, et qui ont une capacité de 0^m,01 environ ; dans le second cas, on charge l'âne de deux bennes ayant chacune une capacité de 0^m,04.

Quand il s'agit de transporter les terres verticalement, on doit préférer, toutes les fois que ce mode de transport est possible, le simple jet à la pelle, à une hauteur de 1^m,65. Trois ouvriers étagés à 1^m,65 l'un au-dessus de l'autre peuvent élever ainsi, en 10 heures, 15 mètres cubes de terre à une hauteur de 1^m,65 \times 3 ou 5 mètres environ. — Un autre procédé, presque aussi avantageux, est le transport à la hotte, à l'aide d'une échelle ou d'un escalier. Un manœuvre peut en une heure faire ainsi 27 voyages à une hauteur moyenne de 3 mètres, et, comme la capacité de la hotte est de 0^m,03, cela fait en 10 heures un volume total de 0^m,03.27.10 ou 8^m,10 élevés à 3 mètres : résultat presque équivalent au premier ; car si l'on multiplie dans les deux cas le volume par la hauteur, on obtient, pour le transport à la pelle par 3 ouvriers,

$$15^m \times 5^m \text{ ou } 75,$$

pour le transport à la hotte par 1 ouvrier,

$$8^m \times 10 \times 3^m \text{ ou } 24,3,$$

et par 3 ouvriers

$$72,9.$$

On emploie aussi des paniers appelés *bourriquets*, que l'on élève à l'aide de *treuils* (*Voy. ces mots*), et dont la capacité est de 0^m,033. Le treuil dont on fait usage a 15 à 20 centimètres de diamètre et 1^m à 1^m,20 de longueur. Il est mis en mouvement à l'aide d'une manivelle de 0^m,40 de rayon. La corde qui porte les paniers a 0^m,03 de diamètre. Le panier met 20 secondes pour s'élever de 5 mètres, et 15 secondes pour descendre. Il faut 20 secondes pour décrocher un panier plein et accrocher un panier vide, et 25 secondes pour vider le panier. Le temps total employé pour élever 0^m,033 de terre à 5 mètres est donc

$$80 \text{ secondes ou } 0^h,0222.$$

Il est facile d'en conclure qu'en 10 heures on peut élever ainsi à une hauteur de 5 mètres un volume total V donné par la proportion

$$0^h,0222 : 0^m,033 = 10 : V ;$$

d'où

$$V = 15 \text{ mètres cubes.}$$

Dans les travaux de percement des tunnels, on emploie de la même manière des bennes de 0^m,25 de capacité, élevées à l'aide d'un treuil dont l'arbre a 0^m,30 de diamètre et 2^m,70 de longueur, et qui est mis en mouvement par une roue à chevilles de 4^m,40 de diamètre (*Voy. pour plus de détails le*

Cours de Routes et Ponts professé par M. Mary à l'École Centrale, et l'*Aide-Mémoire* de M. Claude!).

TRAVAIL, nom donné par M. Poncelet au produit d'une force constante par le chemin qu'un point parcourt son point d'application dans la direction de cette force. Cette quantité a une importance très-grande dans la théorie des machines. Lorsqu'une force est employée à un usage industriel, l'effet produit ne dépend pas seulement de l'intensité de cette force, il dépend encore du chemin parcouru par son point d'application.

Lorsque, par exemple, une force verticale est employée à élever un fardeau, l'effet produit est évidemment proportionnel au poids de ce fardeau ; mais il est aussi proportionnel à la hauteur à laquelle le fardeau est élevé ; en sorte que si l'on désigne par P ce poids et par H cette hauteur, l'effet produit est en définitive proportionnel au produit PH. Lorsqu'une machine à raboter fonctionne, l'effet produit est proportionnel à l'effort que le rabot doit exercer pour entamer le métal à la profondeur voulue ; mais il est également proportionnel au chemin que l'outil doit faire pour raboter la surface soumise à son action ; il est donc proportionnel, en définitive, au produit de cet effort par ce chemin. Dans une machine à vapeur sans détente, l'effet produit est proportionnel à la pression que la vapeur exerce sur le piston, mais en même temps au chemin que le piston doit parcourir.

En général il s'agit toujours, dans les machines, d'exercer un certain effort sur un corps mobile, en sorte que l'effet obtenu est proportionnel au produit de cet effort par le déplacement de son point d'application. C'est ce produit, nommé d'abord *puissance mécanique* par Smeaton, *moment d'activité* par Carnot, *effet dynamique* par Monge et Hachette, *quantité d'action* par Coulomb et Navier, que M. Poncelet a nommé *travail* ; et cette dénomination a prévalu. Mais, afin de rendre la notion si importante du travail applicable à des forces variables agissant sur des points matériels animés de mouvements quelconques, on l'a généralisée de la manière suivante :

I. On nomme *travail élémentaire* d'une force le produit de cette force par l'élément de chemin que parcourt son point d'application, et par le cosinus de l'angle que la direction de la force fait avec la direction du chemin. Si F désigne la force, ds l'élément de chemin, et (F, ds) l'angle des deux directions, le travail élémentaire de la force F a pour expression

$$F \cdot ds \cdot \cos(F, ds).$$

Ce travail élémentaire est susceptible de deux autres expressions, qu'on obtient en groupant convenablement les trois facteurs.

1° On peut écrire

$$F \times ds \cdot \cos(F, ds).$$

Si AB (fig. 1) représente la force F en grandeur et en direction, et que AA' soit l'élément du chemin décrit par son point d'application, le produit $ds \cdot \cos(F, ds)$, ou $AA' \cdot \cos A'AB$, n'est autre chose que la projection Aa du chemin élémentaire AA' sur la direction de la force F ; et l'on peut dire que : *le travail élémentaire d'une force est le produit de*

cette force par la projection de l'élément de chemin sur la direction de la force.

2° On peut écrire au contraire

$$ds \times F \cdot \cos(F, ds) \text{ ou } AA' \times AB \cos BAB',$$

ce qui n'est autre chose que le produit de l'élément

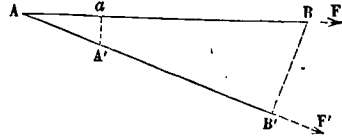


Fig. 1.

de chemin AA' par la projection AB' de AB sur la direction de ce chemin ; on peut donc dire aussi que : *le travail élémentaire d'une force F est le produit du chemin élémentaire que décrit son point d'application par la projection F' de la force sur la direction de cet élément.*

Ce produit est positif quand l'angle en A est aigu, c'est-à-dire lorsque, comme dans la figure 1, la projection de la force tombe du côté de l'élément de chemin ; on dit alors que l'élément de travail est *moteur*. (L'angle A pourrait être nul, comme dans la chute verticale des corps pesants). Ce produit est négatif lorsque l'angle en A est obtus, c'est-à-dire quand la projection de la force tombe du côté opposé à l'élément de chemin, comme dans le cas de la figure 2 ; on lui donne alors le nom de

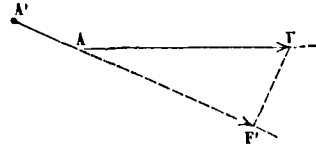


Fig. 2.

travail résistant. Cette circonstance arrive toutes les fois que le mobile est animé d'une vitesse faisant un angle obtus avec la direction de la force. (L'angle pourrait même être de 180°, comme cela a lieu dans le mouvement vertical d'un corps pesant de bas en haut.)

Le travail élémentaire d'une force peut être nul : 1° si la force a une valeur nulle ; 2° si l'élément de chemin est nul ; 3° si l'angle de la force avec la direction du chemin est droit, puisqu'on a alors $\cos(F, ds) = 0$. Ainsi *le travail élémentaire d'une force est nul toutes les fois que la force est perpendiculaire à l'élément de chemin décrit.*

II. On nomme *travail total* d'une force, pour un déplacement fini du mobile, la somme algébrique des travaux élémentaires de la force pour ce déplacement. Ce travail a pour expression

$$\int_0^s F ds \cos(F, ds).$$

On l'obtiendra généralement par une *QUADRATURE* (Voy. ce mot), en regardant $F \cos(F, ds)$ comme une fonction de l'arc s ; c'est-à-dire en prenant pour abscisses les arcs comptés à partir de la position initiale du mobile, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de la projection de la force sur la direction de l'élément de chemin, ou sur la tangente à la trajectoire parcourue.

Si la force F est constamment tangente à la trajectoire décrite par le mobile, on a constamment $\cos(F, ds) = 1$, et le travail total se réduit à

$$\int_0^s F ds;$$

c'est ce qui arrive toutes les fois qu'une force agit tangentiellement à la circonférence d'une roue; elle est sans cesse tangente à la trajectoire, qui est alors un cercle.

Si la force F est en même temps constante d'intensité, le facteur F sort du signe d'intégration, et il vient

$$F \int_0^s ds \text{ ou } F \cdot s,$$

c'est-à-dire que dans ce cas le travail total est égal au produit de la force constante par la longueur développée de l'arc décrit par son point d'application. Si, par exemple, la courbe parcourue est une circonférence de cercle de rayon r , le travail, pour un tour, sera exprimé par

$$F \cdot 2\pi r.$$

Si la force F est constante d'intensité et de direction, sans être tangente à la trajectoire, on a pour l'expression du travail total

$$F \int_0^s ds \cdot \cos(F, ds).$$

L'intégrale qui figure dans cette expression n'est autre chose que la somme algébrique des projections des éléments de chemin sur la direction constante de la force; elle est égale par conséquent à la projection, sur cette direction, de la droite qui joint la position initiale et la position finale du mobile. (Voy. le théorème fondamental sur les projections dans les Traités de Géométrie analytique.)

Le travail de la pesanteur sur un point matériel offre un exemple de ce cas. Soit A (fig. 3) la po-

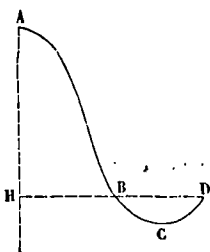


Fig. 3.

sition initiale du mobile, AH une verticale, $ABCD$ la trajectoire parcourue; le travail de la pesanteur sera égal au poids du mobile multiplié par la projection de l'arc AD sur la verticale, c'est-à-dire à la distance verticale AH entre le point de départ A du mobile et son point d'arrivée D ; en sorte que si p désigne le poids du mobile, et h la hauteur AH , le travail de la pesanteur aura pour expression ph . On peut remarquer que, si B est l'intersection de la trajectoire avec le plan horizontal mené par le point D , le travail total est le même pour l'arc AB que pour l'arc AD ; et par conséquent le travail relatif à l'arc BCD est nul; ce qui tient à ce qu'il se compose d'éléments positifs, corres-

pondants à la descente suivant BC , et d'éléments négatifs suivant la montée CD , dont la somme algébrique est nulle. Ainsi, quand un point matériel pesant revient au niveau d'où il était parti, le travail de la pesanteur est nul pour le déplacement correspondant.

III. On a adopté pour unité de travail le travail nécessaire pour élever un poids de 1 kilogramme à une hauteur de 1 mètre; ce travail est, d'après ce qui a été dit plus haut, le produit de 1^k par 1^m ; on lui a donné le nom de *kilogrammètre*, et on désigne cette unité par les initiales km placées à droite du nombre de kilogrammètres exprimés, et un peu au-dessus. Ainsi 50 kilogrammètres s'écrivent 50^{km} . Coriolis a appelé *dynamode* un travail de 1000^{km} . Pour évaluer le travail continu des machines, on emploie une autre unité qui dépend du temps, et qu'on appelle *CHEVAL-VAPEUR* (Voy. ce mot).

Le travail total d'une force se désigne par la caractéristique \mathfrak{E} placée devant la lettre qui représente la force; ainsi $\mathfrak{E}F$ signifie *travail total de la force F*. Si, par exemple, P désigne le poids d'un corps, h la hauteur dont il s'est abaissé verticalement, on aura

$$\mathfrak{E}P = Ph;$$

et si $P = 500^k$, et si $h = 4^m$, on aura

$$\mathfrak{E}P = 500 \cdot 4 = 2000^{km},$$

ou 2000 kilogrammètres.

Pour indiquer le travail élémentaire d'une force, on met la lettre d devant la caractéristique \mathfrak{E} ; ainsi $d\mathfrak{E}F$ signifie le travail élémentaire de la force F .

IV. La considération du travail des forces donne lieu à plusieurs propositions importantes, auxquelles on a fréquemment recours dans les applications.

A. Si plusieurs forces $F, F', F'', \text{ etc.}$, sont appliquées à un même point matériel, la somme algébrique de leurs travaux élémentaires, pour un déplacement très-petit de leur point d'application, est égale au travail élémentaire de leur résultante R . On sait, en effet, que si les droites qui représentent les composantes sont transportées parallèlement à elles-mêmes et placées bout à bout de manière à former une ligne brisée, la droite qui ferme le polygone représente la résultante (Voy. COMPOSITION DES FORCES).

Soit $ABCDE$ (fig. 4) la ligne brisée, et AE la droite

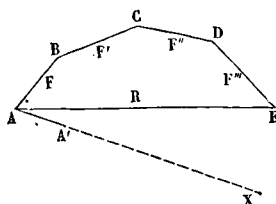


Fig. 4.

qui ferme le polygone. Projétons cette ligne brisée et cette droite sur la direction AX du chemin élémentaire AA' décrit par le point d'application de ces forces, et soient $\alpha, \alpha', \alpha'', \text{ etc.}$, les angles que les côtés successifs de la ligne brisée font avec AX , et a l'angle que fait AE avec le même axe. Par la

propriété fondamentale des projections, on aura

$$AE \cdot \cos a = AB \cos \alpha + BC \cos \alpha' + CD \cos \alpha'' + DE \cos \alpha'''$$

ou

$$R \cos a = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' + F''' \cos \alpha'''$$

Multiplions les deux membres par AA' ou ds , nous aurons

$$R \cdot ds \cdot \cos a = F ds \cos \alpha + F' ds \cos \alpha' + F'' ds \cos \alpha'' + F''' ds \cos \alpha'''$$

Or, les différents termes de cette égalité ne sont autre chose que l'expression du travail élémentaire des forces R, F, F', F'', F''' ; on peut donc écrire, en employant la notation indiquée ci-dessus,

$$d\mathcal{C} \cdot R = d\mathcal{C} \cdot F + d\mathcal{C} \cdot F' + d\mathcal{C} \cdot F'' + d\mathcal{C} \cdot F''', [A]$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

b. Lorsque le chemin élémentaire décrit par le point d'application d'une force résulte de plusieurs mouvements simultanés, le travail élémentaire de cette force dans le mouvement résultant est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de cette même force dans chacun des mouvements composants. Pour fixer les idées, supposons que le mouvement considéré résulte de trois mouvements simultanés. Soit AA' (fig. 5) le chemin élémentaire

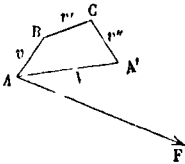


Fig 5.

décrit dans le temps dt avec la vitesse résultante V , et soient AB, BC, CA' les chemins élémentaires décrits dans le même temps avec les vitesses composantes v, v', v'' . Les chemins AA', AB, BC, CA' seront proportionnels aux vitesses V, v, v', v'' , et pourraient les représenter à une échelle convenable. Projetons-les sur la direction de la force F appliquée en A ; soient $\alpha, \alpha', \alpha''$ les angles que les chemins AB, BC, CA' font avec la direction de F , et soit a l'angle que fait AA' avec cette même direction. On aura, par la propriété des projections,

$$AA' \cdot \cos a = AB \cos \alpha + BC \cos \alpha' + CA' \cos \alpha''$$

Multiplions les deux membres par F , nous aurons

$$F \cdot AA' \cos a = F \cdot AB \cos \alpha + F \cdot BC \cos \alpha' + F \cdot CA' \cos \alpha'' \quad [B]$$

Or le premier membre est le travail élémentaire de la force F dans le mouvement résultant, et les termes du second membre expriment le travail élémentaire de cette même force dans les mouvements composants. Cette égalité exprime donc la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

c. Deux forces égales et opposées, appliquées à un même point matériel, ont des travaux élémentaires égaux et de signe contraire. Car si F désigne l'intensité de l'une des forces, et α l'angle qu'elle fait avec le chemin élémentaire décrit par son point d'application, l'autre force fera avec le même chemin élémentaire un angle égal à $180^\circ - \alpha$. Le travail élémentaire de la première force sera $F \cdot ds \cdot \cos \alpha$; le travail élémentaire de la seconde sera $F \cdot ds \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ ou $-F ds \cos \alpha$; ce qui démontre la proposition.

d. Si deux forces égales et opposées sont appli-

quées aux extrémités d'une droite rigide et inextensible, la somme algébrique de leurs travaux élémentaires, pour un très-petit déplacement de cette droite, est égale à zéro. Soit AB (fig. 6) la droite

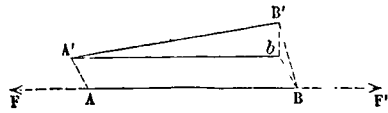


Fig. 6.

considérée. Soient F et F' les deux forces égales et opposées appliquées aux extrémités de cette droite. Supposons qu'elle se déplace d'une petite quantité pour venir en $A'B'$. On peut imaginer que ce déplacement s'opère par deux mouvements simultanés: l'un, par lequel la droite AB se transporterait parallèlement à elle-même en $A'b$; l'autre, par lequel la droite $A'b$ tournerait autour du point A' pour venir se placer en $A'B'$, le point b ayant décrit un très-petit arc de cercle bB' . D'après la proposition [B] ci-dessus, nous pourrions, pour obtenir le travail élémentaire de chacune des deux forces, l'évaluer dans chacun des deux mouvements composants. Soit α l'angle $A'AF$ ou bBA que font les lignes parallèles AA' et bB avec la direction AB des deux forces. Le travail élémentaire de F dans le premier mouvement composant sera $F \cdot AA' \cdot \cos \alpha$; dans le second mouvement composant, le travail de cette même force sera nul, puisque le point d'application A' ne se déplace pas. Le travail élémentaire de F' dans le premier mouvement composant sera $F' \cdot bB \cos(180^\circ - \alpha)$, ou $-F' \cdot bB \cos \alpha$; dans le second mouvement composant, le travail de cette même force sera nul, attendu qu'elle reste perpendiculaire à l'arc bB' décrit par son point d'application. La somme des travaux élémentaires des deux forces se réduit donc à

$$F \cdot AA' \cos \alpha - F' \cdot bB \cos \alpha$$

Or $F = F'$ et $AA' = bB$; la somme de ces travaux élémentaires est donc égale à zéro, ce qu'il s'agissait de démontrer.

e. Lorsqu'on transporte une force, appliquée à un corps solide, en un autre point de sa direction, invariablement lié avec le premier, son travail élémentaire ne change pas. En effet, soit F (fig. 7) une

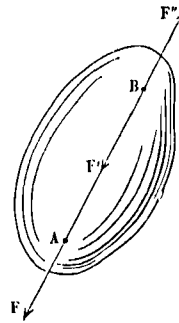


Fig. 7.

force appliquée en un point A d'un corps solide, et soit B un point quelconque pris sur sa direction et invariablement lié au point A . Pour justifier le

transport de la force F du point A au point B, on applique en B (Voy. FORCE) deux forces opposées F' et F'' égales et parallèles à F; le travail élémentaire de ces deux forces étant nul, d'après la proposition [C], le travail primitif ne se trouve pas altéré. On supprime ensuite les deux forces F et F'', comme étant deux forces égales et opposées appliquées aux extrémités d'une droite rigide et inextensible AB; ce qui, d'après la proposition [D], n'altère pas non plus le travail primitif. Il ne reste ainsi que la force F', qui n'est autre chose que la force F transportée en B; et le travail élémentaire de la force F' est le même, d'après ce que nous venons de dire, que le travail élémentaire de la force F.

f. La somme des travaux élémentaires de plusieurs forces parallèles est égale au travail élémentaire de leur résultante. Considérons d'abord le cas de deux forces parallèles et de même sens F et F' (fig. 8), appliquées aux points A et B d'un même

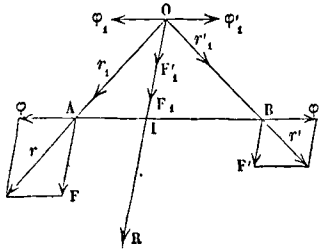


Fig. 8.

corps solide. Pour trouver leur résultante (Voy. COMPOSITION DES FORCES), on applique en A et en B deux forces φ et φ' égales et contraires; la droite AB étant supposée rigide et inextensible, en vertu de la proposition [D] cette addition de forces n'altère pas le travail élémentaire primitif. On remplace les forces φ et F par leur résultante r, les forces φ' et F' par leur résultante r'; en vertu de la proposition [A], ces opérations n'altèrent pas le travail. On transporte les forces r et r' en leur point de concours O, ce qui n'altère pas le travail, en vertu de la proposition [E]. On remplace les forces r₁ et r'₁ appliquées en O par leurs composantes φ_1, F_1 et φ'_1, F'_1 ; en vertu de la proposition [A], le travail n'est pas altéré. On supprime les forces égales et opposées φ_1 et φ'_1 ; en vertu de la proposition [C], cette suppression n'altère pas le travail. Enfin, on compose les forces F₁ et F'₁, appliquées au même point O, en une seule force R; en vertu de la proposition [A], le travail élémentaire n'est pas altéré. On peut ensuite, conformément à la proposition [E], transporter la force R en un point quelconque de sa direction, au point I par exemple, sans altérer le travail primitif. Donc, en définitive, le travail élémentaire de la résultante R est égal à la somme des travaux élémentaires des deux composantes F et F'.

Considérons en second lieu le cas de deux forces parallèles et de sens contraire F et F' (fig. 9) appliquées aux points A et B d'un même corps solide. Pour trouver leur résultante, on remplace d'abord la force F par deux forces parallèles et de même

sens F'' et R, en choisissant le point d'application C de la force R de telle manière que F'' soit précisément égal à F'. On vient de voir que cette substitution n'altère pas le travail primitif. On supprime

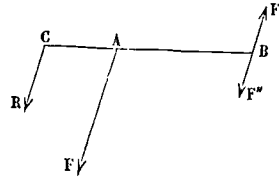


Fig. 9.

ensuite les deux forces égales et opposées F' et F'' appliquées à un même point matériel, ce qui, en vertu de la proposition [C], n'altère pas le travail primitif. Il ne reste alors que la force R; ainsi le travail élémentaire de cette force est égal à la somme des travaux élémentaires des forces primitives F et F'. Le travail élémentaire de la résultante est donc encore égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes. Il n'y aurait exception que dans le cas où les deux forces formeraient un couple; dans ce cas il n'y a pas de résultante.

Il est facile d'étendre la proposition à un système quelconque de forces parallèles et de même sens F, F', F'', F''', F'''. Soit r la résultante des forces F et F'; r' celle des forces r et F''; r'' celle des forces r' et F''', enfin R celle des forces r'' et F''', c'est-à-dire la résultante totale; on aura successivement

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}r &= d\mathcal{C}F + d\mathcal{C}F', \\ d\mathcal{C}r' &= d\mathcal{C}r + d\mathcal{C}F'', \\ d\mathcal{C}r'' &= d\mathcal{C}r' + d\mathcal{C}F''', \\ d\mathcal{C}R &= d\mathcal{C}r'' + d\mathcal{C}F'''. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre et supprimant les termes communs aux deux membres, on obtient $d\mathcal{C}R = d\mathcal{C}F + d\mathcal{C}F' + d\mathcal{C}F'' + d\mathcal{C}F''' + d\mathcal{C}F''''$, ce qui démontre la proposition. Cette démonstration est indépendante du nombre des composantes.

Enfin, pour étendre la proposition à des forces parallèles quelconques, soit R la résultante de toutes celles qui tirent dans un certain sens, et R' la résultante de toutes celles qui tirent en sens contraire; le travail élémentaire des premières sera égal à $d\mathcal{C}R$, et le travail élémentaire des secondes sera égal à $d\mathcal{C}R'$. Si R'' est la résultante des forces parallèles et de sens contraire R et R', on aura, d'après ce qui a été démontré plus haut,

$$d\mathcal{C}R'' = d\mathcal{C}R + d\mathcal{C}R'$$

donc encore le travail élémentaire de la résultante finale est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes.

Il n'y aurait exception que dans le cas où les forces R et R' formeraient un couple; mais dans ce cas le système proposé n'aurait pas de résultante.

g. On peut conclure de ce qui précède que lorsqu'un système quelconque de forces a une résultante, le travail élémentaire de cette résultante est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les composantes.

Par des moyens tout à fait analogues on ferait voir que lorsqu'on réduit un système quelconque de

forces appliquées à un corps solide de deux forces équivalentes, le travail élémentaire primitif n'est pas altéré. Car pour opérer cette réduction on opère des compositions et décompositions partielles qui n'altèrent point le travail.

(Voy. EFFET DU TRAVAIL [Principe de l']).

h. La somme des travaux des forces appliquées à un corps solide prend une expression très-simple quand ce corps est animé soit d'un mouvement de TRANSLATION, soit d'un mouvement de ROTATION autour d'un axe (Voy. ces mots).

Dans le premier cas, soit Δx l'élément de chemin parcouru par un point quelconque du corps, et soit F la résultante des forces appliquées à ce point; le travail élémentaire de cette force sera égal à Δx multiplié par la projection de la force F sur la direction de l'élément de chemin, c'est-à-dire sur un axe quelconque parallèle à la vitesse commune de tous les points du système; en appelant F_x cette projection, on aura donc pour le travail élémentaire de la force F

$$F_x \cdot \Delta x.$$

Pour un autre point du système, soumis à des forces dont la résultante est F' , on aurait de même

$$F'_x \cdot \Delta x,$$

puisque le chemin élémentaire décrit par chacun des points du système est le même. Pour un troisième point soumis à une force F'' , on aurait

$$F''_x \cdot \Delta x,$$

et ainsi de suite. La somme de ces travaux élémentaires est donc

$$\Delta x (F_x + F'_x + F''_x + \dots),$$

c'est-à-dire le produit de l'élément de chemin que décrit un point quelconque du système par la somme algébrique des projections des forces sur un axe parallèle à la direction de ce chemin. On peut écrire pour abrégé

$$\Delta x \cdot \Sigma F_x.$$

Si l'on imagine que toutes les forces du système soient transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point de l'espace, elles pourront s'y composer en une seule à laquelle on a donné le nom de *résultante de translation*. Soit R cette résultante; sa projection R_x sur l'axe déjà considéré sera égale à la somme algébrique des projections de ses composantes, et l'on aura

$$R_x = \Sigma F_x.$$

On peut donc écrire pour l'expression du travail élémentaire des forces considérées

$$\Delta x \cdot R_x.$$

Or, il faut bien remarquer que la résultante R ne dépend nullement des forces mutuelles que les points matériels du système exercent les uns sur les autres, puisque, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles s'y détruisent deux à deux; la force R est donc la résultante des forces extérieures seulement, et l'on peut dire enfin que le travail élémentaire d'un système de forces appliquées à un corps animé d'un mouvement de translation, est égal à l'élément de chemin décrit par un point quelconque du système, multiplié par la projection, sur la direction du mouvement, de la résultante de translation des forces extérieures.

k. Si le corps est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, supposons, pour fixer les idées, que l'on prenne pour plan de la figure un plan perpendiculaire à cet axe, lequel se projettera

ainsi suivant un point O (fig. 10). Considérons un point quelconque A du système; il se projettera sur la figure en un point a . Au point A sont appliquées des forces dont nous représenterons la résultante

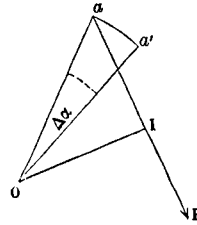


Fig. 16.

tante par F . Cette force pourra se décomposer en deux autres: l'une P perpendiculaire à l'axe, et qui se projettera en vraie grandeur suivant aP ; l'autre Q parallèle à cet axe. Le travail élémentaire de la force F sera la somme des travaux élémentaires des forces P et Q . Or le travail élémentaire de cette dernière est nul, puisque le point A décrit un arc situé dans un plan perpendiculaire à l'axe et conséquemment à la force Q ; le travail élémentaire de la force F se réduit donc à celui de la composante P . Évaluons ce dernier. Le point A en se déplaçant décrit un petit arc qui se projette en vraie grandeur suivant aa' ; le travail élémentaire cherché a donc pour expression

$$P \cdot aa' \cdot \cos Paa'.$$

Or on a d'abord en appelant $\Delta \alpha$ l'arc élémentaire décrit par un point situé à l'unité de distance de l'axe

$$aa' = Oa \cdot \Delta \alpha;$$

de plus, si l'on abaisse OI perpendiculaire sur aP , on a $Paa' = aOI$ comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, puisque aa' peut être regardée comme une droite perpendiculaire à Oa . Le travail élémentaire de P peut donc s'écrire

$$P \cdot Oa \cdot \Delta \alpha \cdot \cos aOI,$$

$$\text{ou} \quad \Delta \alpha \cdot P \cdot Oa \cdot \cos aOI.$$

Mais $Oa \cdot \cos aOI$ n'est autre chose que OI ; il vient donc

$$\Delta \alpha \cdot P \cdot OI.$$

Or, $P \cdot OI$ est le produit de la projection de la force F sur un plan perpendiculaire à l'axe par la distance OI de cette projection à l'axe, c'est-à-dire que ce n'est autre chose que le MOMENT (Voy. ce mot) de la force F par rapport à l'axe; et le travail élémentaire de la force F peut s'écrire

$$\Delta \alpha \cdot \Sigma \mathcal{M} \cdot F.$$

Pour d'autres points du système, soumis respectivement aux forces F' , F'' , F''' , etc., on aurait de même

$$\Delta \alpha \cdot \Sigma \mathcal{M}' \cdot F', \quad \Delta \alpha \cdot \Sigma \mathcal{M}'' \cdot F'', \quad \Delta \alpha \cdot \Sigma \mathcal{M}''' \cdot F''',$$

et ainsi de suite. La somme des travaux élémentaires de toutes les forces appliquées au système est donc

$$\Delta \alpha (\Sigma \mathcal{M} F + \Sigma \mathcal{M}' F' + \Sigma \mathcal{M}'' F'' + \Sigma \mathcal{M}''' F''' + \text{etc.}),$$

ou

$$\Delta \alpha \Sigma \mathcal{M} \mathcal{I} F,$$

c'est-à-dire l'arc élémentaire que décrit un point situé à 1^{re} de distance de l'axe, multiplié par la somme algébrique des moments des forces par rapport à cet axe.

On peut remarquer que les forces mutuelles qu'exercent les points matériels du système les uns sur les autres disparaissent de cette expression; car deux forces égales et contraires donnent, sur un plan perpendiculaire à l'axe, des projections égales et contraires; d'ailleurs ces projections, situées en ligne droite, sont à la même distance de l'axe; les moments des deux forces mutuelles sont donc égaux et de signe contraire, et disparaissent conséquemment lorsqu'on fait la somme totale des moments. Il ne reste ainsi que les moments des forces extérieures.

TRAVAIL DE LA PESANTEUR, travail développé par la pesanteur dans le mouvement d'un point matériel ou d'un système de points matériels quelconque.

I. Si l'on considère d'abord un point matériel parcourant, sous l'action de la pesanteur, une courbe quelconque AB (fig. 1), on reconnaît que le

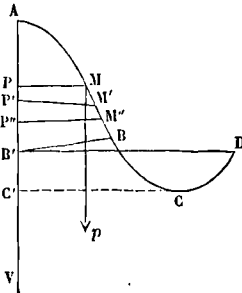


Fig. 1.

travail de la pesanteur sur ce point est égal au poids du mobile multiplié par la quantité dont il s'est abaissé dans le sens vertical. Soit, en effet, AV la verticale du point de départ, et soient M et M' deux positions du mobile, très-voisines l'une de l'autre; l'élément de travail correspondant à cet élément de chemin sera égal au poids p du mobile, multiplié par la projection de MM' sur la direction de ce poids, ou, ce qui revient au même, sur la verticale AV; si P et P' sont les projections de M et de M' sur cette verticale, on aura donc pour l'expression du travail élémentaire considéré

$$p \times PP'$$

Si M'' est un autre point voisin de M', et P'' sa projection sur AV, on aura de même pour l'expression du travail élémentaire correspondant à l'élément de chemin M'M'',

$$p \times P'P''$$

et ainsi de suite. La somme de ces travaux élémentaires sera donc égale au poids p multiplié par la somme des quantités PP', P'P'', etc., c'est-à-dire par la somme des projections des éléments de la trajectoire sur la verticale, ou par la distance verticale comprise entre les extrémités de cette trajectoire. Si donc B' est la projection de B sur la verticale du point A, le travail de la pesanteur relatif au trajet du mobile de A en B sera

$$p \cdot AB'$$

ou le produit du poids du mobile par la hauteur verticale dont il est descendu.

Si le mobile, au lieu de descendre le long de sa

trajectoire, montait suivant cette courbe, les éléments de travail seraient les mêmes en valeur absolue, mais ils seraient négatifs, puisque les éléments de chemin, au lieu de se projeter verticalement dans le sens du poids p , se projetteraient en sens contraire.

Si le mobile descendait d'abord pour remonter ensuite, comme pour aller, par exemple, de A en D, ce dernier point étant supposé dans le même plan horizontal que B, le point D aurait pour projection verticale B', et le travail de la pesanteur serait encore

$$p \cdot AB'$$

En effet, si l'on mène un plan horizontal par le point C le plus bas de la trajectoire, et que C' soit le point où ce plan horizontal coupe la verticale AV, le travail de la pesanteur se composera du travail relatif à l'arc AC, augmenté algébriquement du travail relatif à l'arc CD; il aura donc pour expression

$$p \times AC' - p \cdot C'B' \text{ ou } p \cdot AB'$$

II. Considérons maintenant un système quelconque de points matériels. Soient $A_0, A_0', A_0'', \text{ etc.}$ (fig. 2), leurs positions initiales, et $h_0, h_0', h_0'', \text{ etc.}$,

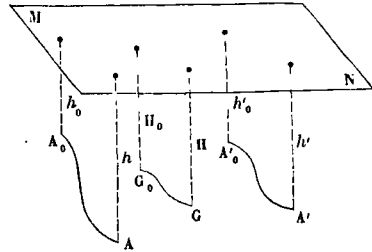


Fig. 2.

leurs distances initiales à un plan horizontal de comparaison MN; soient A, A', A'', etc., leurs positions finales, et $h, h', h'', \text{ etc.}$, leurs distances finales au même plan de comparaison; soient $p, p', p'', \text{ etc.}$, leurs poids; G_0 et G les positions initiale et finale du centre de gravité du système, H_0 et H ses distances initiale et finale au plan MN; enfin soit P le poids total du système. D'après ce qui vient d'être établi, le travail de la pesanteur sur le premier point matériel sera

$$p (h - h_0);$$

le travail de la pesanteur sur le second point matériel sera de même

$$p' (h' - h'_0),$$

et ainsi de suite. En sorte qu'en désignant par T le travail total de la pesanteur, on aura

$$T = p (h - h_0) + p' (h' - h'_0) + p'' (h'' - h''_0) + \dots,$$

ce qu'on peut écrire

$$T = (ph + p'h' + p''h'' + \dots) - (ph_0 + p'h'_0 + p''h''_0 + \dots).$$

Or, en vertu du théorème sur les moments des forces parallèles par rapport à un plan (Voy. MOMENTS) on a

$$ph + p'h' + p''h'' + \dots = PH$$

et

$$ph_0 + p'h'_0 + p''h''_0 + \dots = PH_0;$$

il vient donc en substituant,

$$T = PH - PH_0 = P (H - H_0).$$

Or P est le poids total du système, $H - H_0$ est la distance verticale dont le centre de gravité du système s'est abaissé; on peut donc dire que : *dans un système matériel quelconque, le travail de a pesanteur est égal au poids total du système multiplié par la quantité dont le centre de gravité s'est abaissé dans le sens vertical.*

Si le centre de gravité s'est élevé, c'est-à-dire si l'on avait $H < H_0$, le travail total serait négatif. Il serait nul si le centre de gravité ne s'était pas déplacé, ou si, après avoir descendu ou monté, il se retrouvait au même niveau, c'est-à-dire dans le plan horizontal mené par sa position initiale, car on aurait alors

$$H = H_0.$$

On peut remarquer aussi que *le travail de la pesanteur est la différence entre la somme des moments des poids qui composent le système, par rapport à un plan horizontal de comparaison, dans leur position finale et dans leur position initiale.*

III. Il peut arriver, lorsqu'un système matériel ne se déplace que d'une petite quantité, qu'il y ait entre les deux positions du système une *partie commune* susceptible d'être regardée comme composée des mêmes points matériels dans les deux positions, ou de points matériels identiques; dans ce cas l'expression du travail de la pesanteur se simplifie. Considérons, par exemple, un liquide contenu dans un vase, et terminé, dans sa position initiale, aux plans AB et CD (fig. 3) et, dans sa posi-

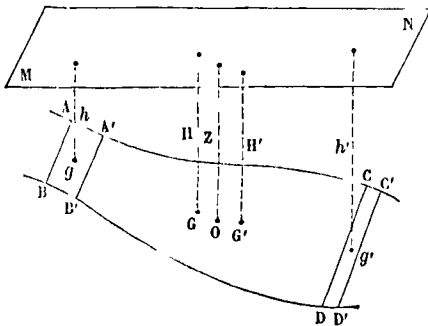


Fig. 3.

tion finale, aux plans A'B' et C'D'. Soient G et G' les positions initiale et finale du centre de gravité de la masse liquide considérée; soit g le centre de gravité de la partie AB B' A', g' celui de la partie CD D' C', et O le centre de gravité de la partie commune A' B' DC, lequel est le même dans les deux positions, attendu que, par suite de l'incompressibilité du liquide, les molécules qui composent la partie commune dans les deux positions peuvent être considérées comme identiques. Soit P le poids total du système, p le poids de la partie AB B' A', qui est aussi celui de la partie CD D' C' puisque ces volumes sont égaux, et soit q le poids de la partie commune A' B' DC.

Soient enfin h, h', H, H', Z les ordonnées des points g, g', G, G' et O par rapport à un plan horizontal de comparaison MN. On aura, par le théorème des moments :

dans la première position

$$PH = ph = qZ,$$

dans la seconde

$$PH' = qZ + ph' :$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$P(H' - H) = p(h' - h).$$

Or, d'après ce qui a été établi tout à l'heure, le premier membre exprime le travail total de la pesanteur sur le système considéré; donc le second membre est une seconde expression du même travail. Mais ce second membre est le travail qui serait développé par la pesanteur si la masse qui occupe la position ABB'A' était transportée directement en CDD'C'; par conséquent, *le travail total de la pesanteur est le même que si la partie non commune s'était directement transportée du lieu qu'elle occupe dans la première position du système au lieu qu'elle occupe dans la seconde position.* Cette remarque est d'une application fréquente dans les questions d'hydraulique et dans la mécanique des gaz.

TRAVAIL VIRTUEL, travail élémentaire d'une force dans un mouvement virtuel, ou hypothétique. On emploie en Statique un principe important, nommé *Principe des vitesses virtuelles* ou *du travail virtuel*, qui consiste en ce que : *lorsqu'un système de points matériels est en équilibre, si on lui imprime un mouvement virtuel compatible avec les liaisons établies entre ses différents points, la somme algébrique des travaux virtuels de toutes les forces auxqueltes il est soumis est égale à zéro.* Ce principe n'est que l'application, au cas d'un système en équilibre, du principe général de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot, et l'article ÉQUILIBRE).

Le travail virtuel portait autrefois le nom de *moment virtuel*. Mais le mot *moment* est déjà employé dans tant de circonstances diverses, qu'il y a avantage à le remplacer dans ce cas par le mot de *travail*, qui est plus précis.

TRAVÉES, parties d'un PLANCHER (Voy. ce mot), séparées par les poutres transversales encastées dans le mur.

Parties du tablier d'un pont de bois séparées par les solives.

TRAVERSES, massifs que l'on élève dans l'intérieur d'un ouvrage de fortification pour concourir au DÉFILEMENT (Voy. ce mot), et dans le chemin couvert pour le garantir de l'enfilade; ces dernières ont une banquette sur laquelle les défenseurs montent pour faire le coup de feu. Une première traverse A est établie à l'entrée de la place d'armes rentrante R; elle a 6^m d'épaisseur; sa ligne de feu est dans le prolongement de celle de la place d'armes. Une dernière traverse B est établie à l'entrée de la place d'armes saillante S; le pied de son talus est dans le prolongement de la face LN de la demi-lune; elle n'a ordinairement que 3^m d'épaisseur. Entre ces deux traverses extrêmes, on en élève d'autres en nombre tel, qu'elles soient distantes les unes des autres de 25 à 30 mètres; leur direction est perpendiculaire à la contrescarpe. Toutes ces traverses vont de la contrescarpe à la crête du glacis; mais on ménage, aux dépens du glacis même, un passage rectangulaire à l'extrémité de chaque traverse; ce passage n'a que 2^m de large; et la palissade dont il est garni, le réduit d'ordinaire à 1^m,50; mais cet espace est suffisant pour la circulation des fantassins. Les traverses

du chemin couvert sont généralement revêtues en maçonnerie à leurs extrémités, au moins jusqu'à une certaine hauteur; et il en est de même des passages rectangulaires. Ces passages sont quelque-

son autre extrémité. Indépendamment de ces deux forces, le treuil est soumis à son poids Π , et il reçoit les réactions de ses appuis, que nous désignerons par R' et R'' . Nous désignerons par r le rayon

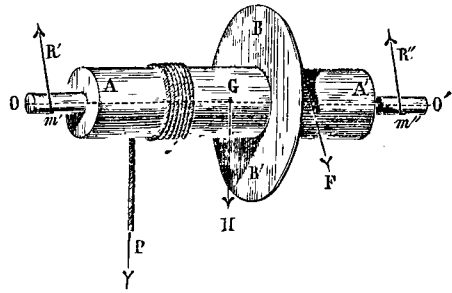
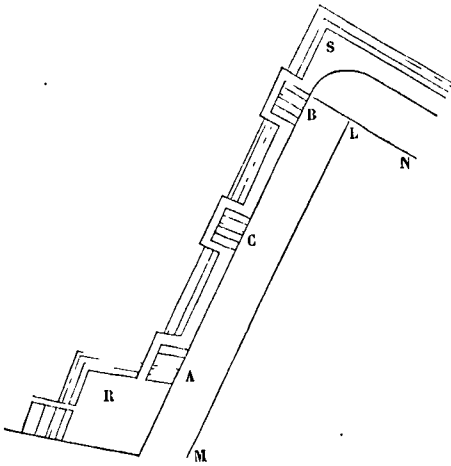


Fig. 1.

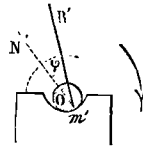


Fig. 2.

fois munis de banquettes; mais il faut alors leur donner trop de largeur, et ils offrent trop de prise aux coups de l'artillerie assiégeante.

On établit aussi des traverses pour garantir latéralement le réduit d'une BATTERIE DE CÔTE (Voy. ce mot).

(Voyez pour plus de détails les *Principes de fortification* par le général Noizet.)

TREILLIS (PONTS EN). Voy. PONTS EN CHARPENTE.

TREPAN, outil qui sert à percer, et que l'on fait agir en lui imprimant un mouvement de rotation autour de son axe; pour cela, on fixe à l'extrémité du manche deux cordes qui s'y enroulent en hélice, et vont s'attacher aux extrémités d'une pièce transversale qui peut glisser le long du manche. En donnant à cette traverse un mouvement de va-et-vient, on imprime à l'outil un mouvement circulaire alternatif (Voy. TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS, fig. 11).

On donne aussi le nom de *trépan* à une sorte de ciseau, de grande dimension, et armé de dents, qui sert au forage des Puits artésiens (Voy. ce mot).

TREUIL, machine simple et organe de transformation de mouvements, servant à changer un mouvement continu de rotation autour d'un axe en un mouvement continu de translation perpendiculairement à cet axe. Un treuil se compose d'un cylindre AA' (fig. 1) terminé par deux cylindres plus petits, mais ayant le même axe, et que l'on nomme ses *tourillons*; c'est par ces tourillons que le treuil, le plus souvent horizontal, repose sur ses appuis, appelés *coussinets*, creusés à cet effet en forme de demi-cylindres, comme l'indique la figure 2. Sur l'axe du treuil est montée une roue BB' , dont le plan est perpendiculaire à cet axe; c'est tangentiellement à la circonférence de cette roue qu'est appliquée la force mouvante F . La force résistante P est appliquée à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur la surface du treuil, et y est fixée par

du treuil, par ρ celui de ses tourillons, par b celui de la roue.

I. Lorsqu'on néglige le frottement et la raideur de la corde, on obtient immédiatement la relation qui lie les forces F et P dans l'état d'équilibre ou de mouvement uniforme, en égalant à zéro la somme des moments des forces par rapport à l'axe du treuil. Le moment de la force F est Fb ; celui de la force P est Pr en valeur absolue (si l'on comprend dans r la moitié du diamètre de la corde); les forces R' et R'' , étant normales aux tourillons, passent par l'axe, et par conséquent leur moment est nul; il en est de même du moment du poids du treuil dont le point d'application est sur l'axe; on a donc, en ayant égard au signe des moments,

$$Fb - Pr = 0 \text{ ou } F = P \cdot \frac{r}{b}, \quad [1]$$

ce qu'on peut énoncer en disant que la puissance est à la résistance comme le rayon du treuil est au rayon de la roue; c'est la relation indiquée dans les traités de Statique.

II. Mais le frottement est rarement négligeable, et il est nécessaire d'y avoir égard. Pour cela il faut déterminer les réactions R' et R'' ; et, à cet effet, il est commode de décomposer d'abord chacune des forces F, P et Π en deux autres forces parallèles appliquées dans deux plans menés perpendiculairement à l'axe par les points m' et m'' où sont déjà appliquées les réactions R' et R'' ; nous désignerons par F', P', Π' les composantes dans le plan passant par m' , et F'', P'', Π'' , les composantes dans le plan passant par m'' (Voy. DÉCOMPOSITION DES FORCES). On démontre aisément que le groupe des quatre forces F', P', Π' et R' se réduit à un couple, ainsi que le groupe des quatre forces F'', P'', Π'' , R'' . En effet les forces composant chaque groupe étant dans un même plan ne peuvent se

réduire qu'à une force unique ou à un couple; or, si les deux groupes se réduisaient chacun à une force, ces deux forces situées dans deux plans parallèles ne sauraient être égales et directement opposées, ainsi il n'y aurait point d'équilibre; si l'un des groupes se réduisait à une force et l'autre à un couple, l'équilibre serait encore impossible puisqu'une force ne peut faire équilibre à un couple; il faut donc que chacun des groupes se réduise à un couple. Il en résulte que, dans chacun de ces groupes de forces, l'une quelconque des quatre forces est égale et de sens contraire à la résultante des trois autres. Soit Q' la résultante des forces parallèles P' et II' ; la réaction R' devra donc être égale et de sens contraire à la résultante des forces Q' et F' ; en sorte que si α désigne l'angle de la force F avec la verticale, on devra avoir

$$R' = \sqrt{F'^2 + Q'^2 + 2 F' Q' \cos \alpha} \quad [2]$$

En appelant Q'' la résultante des forces P'' et II'' , on trouvera de même pour le second groupe

$$R'' = \sqrt{F''^2 + Q''^2 + 2 F'' Q'' \cos \alpha} \quad [3]$$

Les réactions R' et R'' ne sont plus normales à la surface du tourillon. Si m' (fig. 2) est le point d'application de la force R' , sa direction $m'R'$ ne passe pas par le centre O de la section droite; mais elle fait avec la normale $m'ON'$ un angle $N'm'R'$ égal à l'angle φ du frottement, du côté opposé au mouvement du treuil, indiqué par le sens de la flèche. La distance de la force R' à l'axe est donc égale au rayon ρ du tourillon, multiplié par le sinus de l'angle $m'OR'$, c'est-à-dire à

$$\rho \sin \varphi \quad \text{ou à} \quad \rho \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

en désignant par f la tangente de l'angle φ , c'est-à-dire le coefficient de frottement. Si l'on représente le sinus par f_1 on aura donc pour le moment de la force R' l'expression

$$R' \rho f_1 \quad \text{ou} \quad f_1 \rho R'$$

On aurait de même pour le moment de la force R'' la valeur

$$f_1 \rho R'';$$

ainsi, en ayant égard au signe des moments, on aura pour l'équation d'équilibre

$$Fb = Pr + f_1 \rho R' + f_1 \rho R'' \quad [4]$$

Si l'on veut avoir égard à la raideur de la corde, il faudra à la valeur de P ajouter cette raideur, ou $\frac{1}{2r}(A + BP)$ (Voy. RAIDEUR DES CORDES), ce qui donnera

$$Fb = Pr + \frac{1}{2}(A + BP) + f_1 \rho R' + f_1 \rho R'' \quad [5]$$

Comme les expressions de R' et de R'' contiennent implicitement F , on ne pourra déterminer cette inconnue que par la méthode des approximations successives. On commencera par négliger les résistances passives, c'est-à-dire le frottement et la raideur des cordes, et l'on calculera, à l'aide de l'équation [1], une valeur F_1 de F qui donnera une première approximation. On se servira de F_1 pour calculer R' et R'' , par suite R' et R'' au moyen des relations [2] et [3]; et alors la relation [5] donnera pour F une deuxième valeur plus approchée F_2 . En général cette seconde approximation pourra suffire; mais, si on ne la regardait pas comme suffisante, on se servirait de F_2 pour calculer de nouvelles valeurs de R' et de R'' , et, par suite, de

nouvelles valeurs de R' et de R'' ; l'équation [5] donnerait alors pour F une troisième valeur F_3 , peu différente de F_2 , mais plus approchée. On pourra toujours s'en tenir à cette troisième valeur dans les applications.

Les formules [4] ou [5] montrent que, toutes choses égales d'ailleurs, la valeur de F est d'autant moindre que f_1 et ρ sont plus petits. Il importe donc de diminuer le frottement autant que possible en lubrifiant convenablement les surfaces en contact; mais en même temps il faut donner aux tourillons le plus faible diamètre possible; pour cela on les fait ordinairement en fer, et l'on réduit leur dimension transversale à la grandeur strictement nécessaire pour qu'ils puissent supporter les efforts auxquels ils sont soumis (Voy. FLEXION PLANE), et pour que les surfaces ne soient pas altérées par le frottement même.

Si, indépendamment des forces considérées ci-dessus, et qui agissent toutes dans des plans perpendiculaires à l'axe, le treuil était soumis à une force suivant l'axe, cette force ferait naître un frottement contre le bout du tourillon ou contre son épaulement; et il serait nécessaire d'y avoir égard (Voy. PIVOT, САРЕСТАН). Il faudrait ajouter dans le premier cas au second membre de l'équation [5] la quantité

$$\frac{2}{3} Z \rho,$$

Z représentant la force parallèle à l'axe; et dans le second la quantité

$$fZ \left(\rho' + \frac{1}{3} \frac{e^2}{\rho} \right),$$

ρ' désignant alors le rayon moyen de la couronne circulaire qui forme l'épaulement, et $2e$ l'épaisseur de cette couronne, ce qui suppose

$$\rho' = \frac{1}{2}(r + \rho)$$

et

$$e = \frac{1}{2}(r - \rho).$$

III. Il peut arriver que la charge P soit la force mouvante, et que la force F ne soit employée qu'à retenir le treuil pour empêcher son mouvement de s'accélérer. Dans ce cas, la corde se déroulant, au lieu de s'enrouler, il n'y a plus à s'occuper de la raideur. D'un autre côté, le frottement ayant toujours lieu en sens contraire du mouvement, les réactions R' et R'' passent de l'autre côté de la normale, et leur moment change de signe. On a donc dans ce cas

$$Fb = Pr - f_1 \rho R' - f_1 \rho R'', \quad [6]$$

équation sur laquelle on opérerait comme on vient de l'indiquer.

IV. Si l'on veut comparer le travail de la force mouvante au travail de la force résistante, on remarquera que, pour un tour de treuil, la corde s'enroule ou se déroule d'une quantité égale à $2\pi r$. Si donc le treuil fait une fraction de tour ε , le travail de F aura pour valeur

$$F \cdot 2\pi b \cdot \varepsilon;$$

le travail de P aura pour expression

$$P \cdot 2\pi r \cdot \varepsilon;$$

par conséquent il vient

$$\frac{\text{Tr. } F}{\text{Tr. } P} = \frac{F \cdot 2\pi b \cdot \varepsilon}{P \cdot 2\pi r \cdot \varepsilon} = \frac{Fb}{Pr} \quad [7]$$

Dans le cas où la force F est mouvante, ce qui est le cas de la relation [5], on a

$$Fb > Pr,$$

et, par conséquent, le rapport entre le travail de F et le travail de P est plus grand que l'unité. Si c'est la force P qui est mouvante, ce qui est le cas de la relation [6], on a

$$Fb < Pr,$$

et, par suite, le rapport entre le travail de F et le travail de P est plus petit que l'unité.

On peut remarquer que, quoique les forces R' et R'' n'aient pas rigoureusement la même valeur dans le cas de l'équation [6] que dans le cas de l'équation [4], ces réactions diffèrent cependant peu dans les deux cas, et cette remarque fournit un moyen facile de déterminer par expérience le travail consommé par le frottement. On détermine par expérience la force mouvante F_1 nécessaire pour faire monter la charge d'un mouvement uniforme. On détermine aussitôt, par une autre expérience, la force F_2 nécessaire pour retenir la même charge dans la descente, de manière que son mouvement ne s'accélère pas. Le travail X du frottement, pour un tour, reste sensiblement le même dans les deux cas. On a donc

$$F_1 \cdot 2\pi b = P \cdot 2\pi r + X$$

et

$$F_2 \cdot 2\pi b = P \cdot 2\pi r - X;$$

d'où

$$(F_1 - F_2) \cdot 2\pi b = 2X$$

et

$$X = \frac{1}{2} (F_1 - F_2) \cdot 2\pi b,$$

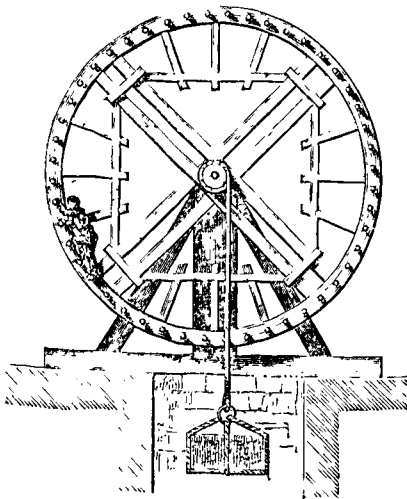
c'est-à-dire que le travail du frottement est celui d'une force égale à la demi-différence des forces F_1 et F_2 que l'expérience a fait connaître.

V. L'équation [5] se simplifie quand la force F est verticale. On a, en effet, dans ce cas,

$$R' = F' + P' + \Pi'$$

et

$$R'' = F'' + P'' + \Pi'',$$



par suite

$$Fb = Pr + \frac{1}{2} (A + B\rho) + f_1\rho (F' + P' + \Pi') + f_1\rho (F'' + P'' + \Pi'')$$

ou

$$Fb = Pr + \frac{1}{2} (A + B\rho) + f_1\rho (F + P + \Pi);$$

d'où

$$F = P \cdot \frac{r + \frac{1}{2} B + f_1\rho}{b - f_1\rho} + \frac{\frac{1}{2} A + f_1\rho \Pi}{b - f_1\rho}, \quad [8]$$

relation qui donne immédiatement la valeur de F . Cette relation est de la forme

$$F = \alpha + \beta P, \quad [9]$$

c'est-à-dire qu'elle contient un terme indépendant de la charge, et un autre proportionnel à la charge. Cette forme montre que l'emploi d'un même treuil est d'autant plus avantageux que la charge est plus considérable; car on tire de l'équation [9]

$$\frac{F}{P} = \frac{\alpha}{P} + \beta,$$

et l'on voit qu'à mesure que la charge augmente, le rapport de la force mouvante à la force résistante diminue, en se rapprochant de plus en plus d'une limite constante β . Pour une très-faible charge, le rapport $\frac{F}{P}$ pourrait devenir très-grand, et, dans ce cas, l'emploi du treuil serait désavantageux. Il suffirait qu'on eût

$$P < \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

pour qu'il en résultât

$$F > P,$$

et, dans ce cas, il vaudrait mieux appliquer directement la force mouvante à la charge, sans l'intermédiaire du treuil. Mais le cas de $F > P$ ne se rencontre jamais dans la pratique.

VI. Le treuil des carriers (fig. 3) se compose d'un

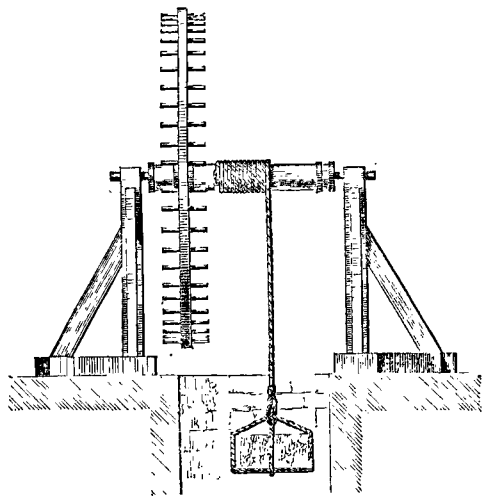


Fig. 3.

cylindre horizontal en bois, de 0^m,30 de diamètre environ, reposant sur ses supports par des tourillons en fer. La roue, qui a de 4 à 6 mètres de diamètre,

est une roue à chevilles, sur laquelle un ou plusieurs hommes agissent en montant sur les chevilles un peu au-dessous de l'axe. L'homme agit ici par

son poids, qui est de 65 kilogrammes en moyenne. Si ce poids était appliqué tangentiellement à la roue, à la hauteur de son centre, son moment serait donc

$$65 \cdot 2^m, 50,$$

en supposant à la roue un diamètre de 5 mètres, et si l'on néglige les résistances passives, un ouvrier pourrait ainsi élever un poids P donné, en vertu de l'équation [1], par la relation

$$P \cdot 0^m, 15 = 65 \cdot 2^m, 50,$$

d'où

$$P = 1020^k \text{ environ.}$$

Mais le poids élevé est nécessairement moindre, non-seulement à cause des résistances passives, mais parce que l'ouvrier se place un peu au-dessous de l'axe. Il y trouve cet avantage important que, si son poids l'emporte sur la charge, son mouvement de descente ne peut s'accélérer indéfiniment, parce qu'à mesure qu'il se rapproche de la verticale, le moment de son poids diminue, tandis que celui de la charge reste le même; et que, si c'est la charge qui l'emporte, ce mouvement en sens contraire ne peut pas s'accélérer indéfiniment non plus, parce qu'à mesure que l'homme s'élève, le moment de son poids augmente. Il y a donc, dans cette position du manoeuvre au-dessous de l'axe, une garantie contre les accidents, qu'il ne trouverait pas s'il se plaçait à la hauteur de l'axe ou au-dessus.

Le treuil des puits (fig. 4) est encore un treuil en

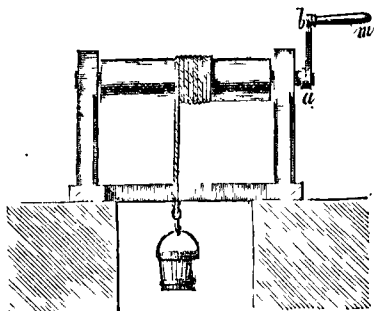


Fig. 4.

bois, avec tourillons en fer; mais il est mis en mouvement par une manivelle, c'est-à-dire par une poignée bm adaptée parallèlement à l'axe, à l'extrémité d'un bras ab de $0^m, 40$ à $0^m, 50$ de longueur, monté sur l'axe, à l'extrémité de l'un des tourillons. Quelquefois, cependant, on remplace la manivelle par une roue à poignée de $0^m, 80$ à 1 mètre de diamètre.

Quelle que soit la disposition du treuil, le rapport entre les chemins parcourus dans le même temps par la charge et par le point d'application de la force mouvante, supposée appliquée tangentiellement à la roue ou à la circonférence décrite par la poignée de la manivelle, est toujours celui du rayon du treuil au rayon de la roue ou de la manivelle. Ce rapport est celui des vitesses de la charge et de la poignée.

(Voyez les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, le *Cours de Mécanique appliquée* professé à l'École centrale des Arts et Manufactures par M. Bélanger, et tous les traités de Mécanique appliquée.) Voyez CABESTAN.

TREUIL CONIQUE ou TREUIL RÉGULATEUR (fig. 1). On donne au treuil la forme d'un tronc de cône, lorsque, la corde qui s'y enroule devant être très-longue, il devient nécessaire d'avoir égard à la variation de

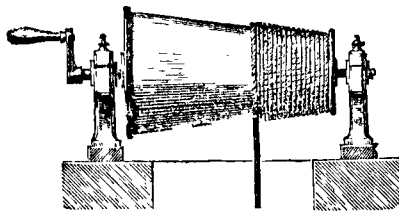


Fig. 1.

charge due au poids de la portion de corde déroulée. On adopte un plus petit diamètre du côté où la corde commence à s'enrouler, et un plus grand diamètre du côté opposé; on compense ainsi la variation de la charge par celle du rayon; en sorte que le moment de la charge par rapport à l'axe varie entre des limites moins étendues. Si, par exemple, L est la longueur de la corde entièrement déroulée, l la longueur qui reste déroulée quand la charge utile P est arrivée au point le plus haut, r et R les rayons des bases du tronc du cône, et p le poids du mètre courant de corde, on peut s'arranger de manière que les moments de la charge totale soient égaux au commencement et à la fin du mouvement. Il faut pour cela qu'on ait

$$(pL + P)r = (pl + P)R,$$

d'où

$$r = R \cdot \frac{pl + P}{pL + P}.$$

Dans l'intervalle, le moment reste variable. Mais on pourrait le rendre constant en remplaçant la surface conique par une surface de révolution convenablement choisie. Prenons pour axe des x l'axe du treuil, pour origine le centre de la petite base; soit x l'abscisse de la corde à l'instant où elle est tangente à un parallèle ayant pour rayon y . On devra avoir, en nommant λ la portion de corde déroulée à cet instant,

$$(p\lambda + P)y = (pL + P)r = C, \quad [1]$$

C désignant ainsi une constante. On tire de cette relation

$$\lambda = \frac{C}{py} - \frac{P}{p};$$

d'où

$$d\lambda = -\frac{C dy}{py^2}. \quad [2]$$

Soit e l'épaisseur de la corde; à chaque tour x augmente sensiblement de e . Pour une fraction de tour marqué par $d\alpha$ (α exprimant l'angle décrit à partir de la position initiale), x aura donc augmenté de

$$dx = \frac{ed\alpha}{2\pi}. \quad [3]$$

Pendant le même temps, λ aura diminué de $yd\alpha$; on a donc

$$d\lambda = -yd\alpha, \quad [4]$$

et, par comparaison avec la relation [3],

$$d\lambda = -\frac{2\pi y}{e} dx.$$

Substituant dans [2], il vient donc

$$\frac{2\pi y}{e} dx = \frac{C dy}{py^2}, \quad [5]$$

c'est l'équation différentielle de la génératrice de la surface cherchée. L'intégration donne

$$x = -\frac{Ce}{4\pi p y^2} + C',$$

C' désignant une constante arbitraire. Si l'on exprime que x est nul pour $y=r$, et qu'il est égal à la longueur X du treuil pour $y=R$, on élimine aisément C et C', et l'on obtient pour l'équation de la génératrice

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{x}{X} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)}}. \quad [6]$$

On reconnaît qu'elle a la forme représentée par

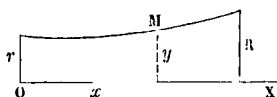


Fig. 2.

la figure 2. On trouve pour déterminer C la relation

$$X = \frac{Ce}{4p} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right); \quad [7]$$

mais, comme C est donnée par la relation [1], cette dernière détermine X, qui doit, en effet, varier dans le même sens que C, ou dans le même sens que $pL + P$, c'est-à-dire croître ou décroître avec la longueur L de corde à enrôler.

On se contente ordinairement d'employer un treuil conique.

Le treuil conique est aussi connu sous le nom de *treuil régulateur*.

TREUIL DIFFÉRENTIEL, appareil employé depuis un temps immémorial en Chine et dans l'Inde pour élever l'eau des puits. Il se compose de deux cylindres de même axe, mais de rayons différents R et r, reposant horizontalement par des tourillons sur deux supports fixes. Une corde, enroulée dans un sens sur l'un des cylindres et en sens contraire sur l'autre, porte une poulie mobile à la chape de laquelle est suspendu le fardeau P à élever. L'appareil est mis en mouvement à l'aide d'une roue ou d'une manivelle OA, et, tangentielllement à la circonférence décrite par le maneton A, est appliquée la force mouvante F. Lorsque le treuil fait un tour, le travail développé par cette force est $F.2\pi b$, en appelant b la distance OA. D'un autre côté, la corde s'enroule sur le grand cylindre d'une quantité égale à $2\pi R$; mais en même temps elle se déroule du petit cylindre d'une quantité égale à $2\pi r$; la corde s'est donc raccourcie de $2\pi R - 2\pi r$ ou de $2\pi(R - r)$. Le diamètre de la poulie mobile est ordinairement réglé de manière que les deux brins de la corde soient sensiblement parallèles, ce qui suppose que ce diamètre est égal à $R + r$. Le raccourcissement de la corde se répartissant sur les deux brins, chacun d'eux s'est raccourci de $\pi(R - r)$: c'est le chemin parcouru dans le sens vertical par le poids P. Le travail de ce poids est donc

$$-P.\pi(R - r),$$

et, si l'on néglige le frottement et la raideur des

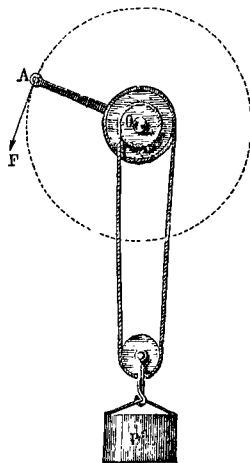
cordes, les réactions étant normales ne produisent aucun travail; en sorte qu'on a, pour la condition d'équilibre ou d'uniformité de mouvement

$$F.2\pi b - P.\pi(R - r) = 0,$$

d'où

$$F = P. \frac{1}{b} \frac{(R - r)}{2},$$

ce qu'on peut énoncer en disant que la force mou-



vante est à la force résistante comme la demi-différence des rayons des deux cylindres est au rayon de la roue, ou au bras b de la manivelle. Comme on peut rendre la différence $R - r$ aussi petite qu'on veut, on voit qu'on peut rendre la force mouvante aussi petite qu'on le désire.

Mais il faut remarquer que le chemin qu'aura à décrire le point d'application A de la force mouvante croîtra à mesure qu'on rendra la différence $R - r$ plus petite. Le nombre n de tours nécessaires pour élever le fardeau de la hauteur h est, en effet, donné par la relation

$$\pi(R - r).n = h,$$

d'où

$$n = \frac{h}{\pi(R - r)},$$

quantité d'autant plus grande pour une même valeur de h que la différence $R - r$ est plus petite.

Ces résultats seraient modifiés si l'on avait égard au frottement et à la raideur des cordes (Voy. TREUIL, POULIE).

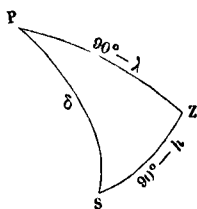
Le treuil différentiel a été appliqué en France pendant quelque temps à la manœuvre de la CHÈVRE employée dans l'artillerie (Voy. CHÈVRE). La longueur de corde que cet appareil exige y a fait renoncer.

Le treuil différentiel est aussi connu sous le nom de *chèvre de Lombard*.

TRIANGLE DE POSITION, nom que l'on donne quelquefois au triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z et le centre S d'un astre. Dans ce triangle, le côté PZ est le complément de la latitude du lieu; le côté PS est le complément de la déclinaison de l'astre; le côté ZS est la distance zénithale de cet astre, ou le complément de sa hauteur; l'angle en P est l'angle horaire; l'angle en Z

est le supplément de l'azimut de l'astre ou l'excès de 360 degrés sur cet azimut.

En désignant par δ la distance polaire de l'astre,



par h sa hauteur, par λ la latitude du lieu, et par AI l'angle en P , on a

$$\sin h = \sin \lambda \cos \delta + \cos \lambda \sin \delta \cdot \cos AI, \quad [1]$$

d'où

$$\cos AI = \frac{\sin h - \sin \lambda \cos \delta}{\cos \lambda \sin \delta}.$$

On en tire, comme à l'ordinaire, la valeur de

$$\sin \frac{1}{2} AI,$$

et en posant

$$2S = h + \delta + \lambda,$$

on lui donne aisément la forme

$$\sin \frac{1}{2} AI = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin(S - h)}{\cos \lambda \cdot \sin \delta}}. \quad [A]$$

En désignant par Z l'angle en Z , on trouve dans le même triangle

$$\cos \delta = \sin h \sin \lambda + \cos h \cos \lambda \cos Z; \quad [2]$$

d'où

$$\cos Z = \frac{\cos \delta - \sin h \sin \lambda}{\cos h \cos \lambda}.$$

On en tire $\cos \frac{1}{2} Z$, qui, au moyen de l'auxiliaire δ , prend la forme

$$\cos \frac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\cos S \cos(S - \delta)}{\cos h \cos \lambda}}. \quad [B]$$

Les formules [A] et [B] sont d'un emploi continuel dans la navigation.

On remarquera que l'on calcule les angles AI et Z par un sinus ou par un cosinus, et non par une tangente, comme on le prescrit dans les traités de Trigonométrie. Cela tient à ce que les données du calcul ne sont jamais fournies avec une approximation assez grande pour qu'il y ait lieu de profiter du petit avantage que pourrait donner sous ce rapport l'emploi de la tangente.

TRIANGLE SPHÉROÏDIQUE, triangle formé par des LIGNES GÉODÉSIIQUES (*Voy. ce mot*) sur une surface peu différente de la sphère. L'analyse des triangles sphéroïdiques appartient à la haute géodésie, et est rarement employée dans les applications parce qu'il est tout aussi exact et plus simple de remplacer la surface du sphéroïde par une sphère osculatrice, comme il est indiqué à l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des). Legendre a démontré (*Voy. les Mémoires de l'Institut pour l'année 1806*) que lorsque les côtés d'un triangle sphéroïdique sont très-petits par rapport aux dimensions du sphéroïde, c'est-à-dire lorsque leur amplitude ne dépasse pas notablement un degré, ce triangle peut être résolu par les mêmes règles que les triangles sphériques peu courbes; et qu'en particulier le théorème connu

sous le nom de THÉORÈME DE LEGENDRE (*Voy. ce mot*) subsiste encore pour ce triangle sphéroïdique.

Les triangles sphéroïdiques que l'on considère le plus fréquemment sont ceux qui, sur l'ellipsoïde de révolution, sont formés par deux méridiens et par la ligne géodésique qui joint deux de leurs points. Les formules [A], [B], [C], [D] rapportées à l'article LIGNE GÉODÉSIIQUE, résolvent immédiatement le cas où la ligne géodésique serait perpendiculaire à l'un des deux méridiens. Lorsque cela n'a pas lieu, on commence par déterminer le méridien auquel la ligne géodésique donnée est perpendiculaire (*Voy. l'art. cité*). On a alors, pour chacun des deux méridiens primitifs, des formules telles que les formules [A], [B], [C], [D] déjà citées. On y joint la suivante, qui peut être déduite des relations fondamentales [3], [4], [D] de l'art. cité et de leurs analogues pour le second méridien, savoir

$$\frac{\sin(\omega'' - \omega')}{\sin(\sigma'' - \sigma')} = \frac{\sin V'}{\cos \lambda''}$$

et l'on a tous les éléments nécessaires pour résoudre les divers cas de la Trigonométrie sphéroïdique. Mais l'élimination présente, suivant les cas, des difficultés d'analyse plus ou moins grandes. Le cas le plus simple, après celui du triangle sphéroïdique rectangle, est celui où, connaissant les données qui se rapportent à l'un des deux méridiens et la longueur de la ligne géodésique, on se propose de calculer les éléments relatifs au second méridien, c'est-à-dire la différence de longitude des deux méridiens, et la latitude du point où le second méridien est rencontré par la ligne géodésique. On trouvera tous les détails nécessaires sur les questions de ce genre dans le *Traité de Géodésie de Puissant*, tome II, pages 302 et suiv.; et dans l'*Essai de Trigonométrie sphéroïdique* du même auteur, inséré dans le tome X des *Mémoires de l'Institut*, année 1830. On peut consulter sur le même sujet les *Elementi de trigonometrica sferoïdica*, publiés au commencement du siècle par *Oriani*, et le mémoire de Legendre déjà cité.

TRIANGULATION, opération géodésique qui consiste à lier par un réseau de triangles les divers points d'une contrée dont on se propose de dresser la carte. L'ensemble de ces triangles est ce qu'on appelle un *canevas* ou un *réseau trigonométrique*; et les triangles sont classés en plusieurs ordres.

On donne aux triangles de *premier ordre* la plus grande dimension possible; cette dimension dépend de celle des instruments avec lesquels on mesure les angles; avec des cercles de 35 à 40 centimètres de diamètre, on a pu donner en France aux côtés des triangles de premier ordre jusqu'à 40 ou 50 kilomètres. On a été jusqu'à 100 kilomètres en Angleterre avec des cercles de 1^m de diamètre. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils approchent en outre d'être équilatéraux. On conçoit, en effet, que si l'on a deux triangles ACB , A_1C_1B (fig. 1) ayant même base, l'angle A commun, et l'angle $C > C_1$, une même erreur sur les angles A et B donnera pour la position du sommet C une erreur CC' moindre que l'erreur C_1C_1' produite sur la position du sommet C_1 ; il en résulte que les trois angles devront être les plus grands possible et par conséquent égaux. Mais cette proposition importante peut être démontrée par le calcul. En désignant par a , b , c les côtés

opposés aux angles A, B, C, on a

$$[1] \ a \sin C = c \sin A, \text{ d'où } a = c \frac{\sin A}{\sin C},$$

formule où nous regarderons *c* comme constant.

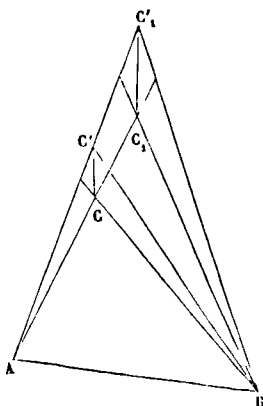


Fig. 1.

En différentiant et ayant égard à la relation [1], on obtient

$$da = c (\cot A dA - \cot C dC).$$

On peut, dans cette formule, remplacer les différentielles *da*, *dA* et *dC* par les erreurs Δa , ΔA et ΔC qui sont très-petites; on aura donc, en supposant ces dernières égales et de même signe,

$$\Delta a = c \Delta A (\cot A - \cot C),$$

quantité qui devient nulle pour $A = C$. Si on suppose les erreurs ΔA et ΔC égales et de sens contraire, il vient

$$\Delta a = \pm c \Delta A (\cot A + \cot C);$$

d'où l'on déduit, par des transformations simples,

$$\Delta a = \pm c \cdot \Delta A \frac{2 \sin B}{\cos(A - C) + \cos B};$$

et l'on voit que Δa sera le plus petit possible pour $A = C$.

On choisit pour sommets des triangles de premier ordre des points élevés d'où l'on puisse apercevoir une grande étendue de terrain; et l'on y établit des SIGNAUX (Voy. ce mot) s'il n'y a point d'édifice qui puisse en servir. Pour qu'une situation soit bien choisie, il faut que le signal qu'on y élève, vu des stations environnantes, se projette nettement sur le ciel. Les chaînes de triangles de premier ordre s'étendent ordinairement dans le sens des méridiens et dans le sens des parallèles.

Une fois les sommets de ces triangles déterminés, on procède à la mesure d'une base rectiligne (Voy Bases), que l'on relie au canevas trigonométrique par des triangles de jonction; cette base est généralement moindre qu'un des côtés des triangles de premier ordre; mais il ne faut pas cependant qu'elle soit trop petite. Lorsque la base est mesurée, on passe à la mesure des angles, à l'aide d'un bon CERCLE RÉPÉTITEUR, ou d'un THÉODOLITE (Voy. ces mots) que l'on établit au sommet des angles quand cela est possible, ou très-près du sommet, auquel cas on a à effectuer la RÉDUCTION DE L'ANGLE AU CENTRE DE LA STATION (Voy. ce mot); et on les corrige, s'il y a lieu, de l'ERREUR DE PHASE (Voy. PHASE), due aux dimensions des signaux et aux

divers aspects qu'ils présentent selon la manière dont ils sont éclairés. On pourrait dès lors calculer les côtés successifs des triangles en les considérant comme sphériques; mais on préfère ordinairement les ramener à des triangles rectilignes, soit à l'aide du THÉOREME DE LEGENDRE, soit par la MÉTHODE DE DELAMBRE (Voy. ces mots). Si les dimensions des triangles sont trop grandes pour qu'ils puissent être considérés comme sphériques, il faut avoir égard à la forme elliptique du méridien; et l'on détermine les coordonnées géographiques des différents sommets du réseau, ainsi que les azimuts des côtés, par les méthodes qu'on trouvera exposées aux articles COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des), CONVERGENCE DES MÉRIDIENS, TRIANGLES SPHÉROÏDIQUES.

Les triangles calculés, on mesure vers l'extrémité de la chaîne une ou plusieurs bases de vérification, que l'on relie au réseau. On a eu soin, chemin faisant, de déterminer les principales altitudes (Voy. ce mot, et NIVELLEMENT); et l'on a tous les éléments nécessaires pour dresser la CARTE (Voy. ce mot) du réseau de triangles considéré.

Les triangles de second ordre ont pour base de départ quelqu'un des côtés des triangles de premier ordre; et ils sont destinés à étendre le réseau dans l'intérieur des premiers triangles. Cette seconde partie de la triangulation s'exécute d'ailleurs d'après les mêmes principes que la première, avec cette différence que si l'on a employé 60 répétitions pour les angles des triangles de premier ordre, en ayant soin de les répartir en trois séries à différentes heures du jour, une seule série de 10 répétitions suffit pour les angles des triangles de second ordre.

Quant aux triangles de troisième ordre, leurs sommets ne sont déterminés le plus souvent que par les intersections des rayons visuels menés des stations du second ordre; et pour cela, les angles sont mesurés par une seule série de 6 répétitions. Ces triangles peuvent, sans erreur sensible, être calculés comme des triangles rectilignes, et leurs sommets, au lieu d'être rapportés à leurs COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES, latitude et longitude (Voy. ces mots) peuvent être rapportés à deux droites rectangulaires, dont l'une est la méridienne et l'autre une perpendiculaire (Voy. PLAN TOPOGRAPHIQUE). Du reste on détermine quelquefois les sommets des triangles de premier ordre eux-mêmes par leur distance au méridien et à une ligne géodésique PERPENDICULAIRE À LA MÉRIDienne (Voy. ce mot).

Les triangulations sont surtout appliquées à la mesure des ARCS DE MÉRIDIEU ou de PARALLÈLES (Voy. ces mots). La première opération de ce genre a été exécutée par le géomètre hollandais Snellius; sa méthode a été introduite en France par Picard, et depuis il en a été fait un grand nombre d'applications.

La marche est presque toujours la même. Soit AM (fig. 2) l'arc que l'on se propose de mesurer; on choisit, de part et d'autre de cet arc, une série de stations B, C, D, E, F, G, H que l'on lie entre elles et avec les extrémités de l'arc par une série de triangles ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, GHM, dont on mesure tous les angles. On mesure l'un des côtés AB du premier triangle, ou on le déduit d'une base me-

surée avec soin et liée trigonométriquement avec le réseau ; on peut ainsi calculer les côtés de tous les triangles. On détermine l'azimut du premier côté AB ; et si I, K, L, P, Q, R sont les intersections

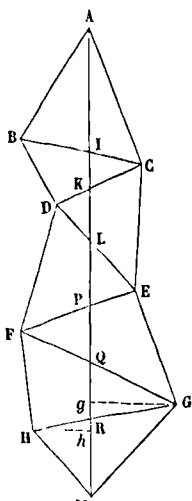


Fig. 2.

du méridien avec les côtés BC, CD, DE, EF, FG, GH, on connaît, dans le triangle ABI, le côté AB et les deux angles adjacents ; on peut donc calculer AI et BI et l'angle en I. Connaissant BC, on en retranche BI, et l'on a IC. Dans le triangle ICK, on connaît alors un côté IC et les deux angles adjacents ; on peut donc calculer IK, KC, et l'angle en K. Connaissant DC, on en retranche KC, et l'on a DK. Dans le triangle DKL on connaît alors un côté DK et les deux angles adjacents ; on peut donc calculer KL, DL et l'angle en L. En continuant ainsi, on calculera successivement toutes les parties AI, IK, KL, LP, PQ, QR, RM de l'arc proposé, et en en faisant la somme, on aura la longueur de cet arc.

Il existe d'autres méthodes qu'on trouvera exposées aux articles ARCS DE MÉRIDIEN, ARCS DE PARALLELE.

La latitude de l'une des extrémités de l'arc à mesurer peut toujours être observée directement, parce que l'opérateur peut toujours faire partir cet arc d'un point, tel que A, où l'on puisse établir une station. Mais il peut arriver qu'il n'en soit pas de même pour l'autre extrémité. Si, par exemple, cette autre extrémité était le point R (fig. 2), et qu'il fût impossible d'y établir une station, on déduirait sa latitude λ des latitudes l et l' des points G et H. Pour cela, si la distance GH n'est pas très-considérable, on suppose qu'on ait abaissé des points G et H sur la méridienne AR les perpendiculaires Gg et Hh ; les triangles GgR et HhR sensiblement rectilignes étant semblables, on a

$$\frac{gR}{Rh} = \frac{GR}{RH}, \text{ ou } \frac{l - \lambda}{\lambda - l'} = \frac{GR}{RH};$$

d'où l'on tire

$$\lambda = l \cdot \frac{RH}{HG} + l' \cdot \frac{GR}{HG},$$

Si la distance GH est trop grande pour que ce procédé élémentaire puisse être employé, on abaisse

du point H sur la méridienne un arc de grand cercle perpendiculaire ; soit Hh cet arc. On calcule la longueur Rh dans le triangle sphérique rectangle HAR ; et la latitude du point h se déduit de celle du point H par la formule des latitudes exposée à l'article COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES (Calcul des).

Nous avons dit que, dans les grandes triangulations, on a soin de mesurer vers l'extrémité de la chaîne une base de vérification. C'est ce qui a été fait pour la méridienne de France ; une première base avait été mesurée près de Melun, une seconde base fut mesurée près de Perpignan. Il peut arriver que la longueur de la seconde base déduite du calcul ne soit pas rigoureusement égale à celle qui a été obtenue par une mesure directe ; la différence est ordinairement peu considérable, et, au lieu de recommencer les opérations, on modifie les angles et les côtés du réseau de manière à faire accorder les deux mesures. Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités* (3^e supplément), a donné une savante et rigoureuse solution de ce problème. Mais elle exige des calculs assez laborieux. M. Puissant, dans son *Traité de Géodésie* (tome I, page 405), a proposé une méthode moins exacte, mais plus élémentaire, qui est d'une application facile.

Soit a la première base, a_1 le côté commun au premier triangle et au second, a_2 le côté commun au second triangle et au troisième, a_3 le côté commun au troisième triangle et au quatrième, et ainsi de suite ; enfin soit a_n la base de vérification. Nous désignerons par A l'angle opposé à a dans le premier triangle, et par B l'angle opposé à a_1 ; dans le second triangle, nous appellerons A_1 l'angle opposé à a_1 , et B_1 l'angle opposé à a_2 ; dans le troisième triangle, nous désignerons par A_2 l'angle opposé à a_2 , et par B_2 l'angle opposé à a_3 , et ainsi de suite ; dans le dernier triangle, A_{n-1} sera l'angle opposé à a_{n-1} et B_{n-1} l'angle opposé à a_n .

La méthode de M. Puissant consiste à corriger tous les angles A, A_1 , A_2 , ..., A_{n-1} d'une même quantité $-x$, et tous les angles B, B_1 , B_2 , ..., B_{n-1} , d'une quantité égale et contraire $+x$, sans toucher aux autres angles. On a, par la propriété des sinus, les relations :

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin B_1}{\sin A_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\sin B_2}{\sin A_2} \dots, \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\sin B_{n-1}}{\sin A_{n-1}}.$$

En multipliant toutes ces égalités membre à membre, on en tire, pour la valeur calculée de la base de vérification,

$$a_n = a \cdot \frac{\sin B \cdot \sin B_1 \cdot \sin B_2 \dots \sin B_{n-1}}{\sin A \cdot \sin A_1 \cdot \sin A_2 \dots \sin A_{n-1}}. \quad [1]$$

Soit maintenant $a_n + \epsilon_n$ la longueur de cette base mesurée ; on devra avoir de même, en faisant subir aux angles les corrections indiquées,

$$a_n + \epsilon_n = a \cdot \frac{\sin(B+x) \cdot \sin(B_1+x) \cdot \sin(B_2+x) \dots \sin(B_{n-1}+x)}{\sin(A-x) \cdot \sin(A_1-x) \cdot \sin(A_2-x) \dots \sin(A_{n-1}-x)} \quad [2]$$

Mais la correction ϵ étant toujours très-petite (une fraction de seconde en général), on peut écrire :

$$\sin(B+x) = \sin B + x \cos B, \\ \text{de même pour les autres;} \\ \sin(A-x) = \sin A - x \cos A, \\ \text{de même pour les autres.}$$

Si l'on effectue les multiplications en négligeant le carré de x , et qu'on divise membre à membre les relations [1] et [2], on trouve

$$1 + \frac{\varepsilon_n}{a_n} = \frac{1 + x \Sigma_0^{n-1} \cot B}{1 - x \Sigma_0^{n-1} \cot A} = 1 + x (\Sigma_0^{n-1} \cot A + \Sigma_0^{n-1} \cot B), \quad [3]$$

en représentant, pour abrégé, par $\Sigma_0^{n-1} \cot B$ la somme $\cot B + \cot B_1 + \dots + \cot B_{n-1}$, et de même pour $\Sigma_0^{n-1} \cot A$; on a donc

$$\frac{\varepsilon_n}{a_n} = x (\Sigma_0^{n-1} \cot A + \Sigma_0^{n-1} \cot B), \quad [4]$$

relation qui fera connaître x . Une fois cette correction connue, on obtiendra la correction relative à un côté quelconque, en faisant varier l'indice n , et en arrêtant en conséquence les sommes indiquées par Σ_0^{n-1} . Si, par exemple, on veut calculer la correction relative au 5^e côté, il faudra faire $n=4$, ce qui donnera

$$\frac{\varepsilon_4}{a_4} = x \cdot (\Sigma_0^3 \cot A + \Sigma_0^3 \cot B), \quad [5]$$

relation d'où l'on tirera ε_4 , puisque x est connu.

Si la triangulation a pour but la mesure d'un arc de méridien, en appelant $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ les portions successives de cet arc qui traversent les différents triangles du réseau, et $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ les corrections que ces portions respectives devront subir, on pourra écrire

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \quad \frac{\mu_2}{m_2} = \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \quad \frac{\mu_3}{m_3} = \frac{\varepsilon_3}{a_3}, \dots, \quad \frac{\mu_n}{m_n} = \frac{\varepsilon_n}{a_n},$$

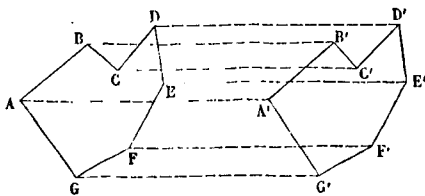
relations qui fourniront les corrections partielles $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, dont la somme sera la correction totale affectant l'arc de méridien mesuré. On opérerait de même s'il s'agissait d'un arc de parallèle.

(Voy. pour plus de développements le *Traité de Géodésie* de M. Puissant. Voy. aussi dans ce dictionnaire les art. LATITUDE [Correction de] et LONGITUDE [Correction de]; AZIMUT [Correction d']).

TRIBOMÈTRE (du grec, τρίβω, frotter, et μέτρον, mesure), appareil qui sert à mesurer le frottement. Tels sont l'appareil à plan incliné d'Aмонтans, et les appareils à traîneau de Coulomb et de M. Morin (Voy. FROTTEMENT).

TRIBORD, partie d'un navire située à droite du LONGITUDINAL (Voy. ce mot), pour un observateur qui regarde l'avant (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

TRICAGE, procédé employé pour copier une figure en lui conservant sa grandeur. Soit ABCDEFG

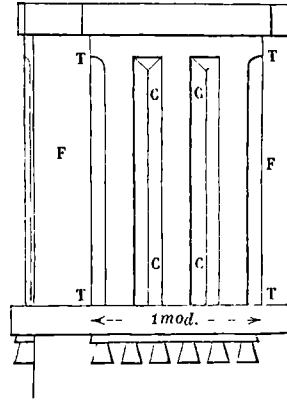


la figure à copier. Le procédé dont il s'agit consiste à mener par les sommets du polygone un système de parallèles AA', BB', CC', etc., toutes égales entre elles. Les extrémités A', B', C', etc., de ces parallèles sont les sommets d'un second polygone égal au premier. Car, d'après la construction, la figure AB'B'A' est un parallélogramme; il en résulte que l'on a

$$A'B' = AB.$$

On ferait voir de la même manière que les deux polygones ont leurs côtés égaux et leurs diagonales égales; et par conséquent peuvent se décomposer en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun; ces polygones eux-mêmes sont donc égaux. On copierait à l'aide de ce procédé toute autre figure quelconque. On en fait surtout usage lorsqu'une même figure doit être reproduite un certain nombre de fois sur une même feuille, et former des rangées.

TRIGLYPHES (du grec τρεῖς, trois, et γλυφή, sculpture), ornement particulier à la frise de l'ordre dorique. Un triglyphe se compose d'une pièce rectangulaire TTTT faisant une légère saillie sur la



frise F, et creusée, en avant, de canaux ou rainures profondes CC, CC. Les triglyphes figurent le bout des solives qui supportent le plancher, et qui reposent elles-mêmes sur la maîtresse-poutre figurée par l'architrave. Au-dessus des triglyphes règne un bandeau que l'on appelle le *chapeau* des triglyphes. En dessous est un autre bandeau, appelé le *chapeau* des gouttes; et au-dessous de ce chapiteau, sont placées les *gouttes*, au nombre de 6, qui correspondent à chaque triglyphe. La figure montre les saillies de ces diverses parties sur le nu de la frise et de l'architrave.

Les triglyphes sont séparés par des intervalles appelés *métopes* (Voy. ORDRES). La largeur de chaque triglyphe est d'un module. Sa hauteur, qui est celle de la frise, est de 1 mod. $\frac{1}{2}$.

TROMPE, sorte de voûte ou de portion de voûte destinée à supporter des constructions en saillie, ou à remplacer un mur interrompu pour une cause quelconque. Le caractère commun des trompes est d'être divisées en voussoirs dont les joints convergent vers un même axe horizontal, et se prolongeraient jusqu'à cet axe, si, pour éviter les angles trop aigus, on n'arrêtait les voussoirs à une petite distance de cet axe; les parties aiguës que l'on supprime ainsi sont remplacées par une pierre unique, située dans l'axe de la trompe et que l'on nomme le *trompillon*. Quelquefois cependant, quand la trompe a des dimensions considérables, le trompillon prend lui-même de grandes dimensions, et on est obligé de le former de plusieurs assises horizontales. On divise les trompes

en trompes cylindriques et en trompes coniques, d'après la nature de la surface dans laquelle les voussoirs sont taillés.

TROMPE CYLINDRIQUE SOUTENANT UNE TOURELLE. Lorsqu'une tourelle, placée à une certaine hau-

teur au-dessus du sol, est engagée en partie dans le mur, on emploie une trompe cylindrique pour porter la portion de la tourelle qui est en saillie. Soit MN (fig. 1) la trace horizontale de la face du mur, et ABCDEF la projection horizontale de la

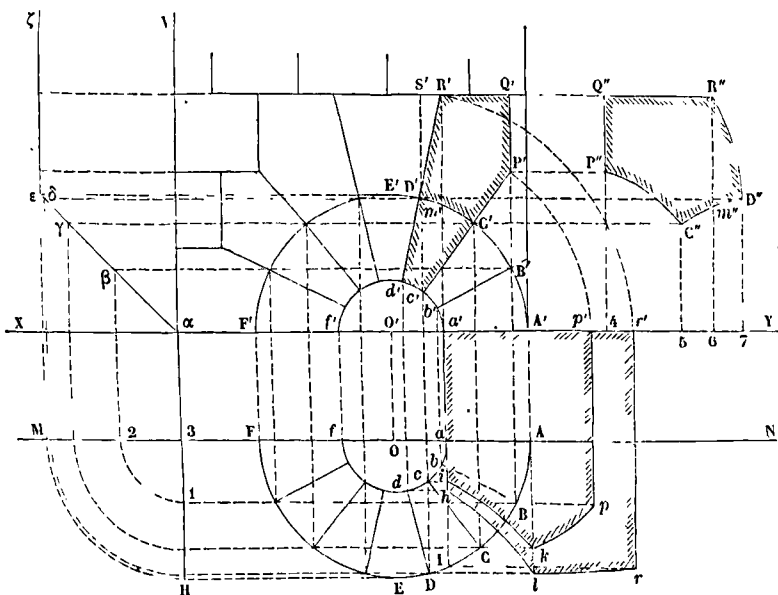


Fig. 1.

surface cylindrique de la tourelle. Le plan horizontal est pris à la naissance de la trompe. On forme cette trompe d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à MN, et par conséquent à la ligne de terre XY. Cette surface cylindrique coupe la surface de la tourelle suivant une courbe, généralement à double courbure, qui sert de directrice à la surface, et que l'on détermine par sa projection verticale. Il est d'un bon effet pour l'œil que cette projection soit une demi-circonférence; soit A'B'C'D'E'F' cette demi-circonférence. On peut la regarder comme la base d'un cylindre dont les génératrices seraient perpendiculaires au plan vertical; la surface de ce cylindre passerait par l'intersection des deux premières surfaces cylindriques considérées; cette intersection peut donc être regardée comme résultant de la rencontre de la surface de la tourelle par le cylindre perpendiculaire au plan vertical et ayant pour base A'B'C'D'E'F'. Ses projections sont donc ABCDEF sur le plan horizontal et A'B'C'D'E'F' sur le plan vertical. Il est utile d'en avoir la projection sur un plan H α V perpendiculaire à la ligne de terre, et que l'on supposera rabattu sur le plan vertical en tournant autour de α V. Pour avoir un point de ce rabattement, on prendra un point quelconque B, B' de la courbe; par le point B' on mènera une parallèle à la ligne de terre; par le point B on en mènera une seconde jusqu'à la rencontre de la trace α H au point 1; on ramènera ce point sur MN, en 2, par un arc de cercle décrit du point 3; et par le point 2 on fera passer une perpendiculaire à la li-

gne de terre; le point β où elle rencontrera la parallèle menée par le point B', sera le rabattement du point B, B'. On obtiendra de la même manière le rabattement d'autant de points que l'on voudra; et l'on pourra tracer la projection $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ rabattue. Dans l'exemple que nous avons choisi, cette projection est une ligne droite parce que les cercles ABC...F et A'B'C'...F' sont égaux; mais généralement cette ligne droite est remplacée par une courbe. On pourrait se donner *a priori* cette courbe, et en déduire par des opérations inverses la courbe A'B'C'...F'. — Quelle que soit la méthode que l'on suive, la ligne $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ sera la directrice de la surface cylindrique qui doit former la trompe. Le plus souvent c'est un cylindre à base circulaire dont le rayon est plus grand que celui de la tourelle.

Pour diviser la trompe en voussoirs on partagera la demi-circonférence A'B'C'D'E'F' en un nombre impair de parties égales; et par les points de division on mènera des rayons, qui représenteront les plans de joint; ils devront être prolongés jusqu'aux joints de lit qui séparent les assises formant la tourelle. Mais on ne prolonge pas les rayons jusqu'au centre; on les arrête à une demi-circonférence $a'b'c'...f'$ décrite de ce même centre, et qui représente le trompillon. On déterminera la projection horizontale $abc...f$ de la courbe dont $a'b'c'...f'$ est la projection verticale; d'après les données que nous avons choisies, ce sera une demi-circonférence égale. En joignant les points B, C, D, etc., au centre O, on aura les projections

horizontales des arêtes de douelle; on les arrêtera à la courbe $abc\dots f$. Il faudrait à la rigueur que la rencontre des voussoirs avec le trompillon eût lieu suivant une surface normale au cylindre qui forme la trompe; mais, aux environs du trompillon, ce cylindre est très-peu incliné à l'horizon, et il n'y a aucun inconvénient à faire le trompillon cylindrique; ses génératrices sont perpendiculaires au plan vertical; et il a pour base le demi-cercle $a'b'c'\dots f'$.

Pour l'application du trait sur la pierre, il faut connaître le développement des panneaux tels que $C'D'R'Q'P'$ appartenant à la surface de la tourelle, et les panneaux de joints. Pour obtenir le premier, on projettera les points R' , Q' , sur le demi-cercle $ABCD\dots F$, aux points I et B (ce point coïncide fortuitement avec la projection correspondante à B'); puis on prendra sur la ligne de terre les longueurs $4.5 - 4.6 - 4.7$ respectivement égales aux arcs DI , DC , DB développés: par les points $4, 5, 6, 7$ on élèvera des perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à la rencontre des parallèles à cette ligne menées par les points P' ou Q' , C' , R' , D' ; et l'on obtiendra la figure $C'D'R'Q'P'$ qui sera le développement demandé. Un point m' , intermédiaire entre C' et D' , donnera un point m'' intermédiaire entre C'' et D'' , et suffira en général pour tracer cet arc.

Pour obtenir les panneaux de joints, on les fera tourner autour de l'axe OO' , et on les rabattra sur le plan horizontal. S'il s'agit, par exemple, du panneau correspondant à $P'C'c'$, on verra que le point P' vient en p' ; par ce point on mènera une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la parallèle à cette ligne menée par le point B projection horizontale correspondante à P' ; et l'on aura le point p . Le point C' vient en A' ; on prolongera $A'A$ jusqu'à la rencontre de la parallèle à la ligne de terre menée par le point C , et l'on aura le point k . On prolongera de même $a'a$ jusqu'à la parallèle à XY menée par le point C , et l'on aura le point i . On joindra ik et kp par des arcs d'ellipses, dont on se procurera aisément des points intermédiaires; et l'on aura le panneau $a'p'pki$. On construira de la même manière le panneau $a'r'r'lh$; et tous les autres.

On pourra dès lors procéder à la taille des voussoirs. Nous supposons qu'il s'agisse du voussoir $c'd'r'q'p'$. On préparera un prisme droit d'après cette projection étendue jusqu'en S ; c'est-à-dire sur la figure $c'd'd's'q'p'$. Sur la face correspondante à $Q'S$ on tracera l'arc BD ; et à l'aide d'une équerre on taillera la face cylindrique appartenant à la surface de la tourelle. Sur cette surface on appliquera le panneau flexible $Q'R'D''C''D''$, et l'on tracera les courbes $C'D'$ et $P'C'$. On détruira alors la partie répondant à $D'SR'$ qui n'avait été conservée que pour faciliter la construction de la surface cylindrique. On appliquera alors sur les faces répondant à $P'c'$ et à $R'd'$ les panneaux de joints $a'p'pki$ et $a'r'r'lh$. Les courbes ik et hl serviront de directrices pour tailler la face cylindrique de la trompe; il suffira pour cela d'appliquer une règle sur des points de repère déterminés à l'avance sur les deux courbes. Ces points de repère sont faciles à obtenir; car, ces points étant situés deux

à deux sur une même parallèle à la ligne de terre, on les déterminera sur les courbes ik et hl rabattues, en menant des parallèles à XY . Quant à la surface cylindrique de contact avec le trompillon, comme elle est perpendiculaire au plan vertical, on la taillera à l'aide d'une équerre en suivant le contour de l'arc $c'd'$.

La taille du trompillon n'offre aucune difficulté. Sur le cylindre qui a $a'b'c'\dots f'$ pour base on portera dans le sens des génératrices, des longueurs égales aux distances des points b, c, d , etc., à la ligne de terre, ce qui donnera des points sur le contour de la face appartenant à la surface de la trompe. On taillera cette surface en s'aidant d'une règle posée sur ceux de ces points qui sont symétriquement placés par rapport à $a'f'$.

Il existe au chevet de l'église Saint-Sulpice, à Paris, une belle trompe de ce genre supportant une tourelle. Mais elle offre cette particularité que le trompillon y est remplacé par une niche sphérique.

TROMPE CYLINDRIQUE SUR PAN COUPÉ. Deux murs verticaux dont les parois extérieures ont pour traces horizontales les droites GM et GN (fig. 2) forment le coin d'un édifice; on suppose que, pour faciliter le passage des voitures, ou pour toute autre cause, on coupe ce coin par un plan vertical jusqu'à une certaine hauteur (soit AF la trace de ce plan coupant); et que les constructions situées au-dessus doivent conserver la saillie qu'elles avaient; on les soutient par une trompe cylindrique dont les génératrices sont parallèles à AF . Nous prendrons pour plan horizontal de projection le plan de naissance de la trompe, c'est-à-dire le plan dans lequel se fait le raccordement entre le mur vertical et la surface de la trompe; et nous prendrons la ligne de terre XY perpendiculaire à la droite GI qui joint le sommet G de l'angle AGF avec le milieu I de AF . On se donne la directrice de la surface cylindrique de la trompe dans le plan vertical qui a pour trace MG ; et on la rabat sur un plan parallèle au plan vertical de projection, en la faisant tourner autour de la verticale du point M ; elle se projette alors en vraie grandeur sur le plan vertical; soit $abcde$ cette projection; et g le point qui correspond à G . On opère sur ae la division en voussoirs; on fait passer par le point g les droites bm, cn, dp , etc., qui représentent les joints; et on termine ces droites à la rencontre des joints de lit des assises du mur, qui sont supposées déterminées. La courbe ae , supposée ramenée dans le plan MG , se projette sur le plan vertical suivant une courbe $A'B'C'D'E'$ qu'il est facile d'obtenir. Si l'on veut avoir, par exemple, le point qui correspond au point b , on abaissera de ce point une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre, en 1 , de la parallèle à cette ligne menée par le point M ; on ramènera ce point 1 en 2 sur MG par un arc décrit du point M comme centre; du point 2 on abaissera une perpendiculaire sur XY , et par le point b on mènera une parallèle à la ligne de terre; le point B' où ces deux droites se rencontreront sera la projection demandée; on opérera de la même manière pour obtenir les autres. La surface cylindrique de la trompe coupe le plan vertical GN suivant une autre courbe, dont la projection verticale $E'F'$ se déduira de la précédente. Si l'on veut, par exemple, le point qui correspond à B' ,

sur une même horizontale, on mènera $B'B''$ parallèle à XY , et 2.3 parallèle à AF ; par le point 3 on fera passer une perpendiculaire à la ligne de terre; et le point B'' où elle rencontrera la parallèle à XY menée par le point B' sera le point cherché. On obtiendra de même tous les autres. Il est utile d'avoir, en vraie grandeur, la courbe d'intersection du cylindre de la trompe avec le plan vertical GN ;

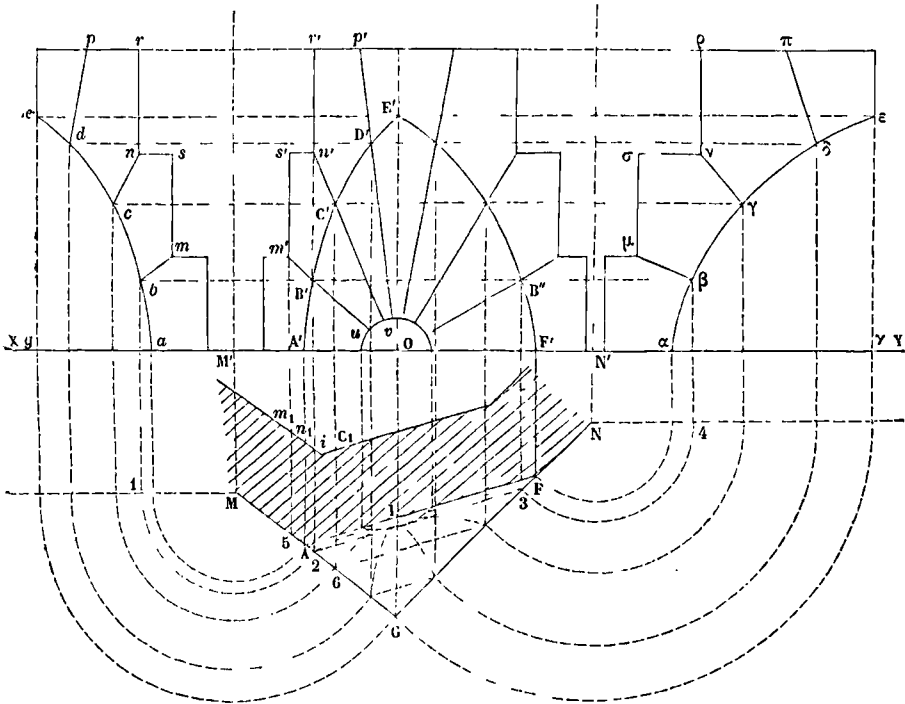


Fig 2.

pour cela, on la rabattra sur un plan parallèle au plan vertical de projection en la faisant tourner autour de la verticale du point N ; elle se projettera alors en vraie grandeur sur le plan vertical; et il sera facile d'avoir cette projection. Si l'on veut, par exemple, le point qui correspond à B'' , on prolongera $B'B''$; on ramènera le point 3 en 4 sur une parallèle à XY au moyen d'un arc de cercle décrit du point N ; et du point 4 on abaissera une perpendiculaire sur la ligne de terre; le point β où elle rencontrera le prolongement de $B'B''$ sera le point demandé. On obtiendra de la même manière tous les autres; et l'on pourra tracer la courbe $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$.

En projection verticale, les arêtes de douelle, ou intersections de la surface cylindrique de la trompe avec les faces de joints, seront des droites concourant au point O où GI rencontre XY . Mais on les arrêtera à une demi-circonférence décrite du point O et qui figure la projection verticale du trompillon, supposé cylindrique comme dans l'exemple précédent. Le rabattement des plans de joints s'obtiendra comme dans l'épure fig. 1. Pour tailler un voussoir, celui qui a pour projection verticale $uvC'n's'm'$ par exemple, on préparera un prisme droit ayant cette projection pour base; sur la face horizontale répondant à $s'n'$ on appliquera un panneau construit sur la figure $m, ic, 65$ donnée par la projection horizontale; et, avec une équerre, on pourra tailler la face verticale répondant à 5.6; sur cette face verticale on appliquera le panneau

$bmsnc$; et sur les faces répondant à $m'u$ et à $n'v$ on appliquera les deux panneaux de joints; on aura ainsi tous les éléments nécessaires pour achever la taille du voussoir. On opérera de même pour tous les autres. On taillera le trompillon comme dans l'exemple précédent.

On a marqué sur l'épure 2 la projection horizontale des arêtes de douelle; mais cette donnée est inutile, comme on vient de le voir, pour l'application du trait sur la pierre; elle n'a d'autre objet que de rendre la représentation de la trompe plus complète.

Le genre de trompe dont nous nous occupons s'emploie aussi pour élargir les abords d'un pont. Si, par exemple, ec et $e'e'$ (fig. 3) représentent les

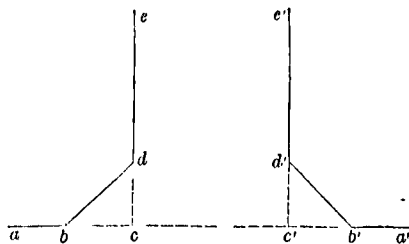


Fig. 3.

arêtes latérales d'un pont et aa' la direction du quai, au lieu de conduire les droites ec et $e'e'$

jusqu'au quai, on les arrête aux points d et d' , et dans chacun des angles acd et $a'd'd'$ on construit une demi-trompe cylindrique, dont les génératrices sont parallèles à celles de l'intrados des arches du pont. Les demi-trompillons correspondants aux deux demi-trompes peuvent avoir alors des dimensions considérables, et il peut devenir nécessaire de les former d'un certain nombre d'assises horizontales. Il existe un bel exemple de cette disposition au Pont-Royal à Paris, sur les deux rives.

On peut encore, au moyen d'une série de trom-

pes cylindriques, soutenir des constructions en saillie sur toute la longueur d'un mur droit plus ou moins étendu; auquel cas on dit que ces constructions sont placées en *encorbellement*. Une terrasse, par exemple, peut être élargie de cette manière en saillie sur les murs qui la supportent.

TROMPE CONIQUE SUR LE COIN. Le problème traité ci-dessus (fig. 2) pourrait être résolu au moyen d'une trompe conique, qui porte alors le nom de *trompe sur le coin*. Soient, comme ci-dessus, deux murs verticaux GM et GN (fig. 4) soutenant un édifice

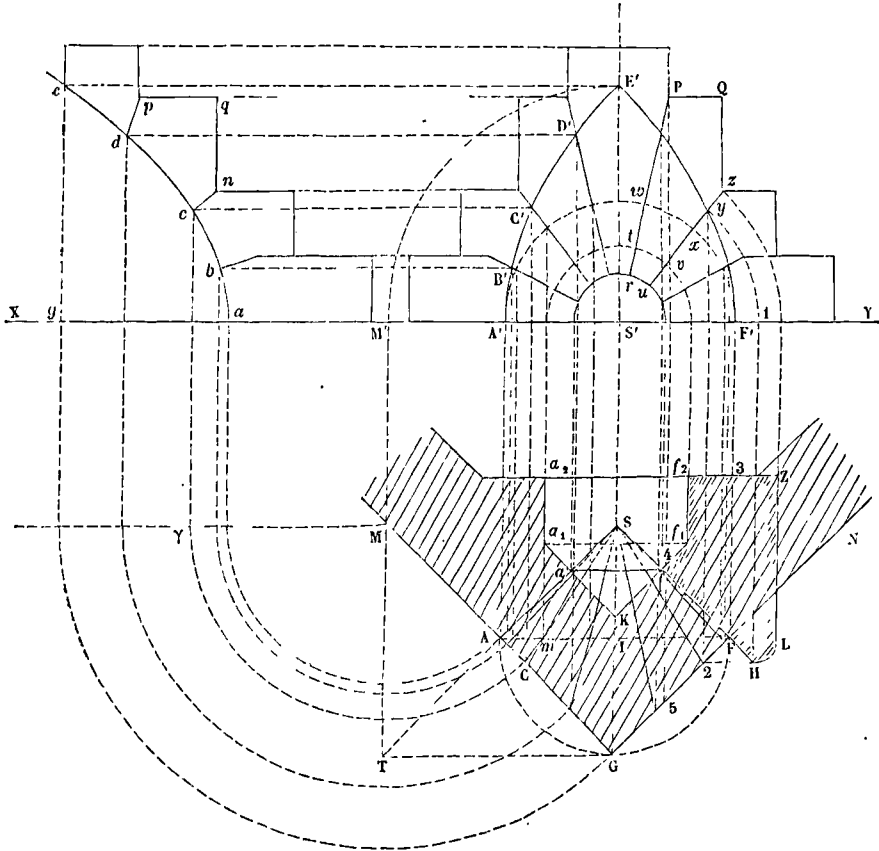


Fig. 4.

dont on veut conserver la partie supérieure, en supprimant le mur à partir du sol jusqu'à une certaine hauteur, de manière à élargir la voie de tout l'espace AGF , que nous supposons un triangle rectangle iso èle. Par les points A et F , on mènera des plans verticaux AS et SF respectivement parallèles à GF et à GA . Ces quatre plans déterminent sur le plan horizontal de projection, que nous supposons être le plan de naissance, un quadrilatère $ASFG$ qui, dans le cas actuel, est un carré, et l'on recouvrira l'espace correspondant à ce carré par une surface conique ayant pour sommet le point S . De cette manière, au lieu de l'angle saillant AGF , on aura un angle rentrant ASF terminé en dessus par un cône s'étendant sur tout l'espace $ASFG$. On prendra

comme diamètre; la surface conique sera circulaire droite; elle se raccordera suivant SA et SF avec les faces des deux murs qui forment l'angle rentrant, et coupera les prolongements des murs MA et NF au-dessus du plan horizontal de projection suivant des courbes qui seront ici des paraboles; car le plan vertical MA , par exemple, est perpendiculaire à la section méridienne ASF , et parallèle à la génératrice SF située dans ce plan méridien. Ces courbes se projettent verticalement suivant d'autres paraboles. Pour obtenir ces diverses courbes, on procédera de la manière suivante: la base du cône se projette verticalement suivant le demi-cercle AF et horizontalement suivant la droite AF . Soient m , m' les projections d'un point pris sur ce demi-cercle; en les joignant respectivement aux points S et S' .

projections du sommet du cône, on aura les projections Sm et $S'm'$ d'une génératrice. Elle coupe le plan vertical AG en un point qui a pour projection horizontale C , et pour projection verticale C' ; ce point est un des points de la projection verticale de l'intersection du cône par le plan AG . On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de cette projection.

Il faut remarquer toutefois que la construction indiquée serait en défaut pour le point E' ; mais on peut se procurer ce point de la manière suivante : si l'on rabat la génératrice correspondante à ce point sur le plan horizontal en la faisant tourner autour de SG , elle viendra se confondre avec SA ; mais, en même temps, le point de cette génératrice qui se projette en G décrira un quart de cercle, dont la projection sera parallèle à la ligne de terre. Si donc, par le point G , on mène une parallèle à XY jusqu'à la rencontre en T de SA prolongé, on aura le rabattement du point dont E' est la projection verticale; par conséquent, on obtiendra le point E' en abaissant du point T sur la ligne de terre une perpendiculaire TM' , et décrivant de S' comme centre, avec $S'M'$ pour rayon, un quart de cercle qui coupera en E' la droite $S'E'$ perpendiculaire à XY .

Cherchons le rabattement de la parabole $AG, A'E'$; pour cela, faisons tourner le plan AG autour de la verticale du point M . En conséquence, ramenons le point C en γ sur une parallèle à XY menée par le point M , en décrivant un arc de cercle $C\gamma$ de M comme centre; puis, par le point γ , menons une perpendiculaire à la ligne de terre; le point c où elle rencontrera la parallèle à XY , menée par le point C' , sera le rabattement du point dont C' et C sont les projections. On obtiendra de la même manière le rabattement des autres points, et l'on pourra tracer la courbe $abcde$.

On se servira de cette courbe rabattue pour opérer la division en voussoirs; les droites qui figurent les joints seront dirigées au point g , qui est le rabattement de G ; on les terminera aux joints de lits des assises du mur qui sont supposées connues, ou que l'on se donnera. En projection verticale, les arêtes de joints seront dirigées vers le point S' ; il sera donc facile de les déterminer, comme l'indique la figure. On les arrêtera à une demi-circonférence décrite de S' comme centre, et représentant la face antérieure du trompillon. Sur la figure, le diamètre de ce cercle est égal à la droite af . Si l'on veut que les voussoirs s'appuient sur le trompillon par une surface normale à la surface conique de la trompe, ce qui est plus utile dans ce cas que dans le cas des trompes cylindriques, on remarquera que cette surface de contact devra être une autre surface conique de révolution, que l'on déterminera en élevant aux points a et f des perpendiculaires aa_1 et ff_1 sur les génératrices Aa et Ff . Ces perpendiculaires devront se rencontrer en un point K situé sur l'axe SG de la trompe. Ce point K sera le sommet du cône normal à la trompe. On lui donnera pour base un cercle ayant pour diamètre une droite a_1f_1 parallèle à af et terminée aux droites Ka et Kf prolongées. A partir de ce cercle, le trompillon aura la forme cylindrique. On devra donc le concevoir comme engendré par la figure $Saa_1a_2f_2f_1fS$ tournant autour de l'axe SG , mais limité au plan horizontal de projection. Le rabattement des plans de

joints s'obtiendra, comme dans l'exemple ci-dessus, en les faisant tourner autour de l'axe SG . La figure f_2f_1fHLZ est le rabattement du joint $uvxyz$; le point u s'est rabattu en f , le point v en f_1 , le point x en F . Le point H a été obtenu en ramenant y en 1 par un arc de cercle décrit du point S' comme centre, et menant par le point 1 une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de fF prolongé. Comme vérification, le point 2, projection horizontale du point de l'arc de tête dont g est la projection verticale, doit se trouver avec H sur une même parallèle à la ligne de terre. Le point x se projetant ici accidentellement en F , les points F et L sont aussi sur une même parallèle à XY . L'arc HL est un arc d'ellipse dont on obtiendrait aisément un point intermédiaire. Tous les autres panneaux de joints se construiront par le même procédé. Pour tailler les voussoirs, on suivra une marche analogue à celle qui a été indiquée à l'occasion de la trompe cylindrique sur pan coupé. On préparera, par exemple, un prisme droit sur la projection verticale $PQzur$; et sur la face horizontale répondant à PQ , on appliquera un panneau taillé sur la figure $3f_2f_145F$ donnée par la projection horizontale; ce qui permettra de tailler à l'aide de l'équerre la face verticale répondant à $5F$. Sur cette face verticale, on appliquera le panneau $pgncd$ donné par le rabattement du plan MG , ou de son symétrique GN ; puis on appliquera les panneaux de joints. Il restera à tailler les deux cônes engendrés par fH et ff_1 , et le cylindre engendré par f_1f_2 . Ces surfaces s'obtiendront au moyen d'une règle posée sur des points de repère qu'on déterminera facilement en menant des rayons par le point S' jusqu'à la rencontre des arcs ur , vt , xw . Le trompillon se taillera également sans difficulté : on dressera une face plane, sur laquelle on tracera la figure $a_2a_1a_3ff_1f_2$; suivant les droites a_2f_2 et af_1 , on mènera deux plans perpendiculaires, et sur ces droites, comme diamètre, on y décrira des demi-cercles. On pourra alors tailler, à l'aide de l'équerre, la surface cylindrique qui a le cercle a_2f_2 pour base, et déterminer le cercle a_1f_1 ; ce cercle et le cercle af serviront de directrices pour tailler le cône aa_1 . Enfin le cône appartenant à la surface de la trompe se taillera au moyen d'une règle appuyée sur le cercle af et passant par le point S .

Les exemples de trompes sur le coin sont encore assez fréquents, quoique ce genre de constructions tende à disparaître. Il existe au coin de la rue Pavée au Marais, à Paris, une tourelle carrée, engagée par un de ses angles dans les murs formant le coin de la rue, et dont les trois autres angles saillants sont remplacés, jusqu'à une certaine hauteur, par autant de trompes coniques.

TROMPE DANS L'ANGLE. On donne ce nom à une trompe conique destinée à remplacer un mur interrompu par une cause quelconque. Soit XY (fig. 5) la trace horizontale d'une des parois d'un mur soutenant des constructions; et supposons que, pour des raisons quelconques, ce mur soit interrompu entre les points A et H , et présente ainsi un espace triangulaire ASH qu'il s'agit de recouvrir en soutenant les constructions établies au-dessus. On emploiera pour cela une surface conique ayant pour sommet le point S , et pour génératrices les droites SA et SH . On suppose le plan horizontal de projec-

tion situé au-dessus du sol à une certaine hauteur; le mur présente ainsi une cavité qui est limitée d'une part par les piédroits dont SA et SH sont les races, et d'autre part par la surface de la trompe.

On pourrait encore motiver l'établissement de cette trompe en supposant donnés deux murs SA et SH formant un angle rentrant qu'il s'agit de recouvrir pour pouvoir étendre au-dessus les constructions déjà

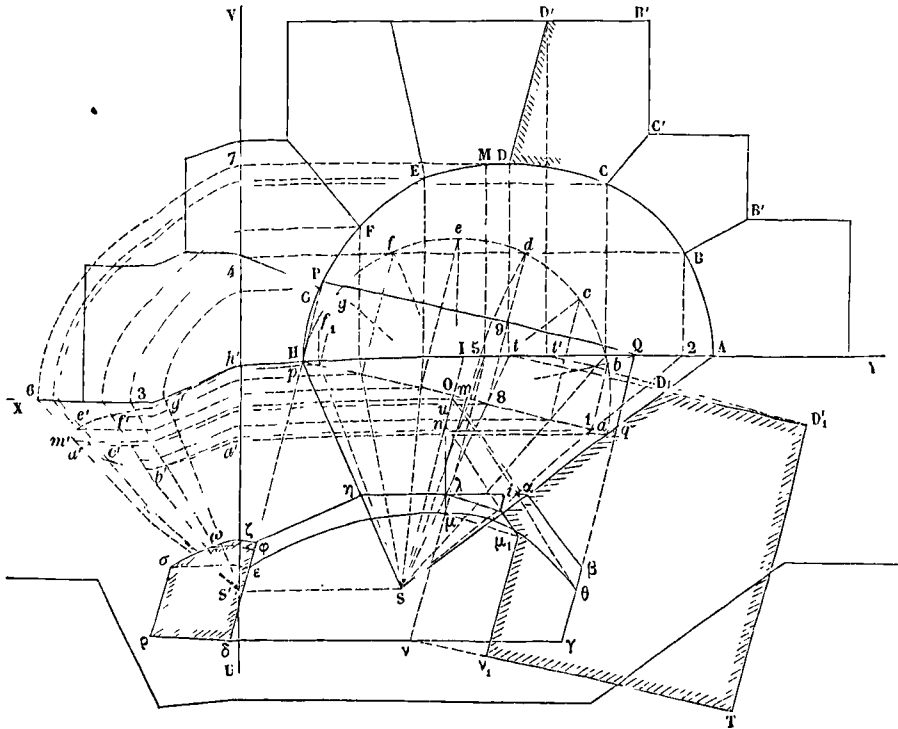


Fig. 5.

existantes. On reconnaît ainsi que la trompe dans l'angle ne diffère de la trompe sur le coin que parce que le cône n'est coupé, dans le cas qui nous occupe, que par le prolongement de la face du mur dont XY est la trace, tandis que, dans le cas de la trompe sur le coin, le cône formant la trompe est rencontré par deux plans qui se coupent. On pourrait donc appliquer les méthodes indiquées ci-dessus; mais, afin de généraliser le problème, on suppose la trompe *biaise*, c'est-à-dire que le triangle ASH n'étant pas isocèle, le cône n'aura plus pour base un cercle parallèle au plan vertical. Mais on peut toujours faire usage d'un cône droit à base circulaire. Si l'on prend $Sa = SH$ et qu'on joigne aH , le demi-cercle décrit sur cette droite comme diamètre, et qui, dans l'épure, est rabattu sur le plan horizontal, sera la base de la surface conique. La première chose à faire est de construire son intersection avec la face du mur. Afin de ne pas rendre l'épure confuse, on emploie pour cela une projection auxiliaire. On prend un plan UV perpendiculaire à la ligne de terre, et l'on projette sur ce plan le cercle $abcdefgH$; puis on le rabat sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de $h'U$. Soit b un point de la demi-circumférence $abcd\dots$; on abaissera de ce point une perpendiculaire sur aH ; soit 1 le pied de cette perpendiculaire; on mènera par le point 1 une parallèle à XY , et sur cette parallèle, à partir de $h'U$, on portera une longueur

égale à $b.1$; le point b' ainsi obtenu sera le rabattement de la projection du point b sur le plan auxiliaire. On obtiendra de la même manière tous les autres, et l'on pourra tracer la courbe rabattue $a'b'c'd'e'f'g'h'$. Cette courbe servira à construire l'intersection du cône avec le plan vertical. Soit, en effet, S' la projection du sommet S sur le plan auxiliaire: les droites $S.1$ et $S'b'$ seront les projections d'une génératrice du cône; la ligne $S.1$ prolongée coupe la ligne de terre au point 2 , et le point où la génératrice considérée perce le plan vertical est situé sur la verticale du point 2 . D'un autre côté, si l'on prolonge la projection verticale $S'b'$ jusqu'à la rencontre de la ligne de terre au point 3 , ce point est le rabattement de la projection du point cherché sur le plan auxiliaire. Si donc on le relève, en 4 , par un arc de cercle décrit de h' , et qu'on mène par le point 4 une parallèle à la ligne de terre, on aura une seconde droite sur laquelle devra se trouver le point cherché. Il sera donc en B à l'intersection de l'horizontale $4.B$ avec la verticale $2.B$. On obtiendra par le même procédé autant de points qu'on voudra de l'intersection cherchée, et l'on pourra tracer cette courbe $ABCDEFHG$. Il peut être utile d'en déterminer le point culminant; pour cela, on mènera par le point S' une tangente à la courbe rabattue $a'b'c'd'e'f'g'h'$. Soit m' le point de contact; on abaissera de ce point une perpendiculaire à $h'U$ jusqu'à la rencontre de aH en m ; on joindra $S'm$,

qui rencontrera la ligne de terre en 5, et, par le point 5, on élèvera une perpendiculaire à XY ; puis on prolongera la tangente $S'm'$ jusqu'à la rencontre de la ligne de terre en 6; on relèvera ce point en 7 par un arc de cercle décrit de K' , et, par le point 7, on mènera une parallèle à la ligne de terre: le point M , situé à l'intersection de l'horizontale $7M$ et de la verticale $5M$, sera le point culminant. Il est clair, en effet, que le point m' est celui qui fournit l'horizontale $7M$ la plus élevée.

La courbe de tête $ABCD$... étant ainsi obtenue, c'est sur cette courbe qu'on fera la division en voussoirs; les joints devant passer par l'axe du cône, leurs intersections avec le plan vertical devront passer par le point I , où l'axe SO rencontre XY . Cette division en voussoirs exige quelques tâtonnements pour qu'il n'y ait pas trop d'inégalité, soit entre les arcs de tête AB , BC , CD , etc., soit entre les largeurs des douelles ab , bc , cd , etc. On peut déterminer sur AMH les points de division qui répondraient à des arcs de tête de même longueur, puis ceux qui répondraient à des douelles de même largeur, et adopter des points intermédiaires. Les droites BB' , CC' , DD' , etc., ainsi obtenues devront être arrêtées à la rencontre des joints de lit des assises du mur, qui sont supposés connus. Les arêtes de douelle étant des génératrices du cône, leurs projections horizontales concourent au point S , et leurs projections verticales au point I . On n'a point tracé ces dernières sur l'épure, pour éviter la confusion des lignes. Ces arêtes de douelle ne doivent pas être prolongées jusqu'au sommet du cône, mais arrêtées à la rencontre du trompillon, dont il y a lieu maintenant de s'occuper. Il est représenté en projection horizontale par la figure $\alpha\beta\gamma\delta\zeta\eta$; la droite $\alpha\eta$ est parallèle à AH ; l'espace triangulaire $\alpha S\eta$ est recouvert par la portion de la surface conique attachant au sommet S ; les faces correspondantes aux droites $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\zeta$ sont verticales; la face inférieure et la face supérieure sont horizontales; enfin la face $\theta\beta\alpha\eta\zeta$, suivant laquelle les voussoirs reposent sur le trompillon, est une surface gauche dont les génératrices sont normales au cône. Voici comment on détermine ces génératrices. Proposons-nous, par exemple, de trouver la projection horizontale de celle qui passe au point λ ; chaque normale est perpendiculaire à une génératrice du cône, et elle rencontre son axe; si l'on rabat sur le plan horizontal le plan méridien qui contient cette normale, en le faisant tourner autour de SO , la génératrice du cône vient s'appliquer suivant $S\alpha$, et le point par lequel est menée la normale décrit un cercle dont la trace est perpendiculaire à SO ; si donc, par le point λ , on mène λl parallèle à $O\alpha$, la droite ln perpendiculaire à $S\alpha$ sera le rabattement de la normale. D'ailleurs dans ce mouvement le point n où elle rencontre l'axe n'a pas changé de position. Si donc on joint ln , on aura la projection horizontale de la normale. Ainsi $\lambda\mu$ est la projection de la portion de cette normale, qui est une des génératrices de la surface gauche du trompillon. On obtiendrait de même toutes les autres. Les génératrices de cette surface qui passent en α et en η sont les horizontales $\alpha\beta$ et $\eta\zeta$, respectivement perpendiculaires à SA et à SH . Il s'agit maintenant d'obtenir l'intersection de cette surface gauche par le plan horizontal supérieur du trompillon. Ce plan prolongé rencontre la base du cône

suivant une droite PQ , parallèle à αH , et qui peut être regardée comme donnée. La projection horizontale de la génératrice du cône à laquelle correspond la normale $n\lambda$ est la droite $S\lambda$, qui rencontre αH au point 8, lequel est la projection du point d de la base. La génératrice considérée a donc pour projection sur la base du cône la droite qui va du point d au point O . Cette droite rencontre PQ en un point 9; si par ce point 9 on conçoit une parallèle à l'axe, elle sera à la fois dans le plan méridien qui contient la normale considérée et dans le plan horizontal du trompillon; elle contiendra donc le point où la normale perce ce plan. Par conséquent si, par le point 9, on mène une parallèle à SO , le point μ où elle rencontre la projection $n\lambda$ de la normale sera la projection horizontale du point de rencontre de cette normale avec la face supérieure du trompillon. On obtiendra de la même manière autant de points que l'on voudra de l'intersection de cette face avec la surface gauche. Il faut obtenir également l'intersection de cette surface gauche avec les plans verticaux qui limitent latéralement le trompillon. Ces plans sont toujours choisis de manière que l'arête latérale supérieure soit contenue dans un plan de joint; ainsi les traces Pp et Qq de ces plans sur la base du cône rencontrent la trace PQ sur les rayons Og et Ob . Si l'on considère la génératrice du cône qui répond au point b , et dont les projections sont $S.1$ et Ob , et que l'on détermine comme plus haut la projection horizontale $u\theta$ de la normale qui correspond au point i , où $S.1$ rencontre $\alpha\eta$, le point θ où cette projection rencontrera la trace $\beta\gamma$ du plan vertical qui limite le trompillon sera la projection du point où cette normale rencontre l'arête latérale supérieure projetée au point Q ; ce sera donc la limite de la courbe d'intersection de la surface gauche avec le plan horizontal supérieur du trompillon; l'autre limite s'obtiendra de la même manière. On rabat ces plans latéraux sur le plan horizontal; la figure $\delta\rho\sigma\zeta$ est le rabattement de l'un d'eux. Pour avoir un point intermédiaire de la courbe $\sigma\zeta$, il faudrait construire la normale correspondante à une génératrice du cône perçant la base en un point f_1 situé entre g et H , et chercher de même son intersection avec le plan vertical $\delta\zeta$; la projection horizontale de la normale viendrait couper $\delta\zeta$ en un point φ entre ϵ et ζ ; et la distance $\omega\varphi$ du point cherché à la trace $\delta\zeta$ serait égale à la hauteur du point f_1 au-dessus du αH .

Pour tailler le trompillon, on préparera un prisme droit sur la figure $\alpha\beta\gamma\delta\zeta\eta$, et, sous sa base inférieure, on tracera les droites $S\alpha$ et $S\eta$; sur les faces latérales, on appliquera le panneau $\delta\rho\sigma\zeta$ et son analogue: et sur la base horizontale supérieure, on tracera la courbe $\epsilon\mu\theta$. Sur la face latérale répondant à $\alpha\eta$, on tracera l'intersection de cette face avec la surface conique, courbe semblable à $ABCD$... H , qu'il est facile d'obtenir, et qu'on n'a point tracée pour ne pas compliquer l'épure. On aura soin de reporter sur cette courbe, par des perpendiculaires à $\alpha\eta$, les points remarquables, tels que λ , i , marqués sur cette droite. On taillera la surface gauche en s'aidant d'une règle que l'on posera sur des points de repère déterminés à l'avance; le point μ , par exemple, et le point de la courbe tracée dans le plan $\alpha\eta$ qui est sur la verticale de λ , seront un système de points de repère, et chaque normale en fournira

ainsi deux. Il restera à creuser la pierre pour tailler la surface conique; on s'aidera pour cela d'une règle passant par le point S et par les points successifs de la courbe tracée dans le plan $\alpha\gamma$. La forme du trompillon est représentée fig. 6.

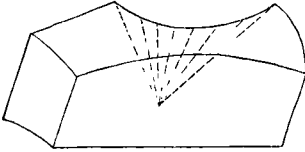


Fig. 6.

Avant de procéder à la taille des voussoirs, il faut se procurer le rabattement des joints. On les fait tourner autour de l'axe du cône; l'arête de douelle vient coïncider avec SA; les intersections du plan de joint par les plans horizontaux, étant parallèles à l'axe du cône, viennent se rabattre parallèlement à cette ligne. Supposons qu'il s'agisse du joint DD'; on remarquera que pendant la rotation la distance des points D et D' au point I ne changera pas, et ces points décriront des arcs de cercle dont la projection horizontale sera perpendiculaire à OI; par conséquent, si des points D et D' on abaisse des perpendiculaires sur la ligne de terre, que par les pieds t et t' de ces perpendiculaires on mène des perpendiculaires à OI, et que sur ces perpendiculaires on détermine les points placés à des distances du point I respectivement égales à ID et à ID', on aura en D₁ et D'₁ le rabattement des points D et D'. Ainsi la droite DD' sera rabattue en D₁D'₁; comme vérification, le point D₁ devra se trouver sur SA. La normale dont μ est la projection, et qui est située sur le contour du joint considéré, se rabattra suivant $\mu\mu_1$ perpendiculaire à SA, et le point μ_1 s'obtiendra en menant par le point μ une perpendiculaire à l'axe du cône. Les intersections du joint par le plan horizontal D'R' et par la face supérieure du trompillon se rabattront suivant les droites D₁T et $\mu_1\nu_1$ parallèles à SO; les points ν_1 et T seront sur une même parallèle à D₁D'₁. Le rabattement du joint considéré sera donc la figure D₁D'₁ $\mu_1\nu_1$ T. On obtiendra de la même manière le rabattement de tous les autres.

Pour tailler les voussoirs, on pourrait théoriquement suivre une marche analogue à celle qui a été indiquée dans le problème précédent. Supposons qu'il s'agisse du voussoir dont le panneau de tête est DD'R'C'C (fig. 5). On prolongerait les droites DD' et CC' jusqu'au point I, et sur la figure ID'R'C'I comme base, on préparerait, non pas un prisme droit, mais un prisme ayant ses arêtes latérales parallèles à l'axe du cône. Pour cela, après avoir élevé, suivant D'R' (fig. 7), un plan perpendiculaire au plan DD'R'C'C, on tracerait dans ce plan une droite R'R'' faisant avec D'R' un angle égal à l'angle HIS de la figure 5, et ayant pour longueur D₁T; il ne resterait plus qu'à achever de proche en proche les parallélogrammes D'R'R''D'', R'C'C''R'', C'C''I'I, I'I''D''D''. Cela posé, on appliquerait sur la base primitivement dressée le panneau de tête DD'R'C'C, et l'on tracerait l'arc DC; on appliquerait sur les faces D'I'' et C'I'' les panneaux de joints D'D₁ $\mu_1\nu_1$ D'' et C'C₁ μ_1' ν_1' C''. Les droites D₁I et C₁I' étant prolongées

jusqu'en S, on taillerait la douelle conique à l'aide d'une règle passant par le point S et s'appuyant sur l'arc CD. Sur cette douelle, on tracerait l'arc W; il suffirait pour cela de diviser proportionnellement

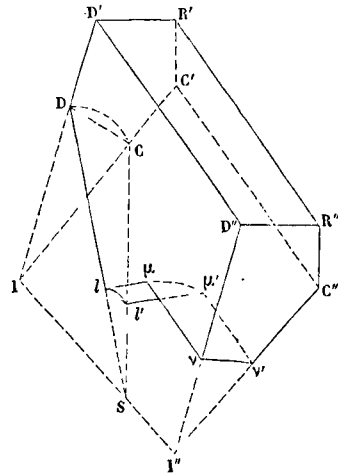


Fig. 7.

un certain nombre de génératrices. On fouillerait alors la pierre en dessous de manière à tailler la face plane $\mu\nu\nu'\mu'$, sur laquelle on tracerait l'arc $\mu\mu'$ égal à l'arc correspondant de la courbe $\epsilon\mu\theta$ (fig. 5). Il ne resterait plus qu'à tailler la surface gauche $\mu\mu'\nu'$, ce qui se ferait à l'aide d'une règle posée sur des points de repère marqués à l'avance sur les arcs W et $\mu\mu'$.

Mais cette méthode, bonne en théorie, occasionnerait dans la pratique un déchet de pierre trop considérable. On suit une marche différente, fondée sur l'emploi des douelles plates, c'est-à-dire des plans déterminés par les arêtes de douelle consécutives. On imagine inscrite au cône une pyramide qui touche sa surface suivant les arêtes de douelle; il est aisé de développer sur un plan la surface convexe de cette pyramide, et l'on obtient ainsi la figure des douelles plates. Si l'on considère alors l'angle trièdre formé par deux douelles plates consécutives, par exemple celles qui correspondent aux cordes CD et DE (fig. 5), et, par le plan de tête prolongé, on voit que ces trois faces sont déterminées, et que, par conséquent, par une méthode connue de Géométrie descriptive (Voy. ANGLE TRIÈDRE), on peut déterminer les inclinaisons de ses faces, et en particulier l'angle que fait le plan de tête avec chacune des douelles. On procédera alors de la manière suivante à l'application du trait sur la pierre. On commencera par dresser une face plane sur laquelle on tracera la douelle plate CDW (fig. 7). Connaissant l'angle que fait cette douelle plate avec le plan de tête, on pourra, à l'aide d'un BEUVEAU (Voy. ce mot), tailler ce plan de tête sur lequel on appliquera le panneau DD'R'C'C. Les plans DD'D'', D'R'R'', R'C'C'', CC'C'' seront alors déterminés chacun par deux droites qui se coupent, et l'on pourra tailler les faces correspondantes, et appliquer les deux panneaux de joints. On taillera, comme nous l'avons dit tout à l'heure, la face plane $\nu\mu\mu'\nu'$. L'intersection de la douelle plate avec la surface gauche

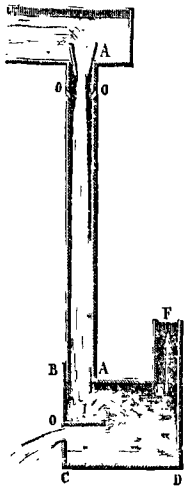
peut être déterminée à l'avance et tracée sur cette douelle plate; il suffit pour cela de déterminer l'intersection de quelques normales avec ce plan, ce qui n'offre aucune difficulté. On se servira de cette courbe et de la courbe $\gamma\mu\mu'\nu'$ comme directrices pour tailler la surface gauche, et l'on y tracera l'arc W en mesurant sur le rabattement de l'intersection du cône avec le plan $\alpha\eta$ (fig. 5) les portions de normales comprises entre l'arc qui répond à la douelle conique et la corde qui répond à la douelle plate. On aura ainsi deux directrices CD et W' pour tailler la douelle conique, ce qui se fera à l'aide d'une règle posée sur des points de repère déterminés à l'avance. La méthode sera la même pour tous les voussoirs.

On pourrait généraliser davantage le problème de la trompe biaise en supposant le plan de tête en talus (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, p. 300 et suivantes).

Du reste, c'est bien moins comme question d'application que comme étude de stéréotomie que l'on résout le problème de la trompe dans l'angle. Il y a, à la vérité, quelques exemples de son application, notamment pour soutenir le palier d'un escalier; mais, dans les édifices modernes, on évite ces constructions irrégulières, dont le tracé et l'exécution offrent des difficultés hors de proportion avec leur utilité réelle.

Quelques auteurs rangent parmi les trompes la *niche sphérique* appareillée en *cul-de-four* (Voy. VOÛTE SPHÉRIQUE), à cause de l'analogie de l'appareil et de l'emploi du trompillon.

TROMPE, machine soufflante, employée dans les contrées montagneuses où l'on dispose de chutes d'eau abondantes. Elle se compose d'un long tuyau vertical en bois AA qui reçoit l'eau du bief supérieur, par une sorte d'ajutage conique dont l'orifice inférieur est moindre que la section du tuyau. Autour de la section contractée, à l'endroit où la pression est moindre que la pression atmosphérique (Voy. AJUTAGE), on a percé des orifices o, o , par lesquels l'air extérieur s'introduit autour de la veine, et, entraîné par elle, descend au bas du tuyau. Le mélange d'air et d'eau que le tuyau contient est reçu dans une caisse BCD, et se brise sur une tablette I qui y est disposée. L'air et l'eau se séparent: l'eau descend à la partie inférieure et sort par un orifice O qui y est ménagé; l'air monte à la partie supérieure, et s'y trouve à



une pression supérieure à la pression atmosphérique. En vertu de son excès de pression, il s'échappe par un tuyau EF disposé pour le recevoir, et qui le dirige soit sur un foyer qu'il s'agit d'activer, soit dans un puits de mine que l'on veut aérer. — Les trompes produisent un écoulement d'air très-régulier; mais leur rendement est extrêmement faible; il ne dépasse pas 0,15. La théorie de ces machines n'est pas connue, et l'on ignore les dimensions les

plus avantageuses à donner à leurs différentes parties. Elles sont employées dans les pays de montagnes, à cause de leur grande simplicité.

TROMPES EN CHARPENTE. Elles ne sont qu'une imitation des trompes en pierre; et leur forme se détermine d'après les mêmes principes.

S'il s'agit d'une *trompe cylindrique supportant une tourelle*, la ligne d'intersection des deux surfaces cylindriques (Voy. TROMPE) est figurée par deux aisseliers qui s'assemblent avec la sablière de la tourelle au moyen de deux abouts ménagés en dessous, et qui reposent sur les poteaux latéraux à l'aide d'embranchements horizontaux. Lorsque les pièces de charpente doivent rester apparentes, on donne aux pièces de remplage la direction qu'auraient les joints si la voussure était en pierre.

S'il s'agit d'une *trompe sur l'angle*, les directrices de la surface cylindrique formant la trompe sont figurées par deux aisseliers en arcs de cercle, qui s'assemblent avec l'extrémité des sablières soutenant le poteau cornier formant l'angle du premier étage, et qui s'appuient, à l'aide d'embranchements convenables, sur les poteaux qui, dans les deux faces de l'édifice, correspondent à l'angle du pan coupé. Un chevron elliptique, placé dans le plan bissecteur de l'angle du bâtiment, s'assemble à sa partie supérieure avec un coyer, et, vers la partie inférieure, avec le poteau qui occupe le milieu du pan coupé. Le remplage est formé par des empanons qui s'assemblent avec les aisseliers courbes et avec la sablière du pan coupé.

Les trompes coniques se construisent par des procédés analogues.

Ce genre de construction est aujourd'hui peu usité.

TROMPILLON, pierre unique, placée dans l'axe d'une TROMPE (Voy. ce mot), pour remplacer les extrémités trop aiguës des voussoirs.

TROPIQUES, cercles de la sphère céleste parallèles à l'équateur et situés de part et d'autre de ce dernier à une distance de $23^{\circ} 27' 27''$, 24 (Voy. ÉCLIPTIQUE). Ce sont ces parallèles que le soleil paraît décrire à l'époque des solstices; il s'en éloigne ensuite pour retourner vers l'équateur, ce qui leur a fait donner par les anciens le nom qu'ils portent (du grec $\tau\rho\pi\epsilon\omega$, retourner). Celui des deux tropiques qui est situé dans l'hémisphère boréal porte le nom de *tropique du Cancer*; celui qui est situé dans l'hémisphère austral est le *tropique du Capricorne*. Ces noms correspondent aux SIGNES (Voy. ce mot) dans lesquels le soleil entre à l'époque des solstices.

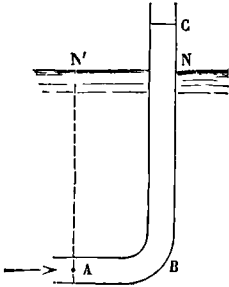
On donne aussi, en Géographie, le nom de *tropiques* à deux cercles supposés tracés sur le globe terrestre, de part et d'autre de l'équateur, à la distance indiquée ci-dessus, et qui comprennent entre eux la *zone torride*. Ces parallèles passent par les points du globe qui ont le soleil à leur zénith à l'époque du solstice, savoir: à l'époque du solstice d'été pour les points situés sous le tropique du Cancer, et à l'époque du solstice d'hiver pour les points situés sous le tropique du Capricorne.

TROTTEUSE. Voy. COMPTEUR À POINTAGE.

TRUMEAU, espace compris entre deux fenêtres consécutives d'un même étage. Sa largeur ne doit jamais être inférieure à celle d'une fenêtre; sauf dans le cas où les fenêtres sont *gémées* (Voy. FENÊTRE).

En architecture, on donne en général le nom de *trumeaux*, aux parties pleines qui séparent deux ouvertures. Mais on l'applique plus particulièrement, dans la coupe des pierres, aux *pendentifs* d'une voûte sphérique, lorsque les plans verticaux qui les déterminent sont placés plus loin du centre de la sphère que les côtés du carré inscrit à l'équateur; auquel cas la voûte est dite en *pendentifs avec trumeaux* (Voy. PENDENTIFS).

TUBE DE PITOT, instrument proposé par Pitot en 1732 pour mesurer la vitesse d'un courant à une profondeur déterminée. Il se compose d'un tube ABC recourbé à angle droit, que l'on plonge verti-



calement dans le courant, la branche horizontale BA tournée vers l'amont. L'eau s'y élève au-dessus du niveau NN' du courant à une hauteur CN = h d'autant plus grande que la vitesse du courant est plus considérable. On croyait du temps de Pitot que cette hauteur était précisément égale à la hauteur due à la vitesse du courant au point A; mais cela n'est pas exact. D'après ce que l'on sait aujourd'hui de la **RÉSISTANCE DES FLUIDES** (Voy. ce mot), la pression \mathcal{Q} exercée par le courant sur un plan remplaçant l'orifice A est exprimée par

$$\mathcal{Q} = \Pi \left(z + k \frac{v^2}{2g} \right),$$

z représentant la hauteur du niveau NN' au-dessus du point A, v la vitesse du fluide en A, Π le poids du mètre cube de ce fluide, et k un coefficient numérique plus grand que l'unité. D'un autre côté, l'eau contenue dans le tube y étant sensiblement en équilibre, on a

$$\mathcal{Q} = \Pi (z + h).$$

En comparant ces deux formules, on en conclut

$$h = k \frac{v^2}{2g},$$

d'où

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{k}.$$

D'après quelques expériences de Dubuat, on pourrait prendre $k = 1,15$ en moyenne, d'où

$$\frac{1}{k} = 0,87.$$

Mais il reste encore beaucoup d'incertitude sur ce point; et l'emploi du tube de Pitot ne peut fournir qu'une approximation de la vitesse que l'on cherche.

MM. Darcy et Baumgarten y ont apporté quelques modifications, qui ont l'inconvénient de compliquer l'appareil sans rendre ses indications plus certaines (Voy. le *Cours de Mécanique appliquée* de

M. Bresse à l'École des ponts et chaussées. Voy. SYMPIÉZOMÈTRE.)

TUNNELS, voûtes en berceau, droites ou légèrement courbes, ordinairement d'une grande longueur, destinées à former le passage d'une voie de communication au travers d'un massif de terrains. Ces voûtes sont soumises aux mêmes règles que les voûtes en berceau ordinaires (Voy. VOÛTES EN BERCEAU, BERCEAU TOURNANT, POUSSÉE DES VOÛTES). Mais, suivant la nature des terrains qu'ils traversent, les tunnels peuvent se trouver dans des conditions très-différentes.

Si le terrain est rocheux, il ne presse sur la voûte que par les débris provenant de la dégradation des roches; et l'épaisseur de la voûte n'a pas besoin d'être considérable. La forme de l'intrados est indifférente, et l'on adopte généralement le plein cintre, comme étant d'une exécution plus commode.

Si le terrain est argileux, il tend à glisser par couches parallèles à un plan déterminé. Dans ce cas il faut prendre pour les surcharges extérieures agissant sur la voûte les composantes, parallèlement au talus, des poids des divers prismes de terre compris entre des plans parallèles à ce talus. Le tracé de la *Courbe des pressions* (Voy. POUSSÉE DES VOÛTES), se fait d'ailleurs comme pour une voûte ordinaire. On est généralement conduit à adopter pour intrados le plein cintre, et à donner aux piédroits une inclinaison, ou un *fruit*, plus ou moins considérable. Si la courbe des pressions, prolongée jusqu'à la base des piédroits, montre que ceux-ci ont une tendance au glissement, on les relie par un *radier*, que l'on fait horizontal s'il n'y a aucune *sous-pression* à craindre, c'est-à-dire s'il ne s'exerce aucune pression de bas en haut de la part du sol, ou auquel on donne, dans le cas contraire, une certaine courbure vers le bas.

Si le terrain est composé de sables aquifères, le tunnel est dans les mêmes conditions qu'un vase cylindrique pressé par un fluide normalement à sa surface. Il convient d'adopter pour l'intrados et l'extrados le plein cintre; et l'on peut appliquer la formule

$$e = \rho \cdot \frac{P}{R} \quad [1]$$

démontrée pour les **VASES CYLINDRIQUES** (Voy. ce mot), et dans laquelle e représente l'épaisseur du vase ou de la voûte, ρ le rayon de sa surface intérieure, P la différence des pressions par mètre carré qui s'exercent à l'extérieur et à l'intérieur, c'est-à-dire ici la pression du terrain semi-liquide, attendu que la pression atmosphérique s'exerce à l'intérieur et à l'extérieur; enfin R la résistance par mètre à laquelle on veut soumettre la matière du vase, soit ici environ 50000^k par mètre carré pour la pierre de taille, ou 10000^k pour le moellon.

La formule [1] suppose que la pression est la même en tous les points, ce qui est sensiblement vrai lorsque le terrain aquifère s'élève à une grande hauteur au-dessus du tunnel. Dans le cas contraire, la pression étant notablement moins grande au sommet de la voûte que vers le bas, on est conduit à donner à l'intrados une forme ovoïde, c'est-à-dire celle de la section méridienne d'un œuf dont le petit bout serait en bas. La formule [1] montre, en effet, que lorsque le vase reste cylindrique,

mais que la pression varie, la résistance R demeurant la même, le rapport de e à ρ augmente en même temps que P . Il paraît donc naturel d'augmenter ce rapport vers le bas du tunnel où la pression est alors la plus grande. On y parviendrait en augmentant l'épaisseur e ; mais il est plus économique de diminuer le rayon ρ .

On a un tunnel à percer toutes les fois qu'une simple tranchée deviendrait soit plus coûteuse, soit même impossible, à cause de l'élévation du relief du terrain au-dessus de la voie à ouvrir. Après avoir arrêté le tracé du tunnel d'après l'étude géodésique et géologique du terrain, et fixé ce tracé sur un plan, on plante sur le terrain une série de signaux dans le plan vertical contenant l'axe de la route ou du chemin de fer projeté. Puis on creuse, à des distances connues de cet axe, une série de puits verticaux plus ou moins distants les uns des autres, et que l'on pousse jusqu'au niveau de la voie. On ouvre alors des galeries transversales correspondantes à chaque puits, et on les pousse jusqu'à l'axe de la voie. On attaque alors le massif, dans la direction de la voie et sur plusieurs points à la fois, en se dirigeant d'après des cotes de hauteur prises sur le plan, et d'après les indications de la boussole. On n'ouvre d'abord qu'une galerie d'une faible hauteur, soutenue par de simples étais, et placée le plus souvent vers le haut de la voûte. On l'agrandit peu à peu en soutenant les terrains par des cintres analogues à ceux qu'on emploie dans la construction des ponts, et sur lesquels on établit peu à peu la maçonnerie qui doit former la voûte. On creuse ensuite l'emplacement des pénédroits que l'on élève au fur et à mesure. Quand toute la maçonnerie est construite, on achève le percement de la partie centrale du tunnel. Les puits par lesquels on a commencé les travaux servent de communication avec l'extérieur, et de moyen de ventilation; les galeries transversales servent de dépôt pour les outils. Quand on a achevé le percement, et décentré la voûte, on s'occupe de l'établissement définitif de la voie.

Les tunnels ordinaires coûtent de 2000' à 2500' par mètre de longueur; mais, suivant la nature du terrain à traverser ils peuvent occasionner une dépense beaucoup plus considérable, qui peut s'élever jusqu'à 3000 ou 3600' par mètre. On cite en France le tunnel de Blaisy, sur le chemin de fer de Paris à Lyon, qui a 4100^m de longueur, et celui de la Nerthe, sur le chemin d'Avignon à Marseille, qui a 4220^m. Le tunnel du Mont-Cenis, entre Modane et Bardonnèche, qui est en voie d'exécution, aura 12230^m de long. Après avoir ouvert à chaque extrémité, et par les procédés ordinaires, 1200^m de tunnel, on attaque le massif à l'aide de puissantes machines à air comprimé, marchant à une pression de près de 5 atmosphères, et qui percent dans le roc des trous de mine: on fait ensuite sauter le roc à l'aide de la poudre. La galerie est revêtue de maçonnerie à mesure qu'elle est ouverte. L'air comprimé, qui s'échappe des cylindres de la machine, sert à assurer l'aérage de la galerie.

On s'occupe à Londres d'un tunnel de 4000^m de long qui doit relier, en passant sous la Cité, la gare du Great Western à celle du North Western.

TURBINE FONTAINE (Voy. TURBINES). Pour mieux faire comprendre cette roue, il est utile d'é-

tudier d'abord la turbine d'Euler, dont la théorie est la même, et de montrer ensuite les perfectionnements introduits par M. Fontaine. La turbine d'Euler se compose de deux surfaces cylindriques de révolution ayant le même axe OO' (fig. 1), et

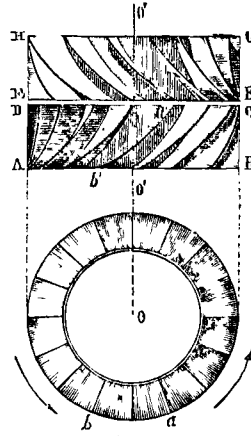


Fig 1.

entre lesquelles sont emboîtées des aubes courbes. Pour se rendre compte de la forme de ces aubes, on peut imaginer qu'on ait tracé sur la surface cylindrique extérieure une courbe telle que $ab, a'b'$; et qu'une droite horizontale glisse en s'appuyant constamment sur l'axe et sur cette courbe; cette droite dans son mouvement engendrerait la surface d'une aube. La roue est liée à son axe vertical par des bras. Au-dessus de la couronne annulaire mobile ABCD formant la roue proprement dite, est placée une couronne annulaire fixe EFGH tout à fait semblable, mais dont les aubes sont dirigées en sens contraire. L'eau du bief supérieur pénètre dans les canaux formés par les aubes fixes, en sort dans la direction de ces aubes, rencontre les aubes mobiles, les force à reculer, pénètre, en vertu de sa vitesse relative, dans les canaux formés par les aubes mobiles, sort au bas de ces canaux, avec une faible vitesse, et tombe dans le bief d'aval, dont le niveau est à une très-petite distance au-dessous de la roue.

Soit ab (fig. 2) une aube, que nous supposons

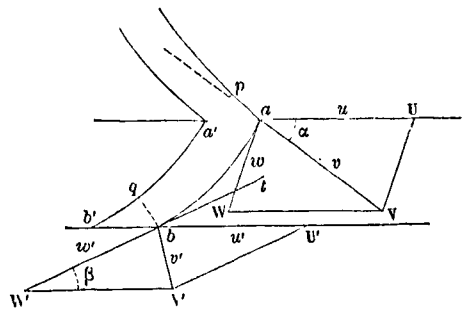


Fig. 2.

réduite à une faible épaisseur dans le sens du rayon. Soit $aV = v$ la vitesse de l'eau à sa sortie du canal formé par les aubes fixes; soit $aU = w$ la vitesse

de la roue à la surface extérieure. Si l'on construit le parallélogramme $aUVW$, dont aV est la diagonale et aU l'un des côtés, le côté aW représentera (Voy. COMPOSITION DES VITESSES) la vitesse relative w de l'eau par rapport à l'aube. La direction aW est celle qu'il faut donner au premier élément de l'aube, pour que l'eau entre sans choc dans la roue. La nature de la courbe ab est d'ailleurs indifférente. Si α représente l'angle UaV , on aura dans le triangle UaV ,

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha. \quad [1]$$

Soit $BW' = w'$ la vitesse relative de l'eau à sa sortie de la roue, vitesse qui est dirigée suivant le dernier élément de la courbe ab ; si l'on néglige le frottement de l'eau sur l'aube, on aura, en appelant h' la hauteur de la roue, ou la distance verticale des points a et b ,

$$w'^2 = w^2 + 2gh'. \quad [2]$$

Si l'on applique, en effet, à la masse d'eau m entrée dans un temps très-court sur la roue, le principe de l'EFFET DU TRAVAIL dans le mouvement relatif, on verra que l'accroissement de la puissance vive est égal au travail de la pesanteur, plus le travail de la force centrifuge (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS), plus encore le travail de la pression atmosphérique qui s'exerce en amont et en aval. Mais le second travail est nul dans le cas qui nous occupe puisque l'eau reste à la même distance de l'axe; le troisième est nul aussi puisque la pression est la même à l'entrée et à la sortie: on aura donc

$$\frac{1}{2}mw'^2 - \frac{1}{2}mw^2 = mg.h',$$

ce qui revient à la relation [2].

Soit $bU' = u$ la vitesse de la roue. Si l'on construit un parallélogramme sur bU' et sur bW' , la diagonale bV' de ce parallélogramme représentera la vitesse absolue v' de l'eau à sa sortie de la roue, et en nommant β l'angle tbU' que fait le dernier élément de la courbe ab avec l'horizontale bU' on aura, dans le triangle $bW'V'$,

$$v'^2 = w'^2 + u^2 - 2uw' \cos \beta. \quad [3]$$

Pour obtenir le maximum d'effet utile, il faudrait pouvoir (Voy. RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES) rendre v' rigoureusement nul; il faudrait pour cela faire $\beta = 0$ et $w' = u$. Mais des raisons de construction s'opposent à ce que le dernier élément de la courbe ab soit rigoureusement horizontal; cette disposition générerait d'ailleurs la sortie de l'eau et produirait un engorgement dans la roue. On se contente de donner à β une faible valeur, 25 à 30 degrés par exemple, et l'on prend néanmoins

$$w' = u. \quad [4]$$

Si l'on introduit cette hypothèse dans l'équation [2], et qu'on ajoute alors les relations [1] et [2], on obtient

$$v^2 + 2gh' - 2uv \cos \alpha = 0, \text{ d'où } u = \frac{v^2 + 2gh'}{2v \cos \alpha}. \quad [5]$$

Soit h la hauteur du niveau du bief d'amont au-dessus du plan supérieur de la roue; si les canaux fixes sont convenablement évasés, on aura sensiblement

$$v^2 = 2gh,$$

et par suite, en désignant par H la hauteur de chute, sensiblement égale à $h + h'$,

$$u = \frac{H}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad [6]$$

La vitesse u de la roue étant ainsi déterminée, on tire de la relation [3]

$$v'^2 = 2u^2(1 - \cos \beta) = \frac{2gH^2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta}{h \cos^2 \alpha}. \quad [7]$$

Si P désigne le poids d'eau qui s'écoule dans une seconde, auquel cas la puissance de la chute, ou le travail moteur disponible \mathcal{C}_m est égal à PH , le travail perdu par suite de la vitesse que l'eau conserve à sa sortie est exprimé par $P \cdot \frac{v'^2}{2g}$, le travail trans-

mis à la roue \mathcal{C}_u est donc $PH - P \frac{v'^2}{2g}$, et par conséquent le rendement de la roue α pour valeur

$$\frac{\mathcal{C}_u}{\mathcal{C}_m} = 1 - \frac{v'^2}{2gH} = 1 - \frac{H}{h} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \alpha}. \quad [8]$$

Mais il y a une condition essentielle à remplir, qui permet de simplifier cette expression: il faut que la dépense par les canaux fixes soit égale à la dépense par les canaux mobiles. Soit e la largeur de la couronne annulaire formant la roue, ou la différence des rayons des surfaces cylindriques extérieure et intérieure. Si l'on abaisse du point a' (fig. 2) la droite $a'p$ normale sur l'aube fixe qui précède, le produit $e \times a'p$ exprimera très-approximativement la section du canal fixe, et la dépense par ce canal sera représentée par

$$e \times a'p \times v.$$

Si l'on abaisse de même du point b la normale bq sur l'aube mobile qui suit, on aura pour l'expression de la dépense par un canal mobile,

$$e \times bq \times w'.$$

Comme les canaux mobiles sont ordinairement en même nombre que les canaux fixes, il faut que ces deux expressions soient égales, ce qui exige qu'on ait

$$a'p \times v = bq \times w'.$$

Mais $a'p = aa' \cdot \sin \alpha$ et $bq = bb' \cdot \sin \beta$.

D'ailleurs $aa' = bb'$; la condition ci-dessus exprimée peut donc s'écrire

$$v \sin \alpha = w' \sin \beta,$$

d'où, on remplaçant w' par u

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad [9]$$

Les canaux mobiles sont quelquefois en nombre double des canaux fixes, mais il est clair qu'on arriverait encore au même résultat en égalant la dépense par l'un de ces canaux fixes au double de la dépense par un des canaux mobiles.

Or, de la relation [5] on tire

$$\frac{u}{v} = \frac{v^2 + 2gh'}{2v^2 \cos \alpha} = \frac{2gH}{2 \cdot 2gh \cdot \cos \alpha} = \frac{H}{2h \cos \alpha}.$$

Il vient donc

$$\frac{H}{2h \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \text{ d'où } \frac{H}{h} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \beta} \quad [10]$$

et en substituant dans la relation [8], on obtient

$$\frac{\mathcal{C}_u}{\mathcal{C}_m} = 1 - \frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos \alpha} = 1 - \tan \alpha \tan \frac{1}{2}\beta. \quad [11]$$

Le rendement est donc d'autant plus grand que les angles α et β sont plus petits. On a vu qu'on ne peut prendre β inférieur à 25°; si l'on donne cette valeur à α et à β , on trouve

$$\frac{\mathcal{C}_u}{\mathcal{C}_m} = 0,8966,$$

ou à peu près 0,90.

En prenant $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 25^\circ$, on trouverait

$$\frac{\bar{C}_u}{\bar{C}_m} = 0,872.$$

On peut remarquer que dans le cas où l'on fait $\alpha = \beta$, la relation [11] peut se mettre sous la forme

$$\frac{\bar{C}_u}{\bar{C}_m} = 1 - \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} = 2 - \frac{1}{\cos \alpha}. \quad [14]$$

En réalité, on ne peut jamais obtenir un rendement aussi fort, parce que plusieurs hypothèses admises dans la théorie ne se réalisent pas; quelque bien évasés que soient les canaux fixes, il y a toujours un changement brusque de section qui occasionne une perte de puissance vive; le frottement de l'eau contre les parois des canaux fixes ou des canaux mobiles ne peut être complètement négligé non plus. Enfin, la roue a une certaine largeur, et les relations obtenues pour le filet moyen ne s'appliquent pas rigoureusement à tous. Mais on peut atteindre aisément à un rendement de 0,70 ou même 0,75.

Pour déterminer les dimensions de la roue, soit n le nombre des canaux fixes, et Q le volume d'eau à débiter par seconde, on devra avoir

$$n \cdot e \cdot a' p \sin \alpha = Q \quad \text{ou} \quad n e \cdot a a' \cdot \sin \alpha = Q.$$

Mais au lieu de $n \cdot a a'$, on peut mettre la circonférence de la roue; en appelant ρ son rayon moyen, on doit donc poser, en négligeant l'épaisseur des aubes,

$$e \cdot 2 \pi \rho \cdot \sin \alpha = Q; \quad [12]$$

d'où l'on tirera l'une des inconnues e ou ρ , l'autre étant prise arbitrairement.

En général on prend e égal à la hauteur de la roue. Cette hauteur résulte de la relation [10] qui donne

$$h = H \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha},$$

et par suite

$$h' = H - h = H \left(1 - \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha} \right). \quad [13]$$

Dans l'hypothèse $\beta = \alpha = 25^\circ$, on aurait

$$h' = 0,448 \cdot H.$$

Le rayon moyen de la roue est ordinairement compris entre 5 et 6 fois la largeur e des aubes.

Pour les grandes chutes on serait conduit ainsi à des hauteurs de roues trop grandes, au point de vue pratique. On pourrait, dans ce cas, se donner la hauteur de la roue, et déduire l'angle α de la relation [13]; mais la valeur obtenue ainsi serait inférieure à β et ne saurait par conséquent être admise si l'on a pris pour β le minimum de 25° .

M. Fontaine, et avant lui Burdin, ont résolu cette difficulté en faisant la roue plus large par le bas que par le haut, c'est-à-dire que la section méridienne, au lieu d'être un rectangle, devient un trapèze symétrique, dont la base supérieure est encore e , mais dont la base inférieure a une valeur plus grande e' . La relation qui exprime l'égalité de dépense par un canal fixe et par un canal mobile devient alors

$$e v \sin \alpha = e' w' \cdot \sin \beta, \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{v} = \frac{e}{e'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad [14]$$

Par suite, les équations [10], [11] et [13] de-

viennent respectivement

$$\frac{H}{h} = \frac{e}{e'} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \beta}, \quad [15]$$

$$\frac{\bar{C}_u}{\bar{C}_m} = \left(1 - \frac{e}{e'} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \frac{1}{2} \beta \right) = 1 - \frac{H}{h} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \beta}{\cos^2 \alpha} \quad [13]$$

$$h' = H \left(1 - \frac{e}{e'} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha} \right). \quad [17]$$

Pour le maximum d'effet utile, il faut toujours que α et β soient le plus petits possible; il convient donc de prendre $\alpha = \beta = 25^\circ$. Si l'on se donne la hauteur h' de la roue, et par suite la distance h de son plan supérieur au niveau d'amont, la relation [15] donne

$$e' = e \cdot \frac{h}{H} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin \beta} = e \cdot \frac{2h \cos \alpha}{H}, \quad [18]$$

et pour $\alpha = 25^\circ$,

$$e' = 1,8 \frac{h}{H} \cdot e.$$

Si, par exemple, on prend

$$h' = \frac{1}{5} H,$$

$$h = \frac{4}{5} H,$$

d'où

on trouvera

$$e' = 1,8 \cdot \frac{4}{5} e = 1,44 e.$$

Mais le principal perfectionnement apporté aux roues d'Euler par M. Fontaine consiste dans le mode particulier de vannage qui règle le volume d'eau débité.

Chacun des canaux distributeurs, tel que $aba'b'$ (fig. 3), est muni d'une petite vanne V , à l'aide de

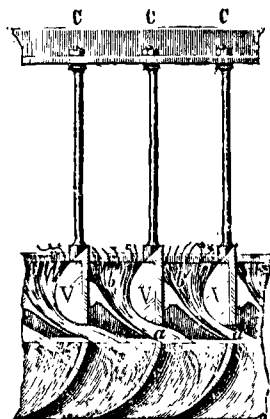


Fig. 3.

laquelle on peut ouvrir ou rétrécir à volonté la section du canal. La surface de cette vanne, plane du côté de la courbe directrice ab , présente du côté de la directrice suivante $a'b'$ une surface courbe, qui forme avec la paroi $a'b'$ un orifice évasé, afin de diminuer ou d'annuler même la contraction de la veine. Toutes les vannes analogues sont manœuvrées à l'aide d'une couronne métallique CCC dans laquelle toutes les tiges sont assemblées, et que l'on peut élever ou abaisser en faisant mouvoir simultanément trois vis verticales.

La figure 4 représente la disposition générale de

la turbine. Un poteau vertical fixe AA supporte à son extrémité supérieure une portion de sphère creuse en fonte, formant elle-même l'extrémité d'un arbre creux, en fonte aussi, qui enveloppe le po-

On voit que la turbine est en quelque sorte suspendue au sommet du poteau fixe AA. Et comme le point de suspension est au-dessus du bief d'amont, le pivot peut être visité en tous temps, lubrifié et réparé au besoin, avec la plus grande facilité.

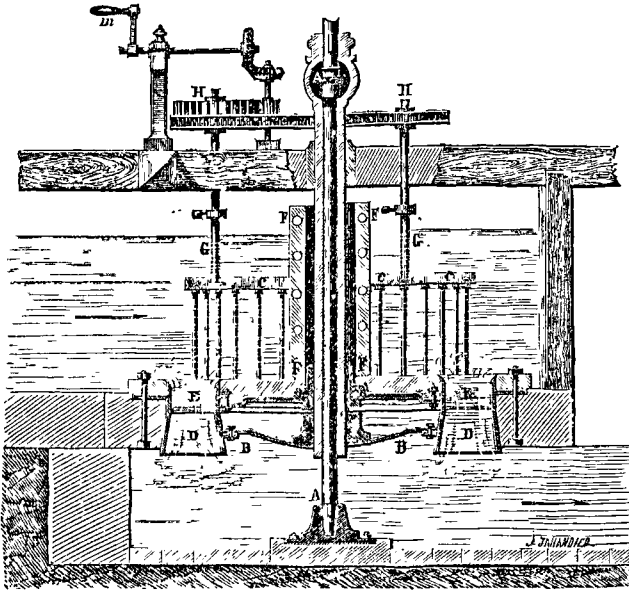


Fig. 4.

teau et peut tourner librement autour de lui. A la partie inférieure de cet arbre creux est adaptée une large calotte en fonte BB qui porte le récepteur DD, dont le plan inférieur est au niveau du bief d'aval, ou plonge d'une très-petite quantité dans ce bief. La surface latérale externe de la roue est enveloppée par une paroi fixe qui ne laisse entre la roue et elle qu'un jeu indispensable de 1 à 2 millimètres. Les canaux distributeurs EE sont établis au-dessus, et emboîtés dans une sorte de tourteau en fonte, qui remplit, sauf le jeu nécessaire, tout l'intervalle compris entre ces canaux et l'arbre tournant; un cylindre vertical creux FF, établi sur ce tourteau, enveloppe l'arbre, et s'élevant au-dessus du niveau du bief d'amont, empêche l'eau de s'introduire entre le tourteau et l'arbre. Les tiges de vannes correspondantes aux canaux distributeurs sont assemblées dans une couronne métallique CCC; cette couronne est portée par trois tiges verticales G, G, qui se terminent par des vis dont les écrous sont assujettis à tourner sur place, au-dessus d'un plancher placé au-dessus du bief d'amont. Ces écrous sont solidaires avec autant de roues dentées HH, sur lesquelles passe une chaîne sans fin à la Vau canson; l'une des roues peut être mise en mouvement par une manivelle m, à l'aide d'un système d'engrenage suffisamment indiqué sur la figure; les trois roues étant obligées de tourner en même temps dans le même sens, les trois écrous obligent les trois tiges à monter et à descendre simultanément de la même quantité. — A la partie supérieure de la portion de sphère creuse reposant sur le poteau fixe AA, est adapté un arbre vertical plein LL, qui tourne en même temps que l'arbre creux, et sur lequel sont les transmissions de mouvement.

de la puissance de la chute. Si la vitesse de la roue est moindre, le rendement diminue encore par cette nouvelle cause, puisqu'on s'éloigne ainsi de la vitesse qui correspond au maximum d'effet utile.

TURBINE FOURNEYRON. Nous décrirons d'abord la roue; nous en donnerons ensuite la théorie, et nous ferons connaître les résultats de l'expérience. L'axe AA' (fig. 1) de la roue repose en A par un pivot sur le fond du bief inférieur; il s'élève au-dessus des eaux d'amont et porte, vers sa partie supérieure, une roue dentée qui transmet le mouvement aux autres organes. La roue motrice BBB, se compose de deux couronnes horizontales, dans lesquelles sont emboîtées des aubes verticales en tôle, dont la forme est indiquée en ab sur le plan. Ces couronnes sont montées sur l'axe à l'aide d'une sorte de calotte en fonte ou de cul-de-lampe CC. L'axe est enveloppé d'un cylindre creux, en fonte, DDDD, qui s'élève au-dessus du niveau d'amont, et est suspendu par sa partie supérieure. On lui donne le nom de *tuyau-porte-fond*. Il porte en effet à sa partie inférieure, un fond circulaire EE, placé au niveau de la couronne inférieure de la roue et portant à son tour des aubes courbes en tôle, de même hauteur que celles de la roue, mais dirigées en sens contraire, comme on le voit en mn sur le plan; on les nomme *aubes directrices*. Elles sont en même nombre que les aubes de la roue; mais la moitié seulement d'entre elles se prolonge jusqu'à l'axe; les autres ne vont que jusqu'au milieu environ de l'intervalle compris entre l'axe et la roue. Une vanne cylindrique en tôle FGFG, que l'on manœuvre à l'aide des tiges t, t, forme la paroi extérieure d'un espace annulaire dans lequel

l'eau du bief d'amont est admise. Cette vanne a le diamètre intérieur des couronnes. Elle glisse, bien entendu, sur une paroi cylindrique fixe. Quand elle est baissée, l'eau d'amont se trouve contenue

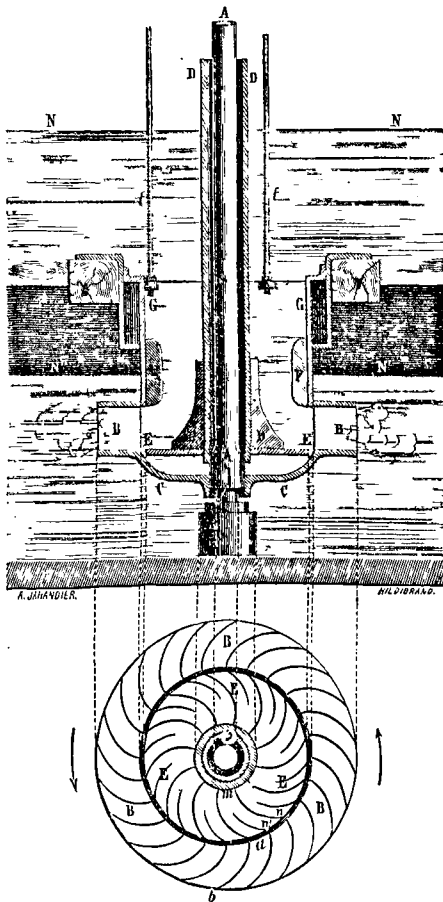


Fig. 1.

dans un vase annulaire, dont EE est le fond. Quand on lève la vanne, d'une quantité égale à la hauteur de la roue, l'eau de ce vase s'échappe en suivant les canaux formés par les aubes directrices, rencontre les aubes de la roue, les force à reculer, dans le sens indiqué par la flèche, s'engage, en vertu de la vitesse relative, dans les canaux formés par les aubes mobiles, et sort par la circonférence de la roue, présentant une série d'orifices rectangulaires, généralement noyés dans les eaux d'aval. La vanne est garnie à l'intérieur d'un bourrelet FF qui a pour objet d'éviter les orifices par lesquels l'eau entre dans la roue (Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES).

Désignons par v la vitesse avec laquelle l'eau arrive à la circonférence interne de la roue, par h la distance du niveau supérieur NN au plan de la couronne supérieure, par P_0 la pression atmosphérique par mètre carré, par P la pression du liquide au niveau de la couronne supérieure, par Π le poids du mètre cube d'eau; on aura, en appli-

quant le THÉORÈME DE D. BERNOULLI (Voy. ce mot),

$$v^2 = 2g \left(h + \frac{P_0 - P}{\Pi} \right). \quad [1]$$

Soit (fig. 2) $aV = v$ cette vitesse; prenons sur la

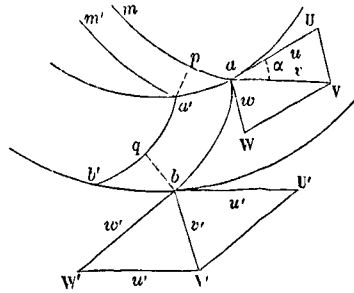


Fig. 2.

tangente à la circonférence interne de la couronne une longueur $aU = u$ égale à la vitesse de cette circonférence. Construisons le parallélogramme $aUVW$ ayant pour diagonale aV et pour l'un de ses côtés aU ; le côté $aW = w$ représentera la vitesse relative, avec laquelle l'eau entre dans la roue. Il faut, pour que l'eau pénètre sans choc, que le premier élément de l'aube ab ait la direction de cette vitesse. Si l'on désigne par α l'angle des vitesses u et v , c'est-à-dire l'angle que le dernier élément de la courbe directrice ma fait avec la circonférence interne de la couronne, on aura

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha. \quad [2]$$

Considérons maintenant, pendant un temps très-court θ , le mouvement relatif de l'eau contenue dans le canal formé par deux aubes consécutives. On peut ramener ce mouvement relatif à un mouvement absolu en introduisant au nombre des forces qui sollicitent le fluide une force fictive qui est ici la force centrifuge (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS). Supposons l'eau contenue dans le canal décomposée par des plans normaux aux parois, en portions très-petites égales au volume d'eau qui s'écoule par le canal dans le temps θ , et soit m la masse d'une de ces portions. Si x est sa distance à l'axe, la force centrifuge qui agit sur cette masse sera exprimée par $m\omega^2 x$, ω représentant la vitesse angulaire de la roue; le travail élémentaire de cette force sera $m\omega^2 x dx$, et la somme de tous les travaux analogues, depuis le point a situé à la distance r de l'axe jusqu'au point b situé à la distance r' , aura pour valeur

$$\int_r^{r'} m\omega^2 x dx$$

ou

$$\frac{1}{2} m\omega^2 (r'^2 - r^2).$$

Mais si u' désigne la vitesse à la circonférence externe de la roue, on a

$$u = \omega r \quad \text{et} \quad u' = \omega r';$$

l'expression du travail des forces centrifuges considérées a donc pour expression

$$\frac{1}{2} m (u'^2 - u^2).$$

Si A désigne l'orifice du canal du côté intérieur, le travail de la pression P sera $PA \times \omega \theta$. Or $A\omega \theta$

est le volume d'eau entré dans la roue dans le temps θ , c'est-à-dire

$$\frac{mg}{\Pi};$$

le travail de la pression \mathcal{Q} est donc

$$mg \frac{\mathcal{Q}}{\Pi}.$$

Soit h' la distance de la couronne supérieure au-dessous du niveau d'aval $N'N'$; l'eau étant supposée sortir de la roue avec une très-faible vitesse, on peut, au point de sortie, évaluer les pressions d'après les règles de l'hydrostatique; la pression en ce point est donc

$$\mathcal{P}_0 + \Pi h';$$

et l'on trouvera, comme ci-dessus, que le travail négatif de cette pression est exprimé par

$$-mg \left(h' + \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} \right).$$

L'accroissement de la puissance vive du liquide considéré se réduit d'ailleurs à

$$\frac{1}{2} m (w'^2 - w^2),$$

en appelant w' la vitesse relative de sortie, attendu que, à cause de la permanence du mouvement, la puissance vive reste la même à l'intérieur du canal, et que par conséquent l'accroissement de puissance vive est la différence entre celle de la masse m qui sort et celle de la masse m qui entre. En appliquant le théorème de l'effet du travail, on aura donc

$$\frac{1}{2} m (w'^2 - w^2) = \frac{1}{2} m (u'^2 - u^2) + mg \left(\frac{\mathcal{Q}}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} - h' \right)$$

attendu qu'on néglige les frottements, et que le travail de la pesanteur est nul puisque l'eau se meut dans un canal horizontal. Cette relation peut s'écrire

$$w'^2 = w^2 + u'^2 - u^2 + 2g \left(\frac{\mathcal{Q} - \mathcal{P}_0}{\Pi} - h' \right). \quad [3]$$

Prenons (fig. 2) $bU' = u'$ sur la tangente à la circonférence externe de la couronne, et $bW' = w'$ sur le prolongement du dernier élément de l'aube; construisons sur ces deux droites le parallélogramme $bU'V'W'$; la diagonale bV' de ce parallélogramme représentera la vitesse absolue v' de l'eau à la sortie de la roue. Si β désigne l'angle $b'W'V'$ c'est-à-dire l'angle que fait le dernier élément de l'aube avec la circonférence externe, on aura dans le triangle $b'W'V'$

$$v'^2 = w'^2 + u'^2 - 2u'w' \cos \beta. \quad [4]$$

Pour obtenir de la roue le maximum d'effet utile, il faut faire en sorte que la vitesse v' soit la plus petite possible. On la rendrait nulle en faisant $\beta = 0$ et $w' = u'$.

On ne peut remplir la condition $\beta = 0$; on ne peut, dans la pratique, donner à cet angle une valeur inférieure à 25° ; néanmoins on conserve la seconde condition et l'on suppose la vitesse relative de sortie w' égale à la vitesse à la circonférence externe de la roue.

Si l'on ajoute membre à membre les équations [1], [2] et [3], et qu'on y fasse

$$w' = u',$$

on obtient après réductions

$$0 = 2g (h - h') - 2u \cos \alpha,$$

d'où

$$u = \frac{gH}{v \cos \alpha}, \quad [5]$$

H désignant $h - h'$ ou la différence de niveau des deux biefs.

Il faut maintenant exprimer que la quantité d'eau qui entre dans la roue dans l'unité de temps est égale à celle qui en sort. Désignons par λ la hauteur de la roue. Considérons le canal formé par deux courbes directrices consécutives ma et $m'a'$ (fig. 2); abaïssons de a' la normale $a'p$ sur ma ; la section droite du canal fixe sera sensiblement

$$\lambda \cdot a'p \text{ ou } \lambda \cdot aa' \cdot \sin \alpha;$$

le volume d'eau écoulé dans l'unité de temps par cette section sera donc

$$\lambda \cdot aa' \cdot \sin \alpha \cdot v.$$

Abaïssons de même bq normalement à l'aube suivante $a'b'$; la section droite du canal mobile sera sensiblement

$$\lambda \cdot bq \text{ ou } \lambda \cdot bb' \cdot \sin \beta;$$

le volume d'eau écoulé dans l'unité de temps par cette section sera donc

$$\lambda \cdot bb' \cdot \sin \beta \cdot w \text{ ou } \lambda \cdot bb' \sin \beta \cdot u'.$$

On devra donc avoir

$$aa' \cdot \sin \alpha \cdot v = bb' \cdot \sin \beta \cdot u'.$$

Les circonférences externe et interne de la roue étant divisées en un même nombre de parties égales par les aubes, on a

$$aa' : bb' = r : r',$$

ou

$$bb' = aa' \cdot \frac{r'}{r}.$$

On a aussi

$$u' : u = r' : r,$$

d'où

$$u' = u \cdot \frac{r'}{r};$$

substituant ces valeurs et multipliant par r^2 , on obtient

$$r^2 \sin \alpha \cdot v = r'^2 \sin \beta \cdot u. \quad [6]$$

On tire des équations [5] et [6]

$$v^2 = 2gH \cdot \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad [7]$$

et

$$u^2 = 2hH \cdot \frac{r^2}{r'^2} \cdot \frac{\tan \alpha}{2 \sin \beta} \quad [8]$$

(connaissant u , on aurait

$$w = \frac{u}{r}.)$$

La valeur de v étant ainsi obtenue, l'équation [1] fera connaître la pression \mathcal{Q} .

Si dans l'équation [4] on introduit l'hypothèse $w' = u'$, on trouve

$$v'^2 = 2u^2 (1 - \cos \beta) = 2 \cdot \frac{r'^2}{r^2} u^2 (1 - \cos \beta)$$

$$= 2gH \cdot \tan \alpha \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}$$

ou

$$v'^2 = 2gH \cdot \tan \alpha \cdot \tan \frac{1}{2} \beta. \quad [9]$$

De cette valeur on déduit aisément le rendement de la roue. En effet, si P désigne le poids de l'eau qui s'écoule dans l'unité de temps, le travail perdu par la vitesse que l'eau conserve à sa sortie est

$$P \cdot \frac{v'^2}{2g};$$

le travail transmis à la roue, en négligeant les frottements, est donc

$$C_u = PH' - P \cdot \frac{v^2}{2g}$$

et comme on a

$$C_m = PH,$$

le rendement est exprimé par

$$\frac{C_u}{C_m} = 1 - \frac{v^2}{2gH} = 1 - \tan \alpha \tan \frac{1}{2} \beta. \quad [10]$$

On voit que ce rendement est d'autant plus considérable que les angles α et β sont plus petits. En les supposant tous deux réduits à 25° on trouverait pour la valeur numérique du rendement 0,8966. A cause du frottement, des pertes d'eau inévitables, et de quelques autres circonstances négligées, on ne peut jamais atteindre à une valeur aussi élevée.

Nous avons supposé jusqu'ici que les dimensions de la roue étaient connues. S'il s'agit au contraire de les déterminer de manière à débiter un volume déterminé Q d'eau par unité de temps, on pourra procéder de la manière suivante.

Il faudra d'abord exprimer que la quantité d'eau introduite sur la roue dans l'unité de temps est égale à la dépense donnée Q . En appelant n le nombre des aubes directrices, on doit donc avoir

$$n \cdot aa' \lambda \cdot \sin \alpha \cdot v = Q.$$

Or

$$n \cdot aa' = 2\pi r$$

en négligeant l'épaisseur des aubes; il vient donc

$$2\pi r \lambda \sin \alpha v = Q. \quad [11]$$

On se donne ordinairement l'angle UaV (fig. 2) des deux vitesses u et v ; soit θ cet angle, que l'on prend entre 90° et 100° ; le triangle UaV donnera

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}. \quad [12]$$

Cette relation combinée avec la relation [6] donne

$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\sin \beta \sin(\theta - \alpha)}. \quad [13]$$

Le rapport $\frac{r'}{r}$ est ordinairement compris entre 1,25 et 1,50.

Il faut en outre que le diamètre intérieur de la roue soit assez grand pour que les filets puissent passer, sans variation trop brusque, de la direction verticale, qu'ils suivent en descendant du bief d'amont, à la direction horizontale qu'ils doivent suivre en entrant dans la roue. M. Fourneyron conseille de donner à la roue un diamètre intérieur tel que l'aire du cercle intérieur soit au moins égale à 4 fois la somme des aires des sections des canaux à l'entrée de l'eau sur la roue; condition à laquelle on satisfera en écrivant

$$\pi r'^2 = 4k \cdot 2\pi r \cdot \lambda \sin \alpha,$$

k représentant un coefficient plus grand que l'unité; d'où l'on tire

$$r = 8k \sin \alpha \lambda. \quad [14]$$

Le rapport $\frac{r'}{r}$ étant déterminé par la relation [13],

la valeur [7] de v sera connue; on pourra donc de la condition [11] déduire le produit $r\lambda$; et, à l'aide de la relation [14], déterminer λ , puis r ; après quoi l'équation [13] donnera r' . En général le diamètre extérieur de la turbine n'excède pas $1^m,20$; et sa hauteur ne dépasse guère $0^m,20$.

Il résulte des expériences faites par M. Morin sur diverses turbines du système Fourneyron que ces

récepteurs donnent un rendement de 0,70 à 0,75; que ces roues marchent aussi bien noyées que placées au niveau des eaux d'aval; qu'elles se prêtent à toutes les chutes et à tous les débits; et qu'elles peuvent marcher à des vitesses assez éloignées, en plus ou en moins, de celle qui correspond au maximum d'effet utile, sans que le rendement soit notablement diminué.

Mais pour que la roue produise tout son effet, il est nécessaire que la vanne soit entièrement levée, quand elle n'est levée qu'en partie le rendement diminue toujours d'une manière sensible, ce qui tient à deux causes. En premier lieu l'eau s'introduisant dans la roue par un orifice moins élevé que la distance des deux couronnes, éprouve aussitôt un CHANGEMENT BRUSQUE DE SECTION (Voy. ce mot) qui occasionne une perte de puissance vive. En second lieu, la hauteur de chute restant la même, les vitesses, et par suite le frottement de l'eau contre les parois des canaux qu'elle traverse, reste à peu près le même aussi; il prend donc d'autant plus d'importance que la puissance de la chute est moindre, ou que le débit est plus faible. M. Fourneyron a essayé de remédier à cet inconvénient en divisant sa roue, par des cloisons horizontales, en plusieurs compartiments, de manière à faire toujours descendre la vanne jusqu'à l'une de ces cloisons; mais cet expédient augmente les frottements et ne remédie pas complètement à l'inconvénient signalé. M. Callon a imaginé, dans le même but, de remplacer la vanne cylindrique par une série de petites vanes placées en regard des orifices d'entrée de l'eau sur la roue; et de régler par conséquent la dépense en fermant complètement un certain nombre de ces vanes. Mais, outre une plus grande complication, ce système a un inconvénient particulier; lorsque l'un des canaux mobiles s'est rempli en passant devant une vanne ouverte, et qu'il vient à passer brusquement devant une vanne fermée, l'eau qu'il contenait ne peut continuer son mouvement sans faire momentanément un vide derrière elle; en d'autres termes elle éprouve instantanément une pression négative, par rapport au sens de son mouvement; il en résulte une perte de puissance vive.

Enfin M. Girard a imaginé une combinaison qui fait disparaître l'inconvénient dont nous venons de parler (Voy. ci-après l'art. TURBINE HYDRO-PNEUMATIQUE).

L'arbre tournant, au lieu de reposer sur un support fixe, s'appuie quelquefois sur un levier du second genre, qui permet d'élever ou d'abaisser l'arbre de manière à mettre les orifices internes de la roue parfaitement en regard des orifices correspondants formés par les aubes directrices.

Lorsque la roue doit marcher sous une grande hauteur de chute, il deviendrait fort incommode de faire monter l'arbre, le tuyau-porte-fond, et les tiges de manœuvre de la vanne au-dessus du niveau d'amont. On ferme alors le réservoir cylindrique à sa partie supérieure par une sorte de couvercle en fonte que le tuyau-porte-fond et les tiges traversent dans des boîtes à étoupes. On peut alors établir les transmissions de mouvement et les roues servant à la manœuvre des tiges de vanne, à une médiocre hauteur au-dessus des eaux d'aval. Les eaux d'amont sont amenées dans le réservoir cylindrique

par un tuyau latéral. Les autres dispositions de la turbine restent d'ailleurs les mêmes.

(Voy. le *Cours d'Hydraulique* de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, etc., etc.)

TURBINE HYDROPNEUMATIQUE. Ce récepteur n'est autre qu'une TURBINE FOURNEYRON (Voy. ce mot), enveloppée d'une cloche qui descend à quelques centimètres au-dessous de la roue, et que traversent le tuyau-porte-fond, l'arbre et les tiges de manœuvre de vanne, au moyen d'orifices garnis de boîtes à étoupes. Dans l'intervalle compris entre la turbine et la cloche, une pompe, mise en mouvement par la roue elle-même, refoule constamment de l'air. L'air injecté chasse peu à peu l'eau de la cloche; l'eau qui s'échappe du réservoir cylindrique coule alors dans l'air comprimé; et, quelle que soit la levée de la vanne, elle ne mouille plus la couronne supérieure, qui ne sert plus alors qu'à emboîter les aubes; aussi l'évide-t-on de manière à mettre l'eau plus directement en communication avec l'atmosphère comprimée qui l'entoure. L'air constamment injecté pendant le mouvement de la turbine, s'échappe par le dessous de la cloche et retourne dans l'atmosphère en traversant les eaux d'aval. Cette disposition ingénieuse, due à M. Girard, fait disparaître l'inconvénient signalé à propos des turbines Fourneyron, et qui consiste en ce que le rendement diminue d'une manière notable quand la vanne n'est levée qu'en partie. Dans la turbine hydropneumatique il n'en est plus de même; il n'y a plus de changement brusque de section par suite d'une levée incomplète de la vanne; et quelle que soit cette levée, le rendement reste le même.

La théorie de cette roue est la même que celle des turbines Fourneyron. On a toujours

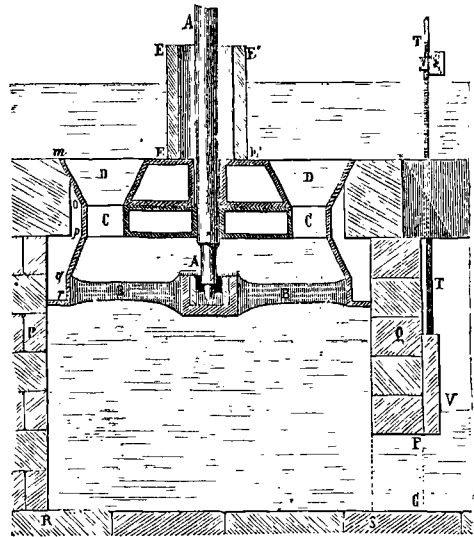
$$Q' = Q_0 + \Pi h',$$

pourvu que dans ce cas on appelle h' la distance comprise entre le bas de la vanne et le niveau du bief d'aval; c'est en effet cette distance qui mesure l'excès de la pression de l'air contenu dans la cloche sur la pression atmosphérique. On devra aussi appeler h la hauteur du niveau dans le bief d'amont au-dessus du plan inférieur de la vanne. De cette manière $h - h'$ représentera toujours la hauteur de chute, et les formules établies pour la turbine Fourneyron resteront identiquement les mêmes pour la turbine hydropneumatique.

Dans ce système on ne craint pas de donner à la roue une hauteur un peu plus grande que dans les turbines Fourneyron, et de les faire marcher un peu moins vite. L'expérience indique pour ces roues un rendement de 0,75 au moins, indépendant de la levée de vanne.

TURBINE KOECKLIN (Voy. TURBINES). Cette turbine, dont l'idée première appartient à un mécanicien du nom de *Jonal*, a été perfectionnée dans les ateliers de MM. Kœcklin. Elle a la plus grande analogie avec la TURBINE FONTAINE (Voy. ce mot) quant à la disposition des canaux distributeurs et des aubes mobiles; si ce n'est que la surface latérale externe de la roue est supprimée et remplacée par une paroi cylindrique fixe. Mais la turbine Kœcklin se distingue de la turbine Fontaine par deux caractères essentiels: 1° dans la turbine

Fontaine le plan inférieur de la roue est situé au niveau du bief d'aval; la turbine Kœcklin est établie entre les deux biefs, et généralement plus près du niveau d'amont que du niveau d'aval. Il en résulte que son arbre tournant est plus court, et que le pivot peut être facilement visité; il suffit pour cela de le mettre à sec en retenant les eaux d'amont; 2° dans la turbine Fontaine la dépense est réglée par un ensemble de petites vannes convexes, dont chacune correspond à un canal distributeur. La dépense de la roue Kœcklin se règle par une vanne unique. L'eau qui a agi sur la roue, tombe dans un canal vertical qui communique avec le bief inférieur par un orifice constamment noyé; c'est en ouvrant ou en rétrécissant cet orifice à l'aide d'une vanne verticale, que l'on règle le débit. La figure montre cette disposition. L'arbre AA repose sur un



support fixe, relié aux parois du canal vertical par un certain nombre de bras en fonte BB. La roue CC est liée à l'arbre par des tourteaux en fonte, dont on ne voit que la coupe méridienne. Des canaux distributeurs évasés DD sont établis au-dessus. Les aubes fixes font corps d'une part avec une surface de révolution dont *mnopqr* est la génératrice et qui forme une paroi fixe, de l'autre avec des tourteaux également fixes qui enveloppent l'arbre en ne lui laissant que le jeu nécessaire. Un cylindre vertical creux EE, établi sur le tourteau supérieur, entoure l'arbre, et s'élevant au-dessus du niveau d'amont empêche l'eau de s'introduire entre l'arbre et les tourteaux fixes. La vanne V mise en mouvement par la tige TT, sert ou à ouvrir ou à fermer l'orifice FG, placé au-dessous du niveau d'aval, et établissant la communication entre ce bief et le canal vertical en maçonnerie PQRS où l'eau se rend en sortant de la roue.

Il y a d'ailleurs une grande ressemblance entre la théorie de cette roue et celle de la turbine Fontaine. Si l'on conserve les mêmes notations (Voy. TURBINE FONTAINE), que l'on nomme en outre h'' la distance verticale entre le plan inférieur de la roue et le niveau du bief d'aval, v'' la vitesse de sortie

de l'eau par l'orifice FG, \mathcal{Q} la pression par mètre dans le plan supérieur de la roue, \mathcal{Q}' la pression dans le plan inférieur, et \mathcal{Q}_0 la pression atmosphérique; on aura d'abord, comme dans le cas de la turbine d'Euler

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha. \quad [1]$$

et la direction de la vitesse relative w devra être celle du premier élément de l'aube mobile. Si l'on examine ensuite ce qui se passe pendant que l'eau parcourt les canaux de la roue, on reconnaît qu'on ne peut plus négliger les pressions dans le plan supérieur et dans le plan inférieur. Mais si l'on néglige le frottement de l'eau contre les aubes, on aura, en appliquant le THÉORÈME DE D. BERNOULLI (Voy. ce mot),

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + h' + \frac{\mathcal{Q}}{11} - \frac{\mathcal{Q}'}{11}. \quad [2]$$

On aura ensuite, en considérant l'eau à sa sortie,

$$v^2 = w^2 + u^2 - 2uw \cos \beta \quad [3]$$

et l'on sera conduit, comme dans le cas de la turbine Fontaine, à prendre, pour la condition relative au maximum d'effet utile,

$$w' = u, \quad [4]$$

d'où

$$v^2 = 2u^2 (1 - \cos \beta). \quad [5]$$

La vitesse de l'eau à sa sortie de la roue étant très-faible, il en est de même dans tout le canal vertical; on peut donc y évaluer les pressions comme dans l'état hydrostatique, et écrire

$$\frac{\mathcal{Q}'}{11} = \frac{\mathcal{Q}_0}{11} - h''. \quad [6]$$

En outre, la vitesse v avec laquelle l'eau arrive sur la roue est donnée par la relation

$$v^2 = 2g \left(h + \frac{\mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}}{11} \right), \quad [7]$$

qui n'est autre chose que l'application du théorème de Bernoulli.

Si l'on additionne membre à membre les relations [1], [2] et [7], après avoir multiplié la seconde par $2g$, en ayant égard aux relations [4] et [6], on obtient, après réductions,

$$0 = 2g (h + h' + h'') - 2uv \cos \alpha, \quad [8]$$

d'où

$$u = \frac{2gH}{v \cos \alpha}. \quad [8]$$

Mais la condition d'égalité entre la dépense par les canaux fixes et par les canaux mobiles donne

$$v \sin \alpha = w' \sin \beta = u \sin \beta. \quad [9]$$

Si l'on met dans [8] pour v sa valeur tirée de [9], on obtient

$$u^2 = \frac{gH}{\sin \beta \cos \alpha} \quad [10]$$

et par suite

$$v^2 = 2gH \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha}. \quad [11]$$

La vitesse v étant connue, la relation [7] donnera la pression \mathcal{Q} ; la pression \mathcal{Q}' est d'ailleurs donnée par l'équation [6].

La vitesse v'' conservée par l'eau à son arrivée dans le bief d'aval est donnée par la relation (Voy. ÉCOULEMENT DES FLUIDES)

$$v''^2 = v^2 + 2g \left(h'' + \frac{\mathcal{Q}' - \mathcal{Q}_0}{11} \right);$$

mais, en vertu de l'équation [6], la quantité entre parenthèses est nulle, et on en conclut

$$v'' = v.$$

Le rendement de la roue a donc pour valeur

$$\frac{\mathcal{C}_n}{\mathcal{C}_m} = 1 - \frac{v^2}{2gH} = 1 - \frac{v'^2}{2gH} = 1 - \frac{2gH(1 - \cos \beta)}{2gH \sin \beta \cos \alpha} \quad [12]$$

Enfin pour déterminer le rayon moyen ρ de la roue, e représentant la largeur des aubes dans le sens du rayon, on a, comme dans la turbine d'Euler,

$$2\rho e \sin \alpha \cdot v = \mathcal{Q}$$

et si l'on prend, comme on le fait le plus souvent,

$$e = h',$$

on en tire

$$\rho = \frac{\mathcal{Q}}{2\pi h' \sin \alpha \cdot v}. \quad [13]$$

On a ainsi déterminé toutes les inconnues du problème.

Pour que la pression \mathcal{Q}' soit positive, il faut qu'on ait, d'après l'équation [6],

$$\frac{\mathcal{Q}_0}{11} - h'' > 0,$$

d'où

$$h'' < \frac{\mathcal{Q}_0}{11} \quad \text{ou} \quad h'' < 10^m, 33.$$

En raison des fuites d'eau, et des diverses autres circonstances qui ont été négligées, il est prudent de donner à h'' une valeur beaucoup moindre, et de ne pas la prendre supérieure à 6 ou 7 mètres.

Il résulte des expériences de M. Morin sur des turbines du système Kœcklin, que ces roues peuvent rendre jusqu'à 0,72. — L'abaissement de la vanne V produit toujours une diminution notable du rendement, fait encore mal expliqué. Si la dépense diminue d'une façon considérable pendant un certain temps, on garnit les intervalles des aubes par des coins obturateurs qui diminuent la section des canaux mobiles. Lorsqu'une moitié des canaux est ainsi garnie de ses obturateurs, le rendement est encore de 0,70; et il ne descend qu'à 0,63 lorsque tous les obturateurs sont placés. Lorsque la dépense augmente de nouveau, on enlève facilement les obturateurs; pour les enlever comme pour les poser, il suffit de mettre la roue à sec en retenant les eaux d'amont et laissant couler les eaux d'aval.

TURBINES, roues hydrauliques à axe vertical, tournant en général avec une grande vitesse. Le principe des turbines est analogue à celui des Roues à RÉACTION (Voy. ce mot), dont il est fait mention dans tous les traités de physique. Le premier récepteur de ce nom a été imaginé par Euler en 1754, et Borda en a donné la théorie en 1767; cette idée, reprise en 1824 par l'ingénieur Burdin, puis abandonnée de nouveau, n'a reçu son application définitive que depuis un petit nombre d'années, par suite des perfectionnements apportés à la roue d'Euler par M. Fontaine. Dans l'intervalle, M. Fourneyron, avait introduit dans l'industrie la turbine qui porte son nom, et dont la disposition diffère notablement de celle de M. Fontaine. Peu de temps après apparut la turbine de MM. Kœcklin et Jonval, qui constitue un récepteur distinct des deux précédents, quoique offrant de grandes analogies avec la

turbine d'Euler. Enfin, MM. Girard et Callon ont introduit dans la manière de régler la dépense des turbines Fourneyron un perfectionnement notable qui les a autorisés à donner au récepteur ainsi modifié le nom spécial de *turbine hydropneumatique*. Il y a donc, en ce moment, quatre genres de turbines adoptées dans l'industrie : les TURBINES FONTAINE, les TURBINES KÆCHLIN, les TURBINES FOURNEYRON, et les TURBINES HYDROPNEUMATIQUES.

Dans les deux premières, l'eau descend de la partie supérieure de la roue à la partie inférieure, en restant à la même distance de l'axe, ou en s'en éloignant très-peu; dans les deux dernières l'eau circule horizontalement du centre à la circonférence.

Nous avons cru nécessaire de consacrer un article spécial à chacun de ces récepteurs.

Les turbines offrent sur les autres récepteurs hydrauliques l'avantage de s'approprier à toutes les chutes et à toutes les dépenses d'eau. On en cite qui marchent avec des chutes de 0^m,40 et même 0^m,80; par contre, M. Fourneyron a établi dans la Forêt-Noire une turbine qui est mise en mouvement par une chute de 108^m. Les turbines sont d'un petit diamètre et occupent peu d'espace; elles peuvent néanmoins débiter des volumes d'eau considérables, 4^{m³} par seconde, et même plus. Leur vitesse peut varier entre des limites assez étendues, soit en deçà, soit au delà de celle qui répond au maximum d'effet utile, sans que le rendement s'abaisse d'une manière notable, ce qui est un avantage précieux pour les usines où le travail doit rester le même malgré les variations du débit de la chute. — Mais lorsque la dépense d'eau est très-variable, le rendement peut être notablement amoindri. Un autre inconvénient de ces roues est d'exiger, soit pour la construction, soit pour les réparations, des ouvriers habiles qu'on ne rencontre pas partout, et d'être par conséquent assez dispendieuses. Néanmoins elles peuvent être classées parmi les meilleurs récepteurs hydrauliques dont l'industrie puisse disposer.

(Voyez le *Cours d'Hydraulique* de M. Bélanger à l'École centrale des arts et manufactures, le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bresse à l'École des ponts et chaussées, les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin.)

TYMPAN (architecture), espace compris entre les corniches et la base d'un FRONTON (Voy. ce mot); il est souvent orné de figures allégoriques.

On donne aussi ce nom à l'espace triangulaire compris, dans un portique, entre l'archivolte, l'architrave et le prolongement du piédroit. Il peut également être orné de figures.

TYMPAN. Dans les ponts en pierre on nomme *tympan* l'espace compris entre deux arches consécutives et le bandeau placé à la hauteur de la chaussée. Dans les ponts métalliques en arc, on donne le nom de tympan à l'ensemble des pièces qui, dans chaque ferme, relie l'arc au tablier. Ces pièces sont le plus souvent des montants verticaux. Si *p* désigne le poids par mètre courant réparti sur la ferme, *p'* la surcharge d'épreuve, *d* la distance de deux montants, et *T* la pression que le montant aura à supporter, on aura

$$T = (p + p') d.$$

D'un autre côté, si *P* désigne la surcharge accidentelle qu'un montant est exposé à recevoir, telle

que le poids transmis par une roue de voiture, on aura, en désignant par *T'* la pression correspondante,

$$T' = pd + P.$$

On prendra la plus grande de ces deux valeurs pour la mettre dans la formule qui lie la charge au raccourcissement, savoir :

$$T = E \Omega i$$

(Voy. ALLONGEMENT, COMPRESSION); on se donnera le raccourcissement proportionnel *i* qu'il convient de ne pas dépasser, par exemple, 0^m,001 pour la fonte, et l'on tirera de cette formule la section Ω du montant. On remarquera toutefois que lorsqu'il ne s'agit que d'une surcharge momentanée, il est permis de faire supporter au métal une pression un peu plus forte que lorsqu'il s'agit d'une charge permanente.

Si les pièces qui remplissent le tympan sont des pièces obliques, comme dans la figure 1, on dé-

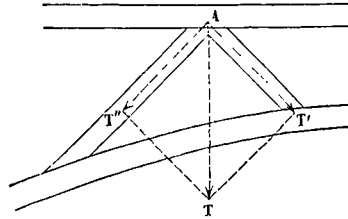


Fig. 1.

composera la charge *T*, calculée comme on vient de le dire, en deux forces *T'* et *T''* dirigées respectivement suivant les deux pièces obliques; ces composantes serviront à déterminer la section transversale de chacune de ces pièces. Si elles sont inclinées à 45°, on aura

$$T' = T'' = \frac{1}{2} T \sqrt{2} = 0,707 T.$$

Les tympan sont quelquefois remplis par des anneaux inscrits entre l'arc et le tablier, comme on le voit, à Paris, au pont du Carrousel. Au lieu d'appliquer ici la théorie de la résistance des PIÈCES COURBES (Voy. ce mot), qui exige des calculs laborieux, on peut regarder chacun des quarts d'anneau AB et AC (fig. 2), comme encastré en B ou

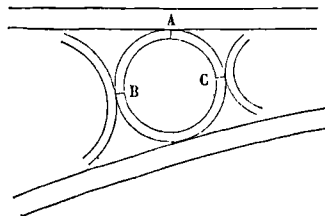


Fig. 2.

en C, et chargé en A d'un poids égal à $\frac{1}{2} T$. Le moment fléchissant maximum a lieu dans ce cas au point B ou C, et a pour valeur

$$\mu = \frac{1}{2} T \cdot r,$$

en appelant *r* le rayon moyen de l'anneau. En met-

tant cette valeur dans la formule

$$R = \frac{v\mu}{I}$$

et se donnant la limite de résistance R et la forme de la section, on en déduira ses dimensions absolues. Si la section est, par exemple, un rectangle ayant pour dimension parallèle à l'axe une longueur *b* et pour dimension perpendiculaire une longueur *h*, on aura

$$R = \frac{6\mu}{b h^2} \text{ ou } R = \frac{6\mu}{k h^3},$$

en nommant *k* le rapport de *b* à *h*; d'où l'on tirera la valeur de *h*.

TYMPAN, ou *roue à tympan*, roue à axe horizontal employée à élever l'eau. Cette roue est fort ancienne, car elle est décrite dans Vitruve; mais dans le commencement du dix-huitième siècle elle a reçu des perfectionnements, ou au moins des modifications, qui en font une machine nouvelle, laquelle a repris faveur dans ces derniers temps. Le tympan des anciens se compose d'un tambour en bois, à fonds pleins, partagé par des cloisons passant par son axe, en un certain nombre de secteurs tels que AOB (fig. 1), limités eux-mêmes du côté de

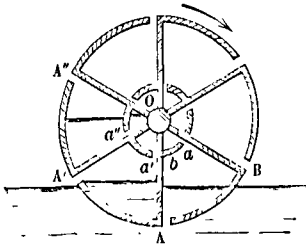


Fig. 1.

l'axe par un second tambour intérieur *ab a'b'...* La surface cylindrique extérieure est percée, près des cloisons, d'orifices longitudinaux A, A', A'',... par lesquels l'eau peut s'introduire dans les secteurs lorsqu'ils plongent dans ce fluide. La surface cylindrique du tambour intérieur porte de même des orifices longitudinaux *a, a', a'', etc.*, placés près de la paroi opposée aux orifices A, A', A', etc., et par lesquels l'eau peut s'introduire dans ce petit tambour. Il dépasse d'un côté la largeur de la roue, et est percé à sa surface d'orifices par lesquels l'eau peut s'écouler dans un canal ménagé pour la recevoir. Le jeu de l'appareil est facile à saisir. La roue étant plongée d'une certaine quantité dans l'eau, est mise en mouvement dans le sens de la flèche, par un moteur quelconque. L'eau s'introduit par l'orifice A dans le secteur correspondant; lorsque, par suite du mouvement de la roue, l'orifice A a émergé et a pris la position A', l'eau introduite dans le secteur se trouve contenue dans le vase formé par les parois verticales, par le cylindre AA' et par la cloison Ab. La roue continuant à tourner, l'eau s'étale de plus en plus sur la cloison Ab; et lorsqu'elle a atteint l'orifice *a'*, s'écoule dans le tambour intérieur, et de là, par les orifices percés à son extrémité, dans le canal qui doit la recevoir. Dans la position du secteur A'OA'' par exemple, on voit que l'eau, entrée précédemment par l'orifice A' s'écoule par l'orifice *a''* dans le tambour inté-

rieur, et de là au dehors. Mais, pendant que l'eau introduite dans un secteur est ainsi élevée, d'autres secteurs ont plongé dans le liquide, et l'eau introduite dans chacun d'eux passe par les mêmes positions. Il en résulte un écoulement continu par l'extrémité du tambour intérieur. — Pour diminuer la perte de travail due à l'introduction de l'eau, on ne donne à la roue qu'une vitesse de 0^m,80 à 1^m à la circonférence. D'après M. Morin, le rendement peut être représenté par la formule

$$0,80 \cdot \frac{h}{h + 0^m,50},$$

dans laquelle *h* représente la hauteur du canal qui reçoit l'eau au-dessus du niveau du bassin inférieur; le terme 0^m,50 qui figure au dénominateur a été introduit pour tenir compte de ce que l'eau doit nécessairement être élevée un peu plus haut (0^m,50) que le canal destiné à la recevoir; et l'expression est affectée du coefficient 0,80 pour tenir compte des frottements et de la vitesse conservée par l'eau à son arrivée dans le canal supérieur.

Le tympan moderne est attribué à Lafaye, qui en a donné la description en 1716, quoiqu'il soit indiqué dans l'*Art du fontainier*, du P. Jean-François, imprimé en 1665. Les cloisons planes y sont remplacées par des cloisons en développantes de cercle, comme le montre la figure 2, ou par des tuyaux

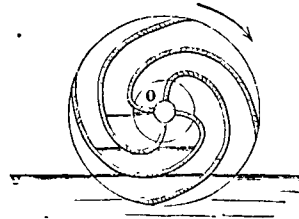


Fig. 2.

courbés également en développantes. Le but de cette disposition paraît être d'obtenir, avec un même nombre de cloisons, plus de compartiments remplis en même temps, et d'équilibrer mieux la roue. Les deux tambours sont supprimés; l'eau s'introduit directement par la circonférence entre deux cloisons consécutives, et s'échappe directement par les ouvertures centrales. On n'est point d'accord sur la valeur du perfectionnement apporté par Lafaye au tympan des anciens. Dans le système ancien comme dans le système moderne le rendement s'élève souvent jusqu'à 0,80 et au delà; mais le tympan moderne paraît élever moins d'eau, toutes choses égales d'ailleurs.

La hauteur à laquelle on peut élever l'eau à l'aide d'une roue à tympan est nécessairement limitée. De plus, ce genre de roue offre un inconvénient sérieux: c'est que si son diamètre a été calculé pour élever l'eau à une certaine hauteur, elle ne peut fonctionner avantageusement que pour cette hauteur, puisqu'il faut toujours que l'eau monte jusqu'à l'orifice central. En sorte que le rendement diminuerait d'une manière notable si on voulait appliquer le tympan à une hauteur moindre que celle pour laquelle il a été établi. — Mais la roue à tympan est avantageuse dans les travaux d'épuisements de longue durée, avec des conditions identiques.

Elle est employée de temps immémorial dans le midi de la France, particulièrement dans la Camargue; elle a été utilisée avec succès, à Paris, il y a un petit nombre d'années, dans les épuisements qui ont précédé la construction de l'écluse de la Monnaie.

Les roues à tympan le plus fréquemment em-

ployées ont 7^m de diamètre et 1^m de largeur dans le sens de l'axe; elles font de 10 à 12 tours par minute. Elles plongent d'un mètre environ; et, avec une force moyenne de 30 chevaux, elles peuvent élever 40^m d'eau par minute à une hauteur de 2^m, ce qui répond à peu près à un rendement moyen de 0,60.

U

UNITÉ DE HAUTEUR, moitié de la hauteur de la marée totale, un jour ou deux après la syzygie, quand le soleil et la lune sont dans l'équateur et dans leurs moyennes distances à la terre (*Voy. MAREES*).

URANOGRAPHIE du grec *οὐρανός*, ciel et *γράφω*, je décris, description du ciel. On donne ce nom à l'astronomie élémentaire, telle qu'elle est enseignée dans les traités de COSMOGRAPHIE (*Voy. ce mot.*)

URANUS, l'une des planètes principales, découverte par W. Herschel en 1781. Sa moyenne distance au soleil est 19,182639, celle de la terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est de 30686^d,82083 ou plus de 84 ans; et son moyen mouvement diurne est de 42^m,2331. Son orbite, dont l'excentricité est 0,0465775, fait un angle de 46'28" avec le plan de l'écliptique. Le diamètre d'Uranus est 4,221, celui de la terre étant 1; il en résulte que son volume est exprimé par 75,253, celui de la terre étant 1. Sa masse est représentée par 17,208, celle de notre globe étant prise pour unité, et sa densité est les 0,228 de celle de la terre; densité 1,14 = à peu près celle de l'ébène.

La rotation d'Uranus autour d'un axe parallèle au plan de son orbite n'est point encore un fait démontré, bien qu'il soit extrêmement probable.

Uranus nous apparaît comme une étoile de 5^e ou de 6^e grandeur. Vu à l'aide d'une forte lunette, son disque présente un léger aplatissement.

Cette planète est accompagnée de 8 SATELLITES (*Voy. ce mot.*)

C'est en étudiant les PERTURBATIONS (*Voy. ce mot*) d'Uranus que M. Le Verrier a été conduit à la découverte de Neptune.

Les astronomes représentent Uranus par le signe ♅.

(Voyez l'Annuaire du bureau des longitudes pour l'année 1865.)

USANCE, nom donné primitivement au terme ordinaire auquel les lettres de change sont tirées d'une place sur une autre (*Voy. LETTRE DE CHANGE*). Les usances étaient très-variables.

Dans divers pays l'usance était de 30 jours, mais on pouvait tirer à une usance, à deux usances, à trois usances, c'est-à-dire à 30 jours, à 60 jours, à 90 jours. Cette dénomination est tombée en désuétude.

On donne aujourd'hui le nom d'usance au délai de 30 jours accordé par l'article 132 du Code de commerce pour le paiement d'une lettre de change.

V

VAIGRAGE, revêtement intérieur de la coque d'un navire. Il est formé de planches nommées *vaigres*. On les dispose généralement bout à bout dans le sens de la longueur du navire, chaque file forme ce qu'on appelle une *virure*. Toutefois, en vue de combattre la tendance qu'ont les navires à s'arquer dans le sens de leur longueur, c'est-à-dire pour empêcher les extrémités de s'abaisser par rapport à la partie moyenne, on substitue au vaigrage horizontal ordinaire un *vaigrage oblique*, dans lequel les vaigres rencontrent les couples de levée sous un angle plus ou moins aigu. Pour se représenter cette disposition, on peut imaginer que, par l'horizontale qui joint les extrémités supérieures du maître-couple, on mène un plan incliné d'un certain angle, 45° par exemple, et rencontrant la quille du côté de l'arrière; puis, qu'on coupe la partie antérieure de la coque par une série de plans équidistants parallèles à celui-là; leur intersection avec la surface interne de la coque représentera la disposition des vaigres sur la moitié antérieure du navire. Une série de plans parallèles, symétriques

des premiers par rapport au latitudinal, déterminera de même la disposition des vaigres sur la moitié postérieure du bâtiment. On comprend que les extrémités de la quille se trouvant ainsi liées à la partie supérieure et moyenne du navire par des pièces sollicitées dans le sens de leur longueur, c'est-à-dire dans le sens de leur plus grande résistance, la tendance à l'arcure se trouve plus efficacement combattue. (*Voy. les Traités spéciaux de CONSTRUCTION NAVALE.*)

VALETS, ou VARLETS, supports oscillants auxquels s'articulent des chaînes ou de longues bielles destinées à transmettre à distance un mouvement rectiligne alternatif de peu d'amplitude. Ces supports peuvent être de simples bras AB, A'B', A''B'' (fig. 1); c'est ce qui arrive le plus souvent quand le mouvement doit être transmis en ligne droite, ou sous un angle très-faible, sur une grande étendue. Si la direction doit changer, on emploie des leviers coudés AOB, A'O'B' (fig. 2). Ce genre de transmission est usité dans les mines, pour transmettre à des tiges de pompes le mouvement d'un moteur

placé à une grande distance. Il était employé dans la fameuse *machine de Marly*, construite vers 1675

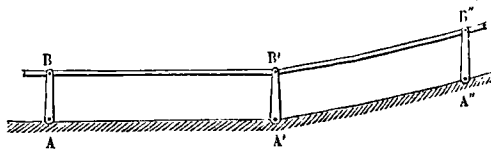


Fig. 1.

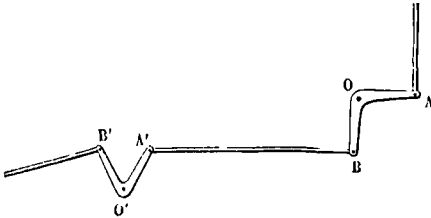


Fig. 2.

pour élever les eaux de la Seine jusqu'à la hauteur de l'aqueduc.

VALEUR MÉDIANE DE L'ERREUR ou de l'écart, celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. C'est celle que plusieurs auteurs appellent *erreur probable* ou *erreur à craindre* (Voy. MOYENNES).

VANNE, porte à coulisses, mobile de haut en bas et de bas en haut, qui sert à fermer ou à ouvrir le pertuis d'une écluse. Vers son centre, et du côté d'amont, s'adapte une tige, terminée à sa partie supérieure par une crémaillère qui engrène avec une roue dentée. Sur l'axe de celle-ci est ordinairement montée une autre roue dentée engrenant avec une VIS SANS FIN (Voy. ce mot); c'est en faisant tourner cette vis que l'on fait monter ou descendre

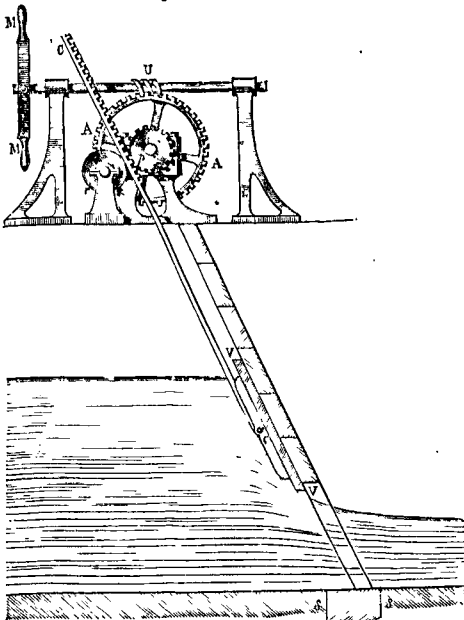


Fig. 1.

la vanne. La fig. 1 représente cette disposition : VV est la vanne proprement dite, CC la tige à crémail-

lère, pp le pignon qui engrène avec cette crémaillère, AA une roue dentée montée sur le même axe que le pignon, UU la vis sans fin qui engrène avec cette roue, MM les poignées sur lesquelles on agit pour faire tourner la vis; SS est le seuil sur lequel vient reposer la vanne quand le pertuis est fermé. Ce seuil est ici au niveau du radier ou du fond même du réservoir; il s'élève quelquefois au-dessus, mais toujours d'une faible quantité. rr est un rouleau sur lequel la tige à crémaillère s'appuie dans son mouvement ascendant ou descendant. Le mécanisme est souvent beaucoup plus simple, mais moins commode. Dans d'anciens vannages, la crémaillère est remplacée par une vis qui s'engage dans un écrou, fixe dans le sens vertical, mais qu'on peut faire tourner autour de son axe, et c'est ce mouvement qui fait monter ou descendre la vis, et par conséquent la vanne (Voy. Vis).

La vanne peut être verticale ou inclinée : lorsqu'elle est verticale, et que le seuil du pertuis s'élève peu au-dessus du fond du canal, la CONTRACTION DE LA VEINE (Voy. ce mot) est peu diminuée de ce côté, et le coefficient de contraction, d'après les expériences de plusieurs hydrauliciens, paraît devoir être de 0,625. Quand la vanne est inclinée, la contraction diminue d'une manière notable, et, d'après les expériences de M. Poncelet, le coefficient de contraction doit être porté à 0,74 si l'inclinaison est de 1 de base sur 2 de hauteur, et à 0,80 si l'inclinaison est de 1 de base pour 1 de hauteur.

On appelle *vanne plongeante* une vanne placée à la partie supérieure du réservoir, et qui ouvre le pertuis en s'abaissant; en sorte qu'elle laisse écouler l'eau en déversoir. La manœuvre en est la même que pour les autres vannes. Les vannes plongeantes sont particulièrement employées pour amener l'eau sur les ROUES DE CÔTÉ (Voy. ce mot). La fig. 2 re-

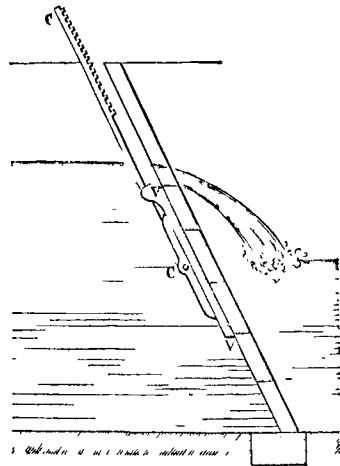


Fig. 2.

présente une vanne de ce genre. La dépense d'eau se calcule d'après la formule applicable aux déversoirs (Voy. DÉVERSOIR).

Dans les usines qui emploient l'eau comme moteur, on appelle *vannes de travail* celles qui amènent l'eau sur les roues hydrauliques. Il existe toujours en même temps des *vannes de décharge* qui

servent à faire écouler l'excès d'eau fournie par le bief d'amont. Les vannes de décharge sont surtout nécessaires sur les cours d'eau à régime variable. L'administration exige presque toujours en outre un déversoir qui assure l'écoulement du trop-plein indépendamment de l'usinier.

VANTAIL, chacun des deux *battants* d'une porte.

VARANGUE, pièce inférieure et horizontale de chaque COUPLE formant la MÂTRESSE PARTIE de la membrure d'un navire. Les varangues s'assemblent avec la CONTRE-QUILLE (*Voy.* les mots soulignés et l'article CONSTRUCTION NAVALE).

VARIATION, inégalité du mouvement lunaire découverte par Tycho-Brahé; elle dépend des différences d'action du Soleil sur la Lune, suivant les aspects ou positions relatives de ces astres par rapport à la Terre. Son expression est

$$0^{\circ}36' \sin 2 (\odot - \text{C}),$$

⊙ désignant la longitude du Soleil et C celle de la Lune.

VARIATION (COMPAS DE). *Voy.* COMPAS DE VARIATION.

VARIATION DU COMPAS, ou simplement **VARIATION**, nom donné par les marins à la *déclinaison de l'aiguille aimantée*, c'est-à-dire à l'angle que le méridien magnétique fait avec le méridien géographique. La direction du méridien magnétique est indiquée par la ligne qui joint les pôles de l'aiguille aimantée, et forme la ligne *nord et sud* du cadran mobile des boussoles. L'angle de cette direction avec la ligne nord et sud vraie est la déclinaison de l'aiguille aimantée, ou la variation. Elle est occidentale quand le nord du cadran mobile est à l'ouest du nord vrai; elle est orientale quand le nord du cadran mobile est à l'est du nord vrai. Mais on peut faire une remarque plus générale. Imaginons qu'après avoir maintenu la ligne NS du cadran mobile dans la direction de la méridienne, on abandonne l'aiguille à elle-même, le cadran mobile tournera dans un certain sens pour venir prendre, après quelques oscillations, une position d'équilibre dans laquelle la ligne NS du cadran mobile fera avec la méridienne un angle égal à la variation. Supposons, pour fixer les idées, que le nord du cadran mobile ait ainsi marché de *n* degrés vers l'ouest. Il est clair que, dans le mouvement général du cadran, tous les points de la circonférence auront marché dans le même sens du même nombre de degrés. Ainsi, le point ouest du cadran aura tourné de *n* degrés vers le sud; le point sud du cadran aura tourné de *n* degrés vers l'est; le point est du cadran aura marché de *n* degrés vers le nord. En général, si l'on imagine un observateur placé au centre du cadran et regardant dans la direction d'un rumb de vent quelconque, le point correspondant du cadran mobile aura tourné de *n* degrés vers sa gauche. Tous les points du cadran auraient, au contraire, tourné vers la droite si la variation eût été orientale. On conclut de cette remarque que la variation est occidentale toutes les fois que, pour un observateur supposé placé au centre de la boussole et regardant dans la direction d'un rumb de vent déterminé, le point du cadran qui répond à ce rumb est à gauche de l'observateur. La variation est, au contraire, orientale quand le rumb de vent

marqué sur le cadran est à droite de la direction vraie de ce rumb.

Le moyen le plus fréquemment employé pour déterminer la variation en mer consiste à observer l'amplitude ortive ou occase du soleil (*Voy.* AMPLITUDE), en relevant en même temps au compas, c'est-à-dire à l'aide de la boussole portative, à pinnules, appelée *compas de variation*, le point de l'horizon où le soleil se lève ou se couche. La différence entre l'amplitude calculée et l'amplitude observée, à l'aide du compas, exprime la variation. Supposons, par exemple, que l'amplitude calculée soit de $1^{\circ}6'42''N$, et que le coucher du soleil ait été observé dans la direction $O \frac{1}{4} NO, 4^{\circ}O$, qui répond à

un angle de $82^{\circ}45'$ avec la méridienne, compté du nord vers l'ouest (*Voy.* RUMBS), et, par conséquent, à un angle de $90^{\circ} - 82^{\circ}45'$, c'est-à-dire de $7^{\circ}15'$ avec la perpendiculaire à la méridienne, compté de l'ouest vers le nord, en retranchant $1^{\circ}6'42''$ de $7^{\circ}15'$, on trouvera $6^{\circ}8'18''$ pour la variation; et, comme la direction ouest du cadran mobile se trouve ici à gauche de l'ouest véritable, puisque le point O du cadran est à $7^{\circ}15'$ à gauche de la direction dans laquelle le soleil se couche, tandis que le point O vrai n'en est qu'à $1^{\circ}6'42''$, il en résulte que la variation est occidentale. Les marins la marquent du signe NO; ils emploient le signe NE lorsqu'elle est orientale.

Les observations d'amplitude du soleil ne sont employées avantageusement que lorsque la latitude est faible. Dans les hautes latitudes, le cercle de déclinaison du soleil étant très-incliné sur le plan de l'horizon, le soleil rase l'horizon pendant un certain temps au moment de son lever ou de son coucher, ce qui laisse de l'incertitude sur l'instant précis du phénomène.

On emploie aussi à la détermination de la variation les observations d'AZIMUT (*Voy.* ce mot). Pour cela, on observe la hauteur d'un astre, on en déduit son azimut, on relève d'ailleurs directement la position de cet astre à la boussole. La différence entre l'azimut observé et l'azimut calculé donne la variation cherchée. Cette méthode exige que la hauteur de l'astre ne dépasse pas 15 degrés; au delà, le relèvement ne pourrait plus se faire avec une exactitude suffisante.

Comme exemple de la disposition des calculs, nous donnerons la détermination suivante, empruntée au *Cours d'Observations et de Calculs nautiques* de M. Krantz à l'École navale.

ÉNONCÉ. Le 6 novembre 1853, étant par $45^{\circ}21'$ de latitude sud et $37^{\circ}30'$ de longitude est, on a trouvé $20^{\circ}15'30''$ pour la hauteur du bord inférieur du soleil. Le relèvement du soleil au compas a donné 85° du nord vers l'est. L'œil était élevé de 8 mètres; l'heure de l'observation était 8^h5^m du matin, temps moyen. On demande la variation.

ÉLÉMENTS DU CALCUL.

Hauteur observée ⊙.....	$20^{\circ}15'30''$
Dépression (<i>Voy.</i> ce mot).....	— $5'1''$
Hauteur apparente ⊙.....	$20^{\circ}10'29''$
Réfraction — parallaxe.....	— $2'29''$
Hauteur vraie ⊙.....	$20^{\circ}8'0''$
Demi-diamètre.....	+ $16'11''$

Hauteur vraie \odot	20° 24' 11"
Heure approchée; temps moyen, le 5.	20 ^h 5 ^m
Longitude E, en temps.....	— 2° 30'
<hr/>	
Heure; temps moyen de Paris, le 5..	17 ^h 35 ^m
Déclinaison \odot le 5 à 0 ^h	15° 45' 25"
Variation en 24 heures.....	+ 18' 5"
Partie proportionnelle pour 17 ^h 35 ^m ...	+ 13' 10"
<hr/>	
Déclinaison \odot calculée.....	15° 58' 35"
Distance polaire.....	74° 1' 25"
<hr/>	
CALCUL [Voy. TRIANGLE DE POSITION, formule (B)].	
Haut.vraie \odot	20° 24' 10". Comp ^l log cos 0,028138
Latitude L.....	45° 21' 0". Comp ^l log cos 0,153104
Dist. polaire δ	74° 1' 20".
<hr/>	
Somme 2S.....	139° 46' 30".
S.....	69° 53' 10". Log cos 9,536416
δ —S.....	6° 8' 10". Log cos 9,998253
<hr/>	
Somme, ou 2 log cos $\frac{1}{2}$ Z (Z est le sup- plément de l'azimut).....	19,715991
log cos $\frac{1}{2}$ Z.....	9,857995
$\frac{1}{2}$ Z.....	43° 51' 20"
<hr/>	
Azimut calculé, ou Z, du sud vers l'est.....	87° 42' 40"
Relèvement au compas du nord vers l'est.....	85°
Ce qui équivaut, du sud vers l'est, à...	95°
Variation, ou	95° — (87° 42' 40") = 7° 17' 20". N.

On voit que dans les calculs les marins négligent souvent les unités de seconde, pour n'avoir pas de parties proportionnelles à calculer pour les logarithmes.

On peut encore employer à la détermination de la variation le passage d'un astre au *premier vertical* (Voy. ce mot). On relève l'astre à la boussole à l'instant de ce passage, et la différence entre le rumb observé et le point est ou ouest véritable est l'expression de la variation.

Le passage d'un astre au méridien peut encore servir à la détermination qui nous occupe. On relève l'astre à la boussole au moment de son passage, et la différence entre le rumb observé et le point nord ou sud véritable est l'expression de la variation cherchée.

Enfin le lever ou le coucher de la lune, quand ils ont lieu la nuit, offrent un moyen commode de déterminer la variation. On remarque en effet alors à la surface de la mer une traînée lumineuse, qui est située dans le vertical de l'astre; on relève à la boussole la direction de cette traînée lumineuse, ce qui donne son azimut. D'un autre côté, on peut calculer cet azimut; car, dans le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z, et l'astre L, les trois côtés sont connus : le côté PZ est le complément de la latitude, le côté PL est le complément de la déclinaison de la lune, laquelle peut être déterminée par interpolation pour l'heure de l'observation à l'aide des données fournies par la Connaissance des temps; et le côté ZL est un arc de 90°; dans ce triangle on peut donc

calculer l'angle en Z, qui est le supplément de l'azimut cherché. La différence entre l'azimut observé et l'azimut calculé est la variation du compas.

Dans une rade ou dans une baie on peut déterminer la variation par le *relèvement* astronomique d'un objet terrestre (Voy. AZIMUT). En même temps qu'on détermine ainsi l'azimut d'un signal terrestre, on le relève au compas, et l'on obtient son azimut magnétique; la différence des deux azimuts est la variation du compas.

Non-seulement la déclinaison de l'aiguille aimantée varie avec les lieux, et dans chaque lieu avec le temps, mais les indications de la boussole sont encore différentes suivant la direction de la route, ou, pour parler le langage des marins, suivant le *cap* du navire. Cette différence tient à l'action des masses de fer qui entrent dans la construction du vaisseau. Parmi ces masses, aujourd'hui très-considérables, les unes agissent comme fer doux; d'autres, par la manière dont elles ont été travaillées, ont acquis une certaine force coercitive et agissent comme aimants. Il en résulte une action unique qui s'exerce comme une force émanant d'un centre situé, dans la partie moyenne du vaisseau, près de son plan longitudinal de symétrie, mais non rigoureusement dans ce plan. On conçoit dès lors que si le navire suit la direction du méridien magnétique, et que par conséquent la direction *ab* (fig. 1) de l'aiguille aimantée soit celle de la quille

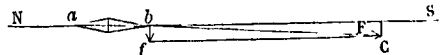


Fig. 1.

du vaisseau, une force F émanant d'un point C voisin du plan vertical qui contient l'axe de l'aiguille, n'exercera sur chacun des pôles de cette aiguille, et perpendiculairement à sa direction *ab*, qu'une action due à sa composante *f* qui sera très-petite. Mais si la route du navire est est ou ouest, auquel cas la direction *ab* (fig. 2) de l'aiguille est

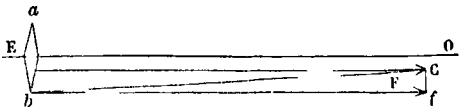


Fig. 2.

perpendiculaire à la quille ou à peu près, la force F aura une composante *f* très-grande perpendiculairement à la direction de l'aiguille; et son action ne sera plus négligeable. Il en sera de même de la force de sens contraire exercée sur le pôle *a*.

M. Poisson a essayé de représenter cette action par des formules analytiques, mais son analyse ne tient pas compte des influences distinctes exercées par le fer doux et par le fer aimanté; elle suppose le fer aimanté par l'action magnétique du globe; elle suppose encore que le centre C d'où émane la force F a une position fixe dans le navire: hypothèses qui ne sont point justifiées; enfin, pour simplifier ses formules, l'illustre géomètre suppose le point C situé dans le plan de symétrie du vaisseau, ce qui n'est pas. Ces formules ne peuvent donc

être employées d'une manière générale dans la pratique. On a essayé en Angleterre deux moyens d'annuler l'action des matières ferrugineuses ou d'en mesurer l'influence. Ces deux moyens sont le plateau correcteur de M. Barlow, et les compensateurs de M. Airy. Le plateau correcteur de M. Barlow se compose d'un disque de fer doux (ou plutôt d'un plateau de bois garni de deux disques de fer doux) disposé de manière à pouvoir être approché ou éloigné à volonté de la boussole et placé dans une situation quelconque par rapport à cet instrument. On détermine à bord les déviations de l'aiguille pour les différents caps du navire; on porte le compas à terre, et l'on détermine par tâtonnements la position qu'il faut donner au plateau pour produire des déviations précisément égales et contraires; en reportant le compas à bord et disposant le plateau de la même manière qu'à terre, on annule l'influence des matières ferrugineuses. On peut encore déterminer à terre les positions qu'il faut donner au plateau pour produire les mêmes déviations qu'à bord; il est clair alors qu'à bord on aura des déviations doubles en disposant le plateau comme à terre; et en les déterminant comme celles qui avaient lieu sans le plateau, on aura la mesure des déviations dues aux matières ferrugineuses. Cette méthode est fondée sur des hypothèses, parmi lesquelles figure la fixité du point C, et que l'expérience ne justifie pas. Les positions à donner au plateau ne sont plus les mêmes quand on change de latitude. — La méthode de M. Airy est au fond la même que celle de M. Barlow, quoique au lieu d'un plateau de fer doux il fasse usage d'un certain nombre d'aimants destinés à balancer l'action des masses de fer du navire; elle est sujette au même reproche; les positions des aimants déterminées pour une certaine latitude ne conviennent plus à une latitude différente.

Il est donc nécessaire de déterminer directement, et le plus souvent possible, les déviations correspondantes aux différents caps du navire, et de dresser ce qu'on appelle des tables de déviations. Ces tables peuvent être faites pendant les relâches soit dans le port, soit dans la rade. Mais il est tout aussi simple de les faire en mer. Il faut pour cela trois observateurs : l'un observe, à un instant donné, l'azimut d'un astre avec le COMPAS DE VARIATION, en tenant compte de la déclinaison locale de l'aiguille aimantée; un autre observe avec le CERCLE À RÉFLEXION ou avec un SEXTANT la hauteur du même astre; le troisième lit l'heure à la MONTRE DE COMPARAISON (Voy. ces mots). Ces deux dernières données suffisent, connaissant la latitude, pour calculer l'azimut de l'astre; car dans le triangle de position qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z, et le centre S de l'astre, on connaît le côté PZ égal au complément de la latitude, le côté ZS complément de la hauteur observée, et l'angle en P, ou l'angle horaire, qu'on peut déduire de l'heure observée (Voy. HEURE [détermination de P]). On peut donc calculer l'angle en Z qui est le supplément de l'azimut cherché.

On peut encore, si la longitude est connue, en déduire l'angle horaire P; l'angle en Z se calcule alors par la formule

$$\sin Z = \frac{\sin P \cdot \cos D}{\cos H},$$

dans laquelle D est la déclinaison de l'astre; calculée pour l'heure de l'observation, et H la hauteur observée.

La différence entre l'azimut calculé et l'azimut observé en tenant compte de la variation locale exprime la déviation de l'aiguille aimantée pour le cap sous lequel on navigue; en opérant de même pour les différents caps (les 16 principaux suffisent), on a les éléments de la table de déviation. Elle peut servir tant qu'on ne change pas notablement de latitude; dans le cas contraire, il est nécessaire d'en dresser une nouvelle. On a soin pendant chacune de ces opérations de vérifier la coïncidence entre les indications du compas de variation et celles du compas de route, ou de constater et de mesurer les différences. Nous empruntons au *Cours de navigation et d'hydrographie* de E. P. Dubois la table suivante des déviations observées à bord du vaisseau *le Napoléon*, en rade de Toulon. Le signe + indique une déviation à droite du méridien magnétique et le signe — une déviation à gauche.

CAPS.	DÉVIATIONS.	CAPS.	DÉVIATIONS.
N.	— 5°	S.	0°
N. $\frac{1}{4}$ NE.	— 5	S. $\frac{1}{4}$ SO.	+ 1
N. NE.	— 7	S. SO.	+ 2
NE. $\frac{1}{4}$ N.	— 7	SO. $\frac{1}{4}$ S.	+ 2
NE.	— 7	SO.	+ 3
NE. $\frac{1}{4}$ E.	— 7	SO. $\frac{1}{4}$ O.	+ 3
E. NE.	— 8	O. SO.	+ 4
E. $\frac{1}{4}$ NE.	— 8	O. $\frac{1}{4}$ SO.	+ 4
E.	— 8	O.	+ 5
E. $\frac{1}{4}$ SE.	— 9	O. $\frac{1}{4}$ NO.	+ 5
E. SE.	— 9	O. NO.	+ 3
SE. $\frac{1}{4}$ E.	— 8	NO. $\frac{1}{4}$ O.	+ 2
SE.	— 6	NO.	+ 2
SE. $\frac{1}{4}$ S.	— 4	NO. $\frac{1}{4}$ N.	— 0
S. SE.	— 3	N. NO.	— 1
S. $\frac{1}{4}$ SE.	— 3	N. $\frac{1}{4}$ NO.	— 3

Les tables de déviation donnent, comme on le voit, les angles en nombres ronds de degrés; il serait superflu de rechercher une approximation plus grande, attendu qu'on ne gouverne suivant un rumb déterminé qu'à 1 ou 2 degrés près (Voy. l'ouvrage cité page 429. Voy. aussi le *Traité de Navigation* de C. F. Fournier, et la *Géodésie* de Franceur).

VASE, partie du chapiteau corinthien qui est recouverte par les feuilles d'acanthé et les volutes. (Voy. CHAPITEAU.)

VASES COMMUNIQUANTS (PRINCIPE DES), principe d'hydrostatique en vertu duquel lorsqu'un liquide pesant est en équilibre dans deux vases qui communiquent, la pression est la même dans les deux vases sur une même couche de niveau.

Supposons d'abord que les deux vases ABCD et DEFG (fig. 1) aient une paroi commune BD, percée

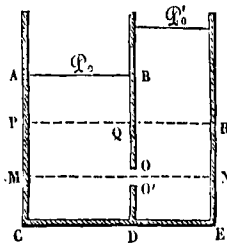


Fig. 1.

d'un orifice OO', ce qui est le mode de communication le plus direct. Si l'on suppose l'équilibre établi, et que l'on mène par un point de l'orifice un plan horizontal MN, la pression devra être la même en tous les points de ce plan horizontal (Voy. PRESSION D'UN FLUIDE). Il en résulte que la pression est aussi la même en tous les points d'un autre plan horizontal quelconque PQR. En effet, soit \mathcal{P} la pression sur le plan MN, soit x la distance des plans parallèles MN et PR, soient \mathcal{P}' la pression sur le plan PQ et \mathcal{Q}' la pression sur le plan QR, enfin Π le poids du mètre cube du liquide considéré, on aura dans le premier vase

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}' + \Pi x,$$

et dans le second

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}' + \Pi x,$$

d'où résulte

$$\mathcal{P}' = \mathcal{Q}'.$$

Soient \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 les pressions sur les surfaces supérieures AB et FG, soient h et h' les distances de ces plans horizontaux au plan MN; on aura

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \Pi h \text{ et } \mathcal{P} = \mathcal{P}'_0 + \Pi h'.$$

Si $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}'_0$, il en résultera $h = h'$, et les deux surfaces supérieures seront dans un même plan horizontal. Si \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 sont différents, et que \mathcal{P}_0 par exemple soit plus grand que \mathcal{P}'_0 , on tirera des deux relations ci-dessus

$$\mathcal{P}_0 + \Pi h = \mathcal{P}'_0 + \Pi h',$$

d'où

$$\frac{\mathcal{P}_0}{\Pi} - \frac{\mathcal{P}'_0}{\Pi} = h' - h,$$

c'est-à-dire que la différence des hauteurs dues aux pressions \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 est égale à la différence de niveau des plans FG et AB.

On est conduit aux mêmes conséquences quel que soit le mode de communication des deux vases.

Soient, par exemple, ABCD et EFGH (fig. 2) deux vases qui communiquent par l'intermédiaire d'un

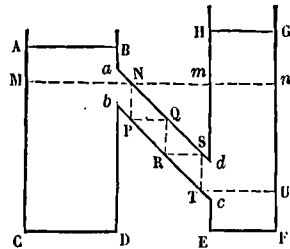


Fig. 2.

tuyau oblique $abcd$. Par un point de l'orifice ab menons un plan horizontal MN, et prolongeons-le en mn dans le second vase. De l'un des points où ce plan rencontre la paroi du tuyau abaissons la verticale NP; par le point P où cette verticale rencontre la paroi inférieure du tuyau menons un plan horizontal PQ; de l'un des points où ce second plan rencontre la paroi du tuyau abaissons la verticale QR; par le point R où cette verticale rencontre la paroi inférieure, menons un plan horizontal RS; de l'un des points où ce nouveau plan rencontre la paroi du tuyau abaissons la verticale ST, et par le point T menons le plan horizontal TU. En continuant ainsi, on obtiendra toujours une verticale dont une partie sera à la hauteur de l'orifice cd ; par l'un des points situés à cette hauteur on mènera un dernier plan horizontal que l'on prolongera dans le second vase. Supposons que TU soit ce plan. Soit \mathcal{P} la pression sur le plan MN et \mathcal{P}' la pression sur le prolongement mn de ce plan dans le second vase. Soient p , r , t les pressions aux points P, R, T, on aura successivement

$$p = \mathcal{P} + \Pi \cdot NP, \quad r = p + \Pi \cdot QR, \quad t = r + \Pi \cdot ST,$$

d'où résulte

$$t = \mathcal{P} + \Pi (NP + QR + ST)$$

ou

$$t = \mathcal{P} + \Pi \cdot Un.$$

Mais l'équilibre du liquide dans le second vase donne

$$t = \mathcal{P}' + \Pi \cdot Un.$$

Il résulte de ces deux relations que l'on a

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}';$$

et que par conséquent la pression est la même dans les deux vases sur un même plan horizontal; et l'on en déduirait les mêmes conséquences que plus haut.

Lorsque deux liquides pesants de densités différentes sont en équilibre dans deux vases communicants, en premier lieu la surface de séparation MN (fig. 3) des deux liquides est un plan horizontal (Voy. PRESSION d'un fluide); en second lieu, il y a une relation simple entre les distances de ce plan de séparation aux deux plans supérieurs AB et CD. Soient, en effet, \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 les pressions sur les surfaces supérieures, h et h' leur hauteur au-dessus de MN, Π et Π' le poids du mètre cube de chacun des deux liquides. On aura d'abord, en considérant l'équilibre du premier liquide,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \Pi h,$$

puis, en considérant l'équilibre du second, et prolongeant le plan MN en mn dans le second vase,

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'_0 + \Pi'h';$$

la pression sur MN est en effet la même que sur

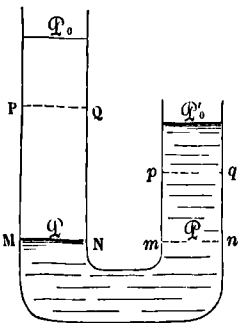


Fig. 3.

mn. De ces deux relations on déduit

$$\mathcal{Q}_0 + \Pi h = \mathcal{Q}'_0 + \Pi'h'.$$

Si les pressions supérieures \mathcal{Q}_0 et \mathcal{Q}'_0 sont égales, cette relation se simplifie et se réduit à

$$\Pi h = \Pi'h',$$

d'où

$$\frac{h}{h'} = \frac{\Pi'}{\Pi},$$

c'est-à-dire que les hauteurs des deux colonnes de liquides au-dessus du plan de séparation sont en raison inverse des densités de ces liquides.

Il faut bien remarquer que la pression n'est pas la même sur un même plan horizontal coupant les deux colonnes. Pour trouver deux plans PQ et pq où la pression soit la même, il faut prendre ces plans de manière que leurs distances z et z' au plan de séparation MN soient en raison inverse des densités des deux liquides. Car si p désigne la pression sur PQ et sur pq, on aura

$$\mathcal{Q} = p + \Pi z \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}' = p + \Pi'z',$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \Pi z &= \Pi'z', \\ \frac{z}{z'} &= \frac{\Pi'}{\Pi}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

VASES CYLINDRIQUES. Ces vases peuvent être étudiés au point de vue de la forme et au point de vue de la résistance de leurs parois.

I. Au point de vue de la forme, on cherche le rapport qu'il convient d'établir entre la hauteur et le rayon de la base pour que, avec une capacité donnée, le vase emploie le moins de matière possible, c'est-à-dire pour que sa surface totale soit un minimum. Il faut ici distinguer deux cas, suivant que le vase doit rester ouvert à la partie supérieure, ou qu'il doit être complètement fermé.

Dans le premier cas, soit V le volume intérieur donné, x le rayon de la base, y la hauteur et S la surface; on aura

$$V = \pi x^2 y$$

et

$$S = \pi x^2 + 2\pi xy.$$

La quantité à rendre minimum est

$$u = x^2 + 2xy.$$

On pose

$$x^2 y = a^3 = \frac{V}{\pi},$$

d'où

$$y = \frac{a^3}{x^2},$$

et par suite

$$u = x^2 + \frac{2a^3}{x}.$$

Égalant à zéro la dérivée de u par rapport à x , on obtient

$$2x - \frac{2a^3}{x^2} = 0,$$

d'où

$$x = a,$$

et par suite

$$y = \frac{a^3}{a^2} = a.$$

Ainsi la hauteur doit être égale au rayon de la base, et l'on a

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Ces valeurs correspondent bien au minimum de S , car la dérivée seconde de u est

$$2 + \frac{4a^3}{x^3},$$

quantité positive.

Dans le second cas, on a

$$V = \pi x^2 y$$

et

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy.$$

La quantité à rendre minimum est alors

$$u = x^2 + xy,$$

et, en opérant comme dans le premier cas, on trouve que le minimum répond à

$$2x^3 = a^3.$$

Il en résulte

$$x^2 y = 2x^3,$$

d'où

$$y = 2x,$$

c'est-à-dire que la hauteur doit être alors égale au diamètre de la base, et l'on a

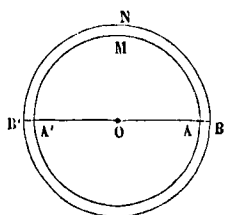
$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

avec

$$y = 2x.$$

II. Les calculs relatifs à la résistance des parois s'appliquent surtout aux vases destinés à contenir des gaz à une pression élevée. Nous supposons d'abord la section exactement circulaire. Soit $AA' = 2\rho$ le diamètre intérieur du cylindre et $BB' = 2r$ son diamètre extérieur. Soit h la hauteur du cylindre. Soit \mathcal{Q} la pression par mètre carré à l'intérieur et \mathcal{Q}' la pression par mètre à l'extérieur. On suppose que ces forces soient assez grandes pour que, vis-à-vis d'elles, on puisse négliger le poids du vase, les réactions des bases circulaires, etc. A cause de la symétrie, le vase ne peut tendre à se rompre que de deux manières : ou suivant deux génératrices opposées, ou suivant une section droite. Examinons successivement chacun de ces deux modes de rupture. Soit BB' la trace du plan suivant lequel la rupture tend à s'opérer. Remarquons d'abord qu'à cause de la symétrie la section droite demeure circulaire sous l'action des

pressions intérieure et extérieure comme dans l'état primitif. — Ainsi les sections faites par des plans menés suivant l'axe O du cylindre n'éprouvent aucun mouvement de rotation. Si l'on se re-



porte à la théorie de la flexion plane des PIÈCES COURBES (Voy. ce mot), on a donc

$$d\psi = 0;$$

et puisque

$$d\psi = \frac{\mu ds}{\epsilon},$$

il en résulte

$$\mu = 0,$$

c'est-à-dire que le moment fléchissant est nul pour tous les points de la fibre moyenne. Or on a

$$R = \frac{\sigma \mu}{I} - \frac{T}{\Omega};$$

il en résulte

$$R = -\frac{T}{\Omega},$$

c'est-à-dire que la tension par mètre est la même pour toutes les fibres, quelle que soit la section longitudinale considérée.

Considérons l'équilibre d'une moitié du vase, celle qui se projette entre AMA' et BNB'. Elle est soumise à la pression \mathcal{Q} sur la paroi répondant à AMA', à la pression \mathcal{Q}' sur la paroi répondant à BNB', et à la résistance R sur les deux bandes planes répondant à AB et à A'B'. La résultante des pressions normales intérieures est exprimée (Voy. Pressions hydrostatiques) par $\mathcal{Q}.2\rho h$; la résultante des pressions normales extérieures est exprimée de même par $-\mathcal{Q}'.2rh$; et la résultante des résistances R est exprimée par $-R.2(r-\rho)h$. On doit donc avoir pour l'équilibre, en supprimant le facteur 2h,

$$R(r-\rho) = \mathcal{Q}\rho - \mathcal{Q}'r.$$

Si l'on représente la différence

$$r-\rho \text{ ou } AB \text{ par } e,$$

d'où

$$r = \rho + e,$$

on pourra écrire

$$Re = \rho(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') - \mathcal{Q}'e.$$

Ordinairement, et c'est ce qui arrive particulièrement pour les chaudières à vapeur, le terme $\mathcal{Q}'e$ est négligeable vis-à-vis de celui qui le précède, et l'on peut écrire

$$e = \rho \frac{\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'}{R}. \quad [1]$$

Si les pressions \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' sont exprimées en atmosphères, la différence $\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$ équivaut à $10330^k.n$, n désignant un certain nombre d'atmosphères; les règlements administratifs supposent que l'on prend pour R la valeur 285000^k , quantité bien inférieure à la résistance par mètre que pourrait supporter la

tôle. Avec ces données la formule [1] devient

$$e = 0,0036.n.\rho \text{ ou } e = 0,0018.n.2\rho.$$

L'ordonnance royale du 22 mai 1843 prescrit de prendre

$$e = 0,0018.n.2\rho + 0,003; \quad [2]$$

les 3 millimètres ajoutés à la valeur donnée par la théorie répondent à l'usure de la chaudière et aux diverses circonstances dont la théorie ne peut tenir compte.

Ceci suppose $\mathcal{Q} > \mathcal{Q}'$; lorsque c'est l'inverse qui a lieu, l'épaisseur à donner au vase doit être plus grande; une instruction ministérielle du 17 décembre 1848 prescrit de multiplier, dans ce cas, la valeur que donne la relation [2] par le facteur 1,5, et de défendre en outre le cylindre par des armatures intérieures en fer forgé. Cela tient à ce que, si la section droite n'est pas rigoureusement circulaire, elle tend à se rapprocher de cette forme si la pression intérieure est plus grande que l'extérieure, tandis qu'elle tend à s'en éloigner de plus en plus si c'est la pression extérieure qui est la plus grande. Cette circonstance a été analysée par M. Bresse dans son *Cours de Mécanique appliquée à l'École des ponts et chaussées*, tome I, comme une application de la résistance des pièces courbes à la flexion plane. Nous ne pouvons que renvoyer à cet auteur.

III. Supposons maintenant que le cylindre tende à se rompre suivant une section droite. L'aire de cette section étant sensiblement $2\pi\rho.e$, si l'on désigne par R' la résistance par mètre carré perpendiculairement à la section, ou parallèlement aux génératrices du cylindre, on aura pour la résistance totale $R'.2\pi\rho.e$. La pression exercée sur le fond du vase est d'ailleurs $\pi\rho^2(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}')$. Pour l'équilibre il faut que ces deux forces soient égales, et qu'on ait

$$R'.2\pi\rho.e = \pi\rho^2(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'),$$

d'où

$$e = \frac{1}{2}.\rho \frac{\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'}{R'}. \quad [3]$$

Pour une même valeur de R cette formule donne une épaisseur moitié moindre que dans le cas de la rupture suivant une génératrice. Il en résulte que l'épaisseur doit être calculée pour ce cas, c'est-à-dire par la formule [2]; et que si la rupture ne peut avoir lieu suivant une génératrice, elle ne pourra a fortiori avoir lieu suivant une section droite.

VEINE FLUIDE, jet de liquide ou de gaz qui s'échappe par un orifice percé en mince paroi. (Voy. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES, ÉCOULEMENT DES GAZ, CONTRACTION DE LA VEINE, INVERSION DE LA VEINE.)

VENDÉMAIRE, le premier mois du calendrier républicain. Il répondait à l'intervalle compris entre le 22 ou le 23 septembre et le 22 ou le 23 octobre (Voy. CALENDRIER).

VENTILATEUR. Ce nom s'applique, dans la langue générale, à tous les appareils propres à renouveler l'air dans un espace donné; mais, en Mécanique, on désigne plus particulièrement ainsi les ventilateurs à force centrifuge, formés d'un certain nombre d'ailes, droites ou courbes, montées sur un même axe et tournant entre les joues d'un tambour, dont la circonférence peut être complètement ouverte ou partiellement fermée. On appelle ventilateurs aspirants ceux qui aspirent l'air par des tuyaux de conduite s'abouchant avec les joues du

tambour à la hauteur de l'axe, et qui le rejettent dans l'atmosphère avec une faible vitesse par tous les points de la circonférence. On appelle *ventilateurs soufflants* ceux qui aspirent l'air environnant par des orifices percés dans les joues à la hauteur de l'axe, et le font écouler par un tuyau communiquant avec la circonférence du tambour. Un ventilateur est à la fois *aspirant et soufflant* lorsqu'il aspire l'air par un tuyau comme les ventilateurs aspirants et le verse dans un canal comme les ventilateurs soufflants.

Ventilateurs aspirants. Les figures 1 et 2 repré-

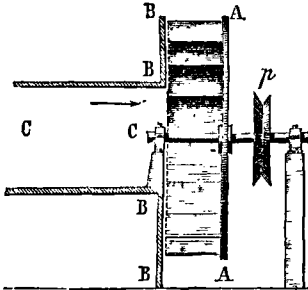


Fig. 1.

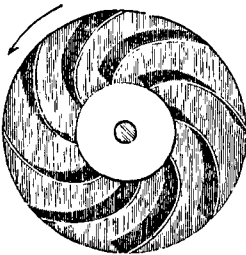


Fig. 2.

sentent un ventilateur aspirant à ailes courbes. Les ailes sont montées sur un plateau AA (fig. 1) perpendiculaire à l'axe et tournant avec lui. Elles viennent affleurer la joue BB, percée en son centre d'un orifice circulaire, auquel s'adapte le tuyau CC par lequel l'air est aspiré. La figure 2 montre la disposition des ailes courbes. Le mouvement de rotation est imprimé à l'axe au moyen de la poulie p. Le jeu de l'appareil se comprend sans difficulté. La rotation ayant lieu dans le sens de la convexité des ailes, comme l'indique la flèche (fig. 2), il tend à se former, du côté de la concavité, un vide partiel dans lequel l'air du tuyau CC se précipite; cet air est rejeté vers la circonférence par l'effet de la force centrifuge, et sort des canaux formés par les ailes dans une direction presque opposée à la rotation; en sorte que sa vitesse absolue de sortie est très-faible.

Le mouvement de l'air dans un ventilateur aspirant donne lieu à des phénomènes complexes, et la théorie exacte de cet appareil est encore à faire. Nous en donnerons néanmoins une théorie approximative, afin d'apprécier sommairement ses effets. Soit \mathcal{P}_a la pression dans le tuyau CC, soit \mathcal{P} la pression au point où l'air s'introduit entre les ailes, et soit v la vitesse que prend l'air en

vertu de cette différence de pression. En appelant t la température de l'air et α son coefficient de dilatation, on aura, d'après le THÉORÈME DE D. BERNOULLI modifié pour les gaz (Voy. THÉORÈME DE D. BERNOULLI, et ÉCOULEMENT DES GAZ),

$$v^2 = 2g \cdot 18304 (1 + \alpha t) \log \frac{\mathcal{P}_a}{\mathcal{P}} \quad [1]$$

Cette vitesse est dirigée suivant le rayon, ou perpendiculairement à la paroi du tuyau CC. Soit u , la vitesse des ailes à la circonférence intérieure; cette vitesse est perpendiculaire à v . Si donc on désigne par w , la vitesse relative d'introduction de l'air dans les canaux formés par les ailes, cette troisième vitesse sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés u_0 et v ; on a donc

$$w_0^2 = v^2 + u_0^2 \quad [2]$$

Soit w la vitesse relative de l'air à l'extrémité opposée de ces mêmes canaux, c'est-à-dire à la circonférence extérieure des ailes; soit u la vitesse des ailes en ce point. La pression à la circonférence extérieure étant la pression atmosphérique \mathcal{P}_a , on aura, en appliquant le principe de l'effet du travail pour le mouvement relatif (Voy. THÉORÈME DE CORIOLIS),

$$w^2 = w_0^2 + u^2 - u_0^2 + 18304 (1 + \alpha t) \log \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_a} 2g \quad [3]$$

Soit α l'angle des vitesses u_0 et w_0 , on aura donc

$$\tan \alpha = \frac{v}{u_0} \quad [4]$$

Soit β l'angle que fait le dernier élément des ailes avec la circonférence extérieure, et soit v' la vitesse absolue de sortie de l'air, cette vitesse v' sera la résultante de la vitesse relative w et de la vitesse d'entraînement u prise en sens contraire (Voy. VITESSE RELATIVE); on aura donc

$$v'^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos \beta \quad [5]$$

Soit P le poids d'air qui s'écoule par seconde. Soit S la distance de deux ailes consécutives comptée sur la circonférence extérieure, soit e l'épaisseur du ventilateur, ou la distance entre le plateau AA et la joue BB; la section d'un des canaux sera $eS \sin \beta$; et si l'on suppose tous les filets animés de la même vitesse w , le volume écoulé par seconde par l'un de ces canaux sera $eS \sin \beta \cdot w$. Cet air étant à la pression atmosphérique, si Π_a désigne le poids du mètre cube d'air à cette pression et à la température t , le poids d'air écoulé par l'un des canaux en une seconde sera $\Pi_a eS \sin \beta \cdot w$; et par conséquent, s'il y a n canaux, on aura

$$P = n \Pi_a eS \sin \beta w,$$

ou, en remarquant que nS exprime la circonférence extérieure des ailes qui a pour valeur $2\pi r$, si r désigne le rayon de cette circonférence,

$$P = 2\pi r \Pi_a e w \sin \beta \quad [6]$$

En appelant Π le poids du mètre cube d'air à la pression \mathcal{P} et à la température t , et r_0 le rayon de la circonférence intérieure des ailes ou le rayon du tuyau CC, on trouvera de même

$$P = 2\pi r_0 \Pi e w_0 \sin \alpha \quad [7]$$

Les quantités Π_a et Π s'expriment d'ailleurs en fonction des pressions et des températures correspondantes par les formules

$$\Pi_a = 1^k, 3 \cdot \frac{\mathcal{P}_a}{10334 (1 + \alpha t)} \quad [8]$$

et

$$\Pi = 1^{\text{a}}, 3. \frac{Q}{10334(1+at)} \quad [9]$$

En ajoutant membre à membre les relations [1], [2] et [3], on obtient après réductions

$$w^2 = u^2 + 2g.18304(1+at) \log \frac{Q_0}{Q_a} \quad [10]$$

ce qui fera connaître la vitesse w . Ordinairement les pressions Q_0 et Q_a diffèrent très-peu l'une de l'autre; leur rapport est très-voisin de l'unité; en sorte que w doit différer très-peu de u ; c'est-à-dire que la vitesse relative de sortie de l'air est sensiblement égale à la vitesse de l'extrémité extérieure des ailes, résultat que l'expérience confirme à très-peu de chose près.

La vitesse w étant déterminée, l'équation [6] fera connaître la dépense P . Si l'on ajoute les équations [1] et [2], on a

$$w_0^2 = u_0^2 + 2g.18304(1+at) \log \frac{Q_0}{Q_a} \quad [11]$$

D'ailleurs l'équation [7], en y mettant pour Π sa valeur [9], devient

$$P = 2\pi r_0 e w_0 \sin \alpha. 1, 3. \frac{Q}{10334(1+at)} \quad [12]$$

Les relations [11] et [12] feront connaître les deux inconnues w_0 et Q . L'équation [1] donnera ensuite la vitesse v ; et l'équation [5] donnera la vitesse v' . L'équation [4] donnera α ; c'est l'angle que le premier élément de l'aile devra faire avec la circonférence intérieure pour que l'air entre sans choc dans les canaux.

Le travail utile \mathcal{E}_u a pour expression

$$\mathcal{E}_u = P. \frac{w_0^2}{2g}$$

Le travail moteur \mathcal{E}_m se compose de \mathcal{E}_u , plus du travail correspondant à la vitesse absolue de l'air à sa sortie, c'est-à-dire

$$P. \frac{v^2}{2g}$$

plus encore du travail \mathcal{E}_f dû au frottement de l'air contre les parois des canaux, et aux fuites inévitables; on a donc

$$\mathcal{E}_m = P \left(\frac{w_0^2 + v^2}{2g} \right) + \mathcal{E}_f$$

et par conséquent le rendement de la machine a pour expression

$$\frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_m} = \frac{w_0^2}{w_0^2 + v^2 + \frac{2g}{P} \mathcal{E}_f} \quad [13]$$

On voit que la vitesse v' doit être la plus petite possible. Pour obtenir ce résultat, comme w diffère très-peu de u , on voit qu'il faut faire l'angle β aussi petit que possible; c'est-à-dire que le dernier élément de l'aile doit être aussi près que possible d'être tangent à la circonférence extérieure.

Les pertes dues aux fuites ne peuvent être évaluées; quant au travail du frottement, on le calculera comme pour une conduite, quand on connaîtra les dimensions du ventilateur; pour cela, comme la vitesse relative est variable, on pourra prendre la moyenne des vitesses w_0 et w , et s'en servir pour remplacer U dans la formule (Foy. ÉCOULEMENT DES GAZ)

$$\varphi = \Pi_1 l \chi \beta U^2,$$

d'où

$$\mathcal{E}_\varphi = \Pi_1 l \chi \beta U^2,$$

l désignant la longueur développée d'un des canaux, χ le contour de sa section moyenne, β le coefficient 0,000355; et Π_1 une moyenne entre les valeurs Π_a et Π qui entrent dans les calculs précédents.

Cette théorie approximative suppose que les filets ont une même vitesse dans une même section du canal; en réalité les vitesses sont différentes. Elle suppose aussi que la pression est la même dans une même section; cette hypothèse n'est pas réalisée non plus. Il se forme à l'arrière de l'aile un vide partiel dans lequel l'air extérieur se précipite, en sorte qu'il y a à la fois deux courants d'air dans un même canal, l'un qui sort en vertu de la force centrifuge, l'autre qui rentre en vertu de la différence de pression dont nous venons de parler. Ces phénomènes compliqués demanderaient une étude expérimentale approfondie qui n'a pas encore été faite, et qui serait délicate et difficile.

En général, le rendement des ventilateurs est très-faible; il atteint à peine 0,30 dans ceux qui sont construits avec le plus de soin; et il descend souvent à 0,18 et même à 0,10, surtout lorsque les ailes courbes sont remplacées, comme cela arrive fréquemment, par des ailes droites dirigées dans le sens des rayons. La faiblesse du rendement, pour les ventilateurs les plus soignés, s'explique par l'influence des frottements, qui prend une très-grande importance, à cause de la grande vitesse que possède l'air dans les canaux; elle a pour cause aussi l'inégale distribution de vitesse et de pression dans une même section transversale, et la rentrée de l'air par la circonférence extérieure dont il a été question ci-dessus.

On a varié de diverses manières la disposition des ailes; on les a tracées en développantes de cercle, pour que la section transversale restât constante; on a remplacé les joues planes par des joues coniques, en donnant aux ailes une forme trapézoïdale; mais on n'a réussi, par aucun de ces moyens, à obtenir un rendement meilleur.

En général on donne au diamètre extérieur une longueur de 1 à 2 mètres; on fait r_0 égal à la moitié de r ; on multiplie les ailes à mesure que le diamètre de l'appareil augmente; leur nombre varie généralement de 6 à 12. — La hauteur des ailes est le quart ou le cinquième du diamètre extérieur. La vitesse varie depuis 120 jusqu'à 1000 tours par minute; on ne possède aucune donnée précise sur la vitesse qui convient au maximum du rendement.

Ventilateurs soufflants. La figure 3 représente un ventilateur soufflant à ailes planes dirigées dans le sens du rayon. Le sens de la rotation est celui qui est indiqué par la flèche. Les ailes sont enveloppées, sur les trois quarts environ de leur circonférence extérieure, par un tambour, qui empêche l'air de s'échapper; et le quatrième quart correspond à un tuyau dans lequel l'air est chassé par la rotation des ailes. On pourrait donner de ce genre d'appareil une théorie approximative analogue à celle qui a été exposée pour les ventilateurs aspirants. D'après cette théorie, les ailes, au lieu d'être droites, devraient être courbées, comme l'indique la figure 4, en abc , pour que d'une part l'air entre sans choc dans les canaux et que, d'autre part, il

en sorte dans une direction à peu près tangentielle à la circonférence extérieure. Mais la faiblesse du rendement de ces machines a détourné les constructeurs de l'emploi des ailes courbes, qui sont

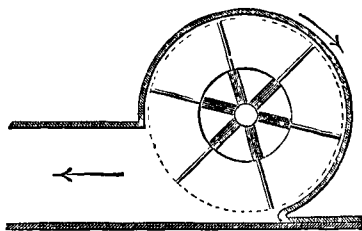


Fig. 3.

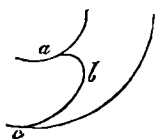


Fig. 4.

coûteuses; et les ailes droites, soit dirigées dans le sens du rayon, soit légèrement inclinées dans le sens opposé à la rotation, ont généralement prévalu.

Si l'orifice central de la figure 2, au lieu de s'ouvrir dans l'air, formait la bouche d'un tuyau communiquant avec un espace donné, le ventilateur deviendrait à la fois aspirant et soufflant.

(On peut consulter sur ce sujet le *Traité de l'aérage des mines* par M. Combes, le *Mémoire de M. Glépin sur les appareils appliqués à la ventilation des mines*, et un travail de M. Trassenster, inséré dans les *Annales des travaux publics de Belgique*.)

VOY. VENTILATEURS A VIS, ROUES PNEUMATIQUES, MACHINES SOUFFLANTES.

VENTILATEUR À VIS, ventilateur formé d'une surface hélicoïde, que l'on fait tourner dans un cylindre. Par cette rotation l'air est poussé dans un sens et appelé de l'autre. S'il était permis de considérer l'air comme un liquide de même densité, on pourrait appliquer à cet appareil une théorie analogue à celle des **PROULSEURS HÉLIÇOÏDES** (*Voy. ce mot*). Mais le phénomène est beaucoup plus compliqué. L'expérience prouve qu'il se forme deux courants d'air parallèles à l'axe, l'un sortant, près de la paroi cylindrique, l'autre rentrant, près de l'axe. On pourrait empêcher cette rentrée de l'air par l'axe, en montant la surface hélicoïde sur un noyau cylindrique d'un diamètre suffisant. Le rendement de ce ventilateur n'est que de 0,20 à 0,21. On peut consulter sur ce sujet le *Traité de l'aérage des mines* de M. Combes.

VENTÔSE, le sixième mois du calendrier républicain. Il répondait à peu près à l'intervalle compris entre le 20 février et le 20 mars (*Voy. CALENDRIER*).

VÉNUS, l'une des planètes principales. Sa moyenne distance au Soleil est 0,7233322, celle de la Terre étant 1; la durée de sa révolution sidérale est 224^d, 7007869, et son moyen mouvement diurne est de 1° 36' 7", 6698. Son orbite, dont l'excentricité est

0,00684331, fait un angle de 3° 23' 29" avec le plan de l'écliptique. Le diamètre de Vénus est 0,954, celui de la Terre étant 1; il en résulte que son volume est exprimé par 0,868, celui de la Terre étant pris pour unité. Sa masse est les 0,859 de celle de la Terre, et sa densité est les 0,923 de celle de notre globe; densité 4,96 = à peu près celle de l'iode.

Vénus tourne en 23^h 21^m 19^s, d'occident en orient, autour d'un axe qui fait avec le plan de son orbite un angle de 15 degrés. Cette planète paraît osciller de part et d'autre du Soleil; ses digressions restent comprises entre 45° et 47°⁴. Vénus a des phases analogues à celles de la Lune (*Voy. PHASES*). Cette planète passe quelquefois sur le disque du Soleil, et elle s'y projette alors sous la forme d'une tache noire parfaitement circulaire. Ces passages de Vénus sur le disque du Soleil n'ont lieu qu'à de grands intervalles. Les deux derniers ont eu lieu en 1761 et en 1769. Les plus prochains auront lieu en 1874 et en 1882. Ils offrent le moyen le plus précis de déterminer la parallaxe du Soleil.

Vénus a une atmosphère dans laquelle paraissent flotter des nuages. On a reconnu à la surface de cette planète des montagnes dont la hauteur atteint la 144^e partie de son rayon.

Lorsque Vénus est à l'orient du Soleil, on l'aperçoit le soir après le coucher de cet astre; lorsqu'elle est, au contraire, à l'occident du Soleil, elle se montre le matin avant le lever de cet astre. Elle apparaît dans les deux cas comme une étoile très-brillante; elle est quelquefois visible à l'œil nu, même en plein jour. Les anciens en avaient fait deux étoiles distinctes : *Vesper* et *Lucifer*.

Vénus est une des planètes dites *inférieures*, parce que sa distance au Soleil est moindre que celle de la Terre (*Voy. PLANÈTES*).

De toutes les planètes, Vénus est celle qui ressemble le plus à la Terre pour les dimensions, la masse, la densité, la durée de la rotation et de la révolution.

On représente cette planète par le signe ♀.

(*Voy. l'Annuaire du Bureau des longitudes*.)

VERGUES, longues pièces de bois arrondies, plus minces aux extrémités qu'au milieu, et qui supportent les voiles d'un navire. Ce sont des corps de révolution dont la génératrice se détermine par le procédé graphique connu sous le nom de **QUART DE NONANTE** (*Voy. ce mot*). Les vergues portent le nom des voiles auxquelles elles se rapportent (*Voy. MÂTURE, VOILES*).

VERMICULURES, refouillements de forme vermiculaire que l'on donne au parement de la pierre dans certaines parties d'une construction. C'est principalement dans les édifices en rapport avec les eaux dormantes ou courantes, dans les fontaines, les aqueducs, qu'on emploie les vermiculures, soit dans les soubassements, soit dans les chaînes saillantes, quelquefois dans les assises alternantes des colonnes.

L'invention des vermiculures paraît due à l'aspect que présentent naturellement certaines pierres exposées à l'humidité après un long espace de temps.

VERNAL (POINT). *Voy. POINT VERNAL*.

VERNIER, petit instrument qui permet d'apprécier les fractions des divisions tracées sur une règle ou sur un arc de cercle. Nous prendrons pour exemple le dispositif suivant, qui trouve son appli-

cation dans la mesure des bases (Voy. BASES). A l'extrémité RR d'une large règle (fig. 1) est adaptée une réglette AB, mobile, à coulisse, dans le sens de la longueur commune. Cette réglette porte des di-

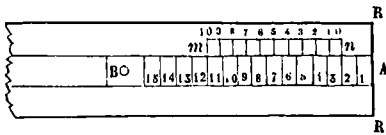


Fig. 1.

visions. Sur la règle même a été construite une échelle mn, dont la longueur embrasse 9 divisions de la réglette, mais qui a été divisée en 10 parties égales. Il en résulte que chaque division de cette échelle vaut $\frac{9}{10}$ de division de la réglette. C'est cette échelle qu'on appelle vernier, du nom de son inventeur, ou du moins du nom de celui qui l'a perfectionnée.

Supposons maintenant qu'on fasse avancer la réglette de manière que son extrémité A (fig. 2)

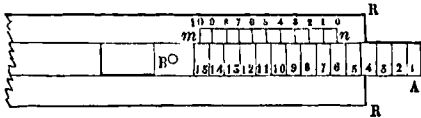


Fig. 2.

dépasse d'une certaine longueur l'extrémité RR de la règle, et qu'on veuille évaluer cette longueur en divisions de la réglette; le nombre entier des divisions se lira sans peine sur la réglette même. Dans la figure, ce nombre entier est 3. Pour évaluer la fraction de division qu'il faut ajouter à ce nombre entier, on cherche quel est le trait du vernier qui coïncide avec un trait de la réglette. Dans la figure, c'est le 7^e; on en conclut que la longueur cherchée est 3,7. En effet, chaque division du vernier valant $\frac{9}{10}$ de division de la réglette, le trait 6 du vernier se trouve à gauche du trait suivant de la réglette d'une quantité égale à $\frac{1}{10}$ de division de cette réglette; le trait 5 du vernier se trouve à gauche du trait suivant de la réglette de $\frac{2}{10}$ de division; le trait 4 du vernier se trouve à gauche du trait suivant de la réglette de $\frac{3}{10}$ de division, et ainsi de suite. Donc le zéro du vernier se trouve à la gauche du trait suivant de la réglette de $\frac{7}{10}$ de division; donc le trait 2 de la réglette, qui coïncidait primitivement avec le zéro du vernier, a avancé de $\frac{7}{10}$ de division, plus 3 divisions. Il en est de même du point A dont la distance au trait 2 n'a pas changé; donc le point A s'est avancé d'un nombre de divisions marqué par 3,7. En général, le nombre entier de divisions dont avance la réglette se lit sur la réglette même, et le nombre de dixièmes est exprimé par le rang du trait du vernier qui coïncide avec un trait de la réglette.

Dans cet exemple, le vernier est fixe et la règle divisée est mobile. Le contraire pourrait arriver : c'est ce qui a lieu particulièrement dans le vernier circulaire (fig. 3) dont sont munis la plupart des

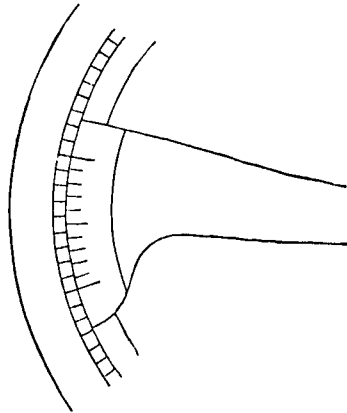


Fig. 3.

instruments employés à la mesure des angles. Le vernier est alors porté par une alidade mobile, et il est tracé sur un arc de cercle qui glisse à frottement doux sur la circonférence interne du limbe (Voy. GRAPHOMETRE, CERCLE RÉPÉTITEUR, THÉODOLITE). Son usage est d'ailleurs exactement le même : s'il embrasse 9 divisions du limbe et qu'il soit divisé en 10 parties égales, il donne les dixièmes d'une division du limbe, et si le limbe est divisé en degrés, il permettra de mesurer les angles à un dixième de degré près. Quelquefois le vernier embrasse 29 divisions du limbe, et il est divisé en 30 parties égales. Il donne alors les trentièmes d'une division du limbe, et, si le limbe est divisé en demi-degrés, on pourra mesurer les angles à un trentième de demi-degré près, c'est-à-dire à moins d'une minute. Dans ce cas, on se sert souvent d'une loupe fixée à l'alidade pour lire les indications du vernier.

Quand le cercle n'est divisé qu'en degrés, le vernier embrasse quelquefois aussi 29 divisions, que l'on divise en 30 parties; l'angle peut alors être mesuré en trentièmes de degré, c'est-à-dire par un multiple de l'arc de 2'. Pour éviter la multiplication par 2, on la fait une fois pour toutes sur le vernier même, et, au lieu de numérotter les divisions 0, 1, 2, 3, ..., 29, on écrit 0, 2, 4, 6, ..., 58; en sorte qu'on lit immédiatement le nombre de minutes.

La division du vernier circulaire en 30 parties est la plus ordinaire; mais on en emploie aussi d'autres. Si, par exemple, le limbe est divisé en arcs de 10' et qu'on veuille apprécier les quarts de minute, comme $\frac{1}{4}$ de minute est la 40^e partie de 10', il faudra prendre pour la longueur du vernier 39 divisions du limbe et la diviser en 40 parties égales.

On comprend que l'approximation que peut donner le vernier est limitée par l'épaisseur même des traits de division. L'expérience prouve que, sur un limbe de 0^m,20 de diamètre, le vernier ne peut donner une approximation supérieure à 10'', c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$ de minute. Dans ce cas, comme $\frac{1}{6}$ est la 60^e

partie de 10, il faut que le vernier embrasse 59 divisions du limbe, et soit divisé lui-même en 60 parties (*Voy. le Cours de Géodésie de M. Laussedat à l'Ecole polytechnique*).

En général, si l est le plus petit arc indiqué sur le limbe et λ l'arc qui exprime l'approximation de la lecture, $\frac{l}{\lambda}$ sera le nombre de divisions qu'il faut donner au vernier et $\frac{l}{\lambda} - 1$ le nombre des divisions du limbe embrassées par le vernier.

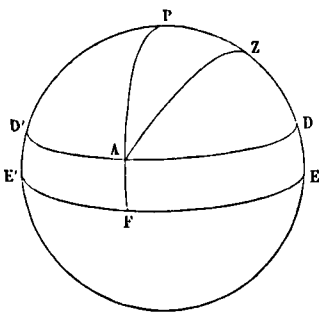
Dans les instruments qui exigent une grande précision, on fait usage de plusieurs verniers parcourant le même limbe; ils sont généralement placés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre. L'angle dont on cherche la mesure est donné par la moyenne que fournit la lecture de tous les verniers. On en emploie généralement deux dans le CERCLE RÉPÉTITEUR, quatre dans le THEODOLITE (*Voy. ces mots*), un plus grand nombre dans les instruments d'astronomie.

VERRINS, vis de grandes dimensions employées pour le décintrement des arches de ponts (*Voy. DÉCINTREMENT*). On en fait aussi usage dans la marine pour soulever de lourds fardeaux; par exemple pour mettre en place les *baux* de l'un des ponts.

VERSEAU, le onzième signe du ZODIAQUE (*Voy. ce mot*).

VERSOIR, partie de la charrue qui a pour fonction de soulever et de retourner sur le sol le prisme de terre, qui a été détaché par le soc et le coutre. La forme du versoir est celle d'une surface gauche, dont la partie antérieure, presque horizontale, se relie avec le soc, et dont la partie supérieure se redresse d'abord parallèlement au plan vertical de symétrie de la charrue et s'incline vers la droite à son extrémité (*Voy. MACHINES AGRICOLES*).

VERTICAL (PREMIER), cercle de la sphère céleste, dont le plan contient la verticale d'un lieu, et qui est perpendiculaire au méridien de ce lieu. La trace de ce plan sur l'horizon détermine la direction est et ouest. On a quelquefois besoin, dans la Navigation, de déterminer l'instant du passage d'un astre au premier vertical (*Voy. VARIATION DU COMPAS*). Pour calculer l'heure de ce passage, on considère le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle P, le zénith Z et l'astre A. Dans ce triangle, le côté PZ



est le complément de la latitude ZE ou λ ; le côté PA est le complément de la déclinaison AF ou D, et l'angle en Z est droit. On a donc, par une formule connue de Trigonométrie sphérique,

$$\cos P = \cot AP. \text{ tang. } PZ;$$

d'où

$$\cos P = \frac{\text{tang } D}{\text{tang } \lambda}. \quad [1]$$

Or l'angle P est l'angle horaire de l'astre au moment de son passage au premier vertical; d'où l'on déduira l'heure de ce passage. Si la déclinaison est variable, comme sa valeur n'est pas donnée pour l'instant du passage, on procédera par approximations successives: on commencera par mettre dans la formule [1] la valeur de D, qui est donnée dans la *Connaissance des Temps* pour midi à Paris; à l'aide de la valeur approchée de P, on calculera la déclinaison pour l'heure approchée du passage, en faisant une interpolation. Cette valeur plus approchée de la déclinaison, mise pour D dans la formule [1], donnera pour P une valeur plus approchée. Si l'approximation ne paraissait pas suffisante, on se servirait de l'heure plus approchée qu'on vient d'obtenir pour calculer une valeur plus approchée de la déclinaison, et, par suite, une nouvelle valeur plus approchée de P, et, par conséquent, de l'heure du passage.

On peut avoir besoin de déterminer la hauteur de l'astre au moment de son passage au premier vertical. Cette hauteur, que nous désignerons par h , est le complément du côté ZA, et le même triangle donne

$$\cos AP = \cos AZ. \cos PZ;$$

d'où

$$\sin h = \frac{\sin D}{\sin \lambda}. \quad [2]$$

Si la déclinaison n'était pas immédiatement connue, on déterminerait d'abord une valeur approchée de P en mettant dans la formule [1] la valeur de D donnée par la *Connaissance des Temps*; à l'aide de la valeur approchée de l'heure du passage, on calculerait une valeur plus approchée de D, que l'on mettrait dans la formule [2] pour avoir la hauteur h .

VERTICALE, direction de la pesanteur en un point donné de la surface du globe; cette direction est donnée par le *fil à plomb*. La verticale d'un lieu est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles dans ce lieu. Les points où la verticale prolongée va percer la sphère céleste se nomment ZÉNITH et NADIR. Le zénith seul est visible pour l'observateur placé dans le lieu dont on considère la verticale.

VIADUC, pont jeté sur une vallée pour le passage d'une route ou d'un chemin de fer. Ces sortes de ponts donnent lieu aux mêmes calculs que les ponts ordinaires; mais, comme les arches sont ordinairement très-élevées, il est important de pousser la COURBE DES PRESSIONS (*Voy. POUSSÉE DES VOÛTES*), jusqu'au bas des piédroits, afin de s'assurer qu'ils offrent la résistance nécessaire. On cite en France le viaduc de Chaumont, qui a une longueur de 600^m; le viaduc courbe de Nogent-sur-Marne, qui a 700^m de long, et dont les arches ont 20^m de haut et 50^m d'ouverture; et le viaduc qui traverse l'Indre, entre Tours et Monts, sur la ligne de Paris à Bordeaux, lequel a 750^m de long, et offre 59 arches en plein cintre de 22^m de haut et 10^m d'ouverture. Les viaducs sont quelquefois formés, comme les aqueducs, de deux étages d'arches superposées, comme le viaduc de la Combe de Fain, près de Dijon.

VIBORD, PRÉCEINTE placée à la hauteur des GAILLARDS (Voy. ces mots, et CONSTRUCTION NAVALE).

VIE MOYENNE, moyenne des nombres d'années pendant lesquels un groupe d'individus du même âge a vécu à partir de cet âge, quand tout le groupe a disparu (Voy. MORTALITÉ).

VIE PROBABLE, nombre d'années qu'un individu d'un âge donné peut espérer vivre encore, d'après les lois de la probabilité (Voy. MORTALITÉ).

VIERGE (LA); le sixième signe du ZODIAQUE (Voy. ce mot).

VIREMENT DE BORD, mouvement que l'on fait prendre à un navire pour présenter au vent le côté opposé à celui qui le recevait précédemment (Voy. ÉVOLUTION).

VIRER, tourner, terme de marine. *Virer de bord*, c'est faire tourner le navire de manière qu'il présente au vent le bord opposé à celui qui recevait son action (Voy. ÉVOLUTION). *Virer au cabestan*, c'est faire tourner le cabestan, soit pour lever l'ancre, soit pour exécuter toute autre manœuvre (Voy. CABESTAN, CONSTRUCTION NAVALE).

VIRGULE. Voy. PISTOLET.

VIRTUEL, l'opposé d'actuel; se dit de ce qui est seulement en puissance. Un déplacement virtuel est un déplacement qu'un point matériel pourrait recevoir, mais qui peut différer beaucoup de celui qu'il reçoit effectivement. On dit dans le même sens VITESSE VIRTUELLE, TRAVAIL VIRTUEL (Voy. ces mots).

VIRURE, file de vaigres formant le VAIGRAGE ou revêtement intérieur d'un navire. On donne aussi ce nom à chaque file de bordages formant le BORDÉ ou revêtement extérieur du navire (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

VIS, machine simple et organe de transformation de mouvement, dans lequel la rotation autour d'un axe produit une translation suivant cet axe. — On sait qu'une vis est formée d'un noyau cylindrique sur lequel s'enroule en HÉLICE (Voy. ce mot) une saillie à laquelle on donne le nom de *filet*. Pour concevoir la génération de ce filet, il faut imaginer qu'une figure plane, ordinairement un carré ou un triangle, se meuve de telle sorte : 1° que son plan passe constamment par l'axe du noyau; 2° que l'un de ses côtés soit constamment appliqué sur le noyau même; 3° que l'un des deux sommets qui terminent ce côté décrive une hélice tracée sur le noyau. Tous les autres points de la figure mobile décriront ainsi des hélices de même pas; et elle engendrera une saillie hélicoïde qui sera ce qu'on nomme le filet. Si cette figure est un carré, on a une vis à *filet carré*, telle que celle qui est représentée par la figure 1. Les vis en fer de fortes dimensions sont ordinairement des vis à filet carré, dont le pas est le double de la saillie. Si la figure génératrice est un triangle, on a une vis à *filet triangulaire*, telle que celle qui est représentée par la figure 2. Les vis en bois de fortes dimensions sont ordinairement des vis à filet triangulaire; le triangle générateur est un triangle isocèle rectangle dont l'hypoténuse s'appuie sur le noyau. Pour les vis des boulons, le triangle générateur est ordinairement un triangle équilatéral, quelquefois même un triangle isocèle dont l'angle au sommet est moindre que 60°, et dont la base

s'appuie sur le noyau. Dans tous les cas, dans les vis à filet triangulaire, le pas est égal au côté qui s'appuie sur le noyau; en sorte que le noyau tout entier est recouvert par les tours successifs du

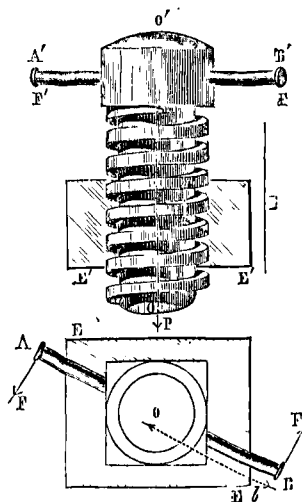


Fig. 1.

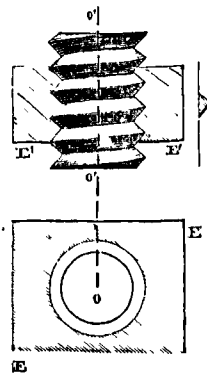


Fig. 2.

filet; tandis que dans la vis à filet carré une moitié seulement du noyau est ainsi recouverte.

La vis s'engage dans une pièce solide $EE, E'E'$ que l'on nomme son *écrou*, et qui présente en creux la forme que la vis offre en relief; mais il n'a qu'une partie de la longueur de la vis. Si l'écrou est fixe, la vis, en y pénétrant, prend un double mouvement de rotation autour de son axe et de translation suivant cet axe. Si c'est la vis qui est fixe, l'écrou peut cheminer le long de la vis en tournant en même temps autour de leur axe commun. Dans tous les cas, le déplacement relatif dans le sens de l'axe est toujours d'un pas à chaque tour, ou d'une fraction du pas pour la même fraction de tour.

I. La vis est ordinairement destinée à vaincre un effort P (fig. 1), qui s'exerce dans le sens de son axe; elle est mise en mouvement par deux forces motrices F et F' formant un couple perpendiculaire à l'axe, et appliquées aux extrémités d'une barre $AB, A'B'$ qui traverse la tête de la vis

perpendiculairement à cet axe. L'égalité des deux forces F et F' permet de supposer que la vis n'exerce aucun effort latéral contre les parois de son écrou. On admet de plus que le contact entre l'écrou et le filet ne s'opère que sur une hélice moyenne dont le rayon r est intermédiaire entre celui du noyau et le rayon extérieur du filet. — Nous nous occuperons d'abord de l'équilibre de la vis à filet carré. Nous la supposons verticale, et nous admettrons que les forces motrices sont employés à l'élever en soulevant un poids P suspendu à son axe. En chaque point M de l'hélice moyenne de contact AB (fig. 3), s'exerce, de la part de l'é-

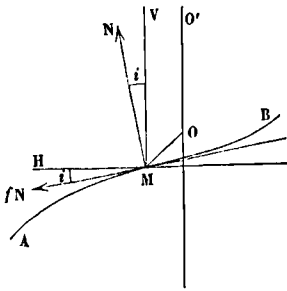


Fig. 3.

crou, une réaction R , qui peut se décomposer en deux : l'une N normale au filet, l'autre fN tangente à l'hélice et dirigée en sens contraire du mouvement de la vis par rapport à son écrou, c'est-à-dire vers le bas. La vis est en équilibre sous l'action des forces F et F' , du poids P , de toutes les réactions normales analogues à N , et de toutes les réactions tangentielles analogues à fN ; la somme des projections de toutes ces forces sur l'axe de la vis doit donc être égale à zéro, et il doit en être de même de la somme de leurs moments par rapport à ce même axe. Les forces F , F' ne donnent point de projections sur l'axe, puisqu'elles sont dans un plan perpendiculaire à cet axe. La force P s'y projette en vraie grandeur. La projection de la force N est

$$N \cos i,$$

en appelant i l'inclinaison de la tangente à l'hélice par rapport à l'horizon; la somme de toutes les projections analogues sera donc

$$\cos i \Sigma N.$$

La projection de la force tangentielle fN sur l'axe de la vis est

$$-fN \sin i;$$

par conséquent la somme des projections de toutes les forces tangentielles analogues est

$$-f \sin i \Sigma N.$$

L'équation d'équilibre relative aux projections sur l'axe est donc

$$(\cos i - f \sin i) \Sigma N = P. \quad [1]$$

Le moment de la force F par rapport à l'axe est Fb , en appelant b la distance OB (fig. 1); la somme des moments des deux forces motrices est donc

$$2Fb.$$

Le moment de la force P est nul, puisqu'elle est dirigée suivant l'axe. Pour avoir le moment de la force N , il faut d'abord la projeter sur un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire sur la tangente

MH , ce qui donne

$$N \sin i,$$

en valeur absolue, et la multiplier par la distance de cette projection à l'axe, qui est r ; on a ainsi

$$Nr \sin i;$$

et la somme des moments de toutes les forces normales est par conséquent

$$r \sin i \Sigma N.$$

Le moment de la force fN est de même

$$fN \cos i \cdot r,$$

et la somme des moments de toutes les forces tangentielles est en conséquence

$$fr \cos i \Sigma N.$$

L'équation d'équilibre relative aux moments est donc, en remarquant que les forces F , F' d'une part, et les forces N et fN de l'autre, tendent à faire tourner en sens contraire,

$$r (\sin i + f \cos i) \Sigma N = 2Fb. \quad [3]$$

Éliminant ΣN entre les équations [1] et [2], on obtient

$$\frac{2Fb}{P} = \frac{r (\sin i + f \cos i)}{\cos i - f \sin i},$$

d'où

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{\sin i + f \cos i}{\cos i - f \sin i} = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \text{tang}(i + \varphi), \quad [2]$$

en appelant φ l'angle du frottement, dont la tangente est f .

Si, par exemple, on a

$$\text{tang } i = 0,066,$$

d'où

$$i = 3^\circ 46',$$

et

$$f = 0,12,$$

d'où

$$\varphi = 6^\circ 50',$$

il viendra

$$\text{tang}(i + \varphi) = \text{tang } 10^\circ 36' = 0,187,$$

par conséquent

$$F = 0,187 \cdot P \cdot \frac{r}{2b}.$$

La force F augmente avec l'inclinaison i de l'hélice moyenne et avec le frottement. Si l'on avait

$$i + \varphi = 90^\circ,$$

on trouverait

$$F = \infty;$$

mais c'est un cas idéal qui ne se présente jamais.

Si, au lieu de deux forces motrices F formant un couple, il n'y en avait qu'une seule, pour peu qu'elle ne fût pas exactement perpendiculaire à la barre AB elle appuierait la vis contre les parois latérales de l'écrou, et il en résulterait un frottement dont il pourrait devenir nécessaire de tenir compte. Mais on évite cette circonstance en faisant agir deux forces par couple.

II. Il est utile de comparer le travail des forces motrices F au travail de la résistance P . Or pour une fraction ϵ de tour, le travail de la force F est

$$F \cdot 2\pi b \cdot \epsilon,$$

et le travail des deux forces motrices est

$$4\pi b \cdot F \cdot \epsilon.$$

Pendant que la vis a tourné d'une fraction ϵ de tour, elle a cheminé suivant son axe de la même fraction de son pas; si donc h désigne ce pas, le travail de la force P est exprimé par

$$Ph \cdot \epsilon.$$

On a donc

$$\frac{\mathcal{C}F + \mathcal{C}F'}{\mathcal{C}P} = \frac{4\pi b F \varepsilon}{Ph \varepsilon} = \frac{F \cdot 2b}{Pr} \cdot \frac{2\pi r}{h},$$

Or, d'après l'équation [3] on a

$$\frac{F \cdot 2b}{Pr} = \tan(\varphi + i).$$

D'ailleurs, d'après les propriétés de l'hélice, on a

$$\frac{h}{2\pi r} = \tan i;$$

il vient donc

$$\frac{2\mathcal{C}F}{\mathcal{C}P} = \frac{\tan(\varphi + i)}{\tan i}. \quad [4]$$

Dans l'exemple traité plus haut, on aurait

$$\frac{2\mathcal{C}F}{\mathcal{C}P} = \frac{0,187}{0,066} = 2,833.$$

Ainsi le travail moteur serait près du triple du travail de la force P. En employant la vis il y a donc économie de force, mais il n'y a pas économie de travail.

En égalant à zéro la dérivée de l'expression [4] par rapport à i , on trouve que le minimum du travail moteur correspondant à un travail donné de la force P répond au cas où l'on aurait

$$i = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi;$$

mais l'inclinaison i est toujours fort loin de cette valeur dans la pratique.

Si le frottement était négligeable, ce qui n'a jamais lieu, on aurait

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \tan i = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{h}{2\pi r} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{h}{2\pi b},$$

c'est-à-dire que l'une des forces mouvantes serait à la moitié de la résistance P comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire le point d'application de la force mouvante; c'est la relation démontrée dans les traités de Statique. En même temps, le second membre de la relation [4] se réduirait à l'unité, et le travail moteur serait égal au travail de la résistance P. Il s'en faut toujours de beaucoup en réalité qu'il en soit ainsi.

III. Si la force P était mouvante, et que la vis descendit au lieu de monter, le sens des forces tangentielles changerait; il faudrait donc, dans les formules [3] et [4], changer le signe de φ , ce qui donnerait

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \tan(i - \varphi) \quad [5]$$

et

$$\frac{2\mathcal{C}F}{\mathcal{C}P} = \frac{\tan(i - \varphi)}{\tan \varphi}. \quad [6]$$

Pour $i = \varphi$ on aurait $F = 0$, c'est-à-dire que, dans ce cas, la vis descendrait d'un mouvement uniforme sous l'action du poids P. Si l'on avait $i < \varphi$, on trouverait pour F une valeur négative; c'est-à-dire que la vis ne pourrait pas descendre d'elle-même, et qu'il faudrait que la force F changeât de sens pour venir en aide à la force P.

IV. La force P, au lieu d'être un poids, pourrait être une pression exercée de bas en haut dans le sens de l'axe. Dans ce cas les forces F seraient employées à faire descendre la vis dans son écrou. Les forces P, F, fN auraient donc changé de sens. Mais le contact entre l'écrou et la vis se ferait alors par la partie supérieure du filet, en sorte qu'il faudrait

aussi changer le sens de la réaction normale N. Toutes les forces ayant ainsi changé de signe, les équations d'équilibre [1] et [2] resteraient les mêmes; et par conséquent aussi les équations [3] et [4], ou bien [5] et [6].

On verrait comme ci-dessus que pour $i = \varphi$ la pression P ferait monter la vis d'un mouvement uniforme, sans le secours d'aucune force F; mais pour $i < \varphi$ ce mouvement ne pourrait avoir lieu que si les forces F venaient en aide à la pression P. — Ceci explique le jeu des vis de pression. Ces vis sont d'un faible pas, et les surfaces ne sont point rendues onctueuses; il en résulte que la condition $i < \varphi$ se trouve remplie, et que dès lors la pression qui s'exerce contre la vis, dans le sens de son axe, ne peut la desserrer, quelque grande qu'elle soit d'ailleurs.

V. Nous considérerons maintenant l'équilibre de la vis à filet triangulaire, en reprenant l'hypothèse primitive, c'est-à-dire en supposant les forces F employées à faire monter la vis, chargée d'un poids P. Soit M (fig. 4) un point quelconque de

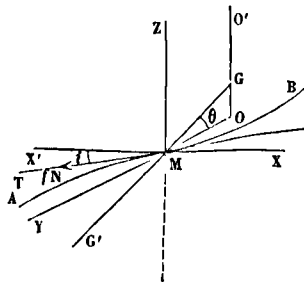


Fig. 4.

l'hélice moyenne de contact AB, soit MT la tangente en M à cette courbe, et soit GG' la génératrice de la surface hélicoïdale qui passe par le point M. Menons YMO perpendiculaire à l'axe OO' de la vis; et soit GMO = θ l'angle de la génératrice GG' avec l'horizon. Menons MZ parallèle à l'axe, et MX perpendiculaire à MZ et à MY. La droite MT sera dans le plan ZMX; soit TMX' = i l'inclinaison de la tangente MT avec l'horizon. Au point M l'écrou exerce sur la vis une réaction R, que l'on peut décomposer en deux; l'une N normale à la surface hélicoïdale, et par conséquent aux droites MT et MG, l'autre fN tangente à l'hélice AB. Décomposons la force N suivant les trois axes MX, MY et MZ; si α , β , γ sont les angles de la force N avec ces axes, les trois composantes auront respectivement pour valeur

$$N \cos \alpha, \quad N \cos \beta, \quad N \cos \gamma.$$

Projetons toutes les forces sur l'axe des Z; la projection de la force N sera $N \cos \gamma$; et par conséquent, comme la normale en un point quelconque de la surface hélicoïdale fait le même angle avec l'axe de la vis, la somme des projections des forces analogues à N sera

$$\cos \gamma \Sigma N.$$

La projection de la force fN sera

$$-fN \sin i;$$

et par conséquent la somme de toutes les projections analogues sera

$$-f \sin i \Sigma N.$$

L'équation d'équilibre relative aux projections sera donc

$$(\cos \gamma - f \sin i) \Sigma N = P. \quad [7]$$

Les moments des forces $N \cos \beta$ et $N \cos \gamma$ par rapport à l'axe OZ sont nuls; le moment de la force $N \cos \alpha$ est $N \cos \alpha \cdot r$;

et par conséquent la somme de tous les moments analogues est

$$r \cos \alpha \Sigma N.$$

Le moment de la force fN est

$$fN \cos i \cdot r;$$

et par suite la somme des moments de toutes les forces tangentielles est

$$r f \cos i \Sigma N.$$

En ayant égard au sens dans lequel chaque force tend à faire tourner la vis autour de son axe, on aura donc pour l'équation d'équilibre relative aux moments

$$r (\cos \alpha + f \cos i) \Sigma N = 2Fb; \quad [8]$$

et, en éliminant ΣN entre les relations [7] et [8], on obtient

$$\frac{2Fb}{P} = \frac{r (\cos \alpha + f \cos i)}{\cos \gamma - f \sin i},$$

d'où

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{\cos \alpha + f \cos i}{\cos \gamma - f \sin i}. \quad [9]$$

Il reste à déterminer $\cos \alpha$ et $\cos \gamma$; ce qui se fera en exprimant que la direction de la force N est perpendiculaire aux deux droites MT et GG'. Les angles de la droite MT avec les axes MX, MY, MZ sont respectivement

$$i, \quad 90^\circ, \quad 90^\circ - i;$$

on a donc pour première condition :

$$\cos \alpha \cdot \cos i + \cos \beta \cdot \cos 90^\circ + \cos \gamma \cdot \cos (90^\circ - i) = 0,$$

ou

$$\cos \alpha \cos i + \cos \gamma \sin i = 0,$$

ou encore

$$\cos \alpha = -\cos \gamma \tan i. \quad [10]$$

Les angles de la droite GG' avec les mêmes axes sont respectivement

$$90^\circ, \quad \theta, \quad \text{et} \quad 90^\circ - \theta;$$

on a donc pour seconde condition

$$\cos \alpha \cdot \cos 90^\circ + \cos \beta \cdot \cos \theta + \cos \gamma \cdot \cos (90^\circ - \theta) = 0,$$

ou

$$\cos \beta \cos \theta + \cos \gamma \sin \theta = 0,$$

ou encore

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cdot \tan \theta. \quad [11]$$

On a enfin entre les trois cosinus des angles α , β et γ la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad [12]$$

Des trois relations [10], [11] et [12] on tire

$$\cos \alpha = \frac{-\tan i}{\sqrt{1 + \tan^2 i + \tan^2 \theta}},$$

$$\cos \beta = \frac{-\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 i + \tan^2 \theta}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 i + \tan^2 \theta}}.$$

Mais, comme on a déjà tenu compte du sens de la force $N \cos \alpha$ dans la deuxième équation d'équilibre, on ne devra prendre que la valeur absolue de $\cos \alpha$. En désignant par k le radical, on aura donc

$$\cos \alpha = \frac{\tan i}{k} \quad \text{et} \quad \cos \gamma = \frac{1}{k};$$

par suite

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{\frac{\tan i}{k} + f \cos i}{1 - f \sin i}$$

$$= P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{\sin i + \cos i \cdot f k \cos i}{\cos i - \sin i \cdot f k \cos i}.$$

Si l'on pose

$$f' = f k \cos i = f \cos i \sqrt{1 + \tan^2 i + \tan^2 \theta} \quad [13]$$

et que l'on appelle φ' l'angle dont la tangente est f' , on pourra mettre cette expression sous la forme

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \frac{\sin i + f' \cos i}{\cos i - f' \sin i} = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \tan (i + \varphi'), \quad [14]$$

qui est la même que la relation [3], à cela près que φ est remplacé par φ' . La théorie de la vis à filet carré est donc applicable à la vis à filet triangulaire pourvu qu'on y remplace le coefficient f du frottement réel par un coefficient fictif f' , donné par la relation [13], et, par suite, l'angle φ par l'angle φ' .

Comme le second membre de l'équation [13] est plus grand que l'unité, on voit que φ' est plus grand que φ , et que par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, la vis à filet triangulaire exige un effort F plus grand que la vis à filet carré. Nous insistons sur ce point parce qu'on a quelquefois donné de la vis à filet triangulaire une théorie, fondée sur une fausse combinaison des forces, qui conduisait à une conclusion opposée.

Pour $\theta = 0$, on a

$$f' = f,$$

et l'on retombe sur la formule [3].

Pour donner une idée de la différence des résultats entre les deux genres de vis, adoptons les données de l'exemple traité ci-dessus, savoir

$$i = 3^\circ 46',$$

d'où

$$\tan i = 0,066,$$

et

$$\varphi = 6^\circ 50',$$

d'où

$$f = 0,12;$$

et supposons de plus

$$\theta = 30^\circ,$$

d'où

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

on trouvera

$$k = 1,156; \quad \cos i = 0,9978;$$

d'où

$$f' = f \cdot 1,156 \cdot 0,9978 = 1,153 f,$$

ou

$$f' = 0,12 \cdot 1,153 = 0,1383,$$

et

$$\varphi' = 7^\circ 52'.$$

Par suite

$$F = P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \tan (3^\circ 46' + 7^\circ 52')$$

$$= P \cdot \frac{r}{2b} \cdot \tan (11^\circ 38'),$$

ou enfin

$$F = 0,206 P \cdot \frac{r}{b}.$$

L'effort F est donc augmenté dans le rapport de

186 à 206; c'est-à-dire qu'il est augmenté d'environ un dixième.

VI. Les usages de la vis sont très-multipliés ; nous ne parlerons que des principaux.

Dans la *presse à vis*, une vis verticale mobile dans un écrou fixe est mise en mouvement à l'aide de barres qui traversent sa tête; elle descend, et fait descendre avec elle un plateau horizontal qu'elle oblige à presser les matières placées au-dessous. — Dans les *balanciers à découper*, à *percer*, à *estamper* ou à *frapper les monnaies*, la vis verticale, également mobile dans un écrou fixe, est munie à sa partie supérieure de barres dont les extrémités, portent des boules pesantes destinées à accroître le MOMENT D'INERTIE (Voy. ce mot) du système; ces barres constituent le balancier proprement dit. On leur imprime un rapide mouvement de rotation; la vis descend rapidement, et ne s'arrête que lorsque le travail résistant des matières sur lesquelles la machine opère a absorbé toute sa puissance vive. L'extrémité inférieure de la vis est liée à une pièce appelée *coulant*, mobile dans des guides verticaux; et c'est ce coulant qui porte l'outil. Les VIS DE PRESSION (Voy. ce mot) sont aussi des vis animées d'un double mouvement dans un écrou fixe. (Cette disposition se retrouve dans le SPHÉROMÈTRE). Le VERIN (Voy. ce mot) offre encore un exemple d'une vis animée de ce double mouvement.

VII. Nous avons supposé jusqu'ici l'écrou fixe et la vis mobile. L'écrou peut devenir mobile sans que la théorie de l'appareil soit modifiée, attendu que le mouvement relatif des deux pièces reste le même. Mais l'écrou peut être rendu mobile de plusieurs manières.

La vis peut être mobile dans des collets ou au moyen de tourillons, de manière à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe. L'écrou est alors susceptible d'un mouvement de translation parallèle à l'axe, que l'on assure à l'aide de guides convenables. Cette disposition a des applications nombreuses. On la trouve dans les VIS CALANTES et dans les VIS DE RAPPEL (Voy. ces mots). — La pièce principale des machines à diviser la ligne droite est une longue vis, d'une exécution parfaite, à laquelle on peut donner un mouvement de rotation autour de son axe, à l'aide d'une petite manivelle; l'écrou est mobile et peut prendre un mouvement de translation parallèle à l'axe. Quand la manivelle fait un tour, l'écrou avance de la longueur d'un pas. Si la manivelle fait une fraction de tour, l'écrou avance de la même fraction du pas. — L'écrou porte un *traçoir* à bascule, à l'aide duquel on peut faire un trait sur la règle ou sur le tube que l'on veut diviser. On peut régler ainsi le mouvement de l'écrou de manière à faire des traits équidistants aussi rapprochés qu'il est nécessaire. — C'est à l'aide d'une disposition semblable que l'on fait mouvoir le *chariot porte-outil* dans le *tour parallèle*. C'est encore d'après une disposition semblable que l'on construit les VIS MICROMÉTRIQUES dont les instruments d'optique sont munis (Voy. VIS MICROMÉTRIQUE et MICROMÈTRE). — Enfin c'est d'après le même principe que fonctionnent les *vis à bois* qui servent à assembler les bois de petites dimensions. On creuse dans les deux pièces un trou cylindrique;

on y introduit la vis, en lui donnant, à l'aide du tourne-vis, un double mouvement de rotation autour de son axe et de translation suivant cet axe. Elle creuse elle-même son écrou dans le bois; mais, lorsque la tête de la vis a atteint la pièce supérieure, le mouvement de translation se trouve gêné; la vis tourne dans cette pièce sans avancer sensiblement; elle se trouve alors dans la même situation que si elle ne pouvait prendre qu'un mouvement de rotation; la pièce inférieure joue alors le rôle d'un écrou mobile; et la rotation de la vis a pour effet de serrer de plus en plus cette pièce inférieure contre la supérieure.

L'écrou peut être disposé de telle sorte qu'il ne puisse que tourner autour de la vis sans avancer ou reculer dans le sens de son axe; il faut alors que ce soit la vis qui se déplace dans le sens de cet axe. On retrouve cette disposition dans d'anciennes manœuvres de vannes (fig. 5). La vanne est fixée à

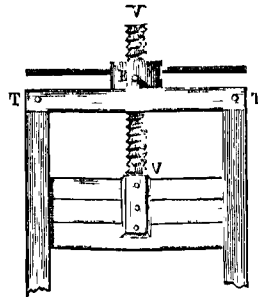


Fig. 5.

l'extrémité d'une vis en bois VV, qui peut se mouvoir verticalement, mais qui ne peut prendre aucun mouvement autour de son axe. Son écrou E, maintenu en contact avec la traverse TT par le poids même de la vanne, n'a que la faculté de tourner autour de l'axe de la vis. Quand on fait tourner cet écrou, à l'aide des barres horizontales qui y sont adaptées, il faut donc que la vis monte ou descende en entraînant la vanne avec elle.

Cette disposition se retrouve dans beaucoup de machines. Dans les lorgnettes jumelles de spectacle, dites à *procédé*, un écrou, qui ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, fait ainsi monter ou descendre une vis à laquelle sont liés les deux oculaires.

Enfin, il peut arriver que la vis soit entièrement fixe, et que ce soit l'écrou qui ait les deux mouvements de rotation et de translation. Ce cas précisément celui de l'écrou d'un boulon; celui-ci reste fixe, et c'est en faisant tourner l'écrou à l'aide de ses oreilles qu'on l'oblige à se rapprocher de la tête de la vis, et à serrer ainsi les pièces que l'on veut assembler.

Les machines à fileter et les machines à tarauder, qui servent à la fabrication des vis et des écrous, sont elles-mêmes fondées sur les propriétés de la vis.

VIII. On emploie dans quelques circonstances une vis dite à *deux pas*, formée d'un noyau cylindrique AA' (fig. 6), sur lequel sont enroulés en sens contraire deux filets égaux, formant ainsi deux vis de même pas, symétriquement placées par

rapport à un plan PP perpendiculaire à l'axe. Le noyau ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe; à chaque vis correspond un écrou, qui ne peut prendre au contraire

h d'une marche; elle devra être comprise entre les limites assignées à cette hauteur. Il faudra de plus que cette hauteur ne dépasse pas la moitié du giron. Si ces conditions n'étaient pas remplies, on diminuerait l'embranchement, afin de diminuer la pente de la ligne de foulée.

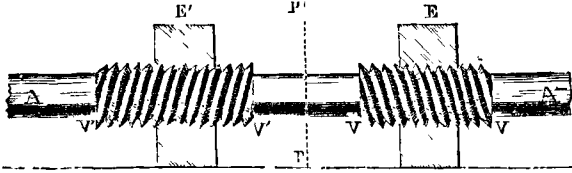


Fig. 6.

qu'un mouvement de translation parallèle à l'axe. Quand on fait tourner le noyau, les deux écrous E et E' marchent en sens contraire, de quantités égales, et se rapprochent ou s'éloignent suivant le sens de la rotation. — On se sert de cette disposition, dans les chemins de fer, pour rallonger ou raccourcir les attaches qui relient les wagons d'un même train. On s'en sert aussi dans les locomotives à détente variable pour rapprocher ou écarter les deux parties de la pièce appelée *glissière*, afin de découvrir ou de couvrir au contraire, pendant une portion plus ou moins grande de la course du piston, les orifices par lesquels la vapeur traverse le tiroir. On emploie également cette disposition pour rapprocher deux tiges ou deux tuyaux qui doivent être placés dans le prolongement l'un de l'autre. On l'a également utilisée dans les verins employés au décentrement des arches de ponts (Voy. DÉCENTREMENT). Enfin elle a été appliquée aux *micromètres* des instruments d'optique.

normales à la ligne de foulée menées par les milieux des distances $\alpha.1, 1.2, 2.3$, etc., sont aussi tangentes à cette développée, et servent à la tracer lorsque les normales aux points $\alpha, 1, 2, 3$, etc., ne

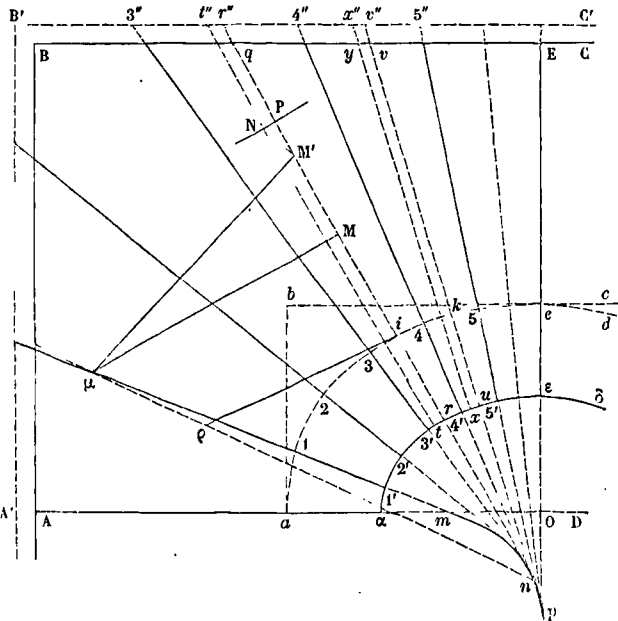


Fig. 1.

Voyez, pour compléter les notions relatives à la vis, les articles *Vis DIFFÉRENTIELLE* et *Vis SANS FIN*. Le lecteur pourra consulter sur ce sujet la *Cinématique* de M. Morin, celle de M. Laboulaye, et le *Cours de Cinématique* professé il y a quelques années à l'École centrale par M. Faure.

VIS À JOUR, nom donné à un escalier tournant suspendu (Voy. ESCALIERS).

Soit ABCD (fig. 1) le polygone déterminé par les traces horizontales des murs formant la cage, et soit $\alpha\epsilon = E\epsilon$ l'embranchement que l'on veut donner à l'escalier.

On prend $\alpha\alpha = \epsilon\epsilon = 0^m,48$, et l'on trace le polygone $abcd$, dont les côtés sont parallèles à ceux du premier. On y inscrit une courbe $\alpha\epsilon d$, qui sera la *ligne de foulée*. On divise cette ligne en parties égales aux points 1, 2, 3, 4, etc.; la longueur commune g de ces parties sera le *giron* de l'escalier; elle devra être comprise entre les limites assignées au giron. En divisant la différence de niveau des points projetés en a et en d en un nombre de parties égal à celui des marches, on aura la hauteur

qui ne sont pas assez rapprochées. Sur ces normales on porte les longueurs $\alpha.1', 2.2', 3.3'$, etc., égales à $\alpha\alpha$; les extrémités de ces longueurs déterminent la courbe $\alpha\epsilon\delta$, à laquelle on donne le nom de *courbe de jour*; c'est la projection horizontale de la rampe. Lorsque la cage est rectangulaire, la ligne de foulée est simplement une ellipse, mais il faut bien remarquer que la courbe équidistante $\alpha\epsilon\delta$ n'est plus une courbe du second degré. — Imaginons qu'après avoir construit un triangle rectangle ayant une base horizontale égale au développement de la ligne de foulée, et un côté vertical égal à la différence de niveau des points projetés en a et en d , on enroule ce triangle sur le cylindre à génératrices verticales qui a pour base la ligne de foulée; l'hypoténuse de ce triangle tracera sur le cylindre dont il s'agit une hélice elliptique, sur laquelle seront les points projetés en 1, 2, 3, 4, etc., à des hauteurs au-dessus de a égales à $h, 2h, 3h, 4h$, etc., h désignant la hauteur d'une des marches. Imaginons,

d'un autre côté, un cylindre vertical dont la base soit la développée *mnp* de la ligne de foulée; les arêtes saillantes des marches seront horizontales et tangentes à ce cylindre. Ces arêtes sont donc des génératrices d'une surface gauche engendrée par une droite horizontale assujettie à rencontrer toujours l'hélice elliptique dont nous avons parlé, et à rester tangente au cylindre *mnp*. Cette surface gauche est une sorte d'*extrados* fictif auquel on peut concevoir que les arêtes saillantes des marches appartiennent. Le dessous de l'escalier, jouant ici le rôle d'*intrados* (*Voy. VOÛTES*), est une seconde surface gauche égale à la première; mais les génératrices correspondantes des deux surfaces sont à une distance verticale constante l'une de l'autre, que nous représenterons par *H*. Les droites 1.1', 2.2', 3.3', etc., peuvent être considérées par conséquent comme les projections des génératrices de l'*intrados* qui répondent aux arêtes saillantes des marches, c'est-à-dire qui leur sont respectivement parallèles.

On adopte pour arêtes de douelle de l'*intrados* les génératrices qui se projettent suivant les normales à la ligne de foulée menées par les milieux des girons. Ainsi, la normale *qir* menée par le milieu de l'arc 3.4 sera considérée comme la projection d'une arête de douelle. Le joint correspondant devrait à la rigueur être une surface gauche formée par les normales à l'*intrados* menées par les divers points de l'arête de douelle projetée en *qir*. Mais on se contente de prendre pour joint le plan déterminé par la génératrice *qir* et la normale à l'*intrados* menée par le milieu *M* de cette génératrice. Pour déterminer ce plan, on substitue à la surface gauche de la douelle un parabolôïde de raccordement. Menons la tangente en *i* à la ligne de foulée, et sur cette tangente prenons une longueur *ip* égale à un nombre exact de fois le giron, trois fois par exemple. Joignons le point *p* au point *n* où la normale *qr* touche la développée *mnp*. La droite *ip* pourra être considérée comme la projection de la tangente à l'hélice projetée en *ae*. Le point *n* est d'ailleurs la projection d'une génératrice du cylindre vertical qui a pour base *mnp*. Concevons le parabolôïde engendré par une droite toujours horizontale, assujettie à s'appuyer constamment sur la tangente à l'hélice projetée en *ip* et sur la verticale projetée en *n*. Ce parabolôïde aura le même plan directeur que la surface de l'*intrados*, et il aura avec cette surface deux plans tangents communs, savoir: le plan tangent en *i* et le plan tangent en *n*; car les deux surfaces ont en *i* deux tangentes communes: la génératrice *qr* et la tangente à l'hélice; elles ont de même en *n* deux tangentes communes: la génératrice *qr* et la directrice verticale. D'après les propriétés des tangentes aux surfaces gauches (*Voy. PLANS TANGENTS*), les deux surfaces considérées seront donc tangentes tout le long de la génératrice *qr*, et, par conséquent, elles auront en *M* la même normale. Il suffit donc de construire en ce point la normale au parabolôïde. Cette normale est dans un plan perpendiculaire à *qr*, et dont la trace sera une droite *μM* perpendiculaire à cette ligne. Ce plan normal rencontre les génératrices projetées en *qr* et *pn* en deux points qui se projettent eux-mêmes en *M* et en *μ*; mais ces deux points ne sont pas au même niveau: il y a entre eux une différence de

hauteur verticale égale à $3h$, puisque la tangente *ip* a été prise égale à 3 fois le giron. Il en résulte que, si l'on rabat le plan normal autour de sa trace *μM* supposée contenue dans le plan horizontal de la génératrice *pn*, le point *M* se rabattra en *M'* sur *qr* à une distance *MM'* égale à $3h$, et la droite qui va du point projeté en *M* au point *μ* se rabattra suivant *μM'*. Or cette droite peut être considérée comme une génératrice du second système du parabolôïde. En effet, la tangente en *i* à l'hélice et la verticale du point *n*, qui sont les directrices de ce parabolôïde, sont toutes deux parallèles au plan vertical dont *ip* est la trace; elles peuvent donc être regardées comme deux génératrices du second système, et la droite projetée suivant *μM*, qui est parallèle au même plan vertical, peut être regardée comme une autre génératrice du même système. La droite *μM'* est donc le rabattement d'une génératrice, et par conséquent la normale en *M'*, qui est dans le plan normal rabattu, doit être perpendiculaire à *μM'*. On aura donc le rabattement de cette normale en menant *M'N* perpendiculaire à *μM'*. Cette droite sera en même temps la trace sur le plan normal rabattu, du plan qui doit servir de joint. Si *NP* représente la trace, sur le plan normal rabattu, de la face supérieure de la marche, le joint considéré coupera cette face supérieure suivant une parallèle à *qr* menée par le point *N*, et qui se projettera horizontalement suivant une droite *t't*. Il est important que la hauteur *M'P* soit réglée de manière que le point *t* reste compris entre les points *r* et *3'*, afin que, même près de la rampe, l'arête supérieure du joint reste couverte par la marche suivante, comprise entre *33'* et *44'*. Il faut, d'un autre côté, que cette hauteur soit au moins de 4 ou 5 centimètres, pour que la voûte offre une solidité suffisante. Si ces conditions n'étaient pas remplies, il faudrait diminuer l'embranchement, afin de donner plus de longueur à l'arc *3'4'*. Tous les autres joints se détermineront de la même manière.

Avant de procéder à la taille des marches, il faut se procurer les *panneaux de tête*, c'est-à-dire le développement des intersections de la marche, d'une part avec le mur formant la cage, ou du moins avec un plan parallèle (*A'B'* ou *B'C'*) mené à une distance égale à celle dont on veut que la marche soit engagée; d'autre part avec le cylindre vertical qui a pour base la courbe de jour *æδ*. Pour obtenir la première intersection, on commencera par prolonger jusqu'à la rencontre de *B'C'*, aux points *3''*, *t''*, *r''*, *4''*, *x''*, *v''*, *5''*, les projections *tN* et *rq* des arêtes du premier joint, les projections *xy* et *uv* des arêtes du second joint, et les projections *33'* et *44'* des arêtes saillantes relatives à la marche que l'on considère.

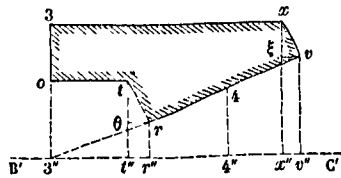


Fig. 2.

Soit *B'C'* (fig. 2) la droite sur laquelle ces différents points de rencontre sont rapportés. On obser-

vera que les points $2''$, r'' , $4''$, v'' appartiennent aux projections de quatre génératrices de la douelle gauche, c'est-à-dire aux projections de quatre horizontales successives, dont la différence de niveau est $\frac{1}{2}h$, puisque la distance successive des points 3, 4, 5 (fig. 1) est $\frac{1}{2}g$. On élèvera donc d'abord aux points r'' , $4''$, v'' des perpendiculaires respectivement égales à $\frac{1}{2}h$, h et $\frac{3}{2}h$, et l'on joindra le point 3'' (fig. 2) et les extrémités r , 4 , v des perpendiculaires par une courbe qui représentera l'intersection du plan vertical B'C' (fig. 1) avec la douelle gauche de l'escalier. On élèvera ensuite au point t'' une perpendiculaire sur laquelle on prendra un point t à une distance $t0$ au-dessus de r égale à la distance M'P de la figure 1. On déterminera de même le point x en prenant sur une perpendiculaire élevée en x'' un point placé à une hauteur x au-dessus de v égale à M'P, attendu que la distance verticale entre les arêtes horizontales de chaque joint doit être la même. On joindra tr et xv , qui seront les intersections des deux joints avec le plan vertical B'C'. Enfin, par les points t et x , on mènera des horizontales $t0$ et $x3$ terminées à la verticale du point 3'', et l'on aura en $3xvrt0$ le panneau de tête correspondant à la cage. Pour obtenir le panneau de tête correspondant à la rampe, il faudra développer en ligne droite l'arc $3'tr4''xu$ (fig. 1 et 3) et

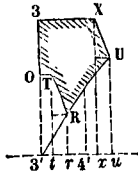


Fig. 3.

élever par ces divers points des perpendiculaires respectivement égales à celles de la figure 2. Le panneau se déterminera de la même manière, avec cette différence toutefois que les intersections TR et XU des deux joints plans, avec le cylindre qui a pour base la courbe de jour, seront des lignes courbes elles-mêmes, dont il faudra déterminer au moins un point intermédiaire. Pour avoir, par exemple, un point intermédiaire entre T et R, on prendra (fig. 1) un point intermédiaire entre M' et N par lequel on mènera une parallèle à pq terminée à la rencontre de la courbe de jour, entre t et r ; on reportera ce point sur la figure 3; on élèvera par ce point une perpendiculaire à $3'u$, sur laquelle on prendra un point situé au-dessus de R à la même hauteur que le point choisi entre M' et N (fig. 1) est au-dessus de M'.

On peut remarquer sur la figure 2 que la distance $3''3$ comprise entre deux génératrices de l'extrados fictif et de l'intrados qui ont la même projection horizontale, se compose de $r''r + \theta t + 03$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}h + \theta t + h$ ou de $\frac{3}{2}h + \theta t$. Or θt est la distance M'P de la figure 1; on a donc, en désignant

par H la distance $33'$ de la figure 2,

$$H = \frac{3}{2}h + M'P,$$

ce qui détermine H lorsque M'P a été fixé d'après les conditions indiquées plus haut.

Pour appliquer le trait sur la pierre, on préparera un prisme droit ayant pour base la projection horizontale de la marche, soit $3'3''v''u$ (fig. 1), et pour hauteur la distance H. Sur la base supérieure de ce prisme, on tracera le contour $3'3''x''x$; à l'aide de l'équerre, on taillera la contre-marche suivant l'arête $3'3''$, et un plan vertical suivant $3''v''$ sur lequel on appliquera le panneau de tête de la figure 2. On se servira également de l'équerre pour tailler la face cylindrique répondant à la courbe de jour, et sur cette face cylindrique, on appliquera le panneau flexible de la figure 3. On pourra alors tailler aisément les joints plans, puisque l'on connaîtra les intersections de chacun d'eux avec les surfaces des panneaux; les extrémités de ces intersections fourniront des points sur lesquels on posera la règle, et, connaissant alors deux droites dans chaque plan, on les exécutera sans difficulté. On taillera de même sans difficulté le dessous horizontal de la marche. Il restera à exécuter la douelle gauche: pour cela, on aura deux directrices fournies par les panneaux de tête. Il est très-facile d'y marquer à l'avance des points de repère, qui s'obtiendront en menant des normales à la ligne de foulée; et, en posant la règle sur ces points de repère, on taillera sans difficulté l'intrados.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas eu égard à la moulure qui remplace d'ordinaire l'arête saillante de chaque marche. Il est facile d'en tenir compte dans le tracé des panneaux; mais, dans l'exécution, on supprime cette moulure dans toute la portion de la marche qui est engagée dans le mur de la cage, non-seulement parce que cette portion de moulure ne serait pas vue, mais encore parce que la marche est plus facile à sceller.

On suivrait la même méthode si la cage formait un polygone quelconque; mais la ligne de foulée se composera de plusieurs courbes raccordées.

L'épure se simplifie, au contraire, lorsque la cage est exactement carrée; la courbe de jour devient un cercle, ainsi que la ligne de foulée, et toutes les normales passent par le centre. L'intrados est alors une surface hélicoïde de vis à filet carré.

Les têtes des marches, du côté de la rampe, peuvent, au lieu de rester libres, être engagées dans un LIMON (Voy. ce mot).

VIS À NOYAU PLEIN, escalier dont les marches s'engagent par un bout dans un mur circulaire, et par l'autre dans un noyau cylindrique concentrique au mur.

La disposition la plus ordinaire est celle de la figure 1. Les arcs ABCDE, A'B'C'D'E' sont les bases des cylindres qui limitent le mur circulaire; le cercle $abcde$ est la base du noyau, dont on a exagéré à dessein les dimensions. Le cercle $A_1B_1C_1D_1E_1$ indique de combien les marches sont engagées dans le mur. Les arêtes saillantes des marches (Voy. ESCALIERS) se projettent suivant des rayons Aa , Bb , Cc , etc., faisant entre eux des angles égaux. La ligne de foulée $\alpha\beta\gamma\epsilon$ est un cercle concentrique aux précédents. Comme les escaliers du genre dont il s'agit sont ordinairement très-étroits, on ne s'as-

treint pas à prendre la distance ax égale à $0^m,48$; on prend pour ligne de foulée le cercle qui passe par les milieux α, β, γ , etc., des droites Aa, Bb, Cc , etc. La hauteur des marches et la largeur du

engendrée par une droite horizontale assujettie à s'appuyer sur les hélices que donnent MN et mn en s'enroulant sur les deux cylindres. Les surfaces planes s'exécuteront sans difficulté. La surface héli-

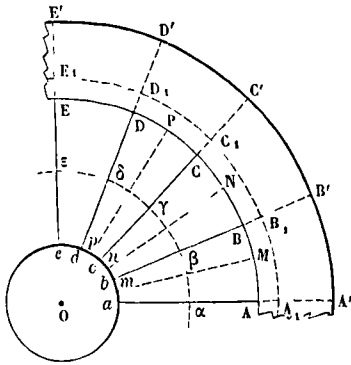


Fig. 1.

giron doivent toujours être réglées d'après les conditions indiquées à l'article ESCALIERS. Les arêtes saillantes des marches appartiennent à une surface hélicoïde engendrée par une droite toujours horizontale, assujettie à rencontrer l'axe vertical O et à glisser sur une hélice tracée sur la face interne du mur circulaire. Cette surface forme un extrados fictif. Nous définirons le dessous de l'escalier, ou l'intrados, en indiquant la construction des *panneaux de tête* des marches. Soient AA_1 (fig. 2) la

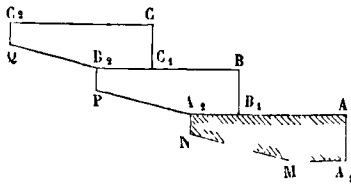


Fig. 2.

hauteur de la première marche et AB_1 le développement de l'arc A_1B_1 de la figure 1. Soient de même BB_1 la contre-marche de la seconde marche et BC_1 le développement de l'arc B_1C_1 de la figure 1, et ainsi de suite. Par le point A_1 , on mènera une parallèle à AB_1 terminée en M , dans la verticale qui répond au milieu de AB_1 ; on prolongera de même AB_1 jusqu'en A_2 dans la verticale du milieu de BC_1 , et ainsi de suite; par le point A_2 , on abaissera une verticale A_2N égale à la moitié de la hauteur d'une marche, et l'on joindra MN : on aura ainsi en AA_2NMA , le développement du panneau de tête correspondant au mur circulaire. En remplaçant les arcs AB, BC , etc., par les arcs ab, bc , etc., on construira de même en aa_2nma_1 (fig. 3) le développement du panneau de tête correspondant au noyau. Si l'on conçoit ces panneaux appliqués sur le cylindre ayant pour base $A_1B_1C_1E_1$ et sur le noyau, de manière que les lignes AA_2 et aa_2 soient à la même hauteur, et les points A et a sur un même rayon, la forme de la marche se trouvera entièrement déterminée. On aura, suivant AA_1 et aa_1 , et suivant AA_2 et aa_2 , deux plans horizontaux; suivant AA_1 et aa_1 , et suivant A_2N et a_2n , deux plans verticaux; enfin, suivant MN et mn , une surface hélicoïde

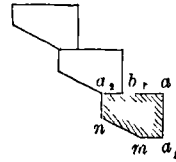


Fig. 3.

çoïde se taillera à l'aide d'une règle appuyée sur des points de repère qu'on obtiendra aisément en divisant les courbes MN et mn en un même nombre de parties égales.

Les marches s'engagent dans le mur circulaire au moyen d'entailles correspondantes au contour du panneau de tête. On pourrait engager de même les marches dans le noyau. Mais on obtient plus de solidité en faisant porter à chaque marche une tranche du noyau, de même hauteur qu'une marche. La figure 4 représente cette disposition. Elle exige

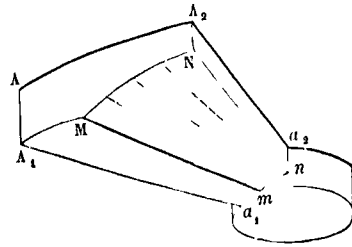


Fig. 4.

à la vérité des pierres d'un plus grand volume, et il y a quelques précautions à prendre pour tailler la surface gauche en fouillant la pierre sans entamer le noyau; mais elle donne un assemblage plus solide, comme nous l'avons dit. Du reste, pour surcroît de précautions, on assemble les différentes tranches de noyau au moyen de goujons en fer qui traversent leur axe.

Au lieu d'un intrados discontinu, comme celui qui est représenté sur les figures 2, 3 et 4, on préfère souvent employer un intrados continu, formé d'une surface hélicoïde parallèle à l'extrados fictif; mais il faut alors que les joints soient normaux à l'intrados, ou à peu près. On se contente généralement de prendre pour joint un plan normal à l'hélice moyenne qui se projette suivant la ligne de foulée. Soit P (fig. 5) le milieu du giron $\alpha\beta$; par ce point, on mènera un rayon; en un point p de son prolongement, on lui élèvera une perpendiculaire pq , que l'on prendra momentanément pour ligne de terre. On mènera en P la tangente PQ à la ligne de foulée; sur cette tangente, on prendra une longueur égale à un nombre exact de fois le giron, 2 fois par exemple, et sur le prolongement de Pp , on prendra la longueur pP' égale au même nombre de fois la hauteur d'une marche. On projettera PQ sur pP' , et l'on joindra $P'q$; on aura ainsi le rabattement de la tangente à l'hélice moyenne dont la ligne de foulée

t la projection horizontale. En menant $P'N$ perpendiculaire sur $P'q$, on aura la trace verticale du plan normal. Si maintenant NH est la trace du dessus de la marche, la droite Ni parallèle à Pp sera

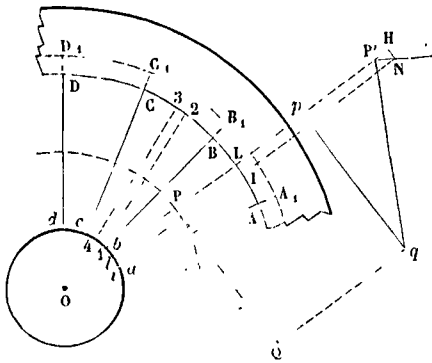


Fig. 5.

la projection de l'arête supérieure du joint, qui se trouvera ainsi projeté entre les droites Ll et Ii . On opérera de même pour les autres joints, ou plutôt, comme ils sont tous égaux et également inclinés, il suffira de faire tourner la figure $AabB$ de manière à la faire coïncider avec $BbcC$: le joint correspondant à la marche suivante sera compris entre les droites 1.2 et 3.4, et ainsi de suite. Le développement des panneaux de tête s'exécutera comme ci-dessus. La figure 6 représente le panneau

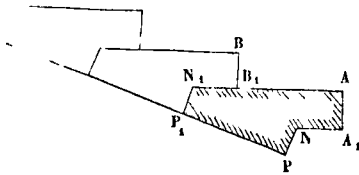


Fig. 6.

de tête correspondant au cylindre $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la figure 5. Il faut remarquer que les lignes NP , N_1P_1 , etc., qui figurent les joints, sont chacune le développement de l'intersection d'un cylindre par un plan, c'est-à-dire le développement d'un arc d'ellipse. Ce ne sont donc pas des lignes droites, et il est nécessaire d'en déterminer un point intermédiaire. Pour cela, par le milieu de $P'N$ (fig. 5), on mènera une parallèle à PP' ; elle rencontrera la circonférence $A_1B_1C_1\dots$ en un point généralement très-voisin du milieu de l'arc LI , mais qui néanmoins différera de ce milieu. Ce point sera celui à partir duquel on devra, dans le développement du panneau de tête, porter une perpendiculaire égale à la moyenne de celles qui répondent aux points L et I , c'est-à-dire une moyenne entre les hauteurs des points P' et N au-dessus de la ligne de niveau qu'on aura choisie pour terme de comparaison.

Dans le cas qui nous occupe, on fait encore porter à chaque marche une tranche du noyau; mais, pour protéger l'angle aigu que forme le joint à son arête inférieure, on attache la tranche de noyau à ce joint; comme cette tranche n'a que la hauteur

d'une marche, il en résulte que le dessus se trouve plus bas que la face supérieure de la marche; ainsi qu'on le voit sur la figure 7.

L'intrados n'est pas toujours engendré comme

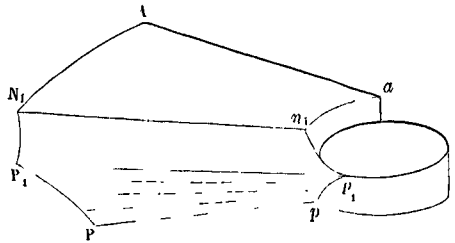
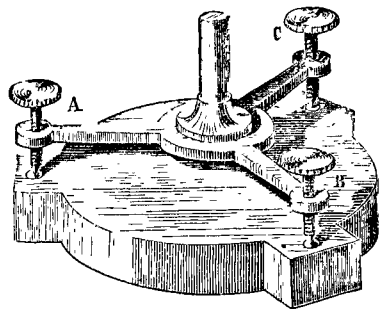


Fig. 7

nous l'avons supposé. On peut remarquer sur la figure 5 que le point i étant très-voisin du point a , et le point 1 très-voisin du point b , chaque marche ne recouvre que très-peu la marche inférieure du côté du noyau. Pour obvier à ce défaut, qui pourrait compromettre la solidité de l'escalier, au lieu de diriger les arêtes de douelle de l'intrados suivant les rayons, on les dirige parallèlement à l'arête saillante qui précède. Ainsi, au lieu de mener par le point P un rayon, on mènerait une parallèle à Aa . La surface d'intrados est alors engendrée par une droite toujours horizontale, assujettie à rencontrer une hélice tracée sur le mur circulaire, et une seconde hélice de même pas tracée sur le noyau, mais dont l'origine serait en avant de la première d'une quantité égale à l'arc du cercle $abcd$ compris entre Aa et sa parallèle menée par le point P . Lorsque le noyau est d'un très-petit diamètre, on dirige même les arêtes de douelle de l'intrados tangentiellement à ce noyau. Dans les deux cas, on détermine comme ci-dessus les plans de joints, et l'on construit les panneaux de tête par un procédé analogue (Voy. pour plus de détails le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, p. 317 et suivantes).

La vis à noyau plein repose quelquefois sur une voûte annulaire rampante dite vis SAINT-GILLES (Voy. ce mot).

VIS CALANTES, vis qui servent à donner au support d'un instrument une position horizontale, et,



par conséquent, à l'axe de cet instrument une position verticale. Ce sont des vis égales, au nombre de trois, qui traversent les trois branches du support

Ces trois vis reposent par leur pointe sur un support fixe. Si l'on tourne l'une d'elles dans un sens convenable, la branche du support mobile qui lui sert d'érou est obligée de s'élever; et, si l'on fait tourner la vis dans un sens contraire, cette même branche est obligée de s'abaisser. Pour caler l'instrument à l'aide de ces vis, on commence par agir en sens contraire, sur deux d'entre elles, les vis A et B, par exemple, jusqu'à ce qu'un niveau d'eau, placé sur le support mobile dans une direction parallèle à la direction AB, indique que cette ligne est horizontale (Voy. NIVEAU). On agit alors sur la troisième vis, dans le sens convenable, jusqu'à ce que le niveau, placé sur le support mobile dans une direction à peu près perpendiculaire à la première, indique une nouvelle direction horizontale. Le support est alors horizontal, puisque sa surface contient deux horizontales qui se coupent. Il en résulte que l'axe de l'instrument est vertical, s'il a été convenablement construit.

Les vis calantes se manœuvrent à l'aide de têtes circulaires à bords guillochés.

VIS D'ARCHIMÈDE, machine employée à élever l'eau. Elle a été imaginée par le célèbre géomètre dont elle porte le nom, et elle est décrite dans Vitruve comme une machine d'un usage général au premier siècle avant Jésus-Christ. Elle se compose d'une ou plusieurs cloisons hélicoïdales en bois ou en tôle, emboîtées dans une enveloppe cylindrique en bois et dans un noyau cylindrique en bois aussi, ayant le même axe, mais un diamètre 3 fois moindre. Les tours successifs ou spires de cette cloison forment dans l'intérieur du cylindre des canaux hélicoïdaux qui circulent depuis le bas jusqu'en haut. — On fait plonger (fig. 1) l'une des extrémi-

troduites dans un canal hélicoïdal par l'extrémité inférieure de l'appareil, s'élève le long de ce canal, et vient s'écouler par l'extrémité opposée dans le bassin supérieur destiné à la recevoir.

Pour faire comprendre comment ce mouvement s'opère, considérons un tuyau ST (fig. 2) d'un petit

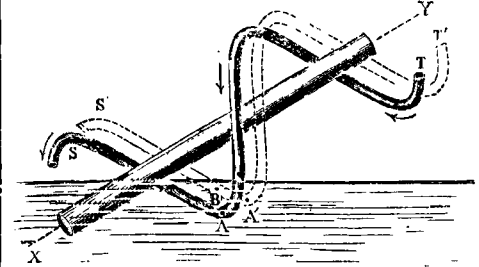


Fig. 2.

diamètre, enroulé en hélice autour d'un axe incliné XY, qui plonge en partie dans l'eau. Au premier tour que l'appareil fera, dans le sens indiqué par la flèche, l'extrémité S du tuyau viendra plonger dans le liquide; une certaine quantité d'eau s'introduira dans le tuyau et viendra, en vertu de la pesanteur, occuper le point le plus bas A de la première spire. Soit *m* une molécule d'eau occupant cette position. Imaginons que le tuyau tourne encore d'une petite quantité, et vienne prendre la position très-voisine S'T'; dans ce mouvement, le point A décrira un petit arc de cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'axe XY, et viendra occuper une position B très-voisine de A. Mais la molécule

m, entraînée dans ce mouvement, ne pourra se maintenir en B; et, par l'effet de la pesanteur, elle descendra jusqu'au point A', qui est actuellement le plus bas de la spire sur laquelle elle se trouve, mais qui, au premier instant, occupait une position plus élevée. Par l'effet de la rotation de la machine, la molécule *m* sera donc venue de A en A', c'est-à-dire qu'elle aura parcouru dans l'espace un petit chemin AA' parallèle à l'axe XY; et il est clair qu'en continuant ainsi, elle montera parallèlement à cet axe jusqu'à ce qu'elle vienne sortir par l'extrémité supérieure T du tuyau. Ce que

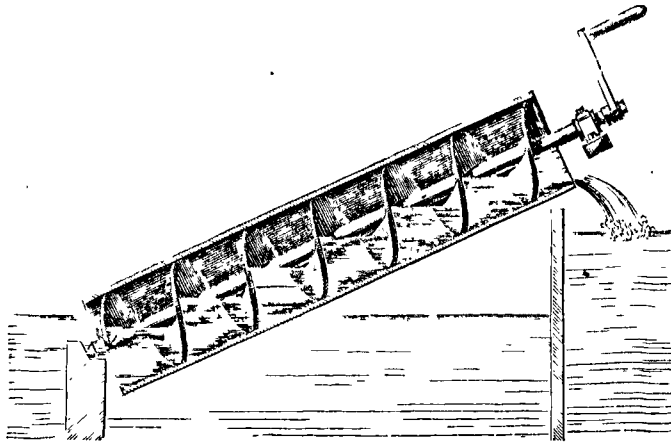


Fig. 1.

tés du noyau dans les eaux du bassin qu'il s'agit d'épuiser; on donne à l'axe une inclinaison un peu moindre que l'angle de la tangente à l'hélice extérieure avec un plan perpendiculaire à l'axe; et l'on fait tourner la vis autour de son axe, soit par l'intermédiaire d'un engrenage, soit, le plus souvent, à l'aide d'une simple manivelle sur laquelle plusieurs hommes agissent à la fois au moyen de barres qui s'articulent avec le maneton. L'eau in-

nous venons de dire de la molécule *m* s'appliquera à toutes les autres. — Mais on voit que pour que la molécule *m*, ou toute autre, puisse s'élever ainsi, il faut que le point B soit plus haut que le point A', afin que la molécule soit ramenée par la pesanteur au bas de la spire. Pour cela, il faut que la tangente en B à l'hélice fasse avec l'axe XY un angle plus grand que celui de cet axe avec l'horizon. Si l'axe faisait avec l'horizon

un angle trop grand, l'ascension du liquide serait impossible.

Lorsque l'eau commence à s'écouler par l'orifice T, toutes les spires contiennent de l'eau à leur partie inférieure et de l'air à leur partie supérieure. La longueur de l'arc d'hélice occupée ainsi par de l'eau et séparée du reste du liquide par de l'air est ce qu'on appelle un *arc hydrophore*. Cette longueur peut être déterminée. Soit, en effet (fig. 3).

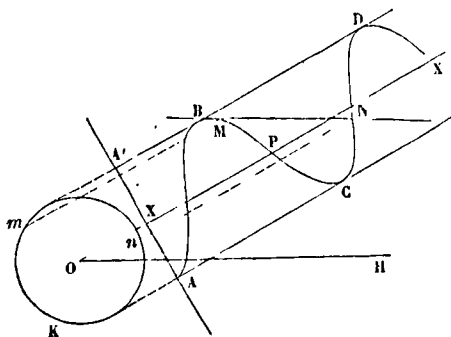


Fig 3.

ABCD la projection de l'hélice sur le plan vertical qui contient l'axe XY. Menons l'horizontale MN, tangente en M à cette projection et la coupant en un autre point N; l'arc MCN sera la projection de l'arc hydrophore. Projétons maintenant l'hélice sur un plan perpendiculaire à son axe; cet axe se projettera en un point O, et l'hélice aura pour projection le cercle mKn . Menons Mm et Nn parallèles à l'axe; l'arc mKn sera la projection de l'arc hydrophore sur un plan perpendiculaire à son axe; et, d'après les propriétés connues de l'hélice, il suffira pour avoir la longueur de l'arc hydrophore lui-même, de multiplier l'arc de cercle mKn par la sécante de l'angle que la tangente à l'hélice fait avec un plan perpendiculaire à son axe. Il est clair que cette longueur pourrait être obtenue par le calcul, au moyen des équations de l'hélice. La construction montre que l'arc hydrophore serait nul si l'horizontale MN faisait avec l'axe le même angle que la tangente à l'hélice; car alors les deux points M et N seraient réunis au point P, intersection de la projection de l'hélice avec la projection de son axe.

Lorsque le tuyau en hélice de la figure 2 est remplacé par les canaux hélicoïdes de la figure 1, on conçoit que le jeu de l'appareil soit analogue; l'eau introduite tend sans cesse à occuper la partie la plus basse de la vis, cette partie la plus basse va sans cesse en s'élevant, en sorte qu'en définitive l'eau s'élève le long des canaux et sort par l'orifice supérieur. On peut remarquer que, d'après les dispositions ordinaires, l'air peut circuler librement le long du noyau, en sorte qu'il est à la même pression dans toute l'étendue de la vis, ce qui n'a pas lieu dans le cas d'un tuyau en hélice, et peut même dans ce cas nuire à la régularité des effets de l'appareil. Les arcs hydrophores se trouvent remplacés par des espaces analogues appelés *espaces hydrophores*; on peut en calculer le volume en considérant tout l'espace compris entre

l'enveloppe et le noyau comme formé d'une infinité de tuyaux en hélice ayant le même pas, et une section infiniment petite; on exprime la longueur de l'arc hydrophore pour l'un quelconque de ces tuyaux, et par une intégration on obtient le volume total de l'espace hydrophore. Nous n'insisterons pas sur ce point, parce que d'une part l'intégration ne peut s'effectuer complètement sous forme finie, et que d'autre part cette question est sans intérêt pour les applications. Il est plus commode et plus sûr d'emprunter à l'expérience les données relatives au débit de la machine. On donne, en général, à la vis d'Archimède un diamètre de 0^m,30 à 0^m,60 et une longueur comprise entre 12 et 18 fois son diamètre, suivant la grandeur de ce diamètre. L'angle de l'hélice extérieure avec l'axe, que les anciens faisaient de 45°, est généralement aujourd'hui de 60°. La vitesse habituelle de la rotation est de 40 tours par minute. Dans ces conditions, le produit moyen est de 75^m élevés à 2^m.

L'eau entre à peu près sans choc dans la machine et en sort avec une médiocre vitesse; le frottement de l'eau contre les parois est peu considérable, à cause de la lenteur du mouvement; on devrait donc s'attendre à un rendement assez considérable. Pourtant le rendement effectif est généralement faible, 0,64 d'après les expériences de MM. Gauthey et Lamardé, souvent 0,50 suivant d'autres, quelquefois même 0,40. La faiblesse de ce résultat tient d'une part au frottement sur les supports, et d'autre part à ce que l'eau est nécessairement élevée à une hauteur plus grande que celle qui sépare les niveaux des deux bassins. Toutefois, à cause de la facilité de son installation, cette machine est fréquemment employée dans les épuisements, lorsque l'eau ne doit être élevée qu'à une médiocre hauteur (3^m,50 au plus).

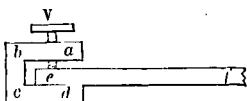
On emploie en Hollande une vis d'Archimède qui n'a point d'enveloppe, mais qui repose dans un canal demi-cylindrique fixe, ne laissant entre le bord des surfaces hélicoïdes et lui que le jeu strictement nécessaire. L'appareil fonctionne au reste de la même manière; il est mis en mouvement par un moulin à vent à l'aide d'un JOINT DE CARDAN (Voy. ce mot), et il donne un assez bon produit. On conçoit en effet que dans ce système le poids de l'eau portant en grande partie sur le canal cylindrique, le frottement sur les supports est moindre, et d'autre part il est facile de rapprocher l'orifice supérieur du niveau du bassin supérieur et de diminuer ainsi une autre cause de perte. La vis hollandaise est aussi employée en Allemagne.

La vis d'Archimède est quelquefois appliquée au transport des matières pulvérulentes. Elle se met alors dans un canal cylindrique qui lui sert d'enveloppe. Ce système est souvent employé dans les moulins pour transporter le mélange de son et de farine qui sort des meules.

VIS DE PRESSION, vis à l'aide de laquelle on peut serrer une pièce mobile contre une pièce fixe pour la rendre momentanément solidaire avec celle-ci. Si, par exemple, *abcd* représente une pièce mobile, dans laquelle s'engage une pièce fixe *ef*, et si V représente une vis qui traverse l'une des branches *ab* de la pièce mobile; cette branche lui servant d'écrou, quand on fera tourner la vis dans un sens convenable, elle pressera la pièce fixe *ef*

contre la branche *cd*, et rendra les deux pièces momentanément solidaires. Quand on fera tourner la vis *V* en sens contraire, la pièce mobile redeviendra libre.

Il est peu d'instruments d'arpentage ou de géo-



désie qui n'offrent des exemples de vis de pression. Ces sortes de vis doivent avoir un faible pas, et les surfaces frottantes ne doivent pas être lubrifiées (Voy. Vis).

La vis se manœuvre au moyen d'une tête circulaire dont les bords sont guillochés pour empêcher le glissement.

VIS DE RAPPEL, vis disposée de manière à faire mouvoir d'un mouvement lent et doux une pièce déjà amenée très-près de la position qu'on veut lui faire prendre. Nous décrirons d'abord la vis de rappel qui sert à régler la position de l'alidade mobile d'un **CERCLE RÉPÉTITEUR** (Voy. ce mot). La pièce *A* (fig. 1) est l'extrémité de l'alidade

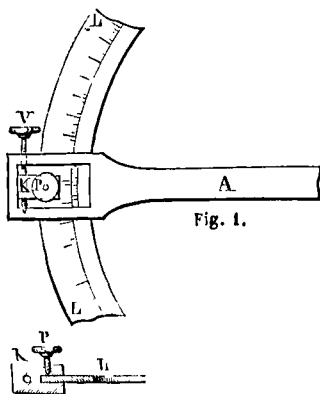


Fig. 1.

Fig. 2.

mobile; *LL* est le limbe du graphomètre. L'extrémité de *A* se termine par un cadre, dont la paroi située à droite dans la figure est amincie en biseau à l'intérieur et porte le vernier qui, dans les mouvements de l'alidade, ne cesse pas de coïncider avec le cercle gradué du limbe. L'autre extrémité du cadre est traversée par une vis *V* qui est la vis de rappel; cette vis traverse également une pièce *K* qui lui sert d'écrou; elle ne tient pas au cadre, mais elle embrasse les bords amincis du limbe comme le montre la figure 2. Au moyen d'une vis de pression *P* (fig. 1 et 2), on peut serrer les mâchoires de la pièce *K* et la rendre ainsi solidaire avec le limbe. Si l'on fait alors tourner la vis *V*, dont l'écrou est ainsi rendu fixe, cette vis se déplacera dans le sens de son axe, et entraînera avec elle le cadre, dans lequel elle peut tourner, mais où elle est engagée à demeure; et l'alidade prendra ainsi un mouvement aussi lent qu'on le voudra (Voy. Vis). Si l'on desserre la vis de pression *P*, on pourra faire mouvoir librement l'alidade;

la pièce *K* ne tenant plus au limbe sera emportée avec la vis *V*.

Si le bras mobile *A* ne porte de vernier qu'à l'une de ses extrémités, on adapte ordinairement la vis de rappel à l'autre pour simplifier le dispositif.

Nous décrirons en second lieu la vis de rappel qui sert, dans le même instrument, à faire mouvoir d'un mouvement lent autour de l'axe général *B* de l'appareil (fig. 3) le plateau circulaire *N* et

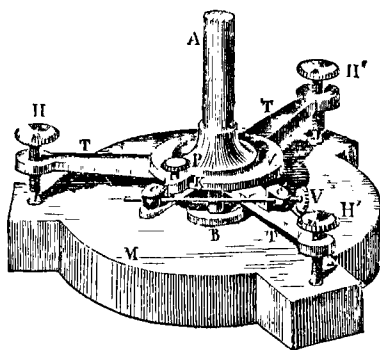


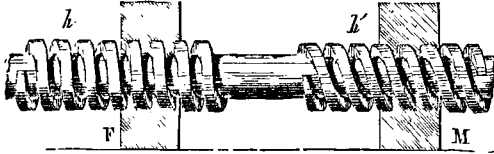
Fig. 3.

toutes les pièces liées avec lui. Une pince *K* saisit ce plateau et peut y être fixée au moyen d'une vis de pression *P*; une longue vis *V* pénètre dans un écrou *e* invariablement lié à la pince *K*, et tourne à demeure dans un coussinet *e'* fixé à l'une des branches *T* du support. Lorsque la vis *P* est desserrée, la vis *V* et son écrou restent fixés au support, et le plateau *N* peut tourner librement. Mais quand la vis *P* est serrée, si l'on fait tourner la vis *V*, comme elle ne peut quitter son coussinet, elle ne fait que tourner autour de son axe; il faut donc que ce soit l'écrou *e* qui chemine dans le sens de l'axe de la vis, et dès lors cet écrou entraîne dans son mouvement la pince *K* et le plateau *N* auquel elle est fixée.

Toutes les vis de rappel sont fondées sur les mêmes principes: tantôt c'est l'écrou qui devient fixe et la vis qui est rendue mobile, comme dans le cas de la figure 1; tantôt c'est au contraire l'écrou qui est rendu mobile et la vis qui est fixée, comme dans le cas de la figure 3.

VIS DIFFÉRENTIELLE, organe de transformation de mouvement imaginé par *M.* de Prony pour obtenir, à l'aide d'un mouvement de rotation donné, un mouvement de translation aussi lent qu'on le désire. La vis différentielle porte deux filets de même sens, mais de pas différents, enroulés sur le même noyau. Le premier filet pénètre dans un écrou fixe *F*, et le second dans un écrou mobile *M*, qui peut glisser dans le sens de l'axe, mais non tourner autour de cet axe. A chaque tour, la première vis pénètre dans l'écrou fixe d'une quantité égale à son pas *h*; et si l'écrou *M* était solidaire avec elle, il avancerait de la quantité *h* dans le sens de la flèche. Mais cet écrou ne pouvant pas tourner avec le noyau, il faut que la seconde vis s'y engage, et que dès lors l'écrou recule, en sens contraire de la flèche, d'une quantité égale

au pas h de cette seconde vis ; car, quelle que soit la disposition d'une vis et de son écrou, leur mouvement relatif est toujours le même, c'est-à-dire égal au pas de la vis pour chaque tour. On voit donc que l'écrou mobile poussé en avant d'une



quantité h , et ramené en arrière d'une quantité h' , se sera avancé en définitive de $h-h'$; c'est-à-dire qu'à chaque tour de la vis l'écrou mobile marche d'une quantité égale à la différence des deux pas, d'où le nom de vis différentielle. Comme la différence $h-h'$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut, on peut avec une vis différentielle obtenir un mouvement de translation aussi lent qu'on le désire. Cette propriété a été utilisée dans les micromètres des instruments d'optique.

VIS MICROMÉTRIQUE, vis destinée à produire et à mesurer de très-petits mouvements rectilignes. Une vis micrométrique est toujours filetée avec le plus grand soin, et son pas est extrêmement petit ; la tête de la vis est ordinairement divisée sur sa tranche en un certain nombre de parties égales ; et les divisions, en passant vis-à-vis d'un point de repère fixe, permettent d'évaluer le nombre de tours et fraction de tour que la vis a faits, d'où il est facile de déduire la quantité dont la vis, ou son écrou, ont marché dans le sens de l'axe de la vis. Si, par exemple, le pas de la vis n'a que $\frac{1}{10}$ de millimètre, et que sa tête soit divisée en 60 parties égales, quand elle aura fait 7 tours entiers et 24 parties de tour, ou 7 tours $\frac{24}{60}$, son écrou, si c'est lui qui est mobile, aura marché de

$$0^{\text{mm}},1 \times 7 \frac{24}{60} \text{ ou de } 0^{\text{mm}},1 \times 7,4,$$

c'est-à-dire de $0^{\text{mm}},74$.

La vis micrométrique est particulièrement appliquée au micromètre des instruments d'optique. C'est souvent une VIS DIFFÉRENTIELLE (Voy. ce mot ; Voy. aussi MICROMÈTRE et RÉTICULE).

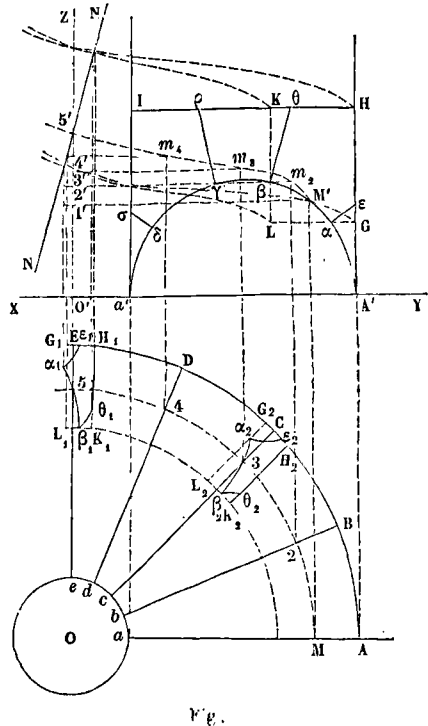
VIS PNEUMATIQUE. Voy. VENTILATEUR à vis.

VIS SAINT-GILLES, voûte annulaire rampante, destinée à soutenir un escalier à vis et à noyau plein. Elle doit son nom au prieuré de Saint-Gilles en Provence, où il existait une voûte de ce genre. Pour concevoir la génération de l'intrados, il faut imaginer qu'une demi-circonférence verticale $A'\alpha\beta\gamma\delta a'$, Aa (fig. 1), tracée sur l'intervalle Aa qui sépare le mur circulaire $ABCDE$, du noyau $abcde$, se meuve d'un mouvement hélicoïdal autour de l'axe $O'Z, O$ du noyau ; c'est-à-dire que le plan du demi-cercle passant constamment par l'axe du noyau, tous les points de la demi-circonférence décrivent simultanément autour de cet axe des hélices de même pas. La section de l'intrados par un plan quelconque mené suivant l'axe est une demi-circonférence égale à $A'\alpha\beta\gamma\delta a'$, mais placée à une hauteur proportionnelle à l'angle que le plan coupant fait avec le plan vertical OA

qui sert de point de départ. Quant à l'extrados de la voûte, c'est la surface engendrée par une horizontale IH qui rencontre sans cesse l'axe $O'Z, O$, et une hélice de même pas que les précédentes tracée sur le mur circulaire ; en d'autres termes, c'est une surface de vis à filet carré. Pour déterminer l'appareil de cette voûte, on divise la demi-circonférence génératrice en un nombre impair de parties égales, aux points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; et par les points de division on mène des rayons terminés soit à l'horizontale IH , soit au mur circulaire, soit à la surface du noyau. Ces rayons, dans le mouvement du demi-cercle, décrivent des surfaces gauches hélicoïdales dont les génératrices font, pour chaque surface, un angle constant avec l'axe, c'est-à-dire que ce sont des surfaces de filet de vis triangulaire. Ce sont ces surfaces qu'on adopte pour joints de lit. Les arêtes de douelle sont alors les hélices décrites par les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Quant aux joints montants, on les obtient en menant des plans normaux à l'hélice que décrit le milieu M', M de l'arc $\alpha\beta$ générateur de la douelle ; on évite ainsi les angles trop aigus que ferait le plan de joint avec la douelle si on l'avait mené normalement à l'hélice décrite par un point central du polygone curviligne $\alpha\beta\theta H$.

L'appareil de la voûte étant ainsi bien défini, il faut se procurer les projections des hélices décrites par les différents points de la section méridienne.

Nous prendrons pour exemple celle qui est dé-



crité par le point M, M' . On décrit d'abord du point O comme centre une circonférence passant par le point M : c'est la projection horizontale de l'hélice considérée. On mène dans cette circonférence des rayons équidistants $O2, O3, O4, O5$; on choisit

ordinairement ceux qui servent de projection aux arêtes saillantes des marches de l'escalier (Voy. ESCALIERS, VIS à NOYAU PLEIN). Sur $O'Z$ on porte, à partir du point $1'$ qui est à la même hauteur que M' , une série de distances $1'.2', 2'.3', 3'.4', 4'.5'$ égales au quart de la hauteur d'une marche; par les points ainsi déterminés, on mène des horizontales; par les points 2, 3, 4, etc., on élève des verticales: leur rencontre avec les horizontales correspondantes donnent les points m_2, m_3, m_4 , etc., qui appartiennent à la projection verticale cherchée. On peut donc tracer cette projection, qui n'est autre chose qu'une *sinusoïde* (Voy. HÉLICE). On opère de la même manière pour obtenir les projections verticales des hélices décrites par les autres points de la figure mobile. Par les points α et β , on mène l'horizontale GL et la verticale LK , lesquelles déterminent un rectangle $GHLK$ renfermant le polygone curviligne $\alpha\beta\theta\epsilon$. Ce rectangle est utile à considérer pour plus de facilité dans les opérations, et l'on a soin de déterminer les projections des hélices décrites par ses sommets. Le volume engendré par ce rectangle a la forme d'un LIMON (Voy. ce mot), et nous lui donnerons ce nom ici pour abréger le discours.

Il s'agit ensuite d'obtenir les intersections des plans de joint avec les faces latérales du voussoir et du limon qui l'enveloppe. On se servira pour cela de cette remarque que tout l'appareil étant hélicoïdal, les intersections déterminées par les différents plans de joint sont toutes égales, et qu'il suffit, par conséquent, de construire l'une d'elles. Pour cela, on construit d'abord l'intersection par un plan NN mené par le point $5'$ de l'hélice

$M'm_2m_3m_45'$,

normalement à cette hélice. Ce plan est ici perpendiculaire au plan vertical. Il coupe l'hélice du point H en un point H_1 qui, projeté en H_1 sur la circonférence OA , donne un point de la projection horizontale de l'intersection cherchée. De même, le plan normal NN coupe l'hélice du point K en un point K_1 qui, projeté en K_1 sur le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à la distance du point K à l'axe $O'Z$, donne un second point de la projection demandée. On construira de la même manière la projection horizontale de l'intersection du plan normal avec les autres hélices décrites par les différents points de la figure mobile, et l'on obtiendra en G, H, K, L , la projection de l'intersection du plan normal avec le limon et en $\alpha, \beta, \theta, H, \epsilon$ celle de l'intersection du même plan avec le voussoir. Si maintenant m_3 est le point de l'hélice du point M' par lequel on veut mener le plan normal, la projection de l'intersection sera la même, et on l'obtiendra en faisant tourner la projection déjà obtenue autour du point O d'un angle égal à celui que font les rayons $O5$ et $O3$; ici c'est un demi-angle droit. Le point 5 viendra ainsi en 3, le point α_1 en α_2 , le point β_1 en β_2 , et ainsi des autres, tous ces points ayant tourné de même d'un demi-angle droit autour du centre O . Comme les lignes qui joignent les différents points de ces projections ne sont plus des lignes droites, il faut avoir soin d'en construire au moins un point intermédiaire, en traçant pour chacun une hélice intermédiaire entre celles dont il a été question.

Le rabatement de chaque plan de joint s'exécute

comme pour un LIMON (Voy. ce mot), en faisant tourner ce plan autour de l'horizontale $Cc, M'1'$ jusqu'à ce qu'il prenne la position horizontale. On emploiera pour cela la méthode de rabattement connue (Voy. RABATEMENT), ce qui n'offre aucune difficulté et ne donne lieu à aucune remarque. On obtiendra ainsi les deux *panneaux de tête* du limon. On déterminera comme pour un limon véritable le *solide capable*, et les panneaux supérieur et inférieur, et l'on suivra pour la taille de la pierre la marche indiquée à l'article LIMON. La pierre se trouvera ainsi amenée à la forme représentée par la figure 2. Sur les plans de joint, on appliquera les panneaux de tête $\alpha\beta\theta\epsilon$ et $\alpha'\beta'\theta' \epsilon'$. Sur la face $klw'k'$ du limon, qui est un cylindre concave, on tracera l'hélice $\beta\beta'$. Il suffira pour cela d'employer une règle ployante dont l'arête passe par ces deux points; car la ligne ainsi tracée donnerait une ligne droite dans le développement du cylindre: cette ligne sera donc une hélice. De même, sur la face $hgg'h'$, qui est un cylindre convexe, on tracera à la règle ployante l'hélice $\epsilon\epsilon'$. Sur la surface gauche $hkk'h'$ du limon, il faudra ensuite tracer l'hélice $\theta\theta'$; pour cela, on tracera diverses génératrices, celles, par exemple, qui ont déjà servi pour tailler cette surface gauche; et, à partir de l'arête kk' , on portera sur ces génératrices des longueurs égales à la distance des points K et θ (fig. 1). Sur la surface gauche $glw'g'$, on tracera par un procédé semblable l'hélice $\alpha\alpha'$. À l'aide des deux courbes $\theta\theta'$ et $\beta\beta'$, sur lesquelles on aura à l'avance déterminé des points

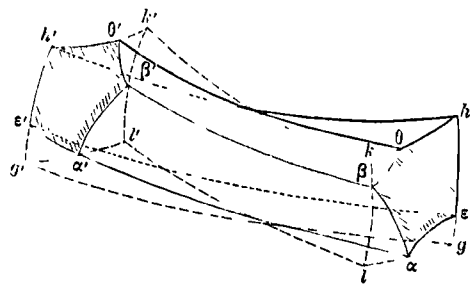


Fig 2.

de repère, on taillera à la règle le joint hélicoïde $\beta\theta\theta'\beta'$. Comme les génératrices de cette surface rencontrent toutes l'axe $O'Z, O$, les points de repère devront se trouver deux à deux sur une droite rencontrant l'axe. On les obtiendra donc en menant des rayons par le point O (fig. 1) jusqu'à la rencontre des projections horizontales des hélices $\theta\theta'$ et $\beta\beta'$ de la figure 2, et déterminant les projections verticales correspondantes. Par un procédé semblable, on taillera le joint hélicoïde inférieur $\alpha\epsilon\epsilon'\alpha'$ en se servant des hélices $\epsilon\epsilon'$ et $\alpha\alpha'$. Il restera à tailler la douelle $\alpha\beta\beta'\alpha'$. On peut employer pour cela plusieurs moyens: le plus simple consiste à déterminer à l'avance sur les hélices $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ des points qui soient deux à deux dans un même plan méridien, ce qui se fera encore en menant des rayons par le point O (fig. 1); puis sur ces couples de points de repère, on promènera une CERCE (Voy. ce mot) taillée sur l'arc $\alpha\beta$ de la figure 1, en ayant soin de la maintenir dans le plan méridien. On pourrait assurer cette direction en faisant de la

cercle un **BEUVEAU** (Voy. ce mot), ayant une branche rectiligne dirigée suivant la génératrice du joint hélicoïde, c'est-à-dire suivant la direction $\beta\theta$ (fig. 1). Tous les autres voussoirs se tailleront de la même manière.

La portion de voûte dont la section méridienne est $a'\delta\sigma$ (fig. 1), forme une sorte de filet de vis triangulaire qui doit faire corps avec le noyau; il est, par conséquent, nécessaire de savoir tracer l'intersection de cette saillie par les plans horizontaux formant les assises. Or on remarque que toutes ces intersections sont égales : c'est la même figure qui a tourné d'une quantité proportionnelle à sa hauteur. On obtiendra donc l'intersection par un plan horizontal déterminé en coupant la figure $a'\delta\sigma$ par divers plans horizontaux, et en faisant tourner les points obtenus de quantités proportionnelles à leur distance verticale au point le plus bas. Soient 1'1'', 2'2'', 3'3'', 4'4'', 5'5'', 6'6'' (fig. 3) une série

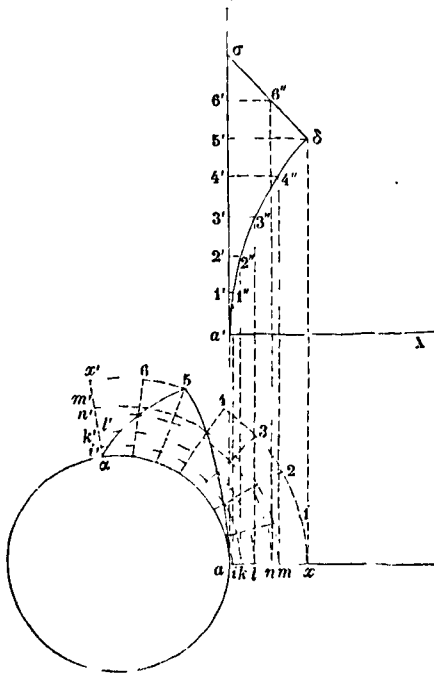


Fig. 3.

d'horizontales équidistantes qui coupent le profil $a'\delta\sigma$ aux points 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6''. Projétons ces points sur la parallèle à la ligne de terre menée par le centre O du noyau; et de ce centre, avec des ouvertures de compas égales à ses distances aux diverses projections, décrivons des arcs de cercle ii' , kk' , ll' , mm' , nn' , xx' . Soit OI un rayon faisant avec Ox un angle égal à celui dont la section horizontale a tourné pour une hauteur égale à $a'1'$. Cet angle est facile à obtenir; car c'est une fraction de 360 degrés égale au rapport entre la hauteur $a'1'$ et le pas commun de toutes les hélices déjà considérées. Tirons les rayons O.2, O.3, O.4, O.5, O.6, O*x'*, faisant entre eux des angles successifs égaux entre eux et à l'angle $\alpha O1$; puis marquons successivement : le point d'intersection du rayon O.1 avec l'arc ii' , celui du rayon O.2 avec

l'arc kk' , celui du rayon O.3 avec l'arc ll' , et ainsi de suite; nous obtiendrons les deux courbes $a5$ et 5α qui forment l'intersection demandée. La seconde courbe 5α est une spirale d'Archimède, attendu que c'est l'intersection d'une surface de filet de vis triangulaire par un plan perpendiculaire à l'axe. En effet, on trouve aisément qu'en prenant pour axe des x l'axe du noyau, la surface dont il s'agit est représentée par l'équation

$$z = \frac{1}{m} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{n} \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

ou, en remplaçant x et y par les coordonnées polaires,

$$z = \frac{\rho}{m} + \frac{\omega}{n};$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{m}{n} (nz - \omega),$$

équation qui, pour une valeur déterminée de z , représente une spirale d'Archimède.

On obtiendrait d'une manière analogue l'intersection des joints horizontaux du mur circulaire avec la saillie formée par la révolution de la portion $A'\beta z$ (fig. 1) de la figure mobile.

VIS SAINT-GILLES CARRÉE. On donne ce nom, par analogie, à un autre genre de voûte destinée à porter un escalier à noyau plein, mais à cage rectangulaire. Soient ABCD (fig. 4) la cage rectangulaire

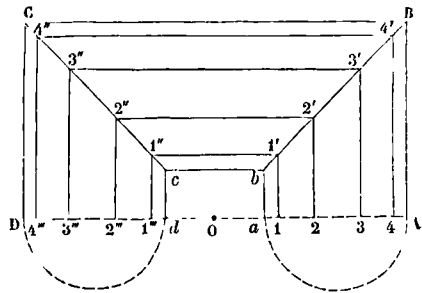


Fig. 4.

et $abcd$ le noyau également rectangulaire. Menons les droites Aa , Bb , Cc , Dd , qui devront servir de projections horizontales à des arêtes saillantes de marches, placées à des niveaux de plus en plus élevés. On les considérera aussi comme les projections d'autant d'horizontales offrant les mêmes différences de niveau, et formant les lignes de naissance des arcs de tête d'autant de voûtes, que l'on définira de la manière suivante. Sur l'horizontale projetée en Aa , on tracera une demi-circonférence verticale; on la divisera en un nombre impair de parties égales; soient 1, 2, 3, 4 les projections des points de division. Sur l'horizontale projetée en Bb , on élèvera une demi-ellipse verticale ayant pour grand axe Bb et pour demi petit axe le rayon du cercle Aa . Par les différents points de la demi-circonférence Aa , on imaginera des droites parallèles au mur vertical AB , et s'appuyant sur l'ellipse Bb . Ces droites seront les génératrices de la première voûte, dont les arêtes de douelle seront les droites projetées en 1.1', 2.2', 3.3', 4.4'. Sur l'horizontale projetée en Cc , on élèvera une ellipse égale à la pre

mètre; par les divers points de la première ellipse, on imaginera des droites parallèles au mur BC, et s'appuyant sur la seconde: ce seront les génératrices d'une seconde voûte dont les arêtes de douelle seront projetées en 1'.1", 2'.2", 3'.3", 4'.4". Sur l'horizontale projetée en Dd, on élèvera une demi-circonférence; par les divers points de l'ellipse Cc, on imaginera des droites parallèles au mur CD, et s'appuyant sur la demi-circonférence Dd: ce seront les génératrices d'une troisième voûte, dont les arêtes de douelle seront projetées en 1".1", 2".2", 3".3", 4".4", et ainsi de suite. On trace l'appareil sur le demi-cercle Aa; on prend pour joints de lit les plans normaux à la demi-circonférence, et passant par les arêtes de douelle de la première voûte; on prend pour joints montants des plans normaux aux génératrices qui passent par les milieux des douelles; on opère de même pour la troisième voûte, en se servant de la demi-circonférence Dd. Les joints de lit de la deuxième voûte se trouvent alors déterminés.

Ce genre de voûte est d'un aspect disgracieux; il offre d'ailleurs, vers les extrémités des marches, des angles aigus qui peuvent compromettre la solidité de la construction; aussi est-il banni de la pratique (*Voy.*, pour plus de détails, le *Traité de la Coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 246 et suivantes).

VIS SANS FIN, vis qui engrène avec une roue dentée. L'axe de la roue est perpendiculaire à celui de la vis, et le point milieu de l'axe de la roue est le pied de la perpendiculaire commune aux deux axes. Cette disposition est représentée figure 1; elle

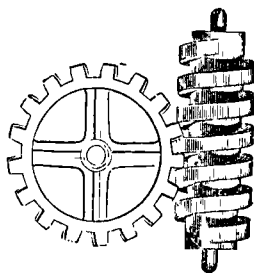


Fig. 1.

sert à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes perpendiculaires entre eux. Le plus ordinairement, c'est la vis qui conduit la roue; mais l'inverse peut aussi avoir lieu. Nous verrons les conditions que la vis doit remplir dans les deux cas.

I. Nous supposons la vis à filet carré, comme cela a lieu habituellement. Si, par l'axe de la vis et par le point milieu de l'axe de la roue, on fait passer un plan (qui sera perpendiculaire à l'axe de la roue), on obtient une section de l'appareil qui reproduit le tracé d'une CRÉMAILLÈRE (*Voy.* ce mot) engrenant avec une roue dentée. En effet, en premier lieu, la section de la vis présente une série de saillies rectangulaires équidistantes sur la génératrice du noyau, et offre ainsi l'aspect d'une crémaillère. Or si l'on suppose que la vis tourne uniformément autour de son axe, et que, dans chacune de ses positions, elle soit coupée par le plan de la

figure 2, la section sera toujours la même; mais on la verra s'élever uniformément, comme ferait une crémaillère conduite par une roue dentée. On en conclut que la section d'une dent quelconque de la

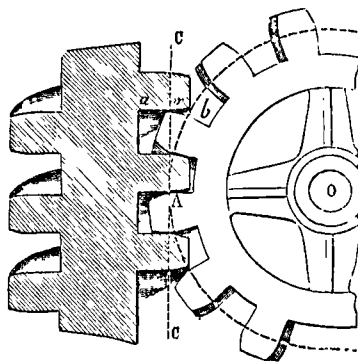


Fig. 2.

roue par le plan de la figure doit être une développante de cercle.

Soit A le point de contact de la circonférence primitive de la roue avec la droite primitive CC de la crémaillère fictive considérée. Le point de contact m d'une dent de la roue avec la dent correspondante de cette crémaillère sera constamment sur la droite CC. De plus, le plan tangent à la surface hélicoïde du filet de vis en m, et le plan tangent au même point à la surface de la dent de la roue, devront coïncider. Le premier de ces plans tangents contient la tangente à l'hélice qui passe en m. Or cette tangente se projette suivant mA, et fait avec cette droite un angle qui mesure l'inclinaison de cette tangente sur l'axe de la vis, c'est-à-dire un angle constant; le plan tangent commun qui est déterminé par cette tangente et par la tangente à la développante fait donc un angle constant avec le plan de la figure. La surface qui termine la dent de la roue est donc l'enveloppe d'un plan dont la trace est tangente à la développante, et qui fait un angle constant avec le plan de cette courbe. On en conclut que c'est une surface réglée, dont les génératrices sont elles-mêmes un angle constant avec le plan de la figure, et viennent successivement se confondre avec la tangente à l'hélice qui passe au point mobile m, et se projeter par conséquent sur mA. Il en résulte que ces génératrices sont tangentes au cylindre primitif de la roue, c'est-à-dire au cylindre qui a pour base le cercle AO; l'arête de rebroussement de la surface est donc tracée sur ce cylindre, et, comme les génératrices ont une inclinaison constante par rapport à sa base, cette arête de rebroussement est une hélice; donc enfin la surface cherchée est un *hélicoïde développable*.

II. Il peut arriver que la vis soit simple, c'est-à-dire à un seul filet; dans ce cas, le pas de la roue dentée est égal au pas de la vis; car il est égal au pas de la crémaillère fictive, lequel est égal au pas de la vis. Mais le plus souvent on enroule sur le même noyau un certain nombre de filets équidistants (trois au plus). Le pas de la roue dentée est alors égal à la distance de deux filets consécutifs, comptés sur une parallèle à l'axe de la vis, c'est-à-dire égal au

pas de la vis divisé par le nombre de filets. On déduit aisément de cette remarque le rapport des vitesses angulaires autour des deux axes. Soient, en effet, ω la vitesse angulaire de la roue, ω' celle de la vis, a le pas de la roue dentée, h celui de la vis, n le nombre des dents de la roue, n' le nombre des filets enroulés sur le noyau commun, on aura, d'après ce qu'on vient de dire,

$$a = \frac{h}{n};$$

d'où

$$na = \frac{nh}{n'};$$

mais na est la circonférence primitive de la roue, ou $2\pi r$, en désignant par r son rayon. Il vient donc

$$2\pi r = \frac{nh}{n'};$$

d'où

$$\frac{n'}{n} = \frac{h}{2\pi r}. \quad [1]$$

Or lorsque la vis fait un tour et que par conséquent, la crémaillère fictive avance de h , la circonférence primitive de la roue, ayant tourné de la même quantité linéaire, a fait une portion de tour exprimée par $\frac{h}{2\pi r}$; on a donc

$$\omega' : \omega = 1 : \frac{h}{2\pi r};$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{h}{2\pi r},$$

et par conséquent

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}, \quad [2]$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la roue est à la vitesse angulaire de la vis comme le nombre des filets de la vis est au nombre des dents de la roue. Si, par exemple, la roue a 100 dents, et qu'il y ait 2 filets, la vitesse angulaire de la roue sera 50 fois moindre que celle de la vis.

III. La théorie mécanique de la vis sans fin est exposée d'une manière inexacte dans plusieurs auteurs. On peut l'établir simplement de la manière suivante : Soit F la force mouvante, supposée appliquée à la vis, dans un plan perpendiculaire à son axe, et à une distance b de cet axe; soit P la force résistante, appliquée de même à une distance p de l'axe de la roue, dans un plan parallèle à celle-ci; soit ρ la distance du point de contact m à l'axe de la vis, i l'inclinaison de l'hélice passant au point m par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la vis; soit N la réaction normale qui s'exerce entre le filet et la dent de la roue; fN , en appelant f le coefficient de frottement, représentera la réaction tangentielle ou le frottement qui s'exerce, pour chacun des deux corps tournants, en sens inverse de la vitesse relative. Nous négligerons, pour le moment, les frottements des appuis de la vis et de la roue, ainsi que le poids de ces deux corps. Si l'on considère d'abord la vis, elle doit être en équilibre sous l'action des forces F , N et fN ; les moments de ces forces par rapport à l'axe sont respectivement

$$Fb, N \sin i \cdot \rho \text{ et } fN \cos i \cdot \rho.$$

En ayant égard aux signes de ces moments, on doit donc avoir

$$Fb = N \sin i \cdot \rho + fN \cos i \cdot \rho. \quad [3]$$

Considérons à son tour la roue : elle doit être en équilibre sous l'action de deux forces N' et fN' respectivement égales et opposées à N et à fN , et de la force résistante P ; les moments de ces trois forces sont respectivement

$$N' \cos i \cdot r, fN' \sin i \cdot r \text{ et } Pp.$$

En ayant égard aux signes de ces moments, on doit donc avoir

$$N' \cos i \cdot r = fN' \sin i \cdot r + Pp,$$

ou, en transposant et supprimant les accents,

$$Pp = N \cos i \cdot r - fN \sin i \cdot r. \quad [4]$$

Des relations [3] et [4], on tire par division

$$\frac{Fb}{Pp} = \frac{\rho \cdot \sin i + f \cos i}{r \cos i - f \sin i} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\tan i + f}{1 - f \tan i},$$

ou, en appelant φ l'angle du frottement dont la tangente est f ,

$$\frac{Fb}{Pp} = \frac{\rho}{r} \tan(i + \varphi); \quad [5]$$

d'où

$$F = P \cdot \frac{pp}{br} \tan(i + \varphi). \quad [6]$$

On voit que la force mouvante F augmente avec le frottement et avec l'inclinaison i du filet sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. Elle deviendrait infinie si l'on avait

$$i + \varphi = 90^\circ \text{ ou } i = 90^\circ - \varphi.$$

Il faut donc, pour que la transmission soit possible, que l'inclinaison du filet soit inférieure à cette limite, si c'est la vis qui conduit la roue comme nous l'avons supposé.

Si la roue conduisait la vis, il faudrait regarder P comme force mouvante, F comme force résistante, renverser le rapport donné par l'équation [5] et changer le signe du frottement, ou, ce qui revient au même, le signe de l'angle φ , ce qui donnerait

$$P = F \cdot \frac{br}{pp} \cot(i - \varphi). \quad [7]$$

On reconnaît encore que cette expression augmente avec le frottement, car si l'angle $i - \varphi$ diminue, sa cotangente augmente. On reconnaît de même que P augmente quand i diminue, et que cette force devient infinie pour $i = \varphi$. La transmission n'est donc possible dans ce cas que si l'inclinaison i est supérieure à l'angle du frottement.

Si l'on veut avoir le rapport entre le travail moteur et le travail résistant, dans le cas où la vis conduit la roue, il faut multiplier le premier membre de l'équation [5] par le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ et le second

par le rapport $\frac{n}{n'}$, qui lui est égal en vertu de la relation [2]; il vient ainsi

$$\frac{\mathcal{E}F}{\mathcal{E}P} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\rho}{r} \tan(i + \varphi). \quad [8]$$

On peut en déduire le travail du frottement; car si $\mathcal{E}F$ désigne ce travail, et k le second membre de l'équation [8], on a

$$\mathcal{E}F = k \mathcal{E}P = \mathcal{E}P + \mathcal{E}f;$$

d'où

$$\mathcal{E}f = (k - 1) \mathcal{E}P. \quad [9]$$

IV. La vis sans fin est employée dans les manœuvres

vres de vannes, parce qu'en réglant d'une manière convenable les dimensions de l'appareil, on peut faire en sorte qu'un seul homme appliqué à une manivelle suffise pour soulever une vanne d'un poids considérable. En donnant au filet de la vis une faible inclinaison, on obtient encore un autre effet : c'est que si, par une circonstance quelconque, l'homme vient à lâcher la manivelle, le poids de la vanne ne peut pas la faire descendre; et, en effet, ce poids devenant alors force mouvante, on se trouverait dans le cas de la relation [7], et si i est égal ou inférieur à φ , on a vu que le mouvement devient impossible dans ce sens. Il faut remarquer encore que lorsque l'on fait tourner la manivelle en sens contraire pour obliger la vanne à descendre, il faut un effort F' que l'on déduit de la relation [6] en changeant seulement le signe de φ , ce qui donne

$$F' = P \cdot \frac{pp}{br} \operatorname{tang}(i - \varphi). \quad [10]$$

On emploie aussi la vis sans fin dans les mécanismes à ailettes que l'on rencontre en horlogerie : c'est alors la roue qui conduit la vis. On donne ordinairement au filet une inclinaison de 45 degrés.

V. On peut transformer le mécanisme de la vis sans fin en un véritable engrenage destiné à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes rectangulaires non concourants. Pour cela, il faut imaginer que, sur un noyau d'un rayon plus grand que le rayon ordinaire de la vis sans fin, on enroule un assez grand nombre de filets; puis que l'on coupe la vis par deux plans perpendiculaires à son axe et assez rapprochés : on obtient ainsi une véri-

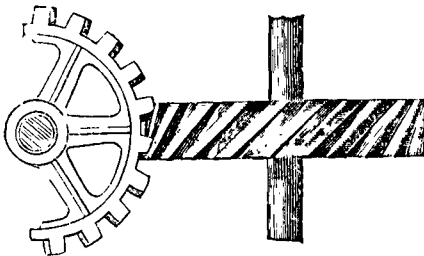


Fig. 3.

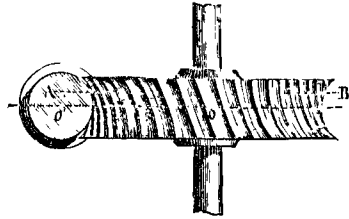
table roue dentée (fig. 3), dont les dents sont formées par les portions de filets conservées.

La théorie de cet engrenage serait d'ailleurs la même que celle de la vis sans fin. On donne à cet engrenage le nom d'*engrenage hélicoïdal*. (Voy. VIS TANGENTE.)

VI. L'engrenage de la vis sans fin peut être *intérieur*, c'est-à-dire que l'on peut placer une roue dentée dans l'intérieur d'un écrou avec lequel elle engrène. Cet engrenage se construit d'après les mêmes principes que l'engrenage extérieur. On peut faire tourner l'écrou autour de son axe, et alors la roue tourne autour de son sien, qui est perpendiculaire au premier. On peut encore maintenir l'écrou fixe, et faire tourner l'axe de la roue dentée autour de l'axe de l'écrou; la roue tournera en même temps autour de son axe. On trouve un exemple de ce système dans la machine à alésier de MM. Stéhélin et Cie (Voy. ALÉSIOIR).

VIS TANGENTE, espèce de vis sans fin employée

dans les machines à diviser et dans quelques autres appareils de précision. Elle diffère de la vis sans fin ordinaire (Voy. VIS SANS FIN) en ce que la roue, creusée en gorge à sa circonférence, embrasse la vis et en épouse la forme, comme l'indique la figure,



qui est une coupe de l'appareil par un plan perpendiculaire à la vis. On pourrait, par les procédés de la Géométrie descriptive, déterminer exactement la denture de la roue. On mènerait une série de plans perpendiculaires à l'axe de la roue. Soit AB l'un de ces plans; il couperait la vis suivant une crémaillère fictive à dents curvilignes, dont on pourrait déterminer le profil par points. On tracerait dans le plan AB la dent d'une roue fictive ayant son centre en O, et destinée à engrener avec cette crémaillère. En opérant ainsi pour chacun des plans auxiliaires, on obtiendrait une série de dents de roues dont les profils, s'ils étaient suffisamment rapprochés, détermineraient par leur ensemble la surface cherchée.

Dans la pratique, on a un moyen beaucoup plus simple de déterminer cette surface et de l'exécuter en même temps. Après avoir construit le disque à gorge qui doit devenir la roue, on le met en contact avec une vis en acier trempé, de même forme que celle qui doit le conduire, mais dont les filets sont entaillés de manière à en faire un outil propre à tarauder. On fait tourner cette vis en rapprochant peu à peu l'axe du disque; la vis entaille la gorge en lui imprimant en même temps un mouvement de rotation, et le filet s'y creuse peu à peu un passage, en donnant à la gorge la forme qu'elle doit avoir. Quand la roue est convenablement taillée, on remplace la vis en acier par la vis de même forme qui est destinée à conduire la roue. On emploie ordinairement une vis à trois ou quatre filets équidistants. Ces filets peuvent être triangulaires ou carrés.

VISCOSITÉ, propriété qu'ont les fluides de résister au déplacement relatif de leurs molécules, et en vertu de laquelle les filets liquides ou gazeux ne peuvent glisser les uns sur les autres sans éprouver un frottement. Cette propriété est peu marquée chez beaucoup de fluides, chez l'air et chez l'eau, par exemple; aussi la néglige-t-on dans un grand nombre de questions d'application. Mais ce n'est que dans les **FLUIDES PARFAITS** (Voy. ce mot) qu'il y a absence complète de viscosité, et l'on est obligé d'y avoir égard toutes les fois qu'on étudie le mouvement d'un fluide dans un canal ou dans une conduite de quelque étendue, en tenant compte des différences de vitesse des divers filets.

VISION, exercice de l'organe de la vue. La description anatomique de cet organe, et l'étude des conditions physiologiques dans lesquelles il fonctionne, est du ressort de l'histoire naturelle; nous

ne parlerons ici que des conditions mathématiques de la vision. Les rayons, émanés d'un point de la surface d'un corps éclairé, et qui arrivent à notre œil, forment un cône dont ce point est le sommet et qui a pour base la pupille; l'habitude nous fait rapporter au sommet de ce cône la position du point qui nous donne la sensation de la vision.

Pour que la vision soit distincte, il faut que l'angle au sommet du cône ait une valeur qui varie d'une personne à l'autre, mais qui reste sensiblement la même pour une même personne; cette valeur est ordinairement de 30 à 40 minutes. Ceci revient à dire que, pour que la vision soit nette, il faut que l'objet soit placé à une certaine distance de notre œil, que l'on appelle la *distance de la vue distincte*; elle est ordinairement de 25 à 30 centimètres; mais elle peut se réduire à quelques centimètres chez les personnes très-myopes, tandis qu'elle peut atteindre près d'un mètre chez certains presbytes.

Lorsque, pour augmenter la puissance de la vue, on fait usage d'un instrument d'optique, il faut encore que ces conditions soient remplies, non plus pour l'objet, mais pour son image; nous n'avons la sensation de la vision que lorsque les rayons lumineux arrivent à notre œil sous la forme d'un faisceau divergent; nous rapportons au sommet de ce faisceau conique la position du point que nous voyons; et, pour que la vision soit nette, il faut que l'image soit amenée à une distance de l'œil égale à la distance de la vue distincte. Dans tous les instruments d'optique on peut régler la position de l'œil de manière que cette condition soit satisfaite.

Pour ce qui est de la grandeur apparente des objets, *Voy. DIAMÈTRE APPARENT.*

VITESSE. Dans le MOUVEMENT UNIFORME, la vitesse est l'espace que le mobile parcourt dans une seconde, ou qu'il parcourrait si le mouvement avait cette durée. Dans le MOUVEMENT VARIÉ, la *vitesse, au bout d'un temps donné*, est la dérivée de l'espace considéré comme une fonction du temps. On peut dire encore que c'est la VITESSE MOYENNE, pendant le temps infiniment court, qui succède à l'instant considéré (*Voy. les mots en petites capitales*). La vitesse est en valeur absolue un nombre d'unités de longueur, un nombre de mètres; mais c'est une quantité *algébrique*, c'est-à-dire susceptible des signes + ou —, selon le sens dans lequel se meut le mobile.

VITESSE ABSOLUE, vitesse d'un point matériel dans le MOUVEMENT ABSOLU (*Voy. ce mot et l'article COMPOSITION DES VITESSES*).

VITESSE ANGULAIRE, nom donné dans le mouvement de ROTATION (*Voy. ce mot*) à la vitesse d'un point qui serait situé à 1 mètre de distance de l'axe.

Dans le calcul des machines, on a souvent à déterminer la vitesse angulaire d'un corps, connaissant le nombre n de tours qu'il exécute dans une minute. Pour y parvenir, on remarque que le chemin parcouru par le point qui est ou qui serait situé à 1 mètre de l'axe est 2π pour chaque tour, et par conséquent $2n\pi$ pour n tours, c'est-à-dire $2n\pi$ en 1 minute ou 60 secondes. Le chemin parcouru par ce point en 1 seconde est donc $\frac{2n\pi}{60}$ ou $\frac{n\pi}{30}$; c'est la vitesse angulaire demandée. Ainsi l'on a,

en appelant ω cette vitesse angulaire,

$$\omega = \frac{n\pi}{30}; \quad [1]$$

c'est-à-dire que, pour obtenir la vitesse angulaire, il faut multiplier le nombre de tours exécutés en une minute par le rapport de la circonférence au diamètre et diviser le produit par 30. Si, par exemple, une roue fait 45 tours par minute, sa vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{45 \cdot 3,1416}{30} = 4,7124.$$

On tire de la formule [1]

$$n = \frac{30\omega}{\pi}; \quad [2]$$

c'est-à-dire que, réciproquement, pour trouver le nombre de tours exécutés par minute, il faut multiplier la vitesse angulaire par 30 et diviser par le rapport de la circonférence au diamètre. Si, par exemple, on a

$$\omega = 5,$$

on trouvera

$$n = \frac{5 \cdot 30}{3,1416} = 47,7,$$

ou environ 48 tours par minute.

VITESSE ARÉOLAIRE. *Voy. ARÉOLAIRE.*

VITESSE DE LA LUMIÈRE, espace que la lumière parcourt dans une seconde. C'est Rømer, astronome danois, qui détermina à Paris, en 1675 et 1676, la vitesse de la lumière par l'observation des éclipses du premier satellite de Jupiter (*Voy. ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER*). Il avait remarqué que l'instant de l'immersion d'un satellite dans le cône d'ombre projetée par la planète, ou l'instant de sa réapparition, ne coïncidait pas exactement avec les époques fixées par les Tables de Dominique Cassini, bien que ces Tables eussent été dressées d'après un très-grand nombre d'observations. Lorsque Jupiter se trouvait dans le voisinage de l'opposition, le phénomène avait lieu plus tôt que l'époque fixée par les Tables; il y avait, au contraire, retard sur l'époque des Tables quand la planète se trouvait dans le voisinage de la conjonction. Rømer eut l'idée que ces différences pouvaient tenir au temps que la lumière emploie à parcourir le diamètre de l'orbite terrestre. Lorsque, en effet, Jupiter se trouve à l'opposition, sa distance à la Terre est la différence entre les distances de la planète et de la Terre au Soleil; lorsque, au contraire, la planète est en conjonction, sa distance à la Terre est la somme des distances de Jupiter et de la Terre au Soleil. Dans ce second cas, la lumière, pour venir de Jupiter à nous, a à parcourir un plus long espace que dans le premier, et la différence est précisément le double de la distance de la Terre au Soleil, ou le diamètre de l'orbite terrestre. Les éclipses des satellites de Jupiter ne peuvent pas être observées lorsque la planète est en conjonction, à cause de l'éclat du Soleil; mais en notant successivement le retard qui se manifeste, pendant que la planète va de l'opposition à la conjonction, entre l'époque où l'on observe l'éclipse de l'un des satellites, du premier par exemple, et l'époque calculée, Rømer reconnut que, de l'opposition à la conjonction, le retard total devait être de $16^m 36^s$. Tel est donc le temps employé par la lumière pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre. Il en résulte

que la lumière emploie 8^m 18^s ou 498^s pour parcourir la distance de la Terre au Soleil, qui est en moyenne de 38 300 000 lieues (Voy. SOLEIL). La vitesse de la lumière est donc de

38 300 000
498

ou environ 77 000 lieues, de 4 kilomètres par seconde.

Les expériences directes, exécutées en 1853 par M. Fizeau, ont confirmé l'explication de Røemer et donné la même valeur pour la vitesse de la lumière.

Connaissant les distances des planètes au Soleil (Voy. PLANÈTES), il est facile d'en déduire les limites entre lesquelles varie leur distance à la Terre. Pour Neptune, par exemple, ces limites sont 29 et 31 fois le rayon de l'orbite terrestre. Il en résulte que le temps employé par la lumière pour nous venir de Neptune est compris entre 29 et 31 fois 8^m 18^s, c'est-à-dire entre 4^h 0^m 42^s et 4^h 17^m 18^s.

On sait que l'étoile la plus rapprochée de nous en est distante de plus de 200 000 fois le rayon de l'orbite terrestre (Voy. ÉTOILES). Il en résulte que la lumière emploie, pour nous venir de l'étoile la plus voisine, un temps qui surpasse

200 000 fois 8^m 18^s ou 99 600 000^s,

c'est-à-dire plus de 3 ans 57 jours. Si, par conséquent, une étoile venait à s'anéantir, nous la verrions encore pendant plus de 3 ans 57 jours.

VITESSE D'ENTRAÎNEMENT, vitesse d'un point matériel dans le MOUVEMENT D'ENTRAÎNEMENT (Voy. ce mot et l'article COMPOSITION DES VITESSES).

VITESSE DUE À UNE HAUTEUR, vitesse qu'acquerrait un mobile tombant librement de cette hauteur dans le vide. La valeur de cette vitesse est

v = √2gh,

en appelant *h* la hauteur considérée et *g* l'accélération due à la pesanteur, ou le nombre 9^m, 8088 (Voy. MOUVEMENT VERTICAL DES GRAVES). La quantité qui fait l'objet de cet article joue un rôle important en Mécanique. Nous donnons ci-dessous la table de ses valeurs, de millimètre en millimètre, depuis 0^m,001 jusqu'à 0^m,01, et, de centimètre en centimètre, depuis 0^m,01 jusqu'à 5 mètres. La colonne des différences permettra d'interpoler aisément et de trouver la hauteur due à une vitesse donnée.

Table with 9 columns: h, v, DIFF. for values from 0.001 to 5.0 meters. Includes numerical data and difference values.

Large table with 12 columns: h, v, DIFF. for values from 0.80 to 1.64. Includes numerical data and difference values.

h.	v.		DIFF.	h.	v.		DIFF.	h.	v.		DIFF.
	m	DIFF.			m	DIFF.			m	DIFF.	
4,20	9,077	11	4,41	9,301	11	4,62	9,520	10	4,83	9,734	10
4,21	9,088	11	4,42	9,312	11	4,63	9,530	10	4,84	9,744	10
4,22	9,099	10	4,43	9,322	11	4,64	9,541	10	4,85	9,754	10
4,23	9,109	11	4,44	9,333	10	4,65	9,551	10	4,86	9,764	10
4,24	9,120	11	4,45	9,343	11	4,66	9,561	11	4,87	9,774	10
4,25	9,131	11	4,46	9,354	10	4,67	9,572	10	4,88	9,784	10
4,26	9,142	10	4,47	9,364	10	4,68	9,582	10	4,89	9,794	10
4,27	9,152	10	4,48	9,375	10	4,69	9,592	10	4,90	9,804	10
4,28	9,163	11	4,49	9,385	10	4,70	9,602	10	4,91	9,814	10
4,29	9,174	11	4,50	9,396	11	4,71	9,612	11	4,92	9,824	10
4,30	9,185	10	4,51	9,406	11	4,72	9,623	10	4,93	9,834	10
4,31	9,195	11	4,52	9,417	10	4,73	9,633	10	4,94	9,844	10
4,32	9,206	11	4,53	9,427	10	4,74	9,643	10	4,95	9,854	10
4,33	9,217	10	4,54	9,437	11	4,75	9,653	10	4,96	9,864	10
4,34	9,227	10	4,55	9,448	10	4,76	9,663	10	4,97	9,874	10
4,35	9,238	10	4,56	9,458	10	4,77	9,673	10	4,98	9,884	10
4,36	9,248	10	4,57	9,468	11	4,78	9,684	10	4,99	9,894	10
4,37	9,259	11	4,58	9,479	11	4,79	9,694	10	5,00	9,904	10
4,38	9,270	10	4,59	9,489	11	4,80	9,704	10			
4,39	9,280	11	4,60	9,500	10	4,81	9,714	10			
4,40	9,291	10	4,61	9,510	10	4,82	9,724	10			

Nature du mobile	Vitesse moyenne par seconde	Vitesse moyenne par heure.
Vents impétueux... 15 à 20,00		
— tempête.... 25 à 30,00		
— ouragan.... 40 à 50,00		
Vaisseaux plus grande vitesse..... 6,00		21,06
Wagons plus grande vitesse..... 25,00		90,08
La Terre dans son orbite... 30 ^h ,75		

Les nombres inscrits dans la colonne des différences expriment des unités du troisième ordre décimal.

VITESSE MOYENNE, vitesse du mouvement uniforme qu'il faudrait substituer au mouvement réel d'un point matériel pour que le même espace total fût parcouru par le mobile dans le même temps total. Il en résulte que la vitesse moyenne a pour valeur le quotient de l'espace total par le temps total employé à le parcourir (Voy. MOUVEMENT UNIFORME). Si, par exemple, un flotteur placé dans le courant d'un fleuve a parcouru 1800 mètres en une heure, ou 3600 secondes, on en conclura que la vitesse moyenne est le quotient de 1800 par 3600, c'est-à-dire 0^m,50, ou que, si son mouvement avait été uniforme, il aurait parcouru 0^m,50 par seconde.

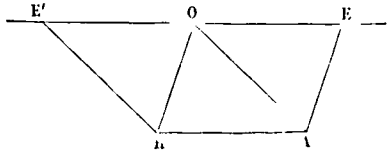
Dans les usages ordinaires, on substitue ainsi au mouvement réel, qui n'est jamais parfaitement uniforme, un mouvement uniforme fictif ou moyen, tel que le même espace total soit parcouru dans le même temps total : la vitesse de ce mouvement uniforme fictif est la vitesse moyenne.

Au lieu de rapporter la vitesse à la seconde, on la rapporte alors quelquefois à l'heure. Voici quelques vitesses moyennes utiles à connaître :

Nature du mobile.		Vitesse moyenne par seconde.	Vitesse moyenne par heure.
Homme	au pas, sans charge et sur un terrain horizontal.....	m. 1,50	kil. 5,40
—	sa plus grande vitesse.....	7,00	
Cheval	au pas.....	1,20	4,32
—	au petit trot.....	2,22	8,00
—	au trot des malles-postes.....	4,44	16,00
—	train des courses.....	15,00	
Hirondelle 30 à 40,00		
Seine	à Paris, à l'étiage.	0,67	2,40
Rhône	à Lyon, à l'étiage.	2,20	7,90
Vents	brise légère.....	1,00	
—	frais.....	2,00	
—	bon frais... 5 à 7,00		
—	forte brise... 10 à 12,00		

VITESSE MOYENNE D'UN COURS D'EAU, quotient de la dépense par la section transversale : c'est la vitesse commune que tous les filets devraient avoir pour que la dépense restât la même (Voy. JAUGEAGE DES COURS D'EAU, CONDUITES, CANAUX DÉCOUVERTS).

VITESSE RELATIVE, vitesse d'un mobile dans le mouvement relatif. La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement (Voy. COMPOSITION DES VITESSES). Il en résulte que la vitesse relative peut être regardée elle-même comme la résultante de la vitesse absolue et d'une vitesse égale et opposée à la vitesse d'entraînement. En effet, si OR et OE représentent la



vitesse relative et la vitesse d'entraînement, la diagonale OA du parallélogramme construit sur OR et OE représentera la vitesse absolue. Or si l'on mène par le point R la droite RE' parallèle à OA et terminée au prolongement de OE, la vitesse OR pourra être regardée comme la résultante de la vitesse OA et d'une vitesse représentée par OE'. Mais les triangles ORA et ORE' étant égaux, ainsi que les triangles ORA et OAE, on a

$$OE' = RA = OE$$

la vitesse OE' est donc égale et opposée à la vitesse OE. Ainsi la vitesse relative OR est la résultante de la vitesse absolue OA et d'une vitesse OE' égale et opposée à la vitesse d'entraînement OE. Si l'on désigne par V_a la vitesse absolue, par V_r la vitesse d'entraînement, par V_r la vitesse relative, et par

(V_a, V_e) l'angle des deux premières, on aura donc, attendu que $OR = AE$,

$$V_r = \sqrt{V_a^2 + V_e^2 - 2V_a V_e \cos(V_a, V_e)}$$

On peut remarquer que pour obtenir la direction et l'intensité de la vitesse relative, il suffit de joindre par une droite AE les extrémités des droites qui représentent la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement.

VITESSES VIRTUELLES, déplacements simultanés et infiniment petits que l'on peut attribuer aux différents points matériels composant un système donné, sans altérer les liaisons établies entre ces différents points. On donne à ces déplacements le nom de vitesses, parce que, si le système est primitivement en repos, ces déplacements sont proportionnels aux vitesses avec lesquelles les différents points se mouvaient dans un instant infiniment court; et

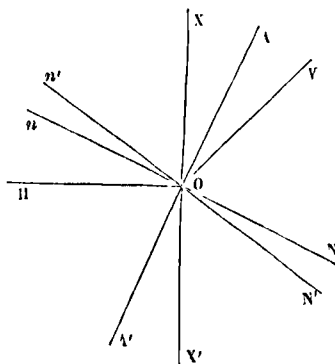
ces vitesses sont dites *virtuelles*, parce qu'elles sont simplement possibles, et non pas effectives. On emploie dans la Statique abstraite un principe important fondé sur la considération de ces vitesses. Ce principe, déjà entrevu par Galilée, mais qui n'a été établi d'une manière générale que par Lagrange, est le *principe des vitesses virtuelles* (Voy. TRAVAIL VIRTUEL).

VOIE LACTÉE, bande blanchâtre, faiblement lumineuse, qui traverse le ciel étoilé et fait le tour de la sphère céleste en coupant l'écliptique vers les solstices. Sur un tiers environ de sa longueur, cette bande se dédouble en deux arcs qui se joignent par leurs extrémités. En examinant la voie lactée avec de puissants instruments d'optique, on reconnaît qu'elle est formée d'un amas d'innombrables étoiles. Herschel a estimé à plus de 50000 le nombre de celles qui avaient passé en une heure sous ses yeux dans un espace de 30 degrés de long sur 2 de large. La voie lactée est donc tout à fait analogue à une nébuleuse résoluble (Voy. NÉBULEUSES) qui aurait la forme d'un disque très-aplati, dont le Soleil et notre système planétaire occuperaient à peu près le centre. Lorsque nous portons nos regards vers la circonférence du disque, nous voyons un amas considérable d'étoiles très-éloignées dont l'ensemble nous apparaît comme une immense traînée blanchâtre : c'est la voie lactée. Quand nous regardons dans une direction différente, nous ne voyons que des étoiles isolées, qui nous paraissent beaucoup plus brillantes, parce qu'elles sont beaucoup moins éloignées de nous. La bifurcation de la voie lactée s'expliquerait alors en admettant l'existence d'un second disque aplati, peu incliné sur le premier, et se réunissant à lui vers la région qu'occupe notre système solaire.

VOILES, organes destinés à recevoir l'action du vent dans les navires. Ce sont, comme on sait, des surfaces flexibles qui peuvent être tendues, orientées de diverses manières, et diminuées ou même complètement serrées, suivant les besoins de la navigation. Les voiles sont quadrangulaires, trapézoïdales ou triangulaires. Quelque bien tendues qu'on les suppose, elles présentent une courbure dont la nature a été examinée par Jean Bernouilli dans sa *Nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux*, en supposant la résistance en chaque point proportionnelle au carré de la vitesse et au carré du sinus de l'angle d'incidence. Le marquis de Poterat, partant d'une autre hypothèse, a, dans sa *Théorie du navire*, assigné à la surface de la voile une forme différente. Ces recherches ne sont, au reste, qu'un objet de pure curiosité, et Bernouilli lui-même ne s'en est servi que pour déterminer la direction de la résultante des actions partielles du vent. La complication que la considération de la courbure des voiles introduit dans les calculs a conduit la plupart des auteurs à les regarder comme planes. Cette hypothèse est d'autant plus admissible, que, d'après les expériences faites à Brest par le lieutenant Thibault (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES), la résistance paraît être la même, au moins pour les incidences au-dessus de 45 degrés, que si la voile était développée suivant un plan; et si, pour de plus faibles incidences, la résistance de la voile est plus grande que celle d'une surface plane de même étendue, cela tient évidemment à l'élasticité de l'air, dont la

théorie ordinaire ne tient pas compte, puisqu'elle assimile l'air à un liquide de même densité. Le problème de la résistance des voiles, dans toute sa complication, est inabordable dans l'état actuel de nos connaissances, et il faut bien se contenter d'une approximation, qui suffit d'ailleurs pour rendre compte des principales circonstances de la navigation à voiles.

Nous examinerons d'abord l'effet du vent sur la marche du navire en réduisant les voiles à une seule. Nous suivrons pour cela la marche indiquée par le marquis de Poterat dans sa *Théorie du navire*, mais en partant d'une hypothèse sur la résistance plus conforme à la réalité. Soit XOX' la projec-



tion horizontale de l'axe longitudinal du navire. Nous supposons la voile rectangulaire et d'abord verticale. Soient AOA' sa trace horizontale et NON' la direction d'une normale à cette voile; soit VO la direction du vent, laquelle est toujours horizontale : sous l'action du vent, le navire prendra en général une inclinaison en tournant autour d'un axe parallèle à XX' et passant par son centre de gravité. Nous appellerons i cette inclinaison. Faisons

$$AOX = \alpha \text{ et } VOX = \varphi.$$

Soient V la vitesse du vent, v la vitesse du navire dans le sens OX , u sa vitesse dans le sens perpendiculaire. D'après les principes admis sur la RÉSISTANCE DES FLUIDES (Voy. ce mot), la force que le vent exerce sur la voile est proportionnelle au carré de sa vitesse relative par rapport à la voile, estimée normalement à celle-ci. Cette vitesse relative s'obtiendra en faisant la somme algébrique des projections des vitesses V , v et u sur la direction normale à la voile. Mais, lorsque le navire s'incline de l'angle i , la normale NON' vient prendre dans l'espace une certaine position $N'ON'$; et c'est sur cette nouvelle direction qu'il faut projeter les vitesses. Remarquons d'abord que, dans le trièdre $OXVN'$, on connaît la face XOV égale à φ , la face XON' égale à XON , ou à $90^\circ + \alpha$, attendu que dans la rotation autour de l'axe OX l'angle de la normale ON avec cet axe ne change pas; enfin l'angle dièdre OX égal à i . Par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, on a donc, en appelant ω l'angle VON' ,

$$\cos \omega = -\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha \cos i, \quad [1]$$

et la projection de la vitesse V sur ON' est $V \cos \omega$. On remarquera ensuite que, par la raison déjà indiquée, l'angle XON' est égal à XON ou à $90^\circ - \alpha$,

La projection de la vitesse v sur la normale est donc, en ayant égard au signe,

$$-v \sin \alpha.$$

Si maintenant on considère le trièdre qui a pour arêtes OX , On' et OH mené dans le plan horizontal perpendiculairement à OX , on voit que l'on connaît la face $XOn' = 90^\circ - \alpha$, la face $XOH = 90^\circ$, et l'angle dièdre OX égal à i . On a donc

$$\cos HOn' = \cos \alpha \cos i;$$

par suite, la projection de la vitesse u sur On' a pour valeur, en ayant égard au signe,

$$-u \cos \alpha \cos i.$$

La vitesse relative du vent et de la voile, estimée normalement à celle-ci, a donc pour expression

$$V \cos \omega - v \sin \alpha - u \cos \alpha \cos i; \quad [2]$$

et, si l'on appelle F la force normale exercée par le vent sur la voile, on a

$$F = \frac{k^2 A (V \cos \omega - v \sin \alpha - u \cos \alpha \cos i)^2}{2g}, \quad [3]$$

en désignant par k un coefficient numérique, par δ le poids du mètre cube d'air et par A la surface de la voile.

Prenons pour axes trois droites rectangulaires passant par le centre de gravité du navire, savoir : l'axe des x parallèle à la quille ou à OX , l'axe des y horizontal et perpendiculaire à la quille ou parallèle à OH , l'axe des z vertical de haut en bas. La force F pourra se décomposer en trois autres, dirigées suivant ces trois axes, et que nous nommerons respectivement F' , F'' et F''' . On a

$$F' = F \cos XOn' = F \cos \alpha \cos i = F \sin \alpha,$$

$$F'' = F \cos HOn' = F \cos \alpha \cos i.$$

Pour avoir F''' , considérons le trièdre qui a pour arêtes OX , On' et la verticale OZ du point O , que nous n'avons pas tracée sur la figure pour éviter la confusion. Dans ce trièdre, on connaît l'angle

$$XOn' = \alpha, \quad \text{l'angle } XOZ = 90^\circ,$$

et le dièdre OX égal à i ; on a donc

$$\cos ZOn' = \sin \alpha \cos i,$$

et par conséquent

$$F''' = F \sin \alpha \cos i.$$

Considérons le point d'application de la force F , point que l'on nomme le *centre de voilure*. Si ses coordonnées, avant l'inclinaison du navire, étaient

$$x = d, \quad y = 0, \quad z = h,$$

il est aisé de voir qu'après l'inclinaison elles deviendront

$$x = d, \quad y = h \sin i, \quad z = h \cos i.$$

Par suite, on trouvera, pour les moments de la force F par rapport aux trois axes, savoir :

Par rapport à l'axe des x ,

$Yz + Zy$, ou $Fh \cos \alpha (\cos^2 i + \sin^2 i)$, ou $Fh \cos \alpha$, en prenant pour sens positif celui de l'inclinaison;

Par rapport à l'axe des y ,

$$Zx + Xz, \quad \text{ou } F(d \cos \alpha \sin i + h \sin \alpha \cos i),$$

en prenant pour sens positif celui de la rotation de Z vers Y ;

Par rapport à l'axe des z ,

$$Xy - Yx, \quad \text{ou } F(h \sin \alpha \sin i - d \cos \alpha \cos i),$$

en prenant pour sens positif celui de la rotation de X vers $-Y$.

Ces moments répondent aux mouvements de rotation auxquels les marins ont donné les noms respectifs de *ROLIS*, de *TANGAGE* et d'*ÉVOLUTION* (*Voy. ces mots*).

Après avoir analysé la force motrice, il faut analyser de même la résistance que la mer exerce sur le navire. Cette résistance, que nous nommons R , peut se décomposer en trois autres respectivement parallèles aux trois axes, et que nous désignerons par R' , R'' , R''' . D'après l'expérience (*Voy. RÉSTI-TANCE DES FLUIDES*), la force R' a pour expression :

$$R' = \frac{k' \Pi a v^2}{2g},$$

en désignant par k' un coefficient numérique, par Π le poids du mètre cube d'eau de mer, et par a l'aire de la partie immergée du maître couple. La résistance horizontale, c'est-à-dire la résultante des forces R' et R'' , est directement opposée au mouvement horizontal absolu du navire. Il en résulte qu'on a la relation

$$\frac{R''}{R'} = \frac{u}{v};$$

d'où

$$R'' = R' \frac{u}{v}.$$

Soient x , y , z les coordonnées du point d'application de la force R ; les moments des forces R' , R'' , R''' par rapport aux trois axes seront respectivement exprimés par

$$R''z - R'''y, \quad R'z - R'''x, \quad R''x - R'y,$$

en conservant les conventions adoptées plus haut pour les signes.

Si enfin nous désignons par P le poids du navire, nous aurons tous les éléments nécessaires pour pouvoir étudier sa marche. Le vent étant supposé constant, le navire finira par prendre un mouvement rectiligne et uniforme; nous supposons de plus qu'il ne prenne aucun mouvement de rotation autour de son centre de gravité. Les forces qui lui sont appliquées devront dès lors satisfaire aux six conditions d'équilibre, et l'on aura

$$F \sin \alpha - R' = 0, \quad [a]$$

$$F \cos \alpha \cos i - R'' = 0, \quad [b]$$

$$F \cos \alpha \sin i + P - R''' = 0, \quad [c]$$

$$Fh \cos \alpha + R''z - R'''y = 0, \quad [d]$$

$$F(d \cos \alpha \sin i + h \sin \alpha \cos i) + R'z - R'''x = 0, \quad [e]$$

$$F(h \sin \alpha \sin i - d \cos \alpha \cos i) + R'y - R''x = 0. \quad [f]$$

On peut simplifier cette dernière par une considération qui fera en même temps connaître l'inclinaison i que prend le navire. Pour que les trois forces F , P , R se fassent équilibre, il faut d'abord que les deux premières se rencontrent : ce qui exige que la direction de F rencontre la verticale du centre de gravité, et comme ce point est l'origine des coordonnées, il faut que le rapport entre les coordonnées

$$y = h \sin i \quad \text{et} \quad x = d$$

du centre de voilure soit égal au rapport des composantes F'' et F' , ce qui donne

$$\frac{F \cos \alpha \cos i}{F \sin \alpha} = \frac{h \sin i}{d};$$

d'où l'on tire

$$\tan g i = \frac{d}{h \tan g \alpha}. \quad [4]$$

Pour un vaisseau de 100 canons, par exemple, on a à peu près

$$d = 3^m, 2 \quad \text{et} \quad h = 26^m, 3.$$

Si l'on suppose que le vaisseau navigue au plus près, et qu'on ait

$$\alpha = 30^\circ,$$

on trouvera

$$i = 11^{\circ} 51' \text{ environ.}$$

L'inclinaison serait moindre si α augmentait, et pour

$$\alpha = 90^{\circ},$$

c'est-à-dire si le vaisseau courait vent arrière, on aurait

$$i = 0.$$

A l'aide de la relation [4], la condition [f] se réduit à

$$R^2x - R^2y = 0. \quad [g]$$

Si l'on élimine x entre les équations [d] et [e], en ayant égard à la relation [g], on retombe sur la condition [4]; ce qui montre que les équations [d], [e], [f] se réduisent alors à deux, qui sont les équations de la direction de la force R. On peut choisir, par exemple, les équations [d] et [g].

L'équation [a] peut s'écrire
 $k\delta A (V \cos \omega - v \sin \alpha - u \cos \alpha \cos i)^2 \sin \alpha = k' \Pi a v^2$;
 d'où

$$\left. \begin{aligned} V \cos \omega - v \sin \alpha - u \cos \alpha \cos i \\ = \sqrt{\frac{k' \Pi a}{k \delta A}} \cdot \frac{v}{\sqrt{\sin \alpha}} = M \frac{v}{\sqrt{\sin \alpha}}, \end{aligned} \right\} [5]$$

en posant

$$M = \sqrt{\frac{k' \Pi a}{k \delta A}}.$$

On peut remplacer u par sa valeur en fonction de v ; on a trouvé

$$\frac{u}{v} = \frac{R''}{R'}$$

et, en vertu des équations [a] et [b], il vient

$$\frac{u}{v} = \frac{F \cos \alpha \cos i}{F \sin \alpha}$$

d'où

$$u = \cot \alpha \cos i.$$

Substituant dans [5], on en tire pour v la valeur

$$v = V \cdot \frac{\cos \omega \sin \alpha}{M \sqrt{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 i}},$$

ou

$$v = V \cdot \frac{(\sin \varphi \cos \alpha \cos i - \cos \varphi \sin \alpha) \sin \alpha}{M \sqrt{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 i}}, \quad [6]$$

et par suite

$$u = V \cdot \frac{(\sin \varphi \cos \alpha \cos i - \cos \varphi \sin \alpha) \cos \alpha \cos i}{M \sqrt{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 i}}. \quad [7]$$

La marche du vaisseau se trouve donc ainsi complètement déterminée.

D'après les formules de M. Bourgois, le coefficient k' aurait une valeur moyenne donnée par la relation

$$\frac{k' \Pi}{2g} = 3,3,$$

d'où

$$k' = 0,063.$$

Ce coefficient varie avec la vitesse; mais on peut procéder par approximations successives, c'est-à-dire prendre d'abord pour k' la valeur 0,063, et se servir de la valeur de la vitesse, calculée à l'aide de ce coefficient, pour obtenir une nouvelle valeur de k' (Voy. RÉSISTANCE DES FLUIDES).

Le coefficient M diffère peu de l'unité. Si l'on prend

$$k' = 0,063 \text{ et } A = 28a,$$

comme cela a lieu à peu près dans les bâtiments de haut bord, on trouve qu'avec

$$\Pi = 1026 \text{ et } \delta = 1,3$$

il suffit de porter la valeur de k à 1,78, comme l'a trouvé le lieutenant Thibault dans plusieurs de ses expériences sur la résistance des voiles, pour obtenir

$$M = 1.$$

Dans cette hypothèse, si le navire court vent arrière, on a

$$i = 0, \quad \alpha = 90^{\circ}, \quad \varphi = 180^{\circ},$$

et l'on trouve

$$v = \frac{1}{2} V,$$

ce qui s'éloigne peu de la vérité. Avec un vent dont la vitesse est de 10 mètres par seconde, et que les marins désignent sous le nom de *bon frais*, on obtient, en général, pour le navire des vitesses de 10 nœuds, qui répondent à 5 mètres par seconde environ. Quand le bâtiment navigue *vent large*, c'est-à-dire avec un vent oblique à la quille, mais faisant avec la route directe un angle supérieur à 90 degrés, les vitesses données par la formule [6] s'accordent encore assez bien avec l'observation. Mais quand le vaisseau navigue au plus près, l'accord n'est plus aussi satisfaisant; la formule ne donne pour v qu'une valeur voisine de $\frac{1}{4} V$, tandis

que, dans la pratique, on peut atteindre sous cette allure des vitesses beaucoup plus grandes. Ce désaccord tient, sans aucun doute, à une circonstance que nous avons déjà signalée, c'est-à-dire à ce que, par l'effet de son élasticité, le vent exerce, sous de faibles inclinaisons, une action beaucoup plus grande sur la voile que sur un plan de même étendue, circonstance dont aucune des théories admises jusqu'ici n'a réussi à tenir compte.

Il faut remarquer aussi que la théorie ne tient pas compte de l'action du vent sur les œuvres mortes et sur les agrès, action qui tend à augmenter la vitesse du navire lorsqu'il court vent arrière ou vent large, mais qui doit la diminuer lorsqu'il navigue au plus près.

Pour obtenir l'angle qu'il convient de faire faire à la voile, afin de faire prendre au navire la plus grande vitesse directe possible avec un vent donné, il faudrait égaler à zéro la dérivée de v par rapport à α ; mais l'expression [6] n'est pas assez simple pour conduire à un résultat utile. On reconnaît aisément que le maximum du numérateur répond à

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \varphi}{\cos i}; \quad [8]$$

mais le maximum de v doit répondre à une valeur de α un peu moindre; car le dénominateur peut s'écrire

$$M \sqrt{\sin \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 i + \cos^2 \alpha}.$$

Il augmente par conséquent avec α , depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 90^{\circ}$; par conséquent, lorsque le numérateur approche de son maximum et croît par suite très-lentement, le dénominateur croissant plus vite, l'expression totale doit diminuer. Le maximum de v satisfait donc à l'inégalité

$$\alpha < \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\tan \varphi}{\cos i} \right). \quad [9]$$

Pour

$$\varphi = 170^{\circ} \text{ et } i = 12^{\circ}.$$

on trouve

$$\alpha < 27^{\circ} 17' 30''.$$

Ceci est conforme à l'observation. Quand le bâtiment navigue *au plus près*, le vent faisant un angle de 60 degrés avec la quille, l'angle le plus avantageux à faire faire à la voile paraît être un angle de 25 degrés.

Les auteurs qui ont traité cette question ont, en général, négligé la vitesse du vaisseau et raisonné comme s'il était en repos initial. Si, dans ce cas, on néglige aussi l'inclinaison i , on trouve aisément que la projection de la vitesse du vent sur la normale à la voile est

$$V \sin(\varphi - \alpha);$$

l'expression de la force F est alors

$$\frac{k\delta A}{2g} V^2 \sin^2(\varphi - \alpha),$$

et la projection de cette force dans la direction de la quille est

$$\frac{k\delta A}{2g} V^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \cdot \sin \alpha.$$

La vitesse v la plus grande répond au maximum de cette expression ou au maximum de

$$\sin^2(\varphi - \alpha) \sin \alpha.$$

Il est aisé de reconnaître que celui-ci répond lui-même à

$$\tan(\varphi - \alpha) = 2 \tan \alpha. \quad [10]$$

C'est, en effet, la relation donnée par les auteurs. Mais les marins ont constamment observé qu'elle donnait pour α des valeurs trop petites, et qu'ils obtenaient des vitesses plus grandes en faisant faire

à la voile un angle plus grand avec la quille. Le marquis de Poterat, dans sa *Théorie du Navire*, a tenu compte de la vitesse du vaisseau; mais l'inexactitude de ses hypothèses sur la résistance des fluides l'a empêché de tirer de son analyse des résultats exacts. La vraie valeur à donner à α est comprise entre celles qu'indiqueraient les relations [8] et [10].

Au lieu d'une voile unique, on sait qu'on en emploie plusieurs, réparties sur quatre mâts à diverses hauteurs sur chacun d'eux (*Voy. MATURE*). On se procure ainsi la faculté de faire varier la position du *centre de voilure*; de l'abaisser, par exemple, en supprimant des voiles hautes, ou de l'élever en les rétablissant; de le porter vers l'avant en supprimant des voiles à l'arrière, ou vers l'arrière, en supprimant des voiles à l'avant, etc. Cette faculté est indispensable pour effectuer avec facilité les mouvements d'évolution et pour satisfaire aux diverses conditions de la STABILITÉ SOUS VOILES (*Voy. ces mots*).

Pour déterminer le *centre de voilure* ou *centre vélique*, il suffit de déterminer le centre de gravité de chaque voile, considérée comme plane, et de prendre les moments de leurs surfaces par rapport au plan des xy et au plan des yz , ce qui donne les quantités h et d . Voici, d'après M. Viel (*Construction des bâtiments de mer*), le tableau de ces calculs pour un vaisseau de 100 canons. Les moments ont été pris par rapport à la surface de flottaison et par rapport à la verticale passant par le milieu de l'axe longitudinal de la flottaison.

VOILS.	SURFACES.	DISTANCE du centre de gravité à la verticale du milieu.	MOMENTS correspondants.	DISTANCE du centre de grav. au plan de flottaison.	MOMENTS correspondants.
Grand foc	mq 229,60	+ 39,4	+ 9046,24	23,05	5292,28
Misaine.....	352,89	+ 24,6	+ 8681,09	14,95	5275,71
Peut hunier.....	375,44	+ 24,6	+ 9235,95	29,45	11036,81
Petit perroquet.....	146,31	+ 24,6	+ 3599,32	43,15	6313,45
Grande voile.....	489,80	— 3,6	— 1762,28	15,90	7787,82
Grand hunier.....	473,63	— 3,6	— 1705,08	32,40	15345,74
Grand perroquet.....	184,92	— 3,6	— 665,71	47,75	8929,83
Brigantine.....	329,49	— 31,2	— 10280,09	18,50	6095,56
Perroquet de fougue.....	242,81	— 20,2	— 4916,92	28,80	6992,96
Perruche.....	91,40	— 20,2	— 1850,83	39,80	3637,68
	2916,29		+ 9380,69		76727,84

Distance du centre de la voilure à la verticale du milieu de la flottaison

$$= \frac{9380,69}{2916,29} = 3^m, 216 \text{ en avant.}$$

Distance du même point au plan de flottaison

$$= \frac{76727,84}{2916,29} = 26^m, 31.$$

Il existe entre la surface totale des voiles d'un navire et celle du parallélogramme circonscrit à la ligne de flottaison en charge un rapport qui est constant pour chaque espèce de navire, et dont la connaissance peut dispenser du calcul de la voilure. Voici le tableau des valeurs de ce rapport, extrait du *Cours de construction navale* de l'École de Brest, par M. Salicis :

Bâtimens.	Surface de la voilure.	Rapport à l'aire du parallélogramme circonscrit à la flottaison.
	mq	
Vaisseau de 120	3249,66	3,02
— 100	3133,62	3,00
— 90	3130,36	3,19
— 86	2852,35	3,08
Frégate de 60	2640,10	3,36
— 52	2260,35	3,15
— 46	1946,76	3,48
— 30	1455,41	3,18
Corvette de 24	1315,29	3,48
— 18	1118,82	3,67
Brick de 20	936,19	3,28
— 10	930,45	4,17

La moyenne de ces rapports, en écartant le brick de 10 canons, est 3,26.

Enfin voici, d'après les mêmes auteurs, les coordonnées du centre de voilure de divers bâtiments : x désigne la distance à la perpendiculaire élevée au milieu de l'axe longitudinal de la ligne de flottaison, y désigne la hauteur au-dessus du plan de flottaison, L désigne la longueur de la ligne de flottaison de râblure en râblure (Voy. CONSTRUCTION NAVALE).

Bâtiments.	L.	y.	x.
	m.	m.	m.
Vaisseau de 120	63,31	27,56	3,27
— 100	62,50	24,08	2,71
— 90	60,50	25,72	2,48
— 86	58,88	25,27	3,76
Frégate de 60	54,00	23,32	3,58
— 52	52,50	20,88	2,52
— 46	46,50	20,42	2,41
— 30	42,28	17,73	2,54
Corvette de 24	39,00	15,83	1,51
— 18	33,96	13,87	0,75
Brick de 20	34,12	14,36	1,75
— 10	30,11	13,08	0,25

On trouvera à l'article STABILITÉ SOUS VOILES l'examen des causes qui tendent à faire prendre au navire des mouvements de rotation autour des trois axes, causes parmi lesquelles l'étendue et la disposition des voiles jouent le rôle le plus important. (Consultez la *Science navale* d'Euler, la *Nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux* de Jean Bernoulli, le *Traité du Navire* de Bouguer, la *Théorie du Navire* du marquis de Poterat, etc.)

VOLANT, organe de machine, dont la fonction est de régulariser le mouvement. Il consiste en une roue, le plus souvent en fonte, et d'un grand diamètre, montée sur l'un des axes tournants de la machine : ordinairement sur l'axe du moteur ou sur l'axe de l'opérateur, suivant que c'est le premier ou le second qui reçoit les efforts les plus variables.

I. Il est facile de se rendre compte de l'action de ce régulateur. Remarquons d'abord que le mouvement de rotation de l'arbre sur lequel le volant est monté étant ordinairement périodique, la vitesse reste nécessairement comprise entre certaines limites; et à chaque tour, ou à chaque demi-tour, elle passe par un maximum et par un minimum. Ce maximum et ce minimum de vitesse répondent toujours à des positions géométriques déterminées du corps tournant que l'on peut assigner à l'avance. En effet, soient γ l'accélération angulaire de ce corps, I son moment d'inertie, F l'une quelconque des forces mouvantes qui agissent sur le corps, et P l'une quelconque des forces résistantes; on aura (Voy. ACCELERATION ANGULAIRE) :

$$\gamma = \frac{\Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} F - \Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} P}{I} \quad [1]$$

Mais lorsque la vitesse angulaire passe par un maximum ou par un minimum, sa dérivée γ par rapport au temps passe par zéro; les positions pour lesquelles ont lieu le maximum et le minimum de vitesse sont donc celles pour lesquelles on a

$\Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} F - \Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} P = 0$ ou $\Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} F = \Sigma \mathcal{J} \mathcal{R} P$, c'est-à-dire celles pour lesquelles la somme algébrique des moments des forces mouvantes est égale à la somme algébrique des moments des forces

résistantes. Ces positions peuvent donc être déterminées à l'avance, et l'on peut par conséquent évaluer le travail développé par les forces F et le travail développé par les forces P quand le corps tournant passe de la position qui convient au minimum de vitesse à celle qui convient au maximum.

Cela posé, soient ω' la vitesse minimum et ω'' la vitesse maximum; si l'on applique le principe de l'EFFET DU TRAVAIL (Voy. ce mot) entre les deux positions correspondantes du corps tournant, on aura

$$\frac{1}{2} (\omega''^2 - \omega'^2) I = \Sigma \mathcal{C} F - \Sigma \mathcal{C} P,$$

d'où
$$\omega''^2 - \omega'^2 = \frac{2 (\Sigma \mathcal{C} F - \Sigma \mathcal{C} P)}{I} \quad [2]$$

On voit par cette relation, dans laquelle le numérateur du second membre est une quantité qui peut être calculée à l'avance et qui est indépendante de ω' et de ω'' , que l'on rendra la différence entre les carrés des vitesses angulaires extrêmes aussi petite qu'on voudra, en faisant croître d'une manière convenable le moment d'inertie I du corps tournant. On y parvient en montant sur l'axe considéré une roue d'un poids et d'un diamètre suffisants; cette roue c'est le régulateur qui porte le nom de volant.

II. Voici par quelles considérations on peut en déterminer le poids et les dimensions. Les vitesses angulaires extrêmes ω' et ω'' ne sont pas connues; mais on connaît ce qu'on appelle la vitesse angulaire de régime, c'est-à-dire celle qu'on déduirait du nombre de tours faits par l'axe dans une minute si le mouvement était uniforme. Si n est ce nombre de tours et w la vitesse angulaire de régime, on a (Voy. VITESSE ANGULAIRE) :

$$w = \frac{\pi n}{30} \quad [3]$$

On admet que cette vitesse w est précisément la moyenne entre ω' et ω'' ; on pose par conséquent

$$\omega'' + \omega' = 2w.$$

On s'impose en outre la condition que la différence entre ω'' et ω' ne soit qu'une fraction donnée δ de la vitesse de régime, et l'on pose

$$\omega'' - \omega' = \delta w.$$

En multipliant ces relations membre à membre, on en tire

$$\omega''^2 - \omega'^2 = 2\delta w^2;$$

et, en substituant dans l'équation [2], on en tire pour la valeur de I

$$I = \frac{\Sigma \mathcal{C} F - \Sigma \mathcal{C} P}{\delta w^2} \quad [4]$$

On ne fait entrer dans le calcul du moment d'inertie que l'anneau du volant; le calcul se trouve ainsi simplifié; les bras et le moyeu qui ont été négligés contribuent à accroître le moment d'inertie et par suite la régularité du mouvement. Soient a la section de l'anneau et ρ son rayon moyen; son volume sera exprimé par $2\pi\rho \cdot a$; et si Π désigne le poids du mètre cube de la matière du volant, on a

$$I = \frac{\Pi \cdot 2\pi\rho \cdot a}{g} \cdot \rho^2, \text{ d'où } a = \frac{gI}{\Pi \cdot 2\pi\rho^2} \quad [5]$$

On se donne le rayon moyen ρ , et la formule [5] fait connaître la section a de l'anneau. D'après cette formule, il y aurait avantage à prendre ρ le plus grand possible; car a serait plus petit, le volant pèserait moins, et le frottement sur les tourillons, qui dépend de ce poids, diminuerait. Mais, eu égard

aux dangers de rupture provenant de l'action de la force centrifuge, il y a, pour chaque valeur de la vitesse de régime, un rayon qu'il convient de ne pas dépasser. Ce rayon limite est donné par la formule

$$\rho = \frac{52,20}{w} \quad [6]$$

(Voy. JANTE DE VOLANT).

III. Comme première application de ce qui précède, supposons que l'axe considéré soit mis en mouvement par l'intermédiaire d'une manivelle de longueur b ; que les forces mouvantes se réduisent à une seule force constante F , agissant à double effet, c'est-à-dire en changeant de sens à chaque révolution, et en demeurant parallèle à elle-même; et que les forces résistantes se réduisent à une force constante P agissant tangentiellement à une circonférence dont le rayon est p , et le centre situé sur l'axe de la manivelle. Cherchons les positions de la manivelle qui répondent au minimum et au maximum de vitesse angulaire. Soit OA (fig. 1) la pre-

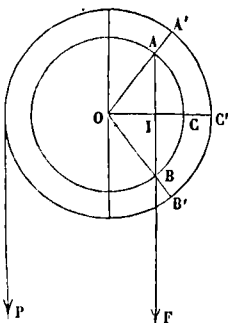


Fig. 1.

mière de ces positions; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur la direction de la force F . D'après ce qui a été dit plus haut, les moments des forces F et P dans cette position devront être égaux; on aura donc

$$F \cdot OI = Pp.$$

Mais le régime périodique étant supposé établi, le travail moteur doit être égal au travail résistant pour chaque demi-tour de la manivelle; on doit donc avoir

$$F \cdot 2b = P \cdot \pi p. \quad [7]$$

En divisant ces deux relations membre à membre, on obtient

$$\frac{OI}{2b} = \frac{1}{\pi}, \text{ d'où } OI = \frac{2}{\pi} \cdot b = 0,6366 \cdot b;$$

ce qui fera connaître la position du point A . Si B est la position de la manivelle correspondante au maximum de vitesse, on trouvera qu'elle est déterminée par la même valeur de OI , et que par conséquent les deux points A et B sont les extrémités d'une corde parallèle à la direction de la force F .

Nous pouvons maintenant calculer le travail des forces F et P pour la portion de demi-tour comprise entre les positions OA et OB de la manivelle.

On a d'abord

$$\mathcal{E}F = F \cdot AB = F \cdot 2AI.$$

Mais

$$AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = b \sqrt{1 - (0,6366)^2} = 0,7712 \cdot b;$$

donc

$$\mathcal{E}F = 1,5424 Fb.$$

Pour trouver le travail correspondant de P , remarquons que, tandis que le bouton de la manivelle a décrit l'arc ACB , la circonférence à laquelle est appliquée la force P a tourné d'un arc semblable

$A'C'B' = \frac{p}{b} \cdot ACB = \frac{2p}{b} \cdot AC$. Mais si α désigne l'angle AOC , on a $AC = b\alpha$; donc $A'C'B' = 2p\alpha$. Cet angle α est celui qui a pour cosinus $\frac{2}{\pi}$, c'est-à-dire

$50^\circ 27' 35''$ environ, ou en parties du rayon $0,2805 \cdot \pi$. Donc enfin

$$\mathcal{E}P = 2p \cdot 0,2805 \cdot \pi P = 0,5610 \pi P p;$$

ou, en remplaçant $\pi P p$ par sa valeur $2Fb$ tirée de l'équation [7],

$$\mathcal{E}P = 1,1220 Fb.$$

En mettant ces valeurs dans l'équation [4], on trouve

$$I = \frac{1,5424 Fb - 1,1220 Fb}{\delta w^2} = 0,4204 \cdot \frac{Fb}{\delta w^2}. \quad [8]$$

On peut exprimer la valeur de I en fonction du nombre de chevaux qui représente la force de la machine; car si N est ce nombre de chevaux, on a

$$75^{\text{km}} \cdot N = \frac{2 \cdot F \cdot 2b \cdot n}{60},$$

puisque les deux membres sont l'expression du travail par seconde; on tire de là

$$Fb = \frac{75 \cdot 60 \cdot N}{4n} = 1125 \cdot \frac{N}{n}.$$

Par conséquent

$$I = 472,7 \cdot \frac{N}{n \delta w^2}. \quad [9]$$

La valeur de I une fois trouvée, on obtiendra, comme il a été expliqué plus haut, les dimensions du volant. Le nombre δ , que l'on appelle le coefficient de régularité, est ordinairement compris entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{40}$; dans les filatures, où la régularité du mouvement est une condition essentielle de la fabrication, on adopte cette dernière valeur.

Dans un exemple cité par M. Morin, on avait $n = 35$, d'où l'on déduit $w = 3,6652$; $N = 19$, $\delta = \frac{1}{40}$, $\rho = 3^{\text{m}},05$; par suite $I = 764,07$;

$\Pi = 7200^{\text{k}}$ (fonte); par suite $a = 0^{\text{m}},005889$. Si la section est carrée, on trouve pour la valeur de son côté $0^{\text{m}},076$.

IV. On suivrait une marche analogue si la force F agissait à simple effet, c'est-à-dire si elle n'agissait que pendant un demi-tour de manivelle et toujours dans le même sens. Toutes choses égales d'ailleurs il faut, dans ce cas, un volant d'un poids beaucoup plus considérable. Mais on peut, par une disposition très-simple, ramener ce cas à celui où la force agirait à double effet. Cette disposition consiste à placer, perpendiculairement à l'axe du volant, un bras OD (fig. 2) terminé par un contre-poids Q . On règle la distance $OD = r$ et le poids Q de telle sorte qu'on ait

$$Qr = \frac{1}{2} Fb. \quad [10]$$

Supposons, pour fixer les idées, que la force mouvante F n'agisse que pendant le demi-tour descendant, et qu'elle soit dirigée de haut en bas; son travail pour ce demi-tour sera $F \cdot 2b$; mais il sera diminué du travail négatif du contre-poids, c'est-à-dire de $Q \cdot 2r$, quantité égale à Fb d'après l'é-

quation [10]; le travail moteur, dans ce premier demi-tour, se réduira donc à Fb . Pendant le demi-tour ascendant, la force F cesse d'agir, mais le travail du contre-poids est alors positif et égal à $Q \cdot 2r$

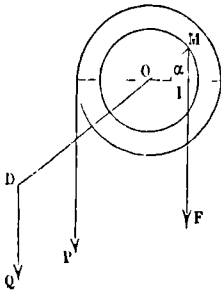


Fig. 2.

ou à Fb . Le travail est donc le même dans les deux demi-tours, comme si la force F agissait à double effet. Les positions de la manivelle qui correspondent au minimum et au maximum de vitesse sont aussi les mêmes que dans le cas où F agit à double effet. Car, dans le demi-tour descendant, la condition d'égalité des moments est, en désignant par α l'angle MOI de la manivelle avec l'horizon,

$$Fb \cos \alpha - Qr \cos \alpha = Pp,$$

ou
$$\frac{1}{2} Fb \cos \alpha = Pp.$$

On a d'ailleurs, en égalant les travaux moteur et résistant, pour chaque demi-tour,

$$F \cdot b = P \cdot p;$$

et, en divisant l'équation précédente par cette dernière, il reste

$$\cos \alpha = \frac{2}{\pi},$$

comme dans le cas du double effet. Il en serait de même pour le demi-tour ascendant.

Les manivelles à contre-poids sont employées de temps immémorial pour la manœuvre des pompes ménagères. M. Bélanger a proposé d'adapter ce système au cas où la force F agit à double effet. Le bras du contre-poids ne peut plus alors être monté sur l'axe même du volant; il faut le monter sur un axe parallèle, recevant le mouvement de celui-ci à l'aide d'un engrenage, de telle sorte que le contre-poids fasse un tour entier à chaque demi-tour de manivelle. On trouve par tâtonnement que l'on doit avoir alors

$$Qr = 0,219Fb$$

(Voy. le Cours de Mécanique appliquée de M. Bélanger, à l'École centrale des arts et manufactures).

V. Les calculs indiqués ci-dessus pour le cas d'une manivelle sur laquelle la force mouvante agit à double effet pourraient, à la rigueur, être appliqués aux machines à vapeur sans détente, attendu que la bielle ayant toujours de 5 à 6 fois la longueur de la manivelle, la force F peut être regardée comme conservant une direction sensiblement parallèle. Mais ces calculs ne seraient plus applicables au cas des machines à détente, puisque la force F est alors variable. La solution rigoureuse de la question serait à peu près impossible. Mais en combinant le calcul avec les constructions graphiques, on obtient, dans tous les cas, une solution approchée qui suffit

aux besoins de la pratique. On n'a qu'à négliger d'une part l'inertie des pièces oscillantes, de l'autre l'influence du frottement; l'approximation obtenue de cette manière est suffisante, parce que l'on ne fait entrer dans le calcul du poids du volant que sa jante, et que les bras, le moyeu et les autres pièces montées sur le même axe ajoutent par leur inertie à la régularité.

La première chose à faire est d'évaluer la pression qui agit sur le piston. Sachant le nombre d'atmosphères qui représente cette pression, on multipliera 10334⁴ par ce nombre, et l'on aura la pression par mètre carré; on multipliera par l'aire du piston et l'on aura la pression \mathcal{P}_0 en kilogrammes, pour toute la période qui précède la détente. Dans la période de détente on aura la pression correspondante à une position quelconque du piston en appliquant la loi de Mariotte. Si h_0 est la distance du piston à la base du cylindre au moment où la détente va commencer, et h sa distance à la même base au moment où la pression est devenue \mathcal{P} , on aura

$$\mathcal{P} : \mathcal{P}_0 = h_0 : h, \text{ d'où } \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \frac{h_0}{h}.$$

Si la machine est sans balancier, on pourra regarder la force \mathcal{P} comme égale et contraire à la projection de la tension de la bielle sur la direction de la tige du piston; en divisant donc la force \mathcal{P} par le cosinus de l'angle que cette tige fait actuellement avec la bielle, on aura la tension de celle-ci, c'est-à-dire la force mouvante F appliquée à la manivelle. Sur une épure, on remplacerait la division dont nous parlons par une construction qui se réduirait à prendre sur la tige du piston, à partir de son extrémité, une longueur représentant la force \mathcal{P} à une échelle arbitraire, à élever par l'extrémité de cette longueur une perpendiculaire à la tige jusqu'à la rencontre de la bielle, et à mesurer sur celle-ci la portion interceptée par cette perpendiculaire.

Si la machine est à balancier, on pourra admettre que le moment de la force \mathcal{P} par rapport à l'axe du balancier est égal au moment de la force F par rapport au même axe; cette égalité, dans laquelle les distances à l'axe seront mesurées sur l'épure, donnera la force F .

La même épure fera connaître, dans l'un ou l'autre cas, la distance de la force F à l'axe de la manivelle. Désignons par q cette distance, le moment de la force F par rapport à l'axe de la manivelle sera Fq , et son travail élémentaire sera $Fq d\alpha$, en désignant par $d\alpha$ l'arc élémentaire décrit à l'unité de distance. Le travail de la force F entre deux positions de la manivelle faisant avec un diamètre déterminé les angles α' et α'' sera donc représenté par

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} Fq d\alpha.$$

Mais on sait (Voy. QUADRATURE) que cette intégrale représente l'aire d'une courbe qui aurait α pour abscisse, le produit Fq pour ordonnée, cette aire étant comptée depuis l'abscisse α' jusqu'à l'abscisse α'' . On divisera, sur l'épure, la circonférence décrite par le bouton de manivelle en un certain nombre m de parties égales; pour chacune des positions de la bielle répondant aux points de division, on évaluera la valeur de F , et l'on mesurera la valeur de q . Cela fait, on prendra, à une échelle quel-

conque, une longueur OX (fig. 3) pour représenter le nombre 2π ; et on la divisera en m parties égales; les abscisses des points de division, comptées à partir du point O, seront des valeurs de α en progres-

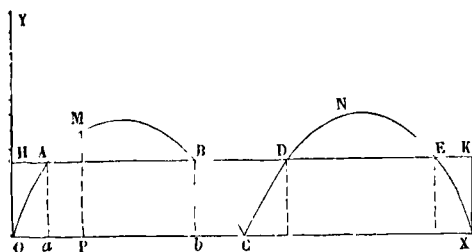


Fig. 3.

sion arithmétique. En chaque point de division on élèvera une perpendiculaire égale à la valeur correspondante de Fq ; soient $OP = \alpha'$ l'une de ces abscisses, et $MP = Fq$ l'ordonnée qui lui correspond. Par les extrémités de toutes ces ordonnées, on fera passer une courbe continue OAMBDCNEX, dont l'aire, limitée aux deux abscisses α' et α'' , mesurera l'intégrale dont il s'agit, ou le travail de la force mouvante F.

Quant au travail de la force résistante P, comme cette force est regardée comme constante, il sera représenté par l'aire d'un rectangle OHKX dans lequel OH serait la force constante qui, appliquée tangentiellement à une circonférence de rayon 1, produirait le même travail que la force P; c'est-à-dire que OH représenterait le produit Pp.

La droite HK coupe la courbe aux points A, B, D et E. En chacun de ces points, les deux lignes ayant la même ordonnée, on a $Fq = Pp$; c'est-à-dire que pour les positions correspondantes à ces points les moments des forces F et P sont égaux; ces positions sont donc celles qui répondent au maximum et au minimum de vitesse du volant. De O à A le travail résistant l'emporte sur le travail moteur; la vitesse va donc en diminuant, et la position A répond à un minimum de vitesse. De A en B, c'est le travail moteur qui l'emporte sur le travail résistant; la vitesse va donc en augmentant, et la position B répond à un maximum. On verrait de même que la position D répond encore à un minimum et la position E à un maximum (la forme de la courbe suppose une machine à double effet). Il serait facile de reporter ces positions sur l'épure; on abaisserait, par exemple, l'ordonnée Aa; l'abscisse Oa représenterait la valeur de α répondant au premier minimum; il n'y aurait qu'à convertir cette valeur en degrés. Mais cela n'est pas nécessaire. La partie AMB représente l'excès du travail moteur sur le travail résistant, en allant du premier minimum au premier maximum. La partie BCD représente l'excès du travail résistant sur le travail moteur quand on va du premier maximum au second minimum. La partie DNE est l'excès du travail moteur sur le travail résistant, quand on va du second minimum au second maximum. Enfin, la somme des aires EKX + OHA représente l'excès du travail résistant sur le travail moteur, en revenant du second maximum au premier minimum. Ces quatre excès seraient égaux si la force F était constante en grandeur et en direc-

tion; mais cela n'aura pas lieu dans le cas actuel. On les mesurera sur la figure 3, et la valeur absolue du plus grand sera le numérateur du second membre de l'équation [4], qui donne le moment d'inertie du volant. Le reste s'achèvera comme il a été expliqué précédemment.

La force P pourrait être variable; la droite HK serait alors remplacée par une courbe que l'on construirait, connaissant la loi suivant laquelle P varie; la marche serait du reste la même que dans le cas où P est constant.

Pour régulariser le travail des machines à détente, M. Laboulaye a proposé de monter sur l'axe du balancier un bras perpendiculaire à la direction du balancier même, et portant à son extrémité un contre-poids. Pendant la première demi-course ascendante du piston, une partie de la pleine pression de la vapeur serait employée à faire monter le contre-poids jusqu'à ce que le bras qui le porte fût devenu vertical; pendant la seconde demi-course du piston, le contre-poids, en descendant de l'autre côté de la verticale, ajouterait son action à celle de la vapeur détendue. Le même effet se produirait évidemment pendant la course descendante. Le travail moteur serait ainsi rendu plus régulier.

VI. On représente ordinairement les résultats du calcul relatif aux volants des machines à vapeur par la formule

$$\Pi = k \cdot \frac{Nm}{nV^2}, \quad [11]$$

dans laquelle Π représente le poids du volant, n le nombre de tours par minute, N le nombre de chevaux exprimant la force de la machine, m le dénominateur du coefficient de régularité

(40 par exemple, si $\delta = \frac{1}{40}$), V la vitesse d'un point situé à la circonférence moyenne de la jante du volant, et k un coefficient qui varie suivant la nature de la machine. Cette formule n'est qu'une transformation de la formule [9] ou de ses analogues.

D'après M. Morin, voici les valeurs qu'il convient d'adopter pour le coefficient k :

1° Pour les machines sans condensation, on prend k égal à 5227, à 5528, ou à 5829, selon que la bielle a une longueur égale à 6 fois, à 5 fois ou à 4 fois la longueur de la manivelle;

2° Pour les machines à détente, à un seul cylindre, on fait varier k de 7203 à 8449, suivant que la détente varie elle-même de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{8}$;

3° Pour les machines de Woolff, on prend k entre 5558 et 6031, suivant que la détente varie de $4\frac{1}{2}$ à $7\frac{1}{2}$ fois le volume primitif;

4° Pour les machines à haute pression, on fait varier k de 7000 à 10000, suivant le système.

Nous avons indiqué plus haut la limite que le rayon moyen ρ de la jante ne doit pas dépasser. L'expérience a indiqué les dimensions les plus convenables suivant les machines. Si h désigne la course du piston, le rapport $\frac{\rho}{h}$ se règle ordinairement de la manière suivante :

1° Pour les machines à basse pression, de 3 à 3 1/2 ;

2° Pour les machines de Woolff, de 3 1/2 à 4 ,

3° Pour les machines à haute pression, sans balancier, et avec détente dans un seul cylindre, de 4 à 4 1/2.

VII. On accouple quelquefois deux machines à vapeur agissant sur le même axe par une manivelle double, c'est-à-dire par deux manivelles, qui sont dans ce cas disposées à angle droit l'une par rapport à l'autre. La méthode générale exposée plus haut est encore applicable à ce cas. Pour chaque position des manivelles, on détermine le moment de chacune des deux forces mouvantes; on en fait la somme algébrique, et c'est cette somme qui doit être portée en ordonnée pour tracer la courbe dont l'aire exprime le travail moteur. Le travail résistant étant encore représenté par un rectangle, les intersections de sa base supérieure avec la courbe donnent les positions correspondantes au minimum et au maximum de vitesse. On mesure sur l'épure l'excès du travail moteur sur le travail résistant ou *vice versa*, quand les manivelles passent de l'une de ces positions à la suivante; et le plus grand de ces excès en valeur absolue est la valeur qu'il faut mettre à la place du numérateur du second membre de l'équation [4] qui donne le moment d'inertie.

Le calcul se simplifie lorsque les bielles sont assez longues pour qu'on puisse regarder chacune des deux forces mouvantes comme demeurant parallèle à elle-même.

Soient OB et OB' (fig. 4) les deux manivelles dans

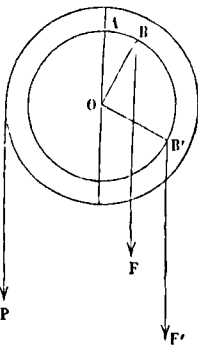


Fig. 4.

une position quelconque; soit α l'angle BOA que l'une d'elles fait avec le diamètre parallèle à la direction des forces mouvantes F et F'. La condition de périodicité du mouvement donne ici, en supposant $F = F'$, et les machines à double effet,

$$2 \cdot F \cdot 4b = P \cdot 2\pi p.$$

Dans les positions correspondantes au minimum ou au maximum de vitesse, on devra avoir

$$Fb \sin \alpha + Fb \cos \alpha = Pp.$$

En divisant cette relation membre à membre par la première, et réduisant, on en tire

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{\pi},$$

ou
$$\sin \alpha + \sin (90^\circ - \alpha) = \frac{4}{\pi},$$

ou encore

$$2 \sin 45^\circ \cos (45^\circ - \alpha) = \frac{4}{\pi},$$

d'où
$$\cos (45^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

On en déduit

$$\alpha' = 19^\circ 12' \text{ et } \alpha'' = 70^\circ 48',$$

et l'on peut remarquer qu'on a

$$\alpha' + \alpha'' = 90^\circ.$$

Le travail des forces mouvantes entre ces deux positions est facile à obtenir: on a

$$\mathcal{E}F = Fb (\cos \alpha'' - \cos \alpha') = Fb (\cos \alpha'' - \sin \alpha''),$$

$$\mathcal{E}F' = Fb [\cos (\alpha'' + 90^\circ) - \cos (\alpha' + 90^\circ)]$$

$$= Fb (-\sin \alpha'' + \sin \alpha') = Fb (\cos \alpha'' - \sin \alpha');$$

par conséquent

$$\mathcal{E}F + \mathcal{E}F' = 2Fb (\cos \alpha'' - \sin \alpha'').$$

En mettant pour α'' sa valeur et effectuant les calculs, on trouve

$$\mathcal{E}F + \mathcal{E}F' = 2Fb \cdot 0,6155.$$

On a ensuite

$$\mathcal{E}P = P \cdot \frac{1}{2} \pi p \cdot \frac{\alpha'' - \alpha'}{90^\circ} = 2Fb \cdot 0,5733.$$

Par suite

$$\frac{1}{2} I (\omega''^2 - \omega'^2) = 2Fb (0,6155 - 0,5733) = 2Fb \cdot 0,0422,$$

ou
$$I \cdot \delta \omega^2 = 2Fb \cdot 0,0422,$$

d'où l'on tirerait I.

Pour donner à cette formule la forme de la formule [11], on peut, en appelant Π le poids du volant, remplacer I par $\frac{\Pi r^2}{g}$, puis $\rho^2 \omega^2$ par V^2 .

V désignant la vitesse à la circonférence moyenne. En même temps on a, comme on l'a vu plus haut,

$$75^{\text{km}} \cdot N = \frac{2 \cdot F \cdot 4b \cdot n}{60}, \text{ d'où } 2Fb = \frac{75 \cdot 60 \cdot N}{4n}.$$

On a d'ailleurs

$$\delta = \frac{1}{m}.$$

En substituant ces diverses valeurs et effectuant, on trouvera

$$\Pi = 465,7 \cdot \frac{Nm}{n\sqrt{V^2}}. \quad [12]$$

On voit qu'ici le coefficient k est peu considérable, et que, par conséquent, l'emploi des machines accouplées, agissant sur une manivelle double, est favorable à la régularité.

VIII. Quant à la place que doit occuper le volant dans une machine, elle est déterminée par la condition d'éviter les changements trop brusques ou trop étendus des réactions qui s'exercent entre les pièces tournantes. On démontre (*Voy. RÉACTIONS DES PIÈCES TOURNANTES*) que pour renfermer ces variations entre des limites aussi rapprochées que possible, il faut augmenter la masse du corps tournant auquel sont appliqués les efforts les plus variables. Dans les machines à vapeur, et surtout dans les machines à détente, c'est donc sur l'axe de la manivelle que le volant doit être établi. Dans les machines où la résistance est sujette à des variations brusques, comme dans les laminoirs, par exemple, il convient de placer le volant le plus près possible du laminoir lui-même. Du reste, quand la force motrice et la force résistante sont toutes deux variables entre des limites étendues, on fait souvent usage de deux volants, dont l'un est placé près du moteur et l'autre près de l'opérateur.

IX. L'emploi d'un volant ne nécessite d'autre surcroît de force motrice que celle qui est nécessaire pour vaincre le frottement développé sur ses tourillons. Ce surcroît est toujours peu considérable, et les avantages de ce régulateur compensent largement le léger inconvénient que nous signalons. On a dit qu'un volant était un *réservoir de force*; il faut entendre par là que c'est un réservoir de puissance vive. En effet, si le travail moteur l'emporte pendant quelque temps sur le travail de la résistance, la puissance vive totale de la machine augmente; mais une partie de cet excès de travail est employée à accroître la puissance vive du volant; on conçoit donc que la vitesse des autres pièces soit moins augmentée que s'il n'y avait pas de volant. Si, au contraire, c'est le travail résistant qui l'emporte, pendant un certain temps, sur le travail moteur, la puissance vive totale diminue; mais une partie de l'excès de travail résistant est employée à ralentir le volant; les autres pièces de la machine sont donc moins ralenties que si le volant n'y était pas. Le volant a donc pour fonction d'emmagasiner la puissance vive en excès, pour la restituer quand celle des autres pièces vient à diminuer; et c'est en ce sens que ce régulateur peut être regardé avec raison comme un réservoir de force.

(Voy. le *Calcul de l'effet des machines*, par Coriolis; le *Cours de Mécanique* de M. Poncelet; le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Bélanger, à l'École centrale; les *Leçons de Mécanique pratique* de M. Morin, etc.)

Le volant est connu de temps immémorial dans le rouet des fileuses. Son application aux machines à vapeur est due à Fitz-Gerald, et date de 1758.

On donne aussi le nom de volant au récepteur des MOULINS à VENT (Voy. ce mot).

VOLANT À AILETTES, modérateur qui met en jeu la résistance de l'air. Il se compose de deux ou quatre bras perpendiculaires à l'axe de rotation, et portant chacun, à leur extrémité, une aile ou ailette, ordinairement rectangulaire, et dont le plan passe par l'axe. Quand le système est en mouvement, chaque ailette éprouve de la part de l'air une résistance qui croît à peu près comme le carré de la vitesse; en sorte que si ω désigne la vitesse angulaire du système, r la distance du centre de l'ailette à l'axe, a sa surface et k un coefficient numérique, la résistance de l'air peut être représentée par

$$k a \omega^2 r^2.$$

Soit F une force constante agissant sur le corps tournant à la distance b de l'axe. Son effet, si elle agissait seule, serait d'accroître indéfiniment la vitesse angulaire; mais la résistance de l'air croissant très-rapidement, d'après la formule ci-dessus,

il arrive un instant où le travail élémentaire de cette résistance devient égal au travail élémentaire de la force F ; et à ce moment la vitesse cesse de s'accroître (Voy. EFFET DU TRAVAIL). La vitesse a donc atteint son maximum quand on a

$F b \omega dt = n k a \omega^2 r^2 r \omega dt$,
 n désignant le nombre des ailettes; d'où

$$\omega^2 = \frac{F b}{n k a r^3}.$$

Cette vitesse est d'autant moindre que n , a et r sont plus grands. En réalité, la limite de vitesse atteinte est toujours inférieure à cette limite théorique, attendu que le frottement du corps tournant sur ses appuis, et les autres résistances passives que peut offrir la machine, agissent toujours comme modérateurs.

Le volant à ailettes est employé de temps immémorial dans le mécanisme des tournebroches. On en fait usage aussi en horlogerie dans le mécanisme de sonnerie des horloges et des pendules pour empêcher le rouage de la sonnerie de s'accroître indéfiniment. On retrouve ce modérateur dans l'appareil de M. Morin pour étudier les lois de la chute des corps, dans le moulinet de Woltmann, dans l'anémomètre de M. Combes, etc.

VOLÉE, portion d'un escalier comprise entre deux paliers consécutifs.

VOLÉE, partie d'une pièce d'artillerie comprise entre les tourillons et la bouche.

VOLUTE, courbe analogue à une spirale qui figure dans le chapiteau de l'ordre ionique et dans

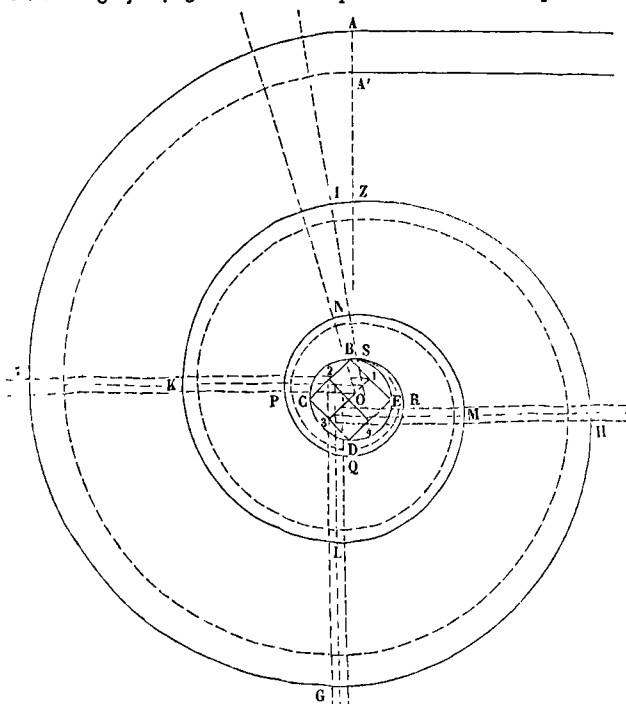


Fig. 1.

le chapiteau de l'ordre composite, et qu'on rencontre fréquemment dans le dessin de l'ornement. C'est au moyen d'arcs de cercle successifs se raccordant entre eux que l'on trace la volute. Voici comment ce tracé s'exécute : soit AO (fig. 1) la distance du centre O

de la volute à son point de départ A; on prend OB égal à la neuvième partie de OA, et du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit un cercle qui se nomme l'*œil* de la volute; on prolonge BO jusqu'en D, et l'on mène le diamètre CE perpendiculaire à BD; on joint les cordes BC, CD, DE, EB; on marque les milieux de ces cordes des chiffres 1, 2, 3, 4; on joint O1, O2, O3, O4; on partage chacune de ces droites en trois parties égales, et l'on numérote les points de division en continuant à tourner autour du point O dans le sens indiqué par les chiffres 1, 2, 3, 4; on tire enfin les droites 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; et ainsi de suite jusqu'à 11, 12. La figure 2 représente en plus grand le

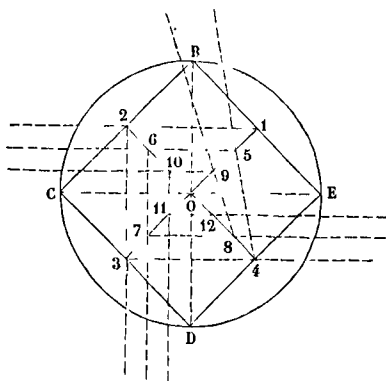


Fig. 2.

détail de ces constructions à faire dans l'œil de la volute.

Cela fait, on décrit une série d'arcs de cercle, savoir: du point 1 comme centre (fig. 1), l'arc AF terminé à la droite 1, 2; du point 2 comme centre, l'arc FG terminé à la droite 2, 3; du point 3 comme centre, l'arc GH terminé à la droite 3, 4; du point 4 comme centre, l'arc HI terminé à la droite 4, 5; du point 5 comme centre, l'arc IK terminé à la droite 5, 6; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait décrit du point 12 comme centre l'arc RS terminé à la circonférence de l'œil.

On voit aisément que tous les arcs ainsi décrits se raccordent, puisque le point commun à deux arcs successifs est toujours placé sur la droite qui joint leurs centres. Le dernier arc RS ne se raccorde pas avec la circonférence de l'œil; mais il la coupe sous un petit angle, et l'erreur qui en résulte n'est pas choquante pour les yeux.

On donne une épaisseur à la volute. Pour la déterminer, il faut décrire, à l'aide du même procédé, une seconde volute qui, au lieu de partir du point A, part d'un point A' situé au quart de la distance AZ, entre le point A et le point où la première volute rencontre le rayon AO. La distance des deux volutes va sans cesse en diminuant, à mesure qu'elles approchent du centre.

VOUSSOIR, l'une quelconque des pierres taillées qui entrent dans la construction d'une voûte, et qui ont une face faisant partie de l'intrados. Les voussoirs d'une même assise forment ce que l'on appelle un *cours* de voussoirs.

VOUSSURE, mot par lequel on désigne en général, dans la coupe des pierres, la nature parti-

culière de la surface adoptée pour former l'intrados d'une voûte. L'appareil varie suivant la *voussure* dont on fait usage.

VOÛTE, construction, ordinairement en pierres, destinée à recouvrir un certain espace, et se maintenant en équilibre par son propre poids sur les murs qui la soutiennent. La surface interne, celle qui est vue par-dessous, est ce qu'on nomme l'*intrados* de la voûte; la surface externe, celle qui est vue par-dessus, est ce qu'on nomme l'*extrados*. La nature de la surface adoptée pour l'intrados est ce qu'on désigne particulièrement sous le nom de *voussure*. L'intrados se raccorde avec les faces internes ou *piédroits* des murs soutenant la voûte, suivant une ligne qu'on nomme la *ligne de naissance*. Cette ligne est généralement plane, et son plan, le plus souvent horizontal, est ce qu'on nomme le *plan de naissance*. Les parties de la voûte qui avoisinent le plan de naissance forment ce qu'on appelle les *reins* de la voûte; et l'on nomme *clef de voûte* la pierre ou la suite de pierres qui occupent la partie supérieure et centrale, et qui, une fois placées, assurent l'équilibre de la voûte. L'appareil d'une voûte est le mode de subdivision de la voûte en pierres distinctes appelées *voussoirs*. Le plus souvent une voûte est appareillée par *assises* horizontales. Les surfaces suivant lesquelles les assises successives se touchent se nomment les *jointes de lit*; les surfaces qui divisent en voussoirs une même assise se nomment les *jointes montants*. Ces derniers joints sont le plus souvent verticaux. La portion de l'intrados contenue dans une même assise porte le nom particulier de *douelle*, que l'on étend cependant quelquefois par abus à l'intrados tout entier (*Voy.* à l'article *BERCEAU* l'origine probable de cette dénomination). Les lignes qui divisent l'intrados en douelles ou en assises portent le nom d'*arêtes de douelles*; les lignes qui divisent une même douelle en voussoirs portent le nom de *coupes*.

La condition à laquelle on doit s'efforcer de satisfaire dans l'appareil d'une voûte est d'éviter les angles aigus, et de faire en sorte que les joints montants soient perpendiculaires aux joints de lit, et que tous ces divers joints soient normaux à l'intrados. Ainsi, dans les voûtes cylindriques à base circulaire et à génératrices horizontales, les joints de lit sont des plans menés par l'axe du cylindre, et les joints montants sont des plans verticaux perpendiculaires à l'axe. Ainsi encore, dans les voûtes dont l'intrados est une surface de révolution à axe vertical, les joints de lit sont des cônes de révolution ayant pour bases des parallèles de la surface et leurs génératrices normales aux sections méridiennes correspondantes, et les joints montants sont des plans méridiens. Généralement, on remplit la condition dont il s'agit en choisissant pour arêtes de douelles et pour coupes des lignes de première et de seconde courbures de la surface, et pour joints les surfaces gauches formées par les normales à l'intrados menées par ces diverses lignes. Lorsque la solution exacte et rigoureuse du problème entraînerait une trop grande complication, on a recours à des solutions approchées dans lesquelles la condition de perpendicularité des joints et de la douelle n'est pas exactement remplie, mais où les angles formés par ces diverses surfaces s'éloignent cependant peu d'un angle droit. Il est nécessaire aussi d'avoir

égard à l'aspect plus ou moins agréable à l'œil que peut présenter tel ou tel appareil, afin que la solution adoptée, rigoureuse ou très-près de l'être au point de vue géométrique, ne soit pas choquante au point de vue de l'art. L'étude des voûtes, en ce qui concerne l'appareil et la forme des voussoirs est, une des parties les plus importantes de la coupe des pierres. Cette étude est développée aux articles BERCEAU, DESCENTE, VOÛTES SPHÉRIQUES, BERCEAU TOURNANT, VOÛTES ELLIPTIQUES, VOÛTES PLATES, LUNETTES, TROMPES, BIAIS-PASSÉ, ARRIÈRE-VOUSURES, PORTE, ARÊTIER, ARC DE CLOÎTRE, VOÛTE D'ARÊTES, VOÛTE D'ARÊTES EN TOUR RONDE, PORTE CONIQUE, PENDENTIFS, VIS SAINT-GILLES, PONTS BIAIS, etc.

VOÛTE, partie de la coque d'un navire qui s'élève au-dessus de l'ARCASSE et va rejoindre le TABLEAU (Voy. ces mots et CONSTRUCTION NAVALE).

VOÛTE D'ARÊTE, voûte formée par la pénétration de deux berceaux ayant même plan de naissance et même montée (Voy. BERCEAU), et qu'on emploie toutes les fois que deux galeries de même hauteur se traversent mutuellement.

I. Soient A, aB_1 (fig. 1) la section droite du premier

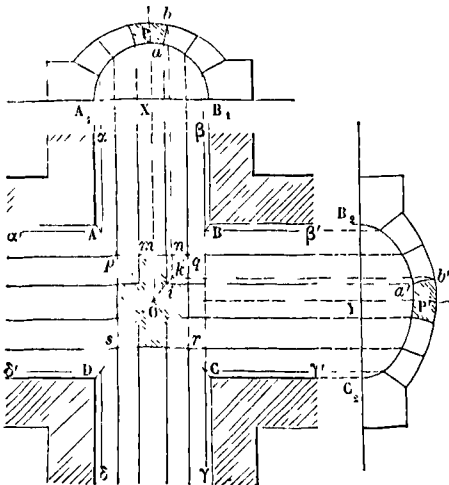


Fig. 1.

berceau; $A\alpha, B\beta, C\gamma, D\delta$ les traces des pié droits sur le plan de naissance. Soient de même $B_2, a'C_2$ la section droite du second berceau; $A\alpha', B\beta', C\gamma', D\delta'$ les traces de ses piédroits. L'espace commun aux deux galeries aura pour projection le quadrilatère ABCD. Si les deux sections droites sont des ellipses ayant même petit axe, les deux surfaces cylindriques se rencontrent suivant des ellipses verticales ayant pour projections les diagonales AC et BD du quadrilatère considéré (Voy. ARÊTIER); et si l'une de ces sections droites est une courbe donnée, on pourra toujours déterminer l'autre de manière que cette condition soit remplie. Si l'on regarde la voûte par-dessous, on reconnaîtra que les courbes d'intersection se composent de quatre demi-arêtiers dans lesquels les douelles des deux berceaux forment des angles saillants; c'est le contraire de ce qui a lieu pour les voûtes en ARC DE CLOÎTRE (Voy. ce mot). Il en résulte que tous les voussoirs qui comprennent une portion de ces demi-arêtiers pourront être tail-

lés comme le voussoir V, fig. 2 de l'article ARÊTIER. Tous les autres se tailleront comme pour un berceau ordinaire. La figure 1 montre suffisamment la disposition de l'appareil.

Pour tailler la clef O (fig. 2), on choisira un bloc

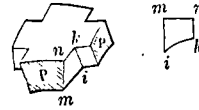


Fig. 2.

dont la base puisse contenir la projection horizontale $pqrs$ (fig. 1) et qui ait une hauteur suffisante pour contenir dans ce sens les panneaux de tête P ou P'. On lui donnera la forme d'un parallépipède rectangle ayant pour base le rectangle $pqrs$; et sur les faces latérales on appliquera les panneaux P et P', comme on le voit fig. 2; puis on enlèvera la pierre excédant perpendiculairement à ces panneaux. Il n'y aura aucune difficulté pour l'intrados et pour l'extrados; mais pour les plans de joint, il faudra procéder avec précaution afin de ne pas dépasser l'arête de l'angle rentrant; on pourra s'aider pour cela d'un panneau $mnki$ ayant la forme du plan de joint, et que l'on construira de la manière suivante :

Si, par les points b et b' (fig. 1), extrémités supérieures des traces ab et $a'b'$ des plans de joint qui forment l'angle rentrant considéré, on mène des droites respectivement parallèles aux génératrices des deux berceaux, leurs projections horizontales se rencontreront en un point k , et l'intersection des deux joints sera projetée suivant ik . On construira donc le panneau dont il s'agit en menant une droite mn égale à ab , élevant à ses extrémités des perpendiculaires respectivement égales aux longueurs mi et nk prises sur la figure 1, et joignant ik .

II. On emploie quelquefois des voûtes d'arêtes à double arêtier, ce qui donne lieu à deux dispositions distinctes :

1° Soient A, B, C, D (fig. 3) les sommets des angles

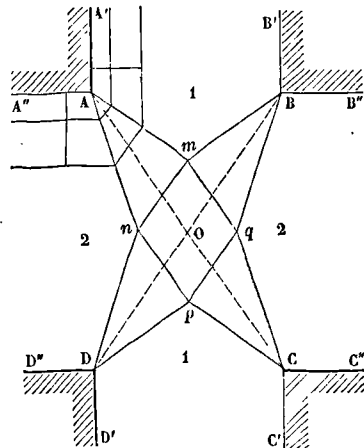


Fig. 3.

saillants formés par les piédroits des deux berceaux principaux; au lieu de prendre pour projections des

arêtiers les diagonales AC et BD du rectangle ABCD, on trace un losange $mnpq$ dont les côtés sont parallèles à ces diagonales, et l'on joint les sommets de ce losange aux points A, B, C, D par les droites Am, An, Bm, Bq, Cq, Cp, Dp, Dn. On imagine alors deux berceaux auxiliaires, dont les génératrices sont parallèles aux côtés du losange : ces berceaux sont destinés à couvrir les espaces mAn , mBq , qCp , pDn . On a alors à considérer 8 demi-arêtiers, savoir : Am et Cp, intersections du premier berceau principal avec le premier berceau auxiliaire, dont les génératrices sont parallèles à BD; Bm et Dp, intersections du premier berceau principal avec le second berceau auxiliaire, dont les génératrices sont parallèles à AC; nA et Cq, intersections du second berceau principal avec le premier berceau auxiliaire; enfin nD et Bq, intersections du second berceau principal avec le second berceau auxiliaire. On couvre l'espace $mnpq$ au moyen d'une voûte plate (Voy. ce mot). Les voussoirs contenant les arêtiers se taillent, comme pour une voûte d'arête ordinaire, au moyen des panneaux de tête pris sur les sections droites des berceaux principaux; mais les panneaux de douelle et les panneaux de joint se construisent avec les arêtiers Am, An, etc.; en sorte qu'on peut tracer sur les douelles appartenant aux berceaux principaux les courbes suivant lesquelles elles sont rencontrées par la douelle auxiliaire; ces courbes servent de directrices pour tailler cette douelle auxiliaire. De même, on peut tracer sur les plans de joint appartenant aux berceaux principaux les droites suivant lesquelles ils sont rencontrés par le plan de joint appartenant au berceau auxiliaire; et ces droites peuvent servir de directrices pour tracer ce plan de joint.

On peut aussi, après avoir construit la section droite du berceau auxiliaire, y prendre l'angle du plan de joint avec la douelle, et construire sur cet angle un **BEUVEAU** (Voy. ce mot) à l'aide duquel on taillera le plan de joint auxiliaire. La figure 4 mon-

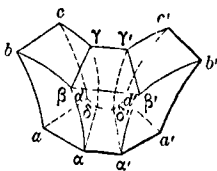


Fig. 4.

tre la forme d'un de ces voussoirs : $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont les panneaux de tête; $ab\beta\alpha$ et $a'b'\beta'\alpha'$ sont les panneaux de douelle appartenant aux berceaux principaux; $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, les intersections de ces douelles avec le berceau auxiliaire; $\alpha\beta\beta'\alpha'$ la douelle du berceau auxiliaire taillée en prenant les courbes $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ pour directrices; $add\alpha$ et $a'd'd'\alpha'$ sont les panneaux de joint inférieurs principaux; $\alpha\delta$ et $\alpha'\delta'$ les droites suivant lesquelles ils sont coupés par le panneau de joint auxiliaire; $\alpha\delta\delta'\alpha'$ est ce joint auxiliaire, taillé en prenant pour directrices les droites $\alpha\delta$ et $\alpha'\delta'$, ou en appliquant normalement à l'arête de douelle $\alpha\alpha'$ un beiveau construit en relevant sur la section droite du berceau auxiliaire l'angle du joint inférieur avec la douelle. L'opération est la même pour les joints supérieurs $bc\gamma\beta$, $b'c'\gamma'\beta'$ et $\beta\gamma\gamma'\beta'$.

Les portions de berceaux auxiliaires projetées en mAn , mBq , qCp , pDn produisent un effet analogue aux PENDENTIFS (Voy. ce mot) des voûtes en dôme; aussi les voûtes d'arêtes dont nous parlons sont-elles quelquefois désignées sous le nom de *voûtes d'arêtes à double arêtier avec pendentifs*.

2° Pour faire disparaître les angles saillants trop aigus, ou du moins pour remplacer ces angles par des angles plus ouverts, on peut au contraire couper les piédroits par des plans verticaux aa' , bb' , cc' , dd' (fig. 5) auxquels on donne le nom de *pans coupés*,

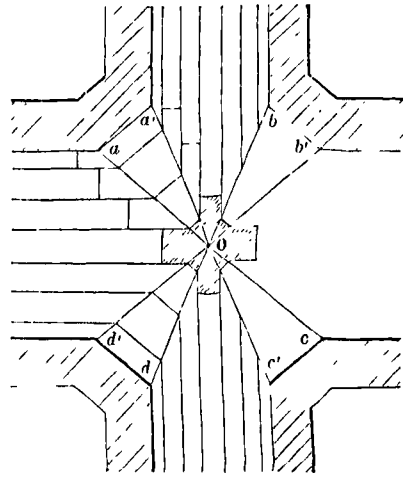


Fig. 5.

et l'on joint les points $a, a', b, b',$ etc., au centre O, ou point d'intersection des axes des deux berceaux principaux. Les espaces aOa' , bOb' , cOc' , dOd' sont couverts par des berceaux auxiliaires ayant leurs génératrices respectivement parallèles aux droites aa' , bb' , cc' , dd' . On a ainsi, comme dans la disposition précédente, deux berceaux principaux, deux berceaux auxiliaires et 8 demi-arêtiers. Les voussoirs contenant les arêtiers se tailleront d'après la même méthode que dans le cas précédent. La clef, dont la forme est indiquée en projection horizontale sur la figure à l'aide d'un contour en hachures, se taillera comme celle de la figure 2, à l'aide des panneaux de tête pris sur les sections droites des berceaux principaux, et de panneaux de douelle et de panneaux de joint terminés aux arêtiers Oa , Oa' , Ob , Ob' , etc.; ces panneaux permettront de tracer les directrices à l'aide desquelles on taillera la douelle et les joints relatifs au berceau auxiliaire.

Pour réaliser les deux dispositions que nous venons de décrire, on se donne ordinairement la section droite de l'un des berceaux principaux; on en déduit celle des berceaux auxiliaires par la condition que les arêtiers se projettent suivant les droites ci-dessus indiquées; et de la section droite des berceaux auxiliaires on déduit, par la même condition, la section droite du second berceau principal. Dans la taille des voussoirs nous n'avons pas parlé des extradors, parce qu'on se contente ordinairement de les dégrossir.

Les voûtes d'arêtes avec pans coupés pourraient s'appliquer à la rencontre de plus de deux berceaux

principaux. Si l'on avait, par exemple, trois berceaux principaux égaux, et se rencontrant simultanément sous des inclinaisons égales, on aurait à couvrir un hexagone régulier par une voûte d'arêtes; et, pour éviter les angles saillants trop aigus, on pourrait faire usage de pans coupés. La figure 6

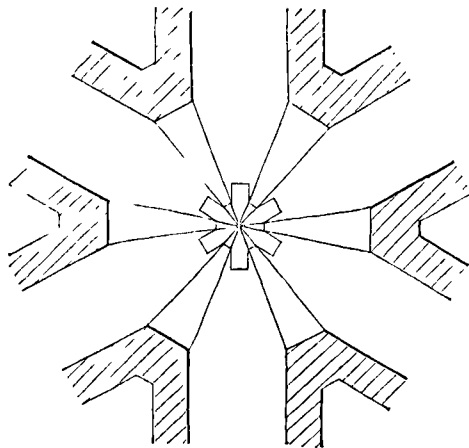


Fig. 6.

montre cette disposition, dans laquelle on reconnaît trois berceaux principaux, trois berceaux auxiliaires, à génératrices parallèles aux pans coupés, et 12 demi-arêtiers. Ce qui a été dit pour le cas de deux berceaux principaux suffit pour faire comprendre comment on taillera, dans le cas actuel, les voussoirs contenant des portions d'arêtiers, et la clef de voûte, figurée en projection horizontale.

III. Enfin, il peut arriver que plusieurs berceaux se rencontrent sous des inclinaisons irrégulières, et qu'on ait à couvrir avec une voûte d'arête un polygone irrégulier quelconque. C'est encore avec des berceaux auxiliaires qu'on résout le problème.

Pour fixer les idées, soient AA' , BB' (fig. 7) les

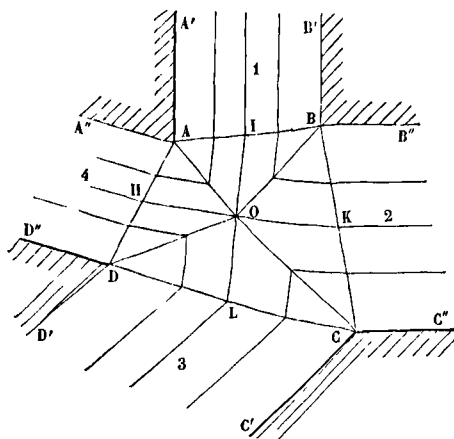


Fig. 7.

piédroits d'un premier berceau, BB'' , CC'' ceux d'un second, CC' , DD' ceux d'un troisième, DD'' , AA'' ceux d'un quatrième. Dans l'intérieur du quadrilatère

$ABCD$, on détermine le point O , intersection des droites HK et IL qui joignent les milieux des côtés opposés; et l'on joint OA , OB , OC , OD , qui seront les projections de 4 demi-arêtiers. On couvrira l'espace AOB et l'espace COD par des berceaux à génératrices parallèles à IL , et les espaces BOC et DOA par des berceaux ayant leurs génératrices parallèles à HK . Si l'on se donne, par exemple, la section droite du berceau principal 1, on en déduira le berceau auxiliaire projeté en AOB , par la condition que l'arêtier se projette suivant AB ; puis celle du berceau auxiliaire BOC , par la condition que l'arêtier se projette suivant OB ; puis celle du berceau principal 2, par la condition que l'arêtier se projette suivant BC , et celle du berceau auxiliaire COD , par la condition que l'arêtier se projette suivant OC ; puis celle du berceau principal 3, par la condition que l'arêtier se projette suivant CD , et celle du berceau auxiliaire AOD , par la condition que l'arêtier se projette en OD ; puis enfin celle du berceau principal 4, par la condition que l'arêtier se projette en AD . On peut remarquer que la section droite de ce dernier berceau aurait pu se déduire de celle du berceau AOB ; mais le résultat eût été le même, attendu que la condition commune à tous les berceaux est d'avoir même montée, et que, par conséquent, si la section droite du berceau 1 est une ellipse, celle du berceau 4 sera aussi une ellipse dont le grand axe est fixé par l'écartement des piédroits, et dont le petit axe est la montée commune, résultat auquel on parvient quel que soit l'ordre dans lequel on déduit les sections droites les unes des autres. — On pourrait placer le point O arbitrairement dans l'intérieur du quadrilatère $ABCD$; mais il faudrait toujours prendre pour projection des demi-arêtiers les droites qui joignent ce point O aux sommets du quadrilatère, et pour directions des génératrices des berceaux auxiliaires les droites qui joignent ce même point O aux milieux H, I, K, L des côtés. Cette condition est nécessaire pour que les sections droites des berceaux principaux se composent de deux demi-ellipses égales.

VOÛTES D'ARÊTE EN CHARPENTE. Elles se construisent d'après les mêmes principes que les voûtes d'arête en pierre. Si les murs sont rectilignes, les opérations sont analogues à celles qu'exigent les combles cylindriques avec croupe.

Si les murs sont circulaires, les fermes de la surface annulaire et celles du conoïde se composent chacune de deux poteaux réunis par une traverse supérieure horizontale, soutenue par des aisseliers; c'est dans cette traverse et dans ces aisseliers que s'assemblent les pièces de cintre, dont la courbure est obtenue d'après les mêmes règles que pour les voûtes en pierre (Voy. VOÛTE D'ARÊTE EN TOUR RONDE). Les fermes arêtières sont composées de la même manière. Les fermes d'une même voûte sont reliées par un faitage, qui est circulaire pour la surface annulaire, et rectiligne pour le conoïde. Les traverses des fermes arêtières s'assemblent entre elles et avec les faitages des deux voûtes, par des DÉTOÛTEMENTS (Voy. ce mot) convenables, et forment un épi sans poinçon. (Voy. le *Traité de l'art de la charpente* de M. Emy.)

Les voûtes d'arête en charpente sont recouvertes d'un lattis sur lequel on étend un enduit, ou sur lequel on adapte des panneaux en menuiserie.

VÔTE D'ARÊTES EN TOUR RONDE, voûte formée par la pénétration mutuelle d'un BERCEAU TOURNANT (*Voy. ce mot*) et d'une voûte CONOÏDE (*Voy. ce mot*) ayant même plan de naissance et même montée. Soit O (fig. 1) la projection horizontale de l'axe d'un berceau tournant, ou voûte annulaire, dont la section méridienne est rabattue en *amb*; et supposons qu'on se propose de pratiquer

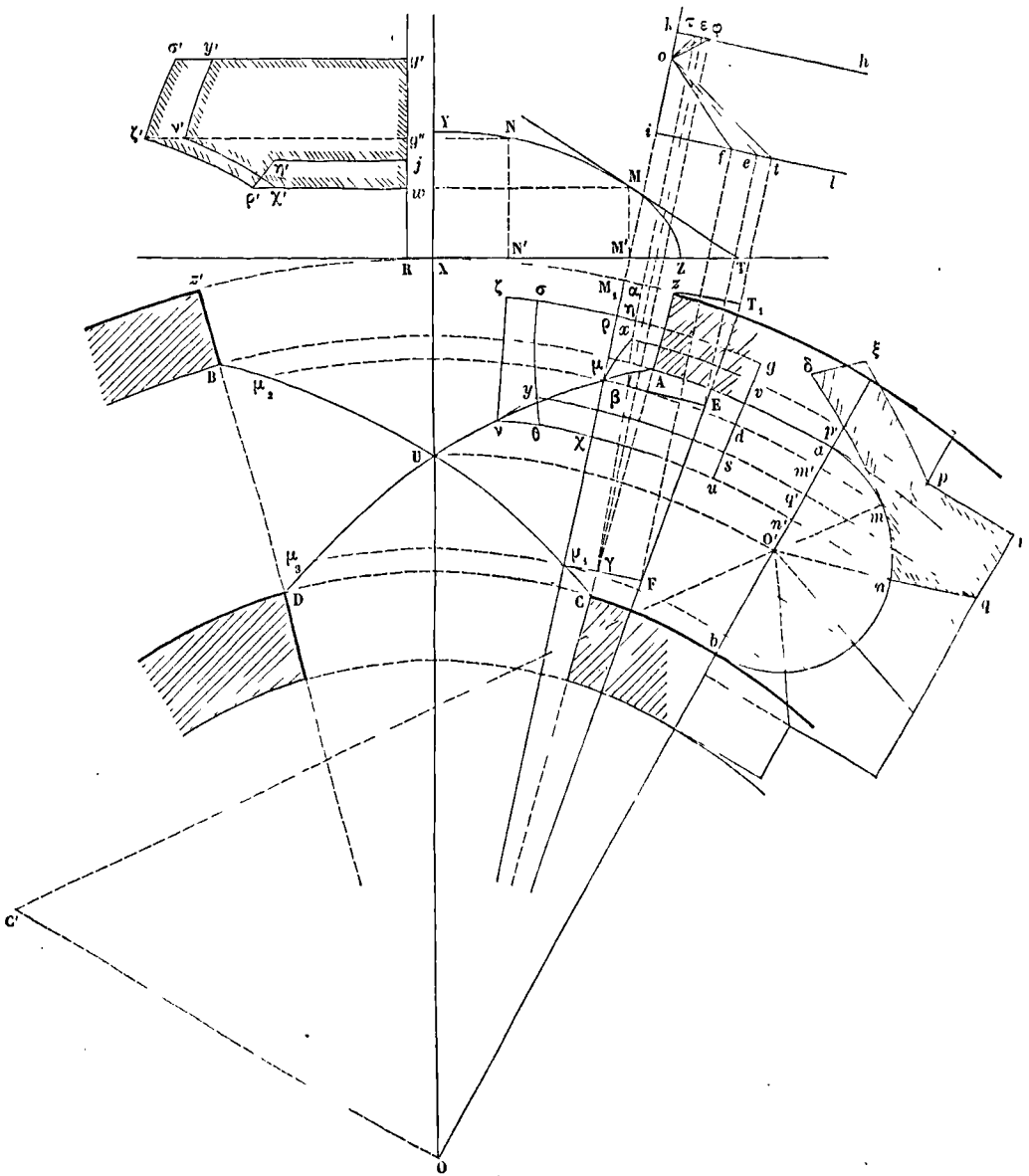


Fig. 1.

dans ce berceau une porte dont le plan de symétrie vertical a pour trace horizontale OX. Cette porte sera limitée par des plans verticaux ayant pour traces ACO et BDO. On s'impose ordinairement la condition que la voûte qui recouvrira le passage ait même plan de naissance et même montée que le berceau tournant; et pour remplir cette condition on fait usage d'un conoïde, dont les génératrices sont horizontales et s'appuient, d'une part sur l'axe O du berceau, d'autre part sur une directrice tracée de la manière suivante sur le cylindre extérieur qui

limite la voûte annulaire. Au point X on mène une tangente XZ à la trace horizontale de ce cylindre, et on la prend égale à l'arc Xx compris entre le point X et le sommet x de l'angle externe du piedroit; on élève en X une perpendiculaire XY égale au rayon O'a de la section méridienne du berceau tournant; et sur les droites XZ et XY on construit un quart d'ellipse YMZ. On imagine ensuite que le plan de cette ellipse s'enroule sur le cylindre extérieur, de manière que XY s'appuie sur la vertical e du point X, et que le point Z vienne en x; l'ellip^s

se transforme en une courbe à double courbure que l'on prend pour directrice du conoïde, en supposant qu'elle soit répétée symétriquement de l'autre côté du plan vertical OX.

La première chose à faire est de chercher l'intersection de ce conoïde avec la surface annulaire. Pour en trouver un point, on prendra sur la méridienne du berceau tournant, supposée relevée verticalement, un point quelconque m , par lequel on imaginera un plan horizontal. Ce plan coupera la surface annulaire suivant un cercle, dont la projection horizontale passera en m' et aura le point O pour centre; et il coupera le conoïde suivant une droite horizontale qu'il est facile de se procurer. Sur l'ellipse plane, on prendra le point M ayant une ordonnée égale à mm' ; on prendra l'arc XM_1 , égal à l'abscisse XM' , et l'on tirera M_1O qui sera la projection horizontale de la génératrice du conoïde située dans le plan horizontal auxiliaire qu'on a choisi.

Il en résulte que le point μ , intersection du cercle $m'd\mu$ avec la droite OM_1 , sera un point de la projection horizontale de l'arêtier. On en obtiendra de la même manière autant que l'on voudra; chaque plan horizontal auxiliaire en donnera 4, attendu qu'il coupe la surface annulaire suivant 2 cercles; en sorte que le rayon OM_1 donne deux points μ et μ_1 de la projection de l'arêtier; d'ailleurs, on en obtient immédiatement deux autres, μ_2 et μ_3 , symétriquement placés par rapport à OX.

Les courbes AUD et BUC ainsi obtenues sont des spirales d'Archimède. En effet, posons, pour abrégé l'écriture, $OX=R$, $O\mu=\rho$, $O'm=r$, $OO'=d$, $MM'=mm'=y$, $XO\mu=\omega$, $XOz=\omega_0$; il en résultera $XM_1=XM'=\omega R$, et $Xz=XZ=\omega_0 R$. L'ellipse YMZ donne

$$y^2 = r^2 - \frac{r^2}{\omega_0^2 R^2} \cdot \omega^2 R^2 = r^2 - \frac{r^2 \omega^2}{\omega_0^2}.$$

Le cercle amb donne à son tour

$$y^2 = r^2 - (\rho - d)^2.$$

La comparaison de ces deux relations montre qu'on doit avoir

$$(\rho - d)^2 = \frac{r^2 \omega^2}{\omega_0^2}, \text{ d'où } \rho = d \pm \frac{r}{\omega_0} \omega.$$

Il suffit ensuite de faire tourner l'axe polaire d'un angle convenable pour ramener cette équation à la forme

$$\rho = \pm \frac{r}{\omega_0} \omega',$$

sous laquelle on reconnaît des spirales d'Archimède.

Les parties AUC, BUD seront recouvertes par la voûte annulaire; les parties AUB, CUD le seront par le conoïde. Les voussoirs qui contiendront une portion d'arêtier participeront donc à la forme des voussoirs du berceau tournant et à celle des voussoirs de la voûte conoïde. Considérons, pour fixer les idées, celui qui a pour panneau de tête, sur la section méridienne du berceau, la figure $mnqrp$. La partie de ce voussoir qui appartient au berceau sera limitée par un certain plan méridien arbitraire uv ; par une portion de cylindre correspondant à pr , et qui a pour trace l'arc vx ; par deux joints coniques qui correspondent à mp et à nq , et qui ont leur sommet sur l'axe O; et enfin par un plan horizontal répondant à qr , et qui est à une distance rp' au-dessus du plan de naissance. La partie du même

voussoir qui appartient au conoïde sera limitée par le même plan horizontal, par un certain cylindre de rayon arbitraire ayant pour trace $\zeta\eta$, et par deux joints normaux à la douelle conoïde qu'il s'agit de déterminer. Désignons par P le point de l'arêtier qui se projette en μ ; la génératrice du conoïde qui passe par ce point se projette horizontalement suivant $O\mu M_1$. La question actuelle consiste à faire passer par cette génératrice une surface normale en tous les points de cette droite à la douelle conoïde. Pour cela, on substitue au conoïde un paraboloides hyperbolique contenant cette génératrice, et ayant les mêmes plans tangents tout le long de cette droite. A cet effet, on opère de la manière suivante: on mène la tangente en M à l'ellipse YZ; au point M_1 , on mène une tangente au cercle Xz, et l'on porte une longueur M_1T égale à la sous-tangente $M'T$. Si l'on suppose que l'ellipse s'enroule sur le cylindre extérieur de la tour, comme on l'a déjà dit, de manière que M' vienne en M_1 , le point T viendra en T_1 , et la tangente MT se trouvera dans le plan tangent au cylindre suivant la verticale du point M_1 . Prenons un plan vertical de projection auxiliaire; soit il sa trace, et supposons-le rabattu sur le plan horizontal. Si l'on projette M_1 en i , T_1 en t , que l'on prenne la perpendiculaire it égale à MM' ou mm' , et qu'on joigne ot , cette droite sera le rabattement de la tangente MT, après l'enroulement de l'ellipse de X en M_1 . Cette tangente étant ainsi bien définie, concevons qu'une droite horizontale se meuve de manière à rencontrer toujours cette même tangente et l'axe vertical O; elle engendrera un paraboloides hyperbolique. La tangente considérée ayant un élément commun avec la directrice du conoïde, il s'ensuit que le paraboloides aura deux génératrices successives, ou infiniment voisines, communes avec le conoïde, et que, par conséquent, les deux surfaces auront tous leurs plans tangents communs le long de la génératrice projetée en μM_1 . Remarquons que le paraboloides considéré peut être engendré d'une autre manière: la droite OT_1 étant évidemment une de ces génératrices, on peut le regarder comme engendré par une droite qui s'appuierait constamment sur OT_1 et sur la génératrice du conoïde projetée en μM_1 , et restant perpendiculaire à cette génératrice et, par conséquent, parallèle au plan vertical auxiliaire. Il en résulte que si, par différents points μ , μ_1 du rayon OM_1 , on lui élève des perpendiculaires μE , $\mu_1 F$ jusqu'à la rencontre de OT_1 , que l'on projette les points E et F sur il en e et f , et qu'on joigne oe et of , ces droites pourront être considérées comme les traces d'autant de plans tangents au paraboloides et, par conséquent, aussi au conoïde. Il devient dès lors facile de déterminer les normales correspondantes, car il suffit pour cela de mener les droites $o\varphi$, $o\epsilon$, $o\tau$ respectivement perpendiculaires aux droites of , oe , ot . Ce seront les projections verticales des normales au conoïde menées par les points de la génératrice du conoïde qui se projettent en μ_1 , μ et M_1 . L'ensemble de ces normales formera la surface du joint normal: ce sera encore un paraboloides hyperbolique; et, de plus, ce sera le même paraboloides qui aurait tourné de 90 degrés autour de la génératrice du conoïde. Pour déterminer complètement ce joint, il faut trouver les points où les normales rencontrent le plan horizontal correspon-

dant à l'extrémité supérieure de mp . Ce plan horizontal est représenté sur la figure auxiliaire par la droite hh menée parallèlement à il à une distance ik égale à pp' . Les points $\varphi, \varepsilon, \tau$, où les projections verticales des normales rencontrent cette droite, sont donc les projections verticales des extrémités supérieures de ces normales. Pour obtenir leurs projections horizontales, on projettera les points $\tau, \varepsilon, \varphi$ sur M_1T_1 ; par les points obtenus, on mènera des droites au point O , et l'on déterminera les points α, β, γ où les lignes de jonction rencontreront les cercles ayant O pour centre, et passant respectivement par les points M, μ et μ_1 . La courbe $\alpha\beta\gamma$ réunissant les points obtenus sera la projection de l'intersection du joint gauche par le plan horizontal dont la trace est kh . Cette courbe est une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes OM_1 et une perpendiculaire menée par le point O . En effet, les triangles oif et $ok\varphi$ étant semblables, ainsi que les triangles oit et $ok\tau$, on en déduit

$$\frac{if}{ok} = \frac{oi}{k\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{it}{ok} = \frac{oi}{k\tau};$$

d'où

$$\frac{if}{it} = \frac{k\tau}{k\varphi},$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{if}{it}$ ou $\frac{\mu F}{M_1T_1}$ par son égal $\frac{OM_1}{OM_1}$, et écrivant $M_1\alpha$ au lieu de $k\tau$ et $\mu_1\gamma$ au lieu de $k\varphi$,

$$\frac{OM_1}{OM_1} = \frac{M_1\alpha}{\mu_1\gamma};$$

d'où

$$OM_1 \cdot \mu_1\gamma = OM_1 \cdot M_1\alpha,$$

relation qui démontre la propriété énoncée. On ferait la même démonstration en remplaçant la normale op par la normale os . Cette connaissance de la nature de la courbe $\alpha\beta\gamma$ permet de la tracer plus aisément. On opérera de la même manière pour le joint supérieur répondant à nq , et l'on trouvera que l'intersection de ce joint avec le plan horizontal correspondant à qr est un arc d'hyperbole équilatère projeté en sy . On obtiendra d'ailleurs aisément la projection $v\zeta$ de la génératrice du conoïde répondant au point n , et l'on aura tous les éléments nécessaires pour tracer les panneaux dont on a besoin pour appliquer le trait sur la pierre.

Le voussoir que nous considérons est compris, en projection horizontale, dans la figure $\alpha\eta\zeta\nu vx$; les lignes μx et νy , dont il serait facile d'avoir autant de points qu'on voudrait, en menant des plans horizontaux intermédiaires entre m et p ou entre n et q , sont les projections des intersections des deux joints inférieurs et des deux joints supérieurs. On obtient aisément le développement du joint conique répondant à mp . En effet, cette droite prolongée vient rencontrer en C' la perpendiculaire à Oa menée par le point O ; si donc on relevait la figure amb pour lui rendre la position verticale, le point C' viendrait se placer sur la verticale du point O , et serait, par conséquent, le sommet de la surface conique qui constitue le joint considéré. On aura donc le développement de ce joint en décrivant de C' comme centre des arcs de cercle sur lesquels on prendra les longueurs $m\delta$ et $p\zeta$ respectivement égales aux projections horizontales dp et px des arcs qui limitent le joint; on

joindra ensuite les points δ et ζ par une courbe dont il sera facile d'avoir un point intermédiaire en se servant d'un plan horizontal passant entre m et p . On obtiendrait de la même manière le développement du joint conique répondant à nq ; mais ce développement n'est point indispensable, parce que les joints supérieurs forment un angle saillant; tandis que les joints inférieurs formant un angle rentrant, le panneau $m\delta\zeta p$ est nécessaire pour ne point dépasser, en fouillant la pierre, l'arête de cet angle rentrant. On taille d'abord la pierre comme si le cercle $\zeta\eta$ se prolongeait jusqu'en g à la rencontre du plan du méridien uv . On détermine donc le développement des deux cylindres ζg et vu qui comprennent entre eux le voussoir. Pour cela, en un point R pris sur XT , on lui élève une perpendiculaire sur laquelle on prend les distances Rw, Rj, Rg'' , Rg' respectivement égales à mm', pp', nn', qq' , et l'on mène par les points w, j, g'', g' des parallèles à XT . Puis, sur ces parallèles, on prend les longueurs rectilignes $g'\sigma', g''\zeta', w\rho', j\eta'$ respectivement égales au développement des arcs $g\sigma, g\zeta, g\rho, g\eta$, et l'on forme ainsi le panneau

$$g'\sigma'\zeta'\rho'\eta'j,$$

développement du cylindre extérieur. Les lignes $\sigma'\zeta'$ et $\zeta'\rho'$ sont des courbes dont on déterminera des points intermédiaires, en se servant de plans horizontaux auxiliaires. Sur les mêmes droites, on prendra ensuite les longueurs $g'y', g''v', w\chi'$ respectivement égales au développement des arcs $sy, uv, u\chi$, et l'on pourra tracer le panneau $g'y'v'\chi'w$, développement du cylindre intérieur. Les lignes $y'v'$ et $v'\chi'$ sont aussi des courbes dont on déterminera des points intermédiaires à l'aide de plans auxiliaires horizontaux.

Ces panneaux construits, on pourra procéder à la taille du voussoir. On prépare d'abord la pierre d'après la projection horizontale $v\zeta gu$, c'est-à-dire qu'on lui donne la forme d'un prisme droit ayant cetrapéze curviligne pour base, comme l'indique la figure 2, où cette base est représentée par $NZGW$;

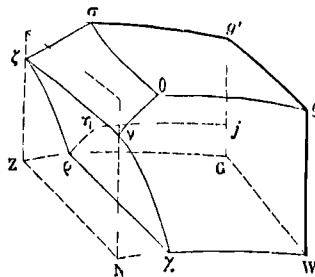


Fig. 2.

la hauteur du prisme est la différence entre les hauteurs verticales des points m et q de la figure 1. On applique sur les surfaces cylindriques extérieure et intérieure les panneaux

$$g'\sigma'\zeta'\rho'\eta'j \quad \text{et} \quad g'y'v'\chi'w,$$

supposés exécutés en matière flexible; et l'on trace sur la pierre les courbes $\sigma\zeta, \zeta\rho$ et $v\theta, v\chi$, la droite $\zeta\nu$ et l'arc d'hyperbole $\sigma\theta$, dont la forme est donnée par la projection horizontale. On exécute la douelle conoïde $\zeta\rho\chi\nu$ en enlevant l'excédant de pierre de manière qu'une règle posée horizontalement sur les

courbes $\zeta\rho$ et $\nu\chi$ s'applique constamment sur la surface; il faut pour cela avoir des points de repère correspondant à des hauteurs égales au-dessus du plan de naissance. Ces points de repère sont faciles à obtenir en joignant les courbes $\zeta\rho'$ et $\nu'\chi'$ de la figure 1 par des droites parallèles à $\sigma'g'$. On exécute ensuite le joint gauche $\sigma\zeta\theta$ en enlevant l'excédant de pierre de manière qu'une règle posée sur l'hyperbole $\sigma\theta$ et sur la droite $\zeta\nu$, perpendiculairement à cette dernière, s'applique exactement sur la surface. On peut se procurer les points de repère nécessaires en joignant la droite $\zeta\nu$ et l'hyperbole $\sigma\theta$ de la figure 1 par des perpendiculaires à $\zeta\nu$. La pierre ayant pris ainsi la forme indiquée par les lignes ponctuées de la figure 3, on porte sur $\rho\chi$ une lon-

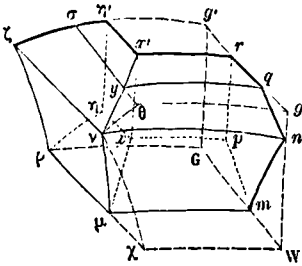


Fig. 3.

gueur égale à $\rho\mu$ de la figure 1, et sur $\sigma\theta$ une longueur égale à σy , et l'on trace l'arête $\mu\nu$, ainsi que la courbe νy ; puis on applique sur la face latérale $gg'WG$ le panneau de tête $mnqrp$ de la figure 1. La douelle de révolution $m\mu\nu n$ s'exécute alors en faisant glisser sur les arcs $m\mu$ et νn une cerce découpée sur la méridienne mn de la figure 1; les points de repère nécessaires s'obtiendront sur la projection horizontale en menant par le point O des droites qui coupent les arcs μd et νu . Le joint conique $gy\nu n$ s'exécute au moyen d'une règle posée sur les arcs yq et νn ; les points de repère s'obtiendront de même au moyen de droites menées par le point O (fig. 1), et coupant les arcs ys et νu . Cela fait, on trace sur le plan supérieur le contour $\eta'x'r$ d'après le contour $\eta x v$, pris sur le plan horizontal, et l'on exécute à l'équerre les faces verticales $\eta'\eta x x'$ et $r p x x'$; l'une se termine par un arc d'hyperbole ηx identique à $\eta'x'$, et l'autre par un arc de cercle $p x$. On taille alors le joint conique inférieur $p m \mu x$ comme on a taillé le joint conique supérieur, mais en avançant avec précaution jusqu'à ce que le panneau $m p \xi d$ de la figure 1 puisse s'y appliquer exactement. On obtient de la sorte la courbe μx , intersection de ce joint conique avec le joint gauche $\eta p \mu x$. Ce dernier joint s'exécute enfin au moyen d'une règle que l'on pose sur la droite $\rho\mu$ et sur l'arc d'hyperbole ηx , en la maintenant perpendiculaire à $\rho\mu$.

On exécutera de la même manière tous les voussoirs qui contiennent une portion d'arête. Pour tous les autres, l'opération se simplifiera; car, s'ils appartiennent au berceau tournant, les joints gauches seront remplacés par des plans méridiens verticaux, et, s'ils appartiennent à la voûte conoïde, les joints coniques seront remplacés par des joints cylindriques ayant pour axe O (fig. 1) de la surface de révolution.

La complication du problème a engagé quelques constructeurs à chercher des moyens de simplification. Les uns ont remplacé la directrice à double courbure du conoïde par une ellipse construite sur la corde de l'arc xx' (fig. 1) comme diamètre, ou, ce qui revient au même, par un cercle égal à la section méridienne de la surface annulaire, placé à une distance convenable de l'axe O. Quelques-uns ont remplacé le parabolôïde normal à la douelle conoïde, par le parabolôïde lieu des normales menées par les différents points de la génératrice de ce conoïde aux ellipses résultant de son intersection avec des plans perpendiculaires à OX. D'autres enfin ont substitué au parabolôïde un certain nombre de plans tangents. Mais ces modifications n'apportent pas en réalité une grande simplification dans le tracé; elles sont beaucoup moins pratiques qu'elles ne le paraissent, et elles ne sont pas sans inconvénients au point de vue de la solidité de la construction; en sorte que l'avantage reste en définitive au tracé le plus rigoureux (Voy. le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, p. 284 et suivantes, et le *Traité de la Coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 223 et suivantes). Les procédés seraient analogues si la voûte annulaire, au lieu d'avoir pour section méridienne un cercle, avait pour section une ellipse.

VOÛTE PLATE, voûte dont l'intrados est un plan horizontal (Voy. VOÛTES, BERCEAU). Une voûte plate n'est qu'une plate-bande prolongée (Voy. PLATE-BANDE). La figure 1 représente l'appareil d'une

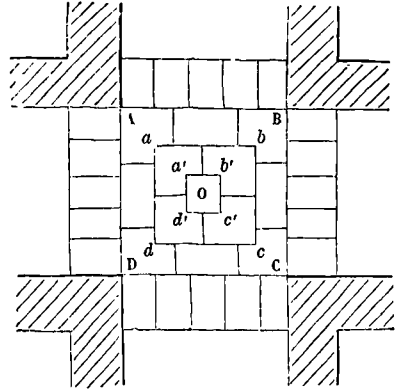


Fig. 1

voûte plate destinée à recouvrir l'espace ABGD formé par la rencontre de deux galeries rectangulaires égales. Les piédroits A, B, C, D sont réunis par des plates-bandes, et sur ces plates-bandes sont posés les claveaux d'angle a, b, c, d qui s'appuient par des crossettes. Ces claveaux d'angle sont reliés entre eux par de nouvelles plates-bandes, sur lesquelles s'appuient de nouveaux claveaux d'angle a', b', c', d' , reliés par d'autres plates-bandes, et ainsi de suite jusqu'au claveau central O qui sert de clef. Chaque claveau s'appuie ainsi au moyen d'une crossette sur les claveaux de la rangée précédente et sur ceux de la même rangée. Il en résulte une construction assez solide pour qu'on puisse supprimer la clef, et même quelquefois une rangée de claveaux tout autour de la clef pour donner du jour à l'espace placé au-dessous.

La même disposition servirait à couvrir une salle carrée. Il faudrait supposer dans ce cas que les plates-bandes AB, BC, CD, DA sont remplacées par quatre murs.

La figure 2 représente en perspective le claveau

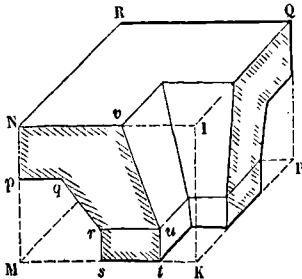


Fig. 2.

d'angle α de la figure 1. Pour tailler ce claveau, on choisit un bloc qui puisse le contenir, et l'on y taille le parallélépipède rectangle IKMNPQR, dont les trois dimensions sont connues. Sur les faces IKMN et IKPQ, on applique le panneau Npqrstur obtenu comme s'il s'agissait d'une plate-bande, et suivant les arêtes des deux figures ainsi tracées, on conduit des plans perpendiculaires aux faces IKMN et IKPQ.

VOÛTES ELLIPTIQUES, voûtes dont l'intrados est un demi-ellipsoïde. On en distingue plusieurs espèces.

I. Il peut arriver que l'ellipsoïde soit un ellipsoïde de révolution autour d'un axe vertical : la ligne de naissance est alors un cercle, et la surface repose par son équateur sur un mur circulaire. L'appareil d'une voûte de ce genre est le même que pour une voûte sphérique (Voy. ce mot) : les arêtes de douelle sont des parallèles de la surface ; les joints de lit sont des cônes de révolution ayant leur sommet sur l'axe, et pour génératrices des normales à la section méridienne ; les joints montants sont des plans verticaux passant par l'axe. La seule différence entre cet appareil et celui d'une voûte sphérique consiste en ce que les cônes qui forment les joints de lit n'ont pas leur sommet au même point. On prend ordinairement pour extrados un second ellipsoïde de révolution semblable au premier, et ayant le même axe, mais le centre placé un peu plus bas. Il en résulte que, conformément aux règles de la poussée des voûtes (Voy. ce mot), les voussoirs ont plus d'épaisseur à la naissance qu'à la clef. La taille des voussoirs s'exécute d'ailleurs d'après les mêmes principes que dans les voûtes sphériques ; on emploie particulièrement la méthode qui consiste à se servir de la projection du voussoir sur son plan vertical de symétrie (Voy. BERCEAU TOURNANT). Mais il faut changer, à chaque assise, la CERCE (Voy. ce mot) qui sert à tailler la douelle. Le voussoir formant la clef est le seul qui se taille d'après la méthode de l'ÉCUELLE (Voy. VOÛTES SPHÉRIQUES).

II. Le plus souvent, l'ellipsoïde formant l'intrados est de révolution autour d'un axe horizontal situé dans le plan de naissance, et la surface repose par un de ses méridiens sur un mur cylindrique dont la base est une ellipse égale à la section méridienne.

La voûte est *surhaussée* si l'axe de révolution est le petit axe de la section méridienne ; la voûte est *surbaissée* si l'axe de révolution est le grand axe de cette section. On peut prendre pour surface d'extrados un ellipsoïde de révolution semblable à l'intrados et ayant le même axe. Il en résulte que la voûte a plus d'épaisseur vers les sommets du grand axe de l'ellipse de naissance, ce qui est favorable à la stabilité de la construction.

Le mode d'appareil qui se présente le plus naturellement à l'esprit consiste à diviser la voûte par des plans méridiens qui forment les joints de lit, et à adopter pour joints montants des cônes de révolution ayant pour base des parallèles de la surface et pour génératrices des normales à la section méridienne. Les arêtes de douelle sont des ellipses égales à l'ellipse de naissance ; les intersections des joints coniques avec l'intrados sont des arcs de cercle. Soient BAC (fig. 1) la moitié de l'ellipse de naissance de l'intrados, O le centre de cette ellipse, et AO

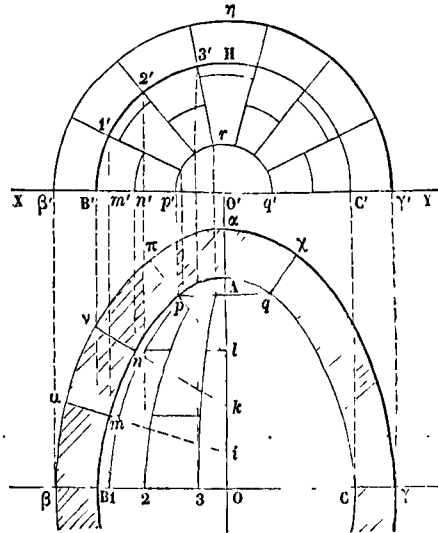


Fig. 1.

l'axe de révolution de la surface ; soient XY la ligne de terre, parallèle au petit axe BC, et B'HC' la projection verticale de l'équateur. Soient de même $\beta\alpha\gamma$ l'ellipse de naissance de l'extrados, et $\beta'\eta\gamma'$ la projection de l'équateur de cette seconde surface. On divisera d'abord la demi-circconférence B'HC' en un nombre impair de parties égales, et, par les points de division, on mènera les rayons $O'1', O'2', O'3',$ etc. ; ils figureront les traces verticales des plans méridiens qui divisent la voûte en assises. On divisera de même en un nombre impair de parties égales l'ellipse BAC, et par les points de division, on mènera les normales $mi, nk, pl,$ etc., prolongées jusqu'à la rencontre de l'ellipse $\beta\alpha\gamma$. Ces normales, en tournant autour de l'axe de rotation OO', engendreront les joints coniques qui diviseront les assises en voussoirs. Ces joints devront être interrompus de deux en deux assises, afin que le joint conique qui sépare deux voussoirs d'une même assise corresponde à la partie médiane d'un voussoir de l'assise supérieure ou de l'assise inférieure. Les arêtes de

douelle, ou les intersections des plans méridiens avec l'intrados, se projettent verticalement suivant les rayons $O'1'$, $O'2'$, $O'3'$, etc., et horizontalement suivant des ellipses ayant toutes pour demi grand axe la droite AO , et pour sommets du petit axe les points 1, 2, 3, etc., où BC est rencontré par les perpendiculaires à la ligne de terre menées par les points $1'$, $2'$, $3'$, etc. Les coupes ou intersections des joints coniques avec l'intrados se projettent horizontalement suivant des parallèles à la ligne de terre menées par les points m , n , p , etc., et verticalement par des arcs de cercle décrits du point O' comme centre, et passant respectivement par les points m' , n' , p' , etc., où la ligne de terre est rencontrée par les perpendiculaires abaissées des points m , n , p , etc. Afin d'éviter les parties aiguës que présenteraient les voussoirs voisins du sommet A de l'ellipsoïde, on arête les plans méridiens à la circonférence qui a pour projections pq et $p'r'q'$, et l'on forme d'une seule pierre la partie de la voûte comprise dans le cône engendré par πpl . Cette pierre prend quelquefois le nom de *trompillon*, par analogie avec celle qui joue un rôle semblable dans les TROMPES (Voy. ce mot). On taillera les voussoirs par l'une des méthodes indiquées aux articles VOÛTES et BERCEAU TOURNANT, particulièrement par celle qui consiste à projeter le voussoir sur le plan méridien qui lui sert de plan de symétrie. Pour tailler le trompillon, on préparera un prisme droit ayant pour base la figure $p\pi\alpha q$ et pour hauteur la distance du point π à l'axe OO' . Sur la base inférieure, on tracera les arcs pAq et $p\pi\alpha$ pris sur la projection horizontale; et, sur le plan vertical dont pq est la trace, on tracera un cercle égal à $p'r'q'$. Alors, à l'aide d'une CERCE (Voy. ce mot) ayant la forme de l'arc pA , on taillera la douelle elliptique en maintenant la cerce normale à la circonférence pq , $p'r'q'$. On taillera le joint conique à l'aide d'un BEUVEAU (Voy. ce mot) présentant la forme $A\pi\pi$, en ayant soin de maintenir la branche courbe répondant à pA normale à la circonférence pq , $p'r'q'$; la branche droite répondant à $p\pi$ donnera la direction des génératrices du joint conique. On pourrait tailler l'extrados avec une cerce concave préparée sur l'arc $\alpha\pi$; mais, le plus souvent, on se contente de la dégrossir.

III. L'appareil qu'on vient de décrire peut être employé pour des voûtes elliptiques dont le grand axe n'excède pas 5 à 6 mètres; mais il ne saurait être adopté pour des dimensions plus grandes, parce que, pour éviter les voussoirs trop aigus dans le voisinage du trompillon, il faudrait diminuer le nombre et augmenter, par conséquent, l'épaisseur des voussoirs placés dans le voisinage de l'équateur, ce qui exigerait des pierres d'un trop grand volume. Cet appareil, exécuté en grand, a d'ailleurs l'inconvénient de présenter un aspect peu agréable à l'œil, et de placer dans la région la plus élevée les voussoirs dont les dimensions sont les plus grandes, ce qui paraît choquant à la vue.

Les constructeurs préfèrent appareiller la voûte elliptique par assises horizontales. Soient comme ci-dessus BAC (fig. 2) la moitié de l'ellipse de naissance de l'intrados, $B'HC'$ la projection verticale de l'équateur de cette surface. Nous supposons, afin de varier les données, que l'extrados est un ellipsoïde de révolution semblable à l'intrados, mais

ayant son centre (O, O'') situé sur la verticale du point O , un peu au-dessous de ce point. Cette disposition a pour effet d'augmenter l'épaisseur de la voûte près de la naissance, en la diminuant près de

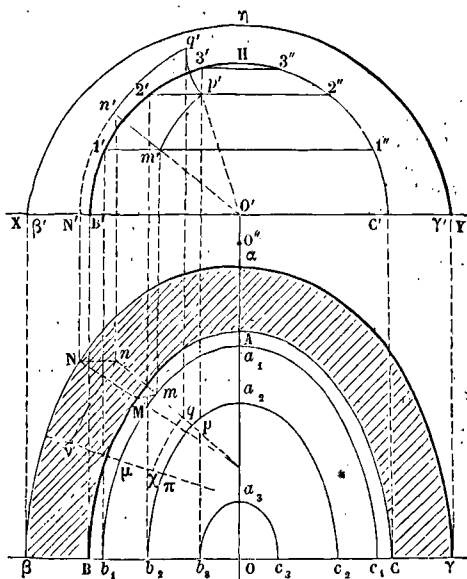


Fig. 2.

la clef, ce qui favorise la stabilité de la construction. Après avoir divisé l'équateur $B'HC'$ en un nombre impair de parties égales, on conçoit par les points de division $1'$, $2'$, $3'$, etc., des plans horizontaux qui diviseront l'intrados en assises. Ces plans couperont l'intrados suivant des ellipses semblables à l'ellipse BAC , et qui se projettent horizontalement en $b_1a_1c_1$, $b_2a_2c_2$, etc. Les mêmes courbes, qui seront les arêtes de douelle, se projettent verticalement suivant les horizontales $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, etc. Pour former les joints de lit, on fera passer par les arêtes de douelle des surfaces gauches, normales à l'intrados. Soit, par exemple, m' un point pris sur la courbe $1'1'' - b_1a_1c_1$; on mènera par ce point une normale à l'intrados. Pour cela, on remarquera que cette normale devant être perpendiculaire à la tangente en m , m' à l'arête de douelle, laquelle tangente est horizontale, la projection horizontale de cette normale sera elle-même normale en m à l'ellipse $b_1a_1c_1$. Quant à sa projection verticale, ce sera le rayon $m'O'$, attendu que toutes les normales à une surface de révolution rencontrent l'axe. Les lignes mi et $m'O'$ seront donc les projections de la normale en m , m' à la surface d'intrados. Cette normale sera l'une des génératrices du joint gauche passant par l'arête de douelle $1'1'' - b_1a_1c_1$, et l'on obtiendra de la même manière toutes les autres. Il est nécessaire de déterminer l'intersection de cette surface gauche avec l'extrados, et pour cela il faut trouver le point où l'une quelconque de ses génératrices, la normale en m , m' , par exemple, perce la surface de l'extrados. Imaginons que cette normale tourne autour de l'axe de révolution jusqu'à venir s'appliquer sur le plan horizontal; dans ce mouvement, le point m , m' décrira un arc de cercle

font le plan sera vertical et parallèle au plan vertical de projection, et viendra se rabattre en M sur une parallèle mM à la ligne de terre. La normale sera rabattue en iM , et, en la prolongeant, on obtiendra en N le rabattement du point où elle perce l'extrados. Il restera à relever le point N; pour cela, on le projettera en N' sur la ligne de terre; on décrira du point O' comme centre, l'arc $N'n'$ terminé à la rencontre de la droite $O'm'$ prolongée; puis on abaissera du point n' une perpendiculaire à la ligne de terre, terminée au prolongement de im , en n . Le point n, n' sera celui où la normale considérée perce l'extrados. Comme vérification, les points N et n devront être sur une parallèle à XY. On opérera de la même manière pour les autres normales, et, en joignant les points obtenus par une courbe, on aura les projections de l'intersection de l'extrados avec le joint gauche correspondant à l'arête de douelle $l'1'' - b_1a_1c_1$. L'opération sera la même pour les autres joints gauches.

On forme les joints montants par des plans verticaux normaux à l'arête de douelle inférieure de chaque assise. Chacun de ces plans coupe, par conséquent, suivant une ligne droite, le joint gauche inférieur de l'assise à laquelle il correspond; mais il coupe le joint supérieur suivant une ligne courbe; car deux arêtes de douelle consécutives, b_1a_1 et b_2a_2 , par exemple, n'ont d'autres normales communes que OB et OA. La droite mi , normale à b_1a_1 , n'est point normale à b_2a_2 ; ainsi, un plan vertical mené suivant mi passerait par une génératrice du joint gauche correspondant à b_1a_1 , mais il ne contiendrait aucune génératrice du joint gauche supérieur, correspondant à b_2a_2 ; il couperait donc ce joint suivant une ligne courbe. Pour l'obtenir, il faut chercher les points où les génératrices du joint gauche supérieur rencontrent le plan vertical mi qui forme le joint montant. Cette recherche n'offre aucune difficulté: trois points suffiront, en général, pour déterminer la courbe, toujours peu différente d'une ligne droite.

Avant de procéder à la taille des voussoirs, il est encore indispensable de se procurer les *panneaux de tête*, c'est-à-dire, dans le cas actuel, les intersections de chaque assise par les joints montants qui la divisent en voussoirs. Pour cela, il faudra construire l'intersection de chaque joint montant avec les surfaces d'intrados et d'extrados. Si l'on considère, par exemple, le joint montant dont la trace horizontale est mp , on voit qu'il rencontre l'intrados aux points m, m' et p, p' ; l'arc d'ellipse suivant lequel il coupe cette surface se projette donc horizontalement en mp , et verticalement suivant un arc d'ellipse $m'p'$, dont on obtiendra autant de points intermédiaires qu'on voudra en menant des plans horizontaux entre $l'1''$ et $2'2''$, lesquels couperont l'intrados suivant des ellipses semblables, dont les projections horizontales seront intermédiaires entre $b_1a_1c_1$ et $b_2a_2c_2$. On obtiendra de même la projection verticale $n'q'$ de l'arc d'ellipse suivant lequel le même joint coupe l'extrados. Cela posé, on construira de la manière suivante le panneau de tête répondant à ce joint montant. Sur une droite indéfinie, on portera, à partir d'un point déterminé i (fig. 3), les longueurs ip, iq, im, in , respectivement égales à celles qui portent le même nom sur la figure 2, et par les points p, q, m, n , on

élèvera des perpendiculaires sur lesquelles on portera les distances pP, qQ, nN , respectivement égales aux hauteurs des points p', q', n' de la figure 2 au-dessus de l'horizontale $l'1''$; on joindra mN par une

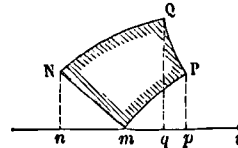


Fig. 3.

droite, mP et NQ par des arcs d'ellipses, dont on se procurera aisément des points intermédiaires; enfin, on joindra PQ par un arc de courbe dont il sera également facile de se procurer des points intermédiaires en se servant de l'arc $p'q'$, projection verticale de la courbe suivant laquelle le joint montant considéré coupe le joint gauche supérieur de l'assise. On tracera de la même manière le panneau de tête opposé appartenant au même voussoir. Soit maintenant $\pi\chi\mu\nu$ (fig. 2) la trace du second joint montant. On préparera un prisme de pierre ayant pour base la figure $\eta\rho\pi\nu$ et une hauteur suffisante. Sur les faces verticales répondant à $\eta\rho$ et à $\nu\pi$, on appliquera les deux panneaux de tête. Sur la base inférieure, on tracera l'arc $m\mu$ donné par la projection horizontale. Sur la face cylindrique répondant à $p\pi$, on tracera à la règle ployante l'arc horizontal dont $p\pi$ est la projection; et sur la surface cylindrique répondant à $\nu\pi$, on tracera, par points, la courbe à double courbure, dont $\nu\pi$ est la projection horizontale (la projection verticale est supposée construite; on ne l'a point marquée sur l'épure). On pourrait même construire à l'avance un panneau flexible qui, appliqué sur la surface cylindrique convexe, donnerait la courbe à double courbure dont il s'agit. Cette courbe et l'arc d'ellipse tracé sur la base inférieure du prisme serviront à tailler le joint gauche inférieur; les extrémités des normales qui auront servi à construire l'intersection de ce joint avec l'extrados serviront de points de repère pour poser la règle. La douelle comprise entre les arcs d'ellipses $m\mu, l'1''$ et $p\pi, 2'2''$ se taillera au moyen d'un certain nombre de cerces horizontales taillées sur les ellipses intermédiaires entre $m\mu$ et $p\pi$. Pour tailler le joint gauche supérieur, il faudrait se servir, comme directrices, de l'ellipse $p\pi, 2'2''$ et de la courbe à double courbure, intersection de ce joint gauche avec l'extrados; mais il sera plus commode de remplacer cette seconde courbe par l'intersection de ce même joint avec la base supérieure du prisme, intersection facile à construire. Il restera ainsi un excédant de pierre à l'extrados; mais on pourra le faire disparaître après coup, quand l'assise suivante sera posée, en dégrossissant la surface de l'extrados à l'aide d'une cerce concave préparée sur la section méridienne.

IV. La marche qu'on vient d'indiquer est rigoureuse; elle a l'avantage d'éviter les angles aigus; mais elle est pénible et peu pratique. Aussi préfère-t-on sacrifier un peu la rigueur pour obtenir un appareil d'une exécution plus facile. On emploie pour cela plusieurs méthodes.

Une des plus usitées consiste à prendre pour joint de lit un cône dont le sommet est situé sur la verticale du centre, mais un peu au-dessous. Voici comment on détermine ce sommet. Soient BAC (fig. 4) l'é-

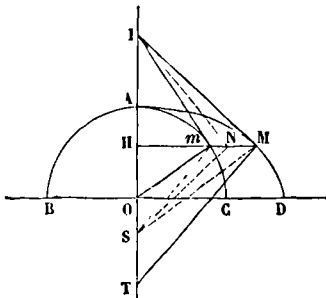


Fig. 4.

quateur de l'intrados, et AMD la moitié du méridien ramené dans le même plan en tournant autour de AO. Soit MH la trace d'un des plans horizontaux qui déterminent les arêtes de douelle; et soient m et M les points où ce plan coupe les deux courbes. D'après une propriété connue de l'ellipse, les tangentes en m et en M à ces courbes iront rencontrer le prolongement de AO en un même point I. Divisons l'angle mIM en deux parties égales, et, au point N où la bissectrice rencontre MH, menons-lui la perpendiculaire NS, terminée au prolongement de AO. Le point S sera le sommet du cône qui servira de joint de lit. Sa surface ne sera pas partout normale à l'intrados, mais elle en diffère assez peu pour que la différence soit sans inconvénient pour la stabilité de la construction. A chaque arête de douelle correspondront un sommet et un cône particuliers; mais ces surfaces jouissent d'une propriété qui rend leur emploi très-commode. D'abord chacun de ces cônes ayant pour base une section horizontale de l'intrados, semblable par conséquent à l'ellipse de naissance, sera coupé par un plan horizontal quelconque suivant une ellipse semblable. En second lieu, chacun de ces cônes coupera l'extrados suivant une ellipse semblable aux premières; en effet, si par un point de l'intersection on conçoit un plan horizontal, il coupera l'extrados et le cône suivant des ellipses semblables, semblablement placées, ayant leur centre sur la verticale du point O, et ayant de plus un point commun; c'est-à-dire que ces ellipses coïncideront; donc, l'intersection des deux surfaces n'est autre chose que cette ellipse. On prendra pour joints montants des plans verticaux normaux à l'ellipse de naissance de l'intrados ou à l'ellipse intermédiaire entre deux arêtes de douelles consécutives. Chaque joint montant coupera les joints coniques inférieur et supérieur suivant des arcs d'hyperboles faciles à construire, et les surfaces d'intrados et d'extrados suivant des arcs d'ellipses qu'on déterminera également sans difficulté. On construira les panneaux de tête comme il a été dit ci-dessus, et la taille des voussoirs se fera d'après les mêmes principes: on préparera un prisme de pierre sur la projection horizontale du voussoir, en lui donnant pour hauteur la distance verticale entre le plan horizontal qui détermine l'arête de douelle inférieure et celui qui contient l'intersection du joint

conique supérieur avec l'extrados; sur les faces planes latérales, on appliquera les panneaux de tête; sur la base inférieure, on tracera l'arc analogue à mp de la figure 2; sur la base supérieure, l'arc analogue à qx ; sur la surface cylindrique concave, l'arc analogue à px , et sur la surface cylindrique convexe, l'arc analogue à nv . Le premier et le quatrième serviront de directrices pour tailler le joint conique inférieur; le second et le troisième serviront à tailler le joint conique supérieur; la douelle se taillera avec des cerces horizontales comme il a été dit ci-dessus; l'extrados pourrait se tailler avec des cerces concaves, mais on se contentera de le dégrossir.

Si les axes de la section méridienne étaient très-inégaux, il arriverait que certaines génératrices de chacun des cônes considérés ci-dessus rencontreraient l'intrados sous des angles notablement différents de l'angle droit. On peut atténuer ce défaut en modifiant comme il suit la méthode. Imaginons par la verticale du centre une série de plans; ils détermineront dans l'intrados autant de sections elliptiques qui auront pour axe commun le rayon de l'équateur. Considérons dans ces ellipses les points qui appartiennent à une même arête de douelle; les tangentes menées par ces points aux sections elliptiques correspondantes iront toutes se couper en un même point de la verticale du centre. On pourra donc faire pour deux de ces sections consécutives quelconques la construction indiquée ci-dessus pour la section équatoriale et la section méridienne. C'est-à-dire qu'au lieu d'un cône unique, on emploiera un cône particulier pour chacun des arcs de l'arête de douelle compris entre deux sections consécutives. Pour avoir le sommet du cône correspondant à l'un de ces arcs, on mènera par ses extrémités et par la verticale du centre deux plans, qui couperont l'intrados suivant deux ellipses que l'on pourra, pour plus de commodité, rabattre dans le plan de l'équateur; on mènera, par les extrémités de l'arc considéré, des normales à ces ellipses; elles rencontreront la verticale du centre en des points différents; on prendra sur cette verticale un troisième point intermédiaire entre les deux premiers: ce sera le sommet du cône. Il est clair, en effet, que, dans l'étendue de l'arc que l'on considère, les génératrices de ce cône différeront ainsi très-peu d'être normales à l'intrados. Les surfaces coniques ainsi employées différeront d'autant moins d'être normales à l'intrados qu'elles seront plus nombreuses. Cette méthode présente néanmoins un inconvénient: comme les joints montants alternent d'une assise à la suivante, et qu'il est naturel de faire coïncider les changements des cônes avec les

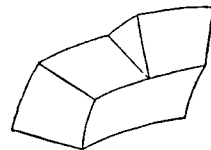


Fig. 5.

joints montants, il arrivera que le joint supérieur de chaque voussoir sera formé de deux cônes distincts, et présentera par conséquent un ressaut brusque, comme l'indique la figure 5. Les vous-

soirs offriront ainsi des angles rentrants, difficiles à exécuter avec précision.

Parmi les autres méthodes qu'on pourrait employer, nous citerons encore la suivante, bien qu'il ne paraisse pas qu'elle ait été jamais appliquée; mais elle est ingénieuse et satisfait à toutes les conditions pratiques que l'on doit s'imposer en traitant le problème qui nous occupe. Soient ACB (fig. 6) l'ellipse de naissance de l'intrados, et $A'HB'$ la projection verticale de la section méridienne verticale de la surface. Soit $a'b'$ la trace d'un plan horizontal déterminant une arête de douelle qui se projette horizontalement suivant l'ellipse $amnb$. Soient

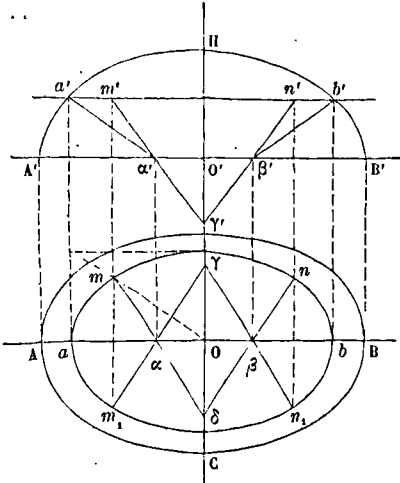


Fig. 6.

m, n, n_1, m_1 , les quatre sommets d'un rectangle inscrit à cette ellipse. Menons les normales $m\alpha\delta, n\beta\delta, n_1\beta\gamma, m_1\alpha\gamma$. Soient m' et n' les projections verticales des points de l'intrados qui se projettent horizontalement en m, n, m_1, n_1 ; et soient α' et β' les projections verticales des points α et β . Joignons enfin $m'\alpha'$ et $n'\beta'$, qui se rencontreront en γ' sur le prolongement de HO' . Pour l'arc de l'arête de douelle qui se projette en mam_1 , on prendra comme joint de lit un cône ayant son sommet au point α ; pour l'arc $nbni$, on prendra comme joint de lit un cône ayant son sommet au point β ; pour l'arc mn , on prendra un cône ayant son sommet au point δ, γ' ; enfin pour l'arc m_1n_1 , on prendra un cône ayant pour sommet γ, γ' . Ces quatre surfaces coniques se raccordent deux à deux suivant les génératrices qui ont pour projections $m\alpha\delta, m'\alpha'\gamma'$, ou $n\beta\delta, n'\beta'\gamma'$, ou $n_1\beta\gamma, n'\beta'\gamma'$, ou enfin $m_1\alpha\gamma, m'\alpha'\gamma'$. Pour toute la partie de l'assise répondant à mam_1 , on adoptera comme joints montants des plans verticaux passant par le point α ; pour la portion mn , on fera passer les joints montants par le point δ ; pour la portion $nbni$, on les fera passer par le point β ; enfin pour la portion m_1n_1 on les fera passer par le point γ . Dans ce système, les joints coniques couperont l'extrados suivant des arcs d'ellipses semblables aux arcs mn, n_1n_1, n_1m_1, m_1m ; et les joints montants couperont les joints coniques suivant des génératrices. Il est facile de voir d'ailleurs que les génératrices de ces cônes s'éloigneront très-peu d'être normales à l'intrados. M. J. Adhémar, à

qui l'on doit cette ingénieuse méthode, choisit pour le point m celui dont les coordonnées par rapport aux axes de l'ellipse sont proportionnelles à ces axes, et qui se trouve par conséquent sur la diagonale du rectangle circonscrit à l'ellipse et dont les côtés sont parallèles aux axes.

V. Cette méthode s'appliquerait encore dans le cas, d'ailleurs très-rare, où l'intrados serait un ellipsoïde à 3 axes inégaux. On pourrait aussi, dans le cas de l'ellipsoïde à 3 axes, se servir de la méthode exposée plus haut, dans laquelle la voûte étant appareillée par assises horizontales, on prend pour joints de lit une série de cônes ayant leur sommet sur la verticale du centre, et qui changent d'un voussoir à l'autre.

Il existe, pour résoudre le premier problème, une méthode plus rigoureuse, fondée sur la considération des lignes de première et de seconde courbure. Les lignes de première courbure de l'ellipsoïde se projettent sur ses plans principaux suivant des ellipses, et les lignes de seconde courbure se projettent suivant des hyperboles. Ces courbes sont faciles à construire. Si, par exemple, a, b, c désignant le demi grand axe, le demi-axe moyen et le demi petit axe de la surface, on veut construire les projections des lignes de courbure sur le plan principal contenant les axes a et b , on construit d'abord une ellipse et une hyperbole auxiliaires ayant pour axes les quantités

$$a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{et} \quad b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

portées respectivement dans la direction de a et de b . Les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole auxiliaire sont les axes d'une des ellipses suivant lesquelles se projettent les lignes de première courbure; et les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse auxiliaire sont les axes d'une des hyperboles suivant lesquelles se projettent les lignes de seconde courbure. On construit de la même manière les projections des lignes de courbure sur le plan principal qui contient les axes b et c , en se servant d'une ellipse et d'une hyperbole auxiliaires ayant pour axes les quantités

$$b \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{et} \quad c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

On prend pour arêtes de douelle des lignes de première courbure, et les coupes correspondantes aux joints montants sont des lignes de seconde courbure, lesquelles, d'après leur propriété fondamentale, sont normales aux premières. On adopte pour surfaces de joints les surfaces gauches formées par les normales à l'ellipsoïde menées par les différents points de ces lignes de courbure. Pour se procurer chacune de ces normales, il faut, par le point correspondant, mener des tangentes aux deux lignes de courbure qui passent par ce point, conduire un plan par ces deux tangentes, et mener une perpendiculaire à ce plan. Il faut ensuite déterminer l'intersection de cette normale avec la surface d'extrados, ce qui se fait en menant par cette normale un plan perpendiculaire au plan vertical de projection; le plan ainsi mené coupe l'extrados suivant une ellipse dont on détermine les axes en faisant une section parallèle passant par le centre. On voit à quelles opérations conduit la détermination d'une seule normale, et la complication

qu'entraîne la construction de toutes les normales nécessaires pour déterminer suffisamment les joints. La taille des voussoirs n'est pas moins compliquée; il faut, après avoir préparé un prisme capable d'après les projections horizontale et verticale, prolonger les surfaces de joint jusqu'à la rencontre des faces de ce prisme, afin de pouvoir tailler ces surfaces à la règle; la douelle se taille ensuite à l'aide d'un certain nombre de cerces préparées d'avance; l'extrados pourrait aussi se tailler à l'aide de cerces concaves, si l'on ne se contentait pas de dégrossir cette surface.

On trouvera, dans les traités de coupe des pierres, le développement de cette méthode, qui n'est qu'un exercice de Stéréotomie, et ne paraît point susceptible d'une application réelle, non-seulement à cause de sa longueur rebutante, mais encore parce que l'appareil formé par les lignes de courbure est très-disgracieux à l'œil, et que, vu les difficultés de son exécution, il n'offrirait pas dans la pratique les garanties de stabilité que la théorie semble promettre.

VOÛTE SPHÉRIQUE, voûte dont l'intrados est une demi-sphère, reposant sur un mur circulaire; l'extrados est ordinairement une sphère de rayon plus grand dont le centre est placé un peu au-dessous de celui de l'intrados, on satisfait ainsi à la condition que la voûte ait plus d'épaisseur vers le plan de naissance qu'à la clef.

L'appareil le plus fréquemment employé pour les voûtes sphériques est le suivant :

Soient ABCDE... A' (fig. 1) la section méridienne

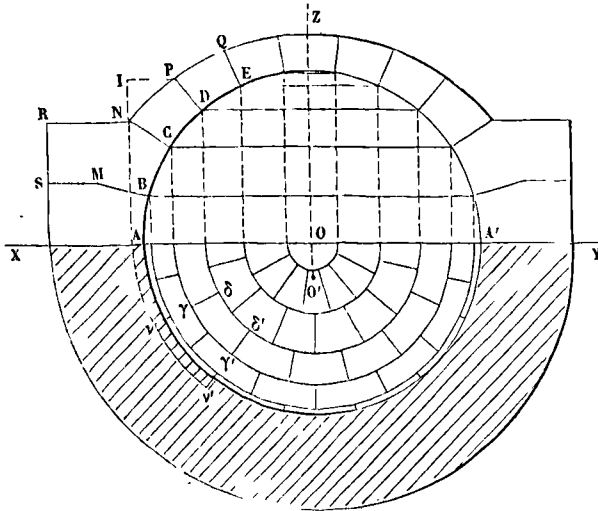


Fig. 1.

de l'intrados, O le centre de la sphère. On prend pour plan horizontal de projection le plan de naissance. Soit XY la ligne de terre; la portion de la figure placée au-dessus de XY représente la projection verticale de la voûte; la portion située au-dessous de XY représente la projection horizontale de la moitié antérieure de cette voûte. Soit NPQ... la section méridienne de l'extrados, dont le centre est en O' au-dessous du centre O. On divise la demi-circconférence ABCD... A' en un nombre impair

de parties égales, on mène des rayons aux points de division, et on les prolonge, soit jusqu'à l'extrados, comme EQ, DP, CN, soit jusqu'aux joints de lit des assises horizontales inférieures, comme MB. Concevons maintenant que la figure supérieure tourne autour de la verticale OZ qui passe par le centre; les points B, C, D, etc., décriront des cercles horizontaux qui formeront les arêtes de douelle; les portions de rayons MB, N', PQ, QE engendreront des surfaces coniques qui formeront les joints de lit. La voûte se trouvera ainsi divisée en un certain nombre d'anneaux horizontaux formant autant d'assises. On divisera chacune d'elles en voussoirs par des plans méridiens, dont la disposition est figurée sur la projection horizontale; ces plans forment les joints montants; ils alternent d'une assise à l'autre, de manière que le joint qui sépare deux voussoirs successifs d'une même assise corresponde au milieu d'un voussoir de l'assise supérieure ou inférieure. La dernière assise est formée d'une seule pierre qui constitue la clef de la voûte.

Du reste, une voûte sphérique appareillée de la sorte jouit de la propriété de se maintenir en équilibre sans le secours de la clef; et l'on peut même supprimer un certain nombre d'assises supérieures sans que les assises inférieures cessent d'être en équilibre, pourvu qu'elles soient complètes. Cette propriété permet de réserver une ouverture à la partie supérieure pour éclairer le local que la voûte recouvre.

Les plans méridiens qui forment les joints montants coupent l'intrados suivant des grands cercles qui se projettent verticalement suivant des ellipses; on se dispense ordinairement de tracer ces ellipses, attendu qu'elles ne sont d'aucun secours pour l'application du trait sur la pierre.

On emploie pour tailler les voussoirs plusieurs méthodes différentes. Supposons qu'il s'agisse du voussoir qui a pour section méridienne CDPN, et qui se projette horizontalement en $\delta\delta'\nu'$. On peut d'abord préparer un prisme droit ayant pour base cette projection horizontale et pour hauteur la distance verticale des points C et P. Soit $\nu\delta\delta'\nu'\mu'\epsilon'\epsilon'\mu'$ (fig. 2) ce prisme. Sur les faces $\delta\mu$ et $\delta'\mu'$ correspondantes aux joints montants, on appliquera les panneaux CDPN, C'D'P'N', égaux à la section méridienne. En promenant sur la face horizontale supérieure une ouverture de compas égale à

$\epsilon\epsilon'$, de manière que l'une des branches suive l'arc $\epsilon\epsilon'$ et que le plan des deux branches reste normal à cet arc, on tracera l'arc concentrique PP'; on tracera de même sur la face horizontale inférieure l'arc CC' concentrique à $\delta\delta'$. A l'aide d'une règle ployante, on tracera sur la surface cylindrique concave l'arc DD' égal à $\delta\delta'$, et sur la surface convexe l'arc NN' égal à $\nu\nu'$. Cela fait, ayant divisé en un même nombre de parties égales les arcs DD' et PP', on taillera le joint conique supérieur DD'P'P à l'aide d'une règle

posée sur les points de division correspondants. On taillera de même le joint conique inférieur $CC'N'N$. Il restera à tailler la face d'intrados et la face d'extrados. Pour tailler la première, ayant divisé les

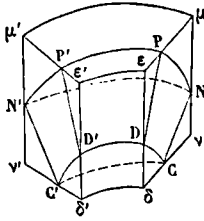


Fig. 2.

arcs CC' et DD' en un même nombre de parties égales, pour la taille des joints coniques, on enlèvera l'excédant de pierre, en s'assurant, à l'aide d'une CERCE (Voy. ce mot) taillée sur l'arc CD de la figure 1, que la surface obtenue peut être considérée comme engendrée par le contour de cette cerce; il suffit pour cela de poser la cerce sur les points de division correspondants des deux arcs CC' et DD' en maintenant son plan normal à ces deux arcs. On pourrait, à l'aide d'une cerce concave taillée sur l'arc NP de la figure 1, tailler de même la face d'extrados; mais on se contente ordinairement de la dégrossir.

Cette méthode est employée pour les premières assises inférieures; une modification facile à apercevoir permettrait de l'appliquer à un voussoir dont la section méridienne serait $BCNRSM$ (fig. 1). Mais s'il s'agissait de voussoirs appartenant à des assises plus élevées, la méthode dont il s'agit occasionnerait un trop grand déchet de pierre. On a recours à la méthode suivante, connue sous le nom de *méthode de l'écuelle*. On remarque d'abord que les quatre sommets de la douelle sphérique sont dans un même plan, puisque les cordes des deux arcs qui forment les arêtes de douelles sont parallèles entre elles; et le petit cercle qui passe par ces quatre sommets est facile à construire. En effet, les quatre sommets considérés sont aussi ceux d'un trapèze symétrique dont les côtés latéraux sont égaux à la corde de l'arc CD , et dont les bases parallèles sont les cordes des arcs $\delta\delta'$ et $\gamma\gamma'$; on peut donc construire aisément ce trapèze, et lui circoncrire un cercle qui sera le petit cercle de la sphère dont il s'agit. On dressera donc, sur la pierre qu'on aura choisie, une face plane où l'on tracera un cercle égal à celui qu'on vient de déterminer; puis on creusera la pierre de manière à lui donner la forme de la calotte sphérique qui a ce cercle pour base; on s'aidera pour cela d'une cerce taillée sur un grand cercle de la sphère. Cette calotte, qui porte le nom d'*écuelle*, sera celle dont la douelle considérée doit faire partie. Soient C_1, C_2, D_1, D_2 (fig. 3) la calotte obtenue, et C_1, C_2, D_1, D_2 les sommets du trapèze qui a servi à l'obtenir. On taillera une cerce sur l'arc $\gamma\gamma'$ de la figure 1, et en l'appuyant sur les points C_1 et C_2 on la placera de manière qu'elle coïncide avec la calotte; à l'aide de la cerce ainsi placée, on tracera sur la douelle l'arc C_1C_2 qui sera l'arc projeté suivant $\gamma\gamma'$; on obtiendra de la même manière en D_1, D_2 l'arc projeté en $\delta\delta'$; et, à l'aide d'une cerce taillée sur l'arc de

méridien CD de la figure 1, on tracera de même les arcs C_1D_1 et C_2D_2 , intersections des joints montants avec la douelle. Cela fait, on préparera un BEUVEAU (Voy. ce mot) dont une branche coïncide avec l'arc

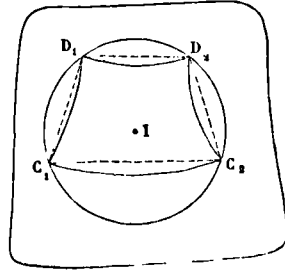


Fig. 3.



Fig. 4.

CD , et l'autre avec le rayon CN ou DP ; la figure 4 représente la forme de ce beveau. On appliquera la branche courbe sur la douelle, et, en maintenant le plan de l'instrument normal à la sphère, on le fera glisser de manière que son sommet parcoure l'arc C_1C_2 ; la branche rectiligne prendra les directions successives des génératrices du joint conique inférieur, et permettra de tailler ce joint. En lui faisant parcourir l'arc D_1D_2 , on taillera de même le joint conique supérieur. Le même beveau servira à tailler les faces planes des joints montants; il suffira de le faire glisser sur les arcs C_1D_1 et C_2D_2 . Sur ces faces planes on appliquera le panneau $CDPN$ de la figure 1, ce qui permettra de tracer les arcs appartenant à l'extrados, et de tailler approximativement cette dernière surface. Cette méthode paraît due à l'architecte Delarue.

On peut aussi faire usage de la méthode qui consiste à projeter le voussoir sur son plan vertical de symétrie et à préparer un prisme qui ait pour base cette projection. On trouvera cette méthode exposée à l'article *BERCEAU TOURNANT*. Pour l'appliquer avec exactitude au cas qui nous occupe, il faudrait opérer d'abord comme si la section méridienne $CDPN$ (fig. 1) du voussoir s'étendait jusqu'à la verticale IN et à l'horizontale IP ; on ferait ensuite sauter l'espace NIP pour tailler la surface d'extrados.

Enfin, lorsque le rayon de la sphère est suffisamment grand, 5 ou 6 mètres par exemple, et les dimensions des voussoirs petites par rapport à ce rayon, l'arc CD peut être regardé comme se confondant sensiblement avec sa corde, et la douelle sphérique avec une douelle conique; or cette douelle conique pouvant être aisément développée, fournirait un panneau flexible que l'on appliquerait sur la surface de l'écuelle pour remplacer l'emploi des cerces dans la détermination des arcs $C_1, C_2, D_1, D_2, C_1D_1, C_2D_2$ de la figure 3. Cette méthode approximative est due au P. Derand.

Le mode d'appareil que nous avons décrit ci-dessus n'est pas le seul qu'on emploie pour construire

les voûtes sphériques. La figure 5 représente un autre appareil; la partie supérieure à la droite XY est la projection verticale, et la partie inférieure à XY est la projection horizontale de la moitié antérieure

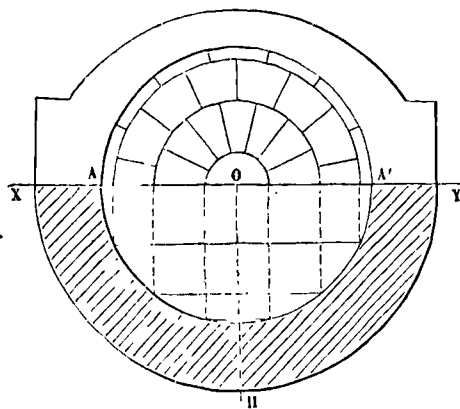


Fig. 5.

de la voûte. On voit que les arêtes de douelles sont des demi-circonférences dont les plans sont parallèles au plan vertical. Des joints coniques passant par ces circonférences et ayant pour sommet commun le centre de l'intrados divisent la voûte en demi-anneaux qui ont une position verticale; ces anneaux sont divisés en voussoirs par des plans perpendiculaires au plan vertical de projection et menés par la droite OH; ils alternent de manière que le joint plan qui sépare deux voussoirs consécutifs appartenant au même anneau corresponde au milieu d'un voussoir de l'anneau voisin antérieur ou postérieur. Le dernier anneau, contenant le point O, est formé par une pierre unique à laquelle on donne le nom de *trompillon*, par analogie avec les *TROMPES* (Voy. ce mot).

L'appareil que nous décrivons s'emploie surtout

dans les voûtes en *cul-de-four*, quarts de sphère se raccordant avec un berceau horizontal, parce que les joints plans de la voûte sphérique se raccordent aisément avec les joints de la douelle cylindrique (Voy. *BERCEAU*). De là le nom d'*appareil en cul-de-four* donné à celui que nous venons d'examiner. Cependant les voûtes en *cul-de-four* peuvent aussi recevoir l'appareil de la figure 1, dit *par assises horizontales*; ce sont alors les joints coniques de la voûte sphérique qui se raccordent avec les joints du berceau.

L'appareil en *cul-de-four* s'emploie aussi pour la *niche sphérique*, quart de sphère qui se raccorde avec un demi-cylindre à génératrices verticales (Voy. *NICHE SPHÉRIQUE*).

Dans l'appareil en *cul-de-four*, les voussoirs se taillent d'après les mêmes méthodes que dans l'appareil par assises horizontales; il n'y a de différence, en effet, entre ces deux modes d'appareil, qu'en ce que les deux projections y changent de rôle. Si l'on renversait l'appareil par assises horizontales, de manière que son axe vertical vint prendre la position horizontale, on aurait l'*appareil en cul-de-four*.

Il existe encore un autre mode d'appareil, connu sous le nom d'*appareil par enfourchement*, et qui consiste à diviser la sphère par deux systèmes de plans verticaux parallèles aux côtés du carré inscrit dans le cercle de naissance, ou parallèles aux diagonales de ce carré. On trouvera dans le *Traité de Stéréotomie* de Leroy, p. 276, et dans le *Traité de la Coupe des pierres* de J. Adhémar, p. 191 et suivantes, les détails relatifs à cet appareil, qui doit être proscrit des constructions importantes à cause de son peu de solidité et du déchet de matériaux que nécessite la taille des voussoirs.

VOYANT, plaque rectangulaire en fer-blanc ou en bois, peinte de deux couleurs et qui glisse le long d'une *MIRE* (Voy. ce mot) et peut y être fixée par une vis. On donne aussi ce nom à une plaque analogue dont on surmonte les *JALONS* principaux sur une ligne jalonnée (Voy. *JALONS*).

W

WAGONS, voitures qui circulent sur les chemins de fer, et dont les roues ont un rebord du côté interne de la voie (Voy. *CHEMINS DE FER*).

WARRANT, récépissé délivré à un commerçant pour des marchandises déposées dans un entrepôt.

Ce récépissé est un effet négociable, dont la valeur est *garantie* par les marchandises déposées (d'où le nom de *warrant*, mot anglais qui n'est autre que le français *garant*).

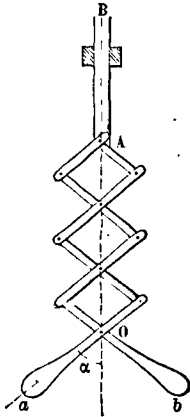
Z

ZÉNITH (mot arabe), point de la sphère céleste où elle est rencontrée par la verticale du lieu. L'extrémité opposée du même diamètre céleste est le *NADIR*.

ZIGZAG, système articulé qui sert à transformer un double mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif. Il se compose d'une série de losanges égaux articulés à leurs sommets.

Le premier sommet O est fixe et le dernier A est articulé à l'extrémité d'une tige AB mobile, entre des guides, dans la direction de OA. En agissant simultanément sur les deux poignées a et b pour les rapprocher ou pour les écarter, on fait mouvoir la tige de A vers B, ou de B vers A. Soient l la longueur du côté d'un losange, n le nombre de ces losanges, et α l'angle αOX que fait, à un instant

quelconque, la direction Oa de l'une des poignées avec le prolongement OX de la direction OA . La longueur OA , que nous représenterons par x , est la somme des diagonales des losanges; or la moi-



tié d'une quelconque de ces diagonales est exprimée par $l \cos \alpha$. On a donc

$$x = 2nl \cos \alpha.$$

En différentiant par rapport au temps, désignant par v la vitesse du point A et par ω la vitesse angulaire de la poignée, ou $-\frac{d\alpha}{dt}$, attendu que l'angle α diminue quand le temps t et la longueur x augmentent, on obtient

$$v = + 2nl\omega \sin \alpha.$$

On voit que la vitesse du point A augmente et diminue dans le même sens que α . Cet angle ne peut prendre exactement les valeurs 0 et 90 degrés à cause de la largeur des pièces articulées. Il varie depuis une valeur un peu supérieure à zéro jusqu'à une valeur un peu inférieure à 90 degrés.

ZODIAQUE (du grec ζώδιον, animal), zone de la sphère céleste qui s'étend à $8^\circ \frac{1}{2}$ de chaque côté de l'écliptique, et dans laquelle se meuvent les planètes. Les anciens avaient divisé cette zone à partir de l'équinoxe du printemps, et dans le sens du mouvement propre du Soleil, en douze parties égales appelées *signes*, embrassant chacun 30 degrés, et correspondant à autant de **CONSTELLATIONS** (Voy. ce mot) dont ils avaient pris les noms. Voici les noms de ces signes, avec les symboles par lesquels ils étaient représentés :

Le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, le Cancer,

♈ ♉ ♊ ♋

le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le

♌ ♍ ♎ ♏

Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons.

♐ ♑ ♒ ♓

Les vers mnémoniques suivants contiennent éga-

lement les noms et l'ordre des signes du zodiaque :

Sunt Aries, Taurus, Gemin', Cancer, Leo, Virgo, Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Par suite de la **PRÉCESSION DES ÉQUINOXES** (Voy. ce mot), les signes du zodiaque, comptés toujours à partir du point vernal, ne correspondent plus aux constellations dont ils portent le nom : l'équinoxe du printemps se trouve aujourd'hui dans la constellation des Poissons. Le point équinoxial ayant un mouvement rétrograde, qui est de $50'',2$ par an, a reculé d'un signe ou de 30 degrés dans un temps marqué par le quotient de ces deux nombres, ou

$$\text{en un nombre d'années égal à } \frac{108000''}{50'',2}, \text{ c'est-à-dire}$$

en 2151 ans environ. Il faudrait une période de 26000 ans pour rétablir la coïncidence entre les constellations et les signes. Malgré ce défaut de coïncidence, la division du zodiaque en signes a persisté; mais il faut bien se garder de confondre ces signes avec les constellations qui portent le même nom. Au reste, on ne fait plus usage des signes eux-mêmes que comme un moyen d'indication sommaire. Dès qu'on a besoin de plus de précision, on a recours à l'emploi des longitudes.

ZONES, nom attribué d'une manière spéciale aux cinq parties dans lesquelles la surface terrestre se trouve divisée par les TROPIQUES et les CERCLES POLAIRES (Voy. ces mots). La zone comprise entre les tropiques est la *zone torride*. Son étendue, dans le sens des méridiens, est de deux fois $23^\circ 28'$ environ, c'est-à-dire de $46^\circ 56'$. Les zones comprises entre chaque tropique et le cercle polaire correspondant sont les *zones tempérées*. L'étendue de chacune d'elles est la différence entre 90 degrés et deux fois $23^\circ 28'$, c'est-à-dire $43^\circ 4'$. Celle qui se trouve dans l'hémisphère boréal est la *zone tempérée septentrionale*; celle qui se trouve dans l'hémisphère austral est la *zone tempérée méridionale*. Les zones ou calottes sphériques limitées par chaque cercle polaire sont les *zones glaciales*. L'étendue de chacune dans le sens du méridien n'est que de $23^\circ 28'$.

Les superficies de ces zones étant proportionnelles à leur hauteur, on reconnaît aisément qu'en désignant par α l'angle de $23^\circ 28'$, les superficies d'une zone glaciale, d'une zone tempérée et de la zone torride sont proportionnelles à

$$1 - \cos \alpha, \quad \cos \alpha - \sin \alpha \quad \text{et} \quad 2 \sin \alpha;$$

en mettant pour α sa valeur et effectuant les calculs, on obtient les nombres

$$0,08271, \quad 0,51908, \quad 0,79642,$$

sensiblement proportionnels à 2, 13 et 20. Ainsi, la surface du globe étant représentée par 100, la superficie de chaque zone glaciale est représentée par 4, celle de chaque zone tempérée par 26, et celle de la zone torride par 40.

FIN.

INDEX DES ARTICLES

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

ARCHITECTURE.

Abaque.	Ceinture.	Empatement.	Mezzanine.	Refend (Mar de).
Alette.	Chaîne de pierres.	Encorbellement.	Modillons.	Refends.
Annelets.	Chambranle.	Entablement.	Module.	Scotie.
Arcade.	Chapiteau.	Entre-colonnement.	Moulires.	Seuil.
Architecture.	Cimaise.	Fenêtre.	Mutules.	Singier.
Archivolte.	Colonnade.	Feuillure.	Ogive.	Socle.
Arcs doubleaux.	Colonne.	Filet.	Ordres d'architecture.	Sommiers.
Astragale.	Composite.	Frise.	Orle.	Soubassement.
Atticurgues.	Congé.	Fronton.	Ove.	Stéréobate.
Attique.	Console.	Fût.	Parquetage.	Stylobate.
Avant-corps.	Contre-chambranle.	Galbe.	Pas.	Tableau.
Baguette.	Corbeau.	Gorges.	Piédestal.	Tailloir.
Balustrade.	Coupole.	Gouttes.	Piédouche.	Tallon.
Bandeau.	Crossette.	Imposte.	Piédroits.	Tore.
Base.	Dé.	Ionique (Ordre).	Pignon.	Triglyphes.
Bossages.	Denticules.	Jambage.	Pilastre.	Trumeau.
Caissons.	Dôme.	Lambourdes.	Plate-bande.	Tympan.
Campane.	Dômes tors.	Larmier.	Plinthe.	Vantail.
Cannelures.	Dorique (Ordre).	Linteau.	Porte.	Vase.
Caulicoles.	Doucine.	Listel.	Portique.	Vermiculaire.
Cavet.	Ébrasement.	Métopes.	Quart de rond.	Volute.

ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE OU COMMERCIALE.

Abaque.	Centimètre.	Écu.	Livre (monnaies).	Once.
Amortissement.	Change.	Effets de commerce.	Louis.	Percbe.
Annuité.	Commune (Faire une).	Endossement.	Mandat.	Pinte.
Arbitrage.	Comptes courants.	Escompte.	Marc.	Pistole.
Are.	Conversion des mesures.	Franc.	Métaux précieux.	Poids et mesures.
Arithmomètre.	Crédit.	Gramme.	Méthode directe.	Population.
Arpent.	Crédit foncier.	Hectare.	Méthode hambourgeoise.	Remises.
Aune.	Débit.	Hectogramme.	Méthode rétrograde.	Rente.
Aval.	Décagramme.	Hectolitre.	Mètre.	Report.
Balance.	Décalitre.	Hectomètre.	Milligramme.	Setier.
Billet à ordre.	Décimètre.	Intérêt simple.	Millilivre.	Solive.
Boisseau.	Décastère.	Intérêts composés.	Millimètre.	Stère.
Boulier compteur.	Décigramme.	Itinéraires (Mesures).	Monnaies de compte.	Système métrique.
Caisse d'amortissement.	Déclilivre.	Karat.	Monnaies étrangères.	Tenue des livres.
Capital.	Décime.	Kilogramme.	Monnaies françaises.	Titre.
Carat.	Décimètre.	Kilolitre.	Muid.	Toise.
Centiare.	Décistère.	Kilomètre.	Myriagramme.	Tonne.
Centigramme.	Déport.	Lettre de change.	Myriamètre.	Tonneau métrique.
Centilitre.	Dotation.	Lieue.	Nombres rouges.	Traite.
Centime.	Échéance commune.	Litre.	Obligations.	Usance.
		Livre (poids).		Warrant.

ARPENTAGE.

Alidade.	Déclinatoire.	Jalon.	Pantomètre.	Registre de nivellement.
Arpentage.	Équerre d'arpenteur.	Jalonner.	Partage des terres.	Tenue des livres.
Base productive.	Équerre graphomètre.	Ligne de foi.	Pinnules.	Teintes conventionnelles.
Boussole.	Graphomètre.	Lunette.	Planchette.	Vision.
Chaîne d'arpenteur.	Intersection de deux droites jalonnées.	Mire.	Pointé.	Voyant.
Cultellation.		Niveau		

ARTILLERIE.

Amplitude du jet.	Coefficient de régularité.	Formule de Rumfort.	Pendule électro-balistique.	Projectiles (Mouvement des).
Armes rayées.	Coton-poudre.	Gravimétriques.	Pénétration des projectiles.	Projectiles creux.
Balance à moments.	Crans de mire.	Hausse.	Piles de boulets.	Pyroxyle.
Balistique.	Déviations.	Inflammation de la poudre.	Pointage.	Recul.
Balistique intérieure.	Éprouvette.	Ligne de miro.	Point d'impact.	Ricochet (Tir à).
Bourrelet en tulipe.	Étoile mobile.	Lunette.	Portée.	Tables de tir.
Bouton de culasse.	Force absolue de la poudre.	Mortier-éprouvette.	Poudre (prop. balist.)	Tournant.
But en blanc.		Pendule balistique.	Probabilité du tir.	Trajectoires.
Canon-pendule.				Volée.
Canons rayés.				

BANQUE.

Action.	Actions du Crédit mobilier.	Commune (Faire une).	Marchés à prime.	Obligations foncières.
Actions de la Banque.	Actions industrielles.	Crédit foncier.	Marchés à terme.	Opérations de banque.
Actions du Comptoir d'escompte.	Amortissement.	Déport.	Marchés au comptant.	Opérations de bourse.
Actions du Crédit foncier.	Banque.	Escompte.	Marchés fermes.	Ordres de banque.
	Billet à ordre.	Fonds étrangers.	Obligations.	Rente.
	Change.	Intérêt simple.	Obligations de la ville de Paris.	Report.
		Intérêts composés		Warrant.

CHARPENTE.

Aisselier.	Croupe biaise.	Faux entrain.	Linteau.	Planchers.
Appentis.	Croupe droite.	Faux limon.	Long-pan.	Poinçon.
Arbalétrier.	Cuvette.	Ferme couchée.	Lucarne.	Ponts.
Arc de cloître.	Débillardement.	Ferme sous faite.	Lunettes en charpente.	Ponts biais.
Arêtier.	Décharge.	Fermes.	Main-courante.	Poteau cornier.
Assemblages.	Déjoutement.	Giron.	Marche palière.	Poteau d'huissierie.
Balancement.	Écart.	Gousset.	Moises.	Potelet.
Blochot.	Echarpe.	Guette.	Mortaise.	Poutres armées.
Chanlate.	Echiffre.	Guitare.	Noe.	Poutres d'assemblage.
Chantignole.	Embrèvement.	Herse.	Noulet.	Poutres en treillis.
Charpente.	Emmarchement.	Houlice.	Noyau d'assemblage.	Queue d'hironde.
Chevêtres.	Empanon déversé.	Jambe de force.	Noyau d'escalier.	Sablière.
Chevrons.	Empanons.	Jambette.	Occupation.	Tasseaux.
Chevrons empanons.	Enchevêtrement.	Lambourdes.	Panne de brisis.	Teron.
Cintre.	Enrayure.	Lierne.	Pannes.	Tirant.
Contrefiche.	Entaille.	Ligne d'about.	Pans de bois.	Tournisse.
Corbeau.	Entrait.	Ligne de couronnement.	Pièces de pont.	Trait.
Courbe de pose.	Enture.	Ligne de fatte.	Piqués de bois.	Travées.
Courbe des pressions.	Escaliers.	Ligne de foulée.	Plan de latis.	Treillis.
Courbe rampante.	Etelon.	Ligne de gorge.	Plans de déjoutement.	Trompes en charpente.
Coyau.	Falstage.	Limon.	Plans d'angueulement.	Volée.
Coyer.	Falte.	Linoir		Voûte d'arête.
Croupe.	Faux comble.			

CHEMINS DE FER.

Aiguilles.	Galop (Mouvement de).	Poteaux indicateurs.	Régulateur à papillon.	Tachomètre.
Ballast.	Lacet (Mouvement de).	Puits.	Roues couplées.	Tonne.
Chariots de service.	Locomotive.	Rails.	Système Arnoux.	Traction des convois.
Chemins de fer.	Plans automoteurs.	Règles de M. le Châtelier.	Système atmosphérique.	Tunnel.
Frein.	Plaques tournantes.			Wagons.

CONSTRUCTION NAVALE.

Accastillage.	Barre d'hourdy.	Carlingue.	Coque.	Écarver.
Allonge d'estain.	Barre de pont.	Centre de carène.	Couples.	Échelle de solidité.
Allonges.	Barres d'arçasse.	Centre de système.	Courbe de déplacement.	Elaancement.
Allonges d'écubier.	Bau.	Centre de voilure.	Courbe d'étambot.	Entre-pont.
Allonges de voûte.	Beaupré.	Centre vélique.	Courbe métacentrique.	Épouille.
Apôtres.	Bordages.	Clin-foc.		Équerrages.
Arçasse.	Bordé.	Collis.		Etain.
Artimon.	Bouge.	Construction navale.	Déplacement.	Étambot.
Bâbord.	Bout-dehors.	Contre-étambot.	Devis de construction.	Étrave.
Balancement.	Brigantine.	Contre-étrave.	Écart.	Exposant de charge.
Banquière.	Carène.	Contre-quille.		Fausse quille.

Faux étambot.	Hune.	Maitre couple.	Perroquet.	Tableau de déplacement.
Faux pont.	Hunier.	Maitresse partie.	Plat-bord.	Tirant d'eau.
Foc.	Jambettes.	Massif d'arrière.	Point vélique.	Tonnage.
Fourcat.	Jaugeage des navires.	Mature.	Ponts.	Tonneau d'arrimage.
Fourrure de gouttière.	Jaumière.	Métiocrer.	Poupe.	Tonture.
Gabariage.	Kakatoës.	Métacentre.	Précinte.	Triord.
Gabarit.	Latitudinal.	Misaine.	Proue.	Vaigrags.
Gaillard.	Ligne d'eau.	Œuvres mortes.	Quart de nonant.	Varangue.
Gouvernail.	Ligne de flottaison.	Œuvres vives.	Quenouillettes.	Vergues.
Grand mât.	Ligne de science.	Onglets (Méth. des).	Quête.	Vibord.
Habitacle.	Lisses.	Perpendiculaire arrière.	Râblure.	Virure.
Hanche.	Livet de pont.	Perpendiculaire avant.	Sabord.	Voiles.
Haubans.	Longitudinal.	Perpignage.	Tableau.	Voute

CONSTRUCTIONS CIVILES.

Appentis.	Contre-forts.	Intrados.	Naissances.	Revêtements.
Arbalétrier.	Coupe des pierres.	Joint de rupture.	Paliers.	Sapine.
Architecture.	Coussinets (ponts biai).	Ligne de naissance.	Parquetage.	Scies à recevoir.
Assise.	Echafaudages.	Main-courante.	Planchers.	Soutènement (Mur de).
Berceau.	Egouts.	Massif d'amarie.	Poids spécifiques.	Talus naturel.
Carrelage.	Etrésillons.	Montée.	Potrail.	Tympan.
Chaîne de pierres.	Fruit.	Murs de soutènement.	Refend (Mur de).	Voutes.
Charpente.	Hauteur sous clef.		Résistance des matériaux.	
Comble.				

COSMOGRAPHIE.

Aberration.	Connaissance des temps.	Évection.	Lunette méridienne.	Poissons.
Accélération des fixes.	Constellation.	Excentricité.	Mappemonde céleste.	Pôles du monde.
Alignements (Méthode des).	Conversion des temps.	Figuratives (Cartes).	Marée.	Prarial.
Almicantarat.	Coordonnées azimutales.	Floréal.	Mars.	Précession.
Amplitude d'un astre.	Coordonnées géographiques.	Flot.	Mercur.	Quadratures.
Analemme.	Coordonnées horaires.	Flux.	Méridien.	Reflux.
Angle de position.	Coordonnées sphériques rectangles.	Frimaire.	Méridienne.	Rétrogradations.
Angle horaire.	Coordonnées uranographiques.	Fructidor.	Messidor.	Révolution.
Anneau de Saturne.	Cosmographie.	Gémeaux.	Midi.	Sagittaire.
Année sidérale.	Cotidales (Courbes).	Géocentrique.	Montre des pasteurs.	Saisons.
Année tropique.	Coucher (d'un astre).	Géographie.	Mouvement diurne.	Sarus.
Anomalie.	Courbe du temps moyen.	Germinal.	Mouvement propre.	Satellites.
Anomalistique.	Crépuscule.	Globe céleste.	Nadir.	Saturne.
Antipodes.	Culmination.	Globe terrestre.	Nébuleuses.	Scorpion.
Antisciens.	Cycle lunaire.	Globulaire (Carte).	Néoménie.	Sélenographie.
Aphélie.	Cycle solaire.	Gnomon.	Neptune.	Septentrion.
Aplatissement.	Date.	Gnomonique.	Nivose.	Signes du zodiaque.
Apogée.	Déclinaison.	Gravitation.	Nœuds.	Soleil.
Appulse.	Déferent (Cercle).	Hauteur d'un astre.	Nombre d'or.	Solstice.
Armillaire (Sphère).	Diamètre apparent.	Héliaque.	Nonagésime.	Sphère armillaire.
Ascension droite.	Digression.	Héliocentrique.	Nord.	Sphère céleste.
Asciens.	Différence ascensionnelle.	Hémisphère.	Nutation.	Stations.
Aspects.	Distance polaire.	Heure sidérale.	Occident.	Stéréographique.
Attraction universelle.	Distance zénithale.	Homalographique (Canevas).	Occultation.	Systèmes astronomiques.
Axe du monde.	Distance zénithale.	Horizon.	Opposition.	Syzygies.
Azimat.	Distance zénithale.	Illumination (d'un cadran solaire).	Orbite.	Taureau.
Balance.	Distance zénithale.	Jour.	Orbite apparente du soleil.	Tempers moyen.
Bélier.	Distance zénithale.	Jour lunaire.	Orbite terrestre.	Tempers sidéral.
Bissextile.	Distance zénithale.	Jour moyen.	Orient.	Temps vrai.
Cadran solaire.	Distance zénithale.	Jour sidéral.	Orthographique.	Terre.
Calendrier.	Distance zénithale.	Jour solaire.	Ouest.	Thermidor.
Calendrier perpétuel.	Distance zénithale.	Jours complémentaires.	Parallaxe.	Tropiques.
Cancer.	Distance zénithale.	Jupiter.	Parallèle.	Unité de hauteur.
Capricorne.	Distance zénithale.	Jusant.	Passage au méridien.	Uranographie.
Carte céleste.	Distance zénithale.	Latitude céleste.	Passage sur le disque du soleil.	Uranus.
Cartes figuratives.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Périgée.	Variation.
Cartes géographiques.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Périgée.	Vendémiaire.
Cartes marines.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Périsciens.	Vénus.
Cartes réduites.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Perpétuelle apparition.	Vernal.
Cercle mural.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Perpétuelle occultation.	Verseau.
Cercles horaires.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Perturbations.	Verticale.
Cercles polaires.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Phases.	Vierge.
Circompolaire.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Planétaires.	Vitesse de la lumière.
Colures.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Planètes.	Voie lactée.
Comètes.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Planisphère.	Zénith.
Comput ecclésiastique.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Pluviöse.	Zodiaque.
Configurations.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Point vernal.	Zones.
Conjonction.	Distance zénithale.	Latitude géographique.	Points cardinaux.	

COUPE DES PIERRES.

Appareil.	Corne de vache.	Extrados.	Murs.	Taille.
Arc de cloître.	Coupe des pierres.	Fermet.	Naissances.	Tour ronde.
Arcs doubleaux.	Coupes.	Giron.	Niche sphérique.	Trait.
Arête de douelle.	Courbe de jour.	Hauteur sous clef.	Noyau d'escalier.	Trompe.
Arétier.	Crossette.	Intrados.	Œil-de-bœuf.	Trompillon.
Arrière-voissure.	Cul-de-four.	Joints de lits.	Panneau.	Vis à jour.
Assise.	Dérobement.	Joints montants.	Parément.	Vis à noyau plein.
Balancement.	Descente.	Libage.	Parpaing.	Vis Saint-Gilles.
Berceau.	Douelle.	Ligne de foulée.	Pendentifs.	Volée.
Berceau gauche.	Douelle plate.	Ligne de naissance.	Piedroits.	Voussoir.
Berceau tournant.	Echiffre.	Limón.	Plan de naissances.	Voussure.
Beuveau.	Ecuelle (Méth. de l').	Lit de dessus.	Plate-bande.	Voûte.
Biais passé.	Emmarchement.	Lit de pose.	Plein cintre.	Voûte d'arête.
Boutisse.	Encoignure.	Lits de carrière.	Ponts biais.	Voûte d'arête en tour
Cerce.	Encorbellement.	Lunette.	Ponts en pierre.	ronde.
Ciselure.	Enfourchement.	Lunette conique.	Porte.	Voûte plate.
Clayeau.	Équarrissement.	Marche palière.	Porte conique.	Voûtes elliptiques.
Clef.	Escaliers.	Montée.	Solide capable.	Voûtes sphériques.

ÉTABLISSEMENTS DE PRÉVOYANCE.

Annuité.	Caisse d'épargne.	Caisse dotales.	Rentes viagères.	Tontines.
Assurances.	Caisse de retraite pour	Épargne (Caisse d').	Secours mutuels.	Vie moyenne
Assurances sur la vie.	la vieillesse.	Mortalité.	Somme des vivants.	Vie probable.

FORTIFICATION.

Angle diminué.	Cavalier.	Dégauchissement.	Lignes.	Plan de site.
Angle flanqué.	Cavalier de tranchée.	Demi-lune.	Lunette.	Plongée.
Attaque des places.	Chemin couvert.	Demi-place d'armes.	Magistrale.	Polygone extérieur.
Banquette.	Citadelle.	Descente de fossé.	Murs de soutene-	Polygone intérieur.
Barbacane.	Contre-batteries.	Embrasure.	ment.	Profillement.
Barbette (Tir à).	Contre-forts.	Enceinte.	Nid de pie.	Queue d'aronde.
Bastion.	Contre-gardes.	Épaulement.	Orillon.	Ravelin.
Batteries à ricochet.	Contrescarpe.	Éperon.	Ouvrage à cornes.	Redan.
Batteries de brèche.	Côté extérieur.	Escarpe.	Ouvrage à couron-	Redoute.
Batteries de côte.	Coupure.	Fausse braie.	ne.	Réduit.
Berme.	Courtine.	Flanc (d'un bastion).	Parados.	Retirade.
Blindage.	Crémallère.	Fort.	Parallèles.	Retranchement.
Blockhaus.	Crête (d'un para-	Fortification.	Parapet.	Révètements.
Boyaux de tranchée.	pet).	Fortin.	Place d'armes ren-	Ricochet (Tir à).
Camp retranché.	Cunette.	Glacis.	trante.	Tenailles.
Capitale.	Défense des places.	Gorge.	Place d'armes sail-	Terre-plein.
Caponnière.	Défilement.	Ligne de feux.	lante.	Traverses.

GÉODÉSIE.

Alidade.	Convergence des mé-	Excentricité des lu-	Ligne de foi.	Réduction à l'horizon.
Altitude.	ridiens.	nettes.	Ligne géodésique.	Réduction au centre
Analemme.	Coordonnées géographi-	Excès sphérique.	Longitude céleste.	de station.
Angle de position.	ques (Calcul des).	Figure de la terre.	Longitude géographique.	Réduction au méridien.
Angle horaire.	Coordonnées horai-	Formule de Borda.	que.	Réduction (Formules
Aplatissement.	res.	Géodésie.	de).	de).
Arcs de méridien (Mes-	Coordonnées sphéri-	Géographie.	Loupe.	Réduction des distan-
sure des).	ques rectangles.	Géomorphie.	Lunette.	ces zénithales.
Arcs de parallèle (Mes-	Coordonnées uranog-	Hauteur d'un astre.	Lunette méridienne.	Réduction d'une hau-
sure des).	raphiques.	Hauteurs correspon-	Lunette plongeante.	teur à un horizon
Arpentage.	Coucher (d'un astre).	dantes (Méthode	Méridien terrestre.	donné.
Axe optique.	Culmination.	des).	Méthode de Delam-	Réfraction astronomi-
Azimut (Correction d')	Degrés de parallèles	Héliocentrique.	bre.	que.
Azimut magnétique.	(Longueur des).	Héliomètre.	Mètre.	Réfraction géodési-
Base.	Degrés du méridien	Héliotrope.	Micromètre.	que.
Base (Correction de).	(Longueur des).	Heure (Détermination	Microscope.	Registre de nivellem-
Brasse.	Dépression.	de l').	Niveau.	ent.
Canevas trigonomé-	Différence ascension-	Horizon artificiel.	Nivellement.	Réitération.
trique.	nelle.	Hydrographie.	Nivellement sous-ma-	Repetition.
Cercle mural.	Distances géographi-	Hypsométrie.	rir.	Réticule.
Cercle répétiteur.	ques (Calcul des).	Jour.	Parallaxe.	Signaux.
Clisimètre.	Ellipsoïde terrestre.	Latitude céleste.	Perpendiculaires.	Superficie de la Terre.
Coefficient de la ré-	Equation des hau-	Latitude géographique.	Perpendiculaires à la	Théodolite.
fraction géodésique.	teurs correspondan-	Latitude (Correction	méridienne.	Théorème de Legen-
Collimateurs.	tes.	de).	Pesanteur.	dre.
Collimation.	Equation du centre.	Lentilles.	Phase (Erreur de).	Toise du Pérou.
Compensation géodé-	Equatorial.	Lever sous voiles.	Pointé.	

Topographie. Topographie hydrographique.	Triangle de position. Triangle sphéroïdique.	Triangulation. Vertical (Premier). Verticale.	Vis calantes. Vis de pression. Vis de rappel.	Vision. Voyant
--	--	--	--	--------------------------

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Alphabet.	Courbe de sortie.	Géométrie descriptive.	Paraboloïde des normales.	Représentation des corps.
Anamorphoses.	Cylindre circonscrit.	Gnomonique.	Paraboloïde normal.	Rotations (Méthode des).
Angles (Problèmes sur les).	Cylindre projetant.	Hyperboloïde de raccordement.	Pénétration.	Sections planes.
Angle trièdre (Construction de l').	Dessin géométral.	Intersection des droites et des plans.	Pénétrations de polyèdres.	Séparatrice.
Arête de rebroussement.	Développante sphérique.	Intersections de surfaces.	Pénombre.	Solide commun.
Arrachement.	Développement.	Intervalle (plans cotés).	Perspective.	Sphère circonscrite.
Axonométrique (Perspective).	Directrice.	Ligne d'horizon (perspective).	Perspective axonométrique.	Sphère inscrite.
Cadran azimutal.	Distances (Problème sur les).	Ligne d'ombre.	Perspective cavalière.	Stéréographie.
Cadran lunaire.	Échelle de pente.	Ligne géodésique.	Perspective des ombres.	Stéréotomie.
Cadran polaire.	Élévation.	Lignes de déclinaison (gnomonique.)	Plan.	Surface de révolution.
Cadrans solaires.	Enroulement.	Lignes horaires (gnomonique).	Plan directeur.	Surface développable.
Changement de plans.	Enveloppes (Méthode des).	Montre des pasteurs.	Plan projetant.	Surface gauche.
Charnière.	Épicycloïde.	Ombres.	Plan tangent.	Surface hélicoïde.
Cône circonscrit.	Épicycloïde sphérique.	Paraboloïde de raccordement.	Plans cotés.	Surface courbée.
Cône directeur.	Épure.		Point brillant.	Surfaces d'égale pente.
Conoïde.	Équinoxiale.		Point de distance.	Tableau (perspect.).
Contour apparent.	Fuyantes.		Point de vue.	Trait.
Cote.	Génératrice.		Profil.	Trait ressenti.
Coupe.	Géométral.		Projections.	Vernier.
Courbe d'entrée.			Rabattement.	Virgule.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Allidade.	Cordeau.	Formule de Th. Simpson.	Niveau de côté.	Règle de Kutsch.
Anse de panier.	Courbe d'erreur.	Genou.	Nonius.	Règle ployante.
Arc rampant.	Cubage.	Glissement.	Octant.	Règlette de la Condamine.
Axe optique.	Cycloïde.	Grade.	Ovale.	Règlette de Nicomède.
Boussole.	Dessin linéaire.	Graphomètre.	Ove.	Rosette.
Calcul par le trait.	Développante de cercle.	Hélice.	Pantographe.	Roulement.
Carreaux.	Développante sphérique.	Interpolation graphique.	Pantomètre.	Roulette.
Cartes figuratives.	Double équerre.	Jarret.	Pas d'une hélice.	Sphéromètre.
Cathétomètre.	Echelle.	Jaugeage des tonneaux.	Pente.	Stadia militaire.
Cercle à réflexion.	Éclimètre.	Ligne de foi.	Pied à bec.	Suspension de Cardan.
Cercle répétiteur.	Enregistreurs.	Limbe.	Pinnules.	Tabarre.
Clisimètre.	Épicycloïde.	Maitre à danser.	Pistolet.	Tables graphiques.
Comparateur.	Équerre.	Méthode de Robertval.	Planchette.	Té.
Compas.	Étalon à coulisse.	Micromètre.	Planimétrie.	Théodolite.
Compas à coulisse.	Fausse équerre.	Miroir plan.	Plume géométrique.	Tire-ligne.
Compas d'épaisseur.	Figuratives (Cartes).	Niveau.	Raccorderment.	Tricage.
Compas de proportion.	Fil à plomb.		Rapporteur.	Vases cylindriques.
Compas de réduction.			Règle.	
			Règle à calcul.	

HORLOGERIE.

Cadrature.	Horloge lunaire.	Montre à quantième.	Pendule à quantième.	Remontage.
Chronomètre.	Horloges publiques.	Montre à répétition.	Pendule à répétition.	Remontoir d'égalité.
Compensateur.	Limçon.	Montre à secondes.	Planétaires.	Réveil.
Échappement.	Marche d'un chronomètre.	Montre à stop.	Râteau.	Rouage.
Horloge.	Minuterie.	Montre de comparaison.	Régulateur.	Roue de champ.
Horloge à équation.	Montre.	Pendule.	Régulateur électrique.	Roue de rencontre.
Horloge à quantième.	Montre à équation.	Pendule à équation.		Spiral.
				Trotteuse.

HYDRAULIQUE ET MÉCANIQUE DES GAZ.

Alguiilles de barrage.	Bief.	Choc d'une veine.	Corps plongés (Équibre des).	Dépense.
Ajutage.	Burdine.	Chute d'eau.	Coude.	Déversoir.
Amont.	Cabinet d'eau.	Coefficient de contraction.	Coup de bélier.	Distribution d'eau.
Arçs hydrophores.	Canal de fuite.	Coefficient de dépense.	Courbe mécatatrice.	Écluses à sas.
Aubes.	Canaux découverts.	Conduites.	Coursier.	Écøpe.
AVAl.	Cataracte.	Contraction de la vaine.	Cuvette de jauge.	Écoulement des gaz.
Bajoyers.	Changement brusque de section.	Corps flottants.	Danaide.	Écoulement des liquides.
Barrage.	Chapelet.		Dénivellation.	Hauteur due à une pression.
Bélier hydraulique.	Chapeite.			

Hydraulique.	Mouvement permanent.	Pouce d'eau.	Retenue.	Théorème de Torricelli.
Hydrométrie.	Non-pression.	Pression d'un fluide.	Rhéomètre de Poëtil.	Trompe.
Inversion de la veine.	Noria.	Pression vive.	Rides.	Tube de Pitot.
Jaugeage des cours d'eau.	Parallélisme des tranches.	Puissance absolue d'une chute.	Section contractée.	Vanne.
Jaugeage des pompes.	Pendule hydrométrique.	Rayon moyen.	Service en route.	Veine fluide.
Jet d'eau.	Périmètre mouillé.	Récepteurs hydrauliques.	Sympiezomètre.	Ventilateur à vis.
Ligne d'eau.	Perte de charge.	Remous.	Sympiezomètre différentiel.	Ventilateurs.
Mince paroi.	Pertuis.	Réservoir d'air.	Tachomètre de Brunnings.	Viscosité.
Module d'eau.	Piezomètre.	Résistance des fluides.	Théorème de D. Bernoulli.	Vis d'Archimède.
Moulinet de Waltrmann.		Ressaut.		Vis pneumatique.
				Vitesse moyenne.

HYDROSTATIQUE.

Aérostats.	Centre de poussée.	Manomètre.	Paradoxe hydrostatique.	Principe d'Archimède.
Baromètre.	Centre de pression.	Métacentre.	Poussée.	Stabilité hydrostatique.
Baromètre (Mesure des hauteurs par le).	Fluide parfait.	Niveau.	Pression hydrostatique.	Vases communicants.
	Fluides.	Onglets (Méthodes).		
	Force ascensionnelle.			

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Adhérence.	Chèvre.	Doublejoint de Hooke.	Glissière.	Machines outils.
Alésoir.	Cnèvre de lombard.	Drille.	Grue.	Machines pneumatiques.
Alimentation des chaudières.	Cinématique.	Drop.	Grue à vapeur.	Machines simples.
Alluchons.	Circonférences primitives.	Dynamode.	Grue hydraulique.	Machines soufflantes.
Allongement (Résistance à l').	Cisaillage.	Dynamomètre.	Guides du mouvement.	Machines thermiques.
Anémomètre.	Cisaillures.	Ecrasement (Résistance à l').	Guides (Frottement des).	Manchon.
Angle de rupture.	Clapet.	Écrou.	Hélice propulsive.	Manège.
Angle du frottement.	Cliquet.	Effort tranchant.	Hérisson.	Manivelle.
Arbre coudé.	Coefficient d'effet utile.	Elasticité.	Herse.	Manivelle dynamométrique.
Arbres.	Coefficient de frottement.	Embrayage.	Houe à cheval.	Manivelles antirotatives.
Arc-boutement.	Coefficient d'élasticité.	Encastrement.	Hyperboloides primitifs.	Manivelles multiples.
Articulation.	Coefficient de régulation.	Encliquetage.	Indicateur de Watt.	Manomètre.
Automates.	Coefficient de stabilité.	Engrenage de Lahire.	Indicateurs de niveau.	Marteau à pilots.
Avance de pas.	Coin.	Engrenage d'Huyghens.	Indications continues (Appareils à).	Marteau à vapeur.
Avance du tiroir.	Coincidence.	Engrenage différentiel.	Injecteur Giffard.	Marteau-pilon hydraulique.
Axe d'oscillation.	Collier à gulets.	Engrenage elliptique.	Jacquard (Mét. à la).	Marteaux.
Bague d'excentrique.	Collier à gulets.	Engrenage intermittent.	Jante de volant.	Meules verticales.
Balance.	Compression (Résistance à la).	Engrenage oscillant.	Jeannette.	Moderateurs.
Balance de Quintenz.	Compression (mach. à vapeur).	Engrenages.	Joint de Cardan.	Modificateurs instantanés.
Balance de Roberval.	Compteur à pointage.	Engrenages (Frottement des).	Joint de Hooke.	Moissonneuse.
Balance de Santorius.	Compteurs.	Enregistreur.	Joint de Oldham.	Molettes.
Balancier.	Condensation.	Ensemble.	Joint hollandais.	Moment de stabilité.
Balancier à bouton.	Condenseur.	Equivalent mécanique de la chaleur.	Joint universel.	Moment fléchissant.
Balancier à coulisse.	Cônes de friction.	Essieu.	Kilogramme.	Monte-charge.
Balancier, bielle et manivelle.	Cônes primitifs.	Essoreuse.	Laminoir.	Moteur Lenoir.
Balancier de Cartwright.	Contre-pression.	Excentriques.	Levier.	Moteurs.
Balancier d'Oliver Evans.	Cordes.	Extirpateur.	Levier arithmétique.	Moteurs animés.
Balancier et contre-balancier.	Coulisse de Stephenson.	Faneuse.	Levier de Magarousse.	Mouche.
Balancier intermittent.	Coulisse renversée.	Fauçonneuse.	Locomotive.	Moufle.
Balancier monétaire.	Courant (poulies mouflées).	Fibre moyenne.	Lumières.	Moufle de White.
Banc à broches.	Courbe à longue inflexion.	Fibres neutres.	Machine à air comprimé.	Mouffettes.
Banc à tirer.	Courbe de réglementation.	Filière.	Machine à canneler.	Moulins.
Bascule.	Courbe en œuf.	Flan.	Machine à fendre.	Moulins à vent.
Batteuse.	Courroie sans fin.	Flexion plane.	Machine à forer.	Mouton.
Bielle et manivelle.	Coussinets.	Force ascensionnelle.	Machine à mofettes.	Mouton à vapeur.
Bielle pesante.	Crapaudine.	Force nominale.	Machine à percer.	Mouvement perpétuel.
Bobine.	Crémaillère.	Foret.	Machine à raboter.	Mull-Jenny.
Bocard.	Cycle.	Formule de Clapeyron.	Machine à tarauder.	Navigation à vapeur.
Bourriquet.	Cylindres de friction.	Formule de Savary.	Machine d'Atwood.	Navigation à voiles.
Bras de roues dentées.	Cylindres primitifs.	Fraise.	Machine d'Ericsson.	Navire (Théorie du).
Bras de volant.	Débrayage.	Frein.	Machine électro-motrice.	Nervures.
Butée de terres.	Déclat.	Frein dynamométrique.	Machines.	Odontographe.
Buttoir.	Dents des engrenages.	Frein.	Machines à calculer.	On les Came à).
Cabestan.	Détente (machines à vapeur).	Frein.	Machines à colonne d'eau.	Opérateurs.
Cagnardelle.	Détente (cinématique).	Frette.	Machines à diviser.	Palan.
Cames.	Diagramme.	Frottement.	Machines agricoles.	Palan différentiel.
Cataracte.	Distribution.	Frottement de roulement.	Machines aspirantes.	Palans conjugués.
Centre d'oscillation.		Funiculaire (polyg.).	Machines à vapeur.	Palettes.
Chaines.		Galet.	Machines à vapeurs combinées.	Palier.
Charrue.		Galets d'alimentation.	Machines de compression.	Panemore.
Cheval-vapeur.		Garant.		Paradoxe de Ferguson.
		Générateurs.		Paralélogramme de Reuleaux.

- Parallélogramme de Watt.
 Pas d'un engrenage.
 Pas d'une vis.
 Patouillet.
 Pendule composé.
 Pendule conique.
 Pendule de White.
 Pendule réversible.
 Pèse-lettres.
 Peson.
 Petit cheval.
 Pièces courbes.
 Pied de biche.
 Pignon.
 Pignon valseur.
 Pilon.
 Pilots.
 Piston.
 Pivot.
 Plan de flexion.
 Plan de rupture.
 Plan incliné.
 Plaques fusibles.
 Points morts.
 Polygone funiculaire.
 Pompe à air.
 Pompe à eau.
 Pompe alimentaire.
 Pompes.
 Pont à bascule.
 Pont-levis.
 Ponts suspendus.
 Poulie.
 Poulie folle.
 Poussee des terres.
 Poussee des voûtes.
 Presse à coin.
 Presse hydraulique.
 Presse monétaire.
 Presse typographique.
 Pression.
 Prisme de butée.
 Prisme de poussée.
 Prisme chargé debout.
 Projectiles (Mouvement des).
 Propulseurs à aubes.
 Propulseurs hélicoïdales.
 Puits.
 Réactions des pièces tournantes.
 Récepteurs.
 Recouvrement.
 Recul (propulseurs hélicoïdales).
 Réglette de la Condamine.
 Réglette de Nicomède.
 Régulateur à papillon.
 Régulateur à ressort.
 Régulateur à soufflet.
 Régulateur hydraulique.
 Régulateur Larivière.
 Régulateurs.
 Régulateurs à force centrifuge.
 Rendement.
 Renflard.
 Résistance des matériaux.
 Résistance vive.
 Résistances passives.
 Rivets.
 Rochet.
 Roideur des cordes.
 Rosette.
 Rouage.
 Roue à rochet.
 Roue chinoise.
 Roue de champ.
 Roue dentée.
 Roue folle.
 Roue planétaire.
 Roue satellite.
 Roues à augets.
 Roues à cuiller.
 Roues à cuve.
 Roues à réaction.
 Roues couplées.
 Roues de Rœmer.
 Roues élévatoires.
 Roues en dessous.
 Roues hydrauliques.
 Roues pendantes.
 Roues pénitentiaires.
 Roues pneumatiques.
 Roues Poncelet.
 Rouleau (mach. agricole).
 Rouleau de tension.
 Rouleaux.
 Roulement (Résistance au).
 Roulettes (Méthode des).
 Rupture (Résistance à la).
 Sapine.
 Scarificateur.
 Scieries.
 Scies à recevoir.
 Secteurs dentés.
 Semoir.
 Sifflet d'alarme.
 Solide d'égalité résistance.
 Sonnette.
 Soufflets.
 Soupapes.
 Soupapes de sûreté.
 Stuffenbox.
 Système Sarrut.
 Systèmes articulés.
 Tambour.
 Tarare.
 Tarare.
 Taraud.
 Tension (des prismes).
 Tension de la vapeur.
 Théorie thermo-dynamique.
 Tiges.
 Tirage des voitures.
 Tiroir.
 Torsion (Résistance à la).
 Tour.
 Tour à fileter.
 Tour à guillocher.
 Tour à portrait.
 Tourillons.
 Tour ovale.
 Train de mouffles.
 Trains épicycloïdaux.
 Transformations de mouvements.
 Transmission de Maudslay.
 Transmission du travail.
 Transport horizontal.
 Travail.
 Travail de la pesanteur.
 Travail virtuel.
 Trépan.
 Treuil.
 Treuil conique.
 Treuil différentiel.
 Tribomètre.
 Turbine Fontaine.
 Turbine Fourneyron.
 Turbine hydro-pneumatique.
 Turbine Kœchlin.
 Turbines.
 Tympan.
 Valets.
 Vases cylindriques (Résistance des).
 Verrins.
 Versoir.
 Vis.
 Vis différentielle.
 Vis micrométrique.
 Vis sans fin.
 Vis tangente.
 Vitesse moyenne.
 Volant.
 Volant à ailettes.
 Zigzag.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

- Accélération.
 Accélération angulaire.
 Accélération moyenne.
 Appareil de Bohnenberger.
 Appareil de M. Morin.
 Arcolaire.
 Axe central du mouvement.
 Axe instantané.
 Axe spontané glissant.
 Axes principaux.
 Balance gyroscopique.
 Centre de gravité.
 Centre de gravité (Mouvement du).
 Centre de percussion.
 Centre des forces parallèles.
 Centre des moments.
 Centre instantané.
 Chaînette.
 Choc.
 Chute des corps.
 Cinématique.
 Composante.
 Composition des accélérations.
 Composition des chemins.
 Composition des forces.
 Composition des mouvements.
 Composition des rotations.
 Composition des translations.
 Composition des vitesses.
 Conservation des forces vives.
 Couple.
 Couple de rotation.
 Courbe des espaces.
 Courbe des vitesses.
 Culbuteur de Hardy.
 Décomposition des accélérations.
 Décomposition des forces.
 Décomposition des vitesses.
 Dynamique.
 Effet du travail.
 Effort moyen.
 Ellipsoïde central.
 Équilibre.
 Espace.
 Fluides.
 Force.
 Force centrifuge.
 Force centripète.
 Force constante.
 Force d'inertie.
 Force tangentielle.
 Forces apparentes.
 Forces équivalentes.
 Forces extérieures.
 Forces mutuelles.
 Force vive.
 Gravitation.
 Gravité.
 Gyroscope.
 Hauteur due à une vitesse.
 Héropolodie.
 Hydrodynamique.
 Hydrostatique.
 Impulsion.
 Inertie.
 Isochrone.
 Masse.
 Mécanique.
 Mesure des forces.
 Moment.
 Moment d'inertie.
 Moment virtuel.
 Mouvement.
 Mouvement absolu.
 Mouvement curviligne.
 Mouvement d'entraînement.
 Mouvement hélicoïdal.
 Mouvement instantané.
 Mouvement parabolique.
 Mouvement relatif.
 Mouvement uniforme.
 Mouvement uniformément varié.
 Mouvement varié.
 Mouvement vertical des graves.
 Mouvement virtuel.
 Oscillation.
 Parallépipède des chemins.
 Parallépipède des forces.
 Parallépipède des vitesses.
 Parallélogramme des accélérations.
 Parallélogramme des chemins.
 Parallélogramme des forces.
 Parallélogramme des vitesses.
 Pendule simple.
 Pesanteur.
 Pivotelement.
 Poids.
 Point matériel.
 Pôle instantané.
 Polhodie.
 Polygone des chemins.
 Polygone des forces.
 Polygone des vitesses.
 Polytrope.
 Projection du mouvement.
 Puissance vive.
 Quantité de mouvement.
 Rayon de gyration.
 Réaction.
 Repos.
 Résultante.
 Résultante de translation.
 Rotation.
 Stabilité.
 Statique.
 Temps.
 Théorème de Coriolis.
 Théorème de Guldin.
 Théorème de M. Chasles.
 Théorème de Varignon.
 Théorèmes de Galilée.
 Toupie gyroscopique.
 Trajectoire.
 Translation.
 Virtuel.
 Vitesse.
 Vitesse absolue.
 Vitesse angulaire.
 Vitesse areolaire.
 Vitesse d'entraînement.
 Vitesse due à une hauteur.
 Vitesse moyenne.
 Vitesse relative.
 Vitesses virtuelles.

NAVIGATION.

- Angle de gisement.
 Angle de position.
 Arrimage.
 Arriver.
 Atterrage.
 Auloïfée.
 Azimut magnétique.
 Balise.
 Bouée.
 Boussole marine.
 Brasse.
 Cartes marines.
 Balise.
 Cartes réduites.
 Centre de voilure.
 Cercle à réflexion.
 Cheval de basse pression.
 Cheval nominal.
 Coefficient d'avance.
 Coefficient d'utilisation.
 Comparaison.
 Compas de route.
 Compas de variation.

Courant.	Hauteurs correspon-	Loxodromie.	Orthodromique.	Route orthodrom-
Encablure.	dantes (Méth. des).	Mancuvre.	Parties méridionales.	que
Estime.	Hauturière.	Marche d'un chrono-	Pilotage.	Routes (Probl. des).
Évoluer.	Hélice propulsive.	mètre.	Point (Faire le).	Rumbs.
Évolution.	Heure (Détermination	Mille marin.	Point de partance.	Sextant.
Formule de l'Ami-	de l').	Miroir plan.	Pointé.	Sondage.
rauté.	Latitudes croissan-	Navigation.	Quartier de réduction.	Stabilité sous voiles.
Formule du Gouver-	tes.	Navigation à vapeur.	Réduction des rou-	Tangage.
nement.	Lever sous voile.	Navigation à voiles.	tes.	Touage.
Gisement (Angle de).	Ligne d'eau.	Navigation intérieure.	Relèvement.	Variation (Compas de)
Gouvernail.	Loch.	Navire (Théorie du).	Rose des vents.	Variation du compas.
Gouvernement, d'un	Loch de Massey.	Nœud.	Rouls.	Virement de bord.
navire.	Lochomètre.	Octant.	Route d'un navire.	Virer.
Halage.	Lofer.			Voiles.

PROBABILITÉS.

Coefficient de regu-	Espérance mathéma-	Module de conver-	Moyenne.	Règle de Bayes.
larité.	tique.	gence.	Poids d'une valeur	Théorème de J. Ber-
Écart moyen.	Formule de Laplace.	Molndres carrés..	moyenne.	noulli.
Erreur à craindre.	Loi des grands nom-	Mortalité.	Probabilité mathéma-	Valeur médiane.
Erreur moyenne.	bres.	Moyen écart.	tique.	
Erreurs (Théorie des).	Mesure de précision.			

TOPOGRAPHIE.

Allidade.	Équerre graphomé-	Lignes de plus grande	Planchette.	Teintes convention-
Axe optique.	tre.	pente.	Plan topographique.	nelles.
Azimut.	Figuré du relief.	Lunette.	Pointé.	Thalweg.
Base.	Graphomètre.	Lunette Stadia.	Polygones topographi-	Théodolite.
Boussole.	Intersections (Métho-	Mire.	que.	Topographie.
Canevas trigonome-	de des).	Niveau.	Profil.	Topographie (Problè-
trique.	Jalon.	Niveau de pente.	Recoupements (Mé-	me de).
Cercle répétiteur.	Jalonner.	Nivellement.	thode des)	Vis calantes.
Clisimètre.	Lever des plans.	Nivellement (Problè-	registre de nivellem-	Vis de pression.
Déclinatoire.	Levers expédiés.	mes de).	ment.	Vis de rappel.
Éclimètre.	Ligne de foi.	Orientation.	Relief (Figuré du).	Vision.
Équerre à miroir.		Pinnules.	Signes conventionnels	Voyant.

TRAVAUX PUBLICS.

Amont.	Butée des terres.	Déblais et remblais.	Piles.	Revêtements.
Anse de panier.	Canaux.	Débouché.	Pilots.	Routes.
Aqueducs.	Chemins de fer.	Décintrement.	Ponceau.	Scies à recevoir.
Arche.	Chèvre.	Dragage.	Pont canal.	Talus naturel.
Aval.	Chèvre de Lombard.	Ecluses à sas.	Ponts.	Tournant.
Baquetage.	Cintra.	Flèche.	Ponts suspendus.	Transport des terres.
Barrage.	Contre-venter.	Foisonnement.	Puits artésiens.	Travées.
Bateau dragueur.	Cotes rouges.	Lignes de passage.	Raccordement.	Treillis.
Bateaux à air.	Courbe de pose.	Palées.	Radier.	Tunnel.
Bourriquet.	Culées.	Pièces de pont.	Rampe	Viaducs.

FIN DE L'INDEX ALPHABÉTIQUE.