

**ZEITSCHRIFT  
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.**

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

---

**ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.**

---

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,  
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE**      UND      **C. RUNGE**  
IN STUTTGART                                      IN GÖTTINGEN.

63. BAND.

MIT 128 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1915.

**ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.**

# Inhalt.

	Seite
<b>Burkhardt, H.</b> Schwingungen unter Einfluß einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung . . . . .	303
<b>Domke, Oskar.</b> Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik . . . . .	174
<b>Einstein, Albert und Großmann, Marcel.</b> Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie . . . . .	215
<b>Fuchs, Karl.</b> Hydrostatische Gleichungswagen . . . . .	203
<b>Großmann, Marcel.</b> s. Einstein, Albert.	
<b>Hencky, H.</b> Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit . . . . .	311
<b>Jaeger, M.</b> Zur Dynamik ebener Flüssigkeitsbewegungen . . . . .	381
<b>Jüttner, Ferencz.</b> Einige Beispiele zur Lorentz-Einsteinschen Relativmechanik.	137
<b>Kellog, O. D.</b> Nomograms with Points in Alignment . . . . .	159
<b>Koepller, Hans.</b> Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein und desselben Zeitraumes . . . . .	390
<b>Lagally, Max.</b> Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung . . . . .	360
<b>Landau, Edmund.</b> Über Preisverteilung bei Spielturnieren . . . . .	192
<b>Loria, Gino.</b> Sopra la determinazione delle parti visibili di un poliedro rappresentato graficamente . . . . .	290
<b>Pöschl, Theodor.</b> Geometrische Untersuchungen zur Dynamik des freien starren Körpers im Raume. I . . . . .	241
<b>Pólya, G.</b> Über das Graeffesche Verfahren . . . . .	275
<b>Riebesell, P.</b> Über Gleichungswagen . . . . .	256
<b>Schilling, Friedrich.</b> Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite . . . . .	67
<b>Shook, G. A.</b> Über die Randkorrektur des Dreiplattenkondensators . . . . .	355
<b>Valcovic, V.</b> Vergleich der Widerstandsmessungen in einem Kanal und in einem Luftstrahl . . . . .	337
<b>Weinreich, Wilhelm.</b> Über den Temperaturverlauf in stromdurchflossenen Drähten, besonders im Fall von Wechselstrom. . . . .	1

## Kleinere Mitteilungen.

Näherungskonstruktion für die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Elf-ecks. Von <b>R. Graf Lavaulx</b> . . . . .	226
Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften . . . . .	437

## Bücherschau.

V. Kommerell. Raumgeometrie (Stereometrie und darstellende Geometrie). Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	227
E. Ludwig. Barchaneks Darstellende Geometrie und Raumlehre. Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	227
J. Peters. Fünfstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	228
A. Galle. Mathematische Instrumente. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	228

u\*

	Seite
A. Padoa. La logique déductive dans sa dernière phase de développement. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	229
H. Vuibert. Les Anaglyphes géométriques. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	230
F. Auerbach und R. Rothe. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	230
L. Michaelis. Einführung in die Mathematik für Biologen und Chemiker. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	231
M. Lindow. Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendungen in der Technik. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	231
K. Manitius. Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	232
W. Leick. Astronomische Ortsbestimmungen mit besonderer Berücksichtigung der Luftschiffahrt. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	233
L. de Ball. Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	234
O. Hartmann. Astronomische Erdkunde. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	236
H. C. E. Martus. Astronomische Erdkunde. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	236
E. Kohlschütter. Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendelexpedition der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen in den Jahren 1899 und 1900. Von <b>C. W. Wirtz</b>	236
H. E. Timerding. Die Erziehung der Anschauung. Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	238
R. Suppantseitsch. Leitfaden der darstellenden Geometrie für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien. Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	239
The Svedberg. Die Existenz der Moleküle. Von <b>F. Müller</b> . . . . .	239
C. Runge und F. Emde. Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in Sinuswellen. Von <b>H. v. Sanden</b> . . . . .	318
G. Loria. Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria des- crittiva. Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	319
M. Großmann. Einführung in die darstellende Geometrie. Von <b>K. Doehlemann</b>	320
E. Wendling. Der Fundamentalsatz der Axonometrie. Von <b>K. Doehlemann</b>	320
H. Capelle. Die mathematische Geographie und ihre Nutzenanwendung. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	320
C. V. Charlier. Studies in stellar statistics. II. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	321
A. Höfler. Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	322
W. Láska. Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	323
C. Schoy. Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	324
J. Vernerii de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. Von <b>C. W. Wirtz</b> . . . . .	325
Th. Vahlen. Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstel- lung, eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Von <b>K. Doehlemann</b> . . . . .	326
Ph. Maennchen. Die Geheimnisse der Rechenkünstler. Von <b>H. Wieleitner</b>	326
A. Witting und M. Gebhardt. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	327
F. Dingeldey. Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	328
L. Prandtl. Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung. Von <b>Th. Pöschl</b> . . . . .	437
A. Mitzscherling. Das Problem der Kreisteilung. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	438
-----	
Neue Bücher . . . . .	329, 439
Eingelaufene Schriften. . . . .	334, 442

## Über den Temperaturverlauf in stromdurchflossenen Drähten besonders im Fall von Wechselstrom.

Von WILHELM WEINREICH in Heidelberg.

### A. Übersicht über frühere Literatur.

Arbeiten, die sich mit der Temperaturverteilung *wechselstrom-*durchflossener Drähte eingehender beschäftigen, liegen nur wenige vor, grundlegend und der folgenden Arbeit im Ziel am ähnlichsten ist eine Arbeit von C. Cranz<sup>1)</sup>, der auch die Verteilung der Temperatur bei Gleichstrom untersucht. Er vernachlässigt die Abkühlung an den Enden des Drahtes und leitet für das radiale Gefälle die Differentialgleichung ab. Er integriert sie, indem er die Lösung als Potenzreihe nach  $r$  ansetzt ( $r$  ist der Radiusvektor des Querschnitts); höhere Potenzen als die zweite werden vernachlässigt und die Koeffizienten als Funktionen der Zeit bestimmt.

Bedeutet (vgl. (1))  $R$  den Durchmesser,  $D$  die Dichte,  $c$  die spezifische Wärme,  $\lambda$  das innere Wärmeleitvermögen,  $\mu$  das äußere,  $w$  den spezifischen Widerstand,  $u$  die variable Temperatur des Drahtes, die von der Umgebungstemperatur an gezählt wird,  $t$  die Zeit,  $i$  die Stromstärke,  $= i_0$  für Gleichstrom,  $= J \sin at$  für Wechselstrom,  $a = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  die Periode, und  $\frac{1}{\mathfrak{A}}$  die Wärmemenge, die der Strom 1 beim Widerstand 1 in der Zeiteinheit erzeugt, und wird zur Abkürzung eingeführt

$$k = \frac{\lambda}{cD}, \quad A = \frac{2\mu k}{\lambda R \left(1 + \frac{\mu R}{2\lambda}\right)},$$

so erhält Cranz die Integrale<sup>2)</sup>

$$u_{g,a}(r,t) = \frac{i_0^2 w}{\lambda \mathfrak{A} \pi^2 R^4} \left( \frac{\lambda R}{2\mu} + \frac{R^2 - r^2}{4} \right) (1 - e^{-At}),$$

$$u_{w,a}(r,t) = \frac{J^2 w k}{\lambda \mathfrak{A} \pi^2 R^4} \left( \frac{1}{2A} - \cos 2at \frac{4a - r^2 a A}{4k(A^2 + 4a^2)} - \sin^2 at \frac{r^2}{4k} - e^{-At} \frac{a^2 \left(4 - r^2 \frac{A}{k}\right)}{2A(A^2 + 4a^2)} \right),$$

1) C. Cranz, Das Gesetz zwischen Ausdehnung und Stromstärke für einen von galv. Wechselströmen durchflossenen Leiter. Ztschr. f. Math. u. Phys., **34** 1889, S. 92.

2) Die Indices  $g, w, a$  bedeuten bzw. Gleichstrom, Wechselstrom und Anfangszustand, die Argumente die Variablen.

wobei ein Rechenfehler in der Bestimmung der Funktion der Zeit schon verbessert ist — Cranz hat im Nenner der einzelnen Glieder mit Ausnahme des Glieds mit  $\sin^2$  den Faktor  $A$  zuviel —. Ferner für sehr kleine  $R$ , wobei die radialen Temperaturdifferenzen vernachlässigt werden:

$$u_g(t) = \frac{i_0^2 w}{2 \mathfrak{A} \mu \pi^2 R^2} (1 - e^{-Bt}), \quad B = \frac{2\mu}{cRD},$$

$$u_w(t) = \frac{J^2 w}{\mathfrak{A} \pi^2 R^4 c D} \left( \frac{1}{2A_1} - \cos 2at \frac{A_1}{2(A_1^2 + 4a^2)} - \sin 2at \frac{a}{A_1^2 + 4a^2} - e^{-A_1 t} \frac{4a^2}{2A_1(A_1^2 + 4a^2)} \right)$$

$$A_1 = \frac{2\mu}{cDR},$$

wobei derselbe Fehler ebenfalls schon verbessert ist, auf den hier Ebeling in seiner unten zu besprechenden Arbeit aufmerksam machte. Cranz setzt dann bei kleinem  $u$  die Verlängerung proportional der Temperatur an, bestimmt aus der Verlängerung des Drahts (Kupfer von 1 mm Durchmesser) experimentell die mittlere Temperatur und berechnet aus der ersten Gleichung für den stationären Zustand die Konstante der äußeren Wärmeleitung  $\mu$  als 0,000 6504; 0,000 6681; 0,000 6821 bei  $u = 23,95^\circ$ ;  $123,34^\circ$ ;  $279,8^\circ$ ;

dann werden die Ergebnisse auch kurz numerisch diskutiert, doch sind seine Schlüsse und Zahlen belanglos wegen des Fehlers im Integral und weil er die Dichte als 8,9:9,81 setzt; außerdem fehlt im Integral für Wechselstrom die konstante radiale Differenz. Der Wert für  $\mu$  ist von diesen Fehlern frei.

Die zeitlichen Temperaturschwankungen bei Vernachlässigung der räumlichen Temperaturdifferenzen behandelt Guye<sup>1)</sup>; er findet für  $\mu$  den Wert 0,00017. (Der angegebene Wert  $\mu = 0,0053$  ist auf die ganze Oberfläche von 31 qcm bezogen). Die Amplitude der Schwankungen beträgt 0,2% von  $u$ .

Von einer weiteren Arbeit, von Ebeling<sup>2)</sup>, kommt hier im wesentlichen nur der erste Teil in Betracht; er greift zunächst auf die Theorie von Cranz zurück, dessen oben erwähnten Fehler er verbessert, und leitet das Integral nochmals ab. Dann geht Ebeling auf den Mangel der Cranzschen Theorie ein, die den Widerstand als konstant voraussetzt, was nicht angehe, da sogar die Widerstandsänderung zur Temperaturmessung benutzt werden konnte. Er bestimmt dann im Versuch die Spannung und Stromstärke oszillographisch und hieraus die Leistung als Funktion der Zeit, ebenso den Widerstand. Nachdem der Tem-

1) Guye. Quelques remarques sur les variations de la température d'un conducteur parcouru par des courants alternatifs. Arch. de Genève (4) 3 1897, S. 254.

2) Ebeling. Über den Temperaturverlauf in wechselstromdurchflossenen Leitern. Dissert. Göttingen 1908. Ein Auszug in den Ann. der Phys. 27 1908, S. 391.

peraturkoeffizient bestimmt war, ließ sich aus der Widerstandsänderung die Temperaturänderung berechnen.

Auf Grund seiner Versuche kommt Ebeling zu dem Ergebnis, daß die Cranzsche Theorie noch andere Mängel aufweist: es gilt nicht das Newtonsche Wärmeabgabegesetz, wonach die abgegebene Wärme proportional der Oberfläche und der Temperaturdifferenz ist, sondern ein nach Dulong und Petit erweitertes, nach dem die Abgabe proportional der Länge, der 1,25sten Potenz der Temperaturdifferenz und umgekehrt proportional dem Drahradius ist. (Da im folgenden die Wärmeabgabe wie bei der Strahlung allein der Oberfläche proportional angenommen wird, ist die Konstante  $\mu$  hiernach proportional  $\frac{1}{R^2}$ ).

Nach Ebelings Versuchen kann die Konstante der äußeren Wärmeleitung nur in engen Grenzen sowohl der Temperatur als des Radius als wirklich konstant angenommen werden.

Die Temperaturschwankungen berechnet Ebeling für 80 und mehr Wechsel pro Sek. bis über 200° für Metallfadenlampen<sup>1)</sup>, bei einer mittleren Temperatur von etwa 1400°; für Kohlenfadenlampen sind sie beträchtlich kleiner.

Einige neuere Arbeiten, die sich mit der Temperaturverteilung wechselstromdurchflossener Leiter beschäftigen, liegen von Corbino<sup>2)</sup> vor. Er läßt das Wärmeabgabegesetz ganz unbestimmt, indem er mit  $f(\tau)$  die Gesamtabgabe bezeichnet (Abgabe an die Umgebung vermindert um die von der Umgebung zugeführte Wärme).  $c$  bedeutet die mittlere Wärmekapazität in dem Temperaturintervall der Schwankungen,  $\alpha$  den Temperaturkoeffizienten des Widerstands in denselben Grenzen,  $e_0 \sin at$  die an den Enden wirkende elektromotorische Kraft,  $v$  die Temperatur des Drahts von seiner mittleren  $\tau_m$  an gerechnet,  $w_m$  seinen Widerstand bei  $\tau_m$ , wo  $\tau$  die absolute Temperatur ist. Dann wird die Differentialgleichung

$$c \frac{d\tau}{dt} + f(\tau) = \frac{e_0^2 \sin^2 at}{w_m(1 + \alpha v)}.$$

Corbino setzt  $v$  klein gegen  $\tau_m$  voraus und entwickelt  $f(\tau_m + v)$  nach dem Taylorschen Satz:

$$c \frac{dv}{dt} + c\alpha v \frac{dv}{dt} + f(\tau_m) + \alpha v f'(\tau_m) + v f''(\tau_m) = \frac{e_0^2}{2w_m} (1 - \cos 2at).$$

1) Vgl. dagegen die Bemerkung Corbinos.

2) Corbino. Thermische Oszillationen wechselstromdurchflossener Lampen mit dünnem Faden und daraus sich ergebende Gleichrichterwirkung infolge der Anwesenheit geradzahligter Oberschwingungen. Physik. Zeitschr. **11**, 1910, S. 413. Periodische Widerstandsänderung feiner Metallfäden, die durch Wechselströme zum Glühen gebracht werden, sowie Ableitung ihrer thermischen Eigenschaften bei hoher Temperatur, ebenda **12**, 1911, S. 292.

Dann bezeichnet er mit  $W$  die mittlere im Draht verbrauchte Arbeit, die gleich  $f(\tau)$  sein muß, also

$$f(\tau_m) = W = \frac{e_0^2}{2 w_m}$$

und setzt

$$Q = \alpha f(\tau_m) + f'(\tau_m);$$

so wird

$$c \frac{dv}{dt} + Qv = - \frac{e_0^2}{2 w_m} \cos 2at.$$

Es ergibt sich dann

$$v = \Theta \cos(2at - \varphi),$$

wobei

$$\Theta = - \frac{e_0^2}{2 w_m} \frac{\cos \varphi}{Q}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2ca}{Q}.$$

Auf die weitere Untersuchung brauchen wir hier nicht näher einzugehen; Corbino denkt sich zwei elektromotorische sinusförmige Kräfte wirksam, deren eine die doppelte Frequenz hat, und zeigt, daß dann eine Gleichstromkomponente auftritt. Seine Versuche bestätigen dieses Resultat. Übrigens findet Corbino nach seiner Methode, daß die Schwankungen, die Ebeling zu über 200 Grad bestimmte, nur 10 bis 15 Grad betragen können.

Eine Reihe anderer Arbeiten behandelt die Abkühlung des Drahtes an den Enden; grundlegend ist ein Aufsatz von Lord Kelvin.<sup>1)</sup> Ist  $l$  die Länge des Drahtes, so erhält er für Gleichstrom und Vernachlässigung des radialen Temperaturgefälles die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2\mu}{R\lambda} u + \frac{i_0^2 w}{2\pi^2 R^3 \lambda} = 0,$$

deren Integral unter Berücksichtigung der Grenzbedingung  $u = 0$  für  $x = 0$  und  $l$

$$u = \frac{i_0^2 w}{2 \cdot 2\pi^2 R^3 \mu} \left[ 1 - \frac{e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)}}{1 + e^{-\sqrt{g}l}} \right]$$

ist, worin

$$\sqrt{g} = \sqrt{\frac{2\mu}{R\lambda}}.$$

Bei dem von ihm resp. Bottomley benutzten Draht, der 50 cm lang und fast 1 mm dick war, macht sich der abkühlende Einfluß der Klemmen,

1) Bottomley and W. Thomson. On the permanent temperature of conductors through which an electric current is passing, and on surface conductivity or emissivity. Proc. Royal Soc. **37**, 1884. S. 177.



falls diese als gut leitend und sich nicht erwärmend betrachtet werden, noch in größerer Entfernung von den Enden bemerklich, denn noch in 12 cm Abstand ist die Temperatur um ein Zwanzigstel kleiner. Bottomley bestimmte die Konstante der äußeren Wärmeleitfähigkeit an Kupfer-draht aus der Gleichsetzung der Jouleschen Wärme und der abgegebenen Wärmemenge:

$$\mu = \frac{i^2 w}{2 \pi^2 R^3 u}.$$

Er fand sie bei 0,83 mm Durchmesser und 27,5° zu 0,0005 und bei 0,40 mm und 24° zu 0,0025. Diese Zahlen bestätigen das Gesetz von Ebeling, daß die  $\mu$  umgekehrt proportional sind dem Quadrat des Radius, da die obigen Werte etwa gleichen Temperaturen, aber doppeltem Radius entsprechen.

Eine ähnliche Entwicklung enthält eine Arbeit von Tumlirz-Krug<sup>1)</sup>; die Verfasser setzen die Temperaturabgabe durch Leitung und Strömung in erster Näherung als proportional der Temperaturdifferenz voraus und wenden für die Strahlung das Stefansche Gesetz an, das sie nach Potenzen der Temperaturdifferenz entwickeln, wobei sie ebenfalls nur die erste Potenz beibehalten. Die Verfasser geben keinen Wert für  $\mu$  an.

Eine Arbeit von Linde<sup>2)</sup> zeichnet sich durch so zahlreiche Druckfehler aus, daß sie übergangen werden kann, zumal sie keine Werte der Konstanten enthält und der theoretische Teil nochmals von Czermak<sup>3)</sup> bearbeitet worden ist. Seine Lösung ist formell von der Kelvinschen verschieden, da er wie auch Tumlirz-Krug den Koordinaten-Nullpunkt in die Mitte des Drahtes legt. Zur Berechnung vereinfacht er seine Formeln durch Annahme großer Länge. Er gibt dann die Resultate von Versuchen mit verschiedenen Drähten von gleichen Radien an und findet bei seinen nur qualitativen Ergebnissen, daß die Reihenfolge der  $g$  etwa die der spezifischen Widerstände ist. Aus dem bekannten  $\lambda$  und einem  $\mu$  ließen sich die Konstanten der äußeren Wärmeleitung auch für andere Metalle berechnen, aber bei den doch nur qualitativen Werten genügt es zu bemerken, daß sie sich als von derselben Größenordnung ergeben.

1) Tumlirz-Krug. Über die Änderung des Widerstands galvanisch glühender Drähte mit der Stromstärke. Wien. Ber. II, 95, 1887, S. 1014.

2) J. Linde. Über die Temperaturbestimmung in einem Draht, wenn durch denselben ein galvanischer Strom fließt. Repertorium der Physik hrsggeg. von Exner, 27, 1891, S. 401.

3) Czermak. Über die Temperaturverteilung eines dünnen Drahtes, der von einem konstanten Strom durchflossen wird. Wien. Ber. IIa, 103, 1894, S. 1107.

Die letzte, aber erst im Auszug veröffentlichte Arbeit rührt von Grober und Zöllisch<sup>1)</sup> her; die Verfasser führen als Gesetz für Wärmeabgabe durch Strahlung das Stefansche, für Wärmeabgabe durch Konvektion ein lineares ein. Die Differentialgleichung wird dadurch sehr verwickelt; sie wird integriert, indem die Temperatur als Potenzreihe nach der Stromdichte angesetzt wird und die Koeffizienten als Funktionen des Abstands von dem einen Drahtende bestimmt werden. Die Verfasser geben gute Übereinstimmung der Experimente mit der Theorie an.

Andere Arbeiten, von denen viele bei Teichmüller<sup>2)</sup> angegeben sind, befassen sich hauptsächlich mit der Bestimmung der Konstante der äußeren Wärmeleitung; meist auch mit der Frage, welches der Zusammenhang der Stromstärke mit dem Drahtradius ist, wenn die Temperaturerhöhung dieselbe sein soll.

Es seien einige Werte der äußeren Wärmeleitfähigkeit angegeben, außer den oben angeführten:

M'Farlane<sup>3)</sup> Cu 0,0002 wenig von  $u$  abhängig

H. Weber<sup>4)</sup> Fe 0,00026

L. Lorenz<sup>5)</sup> Cu (0,0001)  $2R = 1,5$  cm  
Fe (0,000099)  $2R = 1,5$  cm

Cardani<sup>6)</sup> Fe 0,001457 — 0,002365 stark von  $u$  abhängig

---

1) M. K. Grober und H. Zöllisch. Zur Theorie der thermischen Meßgeräte. Physik. ZS. 12, 1911. S. 1048.

2) Teichmüller. Die Erwärmung der elektrischen Leitungen. Stuttgart 1905.

3) D. M'Farlane. Experiments made to determine surface-conductivity for heat in absolute measure. Proc. Roy. Soc. 20, 1871—72, S. 90.

4) H. Weber. Über das Wärmeleitvermögen von Eisen und Neusilber. Pogg. Ann. 146, 1872, S. 257.

5) L. Lorenz. Über das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Elektrizität. Wied. Ann. 13, 1881, S. 422 und 582. Lorenz leitet für eine horizontale Platte von großer Fläche die Wärmeabgabe durch Konvektion ab, die der  $5/4$ ten Potenz von  $u$  proportional ist; hierfür gelten auch die angegebenen Konstanten. Die Formel stimmt gut mit der von Dulong und Petit experimentell gefundenen überein. Die Anwendung der Formel auf Drähte scheint nicht ganz unbedenklich zu sein, wenigstens für dünne; so betont Binder (Über äußere Wärmeleitung und Erwärmung elektrischer Maschinen. Diss. München, 1911) bei seiner ähnlichen Ableitung für beliebige Oberflächen, daß sie nur gilt, wenn die Dimensionen der Fläche groß sind.

6) Cardani. Sur la mesure des températures atteintes par des fils parcourus par des courants électriques, et de leur coefficient de conductibilité externe. Lum. électr., 38 1890, S. 627.

Grüneisen <sup>1)</sup>	Cu 0,0008 $R$ etwa 0,5 cm
	Fe 0,0011 $R$ etwa 0,5 cm
Schaufelberger <sup>2)</sup>	Cu 0,000254 $R = 0,35$ cm
Meyer <sup>3)</sup>	Cu 0,00267
Wamsler <sup>4)</sup>	Fe 0,0003 – 0,0005    36°–179°, $R = 3$ cm
	Cu 0,0002 – 0,0004    67°–243°, $R = 3$ cm.

Da die Konstante der äußeren Wärmeleitung — diese im allgemeinsten Sinn, Strahlung, Leitung und Konvektion umfassend — sich infolge der starken Abhängigkeit der Konvektion von den Versuchsbedingungen und der kaum bekannten Abhängigkeit vom Radius bei Drähten nicht genau angeben läßt, genügt es hier, einen der Größenordnung nach richtigen Wert anzunehmen. Da dabei auch höhere Temperaturen und kleinere Radien zu berücksichtigen sind,  $\mu$  aber als konstant gerechnet wird, sei von Anfang an ein hoher Wert für  $\mu$  angenommen, nämlich 0,0012 für Eisen, 0,0017 für Kupfer. Diese innerhalb der Größenordnung willkürlichen Zahlenwerte wurden einer Vereinfachung der späteren Rechnung wegen so gewählt, daß der spezifische Widerstand durch sie dividiert eine Potenz von 10 wird.

Während also die früheren Arbeiten die Temperaturverteilung in einem Draht nur in den einfachsten Fällen untersucht haben (Cranz: radiale Verteilung für Gleich- und Wechselstrom mit Berücksichtigung des Anfangszustandes, aber nur näherungsweise; Guye: rein zeitlicher Temperaturverlauf für Wechselstrom; Lord Kelvin: Abkühlung an den Enden für Gleichstrom; Grober und Zöllisch benutzen nur die effektive

1) E. Grüneisen. Über die Bestimmung des metallischen Wärmeleitungsvermögens und über sein Verhältnis zur elektrischen Leitfähigkeit. Ann. d. Phys. 3, 1900, S. 43. (Diss. Berlin.)

2) W. Schaufelberger. Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers, aus dem stationären und variablen Temperaturzustand bestimmt, und Wärmefuß in einer durch Kühlwasser gespülten Endfläche eines Wärmeleiters. Ann. d. Phys. 7, 1902. S. 589.

3) Georg J. Meyer. Beitrag zur Kenntnis der Abschmelzsicherungen. Diss. Berlin 1906. Meyer sagt, „daß die vereinfachende Annahme der Proportionalität nicht streng richtig ist, indem bei Materialien mit höherem Schmelzpunkt die nach außen abgeführte Wärme größer ist, als dieser Beziehung entspricht. Da sich aber ferner ergab, daß innerhalb der Versuche mit demselben Material die erwähnte Vereinfachung zulässig ist, so wurde auf eine genauere Bearbeitung im Interesse der Übersichtlichkeit verzichtet.“

4) F. Wamsler. Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft. Diss. München 1909. Wamsler gibt eine gute historische Übersicht über die Gesetze der Wärmeabgabe durch Strahlung und durch Leitung und Konvektion.

Stromstärke, ohne Rücksicht auf die Schwankungen), beabsichtigt die folgende Untersuchung die Differentialgleichung für die Wärmeleitung besonders für Wechselstrom exakt zu integrieren und die typischen Wechselstromglieder für die radiale<sup>1)</sup>, ebenso für die longitudinale Temperaturverteilung zu behandeln. Um besser vergleichen zu können, erwies es sich als zweckmäßig, auch die schon behandelten Fälle **1**, **2** und **3** S. 14 ff. für Gleichstrom in der einheitlichen Bezeichnung nochmals darzustellen, wobei auch der Anfangszustand streng berücksichtigt wurde. Daran schließt sich in **6** die Temperaturverteilung in einem gleichstromdurchflossenen Draht an, der Wärme durch die Oberfläche und Enden abgibt<sup>2)</sup>, dann die analogen Fälle für Wechselstrom, wo **7** wieder nur vergleichshalber angeführt wurde. **11** untersucht die Temperaturverteilung in einem sehr langen Draht, wo der Einfluß der einen Klemme auf die Umgebung der andern zu vernachlässigen ist. Im folgenden Kapitel werden die radialen Differenzen und die Abkühlung in bezug auf ihr Größenverhältnis zur konstanten Oberflächentemperatur diskutiert, und insbesondere (in **15**) der Verlauf des typischen Wechselstromgliedes für die radiale Temperaturverteilung eingehend untersucht. Im Kapitel D wird der Einfluß des Skin效ekts im extremen Fall (Leitung nur an der Oberfläche) berücksichtigt, was zu einer Methode zur Bestimmung der äußeren Wärmeleitfähigkeit und ihrer Abhängigkeit vom Radius führte (**18**). Das letzte Kapitel behandelt kurz die Temperaturverteilung in gleich- und wechselstromdurchflossenen Drähten mit nichtleitender Hülle, ohne Berücksichtigung des Klemmeneinflusses und des Anfangszustandes.

## B. Ableitung und Integration der Differentialgleichungen für Gleich- und Wechselstrom bei niederen Frequenzen.

Es werden folgende Bezeichnungen angewandt, wobei als Einheiten cm, Gramm, sec., Ampère, Volt, Ohm, Grammkalorie und Celsiusgrade benutzt werden.

1) Durch die Trennung des radialen Temperaturgefälles vom longitudinalen wird die Übersicht über die Resultate sehr erleichtert. Diese Trennung der Untersuchung ist auch durch die betrachteten Verhältnisse selbst gerechtfertigt, da bei langen Drähten (z. B. Starkstromleitungen) der Klemmeneinfluß weitaus im größten Teil des Leiters verschwindet, während er für kurze Drähte fast allein wichtig ist (Sicherungen).

2) Hier schien die Berücksichtigung des Anfangszustands unnötig, da die zu erwartenden komplizierten Formeln (Doppelsummen) unübersichtlich sein dürften und keine wesentliche Änderung mit sich bringen werden. In diesen Problemen ist ja auch der stationäre Zustand am wichtigsten.

(1)	$r$	cm	Radius vektor
	$R$	cm	Drahtradius
	$x$	cm	Abstand von der einen Klemme
	$l$	cm	Länge des Drahts
	$D$	$\text{cm}^{-3} \text{ gr}$	Dichte
	$c$	$\text{cal gr}^{-1} \text{ Gr}^{-1}$	spezifische Wärme
	$\mu$	$\text{cal cm}^{-2} \text{ Gr}^{-1} \text{ sec}^{-1}$	äußeres Wärmeleitvermögen
	$\lambda$	$\text{cal cm}^{-1} \text{ Gr}^{-1} \text{ sec}^{-1}$	inneres Leitvermögen
	$\tau$	Gr	absolute Temperatur
	$u$	Gr	relative Temperatur, = 0 für die Umgebungstemperatur $\tau_0$
	$v$	Gr	Temperaturschwankung, = 0 für eine mittlere Oberflächentemp. $u_0 = \tau_1$
	$t$	sec	Zeit, = 0, wenn der Strom zu fließen beginnt
	$i$	Amp	Stromstärke, = $i_0$ für Gleichstrom, = $J \sin at$ für Wechselstrom
	$j$	$\text{cm}^{-2} \text{ Amp}$	Stromdichte, analog $j_0, J \sin at$
	$w$	cm Ohm	spezifischer Widerstand
	$T$	sec	Periode des Wechselstroms, = $\frac{2}{\nu}$
$\nu$	$\text{sec}^{-1}$	Wechselzahl (nicht Periodenzahl)	
$a$	$\text{sec}^{-1}$	Frequenz, = $\nu\pi$	
$\frac{1}{\mathcal{W}}$	$\text{cal Amp}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$	Wärme, die der Strom 1 beim Widerstand 1 in $t=1$ erzeugt, $\frac{1}{\mathcal{W}} = 0,2388$	
$k$	$\text{cm}^2 \text{ sec}^{-1}$	Temperaturleitfähigkeit, = $\frac{\lambda}{cD}$	
$h$	$\text{cm}^{-2} \text{ Gr}$	= $\frac{\mathfrak{J}^2 w}{\lambda \mathcal{W}}$	
$h_0$	$\text{cm}^{-2} \text{ Gr}$	= $\frac{j_0^2 w}{\lambda \mathcal{W}}$	
$g$	$\text{cm}^{-2}$	= $\frac{2\mu}{\lambda R}$	
$b$	$\text{cm}^{-2}$	= $\frac{2a}{k}$	

Die Wechselzahl wird als hinreichend klein vorausgesetzt, so daß die Verteilung des Stroms über den Querschnitt als konstant angesehen werden kann. Auch die zu erwartende Temperaturerhöhung muß als nicht zu groß angenommen werden, damit die Konstanten durch einen Mittelwert genau genug angegeben sind, eine Beschränkung, die teilweise aufgehoben werden kann. Vom Thomsons Effekt, der bei dem longi-

tudinalen Temperaturgefälle in Betracht kommen könnte, wird abgesehen. Der Draht sei an Klemmen von gut leitendem Material angeschlossen, deren Temperatur als die der Umgebung vorausgesetzt werde.

Man wird im Draht eine Temperaturverteilung erhalten, die auf konzentrischen Kreisen eines Querschnitts konstant sein muß; jedoch wird eine verschiedene Temperatur in verschiedenen Punkten eines Radius und einer Parallelen zur Drahtachse herrschen.

Für diesen Zustand ist die Differentialgleichung abzuleiten. In ein röhrenförmiges Volumelement vom innern Radius  $r$ , vom äußern Radius  $r + dr$ , dessen eine Endfläche an der Stelle  $x$  liegt und dessen andere bei  $x + dx$ , tritt während  $dt$  von der Achse her durch die innere Zylinderfläche die Wärmemenge

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r dx dt,$$

durch die äußere Fläche

$$\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r+dr} 2\pi(r+dr) dx dt = 2\pi dx dt \cdot \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} r + \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r dr\right);$$

an der Stelle  $x$  tritt durch den Querschnitt des Volumelements in der  $x$ -Richtung die Wärmemenge

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} dt \pi((r+dr)^2 - r^2) = -\pi dt \lambda 2r dr \frac{\partial u}{\partial x}$$

und an der Stelle  $x + dx$  ebenso

$$\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} dt \pi((r+dr)^2 - r^2) = \pi dt \lambda 2r dr \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\right)$$

Im Element wird bei der Stromdichte  $j$  während der Zeit  $dt$  die Joulesche Wärme

$$\frac{j^2 w dt}{\mathfrak{U}} dx \cdot \pi((r+dr)^2 - r^2) = \frac{j^2 w dt}{\mathfrak{U}} 2\pi r dr dx$$

erzeugt. Die Summe aller dieser Wärmemengen wird dazu verwendet, das Element um  $du$  zu erwärmen, es muß also die Gleichung bestehen:

$$2\pi dx dr dt \left[ \lambda \left( r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{j^2 w}{\mathfrak{U}} r \right] = cD \cdot 2\pi r dr dx \cdot dt \frac{\partial u}{\partial t}$$

oder

$$\lambda r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{j^2 w}{\mathfrak{U}} r = \frac{\partial u}{\partial t} cD r,$$

also für Gleichstrom

$$(2) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_0 = 0, \text{ wobei } k = \frac{\lambda}{cD}, h_0 = \frac{j^2 w}{\lambda \mathfrak{U}}$$

und für Wechselstrom

$$(3) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \sin^2 at = 0, \text{ wobei } h = \frac{\mathfrak{S}^2 w}{\lambda \mathfrak{U}}.$$

Die Dimensionen jedes Glieds sind  $\frac{\text{Temp.}}{(\text{Länge})^2}$

Statt (3) zu benutzen, führen wir zweckmäßig die komplexe Form ein; da

$$\sin^2 at = \frac{1}{2}(1 - \cos 2at) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Re \{ e^{2ait} \},$$

wird (3), wenn die komplexe Variable mit  $U$  bezeichnet wird und als physikalische Lösung

$$(4) \quad u = \Re \{ U \}$$

genommen wird, zu

$$(5) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0.$$

Zu den Differentialgleichungen (3) und (5) treten noch Grenzbedingungen; es kann keine Wärmestauung an der Drahtoberfläche auftreten, also muß die der Oberfläche zugeführte Wärme

$$-\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_R$$

gleich sein der durch sie abgegebenen (vgl. S. 12)

$$\mu u,$$

so daß die *Grenzbedingung* — für die Abhängigkeit von  $r$  — lautet:

$$(6) \quad \text{für } r = R: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\mu}{\lambda} u$$

Für die Enden gilt die Voraussetzung, daß ihre relative Temperatur Null ist:

$$(7) \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = l: \quad u = 0.$$

Die Anfangsbedingung sei:

$$(8) \quad \text{für } t = 0: \quad u = 0$$

Wenn wir von vornherein vom radialen Gefälle absehen, also die Temperatur im ganzen Querschnitt als konstant betrachten, müssen wir die Wärmeabgabe durch die Oberfläche schon in der Differentialgleichung berücksichtigen. Die Betrachtung eines Drahtelements von der Länge  $dx$ , welches durch die Oberfläche die Wärmemenge

$$\mu u 2\pi R dx dt$$

verliert, ergibt dann die Gleichung

$$\pi R^2 dx dt \left( \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{j^2 w}{2} - \frac{2\mu}{R} u \right) = c D \cdot \pi R^2 dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt;$$

diese gibt die gesuchte Differentialgleichung für das longitudinale Gefälle allein; für *Gleichstrom*:

$$(9) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - gu + h_0 = 0, \text{ wobei } g = \frac{2\mu}{R\lambda},$$

und für Wechselstrom:

$$(10) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - gu + h \sin^2 at = 0$$

oder

$$(11) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - gU - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0.$$

Hierzu wieder die Bedingungen (7) und (8).

In den Differentialgleichungen (9) bis (11) können wir auch die Abhängigkeit des Widerstands von der Temperatur:  $w_u = w(1 + \alpha u)$  berücksichtigen, indem wir an Stelle von  $g$ :  $g\left(1 - \alpha \frac{h_0}{g}\right)$  setzen.

Wir haben hier die Wärmeabgabe proportional der Temperaturdifferenz angenommen, was nach der Einleitung streng sicher nicht erlaubt ist; diese Annahme ist also zu rechtfertigen und insbesondere auf die Grenzen zu untersuchen, in denen sie gilt.

Das Wärmeabgabegesetz sei durch  $f(\tau)$  gegeben. Da  $\tau = \tau_0 + u$  ist ( $\tau_0$  die Temperatur der Umgebung),  $u$  aber nach Voraussetzung klein sein soll, kann  $f(\tau)$  nach dem Taylorschen Satz entwickelt werden:

$$f(\tau_0 + u) = f(\tau_0) + uf'(\tau_0) + \dots$$

Nun ist die Wärmeabgabe bei  $\tau_0$  Grad durch  $f(\tau_0)$  gegeben, also ist sie bei  $u$  Grad Celsius Temperaturüberschuß um  $uf'(\tau_0)$  größer als die von der Umgebung zugeführte Wärme, d. h. die Wärmeabgabe (vermindert um die Wärmefaufnahme) ist proportional der Temperaturdifferenz, wenn  $u^2 f''(\tau_0)$  vernachlässigt wird. Wie weit und mit welchem Fehler dies erlaubt ist, ist aus den früheren experimentellen Arbeiten nicht zu ersehen; vor allem kann noch nichts darüber ausgesagt werden, wie sich diese Vernachlässigung im fertigen Resultat merklich macht. Perényi<sup>1)</sup> schließt ihre Gültigkeit in die Grenzen 0,3 bis 3 Grad ein; Guye 50—60 Grad, Jaeger und Diesselhorst<sup>2)</sup> bis 80 Grad und Meyer, mit nicht großen Abweichungen, bis zur Schmelztemperatur von Blei und Kupfer.

Es wird also erlaubt sein, die Gesamtwärmeabgabe bis zu einer Temperaturdifferenz von etwa 20 Grad als proportional der Temperaturdifferenz anzunehmen, ohne daß man in den Endformeln größere Fehler begeht.

Wie wir in der Diskussion C sehen werden, können größere radiale und zeitliche Schwankungen nur bei höheren Temperaturen er-

1) Perényi. Bestimmungsmethoden der Wärmeemission und Temperatur elektrischer Leitungen. Elektrot. ZS. 5, 1884, S. 321.

2) W. Jaeger und H. Diesselhorst. Wärmeleitung, Elektrizitätsleitung, Wärmekapazität und Thermokraft einiger Metalle. (Mitteilung der phys. tech. Reichsanstalt.) Berl. Ber. 1899, S. 719.



halten werden; da dann aber die Differentialgleichungen den bei ihrer Aufstellung gemachten Voraussetzungen widersprechen, müssen wir die Ansätze erweitern oder umformen. Eine Erweiterung derart, daß wir den Widerstand im allgemeinen Fall, die Wärmeleitkonstanten, die Verlängerung des Drahts usw. in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur einführen, stößt auf unlösbare Gleichungen. Wir suchen daher die Differentialgleichungen nicht mehr für die Temperaturdifferenz gegen die Umgebungstemperatur, sondern nur die für die *Schwankungen um eine mittlere Temperatur*. Wir können demnach den Anfangszustand und das longitudinale Gefälle, da hier von einer konstanten Mitteltemperatur nicht die Rede sein kann, weil für  $t = 0$  bzw.  $x = 0$  und  $l$  die ganze Temperaturdifferenz Null sein muß, nicht mehr berücksichtigen.

Die Wärmeabgabe ist jetzt

$$f(\tau_1 + v) = f(\tau_1) + v f'(\tau_1),$$

während von der Umgebung  $f(\tau_0)$  hinzukommt. Demnach ist nun die Wärmeabgabe vermindert um die Zufuhr

$$E = f(\tau_1) - f(\tau_0) + v f'(\tau_1)$$

von der Form

$$E = A_0 + \mu v.$$

Die Grenzbedingung (6) wird unter diesen Umständen, wenn wir dort  $u_0 + v$  statt  $u$  setzen und den Konstanten die der neuen Temperatur  $u_0$  entsprechenden Werte geben:

$$-\lambda \left( \frac{\partial(u_0 + v)}{\partial r} \right)_R = A_0 + \mu v_R,$$

oder, da  $u_0$  die zeitlich und in bezug auf  $r$  konstante Mitteltemperatur bedeutet:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{A_0}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} v \text{ für } r = R.$$

Um auch die Grenzbedingung auf die alte Form (6) zu bringen, setzen wir

$$(12) \quad A_0 + \mu v = \bar{u} \mu, \quad \bar{u} = v + \frac{A_0}{\mu};$$

$\bar{u}$  bedeutet eine solche Temperatur  $u$ , die dieselbe Wärmeabgabe ergeben würde, wenn diese exakt proportional der Temperaturdifferenz wäre. Die Differentialgleichungen für  $\bar{u}$  heißen nun, da auf das longitudinale Gefälle und den Anfangszustand keine Rücksicht genommen werden kann, also  $\bar{u}$  von  $x$  unabhängig ist, nach (2) und (5) für Gleichstrom

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{h}_0 = 0,$$

und für Wechselstrom, wenn  $\bar{U}$  die entsprechende komplexe Variable ist, und dann

$$(14) \quad \bar{u} = \Re\{\bar{U}\}$$

genommen wird:

$$(15) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0,$$

mit der Grenzbedingung

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{\mu}{\lambda} \bar{u} \text{ für } r = R,$$

so daß die Integrale dieselben sind wie für die entsprechenden  $u$ ; dies ist erklärlich, da die Differentialgleichung  $\mu$  nicht enthält.

Statt so zu schließen, hätte man auch folgendermaßen verfahren können: das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist unabhängig von dem Wärmeabgabegesetz; die im Integral vorkommenden Konstanten haben natürlich für hohe Temperaturen andere Zahlenwerte als für niedere; für die Konstanten ( $w$ ,  $c$ ,  $D$  usw.) sind also jedesmal in das allgemeine Integral die Mittelwerte einzuführen, die der Oberflächentemperatur entsprechen — diese aber ergibt sich erst aus dem Integral, da wir bei großen Differenzen der Umgebungs- und Oberflächentemperatur zwar von den Unterschieden der Konstantenwerte auf Punkten eines Radius absehen, aber nicht mehr die Werte für die Umgebungstemperatur als Werte für die Oberflächentemperatur annehmen können. — Da die Grenzbedingung nur Einfluß auf die Bestimmung der Integrationskonstanten hat, brauchen wir hier nicht bei dem linearen Gesetz stehen bleiben, sondern setzen es als Funktion der Temperaturdifferenz  $\tau_1 - \tau_0 = u$  und im allgemeinen von  $u$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  bekannt voraus, so daß (6) wird zu  $\frac{\partial u}{\partial r} = W(u, \tau_0)$  für  $r = R$ . Hierin ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung einzusetzen und die Integrationskonstante zu bestimmen. Dabei muß zunächst irgend eine Temperatur für die Konstanten ( $w$ ,  $c$ , usw.) gewählt und hieraus die Oberflächentemperatur in erster Näherung berechnet werden; dann müssen mit dieser wieder die Konstantenwerte berechnet, diese in die Grenzbedingung eingesetzt, die Integrationskonstante und damit die Temperaturverteilung berechnet werden usw.

### 1. Gleichstrom, kein radiales und longitudinales Temperaturgefälle.

$u_{g,a}(t)^{1)}$

Aus (9) wird

$$-\frac{1}{k} \frac{du}{dt} - gu + h_0 = 0$$

1) Die Indices  $g$ ,  $w$ ,  $a$  bedeuten bzw. Gleichstrom, Wechselstrom und Berücksichtigung des Anfangszustandes.

mit dem allgemeinen Integral

$$u = Ce^{-gkt} + \frac{h_0}{g}.$$

Aus (8) bestimmt sich  $C = -\frac{h_0}{g}$ , also wird

$$(17) \quad u_{ga}(t) = \frac{h_0}{g} [1 - e^{-gkt}].$$

Der Einfluß des Anfangszustandes verschwindet nach hinreichend langer Zeit (bei dicken Drähten etwa nach 10 Minuten), und zwar um so rascher, je größer  $gk$  ist, also je kleiner  $R$  ist, unabhängig von der inneren Wärmeleitfähigkeit. Das Glied  $\frac{h_0}{g}$  (Dimension: Temperatur) gibt die im stationären Zustand erreichte konstante Mitteltemperatur an, die wir in (1) mit  $u_0$  bezeichnet haben. Die Gleichung  $u_0 = h_0/g$  gilt mit Sicherheit nur, wenn sich  $u_0$  nicht größer als etwa  $20^\circ$  ergibt. Benützen wir die Werte von (1), so ist

$$u_0 = \frac{j_0^2 w R}{2 \mathfrak{A} \mu} = \frac{i_0^2 w}{2 \mathfrak{A} \mu \pi^2 R^3},$$

was mit der bei Kohlrausch<sup>1)</sup> S. 409 angegebenen Formel  $u_0 = \frac{C i_0^2}{2 \pi^2 R^3}$  übereinstimmt.

**2. Gleichstrom, longitudinales Temperaturgefälle.**  $u_g(x, t)$ .

Aus (9) wird, wenn wir zunächst  $u$  von  $t$  unabhängig sein lassen,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - gu + h_0 = 0$$

mit dem Integral

$$u = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{g} \alpha (e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)}).$$

Aus den Grenzbedingungen (7) folgt

$$(18) \quad \alpha = -\frac{1}{1 + e^{-\sqrt{g}l}}.$$

Mit dieser Bestimmung der Konstanten wird

$$(19) \quad u_g(x) = \frac{h_0}{g} \left\{ 1 + \alpha (e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)}) \right\} = \frac{h_0}{g} \left\{ 1 - \frac{e^{-\sqrt{g}(x-\frac{l}{2})} + e^{-\sqrt{g}(\frac{l}{2}-x)}}{e^{\sqrt{g}\frac{l}{2}} + e^{-\sqrt{g}\frac{l}{2}}} \right\},$$

was mit der Formel von Lord Kelvin übereinstimmt. Die Kurve, die  $u$  als Funktion von  $x$  darstellt, steigt von  $x = 0$  anfangs rasch an, bis sie für  $x = \frac{l}{2}$  ihren höchsten Wert erreicht; dann fällt sie symmetrisch. Wir können diese Kurve mit Tumlirz-Krug kurz Gewöbelinie nennen, wenn der Ausdruck auch nicht ganz bezeichnend ist. Vgl. 16, (110), (111). Bei großem  $l$  oder kleinem  $R$  verläuft sie in genügendem Abstand von den Klemmen horizontal.

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., Leipzig 1911.

Aus (9) wird, wenn wir jetzt  $u$  auch von  $t$  abhängen lassen, um den Anfangszustand zu berücksichtigen:

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - gu + h_0 = 0.$$

Wir setzen

$$u = \psi(x)f(t) + \psi_1(x)$$

und erhalten die einzelnen Differentialgleichungen

$$\psi_1'' - g\psi_1 + h_0 = 0, \quad \frac{f'}{f} = -C, \quad \psi'' + \frac{C - gk}{k} \psi = 0$$

mit den Integralen

$$\psi_1 = u_g(x), \quad f = e^{-Ct},$$

$$\psi = b_1 \sin \sqrt{\frac{C - gk}{k}} x + b_2 \sin \sqrt{\frac{C - gk}{k}} (l - x).$$

Aus (7) folgt

$$C = \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + g \right) k, \quad n = 1, 2, \dots$$

und daher

$$\psi = b_1^{(n)} \sin \frac{n\pi}{l} x + b_2^{(n)} \sin \frac{n\pi}{l} (l - x) = (b_1^{(n)} - (-1)^n b_2^{(n)}) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Die Koeffizienten  $b_1^{(n)} - (-1)^n b_2^{(n)} = b_n$  bestimmen sich als Koeffizienten der Fourierschen Reihe

$$\sum b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = -\frac{h_0}{g} \left[ 1 + \alpha (e^{-V\bar{g}x} + e^{-V\bar{g}(l-x)}) \right]^1,$$

und wir erhalten schließlich

$$(20) u_{g\alpha}(x, t) = \frac{h_0}{g} \left[ 1 + \alpha (e^{-V\bar{g}x} + e^{-V\bar{g}(l-x)}) - \frac{2}{l} \sum_1^{\infty} (1 - (-1)^n) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + g\right) kt} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \left\{ \frac{l}{n\pi} + \alpha \frac{\frac{n\pi}{l} g}{1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} g} (1 - (-1)^n e^{-V\bar{g}l}) \right\} \right].$$

Von der Gewölbelinie ist also eine Reihe von Sinuslinien abzuziehen, deren Exponentialfaktoren nach unendlich langer Zeit verschwinden; die höheren Glieder haben jedoch schon nach wenigen Sekunden — bei nicht zu großen  $l$  — einen Wert kleiner als 1% des Anfangswertes<sup>2)</sup>. Demnach ist schon nach wenigen Sekunden nur das erste Glied abzuziehen, der halbe positive Bogen einer Sinuslinie.

### 3. Gleichstrom, radiales Temperaturgefälle. $u_g(r, t)$ .

Aus (2) wird für den stationären Zustand

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + h_0 = 0$$

1) Hier, wo der Anfangszustand symmetrisch ist, hätte man von Anfang an  $b_1 = b_2$  setzen können, da die geraden Glieder der Reihe verschwinden müssen.

2) Einige Werke von  $k$  sind: für Al 0,8; Pb 0,2; Fe 0,2; Cu 1,1; Pt 0,3; Ag 1,7; Bi 0,07; Zn 0,4, vgl. auch (89).

mit dem Integral

$$u = C_1 \ln r - \frac{h_0}{4} r^2 + C;$$

$C_1$  muß 0 sein, da sonst für Punkte in der Drahtachse die Temperatur unendlich würde. Aus (6) bestimmt man  $C$ :

$$C = \frac{h_0}{4} R^2 + \frac{\lambda h_0}{2\mu} R,$$

so daß

$$(21) \quad u_g(r) = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2).$$

Wir bekommen hier, da die Abkühlung an den Enden nicht berücksichtigt ist, wieder die konstante Temperatur  $u_0$ , die jetzt aber nur für  $r = R$  gilt; im Innern ist die Temperatur höher und zwar in der Drahtachse um

$$(22) \quad D_x = \frac{h_0}{4} R^2 = \frac{J_0^2 w}{4\lambda \vartheta} R^2,$$

wie es Cranz gefunden hat. Die Temperatur nimmt mit wachsendem  $r$  erst langsam, dann rascher ab.

Berücksichtigen wir das zu 1 (12) Gesagte, so erhalten wir für hohe Mitteltemperaturen die radiale Differenz aus

$$\bar{u} = \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \frac{h_0}{g},$$

also

$$v = \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \frac{h_0}{g} - \frac{A_0}{\mu}.$$

Da  $v$  nur die von  $r$  abhängige Differenz bedeutet und für  $r = R$  Null sein muß, ist  $\frac{h_0}{g} = \frac{A_0}{\mu}$ , also

$$(23) \quad v_g(r) = \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2).$$

(22) behält demnach dieselbe Form, nur kann jetzt  $i_0$  und  $R$  beliebig verändert werden, da die Bedingung wegfällt, daß  $u_0$  kleiner als 20 Grad sein muß.<sup>1)</sup>

1) In diesem Sonderfall ist es auch möglich, das strenge Wärmeabgabegesetz zu berücksichtigen; nach dem Stefanschen Strahlungsgesetz (über Werte der Konstanten vgl. z. B. Wamsler a. a. O.) ist

$$W_s = u_s[(\tau_0 + u)^4 - \tau_0^4];$$

für Konvektion und Leitung gilt, wenigstens für große Oberflächen,

$$W_k = \mu_k u^{3/4},$$

so daß die Grenzbedingung (6) streng heißt:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \alpha[(\tau_0 + u)^4 - \tau_0^4] + \beta u^{3/4} \text{ für } r = R.$$

Setzen wir hierin

$$u = -\frac{h_0}{4} r^2 + C$$

Um den Anfangszustand zu berücksichtigen, lassen wir  $u$  auch von  $t$  abhängen und setzen in der so entstehenden Differentialgleichung

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + h_0 = 0:$$

$$u = \Sigma \varphi(r) F(t) + \varphi_1(r), \text{ wo } \varphi_1(r) = u_g(r) \text{ ist.}$$

Daraus erhalten wir die einzelnen Differentialgleichungen

$$\frac{F'}{F} = \mathfrak{C}',$$

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{\mathfrak{C}'}{k} \varphi = 0$$

mit den Integralen

$$F = e^{\mathfrak{C}' t}$$

$$\varphi = f J_0\left(r \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}}\right) + g Y_0\left(r \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}}\right).$$

Hierbei bedeutet  $J_0$  die Besselsche Funktion erster Art,  $Y_0$  zweiter Art, beide nullter Ordnung. Da  $Y_0(0)$  unendlich ist, muß der Koeffizient  $g$  null sein.

Es ist, um auch zugleich die Besselsche Funktion erster Art erster Ordnung  $J_1$  einzuführen, deren Zusammenhang mit  $J_0$  durch

$$(24) \quad J_0'(x) = -J_1(x)$$

gegeben ist:

$$(25) \quad \begin{cases} J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1!^2 \cdot 2^2} + \frac{x^4}{2!^2 \cdot 2^4} - \frac{x^6}{3!^2 \cdot 2^6} + \dots \\ J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1! \cdot 2! \cdot 2^2} + \frac{x^4}{2! \cdot 3! \cdot 2^4} - \dots \right\} \end{cases}$$

und

$$(26) \quad \begin{cases} J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{1!^2 \cdot 2^2} + \frac{x^4}{2!^2 \cdot 2^4} + \dots \\ i J_1(ix) = \frac{-x}{2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{1! \cdot 2! \cdot 2^2} + \frac{x^4}{2! \cdot 3! \cdot 2^4} + \dots \right\}. \end{cases}$$

Es wird zunächst

$$u = u_g(r) + f J_0\left(r \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}}\right) e^{\mathfrak{C}' t},$$

wo  $\mathfrak{C}'$  nach der Grenzbedingung (6) zu bestimmen ist:

$$(27) \quad \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}} J_0'\left(R \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}}\right) = -\frac{\mu}{\lambda} J_0\left(R \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}}\right).$$

Dies ergibt keine positive Lösung  $\mathfrak{C}'$ ; denn setzen wir

$$R \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}'}{k}} = ix,$$

ein, so läßt sich  $C$  (graphisch, größer als  $\frac{h_0 R^2}{4}$ ) bestimmen und es ist dem physikalischen Problem entsprechend zu erwarten, daß es nur eine derartige Lösung gibt; vgl. auch S. 14.

so erhalten wir mit (24)

$$iJ_1(ix) = \frac{\mu}{x\lambda R} J_0(ix).$$

Nun ist  $iJ_1(ix)$  für positive  $x$  immer negativ und für negative  $x$  stets positiv;  $J_0(ix)$  ist für alle  $x$  positiv, so daß die rechte Seite ebenfalls mit  $x$  das Zeichen wechselt. Da beide Seiten stets entgegengesetztes Zeichen haben, kann  $\mathfrak{C}$  nicht positiv sein; wir setzen deshalb

$$\mathfrak{C}' = -\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C} > 0,$$

wodurch die Grenzbedingung (27), wenn wir noch

$$R\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{k}} = \vartheta$$

setzen, zu

(28)

$$\frac{J_0(\vartheta)}{J_1(\vartheta)} = \frac{\lambda}{\mu R} \vartheta$$

wird. Positive und negative  $\vartheta$  ergeben die gleichen absoluten Beträge der Wurzeln, da  $J_0$  eine gerade,  $J_1$  eine ungerade Funktion ist, so daß die rechte Seite mit der linken das Zeichen wechselt. Wir brauchen also nur die positiven Wurzeln dieser transzendenten Gleichung aufzusuchen, da der Wert der  $\mathfrak{C}$  von dem Vorzeichen der  $\vartheta$  unabhängig ist. Die Gleichung hat unendlich viele positive Wurzeln. Aus den bei Jahnke<sup>1)</sup> S. 111f. angegebenen Werten für  $J_0$  und  $J_1$  berechnet man  $\frac{J_0}{J_1}$ :

	$\vartheta$	$\frac{J_0}{J_1}$	$\vartheta$	$\frac{J_0}{J_1}$
	0,00	$\infty$	3,84	+ 122
	0,01	200	3,85	55
	0,02	100	4,0	6,0
	0,03	66	5,5	0,02
	0,04	50		
			7,00	- 63,9
	0,05	40	7,01	- 177
(29)	0,06	33	7,02	+ 231
	0,07	28	7,03	70
	0,08	25	7,5	1,97
	0,09	22		
			9,0	- 0,37
	0,10	20	10,0	- 5,65
	0,50	3,9	10,17	- 277
	2,0	0,4	10,18	+ 156
	3,5	- 2,8	10,19	61
	3,83	- 575		usw.

1) Jahnke und Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909.

Hieraus findet man graphisch oder durch Interpolation die Wurzeln  $\vartheta_n$  von (28);  $\frac{\lambda}{\mu R}$  ist für  $R = 1$  (vgl. 89) für Kupfer 530, für Eisen 125; bei kleinerem  $\frac{\lambda}{\mu R}$  wird  $\vartheta_1$  größer, während die höheren  $\vartheta_n$  von  $R$  und vom Material merklich unabhängig sind, da der Quotient  $\frac{J_0}{J_1}$  rasch abnimmt.<sup>1)</sup> Die Wurzeln  $\vartheta_n$  differieren schließlich um  $\pi$ , wie die Wurzeln der Besselschen Funktion  $J_1$ .

Die Konstanten  $f_n$  sind aus der Anfangsbedingung (8) zu bestimmen, d. h. aus

$$(30) \quad \sum f_n J_0\left(\frac{r\vartheta_n}{R}\right) = -u_g(r) = -\left[\frac{h_0}{4}(R^2 - r^2) + \frac{h_0}{g}\right] = f(r),$$

indem wir in

$$(31) \quad u = \sum f_n J_0\left(\frac{r\vartheta_n}{R}\right) e^{-\frac{\vartheta_n^2}{R^2}kt} + u_g(r)$$

$t = 0$  setzen. Es handelt sich also um die Aufgabe, eine Funktion durch eine Summe Besselscher Funktionen nullter Ordnung darzustellen.

4. Darstellung einer Funktion durch eine Reihe Besselscher Funktionen nullter Ordnung.

Nach Schafheitlin<sup>2)</sup> S. 72 ist die Darstellung einer Funktion

$$f(x) = \sum_{\lambda}^{\infty} a_{\lambda} J_0(\vartheta_{\lambda} x)$$

möglich, wenn die  $\vartheta_{\lambda}$  Wurzeln einer Gleichung

$$A J_0(\vartheta) + B \vartheta J_1(\vartheta) = 0$$

sind, wobei  $A$  und  $B$  konstant ist. Denn wenn man die beiden Seiten der ersten Gleichung mit  $x J_0(x \vartheta_{\mu}) dx$  multipliziert und von 0 bis 1 integriert, so verschwinden die Integrale mit ungleichem Index und die mit gleichem Index sind von Null verschieden.

Da wir unsere Funktion von Null bis  $R$  darzustellen haben und in den Besselschen Funktionen der Maßstab im Verhältnis  $1 : R$  vergrößert ist gegen den bei Schafheitlin, so haben wir die mit  $r J_0\left(\frac{r\vartheta_m}{R}\right) dr$  multiplizierte Gleichung von 0 bis  $R$  zu integrieren.

1) Für  $R = 0,1$  ist  $\vartheta_1 = 0,02$  für Cu,  $0,04$  für Fe;  $\vartheta_2$  ist 3,832,  $\vartheta_3 = 7,016$ .

Da für so kleine  $\vartheta_1$  die Näherung  $J_0 = 1$ ,  $J_1 = \frac{1}{2} \vartheta$  gilt, wird (28)  $1 = \frac{\lambda \vartheta_1^2}{2\mu R}$ , also  $\vartheta = R \sqrt{g}$ , was in (31) den Übergang zu (17) ergibt, wenn wir nur das erste Glied in der Reihe berücksichtigen.

2) Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig 1908.



Wir erhalten also

$$(32) \quad \int_0^R r f(r) J_0\left(r \frac{\vartheta_m}{R}\right) dr = \sum_1^{\infty} f_n \int_0^R J_0\left(r \frac{\vartheta_n}{R}\right) J_0\left(r \frac{\vartheta_m}{R}\right) r dr.$$

Die transcendente Gleichung (28) mit den Wurzeln  $\vartheta_n$  wird jetzt zweckmäßiger geschrieben:

$$(33) \quad J_0(\vartheta) - \frac{\lambda \vartheta}{\mu R} J_1(\vartheta) = 0.$$

Wenn wir noch eine Formel von Schafheitlin übernehmen, a. a. O. S. 68, nämlich

$$(34) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int_a^b x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \left[ x (\alpha J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)) \right]_a^b,$$

dann wird bei verschiedenem Index nach (33)

$$(35) \quad \int_0^R r J_0\left(\frac{\vartheta_n}{R} r\right) J_0\left(\frac{\vartheta_m}{R} r\right) dr = 0.$$

Für gleiche Wurzeln der Gleichung (33) dagegen wird

$$\int_0^R r J_0^2\left(r \frac{\vartheta_n}{R}\right) dr = R^2 \left[ \frac{(\vartheta_n J_0(\vartheta_n) J_1(\vartheta_n) - \vartheta_n J_0(\vartheta_n) J_1(\vartheta_n))}{\vartheta_n^2 - \vartheta_n^2} \right]_{\vartheta_n = \vartheta_n} = \frac{0}{0};$$

dieser unbestimmte Ausdruck wird nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung unter Benutzung von

$$J_1'(\vartheta_n) = J_0(\vartheta_n) - \frac{1}{\vartheta_n} J_1(\vartheta_n),^1)$$

sowie (24) und (33) berechnet als

$$(36) \quad \int_0^R r J_0^2\left(\frac{r \vartheta_n}{R}\right) dr = \frac{R^2 J_0^2(\vartheta_n)}{2} \left[ 1 + \left(\frac{\mu R}{\lambda \vartheta}\right)^2 \right].$$

Nach (35) und (36) werden die Koeffizienten  $f_n$ , wenn in (32)  $m = 1, 2 \dots$  genommen wird

$$(37) \quad f_n = \frac{2 \int_0^R r J_0\left(\frac{r \vartheta_n}{R}\right) f(r) dr}{R^2 J_0^2(\vartheta_n) \left[ 1 + \left(\frac{\mu R}{\lambda \vartheta}\right)^2 \right]}.$$

1) Vgl. Schafheitlin, a. a. O. S. 10:

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'$$

5. Bestimmung der Koeffizienten  $f_n$  in 3.

Da die darzustellende Funktion  $f(r)$  nur ein von  $r$  abhängiges Glied hat, nämlich  $r^2$ , sind die zwei auszuwertenden Integrale

$$I_1^{(n)} = \int_0^R r J_0 \left( r \frac{\vartheta_n}{R} \right) dr, \quad I_2^{(n)} = \int_0^R r^3 J_0 \left( r \frac{\vartheta_n}{R} \right) dr.$$

Auf  $I_1$  wenden wir (34) an, wo wir  $\beta$  gleich Null zu setzen haben, und erhalten

$$I_1^{(n)} = \frac{R^2}{\vartheta_n} J_1(\vartheta_n) = \frac{\mu R^3}{\lambda \vartheta_n^2} J_0(\vartheta_n).$$

Das zweite Integral integrieren wir zweimal partiell und machen von derselben Formel Gebrauch, wobei zu beachten ist, daß  $J_1(0) = 0$  ist; so wird

$$I_2^{(n)} = R^2 I_1^{(n)}.$$

Demnach werden die Koeffizienten nach leichter Reduktion

$$(38) \quad f_n = \frac{-h_0}{J_0(\vartheta_n) \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]}$$

und damit

$$(39) \quad u_{ga}(r, t) = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \sum_1^{\infty} f_n J_0 \left( r \frac{\vartheta_n}{R} \right) e^{-\frac{\vartheta_n^2}{R^2} \lambda t}.$$

Da  $\vartheta_n^2$  sehr rasch mit  $n$  zunimmt, ist schon nach wenigen Sekunden nur das erste Glied der Summe zu berücksichtigen; in genügendem Abstand von den Enden (weil das longitudinale Gefälle nicht beachtet ist) wird also die Temperatur nach einem Exponentialgesetz ansteigen und sich (vgl. die Anmerkung zu (29) und (17)) in etwa 10 Minuten bei einem dicken Draht der Höchsttemperatur annähern. Da  $J_0 \left( \frac{\vartheta_1 r}{R} \right)$  mit wachsendem  $r$  abnimmt, macht sich innen der Einfluß des Anfangszustandes etwas länger bemerkbar, doch ist der Unterschied von  $J_0(0)$  und  $J_0(\vartheta_1)$  nicht bedeutend. Die Temperaturdifferenz von Punkten in der Drahtachse gegen Punkte in der Oberfläche ist zu Beginn kleiner als im stationären Zustand; da die negative Summe den übrigen Teil der rechten Seite der Gleichung darstellt, ist auch die Differenz für  $r=0$  und  $r=r$  durch

$$\frac{h_0}{4} r^2 + \sum f_n \left\{ 1 - J_0 \left( r \frac{\vartheta_n}{R} \right) \right\} e^{-\frac{\vartheta_n^2}{R^2} \lambda t}$$

gegeben; auch hier kommt nach wenigen Sekunden nur das Glied für  $n=1$  in Betracht.

**6. Gleichstrom, radiales und longitudinales Temperaturgefälle.  $u_g(r, x)$ .**

Aus (2) wird, da wir hier den Anfangszustand nicht berücksichtigen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_0 = 0.$$

Wir setzen

$$u = \Sigma \varphi(r) \psi(x) + \varphi_1(r),$$

wo wieder  $\varphi_1(r) = u_g(r)$  ist, und erhalten die einzelnen Differentialgleichungen

$$\frac{\psi''}{\psi} = \mathfrak{B}, \quad \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + \mathfrak{B} \varphi = 0$$

mit den Integralen

$$\psi = \mathfrak{b} \{ e^{-\sqrt{\mathfrak{B}}x} + e^{-\sqrt{\mathfrak{B}}(l-x)} \}, \quad \varphi = \mathfrak{b} J_0(r \sqrt{\mathfrak{B}}).$$

Für  $r = R$  muß  $\varphi$  der Grenzbedingung (6) genügen:

$$\sqrt{\mathfrak{B}} J_1(R \sqrt{\mathfrak{B}}) = \frac{\mu}{\lambda} J_0(R \sqrt{\mathfrak{B}}).$$

Diese Gleichung hat wie (27) und (28) unendlich viele positive Wurzeln  $\mathfrak{B}_n$ ; wenn wir wieder  $\mathfrak{g}_n$  einführen, wird

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{g}_n^2}{R^2}.$$

Damit erhalten wir

$$u = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \sum \mathfrak{b}_n J_0 \left( \frac{r \mathfrak{g}_n}{R} \right) \mathfrak{d}_n \left\{ e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} x} + e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} (l-x)} \right\}.$$

Dieser Ausdruck muß noch den Grenzbedingungen (7) gemäß bestimmt werden:

$$u_g(r) + \sum \mathfrak{b}_n J_0 \left( \frac{r \mathfrak{g}_n}{R} \right) \mathfrak{d}_n \left\{ 1 + e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} l} \right\} = 0.$$

Da einer der Faktoren willkürlich festgesetzt werden kann, wählen wir, um  $\mathfrak{b}_n$  in einfacher Form zu erhalten

$$(40) \quad \mathfrak{b}_n = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} l}}$$

und bestimmen dann die  $\mathfrak{b}_n$  aus der Gleichung

$$\sum \mathfrak{b}_n J_0 \left( \frac{r \mathfrak{g}_n}{R} \right) = - \left[ \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) \right],$$

die dieselbe ist wie für  $f_n$ ; es wird demnach

$$(41) \quad u_g(r, x) = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \sum_1^{\infty} f_n \mathfrak{d}_n J_0 \left( \frac{r \mathfrak{g}_n}{R} \right) \left\{ e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} x} + e^{-\frac{\mathfrak{g}_n}{R} (l-x)} \right\}.$$

Wenn wir wieder in der Summe nur das erste Glied berücksichtigen, was schon bei kleinem  $l$  und nicht zu kleinem  $x$  erlaubt ist, und wenn wir  $J_0\left(\frac{r\sqrt{1}}{R}\right) = 1$  setzen (siehe oben), so erhalten wir

$$u_g(r, x) \cong u_g(r) + f_1 b_1 \left\{ e^{-\frac{s_1}{R}x} + e^{-\frac{s_1}{R}(l-x)} \right\}.$$

Hieraus sieht man, daß in einiger Entfernung vom Ende die Temperaturerniedrigung unabhängig vom radius vektor  $r$  ist.

Die Differentialgleichung für dieses Problem läßt sich auch auf einem anderen Wege lösen; setzen wir

$$u = \sum \varphi(r)\psi(x) + \psi_1(x),$$

so erhalten wir die einzelnen Differentialgleichungen

$$\psi_1'' + h_0 = 0, \quad \frac{\psi''}{\psi} = -\mathfrak{M}, \quad \varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' - \mathfrak{M}\varphi = 0.$$

Die erste hat als Integral

$$\psi_1 = -\frac{h_0}{2}x^2 + Cx + C',$$

worin nach (7)

$$C' = 0, \quad C = \frac{h_0}{2}l$$

zu setzen ist, so daß die Temperatur in erster Annäherung einen parabolischen Verlauf hat; dies ist die Temperaturverteilung in einem Draht, der keine Wärme durch die Oberfläche abgibt, denn für  $\mu = 0$  wird die Differentialgleichung  $\frac{d^2u}{dx^2} = \text{const.}$ ; die Abweichung davon kann jedoch — bei kleinem  $R$  oder großem  $l$  — beträchtlich sein, da für  $\mu \neq 0$  die Temperaturkurve in der Mitte lang horizontal verläuft. Ferner erhalten wir analog S. 16

$$\psi = m_n \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Die Differentialgleichung für  $\varphi$  führt auf eine Besselsche Funktion rein imaginären Arguments:

$$\varphi = J_0\left(r \frac{n\pi}{l}i\right).$$

Es wird also

$$u = \frac{h_0}{2}x(l-x) + \sum_1^{\infty} m_n J_0\left(r \frac{n\pi}{l}i\right) \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Hierin müssen die  $m_n$  so bestimmt werden, daß (6) genügt wird, also aus der Fourierschen Reihe

$$\sum \left\{ iJ_0'\left(R \frac{n\pi}{l}i\right) \frac{n\pi}{l} + \frac{\mu}{\lambda} J_0\left(R \frac{n\pi}{l}i\right) \right\} m_n \sin \frac{n\pi}{l}x = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{h_0}{2}x(l-x).$$

Da  $J'_0(xi)i$  und  $J_0(xi)$  durchaus reell und stets positiv sind, ergibt die Bestimmung der  $m_n$  endliche reelle Werte, und zwar wird

$$(42) \quad m_n = \frac{-\frac{\mu h_0 l^3}{\lambda n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n)}{-\frac{n\pi}{l} i J_1\left(R \frac{n\pi}{l} i\right) + \frac{\mu}{\lambda} J_0\left(R \frac{n\pi}{l} i\right)}.$$

Damit wird

$$(43) \quad u_g(r, x)_2 = \frac{h_0}{2} x(l-x) + \sum_1^{\infty} m_n \left(r \frac{n\pi}{l} i\right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Auch hier wird im wesentlichen das erste Glied von Einfluß sein; wir haben jetzt, da  $m_1$  negativ ist, im wesentlichen von der Parabel  $x(l-x)$  eine halbe Sinuslinie abzuziehen, wodurch in der Mitte der horizontale Verlauf entstehen kann. In einem Querschnitt nahe der Klemme sind die Temperaturen und radialen Differenzen klein, vermöge des Faktors  $\sin \frac{\pi x}{l}$ , und nehmen dann zueinander proportional zu, so lange der Sinus durch das Argument ersetzt werden kann.

Wir haben hier dieselbe Gleichung durch zwei vollständig verschiedene Reihen transzendenter Ausdrücke integriert, die physikalisch beide brauchbar sind, da sie mindestens halbkonvergent sind und in den ersten Gliedern rasch abnehmen.

Wir können fragen, unter welchen Umständen wir aus den Gleichungen (41) oder (43) die Gleichungen (19) und (21) ableiten können.

Die radiale Temperaturdifferenz ist nach (22)  $\frac{h_0 R^2}{4}$ , soweit es sich um den von Ort und Zeit unabhängigen Teil handelt. Wenn diese klein ist gegen die gesamte Temperaturerhöhung  $\frac{h_0}{g} = \frac{h_0 \lambda R}{2\mu}$ , vgl. (17), (20), wenn also

$$R^2 \text{ klein gegen } \frac{\lambda R}{\mu}, \quad R \text{ klein gegen } \frac{\lambda}{\mu}$$

ist, so müssen wir, wenn wir überall diese Vernachlässigung begehen, zu  $u_g(x)$  gelangen; natürlich ist erst recht  $r^2$  gegen  $\frac{\lambda r}{\mu}$  und  $\frac{\lambda R}{\mu}$  zu vernachlässigen.

Hierdurch wird zunächst (41)

$$u = \frac{h_0}{g} + \sum f_n \delta_n J_0\left(r \frac{\vartheta_n}{R}\right) \left\{ e^{-\frac{\vartheta_n}{R} x} + e^{-\frac{\vartheta_n}{R} (l-x)} \right\}.$$

Nach der Anmerkung 1 auf S. 20 wird, wenn wir jetzt die höheren Potenzen des dimensionslosen  $\vartheta_1$  gegen 1 vernachlässigen,  $f_1$  bestimmt aus (30) zu

$$(44) \quad f_1 = -\frac{h_0}{g},$$

wie auch aus (38) direkt zu ersehen ist, wenn wir  $\frac{\lambda}{\mu}$  gegen  $\frac{2}{R}$  vernachlässigen. Somit wird das erste Glied der Summe in (41)

$$u = \frac{h_0}{g} - \frac{h_0}{g} b_1 (e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)}),$$

was die gesuchte Gleichung (19) ist. Es müssen demnach auch die höheren Glieder der Summe, für  $n=2, 3, \dots$ , gegen das erste klein sein. Nun wird für größere Indizes  $\vartheta_n$  rasch größer, wir sahen, daß  $\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \pi$ ; also wird der von  $x$  abhängige Faktor kleiner.  $J_0$  nimmt allmählich ab (oszillierend), so daß nur noch der Verlauf der  $f_n$  eine Vergrößerung bewirken könnte. Hier haben wir jedoch nach (38) das rasch wachsende  $\vartheta_n^2$  im Nenner, das mit dem allmählich kleiner werdenden  $J_0$  multipliziert ist, so daß in der Tat die höheren Glieder vernachlässigt werden können.

Die Gleichung (43) kann nicht auf die alte Form (19) gebracht werden wegen der verschiedenen Transzendenten. Über die Vernachlässigung des longitudinalen Gefälles siehe 11. Dagegen geht (43) für  $\mu = 0$ , also auch verschwindende radiale Differenz, in die parabolische Temperaturkurve über, vgl. S. 24.

7. Wechselstrom, kein longitudinales und radiales Temperaturgefälle.  $u_w(t)$ .

Es wird aus (11)

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} - gU - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0.$$

Integration mittels Variation der Konstanten ergibt

$$U = -\frac{h(g-bi)}{2(b^2+g^2)} e^{2ait} + \frac{h}{2g} + c_1 e^{-gkt}$$

und

$$u = \Re\{U\} = -\frac{hg}{2(b^2+g^2)} \cos 2at - \frac{hb}{2(b^2+g^2)} \sin 2at + \frac{h}{2g} + c_1 e^{-gkt},$$

worin die Integrationskonstante  $c_1$  nach (8) zu bestimmen ist:

$$0 = -\frac{hg}{2(b^2+g^2)} + \frac{h}{2g} + c_1.$$

Dadurch wird, weil

$$(45) \quad n \cos x + m \sin x = \sqrt{m^2+n^2} \sin\left(x + \arctg \frac{n}{m}\right)$$

$$(46) \quad u_w(t) = \frac{h}{2g} \left(1 - \frac{b^2}{b^2+g^2} e^{-gkt}\right) - \frac{h}{2\sqrt{g^2+b^2}} \sin\left(2at + \arctg \frac{g}{b}\right).$$

Der Einfluß des Anfangszustandes verschwindet wieder nach hinreichend langer Zeit. Der Faktor von  $t$  ist derselbe wie bei Gleichstrom, aber die Exponentialfunktion ist mit einem Faktor multipliziert,

der kleiner ist als 1, so daß der Anfangszustand weniger lang von Einfluß ist. Für nicht ganz dünne Drähte ist allerdings  $g$  viel kleiner als  $b$ , so daß der erwähnte Faktor merklich 1 ist.

Hier ist die Temperatur an der Oberfläche im stationären Zustand

$$u_0 = \frac{h}{2g} = \frac{\mathfrak{R}^2 w R}{4 \mathfrak{A} \mu} = \frac{J^2 w}{4 \mathfrak{A} \mu \pi^2 R^3}.$$

Es ist also wie bei Gleichstrom  $u_0$  proportional  $R^{-3}$  — was Cranz seines Fehlers wegen nicht erhielt — und proportional dem Quadrat des Strommaximums. Um diese Resultate für Gleich- und Wechselstrom zu vergleichen, müssen wir die  $u_0$  in Beziehung setzen zu gleichen Leistungen, zu gleichen Wärmemengen in gleichen Zeiten. Da

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} J^2 \sin^2 at \, dt = J^2 \frac{\pi}{2a}$$

und für Gleichstrom

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} i_0^2 \, dt = i_0^2 \frac{\pi}{a},$$

so muß bei derselben Leistung  $\frac{J}{\sqrt{2}} = i_0$  sein. Es entsprechen deshalb bei gleichen Stromleistungen bei Gleich- und Wechselstrom nicht nur die Joulesche Wärme, sondern auch die mittlere Temperaturerhöhung einander, vorausgesetzt natürlich, daß die Frequenzen so klein sind, daß der Skineffekt vernachlässigt werden kann.

Das typische Wechselstromglied, die „zeitlichen Schwankungen“ darstellend, hat eine Amplitude, die nicht vom Anfangszustand abhängt, also nicht erst allmählich ihren vollen Wert annimmt. Diese Amplitude wird  $u_0$  gleich, wenn  $b^2$  gegen  $g^2$  klein ist, bei ganz dünnen Drähten und langsamen Wechseln; im allgemeinen wird jedoch das Größenverhältnis umgekehrt sein, also die Schwankungen viel kleiner als  $u_0$ . Betrachten wir nun die Eintrittszeit der Maxima der Schwankungen

$$- \frac{h}{2\sqrt{g^2 + b^2}} \sin\left(2at + \arctg \frac{g}{b}\right)$$

in bezug auf die der Strommaxima, so sind wieder die obigen zwei Fälle zu unterscheiden; im ersten, bei ganz dünnen Drähten und daher rascher Abkühlung, ist  $\arctg \frac{g}{b}$  nahe  $= \frac{\pi}{2}$  und die Maxima erfolgen gleichzeitig, d. h. die momentan erzeugte Joulesche Wärme ist für die Temperatur maßgebend; im zweiten Fall, der praktisch immer ver-

wirklich ist, sind die Maxima der Temperatur um  $\frac{\pi}{4a} = \frac{T}{8}$  gegen die des Stromes verzögert, sie treten dann ein, wenn der Überschuß der erzeugten Jouleschen Wärme über ihren Mittelwert ein Maximum hat. Zwischen beiden Extremen der Phasenverschiebung und der Amplitudenänderung dieser periodischen Schwankung findet ein stetiger Übergang statt, vgl. (101). Da im allgemeinen  $g^2$  gegen  $b^2$  wegfällt, ist die Amplitude umgekehrt proportional der Frequenz, wird also rasch klein mit wachsenden Schwingungszahlen.

### 8. Wechselstrom, longitudinales Temperaturgefälle. $u_w(x, t)$ .

Hier gilt Differentialgleichung (11)

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - gU - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0.$$

Da die schließlich eintretende Temperaturverteilung die Periode  $2at$  haben muß, so setzen wir

$$U = \psi(x) e^{2ait} + \psi_1(x);$$

wir erhalten hierdurch die einzelnen Differentialgleichungen

$$\psi_1'' - g\psi_1 + \frac{h}{2} = 0, \quad \psi'' - (g + bi)\psi - \frac{h}{2} = 0$$

und finden leicht

$$U = \frac{h}{2g} \left[ 1 + a_1 \{ e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)} \} \right] + e^{2ait} \left[ -\frac{h}{2(g+bi)} + b_1 \{ e^{-\sqrt{g+bi}x} + e^{-\sqrt{g+bi}(l-x)} \} \right]$$

$a_1$  bestimmt sich aus (7) zu

$$(47) \quad a_1 = -\frac{1}{1 + e^{-\sqrt{g}l}}.$$

Um den Wert von  $b_1$  kürzer darzustellen, setzen wir

$$\frac{h}{2(g+bi)} = \beta_0 + \beta_1 i,$$

also

$$(48) \quad \beta_0 = \frac{gh}{2(g^2 + b^2)}, \quad \beta_1 = \frac{-bh}{2(g^2 + b^2)}; \quad \sqrt{\beta_0^2 + \beta_1^2} = \frac{h}{2\sqrt{g^2 + b^2}}, \quad \beta_1 = \frac{-g}{-b}$$

und ferner

$$\sqrt{g+bi} = \alpha_0 + \alpha_1 i,$$

also

$$(49) \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{g + \sqrt{g^2 + b^2}}{2}}, \quad \alpha_1 = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2}{g + \sqrt{g^2 + b^2}}},$$

wobei die innere Wurzel positiv zu nehmen ist, weil  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  reell sein sollen; das Vorzeichen der äußeren Wurzel ist beliebig, da bei der



gleichzeitigen Änderung der Konstanten der Gesamtwert nicht geändert wird. Ferner setzen wir  $b_1 = b' + ib''$ , dann wird

$$(50) \quad \begin{cases} b' = \frac{\beta_0(1 + e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l) - \beta_1 e^{-\alpha_0 l} \sin \alpha_1 l}{1 + 2e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l + e^{-2\alpha_0 l}} \\ b'' = \frac{\beta_1(1 + e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l) + \beta_0 e^{-\alpha_0 l} \sin \alpha_1 l}{1 + 2e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l + e^{-2\alpha_0 l}} \end{cases}$$

Nach dieser Bestimmung der Konstanten wird nach leichter Reduktion

$$(51) \quad u_w(x, t) = \frac{h}{2g} \left[ 1 + \alpha_1 \left\{ e^{-Vg^2 x} + e^{-Vg^2(l-x)} \right\} \right] + \sqrt{\beta_0^2 + \beta_1^2} \sin \left( 2at + \arctg \frac{-\beta_0}{\beta_1} \right) + \sqrt{b'^2 + b''^2} \left[ e^{-\alpha_0 x} \sin \left( 2at - \alpha_1 x + \arctg \frac{b'}{-b''} \right) + e^{-\alpha_0(l-x)} \sin \left( 2at - \alpha_1(l-x) + \arctg \frac{b'}{-b''} \right) \right].$$

Wir erhalten wie bei  $u_v(x)$  in (19) eine Gewölbelinie, über die sich hier aber periodische, vom Ort unabhängige Schwankungen superponieren; ihre Amplitude ist dieselbe wie in  $u_w(t)$  (46), ihre Verzögerung  $\pi + \varepsilon$ , entsprechend dem Unterschied der Vorzeichen. Hierzu kommt noch von jeder Klemme her eine „Welle“ — wir brauchen infolge der Symmetrie nur eine zu untersuchen — deren Amplitude  $\sqrt{b'^2 + b''^2} e^{-\alpha_0 x}$  nach einem Exponentialgesetz abnimmt; wenn  $\alpha_0$  groß ist, wird diese Welle stark gedämpft, so daß schon bei kleinerem  $l$  eine Superposition der beiden Wellen in der Mitte nicht mehr merklich stattfindet. Die Wellenlänge, wenn man als solche den doppelten Abstand zweier Nullstellen bezeichnet, ist  $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ , unabhängig von Ort und Zeit, ebenso die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\frac{2a}{\alpha_1}$ . Das Dämpfungsverhältnis der Amplituden im Abstand zweier Maxima ist  $e^{-2\pi\alpha_0/\alpha_1}$ . Da i. a.  $g$  klein gegen  $b$  ist, ist  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{b}{2}} = \alpha_1$ ; somit die Wellenlänge nach (1)  $2\sqrt{\frac{\pi k}{V\nu}}$ , umgekehrt proportional der Wurzel aus der Schwingungszahl; für Cu ist der Zähler 3,5, für Fe 2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist  $2\sqrt{\pi k} \sqrt{\nu}$ . Das Dämpfungsverhältnis ist in weiten Grenzen unabhängig vom Material, Dicke und Länge des Drahts  $= e^{-2\pi}$ . Für  $\nu = 50$  ist für Cu die Wellenlänge 0,50 cm, die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ 25 cm/sec und die Amplitude im Abstand einer Wellenlänge kleiner als 1%. Da i. a. also der Faktor im Exponenten ( $\alpha_0$ ) gleich dem im Argument ( $\alpha_1$ ) ist, erhalten wir für nicht ganz dünne Drähte, was die longitudinale Welle betrifft, dieselbe Lösung wie für eine unendlich ausgedehnte Platte, wie z. B. für das Problem der täglichen und jährlichen Temperaturwellen, die in die Erde eindringen.

Wenn die Radien sehr klein werden, kommt  $g$  gegen  $b$  in Betracht,  $\alpha_0$  wächst,  $\alpha_1$  nimmt ab. die Wellenlänge wird größer und die Welle stärker gedämpft. Bei dünnen Drähten ist demnach der abkühlende Einfluß der Klemmen auch auf diese Welle, nicht nur auf die konstante Temperatur, schon in kleinerem Abstand vom Ende als bei dicken Drähten unmerklich.

Wir erweitern, um (8) genügen zu können, den Ansatz durch

$$U = U_w(x, t) + \sum \psi_2(x) f(t),$$

wo  $\psi_2(x) f(t)$  dem homogenen Teil der Differentialgleichung genügen soll. Die hinzukommenden Integrale sind

$$f = e^{-ct}, \quad \psi_2 = P_1 \sin \sqrt{\frac{C-gk}{k}} x + P_2 \sin \sqrt{\frac{C-gk}{k}} (l-x),$$

worin nach (7)

$$C = \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + g \right) k, \quad n = 1, 2 \dots,$$

so daß

$$\psi_2 = P_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Wir setzen  $p_n = \Re \{ P_n \}$  und bestimmen die Koeffizienten aus der Fourierschen Reihe [=  $u_w(x, 0)$ ]; wir bezeichnen

$$J_2^{(n)} = \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \cos \alpha_1 x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -(-1)^n \int_0^l e^{-\alpha_0(l-x)} \cos \alpha_1 (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$J_3^{(n)} = \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \sin \alpha_1 x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -(-1)^n \int_0^l e^{-\alpha_0(l-x)} \sin \alpha_1 (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

und finden für diese Integrale

$$(52) \quad \begin{cases} (\mathcal{A}_0^2 + \mathcal{A}_1^2) J_2^{(n)} = \frac{n\pi}{l} (A_0 \mathcal{A}_0 - A_1 \mathcal{A}_1) \\ (\mathcal{A}_0^2 + \mathcal{A}_1^2) J_3^{(n)} = \frac{n\pi}{l} (A_1 \mathcal{A}_0 + A_0 \mathcal{A}_1), \end{cases}$$

wobei

$$(53) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_0^{(n)} = \alpha_0 \left( \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \\ \mathcal{A}_1^{(n)} = \alpha_1 \left( \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \end{cases}$$

und

$$(54) \quad \begin{cases} A_0^{(n)} = \alpha_0 (1 - (-1)^n e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l) + (-1)^n \alpha_1 e^{-\alpha_0 l} \sin \alpha_1 l \\ A_1^{(n)} = \alpha_1 (1 - (-1)^n e^{-\alpha_0 l} \cos \alpha_1 l) - (-1)^n \alpha_0 e^{-\alpha_0 l} \sin \alpha_1 l. \end{cases}$$

Wir erhalten somit für den zu  $u_w(x, t)$  hinzukommenden Teil:

$$(55) \quad \sum \psi_2(x) f(t) \\ = -\frac{2}{l} \sum_1^{\infty} n (1 - (-1)^n) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{g} + \varrho\right) k t} \sin \frac{n \pi}{l} x \left[ \frac{h}{2g} \left\{ \frac{l}{n \pi} + a_1 - \frac{\bar{l} g}{1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2 g}} (1 - (-1)^n e^{-\sqrt{g} i}) \right\} - \frac{\beta_0 l}{n \pi} + b' J_2^{(n)} + b'' J_3^{(n)} \right].$$

Von der oben diskutierten Gewölbelinie mit der superponierten zeitlich periodischen Schwankung und den nach der Mitte zu laufenden Wellen ist wie in  $u_g(x, t)$  eine Reihe von Sinuslinien zu subtrahieren, deren Amplituden mit wachsender Zeit rasch abnehmen. Nach einigen Sekunden kommt wieder nur das erste Glied in Betracht.

9. Wechselstrom, radiales Temperaturgefälle  $u_w(r, t)$ .

Aus (5) wird

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{h}{2} e^{2ait} + \frac{h}{2} = 0.$$

Wir setzen

$$U = \varphi(r) e^{2ait} + \varphi_1(r),$$

wo wie in 3

$$\varphi_1 = \frac{h}{8} (R^2 - r^2) + \frac{h}{2g}$$

ist und für  $\varphi$  die Differentialgleichung gilt:

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - b i \varphi - \frac{h}{2} = 0;$$

ihr Integral ist:

$$\varphi = C J_0(r \sqrt{-b i}) + \frac{h i}{2 b}.$$

Wir bezeichnen mit Lord Kelvin (vgl. Jahnke a. a. O. S. 144) den reellen Wert der Besselschen Funktion nullter Ordnung mit dem gemischt komplexen Argument  $x \sqrt{-i}$  durch  $\text{ber } x$ , und entsprechend den Faktor von  $i$  mit  $\text{bei } x$ , d. h.

$$(56) \quad J_0(x \sqrt{-i}) = \text{ber } x + i \text{ bei } x;$$

entsprechend

$$(57) \quad \frac{dJ_0(x \sqrt{-i})}{dx} = -\sqrt{-i} J_1(x \sqrt{-i}) = \text{ber}' x + i \text{ bei}' x.$$

Nach der Definition und (25), (26) ist

$$(58) \quad \begin{cases} \text{ber } x = 1 - \frac{x^4}{2!^2 2^4} + \frac{x^8}{4!^2 2^8} - \dots \\ \text{bei } x = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{3!^2 2^6} + \dots \end{cases}$$

und

$$(59) \quad \begin{cases} \text{ber}' x = -\frac{x^3}{1! 2! 2^3} + \frac{x^7}{3! 4! 2^7} + \dots \\ \text{bei}' x = \frac{x}{2} - \frac{x^5}{2! 3! 2^5} + \dots \end{cases}$$

Wenn noch  $C = c_0 + c_1 i$  gesetzt wird, findet man

$$U - \frac{h}{2g} + \frac{h}{8}(R^2 - r^2) + \left[ (c_0 + c_1 i) (\text{ber}(r\sqrt{b}) + i \text{bei}(r\sqrt{b})) + \frac{hi}{2b} \right] e^{2\alpha i t}$$

Wir bezeichnen ferner

$$(60) \quad r\sqrt{b} = \varrho, \quad R\sqrt{b} = P,$$

und setzen

$$(61) \quad c_0 = \frac{h}{2b} d_0, \quad c_1 = \frac{h}{2b} d_1,$$

dann wird (6)

$$(c_0 + c_1 i)\sqrt{b} (\text{ber}' P + i \text{bei}' P) = -\frac{\mu}{\lambda} \left( (c_0 + c_1 i) (\text{ber} P + i \text{bei} P) + \frac{hi}{2b} \right),$$

und wir erhalten zur Bestimmung der  $d$  durch Trennen des Reellen vom Imaginären die Gleichungen:

$$d_0 \left( \text{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P \right) - d_1 \left( \text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P \right) = 0$$

$$d_0 \left( \text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P \right) + d_1 \left( \text{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P \right) = -\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}},$$

die als Lösungen

$$(62) \quad \begin{cases} d_0 = -\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \frac{\text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P}{\left( \text{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P \right)^2 + \left( \text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P \right)^2} \\ d_1 = -\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \frac{\text{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P}{\left( \text{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P \right)^2 + \left( \text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P \right)^2} \end{cases}$$

haben. Zum Verständnis des Resultats ist es nötig, Kenntnis von dem Verlauf von  $d_0$  und  $d_1$  zu haben; da sie aber außer  $P$  noch die ebenfalls von Fall zu Fall verschiedenen Konstanten  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $c$  und  $D$  enthalten ist, so ist die genaue Berechnung nicht möglich oder man müßte für jede dieser Größen eine besondere Tabelle berechnen. Nun können wir aber die Näherung

$$(63) \quad \begin{cases} d_0 = -\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} B_0(P) \\ d_1 = -\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} B_1(P), \end{cases}$$

wobei

$$(64) \quad \begin{cases} B_0 = \frac{\text{bei}' P}{\text{ber}'^2 P + \text{bei}'^2 P} \\ B_1 = \frac{\text{ber}' P}{\text{ber}'^2 P + \text{bei}'^2 P} \end{cases}$$

anwenden, wo die  $B_0$  und  $B_1$  nur von  $P$  abhängig sind; diese Näherung ist nicht erlaubt für kleine  $P$ , aber sicher für  $P$  größer als 0,5, was schon sehr kleinen Radien entspricht, vgl. 13. Es ist nämlich immer, auch für kleine Wechselzahl,  $\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}}$  klein,  $\text{ber}' P$  und  $\text{ber} P$ ,  $\text{bei}' P$  und  $\text{bei} P$  etwa von derselben Größenordnung, mit Ausnahme der Stellen, wo  $\text{ber}' P$  und  $\text{bei}' P$  verschwinden; da für eine Nullstelle z. B. von  $\text{ber}' P$  aber das eigentlich vernachlässigte

$$\frac{\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{ber} P}{\left(\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}}\right)^2 \text{ber}^2 P + \left(\text{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} \text{bei} P\right)^2}$$

sehr klein ist wegen des  $\text{bei}' P$  im Nenner, verschiebt diese Vernachlässigung die Nullstelle von  $d_1$  — ebenso die von  $d_0$  — um eine ganz geringe Strecke. Wie die Tabelle (96) zeigt, verschwinden bis  $P = 10$   $\text{ber}'$  und  $\text{bei}'$  nicht gleichzeitig; da für noch größere  $P$ , wie (97) zeigt,  $B_0$  und  $B_1$  immer kleiner werden, also erst recht die  $d_0$  und  $d_1$  klein sind, kann mit Wahrscheinlichkeit geschlossen werden, daß  $\text{ber}'$  und  $\text{bei}'$  auch hier nicht gleichzeitig Null werden, denn dann müßten  $B_0$  und  $B_1$  unendlich werden. Das wird bestätigt durch die S. 49 Anm. 1 angegebene Näherung. Unter Benutzung von (62) wird nun

$$(65) \quad U_w(r, t) = \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} (R^2 - r^2) + \frac{h}{2b} [d_0 + d_1 i] J_0(r\sqrt{-bi}) + i] e^{2ait}$$

und daher

$$(66) \quad u_w(r, t) = \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} (R^2 - r^2)$$

$$+ \frac{h}{2b} \sqrt{(d_0 \text{ber} \varrho - d_1 \text{bei} \varrho)^2 + (1 + d_0 \text{bei} \varrho + d_1 \text{ber} \varrho)^2} \sin\left(2at + \arctg \frac{d_0 \text{ber} \varrho - d_1 \text{bei} \varrho}{1 + d_0 \text{bei} \varrho + d_1 \text{ber} \varrho}\right).$$

Wir erhalten hier dieselbe konstante Temperatur  $\frac{h}{2g}$  (jetzt ist es die der Oberfläche) wie bisher; dazu kommt die konstante radiale Differenz, die der für Gleichstrom entspricht, wenn die Stromleistungen gleich sind; über diesen Zustand superponiert sich noch eine periodische Funktion der Zeit, deren Amplitude eine Funktion des radius vektor ist, ebenso wie die Phasenverschiebung  $\arctg \frac{d_0 \text{ber} \varrho - d_1 \text{bei} \varrho}{1 + d_0 \text{bei} \varrho + d_1 \text{ber} \varrho}$ . Wie aus der Gleichung für  $u_w(t)$ , wenn  $g$  klein gegen  $b$ , zu entnehmen ist, muß die Amplitude in (66) für zu vernachlässigendes radiales Gefälle  $\frac{h}{2b}$  wer-

den, d. h. die Wurzel muß 1 sein; dies ist, wie (97) und (89) zeigen, auch mit großer Näherung der Fall, da die transzendenten Ausdrücke gegen 1 klein sind, wenn  $R$  nicht zu klein ist. Für ganz kleine  $R$  gilt diese Näherung nicht mehr, dann wird aber auch die Amplitude in (46)  $\frac{h}{2g} = u_0$ , und wir werden in C sehen, daß dies ebenfalls aus (66) folgt; in 15 wird auch die Abhängigkeit vom radius vektor genauer untersucht. Die Phase ist in erster Näherung  $-\pi$ , für die Werte von  $P$ , für die (63) gilt, so daß auch hier die Übereinstimmung mit (46) hergestellt ist.

Für hohe Mitteltemperaturen werden die radial-zeitlichen Schwankungen analog (23)

$$(67) \quad v_w(r, t) = \frac{h}{8} (R^2 - r^2)$$

$$+ \frac{h}{2b} \sqrt{(d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho)^2 + (1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho)^2} \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho}{1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho} \right)$$

Es tritt also gegen den aus (66) folgenden gleichbedeutenden Ausdruck für kleine  $u_0$  gar keine formale Änderung auf.

Wir erweitern den Ansatz zur Lösung der oben gegebenen Differentialgleichung, um den Anfangszustand zu berücksichtigen, durch

$$\Sigma \varphi_n(r) f(t)$$

und erhalten diese wie S. 18f. als

$$\Sigma \Gamma_n J_0 \left( r \sqrt{\frac{C_n}{k}} \right) e^{-C_n t};$$

also, wenn wir wieder die  $\vartheta_n$  einführen:

$$U = U_w(r, t) + \Sigma \Gamma_n J_0 \left( \frac{r \vartheta_n}{R} \right) e^{-\frac{\vartheta_n^2}{R^2} k t}.$$

Aus (65) und (8) folgt die Bestimmung der  $\Gamma_n$ , wobei zu den in 5 berechneten Integralen das neue

$$I_3^{(n)} = \int_0^R r J_0 \left( \frac{r \vartheta_n}{R} \right) J_0 (r \sqrt{-bi}) dr$$

tritt, auf das wir (34) anwenden. Nach leichter Reduktion unter Benützung von (56), (57), (60) und (28) und wenn wir  $I_3 = I_{31} + I_{32}$  setzen, erhalten wir

$$I_{31}^{(n)} = \frac{P R^2 J_0(\vartheta_n)}{\vartheta_n^4 + P^4} K_{31}^{(n)},$$

$$I_{32}^{(n)} = \frac{P R^2 J_0(\vartheta_n)}{\vartheta_n^4 + P^4} K_{32}^{(n)},$$

$$K_{31}^{(n)} = \vartheta_n^2 \left( \operatorname{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} \operatorname{ber} P \right) + P^2 \left( \operatorname{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} \operatorname{bei} P \right)$$

$$K_{32}^{(n)} = \vartheta_n^2 \left( \operatorname{bei}' P + \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} \operatorname{bei} P \right) - P^2 \left( \operatorname{ber}' P + \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} \operatorname{ber} P \right).$$

Führen wir dies in  $\Gamma_n$  ein und nehmen  $\gamma_n = \Re\{\Gamma_n\}$ , berücksichtigen ferner nach (62)

$$d_0 K_{31}^{(n)} - d_1 K_{32}^{(n)} = -\frac{\mu P^2}{\lambda \sqrt{b}},$$

so wird

$$(68) \quad \gamma_n = -\frac{h}{2J_0(\vartheta_n) \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]} \left[ 1 - \frac{g}{\left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{Rb}{\vartheta_n} \right)^2} \right].$$

Dadurch erhalten wir schließlich

$$(69) \quad u_{w\alpha}(r, t) = u_w(r, t) + \sum_1^{\infty} \gamma_n J_0 \left( \frac{r \vartheta_n}{R} \right) e^{-\frac{\vartheta_n^2}{R^2} kt}.$$

Nach einigen Sekunden wird wieder nur das Glied für  $n = 1$  in Betracht kommen, und auch dies wird nach hinreichend langer Zeit ohne Einfluß sein. Die Oberflächentemperatur erreicht wieder, wenn wir uns erinnern, daß  $\vartheta_1 \simeq R\sqrt{g}$  ist (Anm. 1 S. 20), nach derselben Zeit wie ohne radiales Gefälle den vollen Betrag; ebenso wie  $\gamma_1$  annähernd  $\frac{h}{2g}$  ist, was aus der Bedeutung des ersten Glieds und auch aus (68) abgeleitet werden kann, ist  $\gamma_1(1 - J_0(\vartheta_1))$  die radiale Differenz  $D_x$ , die in der gleichen Zeit ihren vollen Betrag erreicht wie  $u_0$ .

**10. Wechselstrom, longitudinales und radiales Temperaturgefälle.**  
 $u_w(r, x, t)$ .

In (5) bleiben alle Glieder stehen; setzt man

$$U = [\Sigma \varphi(r) \psi(x) + \varphi_1(r)] e^{2\alpha i t} + \Sigma \varphi_2(r) \psi_1(x) + \varphi_3(r),$$

so erhält man für  $\varphi_3$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  und  $\varphi_1$  Lösungen von der Form

$$\varphi_3 = u_w(r), \quad \varphi_2 = \alpha J_0(r\sqrt{Q})$$

$$\psi_1 = q(e^{-\sqrt{Q}x} + e^{-\sqrt{Q}(l-x)})$$

und

$$\varphi_1 = C J_0(r\sqrt{-bi}) + \frac{hi}{2b};$$

für  $\psi$  und  $\varphi$  die Differentialgleichungen

$$\frac{\psi''}{\psi} = S',$$

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + (S' - bi) \varphi = 0$$

mit den Integralen

$$\psi = s(e^{-\sqrt{S'}x} + e^{-\sqrt{S'}(l-x)}),$$

$$\varphi = \sigma J_0(r\sqrt{S' - bi}).$$

Es wird also

$$U = \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} (R^2 - r^2) + \sum \kappa J_0(r\sqrt{Q})q \{ e^{-V\bar{Q}x} + e^{-V\bar{Q}(t-x)} \} \\ + \left[ \sum \sigma J_0(r\sqrt{S' - bi})s \{ e^{-V\bar{S}'x} + e^{-V\bar{S}'(t-x)} \} + C J_0(r\sqrt{-bi}) + \frac{hi}{2b} \right] e^{2\alpha it}.$$

Das erste Glied genügt schon der Grenzbedingung (6). Der von  $t$  unabhängige Teil wird bestimmt wie bei  $u_w(r, t)$ , indem wir ebenfalls die  $\vartheta_n$  einführen. Die Konstante des zweiten Glieds in dem von der Zeit abhängigen Teil wird bestimmt wie in  $u_w(r, t)$  durch die Konstante  $C = h \frac{d_0 + d_1 i}{2b}$  vgl. (61), (62); das erste Glied wird nach (6)

$$\sqrt{S' - bi} J_0(R\sqrt{S' - bi}) = -\frac{\mu}{\lambda} J_0(R\sqrt{S' - bi})$$

und geht für  $S = S' - bi$  in die oft benutzte Gleichung für die  $\vartheta_n = R\sqrt{S'_n}$  über. Wir setzen ferner die Koeffizienten der so auftretenden Reihenglieder

$$s_n = s'_n + i s''_n$$

und

$$\sqrt{\frac{\vartheta_n^2}{R_n^2} + bi} = \delta_n + \varepsilon_n i,$$

also

$$(70) \quad \delta_n = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\vartheta_n^2 + \sqrt{\vartheta_n^4 + b^2 R^4}}{2}}, \quad \varepsilon_n = \frac{bR}{2} \sqrt{\frac{2}{\vartheta_n^2 + \sqrt{\vartheta_n^4 + b^2 R^4}}};$$

nun bestimmen wir die  $s$ , wie in 8 (50) die  $b$ , indem wir dort  $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$  durch 1, 0,  $\delta_n, \varepsilon_n$  ersetzen, und wir erhalten

$$(71) \quad \begin{cases} s'_n = \frac{1 + e^{-\delta_n l} \cos \varepsilon_n l}{1 + 2e^{-\delta_n l} \cos \varepsilon_n l + e^{-2\delta_n l}} \\ s''_n = \frac{e^{-\delta_n l} \sin \varepsilon_n l}{1 + 2e^{-\delta_n l} \cos \varepsilon_n l + e^{-2\delta_n l}} \end{cases}$$

Dann sind die  $\sigma_n = \sigma'_n + i\sigma''_n$  analog den  $\Gamma_n$  auf S. 34f. zu bestimmen, nur daß die den  $f_n$  in 4f. entsprechenden Glieder fehlen, aber  $iI_1$  hinzutritt:

$$(72) \quad \begin{cases} \sigma'_n = \frac{hg}{2J_0(\vartheta_n) \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]} \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{Rb}{\vartheta_n} \right)^2 \right] \\ \sigma''_n = \frac{hg}{2J_0(\vartheta_n) \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]} \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{R\sqrt{b}}{\vartheta_n} \right)^4} - 1 \right]. \end{cases}$$



Schließlich werden die  $q_n$  gleich den  $b_n$  in (40) und ebenso die  $z_n$  gleich den  $f_n$  in (38), nur ist  $h_0$  durch  $\frac{1}{2}h$  zu ersetzen, also

$$(73) \quad z_n = -\frac{h}{2J_0(\vartheta_n) \left[ \left( \frac{\vartheta_n}{R} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]}$$

Nun genügt  $U$  der Grenzbedingung (9) und jeder Teil für sich der Grenzbedingung (10), so daß der reelle Teil von  $U$  die Lösung darstellt, abgesehen vom Anfangszustand. Diese ergibt sich so als

$$(74) \quad \begin{aligned} u_w(r, x, t) = & \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} (R^2 - r^2) + \sum_1^\infty z_n b_n J_0 \left( \frac{r \vartheta_n}{R} \right) \left\{ e^{-\frac{\vartheta_n}{R} x} + e^{-\frac{\vartheta_n}{R} (l-x)} \right\} \\ & + \frac{h}{2b} \sqrt{(\bar{d}_0 \operatorname{ber} \varrho - \bar{d}_1 \operatorname{bei} \varrho)^2 + (1 + \bar{d}_0 \operatorname{bei} \varrho + \bar{d}_1 \operatorname{ber} \varrho)^2} \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{\bar{d}_0 \operatorname{ber} \varrho - \bar{d}_1 \operatorname{bei} \varrho}{(1 + \bar{d}_0 \operatorname{bei} \varrho + \bar{d}_1 \operatorname{ber} \varrho)} \right) \\ & + \sum_1^\infty J_0 \left( \frac{r \vartheta_n}{R} \right) \sqrt{(\sigma_n' s_n' - \sigma_n'' s_n'')^2 + (\sigma_n' s_n'' + \sigma_n'' s_n')} \\ & \times \left[ e^{-\vartheta_n x} \sin \left( 2at - \varepsilon_n x + \operatorname{arctg} \frac{\sigma_n' s_n' - \sigma_n'' s_n''}{(\sigma_n' s_n'' + \sigma_n'' s_n')} \right) \right. \\ & \left. + e^{-\vartheta_n (l-x)} \sin \left( 2at - \varepsilon_n (l-x) + \operatorname{arctg} \frac{\sigma_n' s_n' - \sigma_n'' s_n''}{(\sigma_n' s_n'' - \sigma_n'' s_n')} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir haben also die alte Form für den Anteil der Temperatur, der von  $r, x, t$  unabhängig ist, ebenso für die konstante radiale Differenz und die radialzeitlichen Schwankungen; zu der konstanten Temperatur ist die erste Summe zu addieren, deren erster Koeffizient negativ gleich (annähernd) der konstanten Temperatur ist, so daß wieder eine Gewölbeline entsteht, die für Punkte auf Parallelen nahe der Drahtachse steiler verläuft als für solche nahe der Oberfläche, vgl.  $u_g(r, x)$ . Neu ist die zweite Summe, die der in  $u_w(x, t)$  besprochenen Welle entspricht und zeigt, daß ihre Amplitude nicht nur abnimmt mit wachsendem  $x$ , sondern auch mit wachsendem  $r$ , entsprechend im wesentlichen der Abnahme von  $J_0 \left( \frac{\vartheta_1 r}{R} \right)$ ; allerdings ist diese Abnahme außerordentlich viel kleiner als die in der Längsrichtung.

Daß die Lösung in hinreichender Entfernung von den Enden in die frühere  $u_w(r, t)$  übergeht, ist leicht aus der Form der von  $x$  abhängigen Glieder zu erkennen, vgl. auch unten; dagegen erfordert es eine nähere Untersuchung, den Übergang in  $u_w(x, t)$  für verschwindendes radiales Gefälle nachzuweisen.

Dazu verfahren wir zunächst wie bei  $u_g(r, x)$ , indem wir  $R$  gegen  $\frac{\lambda}{\mu}$  vernachlässigen, ebenso die höheren Potenzen von  $\vartheta_1$  und

auch die Glieder der Summen für höhere Indizes; unter Benutzung der Anmerkung S. 20 wird (73) vgl. (44)

$$\kappa_1 = -\frac{h}{2g};$$

ferner wird aus (70)

$$(75) \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{g + \sqrt{g^2 + b^2}}{2}} = \alpha_0, \quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2}{g + \sqrt{g^2 + b^2}}} = \alpha_1;$$

nach (72) und (48) wird, wenn wir wieder  $\frac{\mu}{\lambda}$  gegen  $\frac{1}{R}$  vernachlässigen,

$$\sigma'_1 = \frac{hg}{2 \frac{\mu}{\lambda} \left[ \frac{2}{R} + \frac{\mu}{\lambda} \right] [g + b^2]} = \frac{hg}{2(g^2 + b^2)} = \beta_0$$

$$\sigma''_1 = \frac{hg}{2b \frac{\mu}{\lambda} \left[ \frac{2}{R} + \frac{\mu}{\lambda} \right] \left[ 1 + \frac{b^2}{g^2} - 1 \right]} = -\frac{hb}{2(g^2 + b^2)} = \beta_1.$$

Oder: aus der Bestimmungsgleichung der  $\sigma$  folgt für  $n = 1$

$$\sigma_1 + \frac{h}{2b} [d_0 + (1 + d_1)i] = 0,$$

also

$$\sigma'_1 = -\frac{h}{2b} d_0, \quad \sigma''_1 = -\frac{h}{2b} (1 + d_1).$$

Nun ist nach (62) und (60), wenn wir von dem dimensionslosen  $P$  und  $q$  höhere Potenzen vernachlässigen

$$\text{ber } P = 1, \text{ bei } P = \frac{P^2}{4}, \text{ ber' } P = -\frac{P^2}{16}, \text{ bei' } P = \frac{P}{2}.$$

Dadurch wird zunächst

$$d_0 = -\frac{\frac{\mu}{\lambda} \frac{R\sqrt{b}}{2}}{\lambda\sqrt{b} \frac{R^2\sqrt{b}}{4} \left( 1 + \frac{R^4 b^2}{64} - \frac{R\mu}{8\lambda} \right) + \frac{\mu^2}{\lambda^2 b}}$$

und unter der erwähnten Vernachlässigung

$$d_0 = -\frac{gb}{g^2 + b^2}.$$

Ebenso wird

$$d_1 = -\frac{\frac{\mu}{\lambda} \frac{R\sqrt{b}}{2} \left( -\frac{R^4 b^2}{16} + \frac{\mu R}{\lambda} \right)}{\lambda\sqrt{b} \frac{R^2\sqrt{b}}{4} \left( 1 + \frac{R^4 b^2}{64} - \frac{R\mu}{8\lambda} \right) + \frac{\mu^2}{\lambda^2 b}}$$

und

$$1 + d_1 = \frac{b^2}{g^2 + b^2}.$$

Wir erhalten auf diesem Weg, allerdings umständlicher, aber diese Beziehungen sind im nachstehenden notwendig, dieselben Werte von  $\sigma_1'$  und  $\sigma_1''$  wie oben. Für kleine  $\varrho$  wird der Radikand des zweiten Summanden

$$d_0^2 + (1 + d_1)^2$$

und wir erhalten aus den eben abgeleiteten Beziehungen

$$\begin{aligned} u_w([r], x, t) = & \frac{h}{2g} + \sqrt{\beta_0^2 + \beta_1^2} \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{-\beta_0}{\beta_1} \right)^{1)} \\ & - \frac{h}{2g} \delta_1 (e^{-\sqrt{\nu}x} + e^{-\sqrt{\nu}(l-x)}) + \sqrt{(\beta_0 s_1' - \beta_1 s_1'')^2 + (\beta_0 s_1'' + \beta_1 s_1')^2} \\ & \times \left[ e^{-\alpha_0 x} \sin \left( 2at - \alpha_1 x + \operatorname{arctg} \frac{\beta_0 s_1' - \beta_1 s_1''}{-(\beta_0 s_1'' + \beta_1 s_1')} \right) \right. \\ & \left. + e^{-\alpha_0 (l-x)} \sin \left( 2at - \alpha_1 (l-x) + \operatorname{arctg} \frac{\beta_0 s_1' - \beta_1 s_1''}{-(\beta_0 s_1'' + \beta_1 s_1')} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nun ist nach (40) und (47)  $-\delta_1 = a_1$ ; da ferner, wie aus (50), (75) und (71) abzulesen ist,

$$\begin{aligned} \beta_0 s_1' - \beta_1 s_1'' &= b', \\ \beta_0 s_1'' + \beta_1 s_1' &= b'', \end{aligned}$$

haben wir jetzt (74) in (51) übergeführt, indem wir  $\varrho^2$  gegen 1 und  $R$  gegen  $\frac{\lambda}{\mu}$  vernachlässigten. —

Eine zweite Art der Integration der Differentialgleichung erhalten wir durch folgenden Ansatz

$$U = [\varphi(r)\psi(x) + \psi_1(x)] e^{2at} + \varphi_1(r)\psi_2(x) + \psi_3(x).$$

Er ergibt die einzelnen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \psi_3'' + \frac{h}{2} &= 0 \\ \frac{\psi_2''}{\psi_2} &= -M \\ \varphi_1'' + \frac{1}{r} \varphi_1' - M\varphi_1 &= 0 \\ \psi_1'' - bi\psi_1 - \frac{h}{2} &= 0 \\ \frac{\psi''}{\psi} &= -C \\ \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - (C + bi)\varphi &= 0, \end{aligned}$$

---

1) Im Argument von  $\operatorname{arctg}$  ist nach (61) der Faktor  $+\frac{h}{2b}$  im Zähler und Nenner hinzuzunehmen, da hier nicht das Vorzeichen des Bruchs, sondern das des Zählers und Nenners wegen (46) getrennt zu beachten ist.

und die Lösung

$$\begin{aligned}
 U_w(r, x, t)_2 &= \frac{h}{4} x(l-x) + \sum m_n J_0 \left( r \frac{n\pi}{l} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\
 &+ \frac{h}{2b} \left[ (\zeta' + i\zeta'') \left\{ e^{-V\frac{b}{2}x} + \left( \mathfrak{z}at - V\frac{b}{2}x \right) i + e^{-V\frac{b}{2}(l-x)} + \left( \mathfrak{z}at - V\frac{b}{2}(l-x) \right) i \right\} + i e^{\mathfrak{z}at} \right] \\
 (76) \quad &+ \sum (\eta'_n + i\eta''_n) J_0 \left( r \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{\mathfrak{z}at}
 \end{aligned}$$

und

$$(77) \quad u_w(r, x, t)_2 = \Re \{ U_w(r, x, t)_2 \};$$

dabei sind die  $m_n$  wie bei  $u_g(r, x)_2$  reell zu bestimmen;  $\zeta' \zeta''$  ergeben sich wie  $b' b''$  aus (50), wo die  $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$  resp. durch  $0, -1, \sqrt{\frac{b}{2}}, \sqrt{\frac{b}{2}}$  zu ersetzen sind:

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta' &= \frac{e^{-iV\frac{b}{2}} \sin \sqrt{\frac{b}{2}} l}{1 + 2e^{-iV\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\frac{b}{2}} l + e^{-2iV\frac{b}{2}}} \\ \zeta'' &= \frac{-\left( 1 + e^{-iV\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\frac{b}{2}} l \right)}{1 + 2e^{-iV\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\frac{b}{2}} l + e^{-2iV\frac{b}{2}}} \end{aligned} \right.$$

Da nach Bestimmung der Integrationskonstanten von  $\psi$  in

$$\varphi = J_0 \left( r \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} \right)$$

eine Besselsche Funktion gemischt komplexen Arguments auftritt, ist die Diskussion von (76) nur für kleine oder große  $n$  möglich, da entsprechende Tabellen noch fehlen; jedenfalls lassen sich die  $\eta'_n, \eta''_n$  bestimmen aus

$$\begin{aligned}
 \sum (\eta'_n + i\eta''_n) &\left\{ \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} J_0 \left( R \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} \right) + \frac{\mu}{\lambda} J_0 \left( R \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} \\
 (79) \quad &= \frac{h}{2b} \frac{\mu}{\lambda} \left[ (\zeta' + i\zeta'') \left\{ e^{-Vbi x} + e^{-Vbi(l-x)} \right\} + i \right].
 \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(80) \quad J_0(r(a+bi)) = \text{Ber}((a+bi)r) + i \text{Bei}((a+bi)r)$$

und

$$(81) \quad r \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} = \varrho_1, \quad R \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - bi} = P_1,$$

dann wird der von  $t$  abhängige Teil von  $u$ :

$$(82) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{h}{2b} \sin 2at + \frac{h}{2b} \sqrt{\xi'^2 + \xi''^2} \left[ e^{-\sqrt{\frac{b}{2}}x} \sin \left( 2at - \sqrt{\frac{b}{2}}x + \operatorname{arctg} \frac{\xi''}{\xi'} \right) \right. \\ & \quad \left. + e^{-\sqrt{\frac{b}{2}}(l-x)} \sin \left( 2at - \sqrt{\frac{b}{2}}(l-x) + \operatorname{arctg} \frac{\xi''}{\xi'} \right) \right] \\ & \quad + \sum_1^{\infty} n \sqrt{(\eta'_n \operatorname{Ber} \varrho_1 - \eta''_n \operatorname{Bei} \varrho_1)^2 + (\eta'_n \operatorname{Bei} \varrho_1 + \eta''_n \operatorname{Ber} \varrho_1)^2} \\ & \quad \times \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{\eta'_n \operatorname{Ber} \varrho_1 - \eta''_n \operatorname{Bei} \varrho_1}{\eta'_n \operatorname{Bei} \varrho_1 + \eta''_n \operatorname{Ber} \varrho_1} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \right.$$

Die gedämpfte longitudinale Welle, die den Einfluß der Abkühlung auf die typischen Wechselstromglieder darstellt, hat eine ähnliche Form wie die S. 29 besprochene longitudinale Welle. Aber der Exponentialfaktor ihrer Amplitude und ihre Phase hat nur dann denselben Wert wie dort, wenn  $g$  klein gegen  $b$  ist, da dort die Faktoren  $\alpha_0$  sonst von  $\sqrt{\frac{b}{2}}$  verschieden sind; sie entspricht also einem Draht ohne Ausstrahlung, ist aber trotzdem von der oben besprochenen Welle nicht merklich verschieden, da beide nur in der Nähe der Klemmen auftreten, wo die innere Wärmeleitung die äußere bedeutend überwiegt — wieder abgesehen von ganz dünnen Drähten, vgl. ebenda. Das Gleiche gilt auch für die rein zeitlichen Schwankungen. Für  $n = 1$  kann  $\operatorname{Ber} = \operatorname{ber}$ ,  $\operatorname{Bei} = \operatorname{bei}$  gesetzt werden, wenn  $l$  groß ist; es läßt sich deshalb auch aus dieser Formel der Schluß ziehen, daß die Temperatur in ihrer Abhängigkeit von  $r$  wenig variiert; die einzelnen Glieder dürften wohl in der  $-r$ -Richtung fortschreitende Wellen darstellen, deren inkonstante Amplitude auch von  $x$  abhängt, vgl. auch 15.

**11. Die Gleichungen für unendliche Drahtlänge.** Es wird unter Umständen einfacher sein, die Drahtlänge als unendlich anzunehmen und nur den abkühlenden Einfluß einer Klemme zu untersuchen. Daß dies für die gesamte Temperatur nur bei wirklich langen oder sehr dünnen Drähten erlaubt ist, erhellt aus dem zu (19) Gesagten. Dagegen ist es für die typischen Wechselstromglieder immer erlaubt, da hier die Faktoren  $\alpha_0$  im Exponenten auch bei kleiner Frequenz groß sind.

Es gibt zwei Wege, zu den neuen Gleichungen zu gelangen; entweder macht man in den Gleichungen selbst den Grenzübergang, oder man integriert die Differentialgleichung von neuem, indem man nur die eine Grenzbedingung (für  $x = 0$ ) berücksichtigt und anstelle der andern die Bedingung setzt, daß  $u$  auch für große  $x$  endlich bleibt.

*Gleichstrom, longitudinales Gefälle.* In (18) und (19) wird

$$\alpha = -1$$

also

$$(83) \quad u_g(x)_\infty = \frac{h_0}{g} (1 - e^{-\sqrt{g}x}).$$

Die Temperatur eines Drahts, dessen eines Ende auf der Umgebungstemperatur bleibt, während das andere sehr weit entfernt (oder an einen schlechten Wärmeleiter angeschlossen) ist, nähert sich asymptotisch nach einem Exponentialgesetz ihrem höchsten Wert.

Wollen wir hierbei den Anfangszustand berücksichtigen, so integrieren wir am einfachsten die Differentialgleichung und setzen

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{h_0}{g} [1 + \alpha e^{-\sqrt{g}x}] \\ f &= e^{-Ct} \\ \psi &= b \sin \sqrt{\frac{C-gk}{k}} x; \end{aligned}$$

(7) gibt  $\alpha = -1$ , läßt aber  $b$  und  $C$  beliebig. Wir setzen

$$\sqrt{\frac{C-gk}{k}} = y, \quad C = (y^2 + g)k$$

$$b = -\frac{h_0}{g} \frac{2}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l (1 - e^{-\sqrt{g}\xi}) \sin y\xi \, d\xi \cdot dy$$

und erhalten, wenn wir  $\psi$  über  $y$  von Null bis  $\infty$  integrieren,

$$(84) \quad u_{g\alpha}(x, t)_\infty = \frac{h_0}{g} [1 - e^{-\sqrt{g}x}] - \frac{2}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sin yx \cdot e^{-(y^2+g)t} dy \int_0^l (1 - e^{-\sqrt{g}\xi}) \sin y\xi \, d\xi].$$

Dies genügt den Anforderungen, da für  $x = 0$  und für  $t = 0$   $u = 0$  ist, denn es gilt

$$(85) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sin yx \, dy \int_0^l f(\xi) \sin y\xi \, d\xi = f(x),$$

$$0 \leq x \leq l$$

für alle Funktionen  $f(x)$ , die im Bereiche endlich und stetig sind und für  $x = 0$  verschwinden. An der oberen Grenze  $\infty$ , die uns hier nicht interessiert, ist der Wert des Integrals  $\frac{1}{2} \lim f(l)$  für  $l = \infty$ .<sup>1)</sup>

1) Vgl. z. B. Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis. II. Braunschweig 1905, S. 188.

*Gleichstrom, radiales und longitudinales Gefälle.* Aus (40) folgt  $b_n = 1$ ; die Glieder  $e^{-\frac{g_n}{R}(t-x)}$  in (41) verschwinden, daher wird

$$(86) \quad u_\nu(r, x)_\infty = \frac{h_0}{g} + \frac{h_0}{4} (R^2 - r^2) + \sum_1^\infty f_n J_0\left(\frac{r \vartheta_n}{R}\right) e^{-\frac{g_n x}{R}}.$$

Die Formel sagt, wie nach der für das longitudinale Gefälle allein zu erwarten ist, daß die Temperaturen in Parallelen zur Drahtachse asymptotisch ansteigen; denn schon in kleinem Abstand von der Klemme sind die Glieder für  $n = 2$  zu vernachlässigen. Das Gleiche gilt für die Differenzen innen und außen, die im gleichen Verhältnis wie die Temperaturen selbst erniedrigt werden.

Setzen wir in (86) auch  $e^{-\frac{g_n x}{R}} = 0$  dadurch, daß wir  $x$  sehr groß annehmen, so erhalten wir die radiale Temperaturverteilung allein, vgl. (21).

Bei der zweiten Art der Integration erhalten wir

$$U = -\frac{h_0}{2} x^2 + Cx + C' + m J_0(r \sqrt{-\mathfrak{M}}) \sin \sqrt{\mathfrak{M}} x;$$

$x = 0$  läßt  $m, \mathfrak{M}, C$  beliebig,  $C'$  muß Null sein. Da  $C$  nicht bestimmt und  $u$  für unendliches  $x$  unendlich wird, ist die Lösung unbrauchbar; dies beruht darauf, daß sie in  $\psi_1$  die Temperatur eines unendlich langen Drahtes, der nur an dem einen Ende abgekühlt wird, aber keine Wärme durch die Oberfläche abgibt, für seinen stationären Zustand enthält, welcher unbestimmt ist.

*Wechselstrom, longitudinales Gefälle.* Aus (47) folgt  $a_1 = -1$ , aus (50)  $b' = \beta_0$ ,  $b'' = \beta_1$ . Da noch

$$e^{-\sqrt{g}(t-x)} = 0 \quad \text{und} \quad e^{-\alpha_0(t-x)} = 0$$

wird, so erhalten wir

$$(87) \quad u_w(x, t)_\infty = \frac{h}{2g} (1 - e^{-\sqrt{g}x}) + \sqrt{\beta_0^2 + \beta_1^2} \left[ \sin \left( 2at + \arctg \frac{-\beta_0}{\beta_1} \right) + e^{-\alpha_0 x} \sin \left( 2at - \alpha_1 x + \arctg \frac{\beta_0}{-\beta_1} \right) \right].$$

Wir haben die bekannte Gesamttemperatur und zeitlichen Schwankungen; dazu noch die eine der longitudinalen Wellen, ohne Superposition mit der anderen.

Bei Berücksichtigung des Anfangszustandes erhalten wir analog wie oben

$$(88) \quad u_{wa}(x, t)_x = u_w(x, t)_\infty - \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sin yx \cdot e^{-(y^2 + \rho)t} dy \int_0^x u_w(\xi, 0)_\infty \sin y\xi d\xi.$$

*Wechselstrom, radiales und longitudinales Gefälle.* Die Gleichung (74) wird wenig einfacher, dadurch, daß nach (71)  $s'_n = 1$ ,  $s''_n = 0$  und (40)  $b_n = 1$  wird und alle Glieder mit  $l - x$  im Exponenten Null werden, die eine Welle also verschwindet.

C. Diskussion einiger Formeln von B.

Werte der Konstanten in Gleichung (1).<sup>1)</sup>

	Für Cu	für Fe		
(89)	{	$D$	8,9	7,7
		$c$	0,091	0,105
		$\mu$	0,0017	0,0012
		$\lambda$	0,9	0,15
		$w$	0,0 <sub>5</sub> 17	0,0 <sub>4</sub> 12
		$k$	1,111	0,1855

12. Diskussion der konstanten radialen Differenz bei niederer mittlerer Temperatur.

Nach (66) ist der zeitlich konstante Teil der Temperatur

$$(90) \quad u_x = \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} (R^2 - r^2),$$

wobei nach (1)

$$(91) \quad \begin{cases} u_0 = \frac{h}{2g} = \frac{J^2 w}{4 \lambda \mu} R = \frac{J^2 w}{4 \pi^2 \lambda \mu R^3} \\ \frac{h}{8} = \frac{J^2 w}{8 \lambda \mu} = \frac{J^2 w}{8 \pi^2 \lambda \mu R^4}. \end{cases}$$

Es wird somit

$$(92) \quad \begin{cases} u_x^{(0)} = \frac{h}{2g} + \frac{h}{8} R^2 = \frac{J^2 w}{8 \pi^2 \lambda \mu R^3} (R + 2 \frac{\lambda}{\mu}) \\ u_x^{(R)} = \frac{h}{2g} = \frac{J^2 w}{4 \pi^2 \mu \lambda R^3}. \end{cases}$$

Die Mitteltemperatur  $u_m$  des Drahtes ergibt sich aus

$$\pi R^2 \cdot u_m = \int_0^R r \int_0^{2\pi} u_x d\varphi dr$$

als

$$(93) \quad u_m = \frac{h}{2g} + \frac{h}{16} R^2 = \frac{h R}{16} (4 \frac{\lambda}{\mu} + R),$$

sie ist also das arithmetische Mittel zwischen  $u^{(0)}$  und  $u^{(R)}$ . Wäre nun  $R$  groß gegen  $\frac{4\lambda}{\mu}$  — das beträchtlich größer als 100 ist, also ein praktisch nicht vorkommender Fall — so erhielte man das Resultat, daß bei gegebener Höchsttemperatur die maximale Stromstärke proportional  $R$  wäre. Wenn dagegen  $R$  gegen  $\frac{4\lambda}{\mu}$  klein ist, ist bei derselben Temperatur

1) Diese Werte sind dem Lehrbuch von Kohlrausch entnommen, mit Ausnahme von  $\mu$ ; hierüber vgl. A.



erhöhung die Stromstärke proportional  $R^3$ . Letzteres ist die auch ohne Integration abzuleitende Formel, vgl. die Bottomleysche Formel S. 5, die auch meistens zur Bestimmung von  $\mu$  u. dgl. verwendet wurde, siehe auch Cranz a. a. O. S. 98. Experimentell fand man nun meist die Stromstärke proportional  $R$  bei derselben Temperaturerhöhung, vgl. die Zusammenstellung bei Teichmüller a. a. O. Kap. I, so daß man anscheinend die Abhängigkeit des  $\mu$  vom Radius berücksichtigen muß; dieses wäre demnach proportional  $\frac{1}{R}$ . (Es scheint, als ob die Schuld an dieser Abweichung von dem erwarteten Resultat auf die Abhängigkeit des  $\mu$  von der Temperatur geschoben wurde; wenigstens war immer die lineare Wärmeabgabe der Punkt, den man verbessern zu müssen glaubte). Da jedoch diese Verhältnisse noch nicht genügend geklärt sind, wird  $\mu$  des weiteren als Konstante betrachtet; einige Schlüsse würden allerdings geändert werden und könnten so zu einer experimentellen Entscheidung beitragen.

Bei konstanter Stromdichte wächst  $u_0$  mit dem Radius und zwar bei konstantem  $\mu$  wie  $R$ , bei  $\mu \sim \frac{1}{R}$  wie  $R^2$ ; man darf also dickere Drähte nicht mit der gleichen Stromdichte belasten wie dünne, wenn man nur eine gewisse Temperaturerhöhung zulassen will. Dies kommt in gesetzlichen Vorschriften zum Ausdruck<sup>1)</sup>, wo für den kleinsten angegebenen Querschnitt über  $500 \frac{\text{Amp.}}{\text{qcm}}$  erlaubt sind, für den größten nur 100.

Wir finden aus (91) und (92) die zu untersuchende radiale Temperaturdifferenz außen und innen

$$(94) \quad D_r = u_r^{(0)} - u_r^{(R)} = \frac{h}{8} R^2 = \frac{J^2 w R^2}{8 \lambda \mathcal{K}} = \frac{J^2 w}{8 \pi^2 \lambda \mathcal{K} R^2} = \frac{\mu}{2 \lambda} R u_0.$$

Wir sehen aus (94), daß  $D$  den größten Wert annimmt, wenn gleichzeitig  $u_0$  und  $R$  den größten Wert haben; man erhält deshalb den größten Unterschied der Temperaturen in der Drahtachse und an der Oberfläche, wenn man beim größten in Betracht kommenden Querschnitt — wir können den erwähnten gesetzlichen Vorschriften entsprechend einen Wert von  $R = 2$  als größten ansehen — die Stromstärke so groß macht, daß  $u_0$  seinen höchsten Betrag von etwa 20 Grad — darüber hinaus ist die Gültigkeit der Formel vielleicht zweifelhaft — annimmt. Für Cu findet man z. B. für  $J = 5000$  und  $R = 2$   $D_k = 0,0357^\circ$ ,  $u_0 = 18,9^\circ$ ; für andere Metalle ist die radiale Differenz größer als für

1) Bei Teichmüller a. a. O. S. 261 sind folgende deutsche gesetzliche Vorschriften über die Maximalbelastung einer isolierten Kupferleitung, wenn sie in Häusern verlegt ist, angeführt:

bei einem Querschnitt mm <sup>2</sup> :	0,75	2,5	10	35	70	120	310	500	800	1000
eine Stromstärke Amp.:	4	15	40	90	130	200	400	600	850	1000

Cu, wenn  $\frac{\lambda}{\mu}$  größer ist; für Eisen wächst sie auf über das Vierfache, bei  $J = 1540$ . Da für alle andern Metalle außer Silber das innere Wärmeleitvermögen kleiner ist als für Cu, ist  $D$  — bei als annähernd gleich vorausgesetztem äußeren Leitvermögen — größer; für Blei würde  $D$   $0,4^0$  betragen können bei  $20^0$  Erhöhung und einer viel geringeren Stromstärke infolge des größeren Widerstandes.

Die gemachten Voraussetzungen erlauben es natürlich,  $R$  zu verkleinern, wenn die Stromdichte konstant gehalten wird, oder um die obere Grenze der Temperatur zu erhalten, wenn die Stromdichte proportional  $R^{-\frac{1}{2}}$  geändert wird. Dadurch wird allerdings die radiale Differenz kleiner, aber, wie wir sehen werden, die Amplitude der radialzeitlichen Schwankungen größer.

**13. Diskussion der zeitlichen Schwankungen bei niederer mittlerer Temperatur.**

Wir haben hier nach (66) zu diskutieren

$$(95) \quad S_{t,\varrho} = \frac{h}{2b} \sqrt{(d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho)^2 + (1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho)^2} \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho}{1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho} \right).$$

Um den Verlauf von  $d_0$  und  $d_1$  und der mit  $\operatorname{ber} \varrho$  und  $\operatorname{bei} \varrho$  multiplizierten Ausdrücke übersehen zu können, seien zunächst die Werte für  $\operatorname{ber}$ ,  $\operatorname{bei}$ ,  $\operatorname{ber}'$ ,  $\operatorname{bei}'$  nach Jahnuke a. a. O. S. 146 angegeben:

$x$	$\operatorname{ber} x$	$\operatorname{bei} x$	$\operatorname{ber}' x$	$\operatorname{bei}' x$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,999	0,0625	— 0,0078	0,2499
1,0	0,9844	0,2496	— 0,0624	0,4999
1,5	0,9211	0,5576	— 0,2100	0,7303
2,0	0,7517	0,9723	— 0,4931	0,9170
2,5	0,3999	1,4571	— 0,9436	0,9983
3,0	— 0,2214	1,9376	— 1,5698	0,8805
3,5	— 1,1936	2,2833	— 2,3361	0,4353
4,0	— 2,5634	2,2927	— 3,1347	— 0,4911
4,5	— 4,2991	1,6859	— 3,7537	— 2,0526
5,0	— 6,2301	0,1160	— 3,8442	— 4,3538
5,5	7,9735	— 2,7902	— 2,9070	— 7,3729
6,0	— 8,8584	— 7,3348	— 0,2931	— 10,8462
8,0	+ 20,9739	— 35,0167	+ 38,2944	— 7,6615
10,0	138,8405	+ 56,3704	51,373	+ 135,23
15,0	— 2969,79	— 2952,33	86,648	— 4089,2
20,0	47583,7	11500,8	24325,1	41491,5

Aus diesen Werten berechnet man die  $B_0$  und  $B_1$  (64) und ihre mit den Faktoren  $\text{ber } P$  und  $\text{bei } P$  gebildeten Aggregate<sup>1)</sup>, die für die Oberflächentemperatur wichtig sind, als:

	$P$	$B_0$	$B_1$	$B_0 \text{ ber } P$ $- B_1 \text{ bei } P$	$B_0 \text{ bei } P$ $+ B_1 \text{ ber } P$
(97) {	0,0	$\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	0,5	3,998	-0,1248	4,002	0,125
	1,0	1,730	-0,2162	1,757	0,219
	1,5	1,265	-0,3629	1,367	0,371
	2,0	0,8467	-0,4553	1,079	0,481
	2,5	0,5290	-0,5001	0,931	0,571
	3,0	0,2718	-0,4847	0,879	0,626
	3,5	0,07709	-0,4137	0,852	0,670
	4,0	-0,04876	-0,3113	0,838	0,686
	4,5	-0,1121	-0,2050	0,828	0,692
	5,0	-0,1291	-0,1139	0,817	0,695
	5,5	-0,1174	-0,04628	0,807	0,697
	6,0	-0,09201	-0,002488	0,796	0,697
	8,0	-0,005024	+0,02511	0,774	0,702
	10,0	+0,006463	+0,002455	0,759	0,705
	15,0	-0,0 <sub>3</sub> 2444	+0,0 <sub>5</sub> 5179	0,741	0,707
	20,0	+0,0 <sub>4</sub> 1794	+0,0 <sub>4</sub> 1051	0,733	0,707

1) Die Konvergenz dieser Ausdrücke gegen einen gemeinschaftlichen Wert ( $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ) läßt sich leicht beweisen; nach Jahnke a. a. O. S. 101 gilt für große  $x$  die Näherung

$$J_0(x\sqrt{-i}) = \text{ber } x + i \text{ bei } x = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \frac{\text{ber}' x + i \text{bei}' x}{-\sqrt{-i}} = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

Da  $\sqrt{-i} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ , findet man, wenn zur Abkürzung  $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} = \alpha$  gesetzt wird,

$$\text{ber } x = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\pi x} \cos \alpha, \quad \text{bei } x = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\pi x} \sin \alpha$$

$$\text{ber}' x = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\pi x}} (-\sin \alpha + \cos \alpha), \quad \text{bei}' x = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\pi x}} (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

Also wird nach (64)

Für kleine  $P$  gilt die Näherung in (63) nicht, denn es wäre für  $R=0$   $d_0 = 0$  und  $d_1 = 1$ , nicht unendlich. Man findet aus (58) und (59) für

$$(98) \quad \begin{array}{cccc} & \text{ber } P & \text{bei } P & \text{ber}' P & \text{bei}' P \\ P = 0,1: & 1,0000, & 0,0025, & -0,0006, & 0,0500, \end{array}$$

also mit genügender Näherung für  $P \leq 0,1$

$$(99) \quad \text{ber } P = 1, \text{ bei } P = \frac{P^2}{4}, \text{ ber}' P = -\frac{P^3}{16}, \text{ bei}' P = \frac{P}{2}.$$

Mit abnehmendem  $P$  werden allmählich (je nach der Wechselzahl schon für größere oder kleinere  $P$ ) die bisher in  $d_0, d_1$  vernachlässigten Glieder in Betracht kommen, und zwar für langsame Schwankungen schon bei größerem  $P$ , bis zuletzt für ganz kleine  $P$  — sehr kleine Radien — die Näherungen

$$(100) \quad d_0 = -\frac{\frac{P}{2}}{\lambda\sqrt{b}}, \quad d_1 = -1 \quad \text{für } P \leq 0,041$$

gelten, infolge des Überwiegens von  $\text{ber } P$ . Da auch für kleine Frequenzen  $\sqrt{b}$  größer ist als 10,  $\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}}$  kleiner als  $10^{-3}$ , so tritt die Gültigkeit dieser letzten Näherungsformel in praktischen Fällen nicht auf; vgl. bei einem kleinen  $\nu$  (101).

Da bei größeren Radien ( $P > 0,5$ )  $B_0, B_1$  und die zugehörigen transzendenten Ausdrücke höchstens von der Größenordnung 1 sind, so können wir dieselben Ausdrücke in den  $d$ , die höchstens von der Größenordnung  $10^{-3}$  sind, gegen 1 vernachlässigen. Die Amplitude der

$$\begin{array}{l} B_0 \text{ ber } P - B_1 \text{ bei } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ B_0 \text{ bei } P + B_1 \text{ ber } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

unabhängig von  $P$ , und einander gleich. Daher ist die Amplitude für große  $P$  und  $\varrho = P$ , d. h. an der Oberfläche,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

und die Phase  $\varphi(P)$  in (109)

$$\text{arctg} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\pi}{4}.$$

In 17 erhalten wir die Phase

$$\text{arctg} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5\pi}{4}.$$

zeitlichen Schwankungen ist also in erster Näherung von dem Abstand von der Drahtachse  $r$  unabhängig, also im ganzen Querschnitt konstant gleich

$$\frac{h}{2b} = \frac{\mathfrak{S}^2 w}{4 a \mathfrak{M} c D} = \frac{\mu u_0}{a c D R}.$$

Halten wir nun  $\mathfrak{S}^2 R (u_0)$  konstant beim Verkleinern des Radius, so wächst die Amplitude.  $\frac{h}{2b}$  ist proportional  $\frac{1}{R}$ , ebenso die Amplitude, bis die Näherung (100) in Kraft zu treten beginnt; dann wird nach einem kurzen Übergang wegen (99) und (100)

$$\sqrt{d_0^2 + (1 + d_1)^2} = \sqrt{d_0^2} = \frac{b}{g},$$

und daher die Amplitude:  $\frac{h}{2g}$ , gleich der Mitteltemperatur, so daß bei außerordentlich dünnen Drähten die Temperatur periodisch zwischen 0 und  $2u_0$  hin- und herschwankt.

Die hier vernachlässigte Abhängigkeit vom Radius, die für kleine  $P$  noch viel kleiner ist als hier, wird in 15 untersucht und mit der konstanten radialen Differenz verglichen.

Für eine kleine Wechselzahl ( $\nu = 50$ ) orientiere nachstehende Tabelle über den Zusammenhang von  $R$  und Stromstärke  $J$ , die aus der Bedingung  $u_0 = 20^\circ$  bestimmt ist, mit der Amplitude  $A$  und Phase  $\varphi$  der Temperaturschwankung.

(101)	{	$P$	$R$	$J$	$A$	$\varphi$	
			2	5140	0,0 <sub>3</sub> 134	$\pi$	für Cu
				1630	0,0 <sub>4</sub> 945	$\pi$	für Fe
			0,1	57,5	0,00267	$\pi$	
				18,2	0,00189	$\pi$	
			0,01	1,82	0,0267	$\pi$	
				0,575	0,0189	$\pi$	
			0,001	0,0575	0,267	$\pi$	
				0,0182	0,189	$\pi$	
			0,01	0,0 <sub>3</sub> 595	0,0264	0,449	$\pi + 1^\circ 17'$
				0,0 <sub>3</sub> 243	0,00218	0,778	$\pi + 2^\circ 14'$
			0,001	0,0 <sub>4</sub> 595	0,0 <sub>3</sub> 834	4,37	$\pi + 11^\circ 59'$
				0,0 <sub>4</sub> 243	0,0 <sub>4</sub> 689	7,25	$\pi + 21^\circ$
			0,0 <sub>3</sub> 1	0,0 <sub>5</sub> 595	0,0 <sub>4</sub> 264	17,94	$\pi + 65^\circ 45'$
				0,0 <sub>5</sub> 243	0,0 <sub>5</sub> 218	19,83	$\pi + 88^\circ 2'$
			0,0 <sub>4</sub> 1	0,0 <sub>6</sub> 595	0,0 <sub>6</sub> 834	$u_0$	$3 \frac{\pi}{2}$
				0,0 <sub>6</sub> 243	0,0 <sub>7</sub> 689	$u_0$	$3 \frac{\pi}{2}$

Für  $P > 0,5$  wurde  $d_0, d_1$  gegen 1 vernachlässigt; dann bis  $0,0_3 1$  nach (62) unter Benutzung von (99), und schließlich aus (100) berechnet; die so erhaltenen  $\bar{d}$  sind:

	$P$	$d_0$ (Cu)	$d_0$ (Fe)	$d_1$ (Cu)	$d_1$ (Fe)
(102)	0,1	— 0,0022	— 0,00388	— 0,0 <sub>5</sub> 2	— 0,0 <sub>5</sub> 4
	0,01	— 0,022	— 0,0388	— 0,0 <sub>3</sub> 48	— 0,0015
	0,001	— 0,211	— 0,334	— 0,0498	— 0,1303
	0,0 <sub>3</sub> 1	— 0,364	— 0,241	— 0,836	— 0,917
	0,0 <sub>4</sub> 1	— 0,0445	— 0,0259	— 1	— 1
	0,0 <sub>5</sub> 1	— 0,00445	— 0,00259	— 1	— 1

**14. Diskussion der radialen Differenzen bei höheren Mitteltemperaturen.**

Die Formeln für die radialen Differenzen und die radial-zeitlichen Schwankungen sind dieselben wie in (94) und (95), nur haben die Konstanten andere Werte; da es hier jedoch nur auf ungefähre Kenntnis der Differenzen ankommt, und die Konstanten für hohe Temperaturen nicht oder nur teilweise bekannt sind, und da schließlich unsere Formeln für die konstante Mitteltemperatur nicht mehr gelten, wir also aus den Annahmen über Radius und Stromstärke die Temperatur des Drahtes, die für die genaue Bestimmung des Werts der Konstanten notwendig wäre, nicht mehr direkt, sondern nur durch das S. 14 besprochene Näherungsverfahren berechnen können, sei der Einfachheit halber mit den alten Werten gerechnet. Jedoch muß gezeigt werden, in welchem Sinn die Änderung der Konstanten die zu diskutierenden Formeln beeinflusst. Zuverlässige Bestimmungen von  $w, c$  und  $\lambda$  bei einer Temperatur von 18—100 Grad erhielten Jäger und Diesselhorst a. a. O. nach einer Methode von Kohlrausch<sup>1)</sup>; dieser untersuchte den stationären Zustand, der eintritt, wenn an den Enden eines Drahts eine gegebene Spannung angelegt und Wärme nur durch die Klemmen abgeleitet wird. Da hier die Wärmeabgabe durch die Oberfläche unterdrückt ist, findet Kohlrausch die erreichte Maximaltemperatur abhängig von dem Verhältnis  $\frac{\lambda}{\alpha}$ , wenn  $\alpha$  das elektrische Leitvermögen ist. Dieses Verhältnis ist nach der Wiedemann-Franzschens<sup>2)</sup> Annahme für viele Metalle dasselbe und nach Lorenz a. a. O. proportional der absoluten Temperatur. Dies bestätigen die Versuche von Kirchhoff und

1) Kohlrausch, Über den stationären Wärmeezustand eines elektrisch geheizten Leiters. Ann d. Phys. 1, 1900, S. 132.

2) Wiedemann und Franz, Über die Wärmeleitfähigkeit der Metalle. Pogg. Ann. 89, 1853, S. 497.

Hansemann<sup>1)</sup> und von Jäger und Diesellhorst für die gutleitenden Metalle hinreichend genau.  $\frac{\lambda}{\alpha}$  wächst um etwa 40% bei 100 Grad Temperaturerhöhung. Eine sehr starke Veränderlichkeit der Leitvermögen wird auch durch geringe Verunreinigungen verursacht; so betonen Holborn und Wien<sup>2)</sup> S. 47: „Da die Abweichungen der Resultate der besten Beobachter die Beobachtungsfehler weit übersteigen und auch von denselben Beobachtern bei verschiedener Beschaffenheit des Materials große Unterschiede in der Wärmeleitung gefunden sind, so kann man den Schluß ziehen, daß auch geringe Unterschiede in der Reinheit und in der physikalischen Behandlung der Metalle schon erhebliche Verschiedenheiten im Wärmeleitungsvermögen bedingen werden“. Grüneisen a. a. O., der speziell den Einfluß von Verunreinigungen auf die Leitvermögen untersucht, findet eine bedeutende Erniedrigung beider Leitvermögen, und zwar derart, daß  $\frac{\lambda}{\alpha}$  mit abnehmendem elektrischen Leitvermögen zunimmt. Auch dies rechtfertigt wohl ein Rechnen mit den alten Werten, da für den besonderen Fall die Konstanten doch jedesmal bestimmt werden müssen.

$\lambda$  wird mit wachsender Temperatur meist ziemlich langsam kleiner, also  $h$  rasch größer besonders wegen des rasch wachsenden Widerstands.  $g$  wird langsam größer,  $c$  wird wenig größer,  $D$  wenig kleiner, so daß  $cD$  annähernd als konstant betrachtet werden darf; daher wird  $k$  langsam kleiner, und deshalb  $b$  größer.  $\frac{h}{2b}$  und  $\frac{h}{2g}$  wachsen rasch.

Die aus den alten Werten nach (94) berechnete radiale Differenz wird deshalb viel kleiner sein als die tatsächliche. Der Faktor von  $d_0$ ,  $d_1$  in (63) wird bei höherer Temperatur wohl ebenfalls ziemlich rasch wachsen, da  $\lambda$  im Nenner unter der Wurzel steht und  $\mu$  im Zähler relativ rasch wächst. Die Formel (63) hört daher schon für größere  $R$  auf zu gelten, so daß die Schwankungen auch wegen des Wurzelfaktors in der Amplitude größer sind, als es die Rechnung mit den alten Werten ergibt, vgl. 13.

Wir haben die konstante radiale Differenz

$$(103) \quad \Delta_x = v_x^{(0)} - v_x^{(R)} = \frac{h}{8} R^2 = \frac{\mathfrak{S}^2 w R^2}{8 \lambda \mathfrak{U}} = \frac{J^2 w}{8 \pi^2 \lambda \mathfrak{U} R^2}$$

1) G. Kirchhoff und G. Hansemann, Über die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Elektrizität. Wied. Ann. 13, 1881, S. 406.

2) Holborn und Wien, Die bisherigen Bestimmungen des Wärmeleitvermögens der Metalle. (Mitteilungen der physik.-techn. Reichsanstalt.) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 40, 1896, S. 45.

und die radial-zeitlichen Schwankungen

$$(104) \quad \Sigma_{i,e} = \frac{h}{2b} \sqrt{(d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho)^2 + (1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho)^2} \cdot \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho}{1 + d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho} \right)$$

von derselben Form wie früher (94), (95). Aber hier fällt die Beschränkung:  $u_0$  konstant, weg. Wir können also die radiale Differenz beliebig groß machen, wenn wir für denselben Draht hohe Stromstärken oder für dieselbe Stromstärke kleinen Radius nehmen — solange der Draht nicht schmilzt.

Wenn nun auch für die jetzt betrachteten hohen Temperaturen  $u_0 = \frac{h}{2g}$  nicht mehr streng gilt, so kann es doch einen ungefähren Anhalt dafür geben, welche Zusammenstellungen von Stromstärke und Radius auszuschließen sind, und andererseits, welche der berechneten radialen Differenzen vorkommen können.

Unabhängig von der Frequenz ist  $u_0$  und  $\mathcal{A}_x$  für Cu<sup>1)</sup>:

$R =$	$J = 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$1$	$10$	$10^2$	$10^3$	$10^4$		
(105)	$u_0$	{	6	600	0,006	0,6	60	(6000)		
			0,0,6	0,0,6	0,06	6	600			
			0,0,6	0,0,6	0,0,6	0,006	0,6	60	(6000)	
			0,0,1,6	0,0,9,6	0,0,7,6	0,0,5,6	0,0,3,6	0,06	6	600

$R =$	$\mathcal{A}_x$	{	0,0,4	0,0,4	0,0,4	0,0,4	0,004			
(106)	$\mathcal{A}_x$		0,0,4	0,0,4	0,0,4	0,0,4	0,004	0,004		
			0,0,1,4	0,0,1,4	0,0,8,4	0,0,6,4	0,0,4,4	0,004	0,4	
			0,0,1,4	0,0,1,4	0,0,1,4	0,0,8,4	0,0,6,4	0,0,4,4	0,004	0,4

Praktisch wird demnach die radiale Temperaturdifferenz immer klein sein, selbst für glühende Drähte. Daher darf bei Widerstandsmessungen, Längenänderungen u. dgl. die Oberflächentemperatur statt des genauen Mittelwerts gesetzt werden. Dies steht im Gegensatz zu der Ansicht Wiedemanns<sup>2)</sup>, der zweifelt, ob die durch Schmelzen von Stearin gemessene Oberflächentemperatur genau genug gleich dem Mittelwert der Temperatur ist.

1) Für Fe ist  $u_0$  beim gleichen  $R$  und  $J$  10 mal,  $\mathcal{A}_x$  60 mal so groß.

2) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität. II. Braunschweig 1894, §§ 290, 294.



Wenn diese Temperaturdifferenzen in den praktisch wichtigen Fällen nicht so sehr klein wären, könnten sie zur Erklärung des Brüchigwerdens<sup>1)</sup> der Leitungen herangezogen werden, neben den periodischen, von  $r$  unabhängigen, größeren Temperaturschwankungen bei Wechselstrom, die jedoch keine longitudinalen Spannungen innerer Schichten gegeneinander bewirken. Die in **15** untersuchten radialzeitlichen Temperaturschwankungen würden die Elastizität der Drähte wegen des fortwährenden Wechsels der Spannungen viel stärker beeinflussen als die von der konstanten radialen Differenz herrührenden, wenn nicht ihre Amplitude noch viel kleiner wäre.

Die Schwankungen (104) sind nur dadurch von  $J$  abhängig, daß  $h$  explizit vorkommt; alle anderen Größen enthalten  $J$  nicht; da wir keine Rücksicht nehmen auf das frühere Aufhören der Näherung (63) durch die Änderung der Werte der Konstanten, ist allein die Änderung von  $\frac{h}{2b}$  mit Radius und Stromstärke zu untersuchen. Auch hier wird man wie bei kleinem  $u_0$  die Amplituden durch passende Wahl von Radius und Stromstärke so groß wie  $u_0$  machen können; jedenfalls wird die Amplitude proportional  $J^2$  und  $R^{-3}$  wachsen.<sup>2)</sup>

1) Vgl. z. B. Veränderungen an metallischen Stromleitern (Peltier). Pogg. Ann. **65**, 1845, S. 606 und L. Dufour, Über die Festigkeit von Eisendrähnen, die von galvanischen Strömen durchlaufen werden. Pogg. Ann. **99**, 1856, S. 611, der aus allerdings nicht sehr zahlreichen und genauen Versuchen das merkwürdige Resultat findet, daß die Festigkeit von Eisendrähnen bei Stromdurchgang zunimmt, während Kupferdrähte durch den Stromdurchgang an Festigkeit abnehmen.

2) Bekannt ist ja, daß die Wechselzahl sehr genau stroboskopisch bestimmt werden kann, indem man das Flimmern einer eingeschalteten Glühlampe durch eine rotierende Scheibe mit ausgeschnittenen Sektoren beobachtet — bei einer solchen Umdrehungszahl, daß das Vorrücken von einem Sektor zum nächsten in der halben Periode des Wechselstroms erfolgt, scheint dann die Scheibe still zu stehen. Vgl. z. B. K. F. Schmidt, Frequenzbestimmungen langsamer elektrischer Schwingungen. Ann. d. Phys. **7**.1902, S. 225. Hier wird gezeigt, wie der mit bewegtem Apparat photographierte Faden einer wechselstromdurchflossenen Lampe sehr deutliche Maxima und Minima der Helligkeit aufweist; die Photographien sind S. 228 reproduziert. — C. F. Lorenz, Conditions for obtaining rapid light fluctuations from incandescent wires. Phys. rev., **35**, 1912, S. 402. Lorenz gibt in einem kurzen Auszug als Resultate einer offenbar experimentellen Arbeit an, daß die Schwankungen um so größer sind, je größer  $u_0$  und  $\mu$  ist, und je kleiner  $R$ ; dies stimmt mit dem Resultat S. 49:

$$A = \frac{h}{2b} = \mu \frac{1}{RacD} u_0$$

überein, wenn wir bei verschiedenen  $R$ , aber demselben  $u_0$  (durch gleichzeitiges Ändern der Stromstärke) beobachten.  $u_0$  enthält  $\mu$  im Nenner, so daß die Amplitude nur dann mit wachsendem  $\mu$  wächst, wenn wieder gleiche Oberflächentemperaturen

$A$  ist für Kupfer<sup>1)</sup>, wenn  $\nu = 50$ :

$$(107) \quad R = J = \begin{matrix} 10^{-3} & 10^{-2} & 10^{-1} & 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \\ 10^{-4} & \left\{ \begin{array}{l} 0,8 & 80 \\ 0,0_48 & 0,008 & 0,8 & 80 \\ 0,0_88 & 0,0_58 & 0,0_48 & 0,008 & 0,8 \\ 0,0_{12}8 & 0,0_{10}8 & 0,0_88 & 0,0_68 & 0,0_48 & 0,008 & 0,8 \\ 1 & \left( \begin{array}{l} 0,0_{16}8 & 0,0_{14}8 & 0,0_{12}8 & 0,0_{10}8 & 0,0_88 & 0,0_68 & 0,0_48 & 0,008 \end{array} \right) \end{array} \right. \end{matrix}$$

**15.** Die radial-zeitlichen Schwankungen in ihrer Abhängigkeit vom Radius.

Nach (95) ist

$$S_{i,\varrho} = \frac{h}{2b} \sqrt{(d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho)^2 + (1 + \overline{d_0 \operatorname{bei} \varrho} + \overline{d_1 \operatorname{ber} \varrho})^2} \times \sin \left( 2at + \operatorname{arctg} \frac{d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho}{1 + \overline{d_0 \operatorname{bei} \varrho} + \overline{d_1 \operatorname{ber} \varrho}} \right).$$

Wir lösen die Klammern auf, führen (63) ein und vernachlässigen die kleinen Glieder zweiter Ordnung (die transzendenten Ausdrücke in den  $B$  sind nach (97) höchstens von der Größenordnung 1, und  $\frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}}$  etwa  $10^{-4}$ ); dies ergibt

$$S_{i,\varrho} = \frac{h}{2b} \{ 1 - f(\varrho) \} \sin(2at + \pi + \psi(\varrho)),$$

wobei

$$f(\varrho) = \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} (B_0 \operatorname{bei} P + B_1 \operatorname{ber} P),$$

$$\psi(\varrho) = \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} (B_0 \operatorname{ber} P - B_1 \operatorname{bei} P).$$

Setzen wir  $\sin \psi = \psi$ ,  $\cos \psi = 1$  und vernachlässigen  $f \cdot \psi$ , so wird

$$S_{i,\varrho} = \frac{h}{2b} \{ \sin(2at + \pi) - f(\varrho) \sin(2at + \pi) + \psi(\varrho) \cos(2at + \pi) \}.$$

berücksichtigt werden; ob Lorenz auch dies Resultat erhält, ist aus der kurzen Angabe nicht bestimmt zu ersehen, aber wahrscheinlich, da er glühende Drähte untersucht, die wohl auf gleiche Helligkeit gebracht werden. — A. Larsen, Die periodische Schwankung der Lichtstärke von Metallfadenglühlampen bei Wechselstrom Elektrot. ZS. **34**, 1913, S. 231. Larsen untersucht photometrisch unter Anwendung einer synchron rotierenden Scheibe die Lichtschwankungen bei Wechselstrom, die um so größer sind, je dünner der Draht ist; die Lichtstärke schwankt für eine 220 V. 10 HK. Lampe zwischen 7 und 13,4 HK. — da die Lichtintensität sehr rasch mit der Temperatur wächst, ist die Abweichung des Maximums der Lichtstärke vom Durchschnitt größer als die des Minimums; Larsen findet infolgedessen die Lichtstärke bei Wechselstrom durchschnittlich größer als bei Gleichstrom, bei 30 Perioden z. B. um 3,7 %.

1) Für Fe ist  $A$  6 mal so groß.

Das entspricht den bisher besprochenen Schwankungen, überlagert von zwei stehenden Wellen, die um  $\frac{\pi}{2}$  gegeneinander verschoben sind. Nach (45) fassen wir diese beiden Ausdrücke zusammen und erhalten

$$S_{s,\varrho} = \frac{h}{2b} \left\{ \sin(2at + \pi) + \sqrt{f^2(\varrho) + \psi^2(\varrho)} \sin\left(2at + \pi + \operatorname{arctg} \frac{\psi}{f}\right) \right\},$$

also

$$(108) \quad S_{s,\varrho} = \frac{h}{2b} \left\{ \sin(2at + \pi) + \frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}} A(\varrho) \sin(2at + \pi + \varphi(\varrho)) \right\};$$

darin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(109) \quad \begin{aligned} A(\varrho) &= \sqrt{(B_0 \operatorname{bei} \varrho + B_1 \operatorname{ber} \varrho)^2 + (B_0 \operatorname{ber} \varrho - B_1 \operatorname{bei} \varrho)^2}, \\ \varphi(\varrho) &= \operatorname{arctg} \frac{B_0 \operatorname{ber} \varrho - B_1 \operatorname{bei} \varrho}{-(B_0 \operatorname{bei} \varrho + B_1 \operatorname{ber} \varrho)}. \end{aligned}$$

Wie die folgende Berechnung zeigt, stellt der zweite Ausdruck eine Welle dar, die von außen nach innen läuft mit abnehmender Amplitude. Die Amplituden an der Oberfläche nähern sich mit wachsendem  $P$  der Grenze  $\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}}$ , die Phase dem Wert  $\frac{3\pi}{4}$ .

$P = 2$

$\varrho$	$A$	$\varphi$
0,0	0,9631	61° 44'
0,5	0,9655	65 15
1,0	0,9806	76 1
1,5	1,037	94 9
2,0	1,181	114 1

$P = 5$

$\varrho$	$A$	$\varphi$
0,0	0,1721	-48° 33'
0,5	0,1723	-45
1,0	0,1749	-34 34
1,5	0,1855	-17 22
2,0	0,2243	+ 3 32
2,5	0,2602	+26 6
3,0	0,3362	47 58
3,5	0,4436	69 3
4,0	0,5915	89 32
4,5	0,7950	110 2
5,0	1,073	130 23

$P = 8$			$P = 20$		
$\varrho$	$A$	$\varphi$	$\varrho$	$A$	$\varphi$
0,0	0,02561	- 168° 41'	0,0	0,0 <sub>4</sub> 2080	+ 120° 23'
0,5	0,02563	- 165 6	0,5	0,0 <sub>4</sub> 2081	123 58
1,0	0,02598	- 154 28	1,0	0,0 <sub>4</sub> 2111	134 37
1,5	0,02739	- 137 30	1,5	0,0 <sub>4</sub> 2236	151 36
2,0	0,03146	- 116 23	2,0	0,0 <sub>4</sub> 2556	172 42
2,5	0,03986	- 93 55	2,5	0,0 <sub>4</sub> 3142	195 3
3,0	0,04995	- 73 40	3,0	0,0 <sub>4</sub> 4061	217 1
3,5	0,06597	- 51 10	3,5	0,0 <sub>4</sub> 5357	238
4,0	0,08805	- 30 30	4,0	0,0 <sub>4</sub> 7053	258 25
4,5	0,1182	- 10 6	4,5	0,0 <sub>4</sub> 9612	278 59
5,0	0,1597	+ 10 23	5,0	0,0 <sub>3</sub> 1295	299 20
5,5	0,2163	+ 30 26	5,5	0,0 <sub>3</sub> 1756	319 42
6,0	0,2945	+ 50 58	6,0	0,0 <sub>3</sub> 2401	339 41
8,0	1,045	+ 132 13	8,0	0,0 <sub>3</sub> 8488	421 18
			10,0	0,002776	502 29
			15,0	0,08701	705 12
			20,0	1,018	853 53

Die Wellenlänge ist durchschnittlich  $\varrho_0 = 10$ ; bei  $P = 20$  gelangen etwas über zwei ganze Wellen zur Ausbildung, siehe folgende Seite.

Ferner ist, wenn wir für größere  $P$  den zu kleinen Wert  $A(P) = 1$  setzen, vgl. auch S. 48f.

$$S_{t_0,0} - S_{t_0,P} = \frac{h}{2b} \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} \left[ \sqrt{B_1^2 + B_0^2} \sin \left( 2at + \pi + \arctg \frac{B_0}{-B_1} \right) - \sin (2at + \pi + \varphi(P)) \right]$$

Da die erste Amplitude kleiner (und für große  $P$  beträchtlich kleiner) ist als die zweite (= 1), so könnte die Temperatur an der Oberfläche im Verlauf der Periode auch kleiner sein als im Innern, in der Nähe der Zeiten, wo

$$2at + \pi + \varphi(P) = \frac{\pi}{2},$$

also bei größerem  $P$ , wenn

$$2at = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi.$$

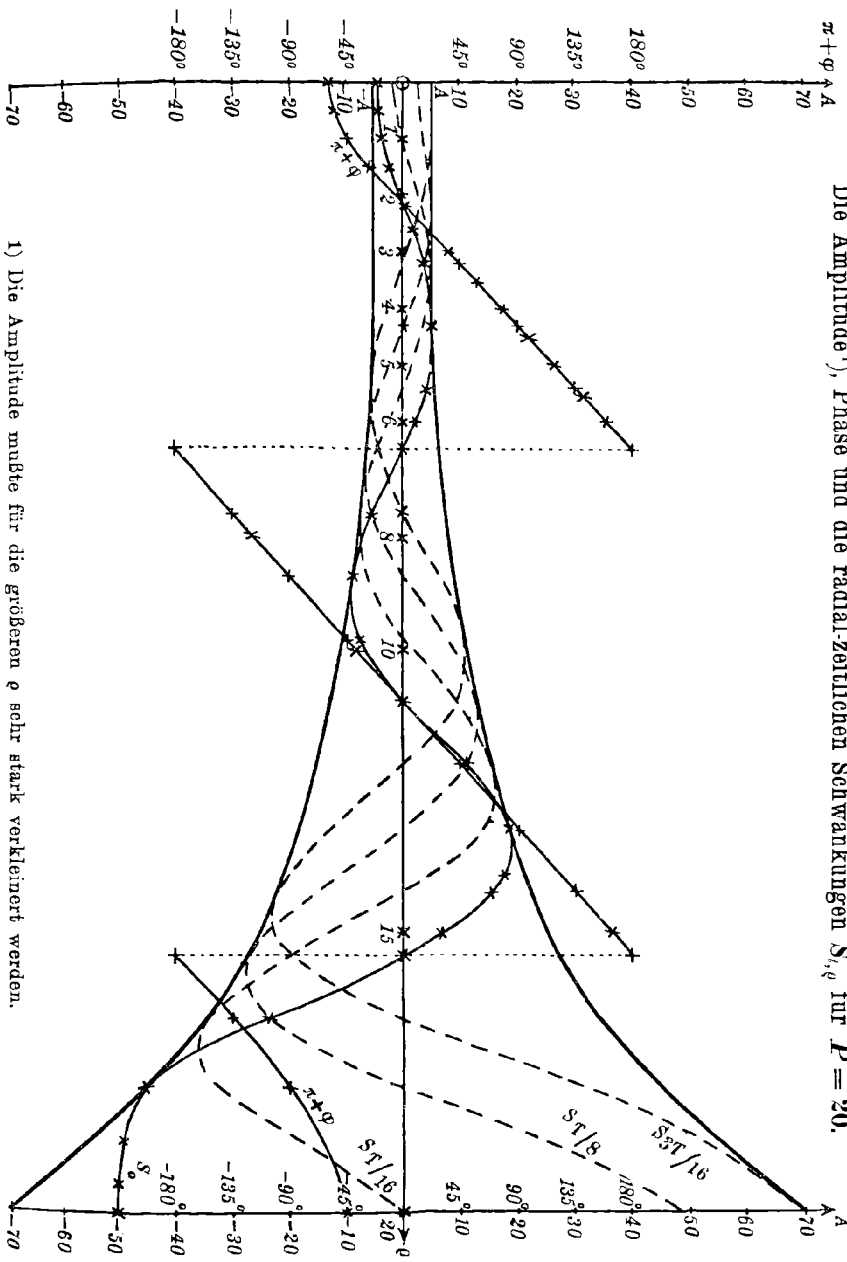
Für solche Zeiten  $t_0$  wird

$$\begin{aligned} S_{t_0,0} - S_{t_0,P} &= \frac{h\mu}{2b\lambda\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{B_0^2 + B_1^2} \left[ -\sin \arctg \frac{B_0}{-B_1} + \cos \arctg \frac{B_0}{-B_1} \right] - \frac{h}{2b} \frac{\mu}{\lambda} \\ &= -\frac{h}{2b} \frac{\mu}{\lambda \sqrt{2b}} (\sqrt{2} - B_0 - B_1) < 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nun aber die radiale, konstante Differenz nicht berücksichtigt; diese ist nach (94)

$$D_k = \frac{h}{8} R^2,$$

Die Amplitude<sup>1)</sup>, Phase und die radial-zeitlichen Schwankungen  $S_{r,q}$  für  $P = 20$ .



1) Die Amplitude mußte für die größeren  $q$  sehr stark verkleinert werden.

also wird unter Benutzung von (60)

$$D_k + (S_{t_0, o} - S_{t_0, p}) = \frac{hP^2}{8b} \left( 1 - 0,002 \frac{\sqrt{2} - B_1 - B_0}{\sqrt{v}P^2} \right).$$

Für  $P$  größer als 0,5 sind die  $B_0', B_1$  klein gegen  $\sqrt{2}$  oder nur wenig größer, so daß der Subtrahend klein gegen 1 ist oder etwas Positives hinzukommt. Demnach ist, so weit die Näherung (63) gilt, die Temperatur infolge der größeren konstanten radialen Differenz außen immer kleiner als innen. Für noch kleinere  $P$ , die ganz dünnen Drähten entsprechen, gelten die eben abgeleiteten Formeln nicht; doch nimmt die konstante Differenz wie  $R^2$  ab, und die Differenz in den Schwankungen, an der Oberfläche und in der Drahtachse, rührt von dem Unterschied von ber  $P$  und ber  $O$  her, der bei kleinem  $P$  ebenfalls  $P^2$  (also auch  $R^2$ ) proportional ist. Darnach läßt sich erwarten, daß die konstante radiale Differenz bei allen Radien größer ist als die Unterschiede der radial-zeitlichen Schwankungen. Da die Amplitude für  $0 \leq \rho < P$  immer bedeutend kleiner ist als für  $\rho = P$ , und auch dafür analog wie oben geschlossen werden darf, daß die konstante Differenz größer ist als die Unterschiede in den zeitlichen Schwankungen, so läßt sich erwarten, daß auch für ein  $\rho < P$  kein nach innen gerichtetes Temperaturgefälle eintritt. Dies folgt sehr einfach aus der physikalischen Erwägung, daß die Wärme gleichmäßig im Querschnitt erzeugt wird, und nur nach außen abgegeben wird; es muß also die Temperatur im Innern an allen Stellen größer sein, als näher an der Oberfläche. Cranz, bei dem die konstante radiale Differenz in der Gleichung bei Wechselstrom fehlt, kommt deshalb zu dem falschen Schluß, daß die Temperatur an der Oberfläche periodisch größer sei als innen.

### 16. Die Abkühlung durch die Klemmen.

Einige Bemerkungen über die Gleichungen für longitudinales Temperaturgefälle seien noch angefügt.

Für Sicherungen kommt die Maximaltemperatur in der Mitte ( $x = \frac{l}{2}$ ) in Betracht; sie ist nach (19)

$$(110) \quad u\left(\frac{l}{2}\right) = u_0 \frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\lambda} \frac{l}{2\sqrt{R}}}}{1 + e^{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\lambda} \frac{l}{\sqrt{R}}}}.$$

Sie ist nur dann  $u_0$  gleich, wenn  $e^{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\lambda} \frac{l}{2\sqrt{R}}}$  gegen 1 zu vernachlässigen ist, also bei großem  $l$  und kleinem  $R$ ; ein rationaler Zusammenhang zwischen  $J$ ,  $R$  und  $l$  für eine bestimmte Temperaturerhöhung läßt sich aus der Formel nicht ableiten, da die Konstante

$\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}$  (Dimension [Centimeter] $^{-\frac{1}{2}}$ ) von der Größenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-1}$  ist; jedenfalls ist der Exponent  $\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \frac{l}{\sqrt{R}}$  i. a. recht groß, so daß die Exponentialfunktion nicht nach dem ersten oder zweiten Glied der Entwicklung abgebrochen werden kann. Nach den Versuchen von Meyer a. a. O. dürfte die Formel auch für die Schmelztemperatur von Blei noch einigermaßen Geltung haben, so daß die dort angeführten empirisch gefundenen Gesetze ( $J^2$  proportional  $l$  bzw. proportional  $\sqrt{l}$ ) eben nur bei geringen Längenunterschieden Geltung haben können — für große Unterschiede ist es ja auch selbstverständlich, daß  $J$  nicht mit  $l$  immer weiter wachsen muß, da schließlich einmal die Temperatur in der Mitte durch die Abkühlung an den Enden nicht mehr beeinflußt wird.

Da, wie schon Lord Kelvin zeigte, die Abkühlung durch die Ableitung nach den Enden recht groß sein kann, sei auch die Mitteltemperatur abgeleitet, die für Anwendung auf Hitzdrahtinstrumente von Bedeutung ist; sie ist definiert durch

$$(111) \quad u_M \cdot l = \int_0^l u_p(x) dx = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{R}} \frac{1 - e^{-\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \frac{l}{\sqrt{R}}}}{\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}} \frac{1 + e^{-\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \frac{l}{\sqrt{R}}}}{\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}} \right\}.$$

Aus  $\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} = 0,0615$  für Cu (für Eisen etwa doppelt so groß) findet man

$\frac{l}{\sqrt{R}}$	$\frac{u}{u_0}$ in %	$\frac{u_M}{u_0}$ in %
1	0,047	0,098
2	0,180	0,175
4	0,750	0,547
8	2,945	2,01
16	10,97	7,39
32	34,35	23,29
64	72,53	51,11
128	96,07	74,6
256	99,93	87,3 <sup>1)</sup>
512		93,6
1024		96,8
2048		98,4

Die Durchschnittstemperatur wird also sehr bedeutend herabgedrückt, auch wenn in der Mitte schon die Höchsttemperatur erreicht ist.

1) Von hier ab gilt

$$\frac{u_M}{u_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \frac{l}{\sqrt{R}}}.$$

D. Joulesche Wärme wird nur in den Oberflächenschichten erzeugt.

### 17. Hohe Frequenzen.

Bei hohen Frequenzen wird die Stromdichte infolge Induktion der einzelnen Stromfäden aufeinander im Innern des Leiters kleiner; vgl. z. B. Stefan.<sup>1)</sup>

Es ergibt sich, daß bei dicken Drähten und hohen Frequenzen ( $10^6$ ) die Oberflächenschichten zum großen Teil die Leitung des Stromes allein übernehmen. Durch diese Verminderung des leitenden Querschnitts wird der Widerstand des Drahtes größer.

Wir wollen, nachdem wir bisher diesen „Skin“-Effekt ganz vernachlässigt haben, den andern Grenzfall betrachten und untersuchen, wie sich die radiale Verteilung der Temperatur gestaltet, wenn Joulesche Wärme nur in den Oberflächenschichten auftritt.

Die Differentialgleichung lautet

$$(112) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Dazu kommt eine andere Grenzbedingung als früher: Die in der Oberflächenschicht erzeugte Wärmemenge ist

$$\frac{J^2 w'}{2l} \sin^2 at,$$

wobei  $w'$  nicht den spezifischen, sondern den tatsächlichen Widerstand des durchflossenen Leiterteils für die Längeneinheit bedeutet. Er ist, wenn die Schicht unendlich dünn ist, unendlich groß, aber für das Wärmeleitungsproblem kommt nur in Betracht, daß die Joulesche Wärme endlich ist. Die entstehende Wärme wird teilweise nach außen abgegeben

$$\mu u \, 2\pi R$$

und teilweise nach der Achse zu abgeleitet

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial r} \, 2\pi R;$$

zur Temperaturerhöhung der Oberflächenschicht, von der wir im stationären Zustand überhaupt absehen könnten, wird eine im Vergleich zu den fortgeleiteten Wärmemengen unendlich kleine Wärmemenge verbraucht, so daß

$$\mu u + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{J^2 w'}{2\pi 2l R} \sin^2 at$$

1) J. Stefan, Über veränderliche Ströme in dicken Leitungsdrähten. Wien. Ber. 95, II. 1887. S. 917.



sein muß; die Grenzbedingung dieses Problems heißt also, wenn

$$(113) \quad H = \frac{J^2 w'}{4\pi R \lambda \mathfrak{A}}$$

gesetzt wird,

$$(114) \quad \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\mu}{\lambda} U + H e^{2ait} - H = 0 \text{ für } r = R.$$

Dabei ist wieder eine niedrige konstante Mitteltemperatur vorausgesetzt, das longitudinale Gefälle vernachlässigt und (4) zu benutzen. Auch der Einfluß des Anfangszustandes wird nicht untersucht.

Benutzen wir wieder den alten Ansatz

$$U = \varphi(r) e^{2ait} + \varphi_1(r),$$

so wird  $\varphi_1 = c \ln r + c_1$ , worin  $c$  Null sein muß; wie früher wird  $\varphi$  die bekannte Besselsche Funktion  $J_0(r\sqrt{-bi})$  (vgl. 56), also

$$U = C J_0(r\sqrt{-bi}) e^{2ait} + c_1.$$

Aus (114) erhalten wir

$$\left[ C \left\{ \sqrt{b} (\text{ber}' P + i \text{bei}' P) + \frac{\mu}{\lambda} (\text{ber} P + i \text{bei} P) \right\} + H \right] e^{2ait} - H + \frac{\mu}{\lambda} c_1 = 0$$

und deshalb

$$c_1 = \frac{\lambda}{\mu} H.$$

Wenn wir noch  $C = C_0 + C_1 i$  setzen, so muß von

$$(C_0 + C_1 i) \left\{ (\text{ber}' P + i \text{bei}' P) + \frac{\mu}{\lambda \sqrt{b}} (\text{ber} P + i \text{bei} P) \right\} + \frac{H}{\sqrt{b}}$$

der reelle und imaginäre Teil für sich verschwinden, so daß unter der alten Bezeichnung (62)

$$C_0 = \frac{H \lambda d_1}{\mu}, \quad C_1 = -\frac{H \lambda d_0}{\mu}$$

wird. Wir erhalten

$$(115) \quad u = \frac{H \lambda}{\mu} \left[ 1 + \sqrt{(d_0 \text{ber } \varrho - d_1 \text{bei } \varrho)^2 + (d_0 \text{bei } \varrho + d_1 \text{ber } \varrho)^2} \right. \\ \left. \times \sin \left( 2at + \arctg \frac{d_0 \text{bei } \varrho + d_1 \text{ber } \varrho}{d_0 \text{ber } \varrho - d_1 \text{bei } \varrho} \right) \right].$$

Dabei ist

$$(116) \quad \frac{H \lambda}{\mu} = \frac{J^2 w'}{4\pi R \mu \mathfrak{A}}.$$

Das einem analogen Zustand für Gleichstrom entsprechende Glied  $\frac{H \lambda}{\mu}$  ist die Temperatur der Oberfläche, unabhängig von der inneren Wärmeleitfähigkeit. Diese im ganzen Querschnitt konstante Temperatur ist überlagert von einer Welle, die mit stark gedämpfter Amplitude

von außen nach innen läuft, wie im folgenden gezeigt wird. Hier ist von der Näherung (63) um so eher Gebrauch zu machen als  $b$  bei den hohen Frequenzen viel größer ist als bisher angenommen. Dadurch wird auch  $P$  größer, so daß die genannte Näherung auch noch für viel dünnere Drähte angewandt werden darf. Da die Amplitude  $\frac{\mu}{\lambda\sqrt{b}}$  als Faktor hat, so wird sie für die hohen Frequenzen bedeutend kleiner als die oben betrachteten. Die rein periodische Schwankung, die von  $r$  unabhängig ist, fehlt hier im Gegensatz zu 15.

Wir formen die Phase um:

$$(117) \quad \arctg \frac{d_0 \operatorname{bei} \varrho + d_1 \operatorname{ber} \varrho}{d_0 \operatorname{ber} \varrho - d_1 \operatorname{bei} \varrho} = \arctg \frac{-(B_0 \operatorname{bei} \varrho + B_1 \operatorname{ber} \varrho)}{-(B_0 \operatorname{ber} \varrho - B_1 \operatorname{bei} \varrho)} = \\ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{B_0 \operatorname{ber} \varrho - B_1 \operatorname{bei} \varrho}{-(B_0 \operatorname{bei} \varrho + B_1 \operatorname{ber} \varrho)} = \frac{\pi}{2} + \varphi(\varrho)$$

(vgl. (109)). Wir sehen also, daß hier dieselbe Welle auftritt wie in 15, nur hat die aus 15 im Argument  $+\pi$ , die neue  $+\frac{\pi}{2}$ ; diese ist also um  $t = \frac{\pi}{4a} = \frac{T}{8}$  verzögert. Der Einfluß der periodischen Wärmeezeugung im Innern (15) macht sich also nur in den kleinen Gliedern zweiter Ordnung bemerkbar, die wir dort vernachlässigt haben.

18. *Temperaturverteilung in einem zylindrischen Nichtleiter, der von einer gleichstromdurchflossenen Hülle umgeben ist.*

Im stationären Zustand wird  $u$  von  $r$  und  $t$  unabhängig sein. In ein röhrenförmiges Volumelement des Leiters vom äußeren Radius  $R$ , vom inneren Radius  $R_0$  und der Höhe  $dx$  tritt durch Wärmeleitung die Wärmemenge:

$$\lambda \frac{d^2 u}{dx^2} \pi R^2 dx;$$

ausgestrahlt wird

$$\mu u 2\pi R dx;$$

und an Joulescher Wärme wird erzeugt

$$\frac{j_0^2 w}{2\lambda} \pi (R^2 - R_0^2);$$

die Temperaturerhöhung im stationären Zustand ist 0, also erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - gu + \frac{j_0^2 w}{2\lambda} \frac{R^2 - R_0^2}{R^2} = 0$$

oder

$$(118) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - gu + h_0 \varepsilon = 0,$$

wo

$$(119) \quad \varepsilon = \frac{R^2 - R_0^2}{R^2},$$

mit der Grenzbedingung

$$(10) \quad u = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Wie in 2 wird

$$(120) \quad u = \frac{h_0 \varepsilon}{g} \left[ 1 + \alpha \left( e^{-\sqrt{g}x} + e^{-\sqrt{g}(l-x)} \right) \right] \cdot 1$$

Da  $\varepsilon$  kleiner ist als 1, und die konstante Temperatur  $u_0$  (für den vollen Draht) (91) von  $\lambda$  unabhängig und  $\mu$  dasselbe ist wie für den vollen Draht, so ist bei derselben Stromdichte die konstante Temperatur kleiner als beim vollen Draht. Bei derselben Stromstärke ist natürlich die Mitteltemperatur höher.

Die Gleichung (120) als *Grundlage einer experimentellen Bestimmung von  $\mu$  hätte gegenüber der an einem vollen Draht folgende Vorteile*: Man kann die Temperatur mittels Thermoelements, das in den isolierenden Kern der Länge nach eingelegt wird, besser bestimmen, als wenn das Thermoelement in eine radiale Bohrung eingeführt wird, da die Temperatur auch in größerem Abstand von der Lötstelle dieselbe bleibt. Dann ist hier im stationären Zustand die Temperatur über den ganzen Querschnitt wirklich konstant, während bei dicken Drähten aus schlechter leitenden Metallen die radiale Differenz nicht ganz verschwindend klein ist, wie wir in 12 sahen. Die sonst beträchtliche Abkühlung an den Enden wird geringer sein infolge der schlechteren Leitfähigkeit des Kerns, was gerade bei dickeren Zylindern ein Vorteil ist. Deshalb und besonders wegen der oben angeführten Bemerkung über die Stromstärke ist es möglich, auch schon mit geringer Stromstärke einen dicken Zylinder auf eine gewisse Temperaturdifferenz gegen die Umgebungstemperatur zu bringen; und gerade eine Untersuchung von  $\mu$  in seiner Anhängigkeit vom Radius bis zu großen Radien ist bisher weder theoretisch noch experimentell genügend durchgeführt worden.

## E. Draht mit elektrisch isolierender Hülle.

### 19. Draht mit isolierender Hülle, von Gleichstrom durchflossen.<sup>2)</sup>

Ein Draht vom Radius  $R_1$  werde vom Strom  $i$  durchflossen, dessen Dichte über den ganzen Querschnitt konstant sein soll. Er sei von

1) Es müßte hier noch die longitudinale Wärmeleitung des Kerns berücksichtigt werden, wodurch das Resultat jedoch nur an Klarheit verlieren, ohne daß die Änderung wesentlich sein würde.

2) Hier ist eine Arbeit zu erwähnen von Teichmüller, Zur Theorie der Kabelerwärmung, Sonderabdruck aus: Elektrot. ZS. 1904, Heft 44. Teichmüller sucht den Minimalradius einer Kabelseele bei gegebener Maximalerwärmung.

einer isolierenden Hülle von der Dicke  $R_2 - R_1$  umgeben; die Oberflächentemperatur sei klein.

Für Gleichstrom gelten die Differentialgleichungen

$$(121) \quad \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + h = 0 \text{ für } 0 \leq r \leq R_1,$$

$$(122) \quad \frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} = 0 \text{ für } R_1 \leq r \leq R_2.$$

Für  $r = R_1$  muß die von innen zugeführte Wärme  $-\lambda_1 \frac{du_1}{dr}$  gleich sein der nach der Hülle fließenden  $-\lambda_2 \frac{du_2}{dr}$ , d. h.

$$(123) \quad \lambda_1 \frac{du_1}{dr} = \lambda_2 \frac{du_2}{dr} \text{ für } r = R_1.$$

Ferner darf an der Grenze der beiden Materialien kein Temperatursprung auftreten:

$$(124) \quad u_1 = u_2 \text{ für } r = R_1$$

und schließlich muß für die Oberfläche der Isolation die zugeführte Wärmemenge gleich der abgestrahlten sein:

$$(125) \quad -\lambda_2 \frac{du_2}{dr} = \mu_2 u_2 \text{ für } r = R_2.$$

Integration von (121) ergibt

$$u_1 = c_1 \ln r + c_2 - \frac{h_0}{4} r^2;$$

$c_1 = 0$  wegen  $r = 0$ , also

$$(126) \quad u_1 = c_2 - \frac{h_0}{4} r^2.$$

(122) hat als Integral

$$(127) \quad u_2 = c_3 \ln r + c_4.$$

Die Grenzbedingungen ergeben die Bestimmung der Konstanten; aus (123) folgt

$$(128) \quad c_3 = -\frac{h_0}{2} R_1^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

aus (125) folgt

$$(129) \quad c_4 = -c_3 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{R_2} + \ln R_2 \right)$$

und aus (124) wird mit (129)  $c_2$  bestimmt als

$$(130) \quad c_2 = \frac{h_0}{4} R_1^2 + c_3 \ln R_1 + c_4.$$

Aus (126) folgt für  $r = 0$

$$u^{(0)} = c_2 = \frac{h_0}{4} R_1^2 + c_3 \ln R_1 + c_4$$

und für  $r = R_1$

$$u^{(R_1)} = c_3 \ln R_1 + c_4;$$

aus (127) wird

$$u^{(R_2)} = c_3 \ln R_2 + c_4.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$(131) \quad u^{(0)} - u^{(R_1)} = \frac{h_0}{4} R_1^2.$$

Die radiale Temperaturdifferenz ist also unbeeinflusst von der Isolation, was zu erwarten ist, da in der für den blanken Draht geltenden Differenz (94) die äußere Wärmeabgabekonstante nicht vorkommt. Ferner ist

$$(132) \quad u^{(R_2)} - u^{(R_1)} = 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} (u^{(0)} - u^{(R_1)}).$$

Da  $\ln \frac{R_2}{R_1}$  mit  $\frac{R_2}{R_1}$  von Null an dauernd wächst und  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  groß ist, so wird bei nicht ganz dünnen Isolationsschichten die Differenz im Isolator größer als die radiale im Leiter.

Die Temperaturdifferenz eines isolierten Drahtes gegen einen blanken ist in der Drahtachse

$$(133) \quad D_{i,b} = u_i^{(0)} - u_b^{(0)} = \frac{h_0}{2} \frac{R_1^2 \lambda_1}{\mu_2 R_2} \left[ \frac{1}{\mu_2 R_2} - \frac{1}{\mu_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right].$$

Die Wärmeabgabefähigkeit eines blanken Leiters dürfte wohl i. a. kleiner sein als die des Isolationsmaterials (Umwicklung) vgl. Wamsler a. a. O. Da  $R_2$  größer ist als  $R_1$ , so ist die Differenz in der Klammer negativ. Der dritte Summand der Klammer ist stets positiv,  $\lambda_2$  ist klein, also der Faktor des  $\ln$  groß; der  $\ln$  wird aber bei dünnen Isolationsschichten klein sein, so daß der dritte Summand die negative Differenz nicht ausgleichen kann, zumal wenn die Wärmeleitfähigkeit der isolierenden Schicht, die jetzt als ziemlich dünn gedacht wird, relativ gut ist. Dann erhöht sich also die Temperatur eines isolierten Drahtes weniger als die des blanken; das ist ja auch plausibel, da wir hier größere Wärmeabgabe und keinen besonders guten Wärmeschutz angenommen haben.

**20. Draht mit isolierender Hülle, von Wechselstrom durchflossen.**

Die Differentialgleichungen lauten

$$(134) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} e^{2ait} = 0 \text{ für } 0 \leq r \leq R_1,$$

$$(135) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} = 0 \text{ für } R_1 \leq r \leq R_2$$

mit den Integralen

$$U_1 = \left[ \frac{h i}{2 b} + (c_0 + c_1 i) J_0(r \sqrt{-b i}) \right] e^{2ait} + c_2 - \frac{h}{8} r^2$$

$$U_2 = \left[ (c_3 + c_4 i) J_0(r \sqrt{-b i}) + (c_5 + c_6 i) Y_0(r \sqrt{-b i}) \right] e^{2ait} + c_7 \ln r + c_8,$$

wobei  $c_5, c_6$  nicht Null sein dürfen, weil sonst die Erfüllung der Grenzbedingungen nicht gelingt. Setzen wir unter Benutzung von (60)

$$(136) \quad \begin{cases} Y_0(r\sqrt{-bi}) = \text{Ber}\varrho + i\text{Bei}\varrho, \\ -\sqrt{-i}Y'_0(r\sqrt{-bi}) = \text{Ber}'\varrho + i\text{Bei}'\varrho, \end{cases}$$

so wird

$$(137) \quad \begin{aligned} u_1 = & \sqrt{(c_0 \text{ber}\varrho - c_1 \text{bei}\varrho)^2 + \left(\frac{h}{2b} + c_0 \text{bei}\varrho + c_1 \text{ber}\varrho\right)^2} \\ & \times \sin\left(2at + \text{arctg} \frac{c_0 \text{ber}\varrho - c_1 \text{bei}\varrho}{-\left(\frac{h}{2b} + c_0 \text{bei}\varrho + c_1 \text{ber}\varrho\right)}\right) + c_2 - \frac{h}{8}r^2, \end{aligned}$$

$$(138) \quad \begin{aligned} u_2 = & \sqrt{c_3 \text{ber}\varrho - c_4 \text{bei}\varrho + c_5 \text{Ber}\varrho - c_6 \text{Bei}\varrho)^2 + (c_3 \text{bei}\varrho + c_4 \text{ber}\varrho + c_5 \text{Bei}\varrho + c_6 \text{Ber}\varrho)^2} \\ & \times \sin\left(2at + \text{arctg} \frac{c_3 \text{ber}\varrho - c_4 \text{bei}\varrho + c_5 \text{Ber}\varrho - c_6 \text{Bei}\varrho}{(c_3 \text{bei}\varrho + c_4 \text{ber}\varrho + c_5 \text{Bei}\varrho + c_6 \text{Ber}\varrho)}\right) + c_7 \ln r + c_8. \end{aligned}$$

Wir erhalten aus (123)

$$(139) \quad c_7 = -\frac{\lambda_1 h}{\lambda_2} \frac{h}{4} R_1^2,$$

aus (125)

$$(140) \quad c_8 = -c_7 \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} R_2 + \ln R_2\right)$$

und hiermit aus (124)

$$(141) \quad c_2 = \frac{h}{8} R_1^2 + c_7 \ln R_1 + c_8.$$

Dies sind wieder, abgesehen vom Faktor  $\frac{1}{2}$ , die Gleichungen wie für Gleichstrom, vgl. (128)–(130) und die anschließenden Folgerungen.

Für die übrigen sechs Konstanten liefert jede der Grenzbedingungen zwei Gleichungen; die Bestimmung der Koeffizienten läßt sich unschwer durchführen, doch sind die Resultate zu unübersichtlich, um genauere Schlüsse zu erlauben; es lohnt sich deshalb nicht, sie hier anzuführen, zumal eine Berechnung im einzelnen Fall nicht möglich ist, da für die Funktionen

$$\text{Ber } P, \text{ Bei } P, \text{ Ber}' P \text{ und } \text{Bei}' P$$

noch keine Tabellen berechnet worden sind.

Es läßt sich erwarten, daß sich über die konstante Temperatur und konstante radiale Differenz wieder eine periodische Schwankung mit von  $r$  unabhängiger Amplitude lagert, von  $u_1$  herrührend, und dazu noch Wellen kommen, sowohl für  $\varrho < P_1$  als auch für  $\varrho > P_1$ .

## Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite.

Von FRIEDRICH SCHILLING in Danzig.

### Einleitung.

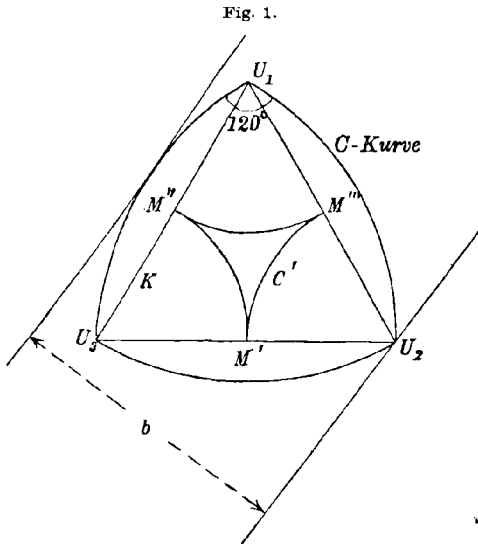
Der Kreis in der Ebene und die Kugel im Raume besitzen die einfache Eigenschaft, daß je zwei parallele Tangenten bzw. Tangentialebenen stets denselben Abstand von einander haben. In Verallgemeinerung dieser Tatsache nennt man *Kurven bzw. Flächen konstanter Breite*  $b$  Gebilde mit der analogen Eigenschaft, daß nämlich je zwei einander möglichst genäherte parallele Geraden oder Ebenen, welche die (ganz im Endlichen gelegene) Kurve oder Fläche zwischen sich einschließen, wieder stets konstanten Abstand  $b$  besitzen. Auf die genauere Definition können wir natürlich erst später (im § 2) eingehen. Es ist das Verdienst von F. Reuleaux, in seinem „Lehrbuch der Kinematik“ (Bd. I, S. 136 ff., Braunschweig 1875) zuerst auf die Kurven konstanter Breite hingewiesen und eine Reihe von Beispielen angeführt zu haben. In betreff weiterer Literatur haben wir Arbeiten von A. Hurwitz, H. Minkowski und E. Meißner<sup>1)</sup> zu nennen, auf die wir im einzelnen später wiederholt zurückkommen. Von der zweiten Arbeit des Herrn Meißner abgesehen, die mengentheoretischen Charakter besitzt, bedienen sich die Verfasser ausschließlich der analytischen Rechnung, insbesondere benutzen sie stets Entwicklungen in Fouriersche Reihen bzw. in Reihen von Kugelfunktionen zur Ableitung ihrer Resultate. Im Gegensatz dazu werden wir in unseren Untersuchungen mit möglichst einfachen Mitteln die Resultate zu erhalten bestrebt sein, insbesondere wollen wir stets Wert darauf legen, in anschaulicher geometrischer Form die Eigenschaften der Kurven konstanter Breite, auf deren Behandlung wir uns überhaupt in dieser Arbeit beschränken, zu entwickeln, jedoch nicht unter Verzicht auf äußerste Strenge der Beweisführung. Wir hoffen dadurch einen wesentlich tieferen Einblick in die vorliegenden geometrischen Verhältnisse

1) Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales de l'École Normale, III. série, t. 19, Paris 1902, insbesondere S. 386 ff. — Minkowski, *Über die Körper konstanter Breite* (zuerst in russischer Sprache erschienen in Mathematische Sammlung, Moskau 1904—1906, Ges. Abhandlungen Bd. II, Lpz. 1911, S. 277—279.) — Meißner, 1. *Über die Anwendung von Fourierreihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik*, Vierteljahrsheft der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 54, 1909, S. 309—329; 2. *Über Punktmengen konstanter Breite*, ebenda, Jahrgang 56, 1911, S. 42—50.

überhaupt gegeben zu haben.<sup>1)</sup> Vor allem ist es uns gelungen, rein geometrische Konstruktionen zu finden, welche alle Kurven konstanter Breite zu gewinnen und übersichtlich zu erfassen gestatten. Im übrigen behandeln wir eingehend den Zusammenhang der einzelnen Kurve konstanter Breite, der  $C$ -Kurve, mit ihrer Evolute, der  $K$ -Kurve, und mit den übrigen Evolventen dieser Evolute, unter denen eine bestimmte Kurve, die  $C'$ -Kurve nach Hurwitz, besonders ausgezeichnet ist.

### § 1. Beispiele von Kurven konstanter Breite.

Um unsere anschauliche Vorstellung von speziellen Kurven konstanter Breite von vornherein nicht allein auf den Kreis beschränken



zu müssen, wollen wir sogleich noch 6 weitere Beispiele solcher  $C$ -Kurven voranstellen, auf die wir auch später wiederholt zurückgreifen:

**Beispiel I.** Zuerst sei das Reuleauxsche Kreisbogendreieck<sup>2)</sup> (Fig. 1) als  $C$ -Kurve genannt; es ergibt sich, wenn man um jeden Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks (der  $K$ -Kurve) mit dessen Seite  $b$  als Radius einen Kreisbogen zwischen den beiden andern Ecken beschreibt. Die Winkel in den Ecken des Kreisbogendreiecks betragen je  $120^\circ$ . Hinzugefügt ist in der Figur (ebenso

in den folgenden Figuren) noch die  $C'$ -Kurve, welche hier aus den drei analog mit  $\frac{b}{2}$  als Radius beschriebenen Kreisbogen besteht.

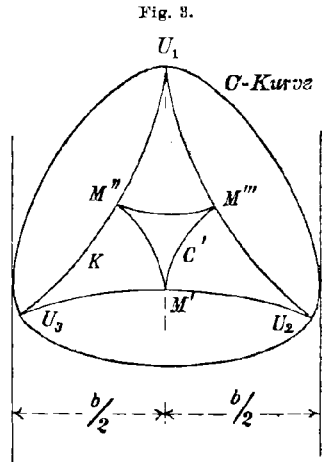
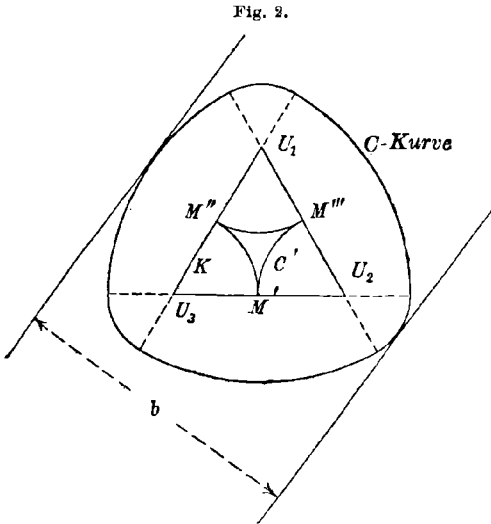
**Beispiel II.** Man beschreibe um die Ecken des gleichseitigen Dreiecks  $U_1 U_2 U_3$  je zwei Kreisbogen, deren Radien gleich  $\frac{b-a}{2}$  und  $\frac{b+a}{2}$  sind, wo  $a$  die Seite des Dreiecks und  $b > a$  die gewählte Breite sein soll, und die z. B. für die Ecke  $U_1$  von der Verlängerung der Seite

1) Die meisten der in dieser Arbeit gegebenen Beispiele von Kurven konstanter Breite sind inzwischen im Verlage der Firma Martin Schilling in Leipzig als Modelle (Serie XL, Nr. 4—19) erschienen.

2) Reuleaux, a. a. O. S. 131.



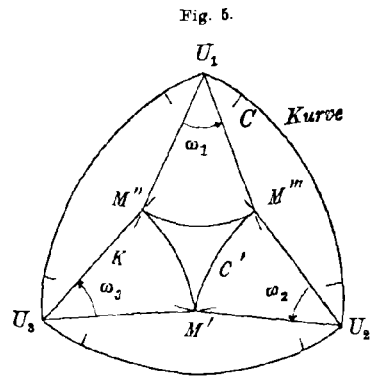
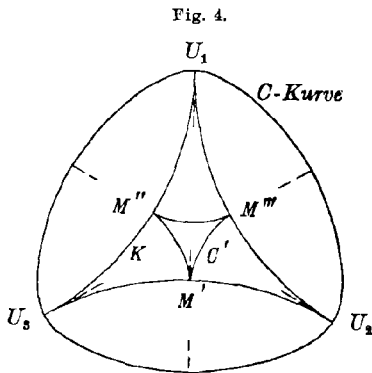
$U_1 U_2$  zu der Verlängerung der Seite  $U_1 U_3$  gehen (Fig. 2). Die beiden  $C$ -Kurven der Figuren 1 und 2 sind ersichtlich zu einander äquidistante Kurven, wenn die Dreiecke  $U_1 U_2 U_3$  gleich groß und die Größe  $b$  der Fig. 2 entsprechend größer als in der Fig. 1 gewählt werden.



**Beispiel III.** Ausgehend von der dreispitzigen „Steinerschen Hypozykloide“  $U_1 U_2 U_3$ <sup>1)</sup> als  $K$ -Kurve denke man zu ihr die durch die Spitzen gehende Evolvente als  $C$ -Kurve konstruiert (Fig. 3). Um sogleich diese Kurve als eine solche konstanter Breite zu erkennen, denke man noch als  $C'$ -Kurve diejenige Evolvente der ursprünglichen Hypozykloide hinzugenommen, die ebenfalls eine Steinersche Hypozykloide ist und ihre Spitzen  $M', M'', M'''$  in den Scheiteln jener hat. Zu dieser  $C'$ -Kurve ist die  $C$ -Kurve dann die vollständige Äquidistante im Abstände  $\frac{b}{2}$ , wo  $b$  gleich der Bogenlänge  $\widehat{U_1 U_2}$  ist.

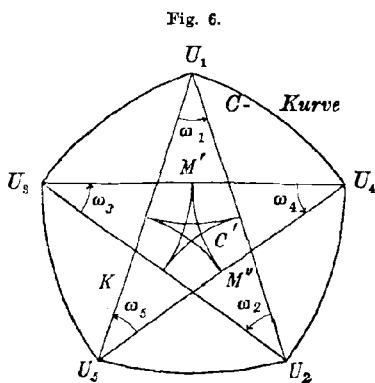
1) Diese Kurve wird z. B. von einem Punkte eines Kreises mit dem Radius  $\rho$  beschrieben, wenn dieser auf einem Kreise mit dem Radius  $3\rho$  innerlich abrollt. Wegen der zahlreichen geometrischen Eigenschaften der Kurve sehe man Gino Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Lpz. 1902, S. 146 ff. sowie die Dissertation: C. Wirtz, *Die Steinersche Hypozykloide*, Straßburg 1900. Die Gesamtlänge der Hypozykloide ist z. B. gleich dem 16 fachen Radius  $\rho$  ihres einbeschriebenen Kreises. Denn der Bogen  $\widehat{U_1 M'}$  ist gleich der Entfernung des Punktes  $U_1$  vom Mittelpunkt des Bogens  $M' M'' M'''$  d. h. gleich  $3\rho - \frac{\rho}{3} = \frac{8\rho}{3}$ , da  $\frac{\rho}{3}$  der Radius des der Hypozykloide  $M' M'' M'''$  einbeschriebenen Kreises ist.

**Beispiel IV.** Man kann an die Stelle der Steinerschen Hypozykloide als  $K$  Kurve auch eine aus drei sich berührenden Kreisbogen zusammengesetzte Kurve (Fig. 4) treten lassen und wieder die  $C$ -Kurve als die Evolvente gewinnen, die durch die drei Spitzen  $U_1 U_2 U_3$  geht und aus 6 kongruenten oder symmetrischen Bogen der zugehörigen gewöhnlichen Kreisevolventen besteht. Die Breite  $b$  ist also gleich der Länge des einzelnen Kreisbogens der  $K$ -Kurve.



**Beispiel V.** Man gehe von einem geradlinigen Sechseck  $U_1 M'' U_2 M' U_3 M''$  aus (Fig. 5), das aus einem gleichseitigen Dreieck  $U_1 U_2 U_3$  entsteht, wenn man über jeder Seite nach innen hin dasselbe gleichschenklige Dreieck aufbaut und dann die Basen selbst fortläßt. Hieraus

entsteht dann wieder als „Evolvente“ die  $C$ -Kurve der Figur 5, wenn man um die Ecken  $U_i$  je einen Kreisbogen mit der doppelten Länge  $2a$  der Sechseckseiten als Radius und um die Ecken  $M^i$  je zwei Kreisbogen mit  $a$  selbst beschreibt und zwar in der Weise, daß z. B. der Kreisbogen um  $U_3$  von der Verlängerung der Seite  $U_3 M'$  bis zu der von  $U_3 M''$  geht und beiderseits daran sich die Kreisbogen um  $M'$  und  $M''$  bzw. bis zu den Eckpunkten  $U_2$  und  $U_1$  ansetzen.



**Beispiel VI.** Ausgehend von einem regulären Fünfeck zweiter Art  $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$  konstruiere man als  $C$ -Kurve die durch die Ecken gehende „Evolvente“, indem man um die Ecken Kreisbogen mit der Seite des Fünfecks als Radius und zwar jedesmal von der einen benachbarten Ecke bis zur anderen beschreibt (Fig. 6).

§ 2. Genaue Definition und einige allgemeine Eigenschaften der Kurven konstanter Breite.

Wir gehen nun zur allgemeinen Behandlung der Kurven konstanter Breite über. Um nicht zu weit gehende Allgemeinheiten von vornherein zuzulassen, setzen wir für die Art der Kurven, um die es sich handeln soll, sogleich voraus die

**Annahmen I:** Die Kurve soll aus einer endlichen Zahl einzelner „Teilbogen“ bestehen, die bezogen auf ein rechtwinkliges  $xy$ -Koordinatensystem durch Gleichungen der Form bestimmt werden:

$$(1a, b) \quad \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}$$

wo  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  zwei nicht beide konstante, reelle, endliche, stetige und eindeutige Funktionen der reellen Variablen  $t$  sind für ein bestimmtes endliches Intervall, das die Variable  $t$  durchlaufen soll. Überdies sollen bei den einzelnen Teilbogen die Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  für alle Punkte des Intervalls (einschließlich der Endpunkte) endliche und stetige erste Ableitungen  $\varphi'(t)$  und  $\psi'(t)$  besitzen, die überdies für alle inneren Punkte des Intervalls nicht gleichzeitig verschwinden. Bei Annäherung des Argumentes  $t$  an einen Endpunkt des Intervalles, für den  $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$  ist, d. h. an einen singulären Endpunkt, soll ferner stets wenigstens einer der beiden Quotienten  $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$  oder  $\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$  einen bestimmten endlichen Grenzwert haben.<sup>1)</sup>

Diesen Annahmen gemäß besitzt dann geometrisch jeder einzelne Teilbogen eine stetig sich ändernde Tangente, wenn der Kurvenpunkt den ganzen Bogen durchläuft (mit Einschluß des Falles, daß die Tangente überhaupt dieselbe bleibt, wenn der Teilbogen eine geradlinige Strecke ist.) Diese Tangente ist in dem Punkte  $P(x, y)$  durch die Gleichungen bestimmt:

$$(2) \quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ bzw. } \frac{\xi - x}{\eta - y} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)};$$

1) Wenn man will, kann man auch annehmen, daß für die Umgebung eines solchen Endpunktes  $t = t^*$ , falls in ihm  $\varphi'(t)$  und  $\psi'(t)$  gleichzeitig verschwinden, endliche und stetige zweite Ableitungen  $\varphi''(t)$  und  $\psi''(t)$  vorhanden sind, und wenn auch diese gleichzeitig verschwinden, endliche und stetige dritte Ableitungen und so fort bis Ableitungen  $\varphi^m(t)$  und  $\psi^m(t)$ , wo  $m$  eine endliche positive ganze Zahl ist, die dann nicht gleichzeitig verschwinden. Nach diesen Voraussetzungen gilt dann:

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi^m(t^*)}{\varphi^m(t^*)}$$

(vgl. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. II, Lpz. 1912, S. 140).

hierbei soll die Tangente in einem singulären Endpunkte des Teilbogens ebenfalls durch eine dieser Gleichungen bestimmt sein, wenn auf der rechten Seite der Grenzwert eingesetzt wird. Wo zwei der Teilbogen sich je mit einem Endpunkte aneinanderreihen, kann dies entweder mit gleicher Tangente oder auch mit verschiedenen Tangenten geschehen; im letzteren Falle bilden die beiden Bogen in dem gemeinsamen Punkte eine *Ecke*.<sup>1)</sup>

Da eine jede den Annahmen I genügende Kurve ganz im Endlichen verläuft, so können wir sogleich die folgende Definition aufstellen:

1. Als *Stützgerade*<sup>2)</sup> einer den Annahmen I genügenden Kurve bezeichnen wir jede derartig die Kurve treffende Gerade, daß die Kurve abgesehen von den auf der Geraden selbst liegenden Punkten vollständig auf der einen Seite der Geraden gelegen ist, d. h. daß jede auf der andern Seite gezogene Parallele der Geraden die Kurve nicht trifft.

Eine solche Stützgerade kann bezüglich der Punkte, welche sie mit der Kurve gemein hat, natürlich eine gewöhnliche Tangente der Kurve, eine durch einen Eckpunkt, einen Endpunkt oder dergl. mehr<sup>3)</sup> gehende Gerade, gelegentlich auch mehreres davon zugleich, sein.

2. In jeder vorgegebenen Richtung hat dann eine solche Kurve stets und nur zwei Stützgeraden; diese schneiden einen Ebenenstreifen aus, in dem mit Einschluß seiner Begrenzung selbst die ganze Kurve gelegen ist.

Wir stellen nun an die Spitze unserer weiteren Betrachtungen die folgende grundlegende *Definition*:

3. Eine den Annahmen I genügende (also ganz im Endlichen liegende) Kurve soll dann eine *Kurve konstanter Breite* heißen, wenn die in beliebiger Richtung verlaufenden beiden Stützgeraden stets eine konstante Entfernung  $b$  besitzen und die Kurve keine andern Punkte als die auf diesen einzelnen Stützgeraden liegenden besitzt.<sup>4)</sup>

1) Durch die Annahme I des Textes ist übrigens noch keinerlei Festsetzung darüber getroffen, wie die einzelnen Teilbogen sich zu der ganzen Kurve zusammensetzen. Es sind also zunächst noch nicht solche Fälle ausgeschlossen, daß etwa von einem Punkte drei Teilbogen ausgehen oder die Kurve Endpunkte besitzt, sich selbst durchdringt, berührt oder dergl.

2) Vgl. z. B. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, Ges. Abhandlungen Bd. II. S. 136.

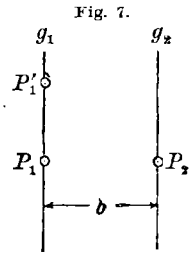
3) Die folgende Untersuchung wird bald zeigen, daß bei den Kurven konstanter Breite Punkte, von denen nur einer oder mehr als zwei Teilbogen auslaufen, ausgeschlossen sind, eine Stützgerade auch nur einen einzigen Punkt mit der Kurve gemein haben kann.

4) Durch den letzten Teil dieser Definition sollen solche Fälle, wie beispielsweise zwei konzentrische Kreise ausgeschlossen sein; es bildet dann eben nur der größere Kreis allein die Kurve konstanter Breite.

Von den Stützgeraden einer Kurve konstanter Breite gilt nun sogleich folgendes:

4. Jede Stützgerade kann die Kurve konstanter Breite nur in einem einzigen Punkte treffen, nicht also in zwei oder mehr getrennten Punkten oder gar in einer geradlinigen Strecke.

Denn angenommen, es hätte die eine, etwa  $g_1$  von zwei parallelen Stützgeraden  $g_1$  und  $g_2$  zwei verschiedene Punkte  $P_1$  und  $P'_1$  mit der Kurve gemeinsam (Fig. 7), während  $P_2$  einer der gemeinsamen Punkte von  $g_2$  und der Kurve sei. Dann müßte notwendig wenigstens eine der Entfernungen  $P_1P_2$  und  $P'_1P_2 > b$  sein, z. B.  $P'_1P_2$ . Die beiden neuen Stützgeraden in der zu  $P'_1P_2$  senkrechten Richtung können dann aber keinen Abstand  $b < P'_1P_2$  haben, was der Definition (3) widerspricht.



Ferner gilt auch folgender Satz:

5. Die Verbindungslinie  $P_1P_2$  der beiden zu zwei parallelen Stützgeraden  $g_1, g_2$  gehörenden Stützpunkte  $P_1, P_2$  steht auf der Stützgeraden senkrecht.<sup>1)</sup>

Denn würde  $P_1P_2$  nicht senkrecht stehen, so wäre  $P_1P_2 > b$ , also könnten die zwei Stützgeraden in der zu  $P_1P_2$  senkrechten Richtung wieder nicht den Abstand  $b$  haben.

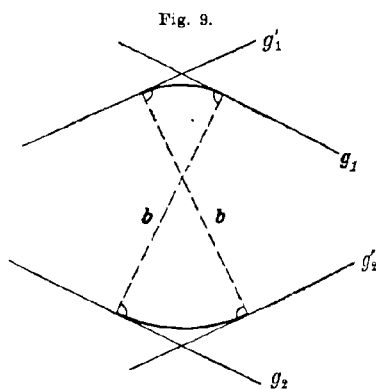
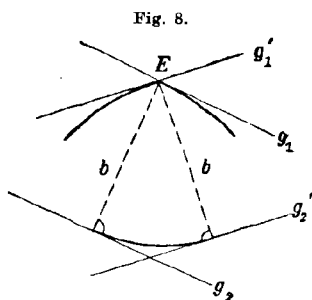
6. Definition: Die Verbindungslinie  $P_1P_2$  der Stützpunkte zweier parallelen Stützgeraden nennen wir die zugehörige Stütznormale.

Ist  $g_1$  bzw.  $g_2$  speziell Tangente der Kurve konstanter Breite, so ist die Stütznormale also zugleich gewöhnliche Normale der Kurve im Punkte  $P_1$  bzw.  $P_2$ , daher eine „Doppelnormale“ im gewöhnlichen Sinne, wenn  $g_1$  und  $g_2$  beide Tangenten sind.

Wir können sogleich bei den Kurven konstanter Breite auch die Eigenart der Eckpunkte oder Ecken, d. h. der Punkte, von denen aus zwei Teilbogen nicht grade in entgegengesetzten Richtungen ausgehen, näher betrachten. Offenbar gilt hier der Satz:

1) Man vgl. den erheblich umständlicheren Beweis dieses Satzes bei Reuleaux, a. a. O.: Sind  $g_1, g_2$  und  $h_1, h_2$  zwei Paare von Stützgeraden in zueinander senkrechten Richtungen, so bilden sie ein Quadrat, das von der Kurve in jeder Seite „berührt“ wird. In diesem Quadrat kann sich offenbar die Kurve noch so bewegen, daß das Berühren der vier Seiten des Quadrates bestehen bleibt. Jede unendlich kleine Bewegung ist nun als eine Drehung um einen Momentanpol anzusprechen; letzterer muß hier der Schnittpunkt der vier „Stütznormalen“ sein, d. h. die zwei Stütznormalen in je zwei Gegenseiten des Quadrates müssen zusammenfallen.

7. Dreht sich die Stützgerade  $g_1$  um die Ecke  $E$  von der Tangente  $g_1$  des einen zu der  $g_1'$  des andern Teilbogens, so umhüllt die zugeordnete Stützgerade  $g_2$  einen Kreisbogen vom Radius  $b$  (Fig. 8).



Und umgekehrt ergibt sich folgendes:

8. Rollt die Stützgerade  $g_2$  auf einem Kreisbogen ab, der einen Teil der Kurve konstanter Breite sei, so rollt die zugeordnete Stützgerade  $g_1$  entweder auch auf einem konzentrischen Kreisbogen ab, wobei die Summe der beiden Radien gleich  $b$  ist (Fig. 9) oder die Stützgerade  $g_1$  dreht sich um eine Ecke, den Mittelpunkt des ersten Kreisbogens.

### § 3. Die Begriffe „Umhüllungskurve“ und „überall konvexe Kurve“.

Wir knüpfen zur weiteren Untersuchung der Kurven konstanter Breite, die wir in der Folge kurz als *C-Kurven* bezeichnen wollen, an die folgende *allgemeine Definition* an:

9. Bei einer beliebigen den Annahmen I (S. 71) genügenden Kurve verstehen wir unter ihrer Umhüllungskurve die von allen Stützgeraden der gegebenen Kurve eingehüllte Kurve.<sup>1)</sup>

Die Umhüllungskurve erhält man demnach, wenn man von irgendeiner Stützgeraden ausgehend diese auf der gegebenen Kurve bis zur Ausgangslage so abrollen läßt, daß sie stets Stützgerade bleibt.

Festsetzung I. Fernerhin sei diejenige Richtung der Stützgeraden als die *positive* ausgezeichnet, der entgegengesetzt die gegebene Kurve auf der rechten Seite der Stützgeraden gelegen ist.

In einer beliebigen positiven Richtung hat die gegebene Kurve dann nur eine einzige Stützgerade (vgl. Satz 2). Die vollständige Umhüllungskurve wird also beschrieben sein, wenn die positive Richtung der Stützgeraden sich um den Winkel  $2\pi$  und zwar in demselben

1) Der Fall, daß die gegebene Kurve aus einer oder mehreren Strecken einer Geraden besteht, sei im folgenden ausgeschlossen.

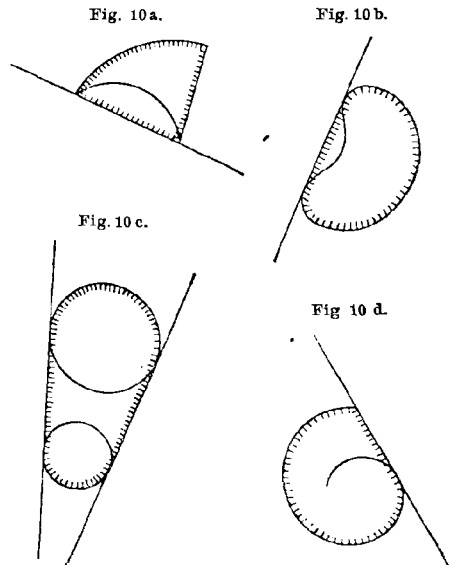
Sinne gedreht hat. Es ergibt sich nun noch folgender Satz, dessen Beweis sehr einfach ist:

10. Die Umhüllungskurve besteht nur aus einem einzigen geschlossenen, im Endlichen verlaufenden Kurvenzuge, der sich weder selbst schneidet noch berührt<sup>1)</sup>; sie setzt sich aus Bogen der gegebenen Kurve und aus geradlinigen Strecken mit einer endlichen Anzahl von Ecken zusammen, und zwar hat die Umhüllungskurve auf jeder ihrer Stützgeraden entweder nur einen einzigen Punkt oder eine einzige geradlinige Strecke liegen.

Wegen verschiedener hier entstehender Möglichkeiten vgl. die Fig. 10a—10d, in denen die ursprüngliche Kurve durch die Linien abgesehen von den Geraden gegeben und die zugehörige Umhüllungskurve durch Schraffieren hervorgehoben ist.

Der Definition 9 möge nun noch die folgende Definition zur Seite treten:

11. Eine beliebige, den Annahmen I genügende Kurve nennen wir eine überall konvexe Kurve<sup>2)</sup>, wenn sie mit ihrer eigenen Umhüllungskurve identisch ist.<sup>3)</sup>



1) Die Umhüllungskurve kann sich z. B. nicht selbst schneiden; denn es wäre nicht möglich, daß durch einen solchen Schnittpunkt eine Stützgerade hindurchginge, was doch der Fall sein muß. Aus ähnlichen Gründen kann die Umhüllungskurve sich auch nicht selbst berühren.

2) Vgl. den Satz 15 des Textes und Minkowski, *Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen*, Ges. Abhandl. Bd. II, S. 123: „Unter einem konvexen Körper verstehe ich eine Punktmenge im Raume, welche abgeschlossen ist, die Eigenschaft hat, mit einer beliebigen Geraden stets entweder eine Strecke oder einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam zu haben und endlich nicht ganz in einer Ebene zu liegen. Eine konvexe Fläche bedeute die vollständige Begrenzung eines konvexen Körpers.“ Man sehe auch Minkowski, *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*, Ges. Abhandl. Bd. II, S. 131.

3) Jede nach der Definition 9 erhaltene Umhüllungskurve ist also hiernach auch eine überall konvexe Kurve. Nach dem Satze 10 hat bei einer überall konvexen Kurve jede Stützgerade entweder nur einen einzigen Punkt oder aber eine einzige Strecke mit der Kurve gemein. Umgekehrt ist jede den Annahmen I genügende Kurve eine überall konvexe Kurve, wenn jede Stützgerade die letztgenannte Eigenschaft hat und die Kurve keine andern Punkte als die auf den Stützgeraden liegenden besitzt.

Nunmehr kehren wir zu der  $C$ -Kurve zurück und stellen die Behauptung auf:

**12.** *Jede Kurve konstanter Breite ist eine überall konvexe Kurve und besitzt damit die in den Sätzen 10 und 11 ausgesprochenen Eigenschaften.<sup>1)</sup>*

In der Tat, da jede Stützgerade mit der  $C$ -Kurve nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, die Kurve selbst aber nach der Definition 3, S. 72, andere Punkte als die auf den Stützgeraden liegenden nicht besitzt, so muß die Kurve mit ihrer Umhüllungskurve identisch sein.

Wie für die überall konvexen Kurven überhaupt gelten nun auch für die Kurven konstanter Breite sogleich noch die folgenden Sätze:

**13.** *Jede überall konvexe Kurve, also auch jede  $C$ -Kurve, kann Rückkehrpunkte (Spitzen oder Schnabelspitzen) und Wendepunkte<sup>2)</sup> nicht in der Weise enthalten, daß beide Kurvenzweige, die sonst von einem solchen Punkte auslaufen, der Kurve angehören.<sup>3)</sup>*

Denn für jede Stützgerade (bzw. Tangente) der Kurve muß diese ja völlig auf derselben Seite gelegen sein, und die Stützgerade muß sich überdies stets in demselben Sinne drehen, wenn ihr Kurvenpunkt die Kurve durchläuft.

**14.** *Jede überall konvexe Kurve, also auch jede  $C$ -Kurve, wird von einer beliebigen (in ihrer Ebene liegenden) Geraden, die jene schneidet, ohne Stützgerade zu sein, stets und nur in zwei getrennten Punkten geschnitten.*

Daß eine solche Schnittgerade mit der Kurve eine Strecke gemein hätte, ist nicht möglich, da die der Kurve angehörenden Strecken nur auf Stützgeraden liegen. Daß aber die Schnittgerade drei einzelne Punkte mit der Kurve gemein hätte, ist deswegen ausgeschlossen, weil die äußeren beiden solcher drei Punkte dann auf verschiedenen Seiten der Stützgeraden des mittleren Punktes liegen würden, was der Definition 1 (S. 72) der Stützgeraden widerspricht. Wenn endlich die Schnittgerade nur einen einzigen Punkt mit der Kurve gemein hätte, so müßten nach dem Satze 10 von diesem Punkte zwei und nur zwei Kurvenzweige

1) Man braucht also die Eigenschaft, daß die Kurve konstanter Breite eine überall konvexe Kurve sein soll, nicht von vornherein in die Voraussetzung aufzunehmen, wie es von den Herren Hurwitz und Meißner (1) a. a. O. geschieht.

2) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Artikel: v. Mangoldt, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen*, Bd. III, 3, S. 41.

3) Wir werden bald sehen (S. 81), daß eine  $C$ -Kurve Wendepunkte auch nicht „einseitig“ enthalten kann, d. h. daß auch ein einzelner Kurvenzweig, der von einem Wendepunkt ausgeht, nicht bis zu diesem selbst hin ein Teil einer  $C$ -Kurve sein kann.



auslaufen, die auf *verschiedenen* Seiten der Schnittgeraden lägen. Dann aber könnte die im Endlichen liegende Kurve nicht geschlossen sein.

Gehen wir daher von einer beliebigen Stützgeraden der Kurve aus, wobei jene entweder einen einzigen Punkt oder eine einzige Strecke mit der Kurve gemein haben mag, so hat eine Parallele der Stützgeraden beliebig nahe zu ihr auf der Seite der Kurve zwei getrennte Punkte mit dieser gemein. Deren Lage ändert sich stetig, ohne daß ein dritter Schnittpunkt hinzutritt, wenn die Parallele weiter parallel mit sich verschoben wird, und die Punkte rücken erst wieder in einen Punkt zusammen bzw. bilden die Endpunkte einer Strecke der Kurve, wenn die Parallele in die andere Stützgerade derselben Richtung übergegangen ist. Aus dieser Überlegung folgt dann noch weiter, ohne daß wir dies näher ausführen wollen:

15. Jede überall konvexe Kurve, also auch jede  $C$ -Kurve, teilt ihre Ebene in zwei voneinander getrennte Gebiete, ein „inneres“ und ein „äußeres“.<sup>1)</sup>

Fassen wir für eine  $C$ -Kurve das „innere“ Gebiet einschließlich der Kurve selbst als eine aus der ganzen Ebene ausgeschiedene Punktmenge mit der Eigenschaft auf, daß je zwei ihrer Punkte eine Entfernung  $\leq b$  besitzen, so gilt sogleich auch der Satz:

16. Die Punktmenge ist hinsichtlich der genannten Eigenschaft in sich vollständig, d. h. sie kann durch keinen Punkt  $X$  außerhalb des Gebietes so erweitert werden, daß die genannte Eigenschaft erhalten bleibt.<sup>2)</sup>

Durch einen solchen Punkt  $X$  geht nämlich sicher eine Stützgerade der Kurve hindurch. (Denn man braucht ja nur durch  $X$  eine die Kurve (in 2 Punkten) schneidende Gerade zu legen und diese um  $X$  gedreht zu denken. Da die beiden Schnittpunkte nun demselben von  $X$  ausgehenden Halbstrahl angehören, dieser aber nach der Drehung um  $180^\circ$  in den keine Schnittpunkte enthaltenden Halbstrahl übergeht, so muß vorher die Gerade die Lage einer Stützgeraden angenommen haben.) Nimmt man dann zu der durch  $X$  gehenden Stützgeraden  $g_1$  mit dem Stützpunkt  $P_1$  noch die parallele Stützgerade  $g_2$  mit dem Stützpunkt  $P_2$  hinzu, so ist nach dem Satz 5 S. 73  $XP_2 > P_1P_2$ , d. h.  $> b$ .

Werfen wir nun einen Blick auf die Annahmen I S. 71 zurück, so ist leicht noch folgendes zu erkennen: Man kann durch geeignete

1) Der Satz ist bekanntlich für weit allgemeinere Kurven, die „Jordanschen Kurven“ bewiesen von C. Jordan, Cours d'analyse, 2. éd., Bd. I, Paris 1893, p. 91—99. Vgl. auch Enzyklopädie der math. Wissensch., Artikel: v. Mangoldt, Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“, S. 140, insbesondere Anm. 32.

2) Vgl. Meißner (2), S. 43.

Wahl des Argumentes  $t$ , nämlich durch ganze lineare Transformation des ursprünglichen Argumentes, es stets so einrichten, daß die Intervalle des Argumentes  $t$  für die einzelnen aufeinander folgenden Teilbogen der  $C$ -Kurve sich stetig in gleicher Richtung aneinanderreihen. (Sind die Grenzen eines Intervalles für  $t$  etwa  $u$  und  $v$  und soll statt dessen das Intervall von  $u_1$  bis  $v_1$  für das Argument  $t_1$  eintreten, so hat man einfach

$$t = u + \frac{u-v}{u_1-v_1}(t_1 - u_1)$$

zu substituieren). Indem wir dies der Einfachheit halber im folgenden voraussetzen, wird also die gesamte Kurve konstanter Breite beschrieben, wenn das Argument  $t$  ein einziges endliches Intervall von  $c$  bis  $d$ , wo  $d > c$  sei, etwa von 0 bis  $2\pi$ , durchläuft, wobei dann für die Endpunkte  $c$  und  $d$  des Intervalles sich dieselben Werte der Koordinaten  $x, y$  ergeben.<sup>1)</sup>

#### § 4. Die Krümmungsradien der $C$ -Kurve.

Zur weiteren Untersuchung der  $C$ -Kurven, besonders, um die wichtige Frage zu lösen, wie man alle  $C$ -Kurven auf geometrischem Wege erhalten kann, betrachten wir vorerst noch zwei andere Kurvenarten, die aufs engste mit den  $C$ -Kurven verknüpft sind.

**17.** Denken wir irgendeine  $C$ -Kurve gegeben, so soll es sich einmal um die zugehörige  $C'$ -Kurve, als den geometrischen Ort für die Mitte  $M$  der Stütznormalen  $P_1 P_2$  (vgl. Satz 6, S. 73) handeln und ferner um die zugehörige  $K$ -Kurve als den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte oder als die Evolute der  $C$ -Kurve.

Zur Behandlung der  $C'$ -Kurve werden wir uns indes erst im § 9, S. 104 ff., hinwenden, indem wir bis dahin unsere Betrachtungen der  $K$ -Kurve widmen. Wir führen jetzt folgende weitere Begrenzung der Annahmen I (S. 71) ein, um unsere Betrachtung nicht unzweckmäßig zu erschweren:

**Annahmen II:** Die dort eingeführten Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  sollen ferner an allen inneren Stellen des für  $t$  gültigen Intervalles, d. h. des einzelnen Teilbogens, endliche und stetige zweite Ableitungen besitzen. Beim Übergang des Argumentes  $t$  in einen der Grenzwerte des Intervalles sollen zwar die Ableitungen  $\varphi''$  und  $\psi''$  (absolut genommen) über jede Größe hinaus wachsen dürfen; doch soll der Ausdruck  $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''$  stets gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren. Endlich soll entweder der Ausdruck für den Krümmungsradius selbst

$$(3) \quad \rho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}$$

1) Vgl. indessen die Annahmen IV und die erste Anmerkung auf S. 128.

oder sein reziproker Wert  $\frac{1}{\rho}$ , die Krümmung, auch beim Übergang des Argumentes  $t$  in einen singulären Endpunkt des Intervalles (für den also  $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$  ist) in einen bestimmten endlichen Grenzwert übergehen, der dann als der Krümmungsradius bzw. die Krümmung in dem Endpunkte zu gelten hat.<sup>1)</sup>

Aus diesen Annahmen folgt sogleich auch, daß der Wert  $\rho = 0$  nur in einem *singulären* Endpunkte des Intervalles (vgl. die Annahmen I S. 71) statthaben kann.<sup>2)</sup> Vor allem aber besagen diese Annahmen geometrisch, daß zu jedem Punkte  $P_1$  eines jeden der die  $C$ -Kurve zusammensetzenden Teilbogen ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt gehört.<sup>3)</sup> Da dieser der Schnittpunkt der Normalen von  $P_1$  mit der un-

1) Wenn bei dem einzelnen der ursprünglichen Teilbogen der  $C$ -Kurve zwar die Annahmen I (S. 71) gelten, aber an einer endlichen Anzahl von Stellen nicht die Annahmen II, so kann man einfach den Teilbogen weiter in eine endliche Anzahl kleinerer Teilbogen zerlegt denken, für deren jeden dann natürlich die Annahmen II zu gelten haben.

2) Vgl. den Schluß der Anmerkung S. 81.

3) Vgl. J. Sommer, *Über die Definition des Krümmungskreises in einem Punkte einer allgemeinen ebenen Kurve*, Archiv d. Mathematik u. Physik, Bd. XIX, Leipzig 1912, S. 198—214. Auch jedem Endpunkte des einzelnen Teilbogens gehört nach unseren Festsetzungen ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt zu. Aus den Gleichungen (1) (S. 71) folgt ja zunächst für einen *inneren Punkt* des Teilbogens, wenn  $ds$  das Bogenelement in  $P$ ,  $d\tau$  den Kontingenzwinkel bezeichnet:

$$\frac{ds}{dt} = (\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\varphi' \cdot \psi'' - \psi' \cdot \varphi''}{\varphi'^2 + \psi'^2},$$

wobei

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}$$

ist. Für den inneren Punkt  $P$  ist dann  $\frac{ds}{dt}$  stets endlich und von Null verschieden,  $\frac{d\tau}{dt}$  auch stets endlich und nur Null, wenn  $\varphi' \cdot \psi'' - \psi' \cdot \varphi''$  verschwindet. In diesem letzteren Fall sagen wir (über die Definition des Herrn Sommer hinausgehend), daß der Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt.

Beim Übergang in einen *nicht singulären Endpunkt*, etwa für  $t = t_0$ , liegen die Verhältnisse nicht anders; auch wenn eine der Ableitungen  $\varphi''$  und  $\psi''$  dabei über jede Grenze hinaus wachsen sollte, so existiert doch stets in dem Endpunkte selbst die Funktion  $\frac{d\tau}{dt}$  zugleich mit ihrer geometrischen Bedeutung. (Statt an die Funktion  $\frac{d\tau}{dt}$  kann man nämlich auch die Betrachtung mit Herrn Sommer an die

endlich benachbarten Normale ist, so ist er nach dem Satze 5 (S. 73) zugleich auch der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt  $P_2$ , der parallelen Stützgeraden, wobei wir, wenn wir wollen, den Fall bei Seite lassen, daß der Bogen von  $P_1$  ein Kreisbogen und zugleich  $P_2$  ein Eckpunkt ist (vgl. Satz 7, S. 74). Für die Doppelnormale  $P_1P_2$  kann aber der Krümmungsmittelpunkt auch niemals *außerhalb* der Strecke  $P_1P_2$  selbst gelegen sein, da ja die ganze Kurve *innerhalb* des durch die Stützgeraden von  $P_1$  und  $P_2$  begrenzten Streifens liegt. Es gilt folglich ausnahmslos der Satz:

18. *Der Krümmungsradius für jeden Punkt eines der Teilbogen, welche die C-Kurve von der Breite  $b$  zusammensetzen, ist (absolut genommen) stets  $\leq b$ .*

Funktion  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi' \cdot \psi'' - \psi' \cdot \varphi''}{\varphi'^3} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'^3}$  anknüpfen und für den nicht singulären Endpunkt die Ableitung  $\varphi'$  von Null verschieden annehmen, da andernfalls nur die Funktion  $\frac{d^2x}{dy^2}$  zu wählen wäre. Es existiert dann auch in dem Endpunkte selbst die zweite Ableitung  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . Denn man könnte ja umgekehrt von der bis in den Endpunkt hinein wohldefinierten Funktion  $\frac{d^2y}{dx^2} = \chi(x)$  ausgehen und durch zweimalige Integration und geeignete Festsetzung der Integrationskonstanten zu der Gleichung  $y = f(x)$  einer Kurve zurückgehen, die dann mit der gegebenen Kurve identisch ist.)

Für einen *singulären Endpunkt*  $t = t_0$  des Intervalls ( $\varphi' = \psi' = 0$ ) sei nun etwa  $\frac{\psi'}{\varphi}$  endlich. Ist dann auch  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\varrho}$  endlich, dann ist auch

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d\tau}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{ds}{dt} \right) = 0$$

endlich und bestimmt und ebenso

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[ \frac{1}{\varrho} \cdot \left( 1 + \left( \frac{\psi'}{\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

d. h. die Verhältnisse liegen wieder nicht anders als soeben. Ist aber für den singulären Endpunkt  $t = t_0$  jetzt  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varrho = 0$ , so kann  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d^2y}{dx^2}$  nicht endlich sein.

vielmehr ist  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0$ , d. h. es existiert dann im Endpunkt selbst  $\frac{d^2y}{dx^2}$  nicht

und also auch kein Krümmungsmittelpunkt (nach der Definition des Herrn Sommer, vgl. a. a. O. S. 201). Gleichwohl schreiben wir durch besondere Festsetzung dem Endpunkt einen mit ihm zusammenfallenden Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius  $\varrho = 0$  zu. Über  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d\tau}{dt}$  ist in diesem Falle allgemein nichts auszusagen möglich.

Die  $C$ -Kurve kann also keinen Punkt mit unendlich großem Krümmungsradius, insbesondere keinen Bogen, der von einem gewöhnlichen Wendepunkte ausginge, bis zu diesem selbst hin enthalten. (Für alle inneren Punkte des einzelnen Teilbogens und die nicht singulären Endpunkte ist also auch der Nenner  $\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''$  des Ausdrucks für  $\rho$  stets von Null verschieden oder mit anderen Worten: Der Nenner  $\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''$  kann nur für einen solchen Parameterwert  $t$  verschwinden, für den gleichzeitig  $\varphi' = \psi' = 0$  ist.<sup>1)</sup>)

1) Wir wollen einmal in dieser Anmerkung voraussetzen, daß die Funktionen  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  für jede Stelle des in Betracht kommenden Intervalles von  $t$  in eine Potenzreihe entwickelbar sind. Es seien dann mit  $x'_0, x''_0 \dots$  und  $y'_0, y''_0 \dots$  die Ableitungen für  $t = t_0$  bezeichnet. Um dann das Verhalten der Kurve in der Nähe eines solchen singulären Punktes, wo also  $x'_0 = y'_0 = 0$  ist, zu untersuchen, wollen wir eine solche lineare Transformation des Koordinatensystems ausgeführt denken, daß dieser Punkt der Nullpunkt und seine Tangente die Abszissenachse ist. (Vgl. Enzykl. der Math. Wiss. III D 1, 2, Artikel: v. Mangoldt, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen*, S. 41.) Wir wollen der Einfachheit halber auch nach dieser Transformation die Koordinatenbezeichnung  $x, y$  beibehalten. Dann gelten also jetzt folgende Entwicklungen:

$$x = \frac{x_0^{(m)}}{m!} (t - t_0)^m + \frac{x_0^{(m+1)}}{(m+1)!} (t - t_0)^{m+1} + \dots$$

$$y = \frac{y_0^{(n)}}{n!} (t - t_0)^n + \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} + \dots$$

wo  $x_0^{(m)}$  und  $y_0^{(n)}$  mit den Bedingungen  $n > m \geq 2$  die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von  $x$  und  $y$  sind, oder

$$x = A(t - t_0)^m \cdot \mathfrak{P}_1(t - t_0),$$

$$y = B(t - t_0)^n \cdot \mathfrak{P}_2(t - t_0),$$

wo

$$A = \frac{x_0^{(m)}}{m!}, \quad B = \frac{y_0^{(n)}}{n!}$$

ist und  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  Potenzreihen sind, die für  $t = t_0$  den Wert 1 annehmen. Es ergibt sich dann für den Ausdruck des Krümmungsradius  $\rho$  bei Beschränkung auf die Glieder niedrigster Ordnung:

$$\rho = C \cdot (t - t_0)^{2m-n},$$

wo der endliche und nicht verschwindende Koeffizient

$$C = \frac{m^2 \cdot A^2}{n(n-m) \cdot B}$$

ist. Da nun der Krümmungsradius stets endlich ist, so muß also  $2m > n > m \geq 2$  sein.

Wenn also beispielsweise an der singulären Stelle nicht beide Ableitungen verschwinden, also  $x''_0 \geq 0$ , d. h.  $m = 2$  ist, so kann  $n$  nur gleich 3 oder 4 sein. In diesen Fällen ist die singuläre Stelle bzw. eine Spitze erster Art oder (im allgemeinen) eine solche zweiter Art (*Schnabelspitze*), (vgl. wieder Enzykl. der Math. Wiss., Artikel: v. Mangoldt a. a. O. S. 41. Für  $x = (t - t_0)^2, y = (t - t_0)^4$

**19.** Der Krümmungsradius  $\rho$  ist also für jeden Teilbogen der  $C$ -Kurve eine endliche und stetige Größe von unveränderlichem Vorzeichen.

Da entsprechend auch der (stets im Endlichen gelegene) Krümmungsmittelpunkt eines Punktes  $P_1$  der  $C$ -Kurve sich stetig ändert, wenn der Punkt die einzelnen Teilbogen der  $C$ -Kurve durchläuft, so folgt auch:

**20.** Zu jedem Teilbogen der  $C$ -Kurve gehört als Evolute ein bestimmter (im Endlichen liegender) Bogen, den wir den zugehörigen Teilbogen der  $K$ -Kurve nennen wollen, (wobei nochmals auf die besondere Stellung hingewiesen sei, welche hierbei zu dem Teilbogen der  $C$ -Kurve gehörende Kreisbogen einnehmen).

**21.** Dieser Teilbogen der  $K$ -Kurve ist ebenfalls die Evolute zu einem zweiten Bogen der  $C$ -Kurve (dem Orte des Punktes  $P_2$ ), der jedoch zu einem oder zu mehreren der Teilbogen der  $C$ -Kurve gehören kann. Dieser zweite Bogen der  $C$ -Kurve ist mit anderen Worten zu dem Teilbogen des Punktes  $P_1$  äquidistant.<sup>1)</sup>

Wie aus den einzelnen Bogen die ganze  $K$ -Kurve sich zusammensetzt, wollen wir erst später (§ 5) betrachten.

Um diesen Teilbogen der  $K$ -Kurve näher zu erfassen, wollen wir noch eine weitere Beschränkung hinzufügen durch die

**Annahmen III:** Die Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  sollen an allen inneren Stellen des für  $t$  gültigen Intervalles bei dem einzelnen Teilbogen der  $C$ -Kurve endliche und stetige dritte Differentialquotient besitzen.<sup>2)</sup> Ferner soll der aus der Formel (3) für  $\rho$  (S. 78) sich ergebende Differentialquotient

$$(4) \frac{d\rho}{dt} = \frac{3(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') - (\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}(\varphi'\psi''' - \psi'\varphi''')}{(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2},$$

z. B. ist die Stelle  $t = t_0$  ein gewöhnlicher Kurvenpunkt). Natürlich können nicht beide Kurvenbogen, die von einer solchen Spitze auslaufen, der  $C$ -Kurve angehören, da diese Kurve ja stets auf einer Seite der Tangente liegen muß, bzw. bei stetiger Durchlaufung der Kurve eine sich stets in demselben Sinne drehende Tangente besitzen muß. Der Wert  $\rho = 0$  tritt den obigen Ungleichungen gemäß allemal dann an den singulären Stellen auf, wenn  $2m > n$  ist, also z. B. für den eben erwähnten Fall  $m = 2$ ,  $n = 3$ .

1) Dieser zweite Bogen kann durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$x = \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \cdot b,$$

$$y = \psi(t) + \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \cdot b.$$

2) Hier ist zunächst wieder eine analoge Bemerkung wie die der ersten Ann. S. 79 am Platze.

der nach den bisherigen Annahmen und Sätzen (vgl. besonders den Satz 19 und die Formel (3)) für alle inneren Punkte des Intervalles eine endliche und stetige Größe ist, nur für eine endliche Zahl dieser Punkte verschwinden (von den Kreisbogen in endlicher Zahl abgesehen, die zu dem Teilbogen gehören) und beim Übergang des Argumentes  $t$  in einen Endpunkt des Intervalls entweder selbst oder mit seinem reziproken Werte in einen bestimmten endlichen Grenzwert übergehen.<sup>1)</sup>

Durch diese Festsetzungen soll es also z. B. nicht ausgeschlossen sein, daß für einen Endpunkt des Intervalles eine der Ableitungen  $\varphi'''$  und  $\psi'''$  unendlich wird, d. h. über jede Grenze hinaus wächst.

Auf die geometrische Bedeutung der Annahmen III werden wir sogleich eingehen. Zu dem Zweck treffen wir zunächst in Ergänzung der Festsetzung I auf S. 74 folgende weiteren

Festsetzungen II: Als positiver Drehungssinn in der Ebene sei derjenige bezeichnet, der die positive  $x$ -Achse in die positive  $y$ -Achse über-

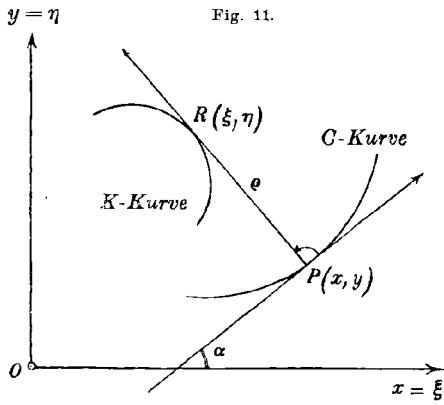
1) Inbetreff eines singulären Endpunktes ( $\varphi' = \psi' = 0$ ) vgl. die Anmerkung S. 81. Nach den daselbst gegebenen Voraussetzungen ist für eine solche Stelle  $\varrho = C \cdot (t - t_0)^{2m-n} \cdot \mathfrak{P}(t - t_0)$ , wo  $\mathfrak{P}(t - t_0)$  eine Potenzreihe von  $(t - t_0)$  bedeutet, die für  $t = t_0$  den Wert 1 annimmt, und es ist dann also in jedem Falle, da  $2m > n$  ist,  $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)_{t=t_0}$  gleich einer endlichen Zahl oder gleich 0. Bei einer  $C$ -Kurve, deren Teilbogen die zu Anfang der Anmerkung S. 81 genannte Eigenschaft haben, kann es also überhaupt nicht vorkommen, daß  $\frac{d\varrho}{dt}$  unendlich groß wird.

Es möge jetzt jedoch im allgemeinen Falle (d. h. wenn die soeben erwähnte Eigenschaft bei dem nach unseren Annahmen zulässigen Teilbogen der  $C$ -Kurve nicht vorausgesetzt wird) zwar für den Endpunkt  $t = t_0$ , der z. B. ein unterer Endpunkt für  $t$  sei,  $\frac{d\varrho}{dt}$  über jede Grenze wachsen, aber für alle Werte  $t$  in angrenzbarer hinreichender Nähe von  $t_0$  der dann stets dasselbe Vorzeichen besitzende Ausdruck  $\frac{d\varrho}{dt} \cdot (t - t_0)^n$  absolut genommen  $\leq \mathfrak{P}$  sein, wo  $\mathfrak{P}$  eine bestimmte endliche Zahl und  $0 < n < 1$  ist. Dann kann man durch Einführung eines neuen Argumentes  $u$  durch die Substitution  $t - t_0 = u^l$ , wo  $l$  eine noch zu bestimmende positive ganze Zahl sei, erreichen, daß  $\left(\frac{d\varrho}{du}\right)_{u=0}$  endlich ist, daß also ein Unendlichwerden der Ableitung von  $\varrho$  vermieden wird. Es ist nämlich, da  $\frac{dt}{du} = l \cdot u^{l-1} = l \cdot (t - t_0)^{1-\frac{1}{l}}$  ist,

$$\frac{d\varrho}{du} = \frac{d\varrho}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \leq \mathfrak{P} \cdot l \cdot (t - t_0)^{1-\frac{1}{l}-n},$$

wo die rechte Seite eine endliche Größe ist, wenn  $l \geq \frac{1}{1-n}$  ist. Man überzeugt sich auch leicht, daß durch diese Substitution  $t - t_0 = u^l$  die Gültigkeit der jetzt für den Parameter  $u$  ausgesprochenen Annahmen I, II, III keine Änderung erleidet.

führt. (Der bestimmten Anschauung wegen soll dieser positive Drehsinn, besonders in den Figuren, dem des Uhrzeigers entgegengesetzt sein.) Als positive Richtung einer Stütznormalen für den einzelnen Punkt  $P_1$  der  $C$ -Kurve soll diejenige bezeichnet sein, die aus der positiven Richtung der zugehörigen Stützgeraden durch Drehung um  $+90^\circ$  hervorgeht. (Fig. 11.)



Für einen Kurvenpunkt, der keine Ecke ist, zeigt also die positive Normalenrichtung von dem Punkte aus in das Innere der  $C$ -Kurve. Für zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mit parallelen Stützgeraden sind natürlich

die positiven Richtungen ihrer gemeinsamen Stütznormalen entgegengesetzte. Nach diesen Festsetzungen ist ferner hinsichtlich des Vorzeichens stets

$$\rho = \vec{PR} \geq 0$$

zu nehmen, wo  $P$  ein Punkt des einzelnen Teilbogens der  $C$ -Kurve und  $R$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt ist.

**Festsetzung III:** Der Einfachheit halber sei endlich auch eine solche Wahl des Argumentes  $t$  festgesetzt, daß für jeden Teilbogen der  $C$ -Kurve wachsenden Werten des Argumentes  $t$  eine positive Umlaufung des Bogens, d. h. eine Umlaufung im Sinne der positiven Tangente entspricht.

Bezeichnen wir nun die auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes  $R$  mit  $\xi$ ,  $\eta$ , so lauten die Gleichungen für den Teilbogen der  $K$ -Kurve

$$(5a, b) \quad \begin{aligned} \xi &= x - \rho \cdot \sin \alpha, \\ \eta &= y + \rho \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

wo

$$(6) \quad \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y'}{s'}, \\ \cos \alpha &= \frac{x'}{s'} \end{aligned}$$

und  $s' = +\sqrt{x'^2 + y'^2}$  ist und  $x'$ ,  $y'$  die Ableitungen der Funktionen  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  (vgl. die Gleichungen (1a, b). S. 71) bedeuten.<sup>1)</sup>

1) Ist für einen Endpunkt  $t = t_0$   $x' = y' = s' = 0$ , so treten natürlich für die Quotienten  $\frac{x'}{s'}$  und  $\frac{y'}{s'}$  ihre nach den Annahmen I wohlbestimmten Grenzwerte ein.



Da  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{s'}{\rho}$  ist, so folgt hieraus:

$$(7a, b) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\sin \alpha \cdot \frac{d\rho}{dt}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= +\cos \alpha \cdot \frac{d\rho}{dt}, \end{aligned}$$

also:

$$(8) \quad \frac{d\sigma}{dt} = +\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2},$$

wo  $d\sigma$  das Bogendifferential der  $K$ -Kurve bezeichnet, mit solcher Festsetzung des Vorzeichens, daß zunehmenden Werten des Argumentes  $t$  auch ein Wachsen des Bogens der  $K$ -Kurve entsprechen soll. Aus den Formeln (7a, b) folgt zunächst:

22. Der einzelne Teilbogen der  $K$ -Kurve besitzt dann und nur dann eine singuläre Stelle  $\xi' = \eta' = 0$ , wenn für einen einzelnen Wert des Argumentes  $t$   $\frac{d\rho}{dt} = 0$  ist und eine „singuläre“ Stelle  $\xi' = \eta' = \infty$ , wenn  $\frac{d\rho}{dt} = \infty$  ist, welch' letzteres ja nur für einen Endpunkt des Teilbogens der Fall sein kann.

Wir bezeichnen nun mit  $\beta$  den Winkel, den die wachsenden Werten von  $t$ , d. h. nach der Festsatzung III, S. 84 wachsenden Werten von  $\alpha$  entsprechende Fortschreitungsrichtung der  $K$ -Kurve gegen die positive  $\xi$ -Achse bildet

Festsatzung IV: Diese so definierte Fortschreitungsrichtung nennen wir die positive Tangentenrichtung der  $K$ -Kurve.<sup>1)</sup>

Es gilt hiernach:

$$(9a, b) \quad \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{+\cos \alpha \cdot \frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \pm \cos \alpha, \\ \cos \beta &= \frac{-\sin \alpha \cdot \frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \mp \sin \alpha \end{aligned}$$

und

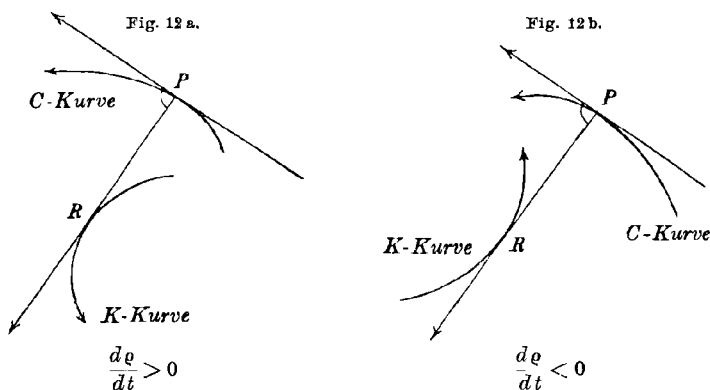
$$(10) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \pm \frac{d\rho}{dt},$$

wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, d. h.  $\beta = \alpha \pm 90^\circ$  ist, je nachdem  $\frac{d\rho}{dt} >$  oder  $< 0$  ist, d. h.:

1) Als diese positive Tangentenrichtung der  $K$ -Kurve ergibt sich ersichtlich dieselbe Richtung, mag die betreffende Stelle der  $K$ -Kurve als Evolute für den Bogen des Punktes  $P_1$  oder des Punktes  $P_2$  aufgefaßt werden (vgl. Satz 21 S. 82) im Gegensatz zu der positiven Richtung der Stütznormalen.

**23.** Die positive Tangentenrichtung der  $K$ -Kurve stimmt mit der positiven Richtung der Stütznormalen überein oder nicht, je nachdem  $\frac{d\varrho}{dt} > 0$  oder  $< 0$  ist. (Fig. 12a, b; hier geben die Pfeilspitzen die positiven Richtungen der Tangente und Normale der  $C$ -Kurve und die positiven Richtungen der  $C$ - und der  $K$ -Kurve an).

Hierauf kommen wir später (S. 92) ausführlicher zurück, besonders auch auf den im Satze 24 noch näher besprochenen Fall  $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ , sei



es, daß dieser Wert als Grenzwert für einen einzelnen Punkt des Intervalles oder durch das Vorhandensein eines Kreisbogens der  $C$ -Kurve ( $\varrho = \text{const}$ ) auftritt.

Bei beiden Möglichkeiten ist jedenfalls noch zu beachten, ob der Ausdruck  $\frac{d\varrho}{dt}$  beim Durchgang durch die Stelle  $\frac{d\varrho}{dt} = 0$  sein Zeichen wechselt oder nicht.

Die wesentliche geometrische Bedeutung der Annahmen III heben wir nun noch besonders durch den zusammenfassenden Satz hervor:

**24.** Der einzelne Teilbogen der  $K$ -Kurve besitzt in jedem (nicht zu einem Kreisbogen der  $C$ -Kurve gehörenden) Punkte  $R$  eine bestimmte Tangente. Diese ändert sich stetig und zwar in der Weise, daß sie sich stets in positivem Sinne dreht, wenn der zugehörige Punkt  $P$  die  $C$ -Kurve in positivem Sinne durchläuft. Passiert hierbei der Punkt  $P$  eine Stelle, wo  $\frac{d\varrho}{dt}$  durch 0 hindurchgehend das Zeichen wechselt, so springt an der entsprechenden Stelle  $R$  der  $K$ -Kurve ihre positive Tangentenrichtung von der bisherigen in die entgegengesetzte Richtung über. Enthält aber der Teilbogen der  $C$ -Kurve einen Kreisbogen, so entspricht diesem ein einziger Punkt der  $K$ -Kurve; dieser stellt dann einen Eckpunkt dar, wenn an den

*Kreisbogen noch beiderseits andere Bogen bei dem Teilbogen der C-Kurve sich anschließen, und es geht auch hier die positive Tangentenrichtung der K-Kurve in die entgegengesetzte Richtung über, wenn beim Passieren des Kreisbogens  $\frac{d\varrho}{dt}$  sein Zeichen wechselt.<sup>1)</sup>*

§ 5. Der gesamte Verlauf der K-Kurve.

Bisher haben wir allein die einzelnen Teilbogen der K-Kurve betrachtet, die zu den einzelnen Teilbogen der C-Kurve gehören. Um die K-Kurve jedoch in ihrem ganzen Verlauf zu überblicken, müssen wir nun untersuchen, wie ihre einzelnen Teilbogen sich zusammensetzen lassen, d. h. wir wenden uns der Betrachtung der gemeinsamen Endpunkte  $P' = P''$  zweier sich aneinander reihender Teilbogen der C-Kurve zu.

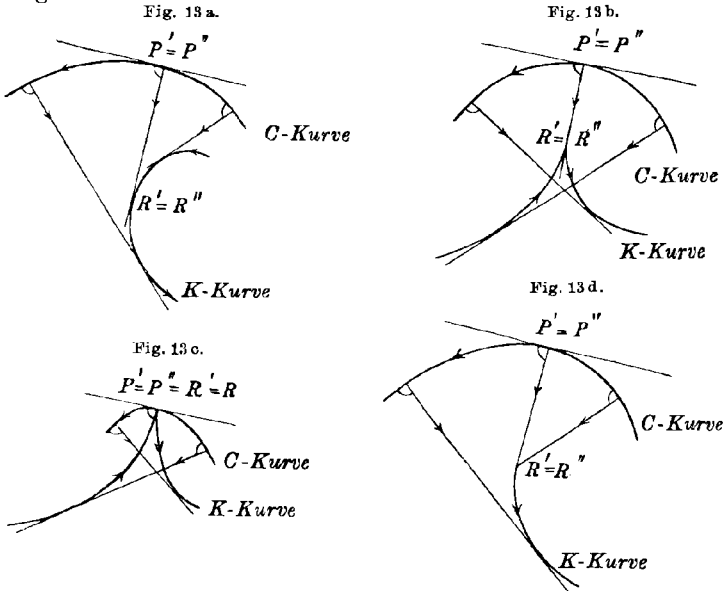
*Erstens* mögen in diesem Punkte  $P' = P''$  die beiden Teilbogen der C-Kurve dieselbe Tangente, denselben Krümmungsradius  $\varrho$  und denselben oder verschiedenen Differentialquotienten  $\frac{d\varrho}{dt}$  besitzen. Dann haben auch die entsprechenden Teilbogen der K-Kurve stets zusammenfallende Endpunkte  $R' = R''$  und dabei auch noch dieselbe Tangente, wenn keiner der Teilbogen der C-Kurve in dem Punkte  $P' = P''$  in einem Kreisbogen endigt. (Vgl. die Figuren 13a—d.) In Fig. 13a ist insbesondere (bei positiver Umlaufung der C-Kurve)  $\frac{d\varrho}{dt}$  vor und nach dem Passieren der Stelle  $P' = P''$  positiv, in Fig. 13b vor dem Punkte  $P' = P''$  negativ, nach dem Punkte positiv (vgl. Satz 24). Bei letzterer Möglichkeit kann die Größe  $\frac{d\varrho}{dt} = \varrho'$  durch 0 oder  $\infty$  hindurch-

1) Ist z. B. der Parameter  $t$  der Winkel  $\alpha$  selbst (vgl. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie Bd. I, Ipz. 1901, S. 17, Satz 8) so bedeutet  $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \pm \frac{d\sigma}{d\alpha}$  (vom Vorzeichen abgesehen) den (diesem Ausdruck gemäß definierten) Krümmungsradius  $\varrho_k$  der K-Kurve. (Vgl. Sommer, Über die Definition des Krümmungskreises in einem Punkte einer allgemeinen ebenen Kurve, Archiv der Math. u. Physik, Bd. 19, 1912, S. 202) Für einen Wendepunkt der K-Kurve, überhaupt für jeden Punkt mit mehrfach berührender Tangente, ist dann  $\varrho_k = \infty$ , (vgl. die Annahme III, wo ausdrücklich solche Werte zugelassen sind). Im allgemeinen Falle (d. h. wenn  $t$  nicht grade den Winkel  $\alpha$  bedeutet), gibt für einen inneren Punkt des Teilbogens der C-Kurve, für den also  $\varrho$  und  $s'$  von 0 verschieden und  $\varrho'$  nicht  $\infty$  ist, analog die folgende Formel

$$\varrho_k = \frac{\varrho \cdot \varrho'}{s'} = \varrho \cdot \frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{d\alpha}$$

den Krümmungsradius der K-Kurve an der entsprechenden Stelle an, wobei also die Existenz von  $\varrho''$  nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

gehen oder auch von einem positiven Werte  $\rho_1'$  zu einem negativen Werte  $\rho_2'$  oder umgekehrt springen. Es braucht hier also keineswegs die Stelle  $R' = R''$  eine Spitze im gewöhnlichen Sinne zu sein, sondern die beiden Teilbögen der  $K$ -Kurve können in  $R' = R''$  sogar gewöhnliche Kurvenpunkte besitzen (vgl. die Figur 4 S. 70). In Fig. 13c ist als spezieller Fall der Fig. 13b noch  $\varphi = 0$  an der Stelle  $P' = P''$ . In Fig. 13d endlich endigt der erste Teilbogen der  $C$ -Kurve in einem Kreisbogen.



*Zweitens* mögen beide Teilbögen der  $C$ -Kurve in dem gemeinsamen Endpunkte  $P' = P''$  (in dem jeder der Teilbögen noch als Kreisbogen endigen kann) dieselbe Tangente, aber verschiedene Krümmungsradien oder verschiedene Krümmungsmittelpunkte  $R'$  und  $R''$  besitzen. *Dann soll stets die Verbindungsstrecke  $R'R''$  zu der  $K$ -Kurve hinzugenommen werden.* (Vgl. die Fig. 14a, b, c.)

*Drittens* mögen beide Teilbögen der  $C$ -Kurve in dem Punkte  $P' = P''$ , (in dem wieder jeder Teilbogen als Kreisbogen endigen kann) nicht dieselbe Tangente besitzen, der Punkt  $P' = P''$  also ein *Eckpunkt* sein. Sind dann wieder  $R'$  und  $R''$  die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der Teilbögen, *so sollen jetzt stets (wenn  $R', R''$  bzw. von  $P', P''$  verschieden sind) die sich aneinander schließenden Strecken  $R'P'$  und  $P''R''$  zu der  $K$ -Kurve hinzugenommen werden.* (Vgl. die Fig. 15a, b, c. Insbesondere ist in Fig. 15b  $P' = P'' = R' = R''$ , in Fig. 15c endigen beide Teilbögen der  $C$ -Kurve in Kreisbogen.)

Natürlich können nun diese Vorkommnisse bei den aufeinanderfolgenden Teilbögen der *C*-Kurve und der *K*-Kurve in mannigfacher Weise nacheinander eintreten. Wir begnügen uns, in der Fig. 16 z. B. noch

Fig. 14 a.

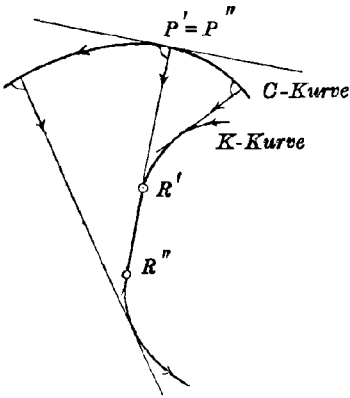


Fig. 15 a.

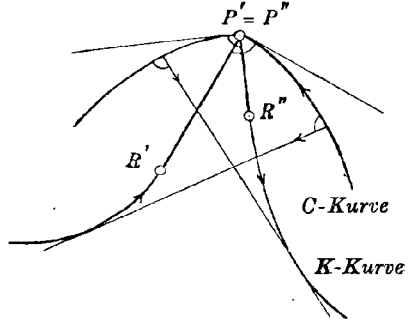


Fig. 14 b.

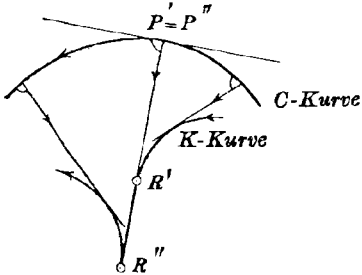


Fig. 15 b.

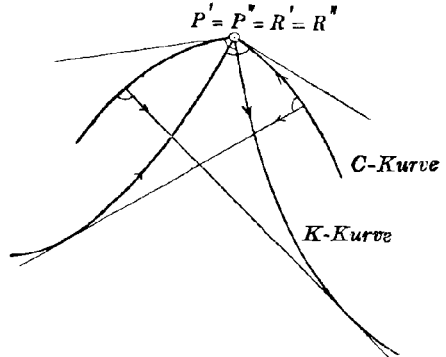


Fig. 14 c.

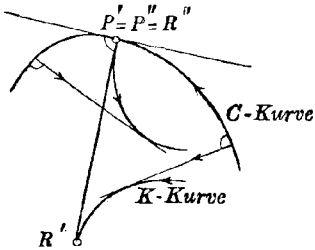
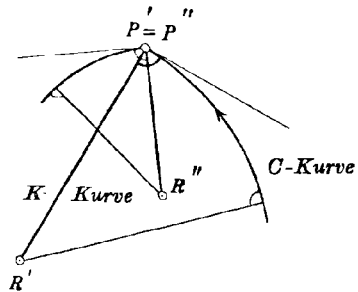
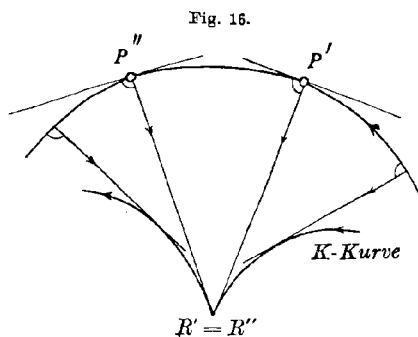


Fig. 15 c.



den Fall zu erwähnen, wo bei der *C*-Kurve ein Kreisbogen  $P'P''$  an zwei beliebige andere Bogen tangential so anstößt, daß für die Endpunkte des Kreisbogens alle drei Bogen denselben Krümmungsradius besitzen, die *K*-Kurve im Mittelpunkte  $R' = R''$  des Kreisbogens also eine Ecke zeigt.

Nach diesen Betrachtungen können wir nun ganz allgemein jede Stütznormale der  $C$ -Kurve als eine „tangierende Gerade“ der  $K$ -Kurve ansehen, die Eigenschaften der  $K$ -Kurve aber, die sich für diese als



notwendige unseren Annahmen gemäß ergeben haben, in dem Resultat zusammenfassen:

25. Die  $K$ -Kurve besteht aus einem einzigen im Endlichen verlaufenden, in sich geschlossenen Linienzug. Dieser setzt sich zusammen aus einer endlichen Zahl von im Satze 24 näher bestimmten Teilbogen<sup>1)</sup> und von geradlinigen Strecken, die alle sich tangential oder in Ecken aneinander reihen. In jeder vorgegebenen Richtung besitzt die  $K$ -Kurve nur eine einzige tangierende Gerade. Rollt nämlich die tangierende Gerade auf der  $K$ -Kurve ab, so dreht sie sich stets in demselben Sinne und hat sich insgesamt um den Winkel  $\pi$  gedreht, wenn der „Berührungspunkt“ die  $K$ -Kurve grade einmal umlaufen hat.<sup>2)</sup>

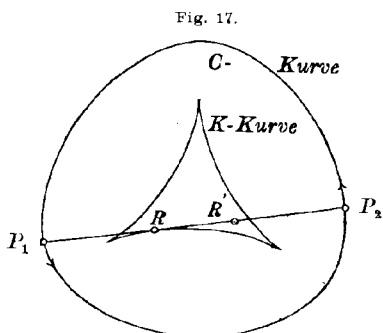
Diese Abrollung der tangierenden Geraden, die wir ausdrücklich ohne Gleiten annehmen wollen, mit der Drehung um den Winkel  $\pi$ , bezeichnen wir fernerhin als eine „halbvollständige“ und als „vollständige“ Abrollung eine solche, bei der der Berührungspunkt der tangierenden Geraden die  $K$ -Kurve zweimal durchlaufen hat, die tangierende Gerade selbst also auch hinsichtlich ihrer Richtung wieder in die Anfangslage zurückgelangt ist. Bei der halbvollständigen Abrollung ist im allgemeinen auch ein anderer Punkt  $R'$  der tangierenden Geraden in der Endlage Berührungspunkt geworden, als der Berührungspunkt  $R$  der Anfangslage. (Fig. 17.) (Nur wenn  $R$  gerade der Mittelpunkt der Strecke  $P_1 P_2$  (vgl. Satz 6, S. 73) war, ist  $R' = R$ , wobei  $P_1$  und  $P_2$  die auf der  $C$ -Kurve gelegenen Punkte der tangierenden Geraden in der Anfangslage sind.) Erst bei der vollständigen Abrollung ist auch der Berüh-

1) Aus unseren Annahmen folgt natürlich auch sofort, daß ebenso wie die Teilbogen der  $C$ -Kurve auch die der  $K$ -Kurve eine bestimmte endliche Länge besitzen. Übrigens können wir jetzt auch der Einfachheit halber voraussetzen, daß die ganze  $C$ -Kurve so in Teilbogen zerlegt ist, daß jedesmal dem einzelnen Teilbogen als Ort des Punktes  $P_1$  wieder grade ein (äquidistanter) Teilbogen als Ort des Punktes  $P_2$  entspricht (vgl. Satz 21, S. 82).

2) Im Gegensatz zu der  $C$ -Kurve kann die  $K$ -Kurve ebenso wie geradlinige Strecken so auch Bogen enthalten, wie sie von einem gewöhnlichen Wendepunkt, überhaupt von einem Kurvenpunkte mit unendlich großem Krümmungsradius auslaufen (vgl. die Anm. S. 87).

rungspunkt der Endlage stets wieder identisch mit dem Berührungspunkt  $R$  der Anfangslage. Über den Zusammenhang der  $C$ - und  $K$ -Kurven können wir daher noch folgendes hervorheben:

**26.** Die (bisher noch als von vornherein gegeben zu denkende)  $C$ -Kurve wird als „Evolvente“ von einem bestimmten Punkte  $P$  auf der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve bei der Abrollung der Geraden beschrieben. Und zwar geht bei halbvollständiger Abrollung der Geraden die Anfangslage  $P_1$  des Punktes  $P$  erst in den Punkt  $P_2$  über, dessen Stütznormale sich ebenfalls mit der Anfangslage der Geraden deckt. (Hierbei ist noch auf der Anfangslage der Geraden  $P_1R = P_2R'$ , wo  $R'$  der Punkt ist, der in der Endlage an die Stelle des Berührungspunktes  $R$  der Anfangslage tritt). Die ganze  $C$ -Kurve wird also erst bei der vollständigen Abrollung der tangierenden Geraden von ihrem Punkte  $P$  beschrieben.



Es läßt sich nun auch leicht zeigen:

**27.** Die in dem Satze 26 angegebenen notwendigen Eigenschaften der  $K$ -Kurve sind umgekehrt in der Hinsicht auch hinreichend, daß zu einer jeden demgemäß konstruierten  $K$ -Kurve stets als Evolventen Kurven konstanter Breite gehören.

Da die einzelnen Teilbogen einer solchen  $K$ -Kurve endliche Bogenlänge haben, so kann man ja am einfachsten stets einen so weit vom anfänglichen Berührungspunkt entfernten Punkt  $P$  auf der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve angeben, daß dieser Punkt bei der Abrollung der Geraden sicher nicht auf die  $K$ -Kurve gelangt. Nach halbvollständiger Abrollung der Geraden zeigt eine auf ihr in der Anfangslage ausgewählte Richtung die entgegengesetzte Richtung in der Ebene an, wobei wieder die Anfangs- und Endlage des Punktes  $P$  mit  $P_1, P_2$  bezeichnet seien. Wir können dann auch die Strecke  $P_1P_2 = b$  auf der  $K$ -Kurve halbvollständig abrollend denken. Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  beschreiben dann zusammen eine in sich geschlossene Kurve ohne geradlinige Stücke und bei unserer Annahme des Punktes  $P$  ohne Ecken und Spitzen; diese Kurve besitzt in zwei gleichzeitig aus  $P_1$  und  $P_2$  hervorgegangenen Punkten dieselbe Normale, also parallele Tangenten mit dem Abstände  $b$  und überhaupt in jeder Richtung nur die genannten beiden Tangenten. Eine jede solche Tangente ist aber notwendig zugleich Stützgerade der Evolventenkurve und hat mit der Kurve nur den Berührungspunkt gemein, da bei einer Kurve ohne Ecken und Spitzen alle Stützgeraden nur Tangenten im gewöhnlichen Sinne sein können und

es ja in beliebiger Richtung nur zwei Tangenten der Evolventenkurve gibt. Die Kurve ist also auch mit ihrer Umhüllungskurve identisch, d. h. sie liegt stets innerhalb des von irgend zwei parallelen Tangenten gebildeten Streifens. Hiermit ist aber gezeigt, daß die Evolventenkurve der Definition des Satzes 3, S. 72 genügt.

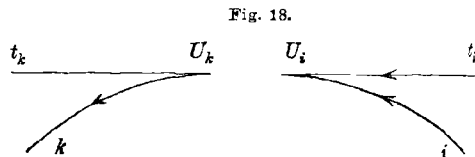
### § 6. Die Umkehrpunkte der $K$ -Kurve.

Unsere weitere Betrachtung soll nun so vorgehen, daß wir jetzt allgemein die  $K$ -Kurven und dann zu der einzelnen von ihnen die zugehörigen  $C$ -Kurven zu konstruieren suchen. Zu dem Zweck werden wir vorerst noch eine wichtige Eigenschaft aller  $K$ -Kurven ableiten, die sich als Folgerung aus dem Satze 25, S. 90 ergeben wird. Wir knüpfen an nachstehende geometrische *Definition* an, die wir der Einfachheit halber gleich auf die  $K$ -Kurven beschränken, obwohl sie sich auf weit allgemeinere Kurven ausdehnen ließe:

28. Unter einem Umkehrpunkt<sup>1)</sup> einer  $K$ -Kurve verstehen wir einen solchen Kurvenpunkt, daß die dann beibehaltene Richtung der tangierenden Geraden, die vor dem Punkte mit dem Umlaufungssinn der Kurve (etwa ihrer positiven Tangentenrichtung) übereinstimmt, nach dem Überschreiten dieses Punktes ihr entgegengesetzt ist.

29. Offenbar ist in Übereinstimmung mit der Formel (10) und dem Satz 23 ein Umkehrpunkt identisch mit einem solchen Punkte, in dem  $\frac{dq}{dt}$  stetig oder sprungweise sein Vorzeichen wechselt; die Anzahl der Umkehrpunkte kann daher auch (unseren Annahmen gemäß) nur eine endliche sein.

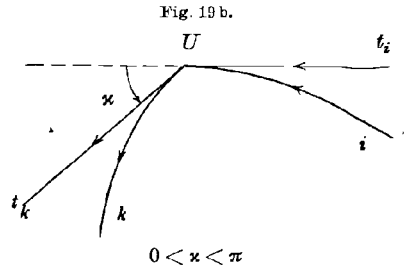
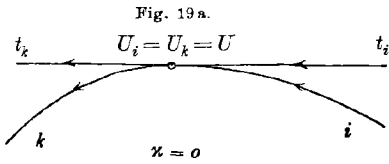
Um noch einen tieferen Einblick in das Wesen der Umkehrpunkte zu gewinnen, betrachten wir, in welcher verschiedener Weise überhaupt zwei beliebige Bogen  $a$  und  $b$  der  $K$ -Kurve (die also nicht etwa Teilbogen im Sinne des Satzes 20, S. 82 zu sein brauchen) sich mit ihren Endpunkten aneinander reihen können. In der Fig. 18 seien durch Pfeilspitzen die positiven Umlaufungs- oder Fortschreitungsrichtungen der Bogen  $i$  und  $k$ , die mit den Endpunkten  $U_i$  und  $U_k$  aneinander gesetzt werden sollen, und ihre Tangenten  $t_i$  und  $t_k$  in den Punkten  $U_i$  und  $U_k$  angegeben und überdies die positive Fortschreitungsrichtung des Bogens  $i$  auf die Tangente  $t_i$  (ebenfalls durch eine Pfeilspitze) übertragen (vgl. den Satz 28). Wir denken dann zunächst die



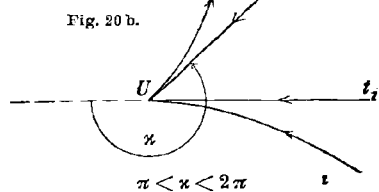
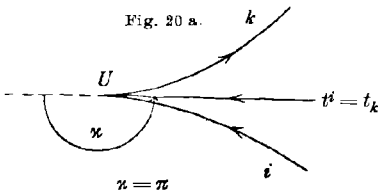
1) point de rebroussement nach Hurwitz (a. a. O. S. 388).



Bogen so aneinander gesetzt, daß die Tangenten  $t_i$  und  $t_k$  zusammenfallen und die Fortschreitungsrichtung des Bogens  $k$  in dem Punkte  $U_i = U_k = U$  mit der angegebenen Richtung der Tangente  $t_i$  übereinstimmt (Fig. 19a). Hierauf wollen wir allein den Bogen  $k$  mit der Tangente  $t_k$  um  $U_k$  in



positivem Sinne (d. h. im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers) durch einen beliebigen Winkel  $< 2\pi$  gedreht denken. Wir bezeichnen noch diesen Winkel mit  $\alpha$ , d. h. den Winkel, durch den die „positive Umlaufungsrichtung des Bogens  $i$  im Punkte  $U$ “ (oder die auf der Tangente  $t_i$  angegebene Richtung) um  $U$  in positivem Sinne zu drehen ist, bis sie mit der „positiven Umlaufungsrichtung des Bogens  $k$  in  $U$ “ zusammenfällt. Endlich sei auch stets auf die Tangente  $t_k$  die auf der



Tangente  $t_i$  angegebene Richtung in der Weise übertragen gedacht, wie sie sich auf  $t_k$  ergibt, wenn die Tangente  $t_i$  im positiven Sinne um  $U$  gedreht wird, bis sie zum ersten Male mit der Tangente  $t_k$  zusammenfällt (d. h. wenn die „tangierende Gerade“  $t_i$  bis zu der Lage  $t_k$  im Sinne des Satzes 25 S. 90 weiter abrollt).

Es ergibt sich dann folgendes einfache Resultat:

**30. Der Punkt  $U$  bildet keinen Umkehrpunkt oder doch, je nachdem:**

(11)  $0 \leq \alpha < \pi$

(Fig. 19a, b) oder

(12)  $\pi \leq \alpha < 2\pi$

(Fig. 20a, b) ist.<sup>1)</sup>

1) Natürlich kann in beiden Fällen jeder der beiden Bogen  $i$  und  $k$  auch geradlinig sein, ohne daß die Sätze des Textes hierdurch beeinflußt werden.

Im ersten (bzw. zweiten) Falle des Satzes 30 liegt überdies die hinreichend

**31a.** Im ersten Falle ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) wollen wir den Punkt  $U$  für  $\alpha = 0$  eine „volle Ecke“ (speziell einen gewöhnlichen Punkt einer analytischen Kurve), für  $0 < \alpha < \pi$  eine „konvexe Ecke“ nennen.

**31b.** Im zweiten Falle ( $\pi \leq \alpha < 2\pi$ ), dem Falle des Umkehrpunktes, wollen wir dagegen den Punkt  $U$  für  $\alpha = \pi$  eine „Spitzenecke“ (speziell eine Spitze erster Art einer analytischen Kurve), für  $\pi < \alpha < 2\pi$  eine „konkave Ecke“ nennen.<sup>1)</sup>

Beim Überschreiten eines Punktes des ersten Falles ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) bzw. des Umkehrpunktes ( $\pi \leq \alpha < 2\pi$ ) erleidet dann die tangierende Gerade eine positive Drehung um den Winkel  $\alpha$  bzw.  $\alpha - \pi$ ; d. h. auch in letzterem Falle ist der Drehungswinkel  $< \pi$ .

Auf die verschiedene Bedeutung des Punktes  $U$  in den beiden Fällen des Satzes 30 für die Evoluten der  $K$ -Kurve, insbesondere die  $C$ -Kurven, gehen wir erst später ein (vgl. etwa Satz 52, S. 118); doch können wir schon jetzt sagen, daß der erste Fall, insbesondere eine konvexe Ecke, sich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt nicht wesentlich verschieden verhält. Es interessieren uns also weiterhin auch nur die Umkehrpunkte besonders.

Für sie gilt der wichtige Satz:

**32.** Die  $K$ -Kurve muß stets eine ungrade Anzahl von Umkehrpunkten besitzen und zwar mindestens drei.<sup>2)</sup>

Um den ersten Teil dieses Satzes zu beweisen, gehen wir von einer tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve aus, deren Berührungspunkt nicht grade ein Umkehrpunkt ist, und lassen diese Gerade halbvollständig (vgl. Seite 90) auf der  $K$ -Kurve abrollen. Die Lage der Berührungspunkte auf der tangierenden Geraden für ihre sich deckenden Anfangs- und Endlagen seien wie früher (Satz 26, S. 91 und Fig. 17) mit  $R, R'$

---

nahe ganze Umgebung des Punktes  $U$  nicht auf verschiedenen Seiten (bzw. nicht auf derselben Seite) jeder der beiden Tangenten  $t_i$  und  $t_k$  und auch jeder der übrigen tangierenden Geraden, welche sich bei der im Texte erwähnten weiteren Abrollung der Tangente  $t_i$  bis zur Tangente  $t_k$  ergeben (wobei die betreffende Tangente  $t_i$  oder  $t_k$  selbst zu ihren „Seiten“ oder „Halbebenen“ nicht mitgerechnet sein soll).

1) Diese Bezeichnungen „konvexe“ und „konkave“ Ecke sind der Tatsache gemäß gewählt, daß bei einer überall konvexen Kurve (vgl. Satz 11, S. 75) dann zwar konvexe, nicht aber konkave Ecken auftreten können. Für „konvexe“ bzw. „konkave“ Ecken ist also bzw. der Winkel  $2\pi - \alpha$  konvex oder konkav.

2) Dieser Satz ist bisher noch nirgends ausgesprochen, wie überhaupt die Bedeutung der  $K$ -Kurven für die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite bisher noch nicht behandelt wurde. Vgl. den Satz 43, S. 106 und die Ausführungen auf S. 136.

bezeichnet, wo auch  $R = R'$  sein kann. Es müssen nun die Richtungen, in denen der Berührungspunkt für die Anfangs- und Endlage (d. h. bzw. von  $R$  aus und nach  $R'$  hin) auf der tangierenden Geraden bei positiver Abrollung wandert, notwendig einander entgegengesetzt sein, da die Gerade sich ja bei der halbvollständigen Abrollung um den Winkel  $\pi$  gedreht hat. Da nun stets und nur beim Überschreiten eines Umkehrpunktes die Richtung, in der der Berührungspunkt auf der tangierenden Geraden wandert, sich umkehrt (Satz 28), so muß also notwendig eine ungrade Anzahl von Umkehrpunkten vorhanden sein.

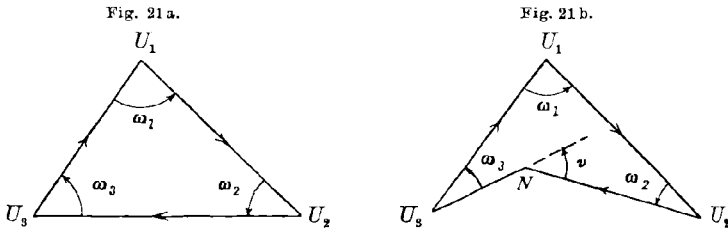
Um nun den zweiten Teil des Satzes 32 einzusehen, gehen wir (da ja sicher *ein* Umkehrpunkt vorhanden ist) von einer beliebigen tangierenden Geraden  $t$  eines Umkehrpunktes  $U$  aus, sodaß die Umgebung des Punktes  $U$  auf verschiedenen Seiten von  $t$  liegt (d. h. von einer Tangente der im Umkehrpunkte  $U$  zusammenstoßenden Bogen  $i, k$  oder, besonders wenn die Bogen  $i, k$  (in der Umgebung von  $U$ ) geradlinig sind, von einer der tangierenden Geraden, welche die Tangente des Bogens  $i$  bei ihrer positiven Drehung um  $U$  durchläuft, um in die Tangente des folgenden Bogens  $k$  überzugehen, vgl. Fig. 20a, b). Da die  $K$ -Kurve ganz im Endlichen liegt, kann man sich eine Parallele sowohl auf der einen, wie auf der andern Seite von  $t$  denken, welche die  $K$ -Kurve nicht trifft. Die einzelne Parallele kann dann immer sich parallel bleibend soweit auf  $t$  zu bewegt werden, bis sie in der Lage  $t_1$  zum ersten Male die  $K$ -Kurve wenigstens in *einem* Punkte  $U_1$  trifft. Diese Lage  $t_1$  ist notwendig von  $t$  verschieden, da ja die  $K$ -Kurve auf verschiedenen Seiten von  $t$  in der Umgebung von  $U$  liegt; sie kann auch nicht zu den tangierenden Geraden gehören, (d. h. zu den Geraden, welche man von einer beliebigen tangierenden Geraden ausgehend bei ihren halbvollständigen Abrollung erhält), da es ja stets nur *eine* tangierende Gerade in jeder Richtung gibt. Der Punkt  $U_1$  — ob daneben die Gerade  $t_1$  noch andere Punkte mit der  $K$ -Kurve gemein hätte, ist gleichgültig — kann also weder eine *volle* noch eine *konvexe* Ecke, speziell also auch kein gewöhnlicher Punkt (vgl. Satz 31a) sein, da die  $K$ -Kurve für jede nicht tangierende Gerade durch einen solchen Punkt auf verschiedenen Seiten derselben gelegen ist. Es bleibt nur übrig, daß der Punkt  $U_1$  ein Umkehrpunkt ist (wobei also die Gerade  $t_1$  zu den nicht tangierenden Geraden durch diesen Punkt gehört). Da wir nun von *beiden* Seiten her eine Parallelgerade sich der Geraden  $t$  nähern lassen können, so muß die  $K$ -Kurve außer  $U$  noch wenigstens zwei weitere, insgesamt also wenigstens *drei* Umkehrpunkte haben.

Im übrigen zeigen einfache Beispiele unmittelbar, daß eine  $K$ -Kurve *jede* ungrade Anzahl  $\geq 3$  von Umkehrpunkten besitzen kann; wir wer-

den solche Beispiele leicht gewinnen, indem wir uns nun weiter der wichtigen Frage zuwenden, wie man überhaupt alle  $K$ -Kurven einfach konstruieren kann.<sup>1)</sup>

### § 7. Konstruktion der $K$ -Polygone.

Wir wenden uns zunächst zur Konstruktion aller derjenigen  $K$ -Kurven, die sich allein aus geradlinigen Teilen zusammensetzen, also der  $K$ -Polygone.<sup>2)</sup> In Anlehnung an die Beispiele der Figuren 21 a, b (vgl. auch



die Figuren 2, 5 und 6) haben wir vorerst folgende allgemeine Betrachtung vorausszuschicken: Ist irgendein  $K$ -Polygon gegeben, so entspricht offenbar jedem Umlaufungssinn desselben ein bestimmter (und zwar gemeinsamer) Drehungssinn für die Winkel an den Ecken, da ja die Summe aller demgemäß gemessenen Winkel gleich  $\pi$  sein soll.<sup>3)</sup> (In

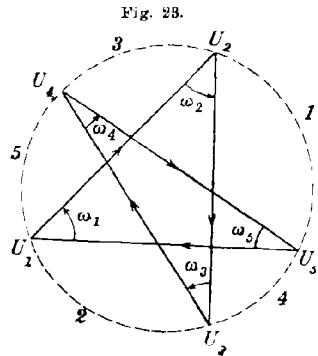
1) Es sei noch erwähnt, daß man die  $K$ -Kurven als spezielle „Doppelkurven“ im Sinne der Möbiusschen Doppelflächen auffassen kann. Denn wenn man die auf einer  $K$ -Kurve abrollende tangierende Gerade in der Ausgangslage mit einer bestimmten Richtung versieht und dazu als bestimmte Normalenrichtung die hieraus durch positive Drehung um  $90^\circ$  entstehende ansieht, so sind diese beiden Richtungen nach der halbvolständigen Abrollung der tangierenden Geraden dem ursprünglichen in der Ebene der Kurve entgegengesetzt oder mit anderen Worten. Wenn man allemal denjenigen an die  $K$ -Kurve anstoßenden Elementarstreifen mit Farbe anlegt, der durch die bestimmte Normalenrichtung angegeben wird, so ist man bei einmaliger Umlaufung der  $K$ -Kurve mit diesem Anlegen auf die andere Seite der  $K$ -Kurve gelangt; man kann also nicht wie etwa beim Kreis, zwei Seiten der Kurve unterscheiden und sie mit verschiedenen Farben anlegen. Natürlich gibt es außer den  $K$ -Kurven noch mannigfache andere solche „Doppelkurven“ wie z. B. die gespitzte Pascalsche Kurve (Kardioide), die ja nur einen Umkehrpunkt besitzt; doch haben wir hierauf nicht näher einzugehen.

2) Schon jetzt sei erwähnt, daß die einzelnen Eckpunkte die nach dem Satze 20, S. 82 definierten Teilbogen (vgl. auch die Anm. 1 S. 90) darstellen und die einzelnen Seiten die nach § 5 hinzugenommenen Verbindungsstrecken sind.

3) Wollte man bei einem  $K$ -Polygon mit  $m$  Ecken statt eines solchen zu einem bestimmten Umlaufsinne gehörenden Drehungssinnes, der die Winkelsumme  $\pi$  liefert, den umgekehrten Drehungssinn wählen, so würde diesem eine Winkelsumme von  $(m - 1)\pi$  zugehören. Denn für jede Ecke  $W$  gilt bei demselben Umlaufungssinn, aber verschiedenem Drehungssinne, daß die beiden zugehörigen

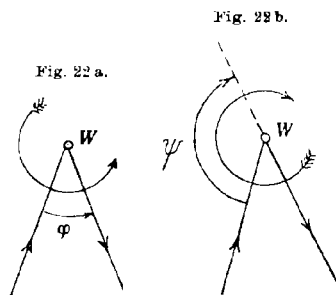
den Figuren 21a, b sind solche zueinander gehörende Umlaufungs- und Drehungssinne durch Pfeilspitzen angegeben; würde der Umlaufungssinn in den Figuren sich umkehren, so müßte auch der Drehungssinn sich umkehren). Wir wollen fernerhin wieder denjenigen Umlaufungssinn bevorzugen und als *positiv* bezeichnen, dem ein *positiver* Drehungssinn (d. h. ein dem Uhrzeigergange entgegengesetzter) zugehört. Im übrigen zeigen schon unsere Beispiele, daß die Ecken der *K*-Polygone konkave, d. h. Umkehrpunkte, oder konvexe sein können. (In Fig. 21 b sind z. B.  $U_i$  konkave,  $N$  eine konvexe Ecke).

Wir wollen jetzt zunächst alle diejenigen *K*-Polygone zu konstruieren suchen, deren *sämtliche Ecken Umkehrpunkte* sind. Einfache Beispiele geben uns die „*K-Kreispolgone*“. Man denke die volle Kreisperipherie in die ungrade Anzahl von  $n$  Teilen geteilt (Fig. 23 für  $n = 5$ ) und die aufeinander folgenden Bogen bei positiver Umlaufung des Kreises mit 1, 3, 5... $n$ , 2, 4, 6... $n - 1$  bezeichnet, die Teilpunkte selbst aber so mit  $U_i$ , daß der Index  $i$  die zwischen den beiden Ziffern der begrenzenden Bogen liegende Ziffer ist. Dann verbinde man die Punkte  $U_i$ , wie ihre Indizes aufeinander folgen, zu dem *K*-Polygon.<sup>1)</sup> Daß auf solche Weise die allgemeinsten *K*-Kreispolgone sich ergeben, ist leicht zu erkennen. Sind die Bogen des Kreises insbesondere alle einander gleich, so entstehen die *regulären K-Kreispolgone*.



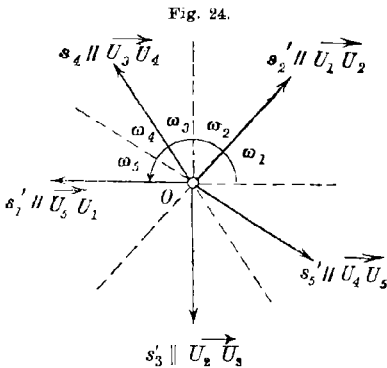
Denken wir nun ein allgemeines *K*-Polygon nur mit den Umkehrpunkten  $U_i (i = 1, 2 \dots n)$  als den aufeinander folgenden Ecken gegeben, so können wir durch Parallele  $s'_i$  zu den einzelnen Seiten  $s_i = U_{i-1} U_i$  die Winkel  $\omega_i = \angle U_{i-1} U_i U_{i+1}$  des Polygons auf demselben beliebig angenommenen Scheitelpunkt  $O$  übertragen. Das *K*-Polygon werde ferner in dem früher definierten positiven Sinne umlaufen, wobei die Ecken

Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  (Fig. 22 a, b) der Gleichung  $\varphi = \pi - \psi$  genügen; die Ecke  $W$  ist überdies (nach Satz 31 a, b S. 94) das eine Mal konkav (Fig. 22 a), das andere Mal konvex (Fig. 22 b). Es gibt also auch keine Polygone, die bei einem bestimmten Umlaufungssinn für *beide* Drehungssinne *K*-Polygone sind, denn es müßte ja  $(m - 1)\pi = \pi$ , d. h.  $m = 2$  sein.



1) Offenbar müssen je zwei einer beliebigen Seite des Polygons benachbarte Seiten sich stets schneiden. (Vgl. Satz 38, S. 102, und die sich anschließende Betrachtung).

in der Reihenfolge der Indizesziffern aufeinander folgen mögen, und die so erhaltenen Richtungen der einzelnen Seiten  $s_i = U_{i-1} \vec{U}_i$  seien ebenfalls auf die Parallelen  $s'_i$ , etwa durch Pfeilspitzen, übertragen (Fig. 24 für  $n = 5$ ). Die von  $O$  auslaufenden Halbstrahlen dieser Richtungen folgen dann bei positiver Um-



laufung von  $O$  in der Reihenfolge  $s'_1, s'_3, s'_5 \dots s'_n, s'_2, s'_4, s'_6 \dots s'_{n-1}$  aufeinander, (vgl. die Ziffern auf der Kreisperipherie der Fig. 23). Faßt man nun die Seiten  $s_i$  des  $K$ -Polygons der Größe und positiven Richtung nach als Kräfte durch den Punkt  $O$  auf, so sind diese Kräfte miteinander im Gleichgewicht, da ja ihr Kräftepolygon (eben das  $K$ -Polygon) „sich schließt“.

Aus dieser Überlegung ergibt sich nun die Konstruktion dieser Art von  $K$ -Polygone. Offenbar kann man, umgekehrt vorgehend wie soeben, die Figur des Punktes  $O$  zuerst zeichnen. Man sieht, daß man hierzu zunächst *die einzelnen Winkel  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mit der Summe  $\pi$  als beliebig gegebene* annehmen kann. (Man mag vielleicht noch die Gerade  $s'_1$  in der Figur horizontal und zwar von rechts nach links in positiver Richtung annehmen, was an sich ja unwesentlich ist). Es lassen sich dann auch zugleich die Pfeilspitzen der einzelnen Geraden  $s'_i$  unseren obigen Angaben gemäß einzeichnen. Der Gleichgewichtsbedingung aller Kräfte gemäß können nun weiter offenbar *nur  $n - 2$  Seiten* — im übrigen beliebig aus den  $n$  Seiten ausgewählt — *noch gegeben sein, jedoch auch nicht ganz willkürlich*. Vielmehr müssen die so sich ergebenden  $n - 2$  Kräfte noch die folgenden geometrischen Ungleichungen erfüllen:

**33.** Die von  $O$  ausgehende Resultante der  $n - 2$  Kräfte (oder der Strecken  $s'_i = \vec{U}_{i-1} \vec{U}_i$ ) muß den Scheitelwinkel des von den letzten beiden Halbstrahlen gebildeten konkaven Winkels innerlich (unter Ausschluß der Grenzen) durchschneiden.<sup>1)</sup>

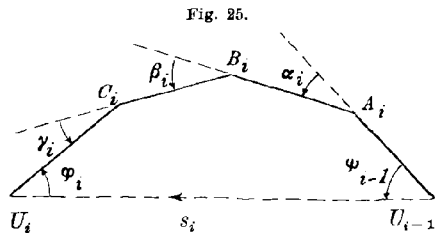
Zerlegt man diese Resultante dann in ihre beiden Komponenten längs den Geraden der letzten beiden Halbstrahlen, so sind die „Gegenkomponenten“ (d. h. die entgegengesetzt gleichen Strecken) die noch fehlenden Seiten des  $K$ -Polygons nach Größe und Richtung. Das aus

1) Für  $n = 3$  ist diese Bedingung stets von selbst erfüllt.

allen Seiten und Winkeln konstruierte Polygon schließt sich dann und ist das gesuchte  $K$ -Polygon.

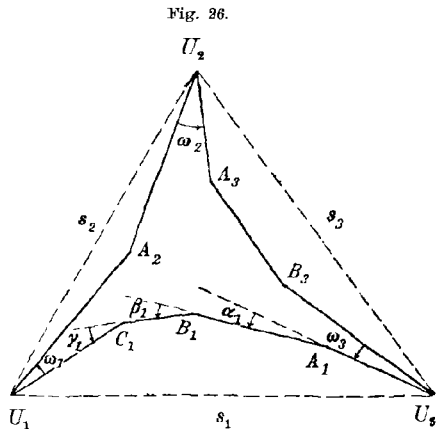
Wir gehen nun zur Konstruktion der  $K$ -Polygone mit  $n$  Umkehrpunkten  $U_i$  und einer beliebigen Zahl zwischen je zweien  $U_{i-1}, U_i$  von diesen verteilten konvexen Ecken  $A_i, B_i, C_i \dots$  über. Wir denken wieder für einen Augenblick irgendein solches  $K$ -Polygon gegeben und durch Zerschneiden in den Punkten  $U_i$  in die  $n$  gebrochenen Linienzüge zerlegt. Es seien dann noch  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \dots$  die Winkel der konvexen Ecken des Linienzuges  $U_{i-1}U_i$  und  $\psi_{i-1}, \varphi_i$  die Winkel, welche die erste Seite dieses Linienzuges mit der Sehne  $s_i = U_{i-1}U_i$  und diese mit der letzten Seite bildet (Fig. 25). Es gilt hier stets die Gleichung:

$$(13) \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \dots = \psi_{i-1} + \varphi_i.$$



34. Jeder dieser Linienzüge kann sich offenbar nicht selbst durchschneiden, da ja die Summe aller Winkel  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \dots < \pi$  ist.

Um nunmehr ein solches  $K$ -Polygon zu konstruieren, kann man zunächst alle Winkel  $\omega_i$  der Umkehrpunkte  $U_i$  und alle Winkel  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \dots$  der konvexen Ecken aller einzelnen Linienzüge  $U_{i-1}U_i$  mit der Gesamtsumme  $\pi$  gegeben denken, ferner alle Seiten von beliebigen  $n - 2$  Linienzügen (wodurch dann auch diese  $n - 2$  Linienzüge selbst und ihre Sehnen  $s_i$  vollständig bestimmt sind), wobei nur wieder die Befriedigung von Ungleichungen vorgeschrieben ist, wie wir sogleich sehen werden. Von den zu den beiden letzten Sehnen gehörenden Linienzügen kann man endlich noch die Verhältnisse der zu jedem einzelnen gehörenden Seiten geben.



Wir bilden dann die Winkel  $\omega'_i = \omega_i + \varphi_i + \psi_i$  (für  $i = 1, 2 \dots n$ ), für die ebenfalls  $\Sigma \omega'_i = \pi$  gilt. Dann kann man zunächst ein  $K'$ -Polygon nur mit den Umkehrpunkten  $U_i$  als Ecken, mit den entsprechenden Winkeln  $\omega'_i$  und den  $n - 2$  bekannten Seiten  $s_i = U_{i-1}U_i$  konstruieren.

Als die zu befriedigenden Ungleichungen erkennen wir dann sogleich diejenigen, die hierbei nach unseren früheren Betrachtungen (Satz 33) eben

von den  $n - 2$  Seiten  $s_i$  zu erfüllen sind. Es sind hiermit nun auch die noch fehlenden zwei Sehnen  $s_i$  bestimmt und dann auch die zu ihnen gehörenden Linienzüge. An die Stelle der gegebenen  $n - 2$  Sehnen haben wir schließlich noch die zugehörigen gebrochenen Linienzüge zu setzen, um das vollständige  $K$ -Polygon zu erhalten. (Ein Beispiel gibt Fig. 26 für  $n = 3$ ). Man erkennt noch leicht:

35. Je zwei aufeinander folgende Linienzüge  $s_{i-1}$ ,  $s_i$  können sich nicht schneiden; für  $n = 3$  kann also überhaupt das  $K$ -Polygon sich nicht selbst schneiden.

### § 8. Konstruktion der $K$ -Kurven.

Nachdem wir gelernt haben, die  $K$ -Polygone zu konstruieren, ist auch die Konstruktion der  $K$ -Kurven mit  $n$  Umkehrpunkten  $U_i$  und einer beliebigen Zahl von konvexen Ecken (und vollen Ecken) nicht mehr schwierig, da ja ein Kurvenbogen zwischen zwei Umkehrpunkten als ein gebrochener Linienzug mit unendlich vielen Seiten aufzufassen ist. Wir wollen demgemäß die  $K$ -Kurve durch Zerschneiden in den Umkehrpunkten  $U_i$  in die endliche Zahl einzelner Bogen zerlegt denken und wollen diese Bogen weiterhin als die *konvexen Bogen*<sup>1)</sup> der  $K$ -Kurve bezeichnen. Wir können dann analog unseren Ergebnissen im § 7 zunächst als gegeben denken einmal die Winkel  $\omega_i$  der  $n$  Umkehrpunkte  $U_i$ , sodann die Winkel  $\psi_{i-1}$ ,  $\varphi_i$ , welche für jeden konvexen Bogen  $U_{i-1}U_i$  die Tangente in dem Punkte  $U_{i-1}$  mit der Sehne  $s_i = U_{i-1}U_i$  und diese mit der Tangente in dem Punkte  $U_i$  bilden, wobei die Summe aller genannten Winkel, also  $\sum(\omega_i + \varphi_i + \psi_i)$ , gleich  $\pi$  ist, endlich  $n - 2$  Sehnen selbst, die dem Folgenden gemäß wieder den im Satze 33 angegebenen Ungleichungen zu genügen haben.

Aus diesen Stücken läßt sich dann das „Skelett der  $K$ -Kurve“ konstruieren, d. h. das aus den Sehnen gebildete  $K$ -Polygon (ohne konvexe Ecken) mit den Umkehrpunkten  $U_i$ , deren Winkel  $\omega'_i = \omega_i + \varphi_i + \psi_i$  sind. Hierdurch sind auch wieder die beiden noch fehlenden Sehnen bestimmt.

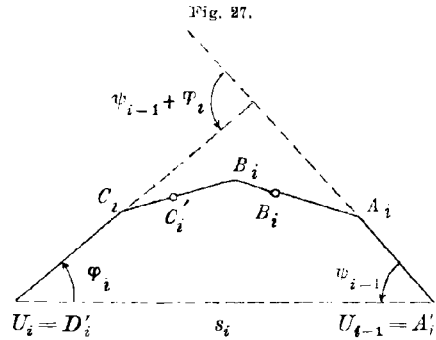
Weiter können wir die zu den Sehnen  $s_i$  gehörenden konvexen Bogen  $U_{i-1}U_i$  entweder von vornherein als gegeben annehmen oder sie auch einzeln besonders konstruieren (natürlich beidemal mit den erwähnten Winkeln  $\psi_{i-1}$ ,  $\varphi_i$  in den Endpunkten  $U_{i-1}$ ,  $U_i$ ).

Sollen die konvexen Bogen von vornherein als Bogen irgendwelcher Kurven gegeben sein, so kann natürlich für die zwei zuletzt bestimmten

1) Dieselben sind ersichtlich nicht identisch mit dem im Satze 20, S. 82 eingeführten Teilbogen der  $K$ -Kurve; vgl. auch die zweite Anm. S. 96.



Sehnen  $s_i$  dies nur bis auf die zuzulassende ähnliche Veränderung dieser konvexen Bogen möglich sein, um diese eben den durch das Skelett der  $K$ -Kurve erhaltenen beiden Sehnen anzupassen. Im übrigen hat jeder dieser konvexen Bogen  $U_{i-1}U_i$ , der dann beliebig viele konvexe Ecken (und volle Ecken) besitzen kann, ja an sich nur die Eigenschaft zu erfüllen, daß die auf ihm abrollende tangierende Gerade sich stets in demselben (positiven) Sinne dreht, nämlich insgesamt um den Winkel  $\psi_{i-1} + \varphi_i$ , den die tangierenden Geraden in den Endpunkten  $U_{i-1}, U_i$  mit einander bilden (siehe Fig. 27). Diese einzelnen konvexen Bogen hat man indem Skeletteinfach an die Sehnen  $s_i$  nach den richtigen Seiten hin anzulegen, um die  $K$ -Kurve zu erhalten.



Will man indes die konvexen Bogen etwa nach der Konstruktion des  $K$ -Polygons besonders konstruieren, so kann man zunächst noch über jeder Sehne  $s_i$  einen beliebigen gebrochenen Linienzug  $U_{i-1}A_iB_iC_i \dots U_i$  gemäß unseren Angaben im § 7 (vgl. Fig. 25) zeichnen, der gleichsam als ein „umbeschriebener“ Linienzug des zugehörigen konvexen Bogens gilt. Weiter kann man auf jeder Seite des Linienzuges einen Punkt  $A_i', B_i' \dots$  angeben, (der auch mit einem Endpunkte der Seite zusammenfallen kann), mit der Festsetzung, daß der einzuziehende Kurvenbogen in diesen Punkten die Seiten berühren soll.<sup>1)</sup> (Soll beispielsweise der konvexe Bogen nicht mit einer Strecke beginnen oder endigen, so muß der Berührungspunkt auf der ersten oder letzten Seite natürlich im Punkte  $U_{i-1}$  bzw.  $U_i$  selbst gewählt werden.) Die Wahl der einzelnen kleinen Bogen, die den ganzen konvexen Bogen zusammensetzen, (selbstverständlich mit der Bedingung daß die tangierende Gerade sich bei ihrer Abrollung stets in demselben Sinne dreht) kann dann natürlich eine unendlich mannigfaltige sein.

Beispielsweise kann man, wenn  $\psi_{i-1} = \varphi_i$  ist und der Linienzug nur aus zwei Seiten besteht, einen Kreisbogen über  $s_i$  wählen, mit einem diesem Winkel gleichen Peripheriewinkel, oder bei beliebigen Winkeln  $\psi_{i-1}, \varphi_i$  einen Parabelbogen, der durch die Punkte  $U_{i-1}, U_i$  und die durch die Winkel  $\psi_{i-1}, \varphi_i$  gegebenen Tangenten in ihnen bestimmt ist, oder in der Figur 27 drei Parabelbogen, welche je durch 2 aufeinander folgende der Punkte  $U_{i-1} = A_i', B_i', C_i', U_i = D_i'$  und die zugehörigen Seiten

1) Die (nicht mit den Endpunkten zusammenfallenden) Punkte  $A_i', B_i' \dots$  sind dann ev. als volle Ecken anzusprechen. (Vgl. Satz 31a, S. 94).

als Tangenten bestimmt sind. Noch allgemeiner kann man für die gegebenen Größen  $\psi_{i-1}$ ,  $\varphi_i$ ,  $s_i$  zunächst von einer beliebigen, an sich geeigneten Kurve (Ellipse, logarithmischen Spirale, Kettenlinie) einen konvexen Bogen auswählen, deren Tangenten in den Endpunkten mit der zugehörigen Sehne bez. die Winkel  $\psi_{i-1}$ ,  $\varphi_i$  bilden, und hat dann diesen Bogen vor dem Anlegen an die gegebene Sehne  $s_i$  ähnlich so zu verändern, daß die Sehne des neuen Bogens die Größe  $s_i$  besitzt.

Es sei noch der den Sätzen 34 u. 35 der  $K$ -Polygone analoge Satz erwähnt:

**36.** *Ebenso wie jeder konvexe Bogen  $U_{i-1}U_i$  sich nicht selbst schneiden kann, so können auch je zwei aufeinander folgende konvexe Bogen einander nicht schneiden.*

Ferner gilt auch folgender Satz:

**37.** *Je zwei beliebige konvexe Bogen einer  $K$ -Kurve können sich höchstens in einem Punkte schneiden.*

Denn zwei solche konvexe Bogen können weder sich berühren, da sie keine gemeinsame tangierende Gerade haben können, noch sich in zwei Punkten schneiden, da sie sonst zu der gemeinsamen Sehne parallele tangierende Gerade hätten, was nicht möglich ist.

Was nun überhaupt die *Gesamtheit aller Schnittpunkte einer  $K$ -Kurve* betrifft, (d. h. solcher Punkte, in denen sich irgend zwei konvexe Bogen schneiden), so soll hierbei zunächst folgende Festsetzung gelten: Es soll jedesmal als zwei Schnittpunkte gerechnet werden, wenn ein Umkehrpunkt  $U_i$  im Innern eines andern konvexen Bogens liegt und als vier (bzw.  $\frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot 4$ ) Schnittpunkte, wenn zwei (bzw.  $k$ ) Umkehrpunkte sich decken. (Letzteres ist z. B. leicht durch eine einfache Abänderung der Fig. 39a S. 115 zu erreichen). Dann folgt sogleich:

**38.** *Eine beliebige  $K$ -Kurve mit  $n$  Umkehrpunkten  $U_i$  besitzt höchstens  $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$  Schnittpunkte, und zwar gibt es für jede Zahl  $n$  auch stets  $K$ -Kurven mit dieser Maximalzahl von Schnittpunkten.*

Diese Maximalzahl von Schnittpunkten ergibt sich einfach aus der Überlegung, daß der einzelne konvexe Bogen höchstens die  $(n-3)$  von ihm verschiedenen und ihm nicht benachbarten konvexen Bogen je einmal schneiden kann. Die Maximalzahl der Schnittpunkte wird aber z. B. wirklich erreicht von den regulären  $K$ -Kreis-Polygonen.

Was nun eine etwaige Minimalzahl von Schnittpunkten betrifft, die jede  $K$ -Kurve mit  $n$  Umkehrpunkten besitzen muß, so ist es leicht, wenigstens folgenden Satz zu erkennen:

**39.** *Es lassen sich stets  $K$ -Kurven mit  $n$  Umkehrpunkten konstruieren, die  $\frac{n-3}{2}$  Schnittpunkte besitzen.<sup>1)</sup>*

Man gehe etwa aus von einem  $K$ -Polygon mit drei Umkehrpunkten und  $\frac{n-3}{2}$  beliebig auf die konvexen Bogen verteilten konvexen Ecken, wobei  $n$  eine beliebige ungerade Zahl  $\geq 3$  sei, wie z. B. die Figur 25 (S. 99) für den Bogen  $U_{i-1} U_i$  die drei konvexe Ecken  $A_i, B_i, C_i$  besitzt. Um jeden konvexen Eckpunkt (vgl. Satz 35, S. 100) läßt sich dann ein Kreis mit hinreichend kleinem Radius so beschreiben, daß in seinem Innern von dem  $K$ -Polygon nur die Stücke der von dem Eckpunkt ausgehenden beiden Seiten liegen. Dann verlängere man bei jedem solchen Eckpunkt (vgl. den Eckpunkt  $A$  der Figur 28) diese beiden Seiten über den Eckpunkt hinaus je um eine Strecke, die kleiner als der Radius des Kreises ist, und verbinde die Endpunkte dieser Verlängerungen durch eine neue Seite. So entsteht ein  $K$ -Polygon mit  $n$  Umkehrpunkten (ohne konvexe Ecken) und  $\frac{n-3}{2}$  Schnittpunkten.

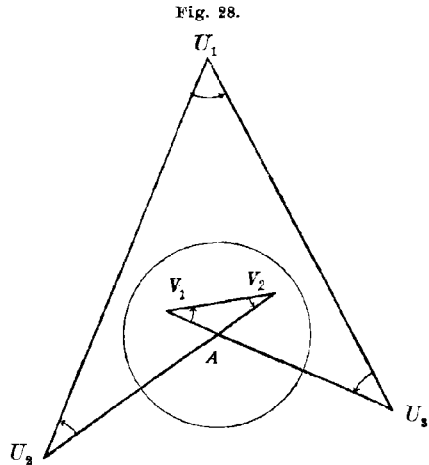


Fig. 28.

Oder aber man gehe von einem gewöhnlichen Dreieck  $U_1 U_2 U_3$  aus. Und man verlängere bei einer Ecke, z. B. bei  $U_1$  die beiden Seiten  $U_2 U_1$  und  $U_3 U_1$  über diese hinaus um beliebige Strecken (Fig. 29) und trage an diese Verlängerungen in ihren Endpunkten,  $V_2$  und  $V_3$ , zwei Winkel an, deren Summe kleiner als der Winkel der fortfallenden Ecke  $U_1$  ist, und zwar bzw. je nach derselben Drehungsrichtung hin, nach der der Winkel  $\widehat{U}_1$  an den Seiten  $U_2 U_1$  und  $U_3 U_1$  anliegt. Die freien Schenkel der angetragenen Winkel mögen sich in  $V_1$  schneiden. Dann ist  $V_3 V_1 V_2 U_2 U_3$  das an die Stelle des Dreiecks tretende neue  $K$ -Polygon. Die genannten Verlängerungen sollen jedoch so groß genommen werden, was stets möglich ist, daß die freien Schenkel der Winkel  $\widehat{V}_2$

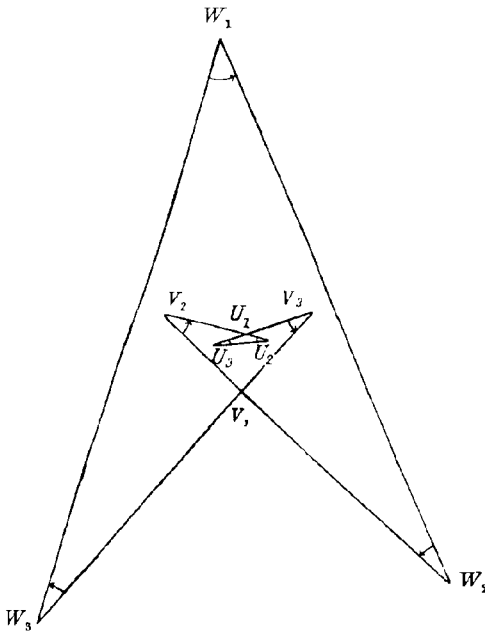
1) Es läßt sich auch folgender Satz vermuten:

**39a.** *Eine beliebige  $K$ -Kurve mit  $n$  Umkehrpunkten besitzt mindestens  $\frac{n-3}{2}$  Schnittpunkte. Überhaupt sind stets und nur die durch folgenden Ausdruck gegebenen Anzahlen von Schnittpunkten möglich:*

$$\frac{n-3}{2} + 2m, \text{ wo } m \text{ eine positive ganze Zahl } \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \text{ ist.}$$

und  $\widehat{V}_3$  die Seiten des ursprünglichen Dreiecks  $U_1 U_2 U_3$  nicht durchschneiden. Bei einer der Ecken  $V_1, V_2, V_3$  des neuen  $K$ -Polygons verfährt man dann ebenso wie soeben bei der Ecke  $U_1$  und so fort.

Fig. 29.



Hat man diesen Prozeß  $\binom{n-3}{2}$ -mal (wobei  $n$  wieder eine ungerade Zahl  $\geq 3$  sei) ausgeführt, so ist ein  $K$ -Polygon mit  $n$  Umkehrpunkten (ohne konvexe Ecken) und  $\frac{n-3}{2}$  Schnittpunkten entstanden. (Wählt man die einzelne Ecke, deren Seiten man über jene hinaus verlängern will, stets auf derselben Seite des ursprünglichen Dreiecks, etwa stets auf  $U_1 U_2$ , so ist das entstandene  $K$ -Polygon ein solches, dessen  $\frac{n-3}{2}$  Schnittpunkte sämtlich auf einer Seite,  $U_1 U_2$ , liegen.)

Natürlich lassen sich die soeben genannten beiden Prozesse der Erweiterung eines  $K$ -Polygons auf eine höhere Zahl von konvexen

Bogen auch miteinander kombinieren und noch mannigfach variieren. Sie gewähren jedenfalls über ihren bisherigen Zweck hinaus auch einen tiefen Einblick in die große Mannigfaltigkeit der  $K$ -Polygone und der aus ihnen abzuleitenden  $K$ -Kurven.

§ 9. Die  $C'$ -Kurve.

Im Anschluß an den Eingang des § 4, S. 78 wenden wir uns nun weiter zu der Untersuchung der  $C'$ -Kurve, die zu einer jeden  $C$ -Kurve gehört. Die  $C'$ -Kurve war dort im Satz 17 bereits definiert als der Ort für die Mitte  $M$  der Stütznormalen  $P_1 P_2$  einer als gegeben gedachten  $C$ -Kurve. Da der einzelne Punkt  $M$  sich durch Abtragen von  $\frac{b}{2}$  auf der Stütznormalen sowohl von  $P_1$  wie von  $P_2$  aus ergibt, so folgt sogleich:

40. Eine solche  $C'$ -Kurve ist in doppelter Weise die Äquidistante zu der  $C$ -Kurve und damit auch eine Evolvente der zur  $C$ -Kurve gehörenden  $K$ -Kurve.<sup>1)</sup>

1) Der triviale Fall, daß die  $C$ -Kurve ein Kreis ist, sei für die ganze Folge ausgeschlossen.

In Rücksicht auf die für die  $C$ -Kurve gemachten Annahmen I, II, III (S. 71, 78 u. 82), die ja für die  $K$ -Kurve den Satz 24, S. 86 zur Folge hatten, ergeben sich für die  $C'$ -Kurve analoge Einschränkungen. Diese brauchen wir indes hier nicht in extenso anzuführen; sind doch bei den einzelnen durch die Gleichungen 1a, b, S. 71 gegebenen Teilbogen der  $C$ -Kurve die zugehörigen Teilbogen der  $C'$ -Kurve in den auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Koordinaten  $x, \bar{y}$  einfach durch die Gleichungen:

$$(14 \text{ a, b}) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x - \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha, \\ \bar{y} &= y + \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha \quad (\text{vgl. die Formeln (6) S. 84}) \end{aligned}$$

und der Krümmungsradius  $\bar{\rho}$  des Teilbogens der  $C'$ -Kurve durch die Gleichung

$$(15) \quad \bar{\rho} = \rho - \frac{b}{2}$$

gegeben.<sup>1)</sup>

**41.** Jede  $C'$ -Kurve besteht hiernach aus einem einzigen im Endlichen verlaufenden, in sich geschlossenen Linienzuge. Dieser setzt sich zusammen aus einer endlichen Zahl einzelner Bogen mit stetig und zwar im selben Drehungssinn sich ändernder Tangente und stetig sich änderndem Krümmungsradius. Den Sätzen 4, S. 73 u. 18, S. 80 entsprechend sind jedoch geradlinige Strecken und Wendepunkte, überhaupt Punkte mit mehrfach berührender Tangente, ausgeschlossen; der Krümmungsradius für jeden Punkt der  $C'$ -Kurve ist vielmehr absolut genommen stets  $\leq$  einer angebbaren endlichen Zahl  $b_1$  (nämlich bei einer gegebenen  $C$ -Kurve  $\leq \frac{b}{2}$ ).

Die einzelnen Bogen (vgl. den § 5, insbesondere den Satz 25, S. 90) setzen sich tangential oder in Spitzenecken oder in konkaven oder konvexen Ecken<sup>2)</sup> (mit gleicher oder verschiedener Krümmung) aneinander. In jeder vorgegebenen Richtung besitzt die  $C'$ -Kurve nur eine einzige „tangierende Gerade“. Rollt nämlich eine Gerade auf der  $C'$ -Kurve ab, so dreht sie

1) Es ergeben sich z. B. für die ersten Ableitungen  $\bar{x}', \bar{y}'$  die Gleichungen:

$$x' = x' \cdot \frac{\bar{\rho}}{\rho} \quad \text{und} \quad \bar{y}' = y' \cdot \frac{\bar{\rho}}{\rho}$$

(wegen  $\rho = 0$  vgl. S. 79, insbesondere auch den Schluß der Anm. 3 daselbst).

2) Ein Beispiel einer  $C'$ -Kurve mit konkaven Ecken gibt Fig. 5, S. 70. Ein Beispiel einer (ebenfalls aus Kreisbogen zusammengesetzten)  $C'$ -Kurve mit einer konvexen Ecke können wir leicht durch folgende Abänderung der Fig. 30, S. 107 erhalten. An der Stelle der Seite  $U_4 U_5$  des Fünfecks  $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$  soll die Parallele durch den Punkt  $X$  treten. Zu diesem neuen  $K$ -Polygon gehört dann ersichtlich eine  $C'$ -Kurve, die durch  $U_2$  geht und dort eine konvexe Ecke besitzt.

sich (auch bei den Ecken) nicht nur in demselben Sinne, sondern sie hat sich insgesamt um den Winkel  $\pi$  gedreht, wenn der „Berührungspunkt“ die  $C'$ -Kurve grade einmal umlaufen hat (d. h. bei halbvollständiger Abrollung der tangierenden Geraden).

**42.** Diese aus den Eigenschaften der  $C$ -Kurve sich als notwendig ergebenden Eigenschaften der  $C'$ -Kurve sind nun jedoch umgekehrt auch hinreichend dafür, daß zu einer jeden solchen  $C'$ -Kurve Äquidistanten existieren, die Kurven konstanter Breite sind. Sicher sind alle diejenigen Äquidistanten Kurven konstanter Breite, die sich durch Abtragung einer Strecke  $MP_1 = MP_2 = \frac{b}{2} > b_1$  vom einzelnen Kurvenpunkt  $M$  einer derartigen  $C'$ -Kurve aus nach beiden Richtungen der Stütznormalen ergeben. Der Beweis dafür ist ganz analog zu führen wie der entsprechende bezüglich der  $K$ -Kurven auf S. 91 und braucht daher hier nur angedeutet zu werden. Bei halbvollständiger Abrollung der tangierenden Geraden auf der  $C'$ -Kurve geht ja der Punkt  $P_1$  in den Punkt  $P_2$  über. Die von  $P_i$  beschriebene geschlossene Kurve besitzt weder Ecken noch Spitzen und hat für die Stellen  $P_1$  und  $P_2$  denselben innerhalb  $P_1P_2 = b$  gelegenen Krümmungsmittelpunkt. Ferner hat sie in jeder vorgegebenen Richtung der „Doppelnormalen“  $P_1P_2$  entsprechend nur zwei Tangenten. Sie ist daher all diesem gemäß mit ihrer Umhüllungskurve identisch und damit eine Kurve konstanter Breite  $b$ .

Der Vergleich des Satzes 41 mit dem Satze 25, S. 90 zeigt nun, daß jede  $C'$ -Kurve der Art nach auch als eine  $K$ -Kurve gelten kann (aber im allgemeinen nicht umgekehrt, der die  $C'$ -Kurven ja z. B. im Gegensatz zu den  $K$ -Kurven nicht geradlinige Strecken oder Punkte mit verschwindender Krümmung enthalten). Es gelten also alle für die  $K$ -Kurven gefundenen Eigenschaften und Konstruktionen entsprechend auch für die  $C'$ -Kurven. Insbesondere gilt dem Satze 32, S. 94 gemäß:

**43.** Auch jede  $C'$ -Kurve besitzt stets eine ungrade Anzahl von Umkehrpunkten und zwar mindestens drei.<sup>1)</sup>

Auf die Konstruktion der  $C'$ -Kurven brauchen wir daher auch nicht näher einzugehen. Wie in den §§ 7 u. 8 gezeigt ist, hat man zuerst als das Skelett der  $C'$ -Kurve ein Polygon mit den richtigen Winkeln  $\alpha'_i$  in den Umkehrpunkten und den  $n - 2$  gegebenen Bogensehnen  $s_i$  zu zeichnen, wodurch auch die beiden letzten Bogensehnen bestimmt sind, und dann alle Bogensehnen durch die noch besonders zu konstruierenden oder von vornherein gegebenen Kurvenbogen zu ersetzen.

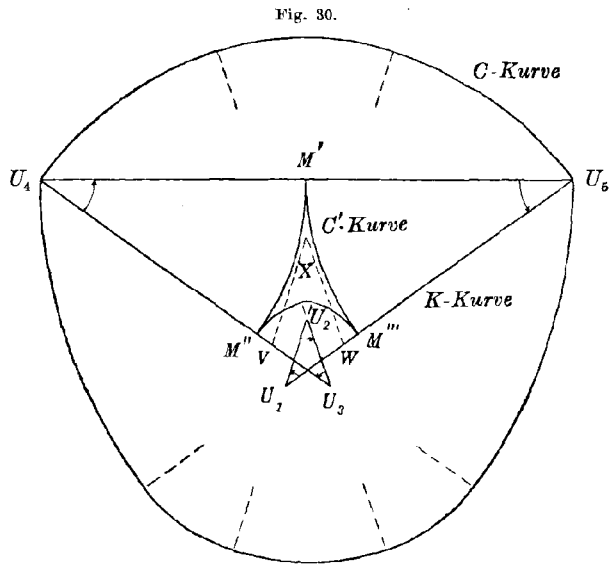
1) Vgl. auch die erste Anm. S. 96; auch die  $C'$ -Kurven sind „Doppelkurven“. — Der Satz 43 ist zuerst von Herrn Hurwitz, a. a. O. S. 388 aufgestellt.

§ 10. Die Beziehungen zwischen der  $K$ -Kurve und ihrer  $C'$ -Kurve.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie zu einer gegebenen  $K$ -Kurve eine zugehörige  $C'$ -Kurve sich ergibt. Wir denken daran (vgl. den Satz 26, S. 91), daß die tangierende Gerade der  $K$ -Kurve bei halbvollständiger Abrollung in der Endlage mit der Anfangslage in umgekehrter Richtung zur Deckung kommt, wobei die zugehörigen Berührungspunkte  $R, R'$  auf der Geraden im allgemeinen voneinander verschieden sind. Es muß dann notwendig der Punkt  $M$  auf der Geraden, der die  $C'$ -Kurve beschreibt, der Mittelpunkt von  $RR'$  sein, d. h.:

44. Zu einer gegebenen  $K$ -Kurve gehört stets eine und nur eine  $C'$ -Kurve, wobei diese in der angegebenen Weise zu konstruieren ist. (Man vergleiche die im § 1 angegebenen Beispiele der  $C$ -Kurven, Fig. 1—6, bei denen die  $K$ - und  $C'$ -Kurven stets hinzugefügt sind.)

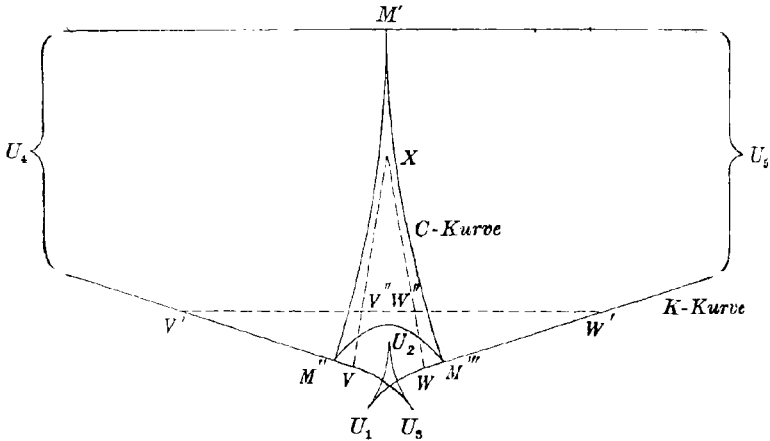
Es liegt jetzt die Frage nahe, ob die  $K$ -Kurve und die zu ihr gehörende  $C'$ -Kurve stets gleichviel Umkehrpunkte besitzen (vgl. Satz 29, S. 92). Achtet man auf die Richtungen der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve und der jedesmal zugehörigen zu jener normalen tangierenden Geraden der  $C'$ -Kurve, so erkennt man leicht: Ein Umkehrpunkt der  $C'$ -Kurve entsteht stets dann und nur dann bei der Abrollung der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve, wenn der (die  $C'$ -Kurve beschreibende) Punkt  $M$  dieser Geraden den einzelnen konvexen Bogen  $s_i$  (vgl. § 8) innerhalb (unter Ausschluß der Endpunkte  $U_{i-1}, U_i$  von  $s_i$ ) trifft. Naturgemäß kann der Punkt  $M$  jeden konvexen Bogen höchstens einmal erreichen. Es kann also die  $C'$ -Kurve nicht mehr Umkehrpunkte als die  $K$ -Kurve besitzen. Ein einfaches Beispiel zeigt jedoch, daß sehr wohl die  $C'$ -Kurve weniger Umkehrpunkte als die  $K$ -Kurve besitzen kann. Natürlich muß dann die Anzahl der Umkehrpunkte der  $K$ -Kurve (den Sätzen 32, S. 94 und 43 gemäß) größer als 3, mindestens 5 sein.



**Beispiel VII:** Man gehe aus von einem regulären Fünfeck zweiter Art  $U_1 U_2 U_3 V W$  (Fig. 30), lasse die eine Seite  $VW$  fort und verlängere  $U_3 V$  und  $U_1 W$  bzw. über  $V_1, W$  hinaus um dieselbe Strecke  $VU_4 = WU_5$  bis  $U_4$  und  $U_5$  und ziehe die Verbindungslinie  $U_4 U_5$ ; jedoch soll  $VU_4 = WU_5 > \frac{U_4 U_5}{2}$  sein. (Zieht man durch  $V, W$  bzw. die Parallelen zu  $U_1 U_2$  und  $U_3 U_2$  und bezeichnet ihren Schnitt mit  $X$ , so muß, damit diese Ungleichungen erfüllt sind,  $U_4 U_5$  die Geraden  $VX$  und  $WX$  außerhalb dieser Strecken durchschneiden). Das Polygon  $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$  soll dann die gegebene  $K$ -Kurve vorstellen. Der die  $C'$ -Kurve beschreibende Punkt  $M$  ist dann der Mittelpunkt  $M'$  von  $U_4 U_5$ , wenn die auf der  $K$ -Kurve abrollende Gerade mit  $U_4 U_5$  zusammenfällt, und die  $C$ -Kurve selbst besteht aus den beiden Kreisbögen  $\widehat{M'M''}$  und  $\widehat{M'M''}$  und dem aus drei Kreisbogen zusammengesetzten Bogen  $\widehat{M''M''}$ , besitzt also nur die drei Umkehrpunkte  $M', M'', M''$ .<sup>1)</sup>

1) **Beispiel VIIa:** Anstatt von dem Fünfeck zweiter Art der Fig. 39 kann man auch von einem regulären Kreisbogenfünfeck zweiter Art  $U_1 U_2 U_3 V W$  (Fig. 31) ausgehen, das sich aus fünf gleichen Kreisbögen zusammensetzt, wobei etwa die aufeinander folgenden Bogen sich berühren. Man kann dann wieder den Bogen

Fig. 31.



$VW$  fortlassen, dafür die Tangenten in den Punkten  $V, W$  hinreichend weit bis  $U_4 U_5$  fortsetzen und endlich die Strecke  $U_4 U_5$  hinzufügen. Den dieselbe Rolle wie bei der Fig. 30 spielenden Punkt  $X$  gewinnt man hierbei, wenn man zunächst eine beliebige Parallele  $V'W'$  zu  $VW$  in  $V'$  und  $W'$  mit den Tangenten zum Schnitt bringt, darauf  $V'V'' = V'V''$  und  $W'W'' = W'W''$  auf diesen Parallelen abträgt und endlich  $VV''$  und  $WW''$  zum Schnitt bringt. (Natürlich lassen sich auch die Strecken  $VU_4, WU_5$  und  $U_4 U_5$  der Fig. 31 in geeigneter Weise noch durch Kreisbogen ersetzen.)



Wann besitzt die  $C'$ -Kurve nun *ebensoviele Umkehrpunkte* wie die  $K$ -Kurve? Der Punkt  $M$  der auf der  $K$ -Kurve abrollenden tangierenden Geraden muß dann *jeden* der  $n$  konvexen Bogen  $s_i = U_{i-1}U_i$  innerlich erreichen, so daß also die geforderten  $n$  Umkehrpunkte  $M_i$  der  $C'$ -Kurve sich auf die  $n$  Bogen  $s_i$  verteilen. Diese Punkte  $M_i$  zerlegen dann jeden Bogen  $s_i$  in die beiden Teile  $l_{i-1} = U_{i-1}M_i$  und  $l_i = M_iU_i$ , wobei eben die in einem Umkehrpunkte  $U_{i-1}$  zusammenstoßenden Teile der Bogen  $s_{i-1}$  und  $s_i$  notwendig einander gleich sind. Wir gewinnen daher die  $n$  Gleichungen für die  $n$  Unbekannten  $l_i$ :

$$(16) \quad s_i = l_{i-1} + l_i, \quad (i=1, 2 \dots n)$$

wobei  $l_0 = l_n$  und die Determinante der Gleichungen gleich 2 ist. Ihre Lösungen sind:

$$(17) \quad l_i = \frac{s_{i+1} - s_{i+2} + s_{i+3} \mp \dots + s_i}{2}, \quad (i=1, 2 \dots n)$$

wobei zugleich  $s_{n+1} = s_1$  usw. ist.

**45.** Die notwendige und hinreichende Bedingung, die eine  $K$ -Kurve erfüllen muß, damit die  $C'$ -Kurve ebensoviele Umkehrpunkte hat wie die  $K$ -Kurve, ist daher die, daß alle diese  $n$  Werte  $l_i$  positiv (unter Ausschluß der 0) sind.

Wir können dieses Resultat auch noch anschaulicher gestalten. Man bilde, was die beiden Teile  $l_{i-1}$  und  $l_i$  von  $s_i$  betrifft, die Summen:

$$(18a, b) \quad \begin{aligned} \Sigma_1^i &= s_{i+1} + s_{i+3} + \dots + s_{i-2}, \\ \Sigma_2^i &= s_{i+2} + s_{i+4} + \dots + s_{i-1}, \end{aligned}$$

d. h. von den Bogen  $s_1, s_2 \dots s_i, s_{i+1} \dots s_n$  lasse man den Bogen  $s_i$  selbst fort und fasse die übrigen in zwei Summen  $\Sigma_1^i$  und  $\Sigma_2^i$  zusammen, die aus dem nachfolgenden Bogen  $s_{i+1}$  bzw. dem dann folgenden Bogen  $s_{i+2}$  und den jedesmal übernächsten Bogen bestehen bei zyklischer Reihenfolge aller Bogen. Ist dann zugleich:

$$(19a, b) \quad \text{und} \quad \begin{aligned} s_i + \Sigma_1^i &> \Sigma_2^i \\ s_i + \Sigma_2^i &> \Sigma_1^i, \end{aligned}$$

so sind die *beiden* Größen  $l_{i-1}$  und  $l_i$  der Gleichungen (16), die beiden Teile von  $s_i$ , positiv.

**46.** Die oben angegebene Bedingung kommt also geometrisch darauf hinaus, daß für alle Werte  $i$ , d. h. für alle Bogen  $s_i$  die Ungleichungen (19a, b) erfüllt sind, die dann insgesamt  $n$  Ungleichungen darstellen.

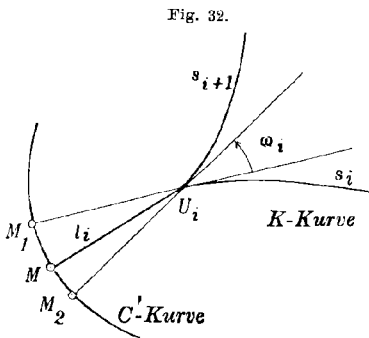
Für jede  $K$ -Kurve mit *drei* Umkehrpunkten ( $n=3$ ) beispielsweise besitzt nun dem Satz 43 (S. 106) gemäß die  $C'$ -Kurve ebenfalls drei

Umkehrpunkte. Die Ungleichungen (19 a, b) für  $i = 1, 2, 3$  besagen also einfach:

47. Bei allen  $K$ -Kurven mit drei Umkehrpunkten muß die Summe je zweier der Bogen  $s_1, s_2, s_3$  größer als der dritte sein, wie das Analoge für die drei Seiten eines gewöhnlichen Dreieckes gilt. (Vgl. die Fig. 1–5, sowie Fig. 26 und die Fig. 35–38.)

In der Tat ist das Bestehen des Satzes 47 leicht auch unmittelbar geometrisch nachzuweisen für die  $K$ -Polygone mit 3 Umkehrpunkten (vgl. Fig. 26) und damit durch einen einfachen Grenzübergang für die  $K$ -Kurven mit 3 Umkehrpunkten.

Auch ganz unabhängig von dem bisher untersuchten Falle (daß nämlich die  $C'$ -Kurve ebensoviele Umkehrpunkte haben soll wie die  $K$ -Kurve) können wir nun offenbar die obigen  $n$  Gleichungen (16) aufstellen und durch die Gleichungen (17) lösen. Man kann dann auch einen negativen Wert  $l_i$  geometrisch deuten.<sup>1)</sup> Ein solcher gibt einfach (wie auch ein positiver Wert) die Entfernung des Umkehrpunktes  $U_i$  von dem die  $C'$ -Kurve beschreibenden Punkte  $M$  für diejenigen Lagen der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve an, wo der „Berührungspunkt“ dieser Geraden eben der Punkt  $U$



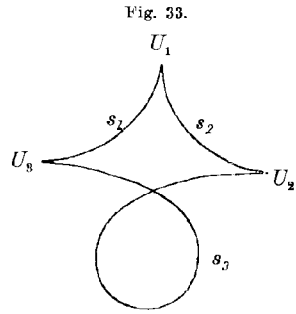
ist. Nur liegen diese Entfernungen für einen negativen Wert  $l_i$  in dem Scheitelwinkel des von den Bogen  $s_i$  und  $s_{i+1}$  gebildeten Winkels  $\omega$  (Fig. 32). Ihre besondere Bedeutung finden die negativen und verschwindenden Werte  $l_i$  aber in dem folgenden Satze:

48. Die  $C'$ -Kurve hat im Vergleich mit der  $K$ -Kurve mit  $n$  Umkehrpunkten nur  $(n - 2m)$  Umkehrpunkte, wo  $m$  die Anzahl der nicht positiven Werte  $l_i$  der Gleichungen (17) ist.<sup>2)</sup>

1) Man kann auch folgende Deutung wählen: Man denke für einen Augenblick vom Umkehrpunkte  $U_i$  aus die (dann doppelt zu denkende) Strecke  $l_i = U_i M$  (Fig. 32) an jeden der Bogen  $s_i$  und  $s_{i+1}$  in einer beliebigen Richtung in den Scheitelwinkel des von diesen Bogen gebildeten Winkels  $\omega_i$  hinein angesetzt. Würde man dann die Bogen  $s_i$  und  $s_{i+1}$  durch  $s'_i = s_i + |l_i|$  und  $s'_{i+1} = s_{i+1} + l$  ersetzen, so würde sich aus den entsprechenden neuen Gleichungen der Wert  $l_i = 0$  anstelle von  $l_i$  ergeben. Doch soll im Text ein solches Zusammenfallen zweier benachbarter Bogen längs einer gemeinsamen Strecke als unzweckmäßig ausdrücklich ausgeschlossen sein.

2) Da die  $C'$ -Kurve wenigstens drei Umkehrpunkte besitzt, so folgt hieraus:  $n - 2m \geq 3$  oder  $m \leq \frac{n-3}{2}$ . Es ist auch leicht zu zeigen, daß es für jeden Wert

Zusatz: Die Gleichungen (16) lassen auch unmittelbar erkennen, daß stets wenigstens für *einen* Bogen  $s_i$  die beiden Teile  $l_{i-1}$  und  $l_i$  beide positiv sein müssen; es folgt dies einfach aus der *ungeraden* Anzahl dieser Gleichungen. Überhaupt ergibt sich analog, daß stets für eine *ungerade* Anzahl von Bogen  $s_i$  die Teile  $l_{i-1}$  und  $l_i$  beide positiv sind. Daß aber nach unserem Satze 43 (S. 106) stets wenigstens bei drei Bogen die Teile  $l_{i-1}$  und  $l_i$  beide positiv sein müssen, ist erst eine Folge der besonderen Auswahl der Größen  $s_i$  in den Gleichungen (16), d. h. der besonderen Eigenschaften der *K*-Kurve.



Für die ersichtlich keine *K*-Kurve vorstellende Fig. 33, in der  $s_1 + s_2 < s_3$  ist, würden die analog aufgestellten Gleichungen (16) eben nur für die Seite  $s_3$  zwei positive Teile ergeben.

§ 11. Die Gesamtheit der zu einer gegebenen *C*'-Kurve oder *K*-Kurve gehörenden *C*-Kurven.

Jetzt wenden wir uns der noch ausstehenden wichtigen Frage zu, welche Evolventen einer gegebenen *K*-Kurve denn die zugehörigen *C*-Kurven, d. h. Kurven konstanter Breite, insgesamt ergeben. Vorerst aber schicken wir noch die Bemerkung voraus: Wenn die *C*'-Kurve zuerst gegeben ist und man zu ihr alle zugehörigen *C*-Kurven erhalten will, so bilde man zuerst die zugehörige *K*-Kurve als Evolute und verfähre dann wie im folgenden. Die soeben aufgeworfene Frage ist nun leicht zu beantworten:

49. *Stets dann und nur dann, wenn der die Evolvente beschreibende Punkt P auf der die K-Kurve tangierenden Geraden bei ihrer Abwick-*

auch die Gleichung  $m = \frac{n-3}{2}$  erfüllende *K*-Kurven gibt, d. h. solche *K*-Kurven, deren jedesmal zugehörige *C*'-Kurve nur drei Umkehrpunkte besitzt. Man kann z. B. von einem regulären *K*-Polygon mit  $n$  Umkehrpunkten  $U_1, U_2, \dots, U_{n-2}, V, W$  ausgehen und, ähnlich wie die Fig. 30, S. 107 entstanden ist, die Seite  $VW$  fortlassen, dafür aber die benachbarten Seiten  $U_{n-2}V$  und  $U_1W$  über  $V$  und  $W$  um das gleiche Stück bis  $U_{n-1}$  und  $U_n$  so weit verlängern, daß die als neue Seite hinzugefügte Verbindungsstrecke  $U_{n-1}U_n$  sicher kleiner als die doppelte Verlängerung  $VU_{n-1} = WU_n$  geworden ist, was stets möglich ist. Man braucht nur die Winkelhalbierenden der Winkel, die von der Seite  $VW$  mit den Verlängerungen gebildet werden, im Punkte  $X$  zu schneiden, wobei ersichtlich der Punkt  $X$  auf derselben Seite der Geraden  $VW$  liegt, wie die Verlängerungen, und dann die Verlängerungen so groß zu wählen, daß die neue Seite  $U_{n-1}U_n$  die Strecken  $VX$  und  $WX$  außerhalb schneidet. Die zugehörige *C*'-Kurve hat dann nur drei Umkehrpunkte.

lung keinen der konvexen Bogen  $s_i$  innerlich trifft, ist die Evolvente eine Kurve konstanter Breite.

Denn dann besitzt eben die Evolvente keinen Umkehrpunkt, vielmehr nur gewöhnliche Kurvenpunkte (d. h. Punkte mit nur einer tangierenden Geraden) oder konvexe Ecken. Diese letzteren können nur dann entstehen, wenn etwa der Punkt  $P$  mit einem Umkehrpunkt  $U_i$  der  $K$ -Kurve, also mit einem Endpunkte eines Bogens  $s_i$  zusammenfällt. Die Evolvente liegt auch in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte  $P$  stets auf derselben Seite der einzelnen die Evolvente tangierenden Geraden, d. h. der einzelnen Lage der Normalen in  $P$  zur tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve. Für einen konvexen Eckpunkt insbesondere gehören alle diejenigen durch ihn gehenden Geraden, für welche die Evolvente in der Umgebung dieses Punktes auf ihrer einen Seite liegt, zu diesen tangierenden Geraden der Evolvente hinzu. In Rücksicht hierauf vgl. man im übrigen den im wesentlichen hier übertragbaren Beweis des Satzes 27 (S. 91).

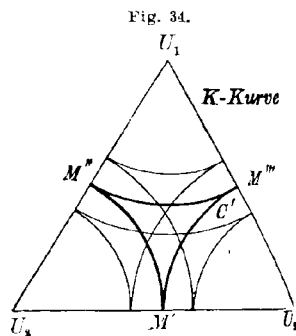
Als Folgerung des Satzes 49 ergibt sich sogleich weiter:

50. Die Entfernung  $PM = \frac{b}{2}$ , welche der eine  $C$ -Kurve beschreibende Punkt  $P$  von dem die  $C'$ -Kurve beschreibenden Punkt  $M$  auf der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve besitzen muß, wird durch die Ungleichung  $|PM| \geq l_{\max}$  bedingt, wo  $l_{\max}$  der größte positive Wert aller Größen  $l_i$  in den Gleichungen (17) bedeutet.<sup>1)</sup>

Ist insbesondere  $|PM| = l_{\max}$ , so wird  $P$  beim Beschreiben der  $C$ -Kurve, der „äußeren  $C$ -Kurve“, mit allen denjenigen Umkehrpunkten  $U_i$  der  $K$ -Kurve zusammenfallen, für welche  $l_i = l_{\max}$  ist, also wenigstens mit einem Umkehrpunkte (vgl. die Fig. 1 und 3—6, S. 68 ff. und die Fig. 35—39, S. 113 ff.)<sup>2)</sup> Ist dann ein solcher Umkehrpunkt  $U_i$  eine Spitze erster Art einer analytischen Kurve oder doch eine Spitzenecke (vgl. Satz 31 b, S. 94), so beschreibt  $P$  einen gewöhnlichen Kurvenpunkt

1) Es gibt  $l_{\max}$  zugleich den größten absoluten Wert des Krümmungsradius der  $C'$ -Kurve an und  $l_{\max} + \frac{b}{2}$  das Gleiche für die  $C$ -Kurve (Vgl. Satz 51 (S. 117) und Gleichung 15 (S. 105).

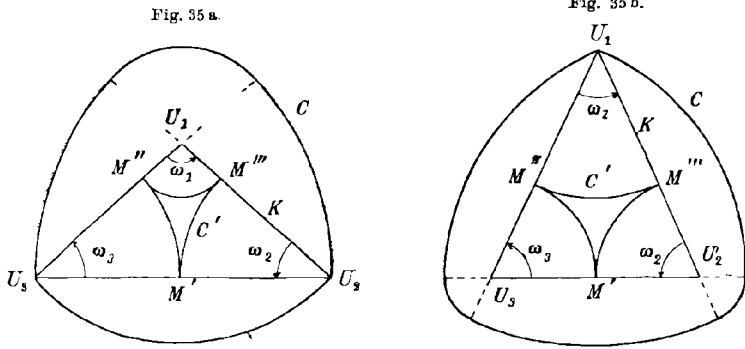
2) Ist indessen etwa in Beispiel I (Fig. 1)  $|MP| < l_{\max}$ , so besitzt die Evolvente der  $K$ -Kurve, die Äquidistante der  $C'$ -Kurve,  $2 > 3 = 6$  Umkehrpunkte (Spitzenecken), (Fig. 34). Diese fallen zu je zweien in einer konvexen Ecke der „äußeren  $C$ -Kurve“ zusammen, wenn  $|MP|$  in  $l_{\max}$  übergeht. Analoges gilt ganz allgemein.



(d. h. einen Punkt mit nur *einer* tangierenden Geraden), jedoch mit dem Krümmungsradius 0 (vgl. die Beispiele III und IV, S. 69 und 70). Ist  $U_i$  jedoch eine konkave Ecke, so beschreibt  $P$  eine konvexe Ecke<sup>1)</sup>, wobei die beiden Bogen der  $C$ -Kurve im Eckpunkt dann auch verschwindenden Krümmungsradius haben, wenn nicht eine Strecke der zugehörigen Normalen des einen oder andern dieser Bogen im Eckpunkt einen Teil der  $K$ -Kurve bildet (vgl. die Beispiele V und VI des § 1, Fig. 14c und Fig. 15a, b, c, S. 89). An allen andern Stellen aber besitzt jede  $C$ -Kurve nur gewöhnliche Kurvenpunkte (d. h. Kurvenpunkte mit nur einer tangierenden Geraden), deren Krümmungsradius endlich und von 0 verschieden ist, jedoch beiderseits des Kurvenpunktes dann verschiedene Werte hat, wenn eine Strecke der Normalen in diesem Punkte einen Teil der  $K$ -Kurve bildet. (Vgl. die Fig. 14a, b, c, S. 89, und das Beispiel V des § 1).

Die Fig. 35—39 geben noch einige einfache Beispiele für die vorstehenden Betrachtungen; sie enthalten alle die  $K$ - und  $C'$ -Kurven und eine  $C$ -Kurve, und zwar ist abgesehen von den beiden letzten Beispielen die  $K$ -Kurve ein Polygon und die  $C$ -Kurve die „äußerste“.

Beispiele VIII und IX: Die Fig. 35a, b veranschaulichen die beiden Fälle einer als gleichschenkliges Dreieck gewählten  $K$ -Kurve, bei denen



die Schenkel  $<$  bzw.  $>$  als die Basis sind und deren Übergangsfall also das gleichseitige Dreieck (Beispiel I des § 1) bildet; in Fig. 35a sind  $U_2$  und  $U_3$ , in Fig. 35b  $U_1$  konvexe Ecken der äußersten  $C$ -Kurve, während diese selbst sich aus 4 bzw. 5 Kreisbögen zusammensetzt.

1) Gilt doch für beliebige Kurven der folgende Satz, wobei die Evolute natürlich noch durch geeignete Annahmen näher bestimmt vorausgesetzt sei:

Fällt der eine Evolvente beschreibende Punkt mit einer konkaven bzw. konvexen Ecke der Evolute zusammen, so bildet er umgekehrt eine konvexe bzw. konkave Ecke der Evolvente.

**Beispiele X, XI und XII:** In den Fig. 36 a, b, c hat die  $K$ -Kurve als konvexe Bogen  $s_i$  zwei gleiche Strecken  $U_1 U_2$  und  $U_1 U_3$  und einen einmal gebrochenen gleichschenkligen ( $U_2 M' = M' U_3$ ) Linienzug  $U_2 M' U_3$ ; die 3 Figuren unterscheiden sich von einander gemäß den Bedingungen  $U_2 M' \leq \frac{U_1 U_2}{2}$  und haben für die äußerste  $C$ -Kurve konvexe Ecken in  $U_1, U_2, U_3$  bzw. in  $U_2, U_3$  bzw. in  $U_1$  zur Folge, während die  $C$ -Kurve selbst aus 5, bzw. 6, bzw. 7 Kreisbogen besteht.

**Beispiel XIII:** In der Fig. 37 besteht die  $K$ -Kurve aus einem allgemeinen Dreieck; die äußerste  $C$ -Kurve hat dann nur in dem Eckpunkt des Dreiecks eine konvexe Ecke, in dem die beiden größten Dreiecksseiten zusammenstoßen.

**Beispiel XIV:** In der Fig. 38 besteht die  $K$ -Kurve in Verallgemeinerung der Beispiele X—XII aus zwei ungleichen Strecken  $U_1 U_2$  und  $U_1 U_3$  und einem einmal gebrochenen ungleichschenkligen Linienzuge  $U_2 A U_3$ ; in der Figur ist nur der eine Fall dargestellt, daß jede der Strecken  $U_1 U_2$  und  $U_1 U_3$  größer als der Linienzug  $U_2 A U_3$  ist.

**Beispiel XV:** Ein komplizierteres Beispiel sodann gibt die Fig. 39a, bei der die  $K$ -Kurve 9 Umkehrpunkte besitzt und die äußerste  $C$ -Kurve aus 15 Kreisbogen mit 3 konvexen Ecken besteht. Die  $C'$ -Kurve läßt sich in der Fig. 39a nicht deutlich vollständig darstellen; es ist daher in der ergänzenden Fig. 39b in sechsfacher Vergrößerung der eine Teil der Fig. 39a, der etwa „zwischen“ den Umkehrpunkten  $U_5$  und  $U_6$  gelegen ist, besonders dargestellt, um die Spitzenecken der  $C'$ -Kurve zu zeigen.

**Beispiel XVI:** Die  $K$ -Kurve ist dargestellt durch ein „reguläres Kreisbogenfünfeck zweiter Art“, bestehend aus fünf gleichen Kreisbogen, deren jeder die beiden benachbarten berührt, Fig. 40 (vgl. die Anm. S. 108). Die allgemeine  $C$ -Kurve besteht dann ebenso wie die  $C'$ -Kurve aus  $2 \times 5$  einander kongruenten bez. symmetrischen Bogen gewöhnlicher Kreisevolventen.

**Beispiel XVII:** In der Figur 41 sind die Bogen  $\widehat{P_1 P'_1}$  und  $\widehat{P_2 P'_1}$  der  $C$ -Kurve Quadranten zweier Ellipsen. Die Figur ist in folgender Weise konstruiert: Zunächst werden diese Ellipsenquadranten gewählt, wobei  $P_1 P_2$  die gewünschte Breite  $b$  der  $C$ -Kurve ist; hierzu ergeben sich die Quadranten  $\widehat{U_1 U_2}$  und  $\widehat{U_3 A}$  der zugehörigen Evoluten als Bogen der  $K$ -Kurve, die dann durch die Strecken  $A U_2$  und  $U_1 U_3$  zu einer geschlossenen  $K$ -Kurve (nach § 5) gemacht wird. Die Bogen  $\widehat{P_2 P'_2}$  und  $\widehat{P_1 P'_2}$  der  $C$ -Kurve sind natürlich Bogen der Ellipsenäquidistanten. Die beiden Ellipsenquadranten sind indes nicht willkürlich zu

Fig. 36 a.

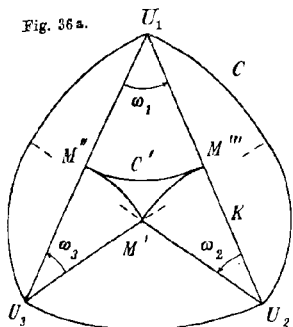


Fig. 36 b.

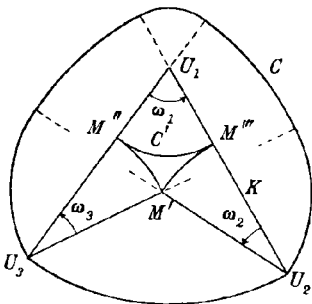


Fig. 36 c.

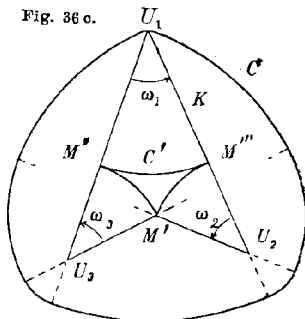


Fig. 37.

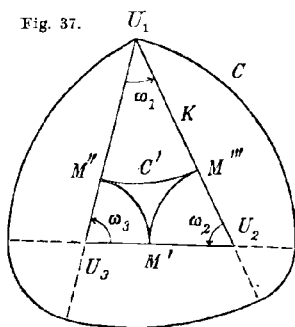


Fig. 38.

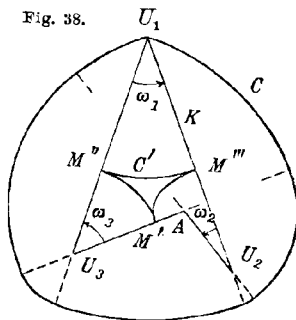


Fig. 39 a.

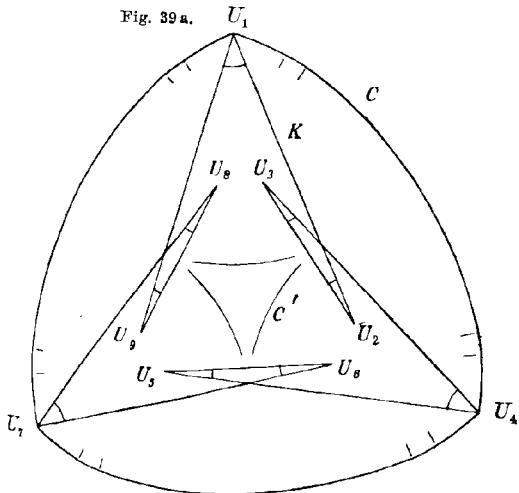


Fig. 40.

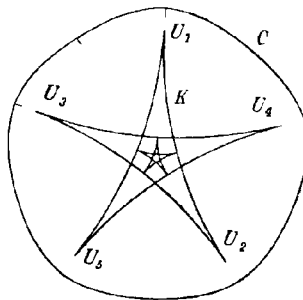


Fig. 39 b.

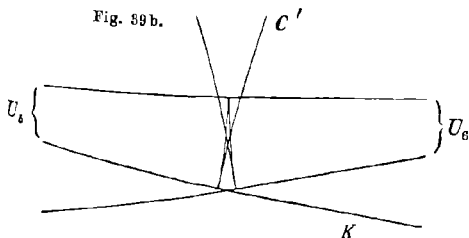
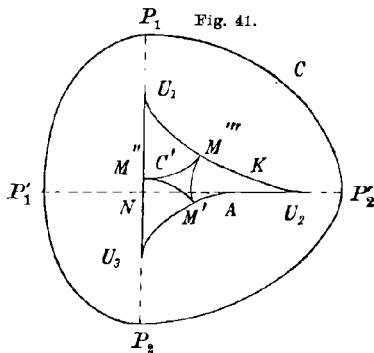


Fig. 41.



wählen möglich; die Halbachsen  $NP_1, NP_2$  und  $NP'_1$ , wo  $NP_1 + NP_2 = b$  ist und  $NP_1 \geq NP_2$  sei, müssen vielmehr die folgenden notwendigen und hinreichenden Ungleichungen erfüllen:

$$\frac{NP_1^2}{b} \leq \sqrt{NP_2 \cdot b} \quad \text{und}$$

$$\frac{NP_1^2}{b} \leq NP'_1 \leq \sqrt{NP_2 \cdot b}.$$

Diese Ungleichungen bringen zum Ausdruck, daß keiner der Krümmungsradien der Ellipsenscheitelpunkte größer als die ausgewählte Breite  $b$  sein darf. Setzt man noch  $NP_1 = b \cdot u$ ,  $NP_2 = b \cdot (1 - u)$ , wo dann wegen  $NP_1 \geq NP_2$  noch  $\frac{1}{2} \leq u < 1$  ist, so gehen die beiden Ungleichungen über in:

$$u^4 + u \leq 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 0,724 \dots$$

und

$$b \cdot u^2 \leq NP'_1 \leq b \cdot \sqrt{1 - u}.$$

Wir erhalten also das höchst eigenartige Resultat:

*Nur wenn das Verhältnis  $v = \frac{u}{1-u}$  der Halbachsen  $NP_1$  und  $NP_2$  der Ungleichung*

$$1 \leq v \leq 2,5 \dots$$

*genügt und außerdem*

$$\frac{v^2}{(1+v)^2} \leq \frac{NP'_1}{b} \leq \frac{1}{\sqrt{1+v}} \cdot$$

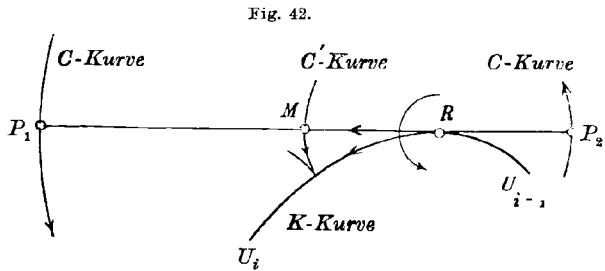
*erfüllt ist, wo  $b = NP_1 + NP_2$  ist, können die gemäß der Fig. 41 zusammengesetzten Ellipsenquadranten die eine „Hälfte“ einer Kurve konstanter Breite  $b$  bilden.*

(Soll  $NP'_1$  außerdem etwa für beide Ellipsenquadranten die kleine Halbachse sein, so müssen die engeren Ungleichungen erfüllt sein:  $\frac{NP_1^2}{b} \leq NP_2$  und  $\frac{NP_1^2}{b} \leq NP'_1 < NP_2$  oder:  $\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$  und  $u^2 \leq \frac{NP_1}{b} < (1 - u)$ ). —

Wir wollen jetzt noch näher von der *Änderung der Krümmung* für die *C'-Kurve* oder die *einzelne C-Kurve* sprechen, wenn der Kurvenpunkt  $P$  die Kurve durchläuft. Zunächst wollen wir auch in den § 5 S. 87 erwähnten Fällen, daß die *K-Kurve* eine geradlinige Strecke  $AB$  enthält (wie die Strecke  $R'R''$  in den Fig. 14 a, b, c oder die Strecken  $R'P'$  und  $P''R''$  in den Fig. 15 a, c, S. 89), von einer *stetigen* Änderung des Krümmungsradius von dem Werte  $AP_0$  bis zum Werte  $BP_0$  sprechen, wo  $P_0$  die Lage des Kurvenpunktes  $P$  bezeichnet, wenn die tangierende Gerade der *K-Kurve* mit  $AB$  zusammenfällt.



**Festsetzungen V:** Ferner sei bei dem einzelnen konvexen Bogen  $s_i = U_{i-1}U_i$  der  $K$ -Kurve (Fig. 42) wieder wie früher diejenige Richtung der tangierenden Geraden als die positive ausgezeichnet, die mit dem positiven Umlaufungssinne der  $K$ -Kurve übereinstimmt (d. h. in der nach unseren früheren Festsetzungen der Berührungspunkt bei positiver Drehung der tangierenden Geraden wandert, vgl. die Festsetzung IV S. 85 und Satz 23, S. 86); ferner möge wie früher  $U_{i-1}$  der Anfangs- und  $U_i$  der Endpunkt des Bogens  $s_i$  bei dieser positiven Umlaufung sein. Demgemäß sei jetzt (eventuell im Gegensatz zu der Vorzeichenfestsetzung für  $\varrho$  auf S. 84 und für  $\bar{\varrho}$  in der Gleichung (15) S. 105) der einzelne Krümmungsradius einer Evolvente der  $K$ -Kurve (insbesondere der von  $M$  bzw.  $P$  beschriebenen  $C'$ - oder  $C$ -Kurve) positiv oder negativ gerechnet, je nachdem er vom Kurvenpunkt bis zum „Krümmungsmittelpunkt“  $R$  hin gerechnet in positiver oder negativer Richtung auf der tangierenden Geraden der  $K$ -Kurve liegt.



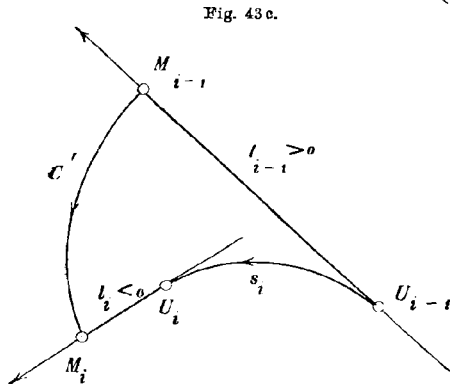
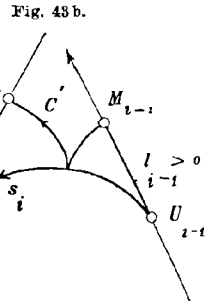
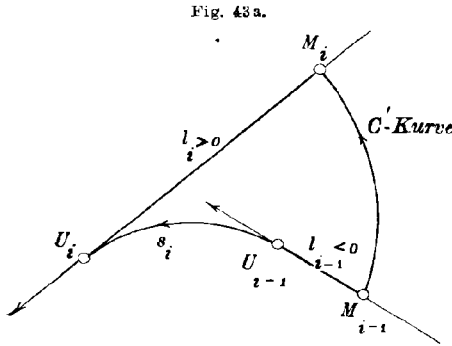
Bezeichnet man noch die (positive oder negative) Entfernung  $\overrightarrow{PM}$  des die Evolvente beschreibenden Punktes  $P$  von dem die  $C'$ -Kurve beschreibenden Punkte  $M$  mit  $e$ , so ergibt sich sogleich:

**51.** Der Krümmungsradius  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MR}$  der Evolvente ändert sich bei der positiven Durchlaufung des Bogens  $s_i$  stetig und niemals abnehmend<sup>1)</sup> von  $e - l_{i-1}$  bis  $e + l_i$  (insgesamt um  $s_i = l_{i-1}$ ), für die  $C'$ -Kurve ( $e = 0$ ) also von  $-l_{i-1}$  bis  $+l_i$  und für die beiden Bogen der  $C$ -Kurve von der Breite  $b = 2e$  von  $\pm \frac{b}{2} - l_{i-1}$  bis  $\pm \frac{b}{2} + l_i$ , wo die Größen  $l_{i-1}$  und  $l_i$  durch die Gleichungen (17) S. 109 bestimmt sind.

Dieser Satz sei für die  $C'$ -Kurve durch die Fig. 43 a, b, c veranschaulicht, bei denen bzw. von den Größen  $l_{i-1} = \overrightarrow{U_{i-1}M_{i-1}}$  und  $l_i = \overrightarrow{M_iU_i}$  nur die letzte, beide oder nur die erste positiv sind und die den Endpunkten  $U_{i-1}$  und  $U_i$  entsprechenden Lagen der Punkte  $M$  mit  $M_{i-1}$  und  $M_i$  bezeichnet sind.

1) Der Krümmungsradius  $\overrightarrow{PR}$  bleibt für einen Kreisbogen der Evolvente ja konstant, wobei ein solcher Kreisbogen einem konvexen Eckpunkte des konvexen Bogens  $s_i$  entspricht.

Beim Übergang zum Bogen  $s_{i+1}$ , d. h. nach dem Überschreiten des Umkehrpunktes  $U_i$ , ist dann ja nach der obigen Festsetzung die positive Richtung der die  $K$ -Kurve tangierenden Geraden der früheren entgegengesetzt (siehe Satz 24, S. 86). Der Krümmungsradius beginnt daher



zunächst bei dem Werte  $e' - l_i$ , wo  $e' = -e$  ist, um sich dann weiter niemals abnehmend stetig zu ändern. Ist der Umkehrpunkt  $U_i$  insbesondere eine *konkave Ecke* (vgl. Satz 31 b, S. 94), so hat der die Evolvente beschreibende Punkt  $P$  ja auch noch einen Kreisbogen mit dem Radius  $|e + l_i|$  durchlaufen, entsprechend der Drehung der die  $K$ -Kurve tangierenden Geraden um  $U_i$  vom Bogen  $s_i$  zum Bogen  $s_{i+1}$ .

Erwähnt sei schließlich noch folgendes:

Früher war entsprechend der positiven Richtung der Stütznormalen (vgl. die Festsetzungen II auf S. 83) der Krümmungsradius  $\rho = PR$  für die  $C$ -Kurve stets  $\geq 0$  gewählt; unser Satz 51 ist hiermit leicht durch eine solche Änderung in Übereinstimmung zu bringen, daß man stets die absoluten Beträge der durch diesen Satz gegebenen Krümmungsradien nimmt.

52. Der stetig sich ändernde (absolut genommene) Krümmungsradius der  $C$ -Kurve nimmt dann abwechselnd den aufeinander folgenden konvexen Bogen  $s_i$  entsprechend nicht ab oder nicht zu, so daß er für die Umkehrpunkte selbst abwechselnd einen größten oder kleinsten Wert erreicht, eventuell für einen Kreisbogen der  $C$ -Kurve, wenn nämlich  $U_i$  eine konkave Ecke ist.

(Vgl. indes auch den Fall, daß dieser Kreisbogen sich auf einen

Punkt zusammenzieht, wie in den Punkten  $U_i$  des Beispiels I des § 1, so daß also nach unserer Bemerkung auf S. 116 solchen Punkten der Krümmungsradius 0 zuzuschreiben ist.)

§ 12. Der Satz von Minkowski.

Wir haben noch zwei bekannte wichtige Sätze über Kurven konstanter Breite zu erwähnen: den Satz von Minkowski und den Satz von Meißner (§ 13). Wir wollen vor allem aber für sie auch besonders anschauliche einfache Beweise geben, die eine weit tiefere Einsicht in das Wesen der Sätze gewähren als die bisherigen analytischen Beweise.

Der Satz von Minkowski<sup>1)</sup> lautet:

53. Der Umfang  $L$  aller Kurven derselben konstanten Breite  $b$  ist

auch konstant, nämlich gleich dem Umfang  $b \cdot \pi$  des Kreises vom Durchmesser  $b$ .

Zum Beweise genügt es, wie in der Figur 44, sich einen konvexen Bogen  $s_i = U_{i-1} U_i$  der  $K$ -Kurve, der ja im übrigen geradlinige Strecken und konvexe Ecken (vgl. Satz 31 a, S. 94) besitzen kann, und dazu zwei unendlich benachbarte Lagen der tangierenden Geraden mit den Endpunkten  $P_1, P_2$  und  $P_1', P_2'$  auf der  $C$ -Kurve vorzustellen, wobei  $P_1 P_2 = P_1' P_2' = b$  ist. Wir setzen jetzt:

$$P_1 R = \varrho_1 \text{ und } P_2 R = \varrho_2,$$

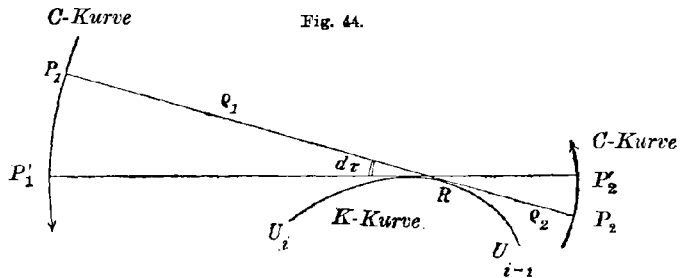


Fig. 44.

1) Wegen dieses Satzes vgl. die in der Einleitung genannten Arbeiten von Minkowski (Ges. Abh. Bd. 2, S. 278, insbesondere die letzte Formel S. 279), Hurwitz (a. a. O. S. 385, insbesondere in der Anmerkung die dort zitierte Formel

$\int_0^{2\pi} P(u) du = 2L$  von Minkowski für konvexe Flächen und S. 386 die Formel

$p(u + p(u + \pi) = \frac{L}{\pi})$  und Meißner ((1) a. a. O. S. 313 und (2) a. a. O. S. 47). In der bestimmten Form des Textes ausgesprochen haben diesen Satz zwar Minkowski und Hurwitz nicht; doch ist der Satz unmittelbar in den oben angegebenen Formeln bei ihnen enthalten. Man sehe auch z. B. in der Arbeit von Minkowski, Volumen und Oberfläche (Math. Annalen. Bd. 57, 1903 und Ges. Abh., Bd. 2, S. 245) die Formel

$$F_{12} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} H_1 \left( H_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial \vartheta^2} \right) d\vartheta,$$

wo  $2F_{12}$  für den konstanten Wert  $H_2 = 1$  die Länge des Umfanges eines „vollkommenen Ovaloids  $\mathfrak{F}_1$ “ (Ges. Abh., Bd. 2, S. 233 Nr. 7) ist.

wo wieder  $R$  der Berührungspunkt von  $P_1P_2$  mit der  $K$ -Kurve ist und für die Krümmungsradien  $\varrho_1, \varrho_2$  die absoluten Werte genommen werden sollen. Dann gilt für die Bogen  $\widehat{P_1P_1'}$  und  $\widehat{P_2P_2'}$  der  $C$ -Kurve:

$$(20a, b) \quad \begin{aligned} \widehat{P_1P_1'} &= \varrho_1 d\tau, \\ \widehat{P_2P_2'} &= \varrho_2 d\tau, \end{aligned}$$

wo  $\tau$  der Neigungswinkel der Geraden  $\overrightarrow{P_2P_1}$  gegen die positive  $x$ -Achse ist. Es folgt hieraus:

$$(21) \quad \widehat{P_1P_1'} + \widehat{P_2P_2'} = b \cdot d\tau.$$

Bei der halbvollständigen Abrollung der tangierenden Geraden (vgl. S. 90) haben die Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  zusammen die vollständige  $C$ -Kurve beschrieben.

Integrieren wir daher die Gleichung (21) über den Drehungswinkel  $\pi$ , so folgt sofort der obige Satz.

Der Satz 53 besagt also, daß alle Kurven derselben konstanten Breite  $b$  gleichsam in einen Kreis vom Durchmesser  $b$  durch Verbiegen ohne Ausdehnung der Kurve überzuführen sind.<sup>1)</sup> Ja man kann eine gegebene Kurve konstanter Breite  $b$  sogar auf stetigem Wege in einen solchen Kreis so überführen, daß sie hierbei stets eine Kurve konstanter Breite  $b$  bleibt. Dies gelingt z. B. schon dadurch, daß man die zugehörige  $K$ -Kurve ähnlich verkleinert, bis sie sich auf einen Punkt zusammenzieht, und hierbei stets die zugehörige Kurve der unveränderlichen Breite  $b$  als die Verbiegung der gegebenen Kurve wählt. Natürlich kann man dann auch jede Kurve konstanter Breite  $b$  in jede andere derselben Breite  $b$  auf stetigem Wege durch eben solche Kurven als Zwischenformen hindurch verbiegen.

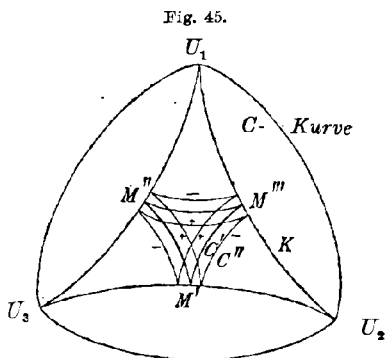
Der Satz 53 läßt sich nun leicht auch auf diejenigen *Evolventen*  $C''$  der  $K$ -Kurve übertragen, die nicht Kurven konstanter Breite sind, für die also  $|PM| < l_{max}$  ist (vgl. Satz 50, S. 112), und wird vielleicht dadurch erst ins rechte Licht gerückt. Für diese  $C''$ -Kurven, die ja auch keine konvexen Kurven sind, ergibt sich zunächst der Satz:

54. Die einzelne  $C''$ -Kurve hat  $2(n - 2m + u - v)$  Umkehrpunkte: hier bedeutet  $n$  die Anzahl der konvexen Bogen  $s_i$  oder der Umkehrpunkte  $U_i$  der  $K$ -Kurve,  $m$  die Anzahl der nicht positiven Werte  $l_i$  überhaupt,  $u$  die Anzahl der nicht positiven Werte  $l_i$ , die absolut  $< |PM|$  und  $v$  die Anzahl der positiven Werte  $l_i$ , die  $\leq |PM|$  sind (vgl. die  $C''$ -Kurve

1) Die Kurve gilt als eine *linea flexibilis, sed non extensibilis*, man vergleiche die analogen Verhältnisse bei der Verbiegung der Flächen, z. B. Gauß, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

in der Fig. 45, der Erweiterung der Fig. 3 S. 69, und etwa auch die  $C''$ -Kurven für die Fig. 30, S. 107).

Zum Beweise dieses Satzes denke man zunächst daran (siehe Satz 48, S. 110), daß die  $C'$ -Kurve, d. h. die Kurve für  $|PM| = 0$ ,  $(n - 2m)$  Umkehrpunkte besitzt. Im Vergleich mit den übrigen Evolventen ist jedoch die  $C'$ -Kurve *doppelt* durchlaufen zu denken, dem also  $2(n - 2m)$  Umkehrpunkte entsprechen. Wächst dann  $|PM|$  von 0 aus, so treten stets, sobald  $|PM|$  den absoluten Betrag eines nicht positiven Wertes  $l_i$  überschritten hat, 2 Umkehrpunkte hinzu, und es fallen, sobald  $|PM| \geq$  einem positiven Werte  $l_i$  geworden ist, 2 Umkehrpunkte fort, die in der Grenzlage eben zusammenrücken. (Da  $v_{max} = m$  und  $v_{max} = n - m$  ist, so ist für  $|PM| \geq l_{max}$ , wobei  $l_{max}$  ja stets auch der größte absolute Wert für alle Größen  $C_i$  ist, die Zahl der Umkehrpunkte, wie es sein muß, gleich 0 geworden.)



Wir treffen nun weiter folgende

**Festsetzungen VI:** Analog wie bei den  $C$ -Kurven (siehe die Festsetzungen II auf S. 83) wollen wir auch hier die Richtung  $\overrightarrow{PM}$  als die positive auf der „Normalen“ der  $C'$ -Kurve, für jede Lage des Punktes  $P$ , auszeichnen. (Der halbvollständigen Abrollung der Geraden oder ihrer Drehung um den Winkel  $\pi$  entsprechend sind dann die positiven Richtungen für die Anfangslage  $P_1$  und die Endlage  $P_2$  des Punktes  $P$  natürlich einander entgegengesetzt.) Die Größe  $\varrho_1$  (bzw.  $\varrho_2$ ) in den Gleichungen (20a, b), S. 120 soll demgemäß (im Gegensatz zu der Festsetzung auf S. 117) positiv oder negativ gerechnet sein, je nachdem die Richtung  $\overrightarrow{P_1 R}$  (bzw.  $\overrightarrow{P_2 R}$ ) mit der positiven Richtung  $\overrightarrow{P_1 M}$  (bzw.  $\overrightarrow{P_2 M}$ ) übereinstimmt oder nicht, so daß stets  $\varrho_1 + \varrho_2 = |P_1 P_2| = b$  ist.

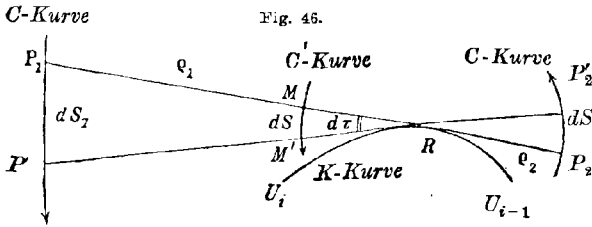
Diesen Festsetzungen gemäß erhalten je zwei einander äquidistante Bogenelemente  $\widehat{P_1 P_1'}$  und  $\widehat{P_2 P_2'}$  der  $C''$ -Kurve durch die Gleichungen (20a, b) dasselbe (und zwar positives) oder verschiedenes Vorzeichen, je nachdem der zugehörige Punkt  $R$  innerhalb oder außerhalb der Strecke  $P_1 P_2$  liegt. Und die in grader Anzahl vorhandenen, von einem Umkehrpunkt zum nächsten verlaufenden konvexen Bogen der  $C''$ -Kurve sind abwechselnd positiv und negativ zu rechnen, da ein Umkehrpunkt dann entsteht, wenn der „Berührungspunkt“  $R$  den die  $C''$ -Kurve beschreibenden Punkt überschreitet.

So gewinnen wir folgendes Resultat:

55. Werden die konvexen Bogen der  $C''$ -Kurve in der Weise abwechselnd positiv und negativ gerechnet, daß diejenigen Bogen negativ sind, für deren einzelne Punkte der zugehörige „Krümmungsmittelpunkt“  $R$  außerhalb  $P_1P_2$  gelegen ist und die dabei einen kleineren absoluten Betrag des Krümmungsradius besitzen als der äquidistante Teil der  $C''$ -Kurve, so ist die gesamte Bogenlänge der  $C''$ -Kurve wieder gleich  $b \cdot \pi$  (vgl. die Fig. 45).

§ 13. Der Satz von Meißner.

Wir benutzen wieder die Figur 44 und fügen nur noch den von dem Mittelpunkte  $M$  der Strecke  $P_1P_2$  beschriebenen Bogen  $\widehat{MM}'$  der der  $C'$ -Kurve hinzu. (Fig. 46.) Wir denken nun die  $C$ -Kurve derart mit Masse belegt, daß auf dem Bogenelement  $dS_1 = \widehat{P_1P_1'}$  die Masse  $\frac{dS_1}{e_1} = d\tau$  und auf dem Bogenelement  $dS_2 = \widehat{P_2P_2'}$  die Masse  $\frac{dS_2}{e_2} = d\tau$



gleichmäßig verteilt ist, d. h.: auf der  $C$ -Kurve sei eine zur Krümmung proportionale Masse verteilt. Der Schwerpunkt dieser Massenbelegung sei nach Steiner<sup>1)</sup> als

„Krümmungsschwerpunkt“ der  $C$ -Kurve bezeichnet. Der Satz von Meißner<sup>2)</sup> behauptet nun:

56. Der Krümmungsschwerpunkt der  $C$ -Kurve fällt mit ihrem gewöhnlichen Schwerpunkt (d. h. ihrem Schwerpunkt bei gleichmäßiger Massenbelegung) zusammen.

Um diesen Satz anschaulich zu beweisen, sei zunächst noch bei der  $C'$ -Kurve das Bogenelement  $\widehat{MM}' = dS$  und der Krümmungsradius  $\overrightarrow{MR} = \bar{\rho}$  gesetzt und zwar wegen der Vorzeichen (vgl. die Festsetzungen II, S. 83 und die Gleichung (15) S. 105) mit folgenden

**Festsetzungen VII:** Insofern es ausdrücklich bevorzugt sein soll, daß das Bogenelement  $\widehat{MM}'$  als zu  $\widehat{P_1P_1'}$  äquidistant angesehen wird, sei die Richtung  $\overrightarrow{P_1M}$  wieder als die positive bezeichnet und  $\bar{\rho}$  positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Richtung  $\overrightarrow{MR}$  mit dieser Richtung  $\overrightarrow{P_1M}$  übereinstimmt oder nicht.

1) J. Steiner, Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven, Ges. Werke Bd. II, S. 99ff.

2) Vgl. E. Meißner, (1) a. a. O., S. 327.

Ebenso sei wie früher diejenige zu  $P_1 \vec{M}$  senkrechte Richtung als die positive bezeichnet, aus der durch positive Drehung (d. h. Drehung entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers) um  $90^\circ$  die Richtung  $P_1 \vec{M}$  hervorgeht und dementsprechend  $\widehat{MM'} = dS$  positiv oder negativ, je nachdem die Fortschreitungsrichtung  $\vec{MM'}$  mit der soeben definierten positiven Richtung übereinstimmt oder nicht.

Man erkennt leicht, daß hiernach  $\frac{dS}{\varrho}$  stets positiv ist, und es daher genügt, sobald dieser Quotient vorkommt, in ihm für  $dS$  und  $\varrho$  stets ihre absoluten Werte zu wählen.

Was nun die gleichmäßige Massenbelegung der  $C$ -Kurve betrifft, so können wir den Bogenelementen  $dS_1$  und  $dS_2$  entsprechend in dem Punkte  $P_1$  die Masse  $dS_1 = \varrho_1 \cdot d\tau = \left(\frac{b}{2} + \bar{\varrho}\right) d\tau$  und im Punkte  $P_2$  die Masse  $dS_2 = \varrho_2 \cdot d\tau = \left(\frac{b}{2} - \bar{\varrho}\right) d\tau$  vereinigt denken. Die gleichen Teile  $\frac{b}{2} \cdot d\tau$  in  $P_1$  und  $P_2$  ergeben nun den Gleichungen  $d\tau = \frac{dS_1}{\varrho_1} = \frac{dS_2}{\varrho_2}$  gemäß eine Belegung der  $C$ -Kurve mit einer zur Krümmung proportionalen Masse. Die entgegengesetzt gleichen Teile  $\bar{\varrho} d\tau$  in  $P_1$  und  $-\bar{\varrho} d\tau$  in  $P_2$  dagegen können wir als zwei entgegengesetzt gleiche Parallelkräfte senkrecht zur Ebene der Figur bzw. in  $P_1$  und  $P_2$  deuten und zwar die positive Kraft senkrecht nach oben, die negative senkrecht nach unten gerichtet. Das Moment dieses Kräftepaares  $b|\varrho| d\tau = b \cdot |dS|$  läßt sich nun geometrisch durch einen Vektor darstellen und zwar nach Größe und Richtung durch das mit  $b$  multiplizierte Bogenelement  $dS$  der  $C$ -Kurve bei ihrem (positiven) Durchlaufen. Die geometrische Summe aller dieser Momente oder Vektoren bei der Integration über den Drehungswinkel  $\pi$  der tangierenden Geraden  $P_1 P_2$  ergibt nun Null, da die  $C$ -Kurve in sich zurückläuft, d. h. geschlossen ist. Daher ist der zweite Teil  $\pm \bar{\varrho} d\tau$  von der gleichmäßigen Massenbelegung der  $C$ -Kurve für sich im Gleichgewicht, womit der Meißnersche Satz bewiesen ist.<sup>1)</sup>

1) Außer den Gleichungen

$$(20a, b) \quad \frac{dS_1}{\varrho_1} = \frac{dS_2}{\varrho_2} = \frac{dS}{\varrho}$$

gelten auch die folgenden:

$$(23) \quad \bar{\varrho} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2},$$

$$(24) \quad dS = \frac{dS_1 - dS_2}{2},$$

Wir können nun noch folgende weitergehende Betrachtung anstellen: Was die der Krümmung proportionale Massenbelegung der  $C$ -Kurve betrifft, so können wir die einander gleichen Massenbelegungen  $d\tau = \frac{dS_1}{\varrho_1} = \frac{dS_2}{\varrho_2}$  der Bogenelemente  $dS_1$  und  $dS_2$  im Mittelpunkt  $M$  von  $P_1P_2$  vereinigt oder, besser gesagt, ihre Summe  $2d\tau$  auf dem Bogen  $\widehat{MM'}$  der  $C'$ -Kurve gleichmäßig verteilt denken. Da auch  $d\tau = \frac{dS}{\varrho}$  gilt, so ergibt sich also sogleich der neue Satz:

57. *Der Schwerpunkt der proportional zur Krümmung mit Masse belegten  $C$ -Kurve ist gleich dem Schwerpunkte der proportional seiner (absolut genommenen) Krümmung mit (stets positiver) Masse belegten  $C'$ -Kurve.*

Endlich lassen sich die Sätze 56 und 57 auch auf die  $C''$ -Kurven (vgl. S. 120) ausdehnen; nur sind hierbei die Vorzeichen von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  und dementsprechend die von  $dS_1 = \varrho_1 \cdot d\tau$  und  $dS_2 = \varrho_2 d\tau$  den Festsetzungen der Seite 121 gemäß zu beachten. Es ist dann die der Krümmung proportionale Massenbelegung stets eine positive längs der ganzen

und

$$(25 \text{ a, b}) \quad \varrho_1 = \frac{b}{2} + \bar{\varrho},$$

$$\varrho_2 = \frac{b}{2} - \bar{\varrho},$$

$$(26) \quad \frac{dS}{\varrho} = \frac{dS_1}{\varrho_1} + \frac{dS_2}{\varrho_2}.$$

Von allen diesen Gleichungen sind jedoch nur 4 voneinander unabhängig entsprechend der Tatsache, daß aus den willkürlich gegebenen 3 Größen  $\bar{\varrho}$ ,  $d$  und  $b$  sich die Größen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $dS_1$  und  $dS_2$  berechnen lassen.

Der Fall, daß einer der Krümmungsradien  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  oder  $\bar{\varrho}$  für den betreffenden Kurvenpunkt als dem Endpunkt eines Teilbogens gleich 0 ist (vgl. den Schluß der Anm. S. 81) macht ersichtlich für die Betrachtung des Textes keine Schwierigkeit. Denkt man die der Krümmung proportionale Massenbelegung der  $C$ -Kurve etwa durch einen Draht mit kreisförmigem, zur Krümmung proportionalen Querschnitt dargestellt, so wird der Draht beispielsweise an einer Stelle  $\varrho_1(\tau = \tau_\alpha) = 0$  (wegen der Größe  $\tau$  siehe die Gleichungen (20a, b) S. 120) allerdings unendlich dick; gleichwohl ist die Gesamtmasse der einseitigen Umgebung dieses Punktes eine endliche, da

$$\int_{S_1(\tau = \tau_\alpha)}^{S_1(\tau = \tau_b)} \frac{dS_1}{\varrho_1} = \tau_b - \tau_\alpha$$

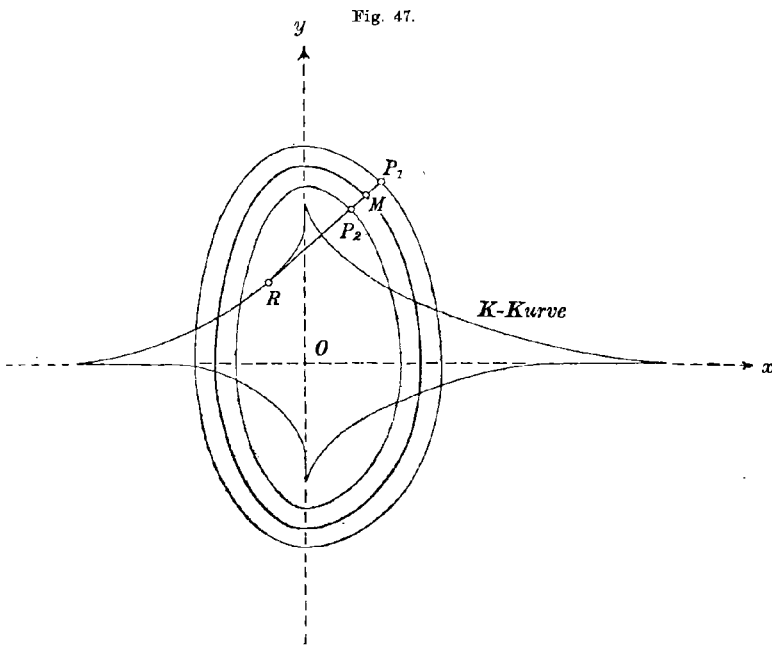
ist.

In einem Eckpunkte, in dem der Winkel  $\tau$  von  $\tau_\alpha$  bis  $\tau_\beta$  sich ändert, ist als der Krümmung proportionale Massenbelegung noch eine der Größe  $(\tau_\beta - \tau_\alpha)$  proportionale Masse konzentriert zu denken. (Vgl. die Figuren 15a, b, c S. 89 und Formel 28.)



Kurve, die gewöhnliche Massenbelegung aber eine positive oder negative, je nachdem das Bogenelement positiv oder negativ ist.<sup>1)</sup>)

1) Zweifellos wird die Bedeutung der Sätze 56 und 57 durch den Hinweis auf ihre noch weitergehende Ausdehnung erheblich geklärt. Wie leicht zu übersehen ist, lassen sich nämlich diese Sätze auf weit allgemeinere, natürlich noch näher im einzelnen zu bestimmende Kurven übertragen, die als äquidistante Bahnkurven dreier Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $M$  mit der Bedingung  $P_1M = MP_2 = \frac{b}{2}$  zu einander gehören. Ein Beispiel gibt etwa der folgende einfache Fall: Die Kurve des Punktes  $M$  bestehe aus einer beliebigen, überall konvexen Kurve,



etwa aus 4 verschiedenen Ellipsenquadranten, die den Koordinatenanfangspunkt  $O$  als Zentrum und die  $x$ ,  $y$ -Achsen als Achsenrichtungen besitzen, sich auf die 4 Quadranten der Ebene verteilen und sich mit gleichen Achsenlängen auf den gemeinsamen Koordinatenachsen aneinanderreihen (Fig. 47). Die Kurven der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind dann die aus den einzelnen Zweigen der Ellipsenäquidistanten im Abstände  $\frac{b}{2}$  sich zusammensetzenden Kurven. Die „verallgemeinerte  $K$ -Kurve“ ist dann einfach die aus den Evolutenbogen der Ellipsen und 4 Strecken auf den Achsen sich zusammensetzende Kurve und in Übereinstimmung mit den Festsetzungen der Seite 121 sind in der Figur 47 das Bogenelement und der Krümmungsradius für die Kurve des Punktes  $P_1$  positiv, für die des Punktes  $P_2$  negativ zu nehmen. Oder man wählt analog als verallgemeinerte  $K$ -Kurve ein solches gewöhnliches Viereck, bei dem die Summen der beiden Paare von Gegenseiten

Natürlich können wir unseren Beweis des Meißnerschen Satzes auch leicht in ein analytisches Gewand kleiden, ohne, wie Herr Meißner, Fouriersche Reihen zu benutzen. Um dies in Kürze anzugeben, sei, wie schon auf S. 71, die  $C$ -Kurve auf ein rechtwinkliges  $x, y$ -Koordinatensystem bezogen. Dann sind die Schwerpunktskoordinaten  $x^*, y^*$  bei der gleichmäßigen Massenbelegung der  $C$ -Kurve gegeben durch:

$$(27a) \quad x^* = \frac{1}{L} \cdot \int_C x_1 \cdot dS_1$$

und

$$(27b) \quad y^* = \frac{1}{L} \cdot \int_C y_1 \cdot dS_1,$$

wo  $x_1, y_1$  die Koordinaten eines Punktes  $P_1$ ,  $dS_1$  das zugehörige Bogenelement und  $L$  die gesamte Länge der  $C$ -Kurve bedeuten. Durch Einsetzen von  $dS_1 = \rho_1 d\tau$  — wegen der Stetigkeit von  $\rho_1$  siehe § 5, S. 87 ff. und S. 116 und wegen Einführung der Größe  $\tau$  die Gleichungen (20a, b), S. 120 — ergibt die Gleichung (27a):

$$x^* = \frac{1}{L} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + 2\pi} x_1 \cdot \rho_1 d\tau = \frac{1}{L} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} (x_1 \cdot \rho_1 + x_2 \cdot \rho_2) \cdot d\tau,$$

wo  $x_2, \rho_2$  sich auf den Gegenpunkt  $P_2$  des Punktes  $P_1$  beziehen, oder, da  $\rho_1 = \frac{b}{2} + \bar{\rho}$ ,  $\rho_2 = \frac{b}{2} - \bar{\rho}$  nach den Gleichungen (25a, b) ist:

$$x^* = \frac{1}{L} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} \frac{b}{2} (x_1 + x_2) d\tau + \frac{1}{L} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} \bar{\rho} (x_1 - x_2) d\tau.$$

Nun ist  $x_1 - x_2 = b \cdot \cos \tau$  und  $\bar{\rho} \cdot d\tau = dS$ , wo  $dS$  wieder das (positive oder negative) Bogenelement der  $C$ -Kurve bedeutet. Es geht also das letzte Integral über in:

$$b \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} \bar{\rho} \cdot \cos \tau d\tau = b \cdot \int_C \cos \tau \cdot dS = 0,$$

einander gleich sind oder die Kurve der Fig. 33, S. 111, läßt die tangierende Gerade sich „vollständig“ auf der  $K$ -Kurve abrollen, wobei sie sich bzw. um  $2\pi$  oder  $6\pi$  gedreht hat und mit zwei Punkten  $P_1, P_2$  und deren Mittelpunkt  $M$  die gewünschten Kurven beschreibt.

Auch der Satz von Minkowski (§ 12, S. 119) läßt sich dem Vorstehenden gemäß verallgemeinern. So ist in dem Beispiel der Fig. 47 die Bogendifferenz der beiden von  $P_1$  und  $P_2$  beschriebenen Kurven gleich  $2b \cdot \pi$ .

da die  $C'$ -Kurve eine geschlossene Kurve ist und das Integral ihre Projektion auf die  $y$ -Achse darstellt.<sup>1)</sup> Demnach wird schließlich, wenn wir  $L = b \cdot \pi$  nach dem Satze 53, S. 119 setzen:

$$(28) \quad x^* = \frac{b}{2L} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} (x_1 + x_2) d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_C x_1 \cdot \frac{dS_1}{e_1},$$

d. h. gleich der Abszisse des Krümmungsschwerpunktes. Analoges gilt für  $y^*$ , womit der gewünschte Beweis des Meißnerschen Satzes geliefert ist.

Setzen wir in dem vorletzten Integral  $x_1 + x_2 = 2\bar{x}$ , wo, wie früher  $\bar{x}, \bar{y}$  die Koordinaten des Punktes  $M$  der  $C'$ -Kurve bezeichnen, so folgt ebenfalls noch:

$$(29) \quad x^* = \frac{1}{\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \pi} \bar{x} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_C \bar{x} \frac{dS}{\rho},$$

welches Resultat den Satz 57 enthält.

#### § 14. Analytische Entwicklungen in Anlehnung an die Arbeiten von Hurwitz und Meißner.

Es sei gestattet, unsere bisherigen Betrachtungen noch durch einige analytische Ausführungen zu ergänzen, welche sich zwar an die Arbeiten der Herren Hurwitz und Meißner anlehnen, um gradezu diese Arbeiten zu unseren vorstehenden Untersuchungen in noch nähere Beziehung zu bringen, doch im Einzelnen über diese Arbeiten hinausgehen und im Gegensatz zu ihnen die Entwicklungen in Fouriersche Reihen nicht benutzen und insofern einfacheren Charakter besitzen. Unser Ausgangspunkt sei die Gleichung:

$$(30) \quad x \cdot \cos \tau + y \cdot \sin \tau - q(\tau) = 0,$$

wo  $q(\tau)$  eine sogleich noch näher zu bestimmende *eindeutige und periodische Funktion der Variablen  $\tau$  mit der Periode  $2\pi$*  sein soll. Für jeden Wert des Parameters  $\tau$ , der eben die Werte des Intervalles von 0 bis  $2\pi$  zu durchlaufen hat, soll nämlich die Gleichung die Stützgerade der zunächst als gegeben gedachten  $C$ -Kurve angeben, wobei der Koordinatenanfangspunkt ein *innerer* Punkt der  $C$ -Kurve sei (vgl. Satz 15, S. 77) und die *nebst  $q'(\tau)$  für das ganze Intervall stetige Funktion  $q(\tau)$  die „Stützgeradenfunktion“<sup>2)</sup>*, und  $\tau$  das Lot vom Koordinatenanfangspunkt

1) Es ist  $\cos \tau \cdot dS$  stets die Projektion des absolut genommenen Bogenelementes  $dS$  auf die  $y$ -Achse.

2) Nach Minkowski; vgl. z. B. seine Arbeit: *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann. Bd. 57, 1903, (Ges. Abh. Bd. 2, S. 231).

und dessen Abweichung von der  $x$ -Achse bedeuten. (Diese Größe  $\tau$  können wir also als identisch mit der in den Gleichungen (20a, b) S. 120 eingeführten ansehen.) Betreffs der Funktion  $q(\tau)$ , für die also die Bedingung

$$(31) \quad q(\tau) > 0$$

gilt, wollen wir sogleich in Beziehung auf unsere früheren Resultate noch folgendes voraussetzen:

**Annahmen IV:** Für die einzelnen Teilbogen, in die wir die  $C$ -Kurve zerlegt denken können<sup>1)</sup>, d. h. für sich aneinander schließende, in endlicher Zahl vorhandene Intervalle der Variablen  $\tau$  soll die Funktion  $q(\tau)$  selbst nebst ihren drei Ableitungen  $q'(\tau)$ ,  $q''(\tau)$ ,  $q'''(\tau)$  endlich und stetig sein mit der zugelassenen Ausnahme, daß bei der Annäherung an einen der Endpunkte selbst der Wert  $\frac{1}{q''(\tau)}$  stetig gegen 0 soll konvergieren können. (Vgl. schon jetzt die Annahmen I, II, und III, S. 71, 78 und 82 und die Anm. S. 129.)

Der einzelne Teilbogen der  $C$ -Kurve wird dann als Enveloppe der Stützgeraden<sup>2)</sup> durch die Gleichungen bestimmt:

$$(32a, b) \quad \begin{aligned} x &= q(\tau) \cdot \cos \tau - q'(\tau) \cdot \sin \tau, \\ y &= q(\tau) \cdot \sin \tau + q'(\tau) \cdot \cos \tau. \end{aligned}$$

Die Stütznormale, d. h. die Normale zur Stützgeraden im zugehörigen Kurvenpunkt, wird durch die Gleichung gegeben:

$$(33) \quad x \cdot \sin \tau - y \cdot \cos \tau + q'(\tau) = 0,$$

und die Evolute der  $C$ -Kurve, d. h. die  $K$ -Kurve, durch die Gleichungen:

$$(34a, b) \quad \begin{aligned} \xi &= -q'(\tau) \sin \tau - q''(\tau) \cos \tau = x - \rho \cdot \cos \tau, \\ \eta &= q'(\tau) \cos \tau - q''(\tau) \sin \tau = y - \rho \cdot \sin \tau, \end{aligned}$$

wobei die  $\xi, \eta$ -Achsen mit den  $x, y$ -Achsen identisch sind (vgl. die Gleichungen (5a, b) S. 84). Endlich folgen für den Krümmungsradius

$\rho = \frac{ds}{d\tau} = +\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  der  $C$ -Kurve und den Krümmungsradius  $\rho_k = \frac{d\rho}{d\tau}$  der  $K$ -Kurve die Gleichungen:

$$(35) \quad \rho = q(\tau) + q''(\tau),$$

$$(36) \quad \rho_k = \frac{d\rho}{d\tau} = q'(\tau) + q'''(\tau),$$

1) Hierbei bildet auch ein Eckpunkt der  $C$ -Kurve gewissermaßen einen Teilbogen für sich (vgl. S. 131).

2) Um zu ersehen, daß die zur Existenz der Enveloppe notwendigen Bedingungen für die Gleichung (30) erfüllt sind, vgl. v. Mangoldt, *Einführung in die höhere Mathematik*, Bd. II, Leipzig 1912, S. 464. Die dort genannte Determinante  $D(x, y, c)$  ist hier gleich 1, also von 0 verschieden, ebenso ist ja die Existenz von  $q''(\tau)$  vorausgesetzt.

sowie die Gleichungen:

$$(37 \text{ a, b}) \quad \frac{dx}{d\tau} = -q \cdot \sin \tau,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = q \cdot \cos \tau,$$

und

$$(38 \text{ a, b}) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -q_k \cdot \cos \tau,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -q_k \cdot \sin \tau.^1)$$

1) Die rechten Seiten der Gleichungen (32 a, b) können wir, indem wir den Parameter  $\tau$  mit dem Parameter  $t$  identifizieren, direkt als die auf S. 71 eingeführten Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  in spezieller Form ansehen. Dann ergibt sich insbesondere:

$$\varphi'(t) = -(q + q'') \sin \tau = -q \cdot \sin \tau,$$

$$\psi'(t) = (q + q'') \cos \tau = q \cdot \cos \tau,$$

so daß sich  $q = 0$  und  $\varphi' = \psi' = 0$  gegenseitig bedingen und

$$\varphi' \cdot \psi'' - \psi' \cdot \varphi'' = \varphi'^2 + \psi'^2$$

ist, (vgl. G. Scheffers, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Bd. I, Leipzig 1901, S. 17). Die früheren Annahmen I u. II (S. 71 u. 78) sind dann durch die Annahmen IV für die Funktion  $q(\tau)$  auch jetzt erfüllt. Die Annahmen III, S. 82 jedoch treten hier in etwas modifizierter Form auf. Denn die Existenz der dritten Ableitungen  $\varphi'''(t)$  und  $\psi'''(t)$  wird hier nicht gefordert, da die Aufstellung der Gleichung (36) diese Ableitungen nicht benötigt. Doch der Zweck der Annahmen III wird auch hier erfüllt, nämlich stets eine bestimmte Tangente und ein bestimmtes Bogenelement  $d\sigma$  für die einzelnen Teilbogen der  $K$ -Kurve in der Weise zu gewährleisten, daß nur für einen Endpunkt des Teilbogens zwar  $\frac{d\sigma}{d\tau}$  über jede Grenze hinaus wachsen kann, jedoch die Bogenlänge der  $K$ -Kurve bis zu ihrem entsprechenden Endpunkte hin stets endlich ist (vgl. Satz 22 S. 85).

Sind dagegen zunächst die Gleichungen (1a, b) S. 71 mit allgemeinen Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  gegeben, so bestimmen sich aus ihnen  $\tau$  und  $q(\tau)$  durch die Gleichungen:

$$\sin \tau = -\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}},$$

$$\cos \tau = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}},$$

und es ist

$$q(\tau) = \varphi(t) \cdot \cos \tau + \psi(t) \cdot \sin \tau,$$

da

$$q'(\tau) = -\varphi(t) \cdot \sin \tau + \psi(t) \cdot \cos \tau,$$

$$\varphi'(t) \cdot \cos \tau + \psi'(t) \cdot \sin \tau = 0$$

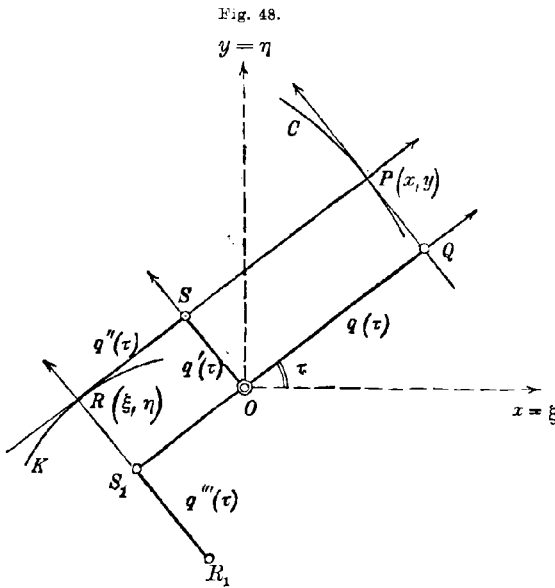
ist. Doch wollen wir auf diese Zusammenhänge zwischen den Funktionen  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  einerseits und  $q(\tau)$  andererseits (besonders wenn  $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$  ist, vgl. die Anm. S. 80) im einzelnen nicht näher eingehen.

und für das Bogenelement  $d\sigma$  der  $K$ -Kurve gilt:

$$(39) \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = + \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} = \pm \frac{d\rho}{d\tau} = \pm (q'(\tau) + q'''(\tau)),$$

(vgl. die Formeln (8) und (10) S. 85).

In der Fig. 48 seien  $P(x, y)$  und  $R(\xi, \eta)$  ein beliebiger Punkt im Innern eines Teilbogens der  $C$ -Kurve (wobei für diesen Punkt nicht



$\frac{d\rho}{d\tau} = 0$  sei) und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt, d. h. ein Punkt der  $K$ -Kurve, und  $R_1$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt der  $K$ -Kurve. Außerdem seien in der Figur vom Koordinatenanfangspunkt die Lote auf die Tangente und Normale des Punktes  $P$  gefällt.

Dann ist:

$$\vec{OQ} = q(\tau),$$

$$\vec{OS} = \vec{QP} = q'(\tau),$$

wobei, je nachdem  $q'(\tau)$  positiv oder negativ ist,

die Richtung  $\vec{QP}$  mit der „positiven“ (d. h. dem Werte  $(\tau + \frac{\pi}{2})$  oder wachsenden Werten von  $\tau$  entsprechenden) Tangentenrichtung der  $C$ -Kurve übereinstimmt oder nicht, ferner

$$\vec{RS} = q''(\tau),$$

wobei, je nachdem  $q''(\tau)$  positiv oder negativ ist,  $R$  auf der andern oder derselben Seite von  $S$  gelegen ist wie der Punkt  $P$ , d. h. die Richtung  $\vec{RS}$  mit der Richtung  $\vec{OQ}$  oder  $\vec{SP}$  übereinstimmt oder nicht, und endlich:

$$\vec{R_1S_1} = q'''(\tau),$$

wobei, je nachdem  $q'''(\tau)$  positiv oder negativ ist, die Richtung  $\vec{R_1S_1}$  mit der positiven Tangentenrichtung des Punktes  $P$  übereinstimmt oder nicht. (In der Fig. 48 sind insbesondere  $q'(\tau)$ ,  $q''(\tau)$  und  $q'''(\tau)$  positiv gewählt.)<sup>1)</sup>

1) Die Gleichungen (34 a, b) der  $K$ -Kurve sind ja ganz analog den Gleichungen (32 a, b) der  $C$ -Kurve gebaut, daher kann man natürlich, wenn für die Umgebung

Wie für die Stellen, wo zwei aufeinanderfolgende Teilbogen der  $C$ -Kurve entweder mit gemeinsamer Tangente oder in einer Ecke zusammenstoßen, die zugehörigen Teilbogen der  $K$ -Kurve ev. durch Hinzufügen von Verbindungsstrecken sich aneinander schließen, ist in § 5, S. 87 ff. ausführlich behandelt. Setzen die beiden aufeinander folgenden Teilbogen der  $C$ -Kurve sich mit gemeinsamer Tangente aneinander, so entspricht dieser Stelle ja ein einzelner bestimmter Wert  $\tau = \tau_\alpha$ ; setzen jene sich jedoch in einer Ecke aneinander, so entsprechen die betreffenden beiden Endpunkte der Teilbogen verschiedenen Werten  $\tau_\alpha$  und  $\tau_\beta$  des Parameters  $\tau$ , und den Werten von  $\tau$  für das noch ausgefallene Intervall  $\tau_\alpha \leq \tau \leq \tau_\beta$  entspricht der Drehung der Stützgeraden um den Endpunkt gemäß derselbe Punkt  $(x, y)$  in den Gleichungen (32a, b), wobei für alle Werte des genannten Intervalls  $\varrho = q + q'' = 0$  ist. Somit erkennt man, daß allen Teilbogen und Ecken zusammengenommen für den Parameter  $\tau$  das Durchlaufen des ganzen Intervalls  $0 \leq \tau < 2\pi$  entspricht.

Haben wir bisher die  $C$ -Kurve als von vornherein gegeben angesehen, so können wir jetzt umgekehrt für die Funktion  $q(\tau)$  folgenden Satz aufstellen:

58. *Als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Gleichung (30) in Verbindung mit den Annahmen IV eine Kurve konstanter Breite  $b$  (mit dem Koordinatenanfangspunkt in ihrem Innern) bestimmt, ergibt sich: Es muß erstens die stets positive Funktion  $q(\tau)$  eine eindeutige und stetige periodische Funktion mit der Periode  $2\pi$  sein, deren Ableitung  $q'(\tau)$  ebenfalls in dem ganzen Intervall stetig ist und die der Bedingung*

$$(40) \quad q + q'' = \varrho \geq 0$$

*genügt, und zweitens muß*

$$(41) \quad q(\tau) + q(\tau + \pi) = b$$

*sein.*

Den einfachen Beweis dieses Satzes wollen wir nicht weiter ausführen; es sei nur noch erwähnt, daß der erste Teil der Bedingungen für sich die geschlossene Kurve als *eine überall konvexe* (ohne geradlinige Teile) festlegt, wobei nur noch

$$q(\tau) + q(\tau + \pi) > 0$$

des Punktes  $P$  der  $C$ -Kurve auch noch die über die dritte hinausgehenden höheren Ableitungen der Funktion  $q(\tau)$  existieren und endlich und stetig sind, die Figur 48 in der Weise fortsetzen, daß man auch für die  $K$ -Kurve die Evolute und wieder deren Evolute usw. hinzufügt und demgemäß die höheren Ableitungen von  $q(\tau)$  geometrisch veranschaulicht.

hinzuzufügen ist, wenn man einen Punkt oder eine Strecke als solche konvexe Kurve ausschließen will. (Es schließt sich nämlich jeder folgende Teilbogen der Kurve unmittelbar mit seinem Anfangspunkt an den Endpunkt des vorhergehenden an und zwar „tangential“. Aus der Gleichung (40) ist ferner, unter Benutzung der Gleichungen (31a, b) leicht zu folgern, daß jeder zugehörige Teilbogen, ja die ganze Kurve stets auf derselben Seite jeder Geraden (30) gelegen sein muß.)

Daß der erste Teil der Bedingungen des Satzes 58 nicht schon in dem zweiten Teil enthalten ist, lassen diejenigen  $C''$ -Kurven (vgl. S. 120) erkennen, die zwar Äquidistanten einer gegebenen  $C$ -Kurve, aber nicht auch  $C$ -Kurven sind. Denn für die  $C''$ -Kurven gilt der zweite, aber nicht der erste Teil der Bedingungen. Ebenso zeigen diese  $C''$ -Kurven, daß auch die Bedingung  $q + q'' \geq 0$  nicht schon eine Folge der Eindeutigkeit, Stetigkeit und Periodizität von  $q(\tau)$  und  $q'(\tau)$  ist. Doch folgt aus den Gleichungen (40) und (41)

$$(42) \quad \varrho(\tau) + \varrho(\tau + \pi) = b,$$

also  $\varrho(\tau) \leq b$  oder  $0 \leq q(\tau) + q''(\tau) \leq b$  oder, da  $q(\tau) > 0$  und  $q''(\tau) + q''(\tau + \pi) = 0$  ist gemäß der Gleichung (41),  $q''(\tau) \leq b$ , d. h. daß  $q''(\tau)$  stets endlich sein soll, brauchte nicht noch besonders in den Annahmen IV ausgesprochen zu werden (vgl. den Satz S. 18, S. 80). Die Gleichung (41) enthält ebenfalls bereits die Bedingung in sich, daß die Funktion  $q(\tau)$  die Periode  $2\pi$  besitzt. Wir werden sogleich sehen, daß die Gleichung (42) zusammen mit der Bedingung der Periodizität für  $q(\tau)$  gradezu mit der Gleichung (41) identisch ist. Wir behaupten nämlich, daß die in dem Satze 58 angegebenen Bedingungen sich in folgender Weise noch einschränken lassen:

**59.** *In dem Satze 58 kann an die Stelle der Gleichung (41) die Gleichung (42) eintreten, d. h. es läßt sich (beim Bestehen der übrigen in Satze 58 ausgesprochenen Bedingungen) die Gleichung (41) aus der Gleichung (42) folgern.*

Um dies zu erkennen, gehen wir aus von den aus den Gleichungen (32a, b) folgenden Gleichungen:

$$(43) \quad q(\tau) = \sin \tau \cdot \int_0^\tau \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau - \cos \tau \cdot \int_0^\tau \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau + A \cos \tau + B \sin \tau.$$

$$(44) \quad q'(\tau) = \cos \tau \cdot \int_0^\tau \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \sin \tau \cdot \int_0^\tau \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau - A \sin \tau + B \cos \tau.$$

wo

$$A = x_{\tau=0} \quad \text{und} \quad B = y_{\tau=0} \quad \text{gilt.}$$



Nun ist hiernach:

$$\begin{aligned} q(\tau + \pi) &= \sin(\tau + \pi) \cdot \int_0^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau - \cos(\tau + \pi) \int_0^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau + A \cos(\tau + \pi) \\ &\quad + B \sin(\tau + \pi) \\ &= -\sin \tau \cdot \int_{\pi}^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \cos \tau \cdot \int_{\pi}^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau \\ &\quad - \sin \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \cos \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau - A \cos \tau - B \sin \tau. \end{aligned}$$

Da nun  $\varrho(\tau + \pi) = b - \varrho(\tau)$  ist, so folgt:

$$\int_{\pi}^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau = \int_0^{\tau} \varrho(\tau + \pi) \cos(\tau + \pi) \, d\tau = -b \sin \tau + \int_0^{\tau} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau$$

und

$$\int_{\pi}^{\tau + \pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau = b \cos \tau - b + \int_0^{\tau} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau.$$

Also ist:

$$\begin{aligned} q(\tau + \pi) &= -\sin \tau \cdot \int_0^{\tau} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \cos \tau \cdot \int_0^{\tau} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau + (b - b \cos \tau) \\ &\quad - \sin \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \cos \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau - A \cos \tau - B \sin \tau \end{aligned}$$

oder

$$q(\tau) + q(\tau + \pi) = (b - b \cos \tau) - \sin \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau + \cos \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau.$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$q(\tau + \pi) + q(\tau + 2\pi) = (b + b \cos \tau) + \sin \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau - \cos \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau,$$

und durch Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$q(\tau + 2\pi) - q(\tau) = 0 = 2 \cdot \left[ b \cos \tau + \sin \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \cos \tau \, d\tau - \cos \tau \cdot \int_0^{\pi} \varrho(\tau) \sin \tau \, d\tau \right],$$

also:

$$q(\tau) + q(\tau + \pi) = b.$$

Wollen wir diese Rechnung ihrem geometrischen Inhalte nach einfach übersehen, so müssen wir wieder zu der Betrachtung der  $K$ -Kurve zurückkehren. Aus der Gleichung (42) folgt ja  $\varrho_k(\tau) = -\varrho_k(\tau + \pi)$ , also nach den Gleichungen (38a, b):

$$\left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau} = \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau + \pi} \quad \text{und} \quad \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right)_{\tau} = \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right)_{\tau + \pi},$$

oder

$$\begin{aligned}\xi(\tau + \pi) &= \xi(\tau) + \xi(\pi) - \xi(0), \\ \eta(\tau + \pi) &= \eta(\tau) + \eta(\pi) - \eta(0), \text{ d. h.}\end{aligned}$$

Der Bogen der  $K$ -Kurve, der Evolute der  $C$ -Kurve, ist vom Werte  $\pi$  ab kongruent zu dem Bogen vom Werte 0 ab. Diese beiden Bogen können aber auch nicht gegen einander verschoben sein, d. h. es muß  $\xi(\pi) = \xi(0)$  und  $\eta(\pi) = \eta(0)$  sein, da ja die  $C$ -Kurve geschlossen ist und also  $\xi(\tau + 2\pi) = \xi(\tau)$  und  $\eta(\tau + 2\pi) = \eta(\tau)$  ist. Dann aber muß auch  $q(\tau) + q(\tau + \pi) = b$  sein, da die  $C$ -Kurve für die Werte  $\tau$  und  $\tau + \pi$  die Evolvente desselben Evolutenbogens ist (vgl. auch die Gleichungen (34a, b), aus denen  $x(\tau + \pi) - x(\tau) = \cos \tau \cdot (\rho(\tau) + \rho(\tau + \pi))$  und  $y(\tau + \pi) - y(\tau) = -\sin \tau \cdot (\rho(\tau) + \rho(\tau + \pi))$  folgt).

Jetzt zeigt sich dann endlich, daß nunmehr die Sätze 58 und 59 noch weiter in die folgende einfache Form gebracht werden können:

**60.** *Als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Gleichung (30) eine Kurve konstanter Breite  $b$  bestimmt, wenn  $\tau$  das Intervall von 0 bis  $2\pi$  durchläuft, ergibt sich: Es muß die Funktion  $q(\tau)$  ein Integral der Differentialgleichung*

$$(45) \quad q(\tau) + q''(\tau) = \rho(\tau)$$

*sein, wo die für das gleiche Intervall erklärte und abgesehen von einzelnen Ausnahmestellen eindeutige und stetige Funktion  $q(\tau)$  der Ungleichung (40)  $q(\tau) \geq 0$  und der Gleichung (42)  $q(\tau) + q(\tau + \pi) = b$  genügt und*

$$(46) \quad \int_0^{2\pi} q(\tau) \cos \tau \, d\tau = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} q(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0 \quad \text{ist.}^1)$$

Man kann dann also auch zuerst die Funktion  $q(\tau)$  diesen Bedingungen gemäß gegeben denken und zu ihr die Funktion  $q(\tau)$  bestimmen. Die lineare Differentialgleichung (45) ist ein spezieller Fall der sogenannten Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung<sup>2)</sup>; ihr allgemeines Integral wird oben durch die Gleichung (43) gegeben. Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  kann es stets noch so eingerichtet werden, daß der Koordinatenanfangspunkt im Innern der  $C$ -Kurve liegt. Hervorgehoben sei noch, daß der Satz 60 die Ableitung der Funktion  $q(\tau)$ , d. h.  $q'''(\tau)$  nicht enthält. —

Herr Hurwitz hat nun insbesondere (a. a. O. S. 388) den Satz 43, S. 106 abgeleitet, daß jede  $C'$ -Kurve stets eine ungerade Anzahl von

1) Vgl. den Satz von Minkowski für konvexe Flächen, Ges. Abh. Bd. 2 S. 130 Nr. 4 und S. 264.

2) Vgl. z. B. A. Kalähne, Erzwungene Schwingungen, Handwörterbuch der Naturwissenschaften Bd. VIII, Jena 1913, S. 1112 ff.

Umkehrpunkten und zwar mindestens drei besitzt. Seinen Beweisgang können wir auch mit unseren obigen Formeln (also ohne Fouriersche Reihen) leicht wiedergeben:

Die Äquidistante der  $C$ -Kurve im Abstände  $c$  ist durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
 x^* &= q(\tau) \cos \tau - q'(\tau) \cdot \sin \tau + c \cdot \cos \tau \\
 &= (q + c) \cos \tau - q'(\tau) \cdot \sin \tau, \\
 (47 \text{ a, b}) \quad y^* &= q(\tau) \cdot \sin \tau + q'(\tau) \cos \tau + c \cdot \sin \tau \\
 &= (q + c) \sin \tau + q'(\tau) \cos \tau,
 \end{aligned}$$

speziell also die  $C'$ -Kurve ( $c = -\frac{b}{2}$ ) durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (48 \text{ a, b}) \quad \bar{x} &= \left(q - \frac{b}{2}\right) \cos \tau - q'(\tau) \sin \tau, \\
 \bar{y} &= \left(q - \frac{b}{2}\right) \sin \tau + q'(\tau) \cos \tau,
 \end{aligned}$$

wobei der Krümmungsradius  $\bar{\rho}$  für die  $C'$ -Kurve durch

$$(49) \quad \bar{\rho}(\tau) = \rho(\tau) - \frac{b}{2} = q(\tau) + q''(\tau) - \frac{b}{2}$$

bestimmt ist. Herr Hurwitz macht nun von dem Satze Gebrauch: Ein Punkt der  $C'$ -Kurve ist stets dann und nur dann ein Umkehrpunkt, wenn in ihm der (stets endliche) Krümmungsradius  $\bar{\rho}$  das Vorzeichen wechselt, also durch 0 hindurchgeht.

Da nun nach der Gleichung (41)  $\bar{\rho}(\tau) = -\bar{\rho}(\tau + \pi)$  ist, so muß notwendig  $\bar{\rho}(\tau)$  für eine *ungerade* Zahl von Werten  $\tau$  im Intervall von 0 bis  $\pi$ , also *wenigstens einmal* sein Zeichen wechseln. Würde dies aber *nur für einen Wert*  $\tau = \tau_0$  dieses Intervalles statthaben, so würde  $\bar{\rho}(\tau) \cdot \sin(\tau - \tau_0)$  im ganzen Intervall von 0 bis  $2\pi$  dasselbe Zeichen haben. Dem widerspricht aber, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \sin(\tau - \tau_0) d\tau = \cos \tau_0 \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \sin \tau d\tau - \sin \tau_0 \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \cos \tau d\tau$$

= 0 ist, da die  $C'$ -Kurve geschlossen ist und folglich

$$\int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \sin \tau d\tau = 2 \int_0^{\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \sin \tau d\tau = -2 \int_c^c d\bar{x} = 0$$

und ebenso:

$$\int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \cos \tau d\tau = 2 \int_0^{\pi} \bar{\rho}(\tau) \cdot \cos \tau d\tau = 2 \int_c^c d\bar{y} = 0$$

ist.<sup>1)</sup> Folglich muß  $\bar{\rho}(\tau)$  wenigstens für drei Werte  $\tau$  im Intervall von 0 bis  $\pi$  sein Zeichen wechseln, also die  $C'$ -Kurve wenigstens drei Umkehrpunkte haben.

Es ist nun nicht möglich, den vorstehenden Beweis in gleicher Form auf den analogen Satz 32, S. 94 für die  $K$ -Kurven zu übertragen. Um dies zu erkennen, braucht man nur, von manchem anderen abgesehen, zu beachten, daß der Krümmungsradius  $\rho_x$  der  $K$ -Kurve ja überhaupt für alle Werte  $\tau$  verschwinden kann, nämlich dann, wenn die  $K$ -Kurve ein Polygon ist. —

Nach unseren Annahmen ist  $\rho(\tau)$  für alle Werte  $\tau$  in dem Intervall von 0 bis  $2\pi$  eine endliche, stetige und eindeutige Funktion des Argumentes  $\tau$  mit Ausnahme etwa einer endlichen Zahl von Werten  $\tau$  für die  $\rho(\tau)$  unstetig ist; auch besitzt  $\rho(\tau)$  nur eine endliche Zahl von Maxima oder Minima.<sup>2)</sup> Beim Erfülltsein dieser „Dirichletschen Bedingungen“ läßt sich dann  $\rho(\tau)$  in eine Fouriersche Reihe entwickeln:

$$(50) \quad \rho(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_x \cos x\tau + a_x' \cdot \sin x\tau).$$

Hiermit haben wir den engsten Anschluß an die Arbeiten der Herren Hurwitz und Meißner erreicht (vgl. insbesondere Meißner, (1), a. a. O. S. 310 u. 314). Wie im einzelnen dort nachzulesen ist, muß in dieser Fourierschen Reihe insbesondere, da die  $C$ -Kurve geschlossen ist,  $a_1 = a_1' = 0$  sein, außerdem aber  $a_0 = \frac{L}{\pi}$ , wo  $L$  die Länge der  $C$ -Kurve bezeichnet. Ferner muß der Bedingung (42) gemäß gelten:

$$a_x = a_x' = 0$$

für  $x = 2, 4, 6 \dots$  (Meißner, (1) a. a. O. S. 313; Hurwitz a. a. O. S. 336), und es muß stets den Bedingungen (40) und (42) gemäß

$$\frac{a_0}{2} \geq \left| \sum_1^{\infty} (a_x \cos x\tau + a_x' \cdot \sin x\tau) \right|$$

sein, wobei  $a_0 = b$ , d. h. gleich der Breite der  $C$ -Kurve ist.<sup>3)</sup> Wie schließlich sich die Funktionen  $q(\tau)$  und  $q'(\tau)$ , sowie die rechten Seiten der Gleichungen (32a, b) ebenfalls in Gestalt Fourierscher Reihen aus der Entwicklung (50) ergeben, ist am einfachsten aus der Zusammenstellung der Formeln von Hurwitz auf S. 310 der Arbeit (1) des Herrn Meißner zu ersehen.

1) Da  $\bar{\rho} = \rho - \frac{b}{2}$  ist, so ist auch:

$$\int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\tau) \sin \tau \cdot dt = \int_0^{2\pi} \rho(\tau) \sin \tau d\tau = - \int_C dx = 0.$$

2) Vgl. die Annahmen III, S. 82.

3) Vgl. den Satz 50, S. 112.

## Einige Beispiele zur Lorentz-Einsteinschen Relativmechanik.<sup>1)</sup>

Von FERENCZ JÜTTNER in Breslau.

Da in der Literatur bisher nur recht wenige Beispiele spezieller Art zur Mechanik vom Standpunkte des Lorentz-Einsteinschen Relativprinzips<sup>2)</sup> durchgeführt wurden, möge hier ein Oszillator, dessen Anziehungsmittelpunkt ruht, sowie die Bewegung bei konstanter Kraft nach der neuen Mechanik behandelt werden, indem jedesmal zuerst die Bewegung bei Beschränkung auf eine gerade Linie und sodann der räumliche Vorgang erörtert werde. Die Darstellung soll so gestaltet werden, daß die Analogie zu den Rechnungen der gewöhnlichen Mechanik recht deutlich hervortritt; daher wird anfangs von der allgemeinen von H. Poincaré<sup>3)</sup> begründeten Auffassung der Relativtheorie als einer Invariantentheorie eines gewissen vierdimensionalen Raumes nicht unmittelbar Gebrauch gemacht werden. Im Einklange hiermit wird zuerst der Begriff der gewöhnlichen Zeit und der gewöhnlichen oder Newtonschen Kraft zugrunde gelegt und erst später der Begriff der Eigenzeit und der „Minkowskischen Kraft“ (nach einem von H. A. Lorentz<sup>4)</sup> eingeführten Ausdruck) angewandt werden.

### I. Abschnitt.

#### Der Oszillator in der Relativtheorie.

##### § 1. Der lineare Newtonsche Oszillator; Anwendung auf die Theorie der spezifischen Wärme.

Es soll hier die freie ungedämpfte Schwingung eines Massenpunktes betrachtet werden, der von einem ruhenden Anziehungsmittelpunkt eine gewöhnliche oder Newtonsche quasielastische Kraftwirkung, d. h. proportional dem Abstände, erfährt.

1) Vorgetragen am 24. Juli 1911 in der Mathematischen Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau; abgedruckt (mit Zusätzen) aus dem Jahresbericht der Gesellsch. für 1911, Breslau 1912.

2) H. A. Lorentz, Verslag. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam **12** (1904), S. 986 bis 1009 (Sitzung vom 23. April 1904).

A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17** (1905), S. 891 bis 921.

3) H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo **21** (1906), S. 129 bis 176 (Sitzung vom 23. Juli 1905).

4) H. A. Lorentz, Phys. Ztschr. **11** (1910), S. 1237 und 1238.

Um zuerst die *geradlinige* Schwingungsbewegung zu untersuchen, so werde die Bahngerade als  $x$ -Achse und das Anziehungszentrum als Anfangspunkt eines als ruhend betrachteten dynamisch berechtigten Koordinatensystems angesehen.

Ist die (Ruh)-Masse des sich bewegenden Punktes  $m$ , seine Geschwindigkeit  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit, so ist sein Impuls  $m\bar{x}$ , worin

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

der auf die Masseneinheit reduzierte Impuls ist.<sup>1)</sup> Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes ist nun:

$$(2) \quad m \frac{d\bar{x}}{dt} = -a^2 x.$$

Hierin stellt der rechts stehende Ausdruck die wirkende Newtonsche elastische Kraft dar.<sup>2)</sup> In entwickelter Form lautet die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \right)^3 \cdot \ddot{x} = -a^2 x;$$

hierin ist der Koeffizient von  $\ddot{x}$ , d. i.  $m \frac{d\bar{x}}{d\dot{x}}$ , die longitudinale Masse des bewegten Punktes.

Wie in der gewöhnlichen Mechanik ist  $\dot{x}$  ein integrierender Faktor von (3) und führt auf die Gleichung von der *Erhaltung der Energie*:

$$(4) \quad -\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}a^2 x^2 = \varepsilon;$$

die beiden Summanden links bedeuten die kinetische und die potentielle Energie, die Integrationskonstante  $\varepsilon$  die Gesamtenergie des Massenpunktes. Man bezeichne nun den absoluten Betrag der größten Elongation  $x$ , die gemäß (4) möglich ist und offenbar der Geschwindigkeit  $\dot{x} = 0$  entspricht, mit  $h$ , d. h.

$$(5) \quad \text{für } \dot{x} = 0 \text{ sei } |x| = h;$$

1) Über die Grundlagen der Relativitätsmechanik vergleiche man M. Planck, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 8 (1906), S. 136 bis 141 (Sitzung vom 23. März 1906).

2) Bei H. A. Lorentz, Phys. Ztschr. a. a. O., S. 1239, findet man das Kraftgesetz auch auf den Fall transformiert angegeben, daß das Anziehungszentrum sich geradlinig gleichförmig bewegt.

daß dieser Wert  $h$  von  $|x|$  bei der Bewegung tatsächlich erreicht wird und somit ihre Amplitude ist, wird sich später zeigen (vgl. Gleichung (12)). Nun kann man die Gesamtenergie  $\varepsilon$  durch  $h$  ausdrücken:

$$(6) \quad \varepsilon = mc^2 + \frac{1}{2} a^2 h^2,$$

und (4) wird sodann

$$(4^1) \quad \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \frac{1}{2} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2.$$

Löst man diese Gleichung nach  $\dot{x}$  auf, so folgt

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{c \cdot \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2 \right\}^2 - m^2 c^4}}{\frac{1}{2} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2}.$$

Vereinfacht man den Radikanden und trennt dann die Variablen, so ergibt die Integration, wenn man noch (vgl. (4)) die weitere Grenzbedingung:

$$(8) \quad \text{für } x = 0 \text{ sei } t = t_0,$$

einführt, folgende Lösung unserer Aufgabe:

$$(9) \quad \int_0^x \frac{\frac{1}{2} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2}{\sqrt{(h^2 - x^2) \left( \frac{1}{4} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2 \right)}} dx = ac(t - t_0).$$

Um eine genauere Diskussion von (9) zu ermöglichen, werde das links stehende elliptische Integral auf die Jacobischen elliptischen Funktionen  $\operatorname{sn} u$  und  $Z(u)$  zurückgeführt. Zu diesem Zwecke ersetze man die Variable  $x$  mittels der Gleichung

$$x = h\xi$$

durch  $\xi$ ; ferner führe man die Größe

$$(10) \quad \frac{\frac{1}{4} a^2 h^2}{mc^2 + \frac{1}{4} a^2 h^2} = k^2$$

ein, die offenbar immer reell positiv und kleiner als 1 ist; unter  $k$  selbst sei die positive Quadratwurzel aus  $k^2$  verstanden. Dann geht das elliptische Integral in (9) über in:

$$\frac{ah}{2k} \left\{ (1 + k^2) \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} - 2k^2 \int_0^\xi \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} \right\};$$

d. i. eine lineare Verbindung eines Legendreschen Normalintegrals 1. Gattung mit einem Jacobischen Normalintegral 2. Gattung, wobei  $k$  der Modul ist.

Setzt man nun:

$$\xi = \operatorname{sn}(u, k),$$

so wird

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = u$$

und

$$\int_0^\xi \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \int_0^u \operatorname{sn}^2 u du = \frac{1}{k^2} \cdot \left\{ \frac{K-E}{K} \cdot u - Z(u) \right\};$$

dabei bedeuten  $K$  und  $E$  die vollständigen Normalintegrale 1. und 2. Gattung, beide nach Legendres Definition verstanden:

$$K = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \quad E = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{k^2\xi^2}{1-\xi^2}} \cdot d\xi.$$

Ferner führe man den zu  $k$  komplementären Modul  $k'$  ein, so daß also die Beziehung gilt:

$$(11a) \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

oder in entwickelter Form:

$$(11b) \quad k'^2 = \frac{mc^2}{mc^2 + \frac{1}{4}a^2h^2}.$$

Dann wird das allgemeine elliptische Integral in Gleichung (9):

$$\frac{ah}{k} \cdot \left\{ \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{2}k'^2 \right) \cdot u + Z(u) \right\}.$$

Somit lautet die Lösung unserer Aufgabe nunmehr:

$$(12) \quad \begin{cases} x = h \cdot \operatorname{sn} u, \\ t - t_0 = \frac{h}{ck} \cdot \left\{ \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{2}k'^2 \right) \cdot u + Z(u) \right\}. \end{cases}$$

Wenn  $t$  zunimmt, so wächst auch der reelle Parameter  $u$ , und  $x$  variiert beständig zwischen  $+h$  und  $-h$ , indem es jedesmal seinen früheren Wert annimmt, wenn  $u$  um  $4K$  wächst.

Da ferner schon  $2K$  die Grundperiode von  $Z(u)$  ist, so wird die *Schwingungsdauer*  $T$  des Punktes gleich dem mit  $4K$  multiplizierten Koeffizienten von  $u$  in der zweiten Gleichung von (12):

$$(13) \quad T = \frac{2h}{ck} (2E - Kk'^2).$$

Führt man  $T$  in die Lösung (12) ein, so nimmt sie die einfache Form an:

$$(14) \quad \begin{cases} x = h \cdot \operatorname{sn} u, \\ t - t_0 = \frac{T}{4K} \cdot u + \frac{h}{ck} \cdot Z(u). \end{cases}$$



Benutzt man endlich die *Frequenz* für 4  $K$  Sekunden

$$(13^1) \quad n = \frac{4K}{T}$$

und ersetzt die Grenzbedingung (8) durch die andere:

$$(8a) \quad \text{für } u = u_0 \text{ sei } t = 0 \text{ und } x = x_0,$$

wo  $u_0$  als Phasenkonstante aufzufassen ist, so geht (14) über in:

$$(14a) \quad \begin{cases} x = h \cdot \operatorname{sn} u, \\ nt + u_0 = u + \frac{hn}{ck} \cdot (Z(u) - Z(u_0)). \end{cases}$$

Jetzt möge gezeigt werden, daß die Lösung unserer Aufgabe für Geschwindigkeiten des Massenpunktes, die sehr *klein gegen die Lichtgeschwindigkeit*  $c$  sind, in die *Sinusschwingung* der gewöhnlichen Mechanik ausartet. In diesem Falle, der auch durch  $\lim c = \infty$  gekennzeichnet werden kann, ist gemäß (10) und (11a)

$$k^2 = 0, \quad k'^2 = 1.$$

Daher arten die elliptischen Funktionen folgendermaßen aus:

$$\operatorname{sn} u = \sin u, \quad K = E = \frac{\pi}{2},$$

$$Z(u) \equiv 0.$$

Ferner wird

$$\lim_{c=\infty} \frac{h}{ck} = \lim_{c=\infty} \frac{2\sqrt{mc^2 + \frac{1}{4}a^2h^2}}{ac} = \frac{2\sqrt{m}}{a}.$$

Daher ergibt (13) für die Schwingungsdauer

$$(13^*) \quad T^{(0)} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{a},$$

und die Frequenz für 4  $K$  Sekunden geht in diejenige für  $2\pi$  Sekunden über, nämlich gemäß (13<sup>1</sup>) in:

$$(13^{1*}) \quad n^{(0)} = \frac{a}{\sqrt{m}}.$$

Die Lösung (14a) endlich nimmt die Form an:

$$x = h \cdot \sin u, \quad n^{(0)}t + u_0 = u$$

oder in entwickelter Gestalt:

$$(14a^*) \quad x = h \cdot \sin \left( \frac{a}{\sqrt{m}} t + u_0 \right).$$

Am Schluß dieses Paragraphen möge noch eine Anwendung der Formel (13) für die Schwingungsdauer auf die Theorie der *spezifischen*

*Wärme fester Körper*, welche Einstein<sup>1)</sup> auf Grund der Energiequantenhypothese von Planck gegeben hat, gemacht werden. Da die Geschwindigkeit der Oszillatoren, auf deren Schwingungsenergie jene spezifische Wärme beruht (es sei hier an elektrisch ungeladene, linear schwingende Atome gedacht), gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  noch immer verhältnismäßig klein ist, so kann statt der Gleichung (13) eine Näherungsformel angewandt werden. Setzt man nämlich näherungsweise:

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right), \quad E' = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4}\right),$$

so erhält man durch Reihenentwicklung den Ausdruck:

$$(13^{**}) \quad T = 2\pi \frac{V\bar{m}}{a} \cdot \left(1 + \frac{5a^2 h^2}{16mc^2}\right).$$

Der Oszillator schwingt also langsamer, als nach der gewöhnlichen Newtonschen Mechanik zu erwarten wäre.

Betrachten wir nun als Beispiel die Schwingungen eines einzelnen Atoms im festen *Silber*. Hier ist:

$$T = 3 \cdot 10^{-13} \text{ sec (nach W. Nernst)}^2),$$

$$m = 1,76 \cdot 10^{-22} \text{ g},$$

daher gemäß (13\*) angenähert:

$$a = 275 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

Nimmt man ferner an, daß die Amplitude  $h$  eines Atoms in jedem beliebigen festen Stoffe höchstens  $\frac{1}{40}$  des Mittelpunktsabstandes zweier benachbarten Atome betragen kann<sup>3)</sup> und setzt man letzteren für Silber zu  $0,3 \cdot 10^{-7} \text{ cm an}^3$ ), so wird

$$h = 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ cm}.$$

Da endlich

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1},$$

so wird das Korrektionsglied in Formel (13\*\*)

$$\frac{5a^2 h^2}{16mc^2} = 0,84 \cdot 10^{-13}.$$

Obwohl also der betrachtete Oszillator, das Ag-Atom, die ungeheure Zahl von 3,3 Billionen Schwingungen in der Sekunde macht, so ist die Abweichung des Ergebnisses der neuen Mechanik von dem der

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 22 (1907), S. 180 bis 190 und S. 800.

2) W. Nernst, Ztschr. f. Elektrochem. 17 (1911), S. 275.

3) Diese Werte ergeben sich aus den Anschauungen und Formeln einer Arbeit von F. A. Lindemann, Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 609 bis 612.

alten unmerklich klein; die Schwingungsdauer ergibt sich bei Annahme derselben elastischen Kraft in der Relativmechanik um  $0,84 \cdot 10^{-11}\%$  vergrößert.

§ 2. Der räumliche Newtonsche Oszillator.

Um jetzt die *räumliche* Schwingungsbewegung einer punktförmigen Masse  $m$  zu behandeln, werde wieder als Anziehungszentrum der Anfangspunkt  $O$  des zugrunde liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems angenommen. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes sei  $q$ , seine Bewegungsgröße  $mp$ , und die Komponenten der letzteren nach den Achsen seien  $m\xi$ ,  $m\eta$ ,  $m\zeta$ . Dann gelten die Beziehungen<sup>1)</sup>:

$$(15) \quad \begin{cases} q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, & p = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ \xi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \eta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \zeta = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = p^2. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen sind nun:

$$(16) \quad m \frac{d\xi}{dt} = -a^2 x, \quad m \frac{d\eta}{dt} = -a^2 y, \quad m \frac{d\zeta}{dt} = -a^2 z,$$

worin je rechts die Komponenten der Newtonschen elastischen Kraft stehen; weiter ausgeführt lauten die Gleichungen:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \ddot{x} + \frac{m \frac{q \cdot \dot{q}}{c^2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^3} \cdot \dot{x} = -a^2 x, \\ \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \ddot{y} + \frac{m \frac{q \cdot \dot{q}}{c^2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^3} \cdot \dot{y} = -a^2 y, \\ \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \ddot{z} + \frac{m \frac{q \cdot \dot{q}}{c^2}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^3} \cdot \dot{z} = -a^2 z \end{cases}$$

Betrachtet man jetzt die Determinante:

$$(18a) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}$$

1) Vgl. M. Planck, a. a. O.

und beachtet, daß wegen (17) die Elemente z. B. der ersten Zeile durch Komposition der entsprechenden Elemente der beiden anderen Zeilen mit denselben Faktoren entstehen, so erkennt man, daß während der Bewegung des Punktes

$$(18b) \quad \Delta \equiv 0$$

ist. Dies bedeutet aber, daß die Schmiegungebenen aller Punkte der Bahnlinie durch den Anfangspunkt  $O (0/0/0)$  gehen, d. h., daß die Bahnlinie in einer durch  $O$  gehenden Ebene liegt.<sup>1)</sup> Diese Ebene möge zur  $xy$ -Ebene gewählt werden; dann ist beständig  $z = 0$ , und die dritten Gleichungen von (16) wie von (17) können als identisch erfüllt unterdrückt werden.

Durch Komposition der ersten beiden Gleichungen (17) mit den Faktoren  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  sowie darauf folgende Integration nach  $t$  erhält man die Gleichung des *Energiesatzes*:

$$(19) \quad \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2} a^2 q^2 + \varepsilon,$$

worin

$$(20) \quad q^2 = x^2 + y^2$$

das Quadrat des Abstandes des Punktes von  $O$  ist. Analog wie in Gleichung (4) bedeuten die einzelnen Glieder in (19) die kinetische, potentielle und gesamte Energie des Massenpunktes. Seine Entfernung  $q$  von  $O$  geht auch hier offenbar nicht über eine gewisse endliche Größe  $H$  hinaus, die dem Werte  $q = 0$  entspricht; jedoch wird dieser Wert  $H$  hier, falls die Schwingung nicht in eine geradlinige ausartet, bei der Bewegung nicht erreicht.

Komponiert man ferner die ersten beiden Gleichungen (17) mit den Faktoren „ $-y$ “ und „ $+x$ “ und integriert dann nach  $t$ , so erhält man die Gleichung des *Flächensatzes*

$$(21) \quad \frac{xy - yx}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = f,$$

wo  $f$  eine Konstante ist.

Bemerkt sei, daß sich (19) und (21) auch unmittelbar aus den beiden ersten Gleichungen von (16) gewinnen lassen, indem man diese

1) Vergleiche über dieses keine Integration erfordernde notwendige und hinreichende Kriterium, das auch auf den Fall einer nicht durch  $O$  gehenden Ebene ausdehnbar ist, G. Bardelli, Rend. Ist. Lomb. (2) 38 (1905), S. 663 bis 668; ein Referat befindet sich in den Beiblättern zu den Ann. d. Phys. 31 (1907), S. 369

mit  $\frac{\xi}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}}$  und  $\frac{\eta}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}}$  bzw. mit „-y“ und „+x“ komponiert;

hierbei ist die aus (15) folgende Identität

$$(15a) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}$$

zu beachten. Die Integration ergibt dann die mit (19) und (21) gleichwertigen Beziehungen:

$$(19a) \quad mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} = -\frac{1}{2} a^2 q^2 + \varepsilon,$$

$$(21a) \quad x\eta - y\xi = f.$$

Zur weiteren Durchführung der Integration führt man nun zweckmäßig in die Gleichungen (19) und (21) ebene Polarkoordinaten ein (vgl. (20)):

$$(22) \quad x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi.$$

Dann lauten das Energie- und das Flächenprinzip:

$$(23) \quad \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon,$$

$$(24) \quad \frac{\varrho^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}} = f.$$

Division von (24) durch (23) ergibt die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  als Funktion des Abstandes  $\varrho$ :

$$(25) \quad \dot{\varphi} = \frac{fmc^2}{\varrho^2 \cdot (-\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon)}.$$

Setzt man diesen Wert in (23) ein und löst diese Gleichung dann nach  $\dot{\varrho}$  auf, so folgt:

$$(26) \quad \dot{\varrho} = \frac{c \sqrt{\varrho^2 \cdot \{(-\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon)^2 - m^2 c^4\} - f^2 m^2 c^2}}{\varrho \cdot (-\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon)}.$$

Mittels Division von (25) durch (26) bekommt man dann:

$$(27) \quad \frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{fmc}{\varrho \sqrt{\varrho^2 \cdot \{(-\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon)^2 - m^2 c^4\} - f^2 m^2 c^2}}.$$

Führt man jetzt die Hilfsvariable

$$(28) \quad \varrho^2 = s$$

in (26) und (27) ein und integriert darauf unter der Anfangsbedingung, daß

$$(29) \quad \text{für } t = 0 \quad \varphi = 0 \quad \text{und } s = s_0$$

sei, so wird die Lösung der betrachteten räumlichen Aufgabe gegeben durch

$$(30) \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2c} \int_{s_0}^s \frac{(-\frac{1}{2}a^2s + \varepsilon) ds}{\sqrt{s \cdot \{(-\frac{1}{2}a^2s + \varepsilon)^2 - m^2c^4\} - f^2m^2c^2}}, \\ \varphi = \frac{fmc}{2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{s \sqrt{s \cdot \{(-\frac{1}{2}a^2s + \varepsilon)^2 - m^2c^4\} - f^2m^2c^2}}. \end{cases}$$

Es ist also  $t$  als Funktion von  $s$  durch eine lineare Verbindung eines elliptischen Integrals 1. und 2. Gattung und  $\varphi$  ebenso als Funktion von  $s$  durch ein elliptisches Integral 3. Gattung bestimmt.

Für  $f = 0$  folgt aus (25)  $\dot{\varphi} = 0$ , d. h.  $\varphi = \text{const.}$ ; die Bewegung artet in diesem Falle in die früher behandelte geradlinige Schwingung aus. In der Tat führt dann (26), von der Bezeichnungsweise abgesehen auf (9) zurück.

### § 3. Die Einführung der Eigenzeit und die Bedeutung des Parameters $u$ .

Die allgemeinen Abschnitte der bisher durchgeführten Rechnungen vereinfachen sich, wenn man von der von H. Poincaré<sup>1)</sup> herrührenden Erläuterung der relativtheoretischen Physik mittels einer gewissen vierdimensionalen Geometrie Gebrauch macht und insbesondere den von H. Minkowski<sup>2)</sup> eingeführten Begriff der *Eigenzeit* benützt. Zugleich wird dadurch auf den in § 1 auftretenden Parameter  $u$  Licht fallen.

Das Element der Eigenzeit  $d\tau$  eines mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegten Punktes ist durch die Gleichung definiert:

$$(31) \quad d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}};$$

es steht daher zu dem der Geschwindigkeit  $q$  zugehörigen Linienelement

$$(31a) \quad d\sigma = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

eines hyperbolischen vierdimensionalen Raumes mit den Koordinaten  $x, y, z, ct$  in der einfachen Beziehung:

$$(31b) \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = c.$$

1) H. Poincaré, a. a. O. § 9, S. 168f.

2) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908, Math.-phys. Kl., S. 53 bis 111 (Sitzung vom 21. Dezember 1907); man vergleiche den Anhang S. 100.

Die auf die Masseneinheit reduzierten Impulskomponenten nehmen dann die Form von Geschwindigkeitskomponenten an wie in der gewöhnlichen Mechanik:

$$(32) \quad \xi = \frac{dx}{d\tau}, \quad \eta = \frac{dy}{d\tau}, \quad \zeta = \frac{dz}{d\tau};$$

hierzu tritt noch, wenn man das Linienelement des gewöhnlichen Raumes

$$(32a) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

einführt, die Gleichung für den Betrag der reduzierten Bewegungsgröße

$$(32b) \quad p = \frac{ds}{d\tau}.$$

Der Vollständigkeit wegen sei noch die selbstverständliche Beziehung

$$(32c) \quad q = \frac{ds}{dt}$$

hinzugefügt, zu der (31b) und (32b) Analogieen darstellen.

Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes

$$(33) \quad m \frac{d\xi}{dt} = X, \quad m \frac{d\eta}{dt} = Y, \quad m \frac{d\zeta}{dt} = Z,$$

wo rechts  $X, Y, Z$  die Komponenten der Newtonschen Kraft bedeuten, können ferner geschrieben werden:

$$(34a) \quad m \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{X}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad m \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{Y}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad m \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

so daß also links Ausdrücke von der Gestalt von Beschleunigungskomponenten stehen, wie in der gewöhnlichen Theorie. Um die Gleichung der *Erhaltung der Energie* aus (34a) abzuleiten, komponiere man die drei Gleichungen mit  $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ ; man erhält dann:

$$m \frac{d}{d\tau} \left\{ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left\{ X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau} \right\},$$

oder wegen (31):

$$\frac{m c^2}{2} \frac{d}{d\tau} \left\{ \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right\} = \frac{dt}{d\tau} \left\{ X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau} \right\}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Gleichung für die zeitliche Änderung der Energie:

$$(34b) \quad m \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau} \right\},$$

die als vierte Bewegungsgleichung analog zu (34a) angesehen werden kann; Integration nach  $\tau$  ergibt die Energiegleichung selbst:

$$(35) \quad m c^2 \cdot \frac{dt}{d\tau} = \int (X dx + Y dy + Z dz) + \varepsilon$$

oder gemäß (31):

$$(35^1) \quad \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \varepsilon.$$

Die kinetische Energie des Punktes ist also:

$$(32^1) \quad mc^2 \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}};$$

sie gibt, wenn man von dem Faktor  $mc^2$  absieht, die Änderungsgeschwindigkeit der wirklichen Zeit als Funktion der Eigenzeit an und tritt somit den drei Eigengeschwindigkeitskomponenten  $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$  (in Gleichung (32)) als vierte an die Seite.

Die früher gegebenen Gleichungen (4) und (19) lassen sich nun aus (35<sup>1</sup>) bei Berücksichtigung von (2) und (16) unmittelbar ablesen.

Um den *Flächensatz* allgemeiner abzuleiten, komponiere man die beiden ersten Gleichungen von (34a) mit „-y“ und „+x“:

$$m \frac{d}{d\tau} \left( x \frac{dy}{d\tau} - y \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} (xY - yX).$$

Wie in der gewöhnlichen Theorie erhält man unter der Bedingung

$$(36a) \quad xY - yX = 0$$

die zugehörige Gleichung des Flächenprinzips:

$$(36b) \quad x \frac{dy}{d\tau} - y \frac{dx}{d\tau} = f.$$

Damit hat man in Rücksicht auf (16) die Gleichung (21) oder (21a) gewonnen, jedoch nunmehr in einer Gestalt, wie sie ähnlich in der gewöhnlichen Mechanik auftritt:

Die oben verwandte Bedingung (18a, b) für die *Lage der Bahnkurve* eines Punktes in einer durch  $O$  gehenden Ebene kann man, wenn man an Stelle von  $t$  die Eigenzeit  $\tau$ , die eine stetige eindeutige Funktion von  $t$  ist, als Parameter der Kurve nimmt, in die Form bringen:

$$(37) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} & \frac{d^2y}{d\tau^2} & \frac{d^2z}{d\tau^2} \end{vmatrix} = 0$$



oder auch wegen (31) und (34a) in die einfache Gestalt:

$$(38) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Daß die Bedingung (38) auch in der gewöhnlichen Theorie gültig ist, folgt aus (18a, b) sofort, da die Größen  $X, Y, Z$  in der Newtonschen Mechanik zu  $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$  proportional sind. Bemerkenswert ist es nun gerade, daß (38) in der Relativtheorie gilt, wo die eben erwähnte Proportionalität nicht besteht (siehe z. B. Gleichung (17)).

Daß die Bewegung des räumlichen Oszillators in einer Ebene durch  $O$  erfolgt, ist nun aus (38) bei Berücksichtigung von (16) unmittelbar ersichtlich, also weit einfacher als aus (18a, b).

Nachdem so gezeigt ist, wie sich durch die Einführung der Eigenzeit  $\tau$  die allgemeinen Rechnungen vereinfachen, möge dargelegt werden, daß sie auch in der Einzelrechnung eine Bedeutung besitzt. Zu diesem Zwecke soll jetzt die *Eigenzeit* des in § 1 behandelten *linearen* Oszillators berechnet werden.

Aus (31) folgt hier:

$$(39) \quad \tau = \frac{1}{c} \int dx \sqrt{c^2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - 1}$$

oder mit Berücksichtigung von (7)

$$(40) \quad \tau = \frac{mc}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(h^2 - x^2) \left( \frac{1}{4} a^2 (h^2 - x^2) + mc^2 \right)}}.$$

Die Eigenzeit ist also als Funktion von  $x$  durch ein elliptisches Integral 1. Gattung bestimmt.

Nun führe man gemäß (10), (11a) und (12) die Konstanten  $k$  und  $k'$  sowie die neue Variable  $u$  ein. Wählt man dann als Anfangsbedingung, daß

$$(41) \quad \text{für } u = 0 \quad \tau = \tau_0$$

sei, so folgt aus (40):

$$(42) \quad \tau - \tau_0 = \frac{hk'^2}{2ck} \cdot u.$$

Der früher aus rein mathematischen Gründen eingeführte *Parameter*  $u$  hat also die mehr *physikalische* Bedeutung, daß er die Eigenzeit  $\tau$  des Punktes mißt.

Die oben für den linearen Oszillator gewonnene Lösung (14) kann man daher in der Form schreiben:

$$(43) \quad \begin{cases} x = h \cdot \operatorname{sn} \left( \frac{2ck}{hk'^2} (\tau - \tau_0) \right), \\ t - t_0 = \frac{T \cdot ck}{2K \cdot hk'^2} \cdot (\tau - \tau_0) + \frac{h}{ck} \cdot Z \left( \frac{2ck}{hk'^2} (\tau - \tau_0) \right); \end{cases}$$

die zweite Gleichung insbesondere bestimmt hier die Eigenzeit als Funktion der wirklichen Zeit. Für gegen  $c$  kleine Geschwindigkeiten artet (42) gemäß den in § 1 angegebenen Beziehungen aus in:

$$(42^*) \quad \tau - \tau_0 = \frac{\sqrt{m}}{a} \cdot u.$$

Ferner geht die zweite Gleichung von (43) über in:

$$(43^*) \quad \tau - \tau_0 = t - t_0,$$

und falls  $\tau_0 = t_0$  angenommen wird, wird auch  $\tau = t$ . Die Eigenzeit verwandelt sich also in die gewöhnliche Zeit, und die beiden Gleichungen (43) lassen sich dann ausgeartet in die folgende zusammenziehen:

$$(43^{**}) \quad x = h \sin \left( \frac{a}{\sqrt{m}} (t - t_0) \right).$$

Schließlich möge noch die Eigenzeit des in § 2 behandelten räumlichen Oszillators ermittelt werden.

Aus (31) und (24) folgt

$$\tau = \int dt \cdot \frac{\varrho^2 \dot{\varphi}}{f} = \frac{1}{f} \int \varrho^2 \frac{d\varphi}{d\varrho} d\varrho.$$

Wegen (27) geht dieser Ausdruck über in:

$$\tau = mc \int \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 \cdot \left\{ \left( -\frac{1}{2} a^2 \varrho^2 + \varepsilon \right)^2 - m^2 c^4 \right\} - f^2 m^2 c^2}}$$

oder wegen (28) schließlich in:

$$(44) \quad \tau = \frac{mc}{2} \int \frac{ds}{\sqrt{s \cdot \left\{ \left( -\frac{1}{2} a^2 s + \varepsilon \right)^2 - m^2 c^4 \right\} - f^2 m^2 c^2}}.$$

Die Eigenzeit  $\tau$  ist somit durch dieses elliptische Integral 1. Gattung in Verbindung mit (28) als Funktion des Abstandes  $\varrho$  des Punktes vom Anziehungsmittelpunkt ausgedrückt. Für  $f=0$  geht (44), abgesehen von der Bezeichnungsweise, wieder in (40) über.

#### § 4. Der Minkowskische Oszillator.

Führt man für die rechten Seiten der Gleichungen (34a) die Bezeichnungen ein:

$$(45) \quad \frac{X}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \bar{X}, \quad \frac{Y}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \bar{Y}, \quad \frac{Z}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \bar{Z},$$

so nehmen sie ganz die Form der Bewegungsgleichungen der gewöhnlichen Theorie an:

$$(46) \quad m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \bar{X}, \quad m \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \bar{Y}, \quad m \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \bar{Z}.$$

Man nennt (nach H. A. Lorentz<sup>1)</sup>)  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  die Komponenten der Minkowskischen Kraft im Gegensatz zu den  $X, Y, Z$ , den Komponenten der gewöhnlichen oder Newtonschen Kraft. Für gegen  $c$  kleine Geschwindigkeiten fallen beide Kräfte offenbar zusammen.

Bisher wurde nun hier die Newtonsche elastische Kraft zugrunde gelegt. Da aber der Ansatz, daß die Newtonsche Kraft dem Abstände von dem Anziehungsmittelpunkte proportional sei, keine unmittelbar und streng physikalische, sondern mehr formal-mathematische Bedeutung besitzt, so kann man auch die Annahme machen und untersuchen, daß die Minkowskische Kraft jenes geometrische Gesetz befolge.

Die Differentialgleichung des *linearen* Oszillators lautet dann:

$$(47) \quad m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -a^2 x.$$

Ihr vollständiges Integral ist aus der gewöhnlichen Theorie bekannt (man vergleiche (14a\*)):

$$(48) \quad x = h \cdot \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau + \psi\right);$$

hierin ist  $h$  die Amplitude und  $\psi$  die Phasenkonstante der Schwingung. Die Beziehung zwischen der Eigenzeit  $\tau$  und der Zeit  $t$  wird sodann von der durch Verbindung von (31) mit (15a) erhaltenen allgemeinen Gleichung geliefert:

$$(49a) \quad dt = d\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}},$$

die in Rücksicht auf (32a, b) auch die Form

$$(49b) \quad dt = d\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right\}}$$

annehmen kann. Wegen (48) ergibt sich somit:

$$(50) \quad t = \int d\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 h^2}{m c^2} \cdot \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau + \psi\right)};$$

es ist also  $t$  als Funktion von  $\tau$  durch ein elliptisches Integral dargestellt, das auf die Normalformen 1. und 2. Gattung zurückführbar ist.

Ebenso leicht läßt sich der entsprechend verstandene *räumliche* Oszillator behandeln. Von seinen Bewegungsgleichungen:

$$(51) \quad m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -a^2 x, \quad m \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -a^2 y, \quad m \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -a^2 z$$

1) H. A. Lorentz, Phys. Zeitschr. a. a. O.

braucht man nur die ersten beiden zu berücksichtigen, da gemäß (37) die zugehörige Bahnkurve in einer durch  $O$  gehenden Ebene liegt. Die Lösung

$$(52) \quad \begin{cases} x = h_1 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau + \psi_1\right), \\ y = h_2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau + \psi_2\right) \end{cases}$$

zeigt, daß die Bahnlinie eine *Ellipse* ist, wie in der gewöhnlichen Theorie. Dreht man nun das Koordinatensystem so, daß die  $x$ - und  $y$ -Achse mit den Hauptachsen der Bahnellipse zusammenfallen, so läßt sich die Messung der Eigenzeit so einrichten, das

$$(53) \quad \text{für } \tau = 0 \quad x = h_1 \quad \text{und} \quad y = 0$$

und infolgedessen  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  ist. Die Lösung (52) nimmt dann die Form an:

$$(54) \quad \begin{cases} x = h_1 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau\right), \\ y = h_2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau\right). \end{cases}$$

Nun folgt aus (49 b):

$$(55) \quad t = \int d\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 h_2^2}{m c^2} + \frac{a^2 (h_1^2 - h_2^2)}{m c^2} \cdot \sin^2\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \tau\right)};$$

es wird also  $t$  durch ein elliptisches Integral angegeben, das dem in (50) auftretenden sehr ähnlich ist.

## II. Abschnitt.

### Die Bewegung bei konstanter Kraft in der Relativtheorie.

#### § 5. Die Bewegung bei konstanter Newtonscher Kraft.

Als zweite wichtige Bewegungsart eines Massenpunktes  $m$  soll nun diejenige besprochen werden, die unter der Einwirkung einer der Größe und Richtung nach konstanten Kraft erfolgt, und zwar zuerst einer Newtonschen Kraft.

Es werde erstlich die *geradlinige* Bewegung behandelt. Die Kraft wirke in der Richtung der  $x$ -Achse und habe, auf die Masseneinheit bezogen, den konstanten Wert  $g$ . Die Bezeichnungsweise möge hierbei darauf hindeuten, daß die Bewegung als *Fall* oder *vertikaler Wurf* (aufwärts oder abwärts) auf der als dynamisch ruhend angesehenen Erde gedeutet werden kann.

Die Differentialgleichung der Bewegung

$$(56) \quad \frac{d\zeta}{dt} = g,$$

in der  $\zeta$  durch (1) bestimmt ist, ergibt durch Integration nach  $t$  und Auflösung dieser Gleichung nach  $\dot{x}$  die Beziehung:

$$(57) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{gt + a}{\sqrt{1 + \frac{(gt + a)^2}{c^2}}};$$

hierin ist  $a$  eine Integrationskonstante, die bei der dem reinen Fall entsprechenden Bewegung Null ist. Für gegen  $c$  *kleine Geschwindigkeiten* artet die Formel aus in:

$$(57^*) \quad \frac{dx}{dt} = gt + a.$$

Während nun (57\*) für  $t = \infty$  eine unendlich große Geschwindigkeit ergibt, strebt die Geschwindigkeit nach der relativtheoretischen Formel (57) dem Grenzwert  $c$  zu, den sie nicht überschreiten kann. Graphisch wird die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit entsprechend der Beziehung (57) durch einen Zweig einer *Kurve 4. Ordnung* dargestellt, der die Gerade  $\frac{dx}{dt} = c$  asymptotisch berührt; für  $\lim c = \infty$  geht die Kurve gemäß (57\*) in eine *gerade Linie* über. Nochmalige Integration von (57) oder auch unmittelbare Anwendung der Energiegleichung gibt:

$$(58) \quad x = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{(gt + a)^2}{c^2}} + b,$$

worin  $b$  eine zweite Integrationskonstante ist. Für *kleine Geschwindigkeiten* artet diese Gleichung aus in:

$$(58^*) \quad x = \frac{g}{2} t^2 + at + b_1,$$

wo  $b_1$  wieder eine Konstante ist.

Graphisch wird (58) durch einen *Hyperbelast* wiedergegeben, dessen Asymptotenrichtungen durch  $\frac{dx}{dt} = \pm c$  bestimmt sind; in der gewöhnlichen Theorie artet die Kurve dann gemäß (58\*) in eine *Parabel* aus.

Jetzt möge zur *räumlichen* Bewegung übergegangen werden, die als *schiefer Wurf* gedeutet werden kann. Ihre Differentialgleichungen sind:

$$(59) \quad \frac{d\zeta}{dt} = g, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

wobei  $\zeta, \eta, \zeta$  durch (15) erklärt sind.

Die ersten Integrale sind, falls  $a_1, a_2, a_3$  Integrationskonstanten bedeuten:

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{gt + a_1}{\sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}}}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a_2}{\sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}}}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{a_3}{\sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Für  $\lim t = \infty$  wird, wie man sieht,  $\frac{dx}{dt} = c$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ ,  $\frac{dz}{dt} = 0$ .

Nochmalige Integration ergibt, falls  $b_1, b_2, b_3$  wieder Konstanten sind:

$$(61) \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}} + b_1, \\ y = \frac{a_2 c}{g} \cdot \log \left( \frac{gt + a_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}} \right) + b_2, \\ z = \frac{a_3 c}{g} \cdot \log \left( \frac{gt + a_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2}} \right) + b_3. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich übrigens leicht aus dem Energiesatz ablesen. Da die Bewegung in der zur  $x$ -Achse parallelen Ebene

$$\begin{aligned} y - b_2 &= \frac{a_2}{a_3} \\ z - b_3 &= \frac{a_3}{a_3} \end{aligned}$$

erfolgt, so kann man diese zur  $xy$ -Ebene wählen. Es ist dann dauernd  $z = 0$ , also  $a_3 = b_3 = 0$ , und die beiden ersten Gleichungen von (61) nehmen die folgende Form an, wenn man noch die Funktion  $\log$  durch die  $\mathfrak{A}r \mathfrak{S}in$  ausdrückt:

$$(62) \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2}{c^2}} + b_1, \\ y = \frac{a_2 c}{g} \cdot \mathfrak{A}r \mathfrak{S}in \frac{gt + a_1}{c \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2}}} + \beta_2; \end{cases}$$

hier ist  $\beta_2$  eine Konstante.

Für  $a_2 = 0$  geht (62) wieder in (58) über.

In der  $y$ -Richtung, d. h. senkrecht zur Krafrichtung, findet, wie (62) zeigt, keine Trägheitsbewegung statt, was für die Relativmechanik charakteristisch ist.

Für gegen  $c$  kleine Geschwindigkeiten artet (62) aus in

$$(62^*) \quad \begin{cases} x = \frac{g}{2} t^2 + a_1 t + b_1', \\ y = a_2 t + \beta_2', \end{cases}$$

worin  $b_1'$  und  $\beta_2'$  wiederum Konstanten darstellen.

Die Bahnkurve (*Wurflinie*), die ausgeartet gemäß (62\*) eine *Parabel* wird, ist im allgemeinen Falle folgende verallgemeinerte *Kettenlinie*:

$$(63) \quad x - b_1 = a_2 \cdot \mathcal{C}\mathcal{O}[(A_2 y + B_2)];$$

hierin sind  $a_2$ ,  $A_2$  und  $B_2$  wieder Konstanten.

Schließlich möge die zugehörige *Eigenzeit* und zwar zuerst für die *räumliche* Bewegung berechnet werden.

Aus (49a) und (59) erhält man:

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2 + a_2^2}{c^2}}}.$$

Da nun gemäß (60)

$$dy = a_2 d\tau$$

ist, so wird die Integration von  $d\tau$  auf eine oben ausgeführte zurückführbar und ergibt sogleich:

$$(64) \quad \begin{cases} \tau = \frac{c}{g} \cdot \log \left( \frac{gt + a_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{(gt + a_1)^2}{c^2} + a_2^2} \right) + b_2' \\ = \frac{c}{g} \cdot \mathcal{A}\mathcal{r} \mathcal{C}\mathcal{I}\mathcal{n} - \frac{gt + a_1}{c \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2}}} + \beta_2'', \end{cases}$$

wo  $b_2'$  und  $\beta_2''$  Konstanten bedeuten.

Dazu tritt dann, indem man die Integrationskonstante gleich Null wählt:

$$y = a_2 \tau.$$

Für  $a_2 = 0$  liefert (64) sofort die Eigenzeit der *linearen* Bewegung.

### § 6. Die Bewegung bei konstanter Minkowskischer Kraft.

Jetzt werde angenommen, daß die wirkende konstante Kraft eine Minkowskische sei.<sup>1)</sup>

Die Gleichung der *geradlinigen* Bewegung ist dann:

$$(65) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = g;$$

1) Vgl. M. Born, Ann. d. Phys. (4) **30** (1909), S. 1 bis 56, insbesondere S. 25 und 26.

ihr erstes und zweites Integral lauten, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  Konstanten bedeuten:

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = g\tau + \alpha, \\ x = \frac{g}{2}\tau^2 + \alpha\tau + \beta. \end{cases}$$

Für den Zusammenhang zwischen Eigenzeit und Zeit folgt aus (49b) und (66) sofort die Differentialgleichung

$$dt = d\tau \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha)^2}{c^2}};$$

ihr Integral ist

$$(67) \quad \begin{cases} t = \frac{c}{2g} \left\{ \frac{g\tau + \alpha}{c} \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha)^2}{c^2}} + \log \left( \frac{g\tau + \alpha}{c} + \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha)^2}{c^2}} \right) \right\} + \gamma \\ = \frac{c}{2g} \left\{ \frac{g\tau + \alpha}{c} \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha)^2}{c^2}} + \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{g\tau + \alpha}{c} \right\} + \gamma, \end{cases}$$

wobei  $\gamma$  eine Integrationskonstante ist. Da (67) in bezug auf  $\tau$  transzendent ist, ist es hier nicht ohne weiteres möglich,  $x$  als Funktion von  $t$  in entwickelter Gestalt darzustellen.

Die entsprechende *räumliche* Bewegung gehorcht den Differentialgleichungen

$$(68) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = g, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0.$$

Ihre ersten Integrale sind:

$$(69) \quad \frac{dx}{d\tau} = g\tau + \alpha_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = \alpha_2, \quad \frac{dz}{d\tau} = \alpha_3,$$

und ihre zweiten Integrale:

$$(70) \quad x = \frac{g}{2}\tau^2 + \alpha_1\tau + \beta_1, \quad y = \alpha_2\tau + \beta_2, \quad z = \alpha_3\tau + \beta_3,$$

worin  $\alpha_1, \dots, \beta_3$  Konstanten sind.

Die Bewegung vollzieht sich in einer der  $x$ -Achse parallelen *Ebene*, und die Bahn ist eine *Parabel*, beides wie in der gewöhnlichen Theorie. Es möge nun die Bahnebene zur  $xy$ -Ebene gewählt werden, so daß also  $z = 0$  und  $\alpha_3 = \beta_3 = 0$  ist und die dritte Gleichung von (70) fortgelassen werden kann.

Der Zusammenhang zwischen  $t$  und  $\tau$  ergibt sich ganz ebenso wie oben:

$$dt = d\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}{c^2}},$$



oder in integrierter Gestalt, wenn  $\gamma$  und  $\gamma_1$  Konstanten sind:

$$(71) \left\{ \begin{aligned} t &= \frac{c}{2g} \left\{ \frac{g\tau + \alpha_1}{c} \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}{c^2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{c^2}\right) \log \left( \frac{g\tau + \alpha_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}{c^2}} \right) \right\} + \gamma \\ &= \frac{c}{2g} \left\{ \frac{g\tau + \alpha_1}{c} \sqrt{1 + \frac{(g\tau + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}{c^2}} + \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{c^2}\right) \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{g\tau + \alpha_1}{c \sqrt{1 + \frac{\alpha_2^2}{c^2}}} \right\} + \gamma_1. \end{aligned} \right.$$

Ist  $\alpha_2 = 0$ , so kommt man auf den Fall der linearen Bewegung zurück.

### Schlußbemerkungen über die allgemeine geradlinige Bewegung und die Bedeutung der beiden Kraftbegriffe.

Bewegt sich der Massenpunkt  $m$  *geradlinig* unter der Wirkung einer ganz allgemeinen Kraft  $X = \varphi(x)$ , die von  $x$  selbst, aber nicht von seinen zeitlichen Differentialquotienten und auch nicht von der Zeit abhängt und faßt man  $X$  als eine Newtonsche Kraft auf, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$(72) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

in der  $x$  durch (1) bestimmt ist. Mittels des Energie-Integrals folgt leicht ihre vollständige Lösung:

$$(73) \quad ct = \int \frac{fX dx + \varepsilon}{\sqrt{(fX dx + \varepsilon)^2 - m^2 c^4}} dx + C;$$

hierin sind  $\varepsilon$  und  $C$  Integrationskonstanten.

Beschränkt man sich bezüglich der Funktionsgattung von  $X = \varphi(x)$  auf ganze rationale Funktionen, so gewinnt man aus (73) über die möglichen Formen der Lösung folgende Übersicht, die zugleich einen Rückblick auf die oben behandelten Einzelfälle gewährt.

Ist  $X = 0$ , so führt (73) auf eine lineare Funktion; ist  $X = \text{const.} \neq 0$ , so erhält man als Lösung eine irrationale Funktion; ist  $X$  linear, so ist (73) ein elliptisches Integral, gebildet aus Normalintegralen 1. und 2. Gattung, und ist  $X$  quadratisch oder höheren Grades, so liegt ein hyperelliptisches Integral vor.

In der gewöhnlichen Theorie ist (73) zu folgender Gleichung ausgeartet:

$$(73^*) \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{fX dx + \varepsilon}}.$$

Hier wird das Integral erst elliptisch, wenn  $X$  vom 2. oder 3. Grade ist, und zwar ist es dann von 1. Gattung; bei höherem Grade von  $X$  erhält man wieder ein hyperelliptisches Integral.

Die Eigenzeit, deren Ermittlung bei der Newtonschen Aufgabestellung freilich nicht notwendig ist, ergibt sich gemäß (39) so:

$$(74) \quad \tau = mc \int \frac{dx}{\sqrt{(\int X dx + \varepsilon)^2 - m^2 c^4}}.$$

Diese Beziehung ist also mathematisch der Gleichung (73) sehr ähnlich, jedoch einfacher; so ist es verständlich, daß  $\tau$  als Hilfsvariable brauchbar sein kann (vgl. § 3).

Faßt man die wirkende Kraft  $X$  als eine Minkowskische auf, so lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$(75) \quad m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = X.$$

Bei Benützung der Minkowskischen Kraft hat man immer den großen Vorteil, daß man das Integral der Bewegungsgleichung sofort aus der gewöhnlichen Theorie entnehmen kann. So liefert hier (73\*) unmittelbar die Lösung von (75):

$$(76) \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\int X dx + \varepsilon}};$$

entsprechend den oben gemachten Ausführungen ist sie mathematisch viel einfacher gebaut als (73), d. h. als die Lösung bei Anwendung der Newtonschen Kraft.

Die mathematische Schwierigkeit liegt bei der Fragestellung nach Minkowski an einem anderen Orte, nämlich in der hier unbedingt erforderlichen Ermittlung des Zusammenhanges der Eigenzeit mit der wirklichen Zeit. Man muß zu diesem Zweck das Integral (76) umkehren, so daß man  $x$  als Funktion von  $\tau$  erhält, nötigenfalls unter Einführung eines Parameters; dann gibt Gleichung (49b) die gewünschte Beziehung zwischen  $t$  und  $\tau$ .

Wie sowohl die im einzelnen durchgeführten Beispiele als auch die zuletzt angestellten allgemeinen Betrachtungen zeigen, hat in der Relativtheorie sowohl der Newtonsche wie der Minkowskische Kraftbegriff je seine besonderen Vorzüge, und vom Standpunkte der *Mechanik* aus sind beide Begriffe gleich berechtigt. Erst die weitere Erfahrung kann lehren, ob in *allgemein-physikalischer* Hinsicht der eine von ihnen den Vorrang verdient.

## Nomograms with Points in Alignment.

By O. D. KELLOGG, Columbia, Missouri.

If a function  $g(x, y, z)$  can be put into the form

$$(1) \quad g(x, y, z) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

in which the elements of the first row depend only on  $x$ , those of the second only on  $y$ , and those of the third only on  $z$ , the equation  $g(x, y, z) = 0$  admits a nomographic representation in which corresponding values of the variables belong to points which are in a straight line.<sup>1)</sup> Simple criteria for the possibility of expressing  $g(x, y, z)$  in the form (1) are not currently known. Duporq<sup>2)</sup> has given sufficient conditions in the form of functional equations which  $g(x, y, z)$  must satisfy, and Boulad<sup>3)</sup> has sketched a method applicable in numerous cases. But it has remained for Gronwall<sup>4)</sup> to give a complete and systematic treatment of the problem; in fact he treats the broader problem of determining when the dependence of  $z$  upon  $x$  and  $y$  given by the equation  $g(x, y, z) = 0$  may be expressed by the vanishing of a third order determinant each of whose rows depends upon one variable only. He obtains a necessary and sufficient condition in the existence of a common solution of two partial differential equations of the second order.

If I venture a contribution to the subject, it is because the criteria which I have found seem to leave little to be desired in point of simplicity of application, involving as they do merely differentiations and the determination of the ranks of matrices. Incidentally, differen-

---

1) Each point of the curve  $X = \frac{\xi_1(x)}{\xi_3(x)}$ ,  $Y = \frac{\xi_2(x)}{\xi_3(x)}$  belongs to a certain value of  $x$ ; each point of the curve  $X = \frac{\eta_1(y)}{\eta_3(y)}$ ,  $Y = \frac{\eta_2(y)}{\eta_3(y)}$  belongs to a certain value of  $y$ ; each point of the curve  $X = \frac{\zeta_1(z)}{\zeta_3(z)}$ ,  $Y = \frac{\zeta_2(z)}{\zeta_3(z)}$  belongs to a certain value of  $z$ . If a straight line be drawn across the three curves, it will meet them in points belonging to values of the variables which satisfy the equation  $g(x, y, z) = 0$ .

2) Comptes Rendus, t. CXXXVII, p. 265, 1898.

3) Ibid. t. CL, p. 379, 1910.

4) Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 6, t. VIII, p. 59, 1912.

tial conditions<sup>1)</sup> for the linear dependence of functions of several variables is found, a result of some interest in itself which I have thus far failed to meet with in print.

### I. Linear dependence of functions of several variables.

Given four analytic functions,  $f_1(y, z)$ ,  $f_2(y, z)$ ,  $f_3(y, z)$  and  $f_4(y, z)$ , the necessary and sufficient condition for the existence of a linear homogeneous equation

$$(2) \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0$$

the coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  and  $c_4$  being independent of  $y$  and  $z$  and not all zero, is that the rank of the matrix

$$(3) \quad M = \begin{vmatrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} & f_{1yy} & f_{1yz} & f_{1zz} & f_{1yyy} & f_{1yyz} & f_{1yzz} & f_{1zzz} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_3 & f_{3y} & f_{3z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_4 & f_{4y} & f_{4z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

be lower than 4. The rank of the matrix is exactly the number of functions which are linearly independent. The theorem is here stated for four functions of two variables for simplicity, and the proof will be given for this case, as it differs in no essential point from a general proof. For  $n$  functions, the matrix would have  $n$  rows, and the columns would be continued through the partial derivatives of order  $n - 1$ . The condition is necessary, as is seen by repeated differentiation of the equation (2) and elimination of  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  and  $c_4$ . In carrying out the proof of the sufficiency of the condition, it is simplest to assume that the theorem has been established for any smaller number of functions, the case of two functions presenting no difficulty whatever. We shall therefore suppose the rank of  $M$  to be 3, and that the non-vanishing determinant of which we shall make use is formed from the elements of the first three rows, interchanging rows, if necessary, in order to bring this about. The first three functions will therefore be linearly independent, and hence there is a non-vanishing determinant of third order in the matrix  $M'$  formed from  $M$  by the suppression of the last row and the last four columns:

$$(3') \quad M' = \begin{vmatrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} & f_{1yy} & f_{1yz} & f_{1zz} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} & \dots & \dots & \dots \\ f_3 & f_{3y} & f_{3z} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

1) The well known integral conditions due to Gram are of course applicable to functions of several variables.



tions  $X_1, X_2$  and  $X_3$ , or among the functions  $F_1, F_2$  and  $F_3, g(x, y, z)$  admits a representation

$$g(x, y, z) = F_1 X_1 + F_2 X_2,$$

and further linear relations lead to a representation

$$g(x, y, z) = F_1 X_1.$$

These two reduced cases we reserve for later treatment, so that in the present paragraph, we are under the assumption that  $X_1, X_2$  and  $X_3$ , as well as  $F_1, F_2$  and  $F_3$  are linearly independent.

Since  $g(x, y, z)$  is of the form (5), it satisfies an ordinary homogeneous linear differential equation of third order in  $x$ , whose coefficients depend only upon  $x$ . This is proven by differentiating the equation (5) with respect to  $x$  three times, and eliminating  $F_1, F_2$ , and  $F_3$ :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} g & X_1 & X_2 & X_3 \\ g_x & X_1' & X_2' & X_3' \\ g_{xx} & X_1'' & X_2'' & X_3'' \\ g_{xxx} & X_1''' & X_2''' & X_3''' \end{vmatrix} = 0.$$

The necessary and sufficient condition for the existence of this differential equation is very easily stated by means of the last paragraph, since it is merely the condition for the existence of a homogeneous linear relation between the functions  $g, g_x, g_{xx}$ , and  $g_{xxx}$  with coefficients independent of  $y$  and  $z$ , namely that the matrix

$$(7) \quad N = \begin{vmatrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & g_{yz} & g_{zz} & g_{yyy} & \dots & g_{zzz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & g_{xyz} & g_{xzz} & \dots & \dots & \dots \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxyy} & g_{xxyz} & g_{xxzz} & \dots & \dots & \dots \\ g_{xxx} & g_{xxxxy} & g_{xxxz} & g_{xxxxyy} & g_{xxxxyz} & g_{xxxzzz} & g_{xxxxyy} & \dots & g_{xxxzzz} \end{vmatrix}$$

be of rank lower than 4. *This is therefore a first necessary condition that  $g(x, y, z)$  have the form (1).* Moreover it is sufficient for the form (5). If we add the condition that the matrix  $N'$  formed from  $N$  by the suppression of the last row and the last four columns shall be of rank 3, we shall thus be sure that the differential equation for  $g(x, y, z)$  is effectively of the third order, and that the  $X_1, X_2$ , and  $X_3$  of (5) are linearly independent.

In order to proceed farther, it will be necessary to determine the functions occurring in the form (5). This may be done by forming, in accordance with the indications of the preceding paragraph, the or-

dinary differential equation satisfied by  $g(x, y, z)$ , of which  $X_1$ ,  $X_2$ , and  $X_3$  are particular solutions; in other words by forming the linear relation between  $g$ ,  $g_x$ ,  $g_{xx}$ , and  $g_{xxx}$

$$(8) \quad Dg_{xxx} + Cg_{xx} + Bg_x + Ag = 0.$$

We next find three independent solutions<sup>1)</sup>,  $X_1$ ,  $X_2$ , and  $X_3$ ; this leaves in the equation (5) merely  $F_1$ ,  $F_2$ , and  $F_3$  to be determined. This may be done by differentiating the equation twice with respect to  $x$  and solving the linear system so formed for  $F_1$ ,  $F_2$ , and  $F_3$ . It should be remarked that in many cases where the function  $g(x, y, z)$  is at all simple, the form (5) may be determined by inspection, without the necessity of solving any differential equation, or even of forming any.

We now can regard the functions appearing in (5) as known. Assuming that the form (1) is possible, a homographic transformation can be found which will make the first row of the determinant  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , since these functions are a linearly independent set of solutions of a differential equation (8) which is also satisfied by  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , and  $\xi_3$ :

$$g(x, y, z) = F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

Hence

$$(9) \quad F_1 = \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} \eta_3 & \eta_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix}, \quad F_3 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}.$$

There is therefore a homogeneous linear relation between  $F_1$ ,  $F_2$ , and  $F_3$  with coefficients depending only on  $y$  ( $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , and  $\eta_3$  are a set of such coefficients) and also one with coefficients depending only upon  $z$ . The necessary and sufficient conditions for these relations is the vanishing of two Wronskians, namely,

$$(10) \quad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1z} & F_{2z} & F_{3z} \\ F_{1zz} & F_{1zz} & F_{3zz} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1y} & F_{2y} & F_{3y} \\ F_{1yy} & F_{2yy} & F_{3yy} \end{vmatrix} = 0.$$

1) In the introductory paragraph, it was stated that the application of the criteria to be developed demanded merely differentiation and the determination of the ranks of matrices. This is strictly true. In the fifth paragraph, we shall express all criteria directly in terms of  $g(x, y, z)$  and its derivatives. The establishment of the determinant form for  $g(x, y, z)$ , in case it exists, will, however, need the simple integration problem here indicated, and since one usually wishes actually to find the expression (1) in case it exists, it has seemed best to follow first a course of reasoning which would give it.

The coefficients of the linear relations are proportional to the minors of these Wronskians.<sup>1)</sup> Let us suppose that we have determined them by this means, and that the relations are

$$(11) \quad \begin{cases} Y_1 F_1 + Y_2 F_2 + Y_3 F_3 = 0 \\ Z_1 F_1 + Z_2 F_2 + Z_3 F_3 = 0. \end{cases}$$

Solving these equations for the ratios of the functions  $F$ , we have

$$(12) \quad F_1 = \varrho \begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \varrho \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix}, \quad F_3 = \varrho \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix},$$

$\varrho$  being a proportionality factor independent of  $x$ . The equations (11) really determine the ratios of the functions  $F$ , for otherwise the ratios of the coefficients  $Y$ , being equal to the ratios of the coefficients  $Z$ , would be constant, and the functions  $F$  would be linearly dependent, contrary to the assumptions of this paragraph.

A sufficient condition for the form (1) for  $g(x, y, z)$  is evidently that  $\varrho$  be a function of  $y$  times a function of  $z$ , say  $\sigma(y) \cdot \tau(z)$ , or,

$$(13) \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \log \varrho = 0,$$

$\varrho$  being determined by the equations (12), in which the other functions are all known. But this condition is also necessary. For, comparing the values of the functions  $F$  in the equations (9) and (12), we have,

$$(14) \quad \varrho \begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad \varrho \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_3 & \eta_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix}, \quad \varrho \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix},$$

whence, since  $\varrho \neq 0$ ,

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

The functions  $Y$  are not necessarily linearly independent, but their ratios are not all constant, since, by (11) that would make the functions  $F$  linearly dependent. The same remark applies to the functions  $Z$ .

Let us suppose as a first case that the  $Z$  are independent. Their coefficients in the first equation (15) then vanish, and therefore

$$(16) \quad \frac{\eta_1}{Y_1} = \frac{\eta_2}{Y_2} = \frac{\eta_3}{Y_3} =, \text{ say, } \sigma(y).$$

If similarly the  $Y$  are independent,

$$\frac{\xi_1}{Z_1} = \frac{\xi_2}{Z_2} = \frac{\xi_3}{Z_3} =, \text{ say, } \tau(z),$$

1) The vanishing of the second order minors of one of these Wronskians means that two of the functions  $F$  have a ratio dependent on one variable only, which would give the corresponding equation (11) at once. It would not affect the further developments of this paragraph.



so that expressing the functions  $\eta$  and  $\xi$  in terms of the functions  $Y$  and  $Z$  in the equations (14), we are lead to the conclusion that  $\rho = \sigma(y) \cdot \tau(z)$ . If, the functions  $Z$  still being linearly independent, there is a relation among the functions  $Y$ , say

$$(17) \quad Y_1 = c_1 Y_2 + c_2 Y_3$$

the second equation (15) becomes

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & -c_1 \xi_1 & -c_2 \xi_2 \\ Y_1 & Y_2 & 0 & & \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & -c_1 Z_1 & -c_2 Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

in which the ratio  $Y_1 : Y_2$  is not constant, otherwise, by (17), the ratio  $Y_3 : Y_2$  would also be constant. Hence the coefficients of  $Y_1$  and  $Y_2$  vanish. From this, as before, we deduce the proportionality of the functions  $\xi$  and  $Z$ , and the product form for  $\rho$ . A similar line of reasoning holds if the functions  $Z$  are linearly connected. It would appear to fail only when the same linear relation connected the functions  $Y$  which connected functions  $Z$ , but this case will not arise, since, by (12), it would imply a linear dependence among the functions  $F$ .

To recapitulate, *the condition (7) is necessary and sufficient for the form (5). If this form is irreducible, (10) and (13) are the necessary and sufficient conditions for the form (1) for  $g(x, y, z)$ .*

### 3. First reducible case.

We now suppose that the form (5) reduces to

$$(18) \quad g(x, y, z) = F_1 X_1 + F_2 X_2,$$

but that neither of the ratios  $X_1 : X_2$  or  $F_1 : F_2$  are constant. The indications of 2. are sufficient for the study of the linear relations among the functions in the expression (5). If  $g(x, y, z)$  can be given the form (1), it may be shown that  $X_1, X_2$  and 0 may be taken as the first row of the determinant<sup>1)</sup>, so that

$$(19) \quad F_1 = \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} \eta_3 & \eta_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix}.$$

1) Developing the determinant, we have

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 = \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 \varphi_2 + \xi_3 \varphi_3.$$

If this equation be differentiated twice with respect to  $x$ , it will appear, either that there is a linear relation among the functions  $\xi$ , or else the system of equations may be solved for the minors  $\varphi$ , which will then be linear homogeneous functions  $F_1$  and  $F_2$ , and hence linearly dependent. In either case we can, by a homographic transformation, bring a 0 into the first row of the determinant. It is easy to complete the reasoning.

$F_1$  and  $F_2$  are therefore solutions of a second order ordinary linear homogeneous differential equation in  $y$  with coefficients depending only upon  $y$ . The conditions for this are formed like the condition (7), and are

$$(20) \quad \begin{vmatrix} F_1 & F_{1,z} & F_{1,zz} \\ F_{1,y} & F_{1,yz} & F_{1,yzz} \\ F_{1,yy} & F_{1,yyz} & F_{1,yyzz} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_2 & F_{2,z} & F_{2,zz} \\ F_{2,y} & F_{2,yz} & F_{2,yzz} \\ F_{2,yy} & F_{2,yyz} & F_{2,yyzz} \end{vmatrix} = 0.$$

The differential equations which the functions  $\eta$  must satisfy are obtained by substituting in the conditions (20)  $\eta$ ,  $\eta_y$ , and  $\eta_{yy}$  for the elements of one of the columns, and the known values of  $F_1$  and  $F_2$  and their derivatives in the other columns. Let  $Y_{11}$  and  $Y_{12}$  be two particular solutions of the first equation thus formed, and  $Y_{21}$  and  $Y_{22}$  of the second. Then, writing

$$(21) \quad F_1 = Y_{11}Z_{12} - Y_{12}Z_{11}, \quad F_2 = Y_{21}Z_{22} - Y_{22}Z_{21},$$

we may find the functions  $Z$  by differentiating these two equations with respect to  $y$  and solving the two resulting systems. We then have three sub-cases to consider, namely, (a), neither  $F_1$  nor  $F_2$  reduces to a product of a function of  $y$  times a function of  $z$ , (b), one of the functions  $F$  reduces to such a product, and (c), both the functions  $F$  reduce to such products. For example,  $F_1$  will reduce to a product if there is a linear homogeneous relation between  $Y_{11}$  and  $Y_{12}$ , or one between  $Z_{11}$  and  $Z_{12}$ , and then only.

Taking up the first case, on the assumption of the possibility of the determinant form for  $g(x, y, z)$ , a comparison of (19) and (21) leads to the equations

$$(22) \quad \begin{cases} Y_{11} = \alpha_1 \eta_2 + \beta_1 \eta_3 & Z_{11} = \alpha_1 \xi_2 + \beta_1 \xi_3 \\ Y_{12} = \gamma_1 \eta_2 + \delta_1 \eta_3 & Z_{12} = \gamma_1 \xi_2 + \delta_1 \xi_3 \\ Y_{21} = \alpha_2 \eta_3 + \beta_2 \eta_1 & Z_{21} = \alpha_2 \xi_3 + \beta_2 \xi_1 \\ Y_{22} = \gamma_2 \eta_3 + \delta_2 \eta_1 & Z_{22} = \gamma_2 \xi_3 + \delta_2 \xi_1. \end{cases}$$

Upon elimination of the functions  $\eta$  and of the functions  $\xi$ , we arrive at the necessary condition for the determinant form for  $g(x, y, z)$ : there is a linear homogeneous equation connecting the functions  $Y$ , and a linear homogeneous equation with the same coefficients connecting the functions  $Z$ . This condition is also sufficient, for the linear equations enable us to make equal the elements of one column of the determinant  $F_1$  with the corresponding elements of a column of  $F_2$ , so that these functions appear as the minors of one and the same determinant of third order

Taking up the second case, since it is a mere matter of notation, we may suppose that it is  $F_1$  which is the product:

$$(23) \quad F_1 = Y_1 Z_1, \quad F_2 = \begin{vmatrix} Y_{21} & Y_{22} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}.$$

Comparing with equations (19), we find that either  $\eta_2$  and  $\eta_3$  are in a constant ratio, or else  $\xi_2$  and  $\xi_3$ , with possibly both ratios constant. In any case we find the result: either  $Y_1$  is a homogeneous linear function of  $Y_{21}$  and  $Y_{22}$ , or else  $Z_1$  is a homogeneous linear function of  $Z_{21}$  and  $Z_{22}$ . This is therefore a necessary condition for the determinant form for  $g(x, y, z)$ . But it is also sufficient, for if  $Y_1 = c_1 Y_{21} + c_2 Y_{22}$ , we may write

$$F_1 = \begin{vmatrix} c_1 Y_{21} + c_2 Y_{22}, & 0 \\ c_1 Z_{21} + c_2 Z_{22}, & Z_1 \end{vmatrix} \quad F_2 = \begin{vmatrix} \frac{Y_{21}}{c_2}, & c_1 Y_{21} + c_2 Y_{22} \\ \frac{Z_{21}}{c_2}, & c_1 Z_{21} + c_2 Z_{22} \end{vmatrix}$$

which gives the required form. Both  $c_1$  and  $c_2$  will not be zero, and the change in the procedure to be made if  $c_2 = 0$  is evident.

If both  $F_1$  and  $F_2$  are products there are evidently no further conditions required; the determinant form for  $g(x, y, z)$  can be written down at once.

#### 4. Second reducible case.

Here we are supposing that  $g(x, y, z)$  has the form

$$(24) \quad g(x, y, z) = F_1 X_1.$$

As in the other cases, it may be shown that the determinant equivalent for  $g(x, y, z)$ , in case it exists, may be so transformed as to have for first row,  $X_1, 0, 0$ . Hence  $F_1$  must be a homogeneous linear function of two functions of  $y$  alone, with coefficients depending only upon  $x$ . The condition for this is

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_{1y} & F_{1yy} \\ F_{1z} & F_{1yz} & F_{1yyz} \\ F_{1zz} & F_{1yzz} & F_{1yyzz} \end{vmatrix} = 0.$$

This is also sufficient.

#### 5. Expression of the criteria in terms of $g(x, y, z)$ .

In the preceding paragraphs, a line of treatment has been followed which will in general be the easiest to apply to any particular problem. Theoretically it demands the integration of two ordinary differential

equations of the linear homogeneous type, and whereas in practice this operation can usually be avoided, this paragraph is added in order to attain our aim of supplying criteria which do not demand integration. It will again be necessary to distinguish between cases, although they will not exactly coincide with those used heretofore.

The first case to be considered is the one in which  $g(x, y, z)$  is irreducible when arranged as a homogeneous linear function of three functions of  $x$ , or else when arranged as a homogeneous linear function of three functions of one of the other two variables; expressing it more briefly, we suppose, in this case, that  $g(x, y, z)$  is irreducible in a least one of the variables,  $x$ ,  $y$ , or  $z$ . By a change of notation, if necessary, we may make it irreducible in  $x$ . The necessary and sufficient conditions for this are that the matrices  $N$  and  $N'$  are of rank 3. There exists, then, an irreducible equivalent for  $g(x, y, z)$ , (5). If this equation be differentiated twice with respect to  $x$ , we have the set

$$(25) \quad \begin{cases} g = F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 \\ g_x = F_1 X'_1 + F_2 X'_2 + F_3 X'_3 \\ g_{xx} = F_1 X''_1 + F_2 X''_2 + F_3 X''_3 \end{cases}$$

The determinant of the functions  $X$  and their derivatives will be different from zero, so that the equations (25) and their derivatives with respect to  $y$  and  $z$  make clear, with the aid of Laplace's rule for the product of determinants, the equivalence of the conditions (10) with the following:

$$(26) \quad \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yz} & g_{yzy} & g_{xyzy} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xyyy} \end{vmatrix} = 0.$$

As for the remaining condition (13), it must first be expressed in terms of the functions  $F$ . From the first equation (11) with its  $z$  derivative we deduce

$$(27) \quad Y_1 = p \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ F_{2z} & F_{3z} \end{vmatrix}, \quad Y_2 = p \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ F_{3z} & F_{1z} \end{vmatrix}, \quad Y_3 = p \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_{1z} & F_{2z} \end{vmatrix},$$

$p$  being a factor of proportionality. Similarly from the second equation (11) with its  $y$  derivative, we have

$$(28) \quad Z_1 = q \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ F_{2y} & F_{3y} \end{vmatrix}, \quad Z_2 = q \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ F_{3y} & F_{1y} \end{vmatrix}, \quad Z_3 = q \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_{1y} & F_{2y} \end{vmatrix}.$$

The factors of proportionality  $p$  and  $q$  are not completely determined, except that they are such as make the functions  $Y$  depend only on  $y$ ,

and the functions  $Z$  on  $z$  alone. This fact will give us differential equations for them. Differentiating the equations (27) with respect to  $z$ , multiplying the results by  $F_{1y}$ ,  $F_{2y}$ , and  $F_{3y}$  and adding, we have

$$(29) \quad \frac{p_z}{p} = - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ zz \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}},$$

where we have introduced the notation

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1y} & F_{2y} & F_{3y} \\ F_{1z} & F_{2z} & F_{3z} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ zz \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1y} & F_{2y} & F_{3y} \\ F_{1zz} & F_{2zz} & F_{3zz} \end{vmatrix},$$

the variables in the parentheses indicating the differentiations which occur in the corresponding rows of the determinants. Similarly

$$(30) \quad \frac{q_y}{q} = - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ yy \\ z \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}.$$

If now, in the first equation (12) we substitute the values for  $Y_2$  and  $Y_3$  from (27) and the values of  $Z_2$  and  $Z_3$  from (28), we find

$$(31) \quad 1 = - \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} p q q.$$

The factors on the right are all finite, and hence different from zero. For it  $q$  were infinite, the equations (12) would show the functions  $Y$  proportional to the functions  $Z$ , and hence by (11) the functions  $F$  would be linearly dependent. If  $p$  were infinite, the equations (27) would be sufficient to prove that the functions  $F$  were proportional to three functions of  $y$  alone:

$$F_1 = \varphi_1(y)F(y, z), \quad F_2 = \varphi_2(y)F(y, z), \quad F_3 = \varphi_3(y)F(y, z).$$

If these values be substituted in the second equation of (11), and the result divided by  $F(y, z)$ , we have; upon giving  $z$  a suitable constant value, a linear homogeneous equation between the functions  $\varphi(y)$ , and hence between the functions  $F$ , contrary to the hypothesis of the present case.

It follows that the condition (13) may be given the form

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \log \left( -\frac{1}{q} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \log pq \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

or, expanding, and using the equations (29) and (30),

$$(32) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} y \\ yz \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ yy \\ zz \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 0 \\ yz \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ yz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ yy \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ zz \end{pmatrix} = 0.$$

We have thus obtained the condition (13) expressed in terms of the functions  $F$ . The equations (25), however, together with their derivatives with respect to  $y$  and  $z$ , enable us to express the condition in terms of  $g$  and its derivatives. In fact, we have only to interpret the parentheses in (32) as determinants in which the rows are  $g, g_x,$  and  $g_{xx}$ , and the indicated derivatives of these quantities, for instance,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_z & g_{xz} & g_{xxz} \end{vmatrix}.$$

As second case, we take that in which  $g(x, y, z)$  is reducible in all three variables, but reserve as third case that in which it is a product of one function of one variable by a function of the other two. Here, then, we assume that the matrices

$$N' = \begin{vmatrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & g_{yz} & g_{zz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & g_{xyz} & g_{xzz} \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxyy} & g_{xxyz} & g_{xxzz} \end{vmatrix}$$

and

$$N'' = \begin{vmatrix} g & g_y & g_z \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} \end{vmatrix}$$

together with the two obtained from these by interchanging  $x$  and  $y$ , and the two obtained by interchanging  $x$  and  $z$ , are all of rank 2. Under these circumstances,  $g(x, y, z)$  is a linear homogeneous function of two functions of  $x$ , say  $X_1$  and  $X_2$ , of two functions of  $y$ , say  $Y_1$  and  $Y_2$ , and of two functions of  $z$ , say  $Z_1$  and  $Z_2$ . Further, in the expression (18),  $F_1$  and  $F_2$  are both linear homogeneous functions of the same  $Y_1$  and  $Y_2$ , and of the same  $Z_1$  and  $Z_2$ . If, in the expression (18) we substitute for  $X_1$  and  $X_2$  two different linear combinations of these functions with constant coefficients, the functions  $F$  will undergo a similar transformation. We shall show that it is necessary

and sufficient for the determinant form for  $g(x, y, z)$  that the functions  $X$  can be so selected that one of the functions  $F$  reduces to a product of a function of  $y$  by a function of  $z$ . For, if the determinant form is possible, it may be written

$$g(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

in which the functions  $\eta$  are linear combinations with constant coefficients of  $Y_1$  and  $Y_2$ , so that by adding constant multiples of the second and third columns to the first, or else of the first and third to the second, we may produce a zero in the place of the first or second element of the second row. Denoting by  $F_1$  and  $F_2$  the coefficients of the elements of the first row, either  $F_1$  or  $F_2$  will be a product of a function of  $y$  by a function of  $z$ . Conversely, if in the equation (18),  $F_1$ , say, is such a product, we may write

$$g(x, y, z) = X_1 \begin{vmatrix} a_1 Y_1 + a_2 Y_2, & 0 \\ 0 & b_1 Z_1 + b_2 Z_2 \end{vmatrix} + X_2 \begin{vmatrix} Y_1, & Y_2 \\ Z_1, & Z_2 \end{vmatrix}$$

in which not both  $a_1$  and  $a_2$  are zero. Suppose it is  $a_1$  which does not vanish. Then the above equation takes the form

$$g(x, y, z) = X_1 \begin{vmatrix} a_1 Y_1 + a_2 Y_2, & 0 \\ a_1 Z_1 + a_2 Z_2, & b_1 Z_1 + b_2 Z_2 \end{vmatrix} + X_2 \begin{vmatrix} a_1 Y_1 + a_2 Y_2, & \frac{Y_2}{a_1} \\ a_1 Z_1 + a_2 Z_2, & \frac{Z_2}{a_1} \end{vmatrix}$$

so that  $g(x, y, z)$  has the determinant form, as stated.

The necessary and sufficient condition, then, that (18) may be put into the form (1), is that there exist two constants,  $c_1$  and  $c_2$  such that  $c_1 F_1 + c_2 F_2$  is the product of a function of  $y$  by a function of  $z$ . We proceed to indicate how this condition can be expressed in terms of  $g$  and its derivatives. We start from its equivalent

$$(33) \quad \begin{vmatrix} c_1 F_1 + c_2 F_2 & c_1 F_{1y} + c_2 F_{2y} \\ c_1 F_{1z} + c_2 F_{2z} & c_1 F_{1yz} + c_2 F_{2yz} \end{vmatrix} = 0.$$

From the equation (18) and its  $x$  derivative, we deduce

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix} (c_1 F_1 + c_2 F_2) = g(c_1 X_2' - c_2 X_1') - g_x(c_1 X_2 - c_2 X_1)$$

so that writing  $c_1 X_2 - c_2 X_1 = X$ , the equation (33) becomes

$$(34) \quad \begin{vmatrix} g X' - g_x X, & g_y X' - g_{xy} X \\ g_z X' - g_{xz} X, & g_{yz} X' - g_{xyz} X \end{vmatrix} = 0.$$

In other words, the quotient  $r = \frac{X'}{X}$  must satisfy the quadratic equation

$$(35) \quad Ar^2 + Br + C = 0$$

whose coefficients are second order determinants in  $g(x, y, z)$  and its derivatives. We may, however, establish a differential equation for  $r$ . Selecting from the matrix  $N''$  a non-vanishing determinant, and from the matrix  $N'$  the two columns containing this determinant, we denote by  $E$ ,  $F$  and  $G$  the second order determinants formed from these columns. We then have for  $g(x, y, z)$  the differential equation, analogous to (8) in the irreducible case,

$$(36) \quad E g_{xx} + F g_x + G g = 0.$$

Of this differential equation,  $X_1$ , and  $X_2$  are solutions, and hence, so is  $X$ . From it we derive the equation for  $r$

$$(37) \quad E(r' + r^2) + Fr + G = 0.$$

If we eliminate  $r$  and  $r'$  between this equation and (35) and its  $x$  derivative, the resulting equation in  $g$  and its derivatives is the required condition for the determinant form for  $g(x, y, z)$ . An exception arises only in case the equation (35) has a double root, in which case it is to be replaced by its  $r$  derivative:

$$(38) \quad 2Ar + B = 0.$$

The preceding considerations establish the necessity of the last given condition for the existence of  $c_1$  and  $c_2$  satisfying the equation (33). Its sufficiency follows from a reversal of the steps. If the condition is fulfilled, there exist two quantities,  $r$  and  $t$ , satisfying the equations

$$\begin{aligned} E(t + r^2) + Fr + G &= 0, \\ Ar^2 + Br + C &= 0, \\ 2Art + Bt + A'r^2 + B'r + C' &= 0, \end{aligned}$$

the primes indicating differentiation with respect to  $x$ . Subtracting the  $r$  derivative of the second from the third, we find, either that  $2Ar + B = 0$ , or else that  $t = r'$ . Reserving the first case for later consideration, we see that (35) and (37) have a common solution  $r$ . The ratios of the coefficients  $A : B : C$  and  $E : F : G$  are independent of  $y$  and  $z$ , as is seen by differentiating them with respect to these variables and recalling that the matrices  $N'$  and the two others obtained from it by interchanging  $x$  and  $y$  and  $x$  and  $z$  are of rank 2. Hence  $r$  is a function of  $x$  alone, and if  $X$  is determined from the equation  $X' = Xr$ , it will satisfy the equations (34) and (36). From



the latter fact we know it will be expressible in the form  $X = c_1 X_2 - c_2 X_1$ . If this value be employed in (34) and the equation (18) and its  $x$  derivative kept in mind, we find again the condition (33). The same sort of reasoning holds in case (35) has a double root and is replaced by (38).

We come to the third case in which  $g(x, y, z)$  admits the form (24), or can be brought to such a form by a change in the notation of the variables. The condition for this is that the matrix  $N''$  or else one of the two derived from it by an interchange of  $x$  and  $y$  or of  $x$  and  $z$  be of rank 1. Let us suppose  $g(x, y, z) = X_1 F_1$ . Referring to paragraph 4, we see that  $F_1$ , and hence  $g$ , since it is a function of  $x$  alone times  $F_1$ , must satisfy the condition

$$\begin{vmatrix} g & g_y & g_{yy} \\ g_z & g_{yz} & g_{yyz} \\ g_{zx} & g_{yzz} & g_{yyzz} \end{vmatrix} = 0,$$

which is also sufficient.

## 6. Remarks.

If  $g(x, y, z)$  cannot be put into the determinant form (1), it may still be that the functional relation between  $x, y$  and  $z$  given by  $g(x, y, z) = 0$  can be exhibited by the vanishing of such a determinant. If this is the case, there will be a function  $G(g)$  which admits the representation (1). To test this possibility, one would substitute  $G(g)$  for  $g$  in the equations giving the conditions for the determinant form, and require that the coefficients of the ordinary differential equations thus formed for  $G$  depend only on  $g$ . This requirement fulfilled, one would examine their compatibility. If compatible, their common solutions give the possible forms of  $G$ , and the second, third and fourth paragraphs give a method for establishing the determinant.

It is interesting to note that the first reduced case has for meaning from the nomographic standpoint, that the curve for one of the variables (see the first paragraph) reduces to a straight line. The second reduced case is uninteresting from a nomographic standpoint.

In the irreducible case, if the condition (13) alone is not satisfied, we have a determinant representation, not of  $g(x, y, z) = 0$ , but of  $\binom{1}{\varrho} g(x, y, z) = 0$ . As  $\varrho$  depends on  $y$  and  $z$  only, this will, in some applications, give a satisfactory result.

Columbia, Missouri, Feb. 23, 1913.

## Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik.

Von OSKAR DOMKE in Aachen.

### I.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, angewendet auf einen formbaren Körper, liefert mit den in der technischen Statik üblichen Bezeichnungen  $\sigma$  und  $\tau$  für die Spannungen,  $\varepsilon$  und  $\gamma$  für die zugehörigen Formänderungen (Verzerrungen),  $w$  für die Verschiebungen der äußeren Kräfte  $P$  in ihrer Richtungslinie und  $dV$  für das Rauminhaltsdifferential die bekannte Beziehung:

$$(1) \quad \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) dV - \sum P \cdot \delta w = 0.$$

Der Satz setzt bei den Kräften nur Gleichgewicht, bei den Formänderungen nur Vereinbarkeit voraus, ist also bei *beliebigem Formänderungsgesetz* gültig. Bei *völlig elastischen* Körpern ist das erste Glied die vollständige Variation einer Funktion  $A$ , der *Formänderungsarbeit* (Verzerrungsenergie, elastisches Potential); somit wird aus (1)

$$\delta A - \sum P \delta w = 0$$

oder, wenn man das Variationszeichen herauszieht, und durch den Zeiger  $w$  andeutet, daß sich die Variation nur auf die Formänderungen beziehen soll:

$$(2) \quad \delta_w [A - \sum P w] = 0.$$

Der Klammerausdruck wird hiernach ein äußerster Wert, und zwar, wie leicht zu sehen ist, ein Minimum. Das durch Gleichung (2) ausgedrückte Variationsprinzip, das wir zum Unterschied gegen ein zweites später abzuleitendes als *erstes* bezeichnen wollen, findet sich in anderer Ausdrucksweise schon bei Kirchhoff.<sup>1)</sup>

Denkt man sich  $A$  als Funktion der Verschiebungen  $w$  dargestellt, so folgt aus diesem ersten Prinzip wegen

$$\delta_w A = \sum \frac{\partial A}{\partial w_m} \cdot \delta w_m$$

sofort der nach Green genannte Satz:

$$(3) \quad \frac{\partial A}{\partial w_m} = P_m,$$

1) Kirchhoff, Vorles. über mathem. Physik, Mechanik 1876, 11. Vorles. § 5.

ferner, da die  $P$  als Funktionen der  $w$  aufzufassen sind, durch weitere Differentiation nach  $w_n$

$$(4) \quad \frac{\partial P_m}{\partial w_n} = \frac{\partial P_n}{\partial w_m}.$$

Diese Beziehung ist ein Gegenstück zu dem bekannten Maxwell'schen Satze der technischen Statik.

Aus dem Greenschen Satz ergibt sich ferner durch Integration

$$(5) \quad A = \sum \int P dw.$$

Dies ist die allgemeine Form des Clapeyronschen Gesetzes der technischen Statik; unter Voraussetzung des Hookeschen Formänderungsgesetzes geht (5) über in

$$(6) \quad A = \frac{1}{2} \sum Pw.$$

Von den angeführten Sätzen ist der letzte fast der einzige, der in der technischen Statik in merklichem Maße angewendet wird. Dennoch ist er mit Vorsicht zu gebrauchen, denn er ist keineswegs in allen Fällen richtig. Ein einfacher Fall, wo er nicht zutrifft, liegt bei der Knickung gerader Stäbe vor; bezeichnet man die Eulersche Knicklast mit  $P_E$ , die aus der Längszusammendrückung des Stabes hervorgehende Senkung mit  $\mathcal{A}l$ , endlich die weitere, aus der Stabausbiegung hervorgehende Senkung mit  $w$ , so erhält man nach der üblichen ungenauen Theorie, wonach bei Erreichung der Eulerschen Knicklast eine beliebige Ausbiegung möglich ist, und unter der Voraussetzung, daß der Geltungsbereich des Hookeschen Gesetzes nicht überschritten wird, für die Arbeit

$$A = \frac{1}{2} P_E \cdot \mathcal{A}l + P_E \cdot w,$$

also keineswegs das Clapeyronsche Gesetz. Auch nach der genaueren Theorie, wonach zu jeder Stabausbiegung eine bestimmte Belastung  $P_1 > P_E$  gehört, ist keine Übereinstimmung mit Gleichung (6) vorhanden, da  $P_1$  nur ganz wenig größer als  $P_E$  ist, das Zusatzglied des genaueren Ausdrucks für  $A$  also kaum etwas ausmacht.

Der Grund für die Abweichung von dem allgemeinen Gesetz liegt hier darin, daß zwei verschiedene Arten von Formänderungen zusammzusetzen sind. In solchen Fällen ist es am einfachsten, von dem stets zutreffenden ersten Variationsprinzip auszugehen; in der technischen Statik empfiehlt sich das um so mehr, als manche weniger einfache Aufgaben mit seiner Hilfe recht kurz und klar behandelt werden können.

Als Beispiel für die Anwendung des Prinzips sei die Ermittlung der Knicklast eines Stabes bei Berücksichtigung der Schubkräfte an-

gedeutet.<sup>1)</sup> Mit den gebräuchlichen Bezeichnungen ( $M$  für das Moment,  $Q$  für die Querkraft) hat man als Ausgangsgleichung:

$$\delta_w \left[ \int_0^l \left( \frac{M^2}{2EJ} + \frac{\beta Q^2}{2GF} \right) dx - Pw \right] = 0.^2)$$

Da wir uns auf kleine Ausbiegungen beschränken, können Stabachse und Sehne vertauscht werden; die Arbeit der Längskraft ist gleich von vornherein weggelassen, da sich ihre Einflüsse aufheben. Es ist dann, wenn  $l_0$  die ursprüngliche Stablänge bezeichnet,

$$l = l_0 \left( 1 - \frac{P}{EF} \right).$$

Man hat nun, wenn  $y$  die Ordinate der Biegelinie darstellt,

$$M = -Py, \quad Q = \frac{dM}{dx} = -Py'.$$

Die von der Ausbiegung allein herrührende Senkung ist:

$$w = \int_0^l (\sqrt{1 + y'^2} - 1) dx \approx \int_0^l \frac{y'^2}{2} dx.$$

Somit wird aus der Ansatzgleichung:

$$\delta_w \int_0^l \left[ \frac{Py^2}{2EJ} + \frac{\beta Py'^2}{2GF} + \frac{y'^2}{2} \right] dx = 0.$$

Variiert man  $y$ , so erhält man:

$$\frac{P}{EJ} y - \frac{\beta P}{GF} y'' + y'' = 0,$$

woraus in bekannter Weise mit  $G = 0,4E$  und  $J = F^2$  folgt:

$$\frac{P}{F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2 + 25\beta}.$$

## II.

Neben dem soeben erläuterten ersten Variationsprinzip gibt es noch ein *zweites*, das bisher unbekannt gewesen zu sein scheint, wenn auch einzelne seiner Folgerungen in der technischen Statik viel gebraucht werden. Es ist das vollständige Gegenstück und die Ergänzung

1) Die Aufgabe ist auf anderem Wege (durch Zusammensetzung von Biegelinien) bereits von F. Engesser gelöst worden (Zentralblatt der Bauverwaltung 1891 S. 483).

2)  $\beta$  ist der übliche Beiwert für die Schubarbeit; es ist für den Rechteckquerschnitt  $\beta = \frac{6}{5}$ , für den Kreisquerschnitt  $\beta = \frac{32}{27}$ .

des ersten. Es gestattet bemerkenswerte Anwendungen, die nicht nur in der Elastizitätslehre, sondern namentlich auch in der technischen Statik nutzbar gemacht werden können.

Bevor der Satz abgeleitet wird, sei daran erinnert, daß die vor kommenden Formänderungen elastischer Körper so gering sind, daß sie die ursprüngliche Kraftverteilung nicht merklich beeinflussen und somit in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen eingesetzt werden dürfen. Man gelangt so zu dem in der technischen Statik wohlbe kannten Satz<sup>1)</sup>:

$$(7) \int (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_x \bar{\gamma}_x + \tau_y \bar{\gamma}_y + \tau_z \bar{\gamma}_z) dV - \sum P \bar{w} = 0.$$

Kräfte und Formänderungen können hierin ohne gegenseitige Ab hängigkeit angenommen werden; nur müssen innere und äußere Kräfte im Gleichgewicht sein, und innere und äußere Verschiebungen mitein ander vereinbar.

In dem Sonderfall, wo Kräfte und Verschiebungen zusammen gehören, nennt man das erste Glied der Gleichung (7) die *virtuelle* Arbeit  $A_v$  der inneren Kräfte und gelangt zu der Beziehung, daß die innere virtuelle Arbeit gleich der äußeren „virtuellen“ Arbeit ist. Es ist bemerkenswert, daß man ohne weiteres auch die Formänderungen infolge von Temperaturwirkungen in Gleichung (7) einsetzen darf.

Dieser Satz bleibt nun aber auch dann richtig, wenn man in ihn unter sich vereinbare Variationen der Kräfte einführt; er lautet dann:

$$(8) \int (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_x \delta \tau_x + \gamma_y \delta \tau_y + \gamma_z \delta \tau_z) dV - \sum \delta P \cdot w = 0.$$

Schon dieser Satz gestattet eine sehr allgemeine Anwendung. In dem Sonderfall, wo das erste Glied die vollständige Variation einer Funktion  $B$  ist, erhält man

$$\delta B - \sum \delta P \cdot w = 0$$

und, wenn man hier das Variationszeichen herauszieht und durch den Zeiger  $P$  andeutet, daß sich die Variation nur auf die Kräfte bezieht,

$$(9) \delta_P [B - \sum P w] = 0.$$

Dieser Satz soll als das *zweite Variationsprinzip* bezeichnet werden. Die Funktion  $B$  läßt sich schreiben:

$$B = \iint (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z) dV.$$

1) Der Satz bildet die Grundlage der Berechnung elastischer Systeme in der Statik der Baukonstruktionen (vgl. z. B. Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstr. II, 1 oder Neuere Methoden der Festigkeitslehre).

Durch partielle Integration findet man sofort:

$$(10) \quad B = A_v - A.$$

Somit ist  $B$  bei völlig elastischen Körpern ein vollständiges Integral. Nach Engesser, der den Begriff aus Gleichung (7) unmittelbar entwickelt hat<sup>1)</sup>, heißt  $B$  die *Ergänzungsarbeit*; man könnte sie als Gegenstück zur Formänderungsarbeit auch „Spannungsarbeit“ nennen. Gilt das Hookesche Formänderungsgesetz, und sind Temperaturänderungen ausgeschlossen, so ist wegen der Gleichungen (6) und (7):

$$B = A.$$

Aus dem zweiten Variationsprinzip folgen unmittelbar die bekannten Sätze der technischen Statik. Drückt man  $B$  als Funktion der äußeren Kräfte  $P$  aus, so ergibt sich wegen

$$\delta_P B = \sum \frac{\partial B}{\partial P_m} \delta P_m$$

der Satz von der Abgeleiteten der Ergänzungsarbeit (Castigliano und Engesser):

$$(11) \quad \frac{\partial B}{\partial P_m} = w_m,$$

oder, wenn die zur ausreichenden Abstützung notwendigen Lager  $C$  Verschiebungen  $w_c$  erfahren,

$$(12) \quad \frac{\partial B}{\partial P_m} = w_m + \sum w_c \cdot \frac{\partial C}{\partial P_m}.$$

Aus der Gleichung (11) wird, wenn die statisch unbestimmten Größen  $X_a$  als Lasten betrachtet werden, und ihre Verschiebungen  $w_a = 0$  sind,

$$(13) \quad \frac{\partial B}{\partial X_a} = 0.$$

Das ist der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit, eigentlich Ergänzungsarbeit, in dem gewöhnlichen Sinne der technischen Statik.

Aus der Gleichung (11) folgt durch weitere Differentiation nach  $P_n$ :

$$(14) \quad \frac{\partial w_m}{\partial P_n} = \frac{\partial w_n}{\partial P_m},$$

also der Maxwellsche Satz für ein beliebiges Formänderungsgesetz. Beim Hookeschen Gesetz ist  $B$  eine homogene Funktion zweiten Grades der  $P$ , woraus übrigens wegen der Gleichung (11) sofort das

1) Engesser, Über statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungsgesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit. Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Vereins zu Hannover 1889, S. 733.

Clapeyronsche Gesetz folgt; wegen derselben Gleichung drückt dann Gleichung (14) einfach die Gleichheit zweier Konstanten aus, in der von Müller-Breslau eingeführten Indexbezeichnung:

$$w_{mn} = w_{nm}.$$

### III.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ermöglicht nicht nur bei gegebenen Verschiebungen die Beziehungen zwischen den Kräften, also die Gleichgewichtsbedingungen, aufzustellen, sondern auch umgekehrt bei bekannten Kräften die Verschiebungen zu finden. Da sich Gleichgewichtsbedingungen meist viel einfacher aufstellen lassen als Vereinbarkeitsbedingungen für Formänderungen, so hat das zweite Variationsprinzip als Mittel zur Aufstellung solcher Beziehungen besondere Bedeutung für die Anwendungen.

Es sollen zunächst die Biegelinien von geraden oder krummen Stäben betrachtet werden. Diese Linien sind oft zur Vorausberechnung von Durchbiegungen nötig; viel wichtiger aber sind sie dadurch, daß sie die Einflußlinien statischer Größen bei statisch unbestimmten Systemen sind, also zur Berechnung selbst gebraucht werden.

Bekanntlich gibt es nun zwei Verfahren, eine solche Biegelinie zu ermitteln. Entweder wendet man das Arbeitsprinzip in einer Form an, die auf die Anwendung der Gleichung (11):

$$w_m = \frac{\partial B}{\partial P_m}$$

oder auf der aus ihr ableitbaren:

$$w_{ma} = \frac{\partial^2 B}{\partial P_m \cdot \partial X_a}$$

hinausläuft; oder man benutzt eine aus Formänderungsbeziehungen ableitbare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Beide Verfahren haben Vorzüge und Nachteile; bei dem ersten erhält man nur einzelne Ordinaten, da der Ausdruck  $B$  gewöhnlich jedesmal besonders berechnet werden muß; bei dem zweiten muß man erst integrieren, erhält aber dann den ganzen Verlauf der Einflußlinie. Beide Verfahren scheinen völlig zusammenhanglos, und doch müssen sie auf dieselbe Quelle zurückgehen. Es wird sich im folgenden zeigen, daß beide Wege aus dem zweiten Variationsprinzip hervorgehen.

Für das erste Verfahren ist die Herleitung schon gezeigt; das Wesentliche dabei ist, daß die äußeren Kräfte  $P$  als unabhängige Größen gewählt werden.

Man kann nun auch andere Funktionen der äußeren Kräfte als unabhängige Größen einführen. In Betracht kommen bei Stäben: Längskraft, Querkraft und Moment. Da in dem zu variierenden Integral nur die Unabhängige und ihre Differentialquotienten vorkommen dürfen, da die Querkraft der Differentialquotient des Momentes ist, und da die Längskraft nur bei krummen Stäben in Betracht kommt und auch da durch das Moment ausgedrückt werden kann, so bleibt nur das Moment als unabhängige Größe verwendbar.

1. Es soll zunächst die Differentialgleichung der Biegelinie eines geraden Balkens unter Berücksichtigung der Schubkräfte aufgestellt werden.

Nach dem zweiten Variationsprinzip ist, wenn  $y$  die Ordinate der Biegelinie bezeichnet, und  $p$  eine stetige Belastung darstellt, die allein variiert werden soll,

$$\delta_p \int_0^l \left( \frac{M^2}{2EJ} + \frac{\beta Q^2}{2GF} - py \right) dx = 0.$$

Nun ist

$$Q = \frac{dM}{dx} = M', \quad p = -\frac{dQ}{dx} = -M_p'',$$

also

$$\delta_p \int_0^l \left( \frac{M^2}{2EJ} + \frac{\beta M'^2}{2GF} + M_p'' y \right) dx = 0.$$

Die Durchführung der Variation nach  $M$  ergibt:

$$\frac{M}{EJ} - \beta \frac{M''}{GF} + y'' = 0$$

oder

$$(15) \quad y'' = -\frac{M}{EJ} + \frac{\beta M''}{GF}.$$

Man sieht sofort, daß die Schubkräfte allein eine Biegelinie erzeugen, die der Momentenlinie ähnlich (affin zugeordnet) ist.

Um den wirklichen Sinn der Gleichung (15) hervortreten zu lassen, sind einige erläuternde Bemerkungen nötig. Die Gleichung gilt nämlich für irgendeine gegebene Belastung  $P$ , also auch für Einzelkräfte. Um das zweite Variationsprinzip anwenden zu können, wird eine stetige Belastung  $p$  aufgebracht gedacht, die, wie angegeben, allein variiert werden soll und nach Aufstellung der Differentialgleichung gleich Null gesetzt werden darf. Da die Lasten  $P$  nicht variiert werden, kann ihre äußere Arbeit gleich in der Ansatzgleichung weggelassen werden. Auch von  $M$  wird nur der Anteil  $M_p$  variiert, der von  $p$  abhängt; daraus



erklärt sich, daß  $p = -M_p''$  mit dem Index gesetzt werden mußte. Die Ansatzgleichung hätte eigentlich geschrieben werden müssen:

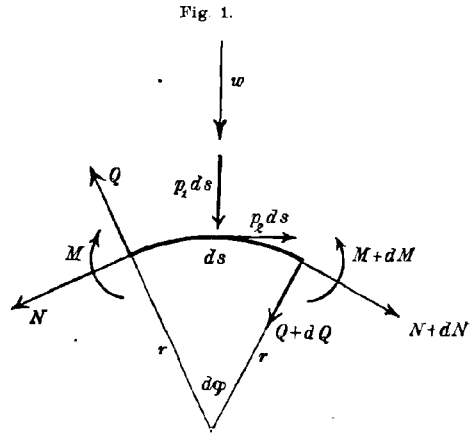
$$\int_0^l \left( \frac{M}{EJ} \delta M_p + \frac{\beta M'}{GF} \delta M_p' + \delta M_p'' \cdot y \right) dx = 0.$$

Diese Betrachtungen gelten auch für die folgenden Fälle.

Die gegebene Ableitung der Differentialgleichung zeigt, daß der zweite Differentialquotient der Biegungslinie aus rein statischen Gründen auftreten muß. Daß sich nicht die genaue Gleichung mit dem Krümmungshalbmesser ergibt, liegt daran, daß Moment, Querkraft und Integrationsweg auf die unverbogene Balkenachse bezogen sind.

2. Die Differentialgleichung der Biegungslinie eines Kreisrings folgt, wenn  $w$  die nach innen positiv gerichtete Radialverschiebung,  $v$  die Tangentialverschiebung bedeutet, und

wenn  $p_1$  und  $p_2$  die zu variierenden stetigen Belastungen sind, nach Fig. 1:



$$\delta_p \int_0^s \left[ \frac{M^2}{2EZ} + \frac{\beta Q^2}{2GF} + \frac{\mathfrak{N}^2}{2EF} - p_1 w - p_2 v \right] ds = 0.$$

Hierin ist

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M}{r}.$$

$Z$  ist der wenig vom Trägheitsmoment abweichende Wert, der bei gekrümmten Stäben einzuführen ist.<sup>1)</sup>

Die Variation nach  $p_1$  liefert:

$$\int_0^s \left[ \frac{M}{EZ} \cdot \delta M_1 + \beta \frac{Q}{GF} \cdot \delta Q_1 + \frac{\mathfrak{N}}{EF} \cdot \delta \mathfrak{N}_1 - \delta p_1 \cdot w \right] ds = 0.$$

Durch den Zeiger 1 wird hervorgehoben, daß in den Variationen nur die Glieder berücksichtigt zu werden brauchen, die von  $p_1$  herühren.

1) Zu diesen Formeln vgl. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 4. Aufl. 1913, S. 236 ff.

Es ist nun nach Fig. 2 allgemein:

$$Q = \frac{dM}{ds} = M',$$

also

$$\text{a) } Q_1 = M_1'.$$

Ferner aus dem Moment um den Krümmungsmittelpunkt:

$$dN_1 \cdot r - dM_1 = 0$$

oder

$$\frac{d}{ds} \left( N_1 - \frac{M_1}{r} \right) = 0$$

oder endlich

$$\mathfrak{N}_1' = 0,$$

$$\text{b) } \mathfrak{N}_1 = C.$$

Daraus folgt:

$$N_1 = C + \frac{M_1}{r}.$$

Schließlich hat man für die Kräfte in radialer Richtung

$$p_1 ds + dQ_1 + N_1 \frac{ds}{r} = 0$$

$$p_1 = -Q_1' - \frac{N_1}{r}$$

$$\text{c) } p_1 = -M_1'' - \frac{M_1}{r^2} - \frac{C}{r}.$$

Die Grundgleichung wird hiermit:

$$\int_0^l \left[ \frac{M}{EZ} \cdot \delta M_1 + \frac{\beta M'}{GF} \cdot \delta M_1' + \frac{\mathfrak{N}}{EF} \cdot \delta C + w \cdot \delta \left( M_1'' + \frac{M_1}{r^2} + \frac{C}{r} \right) \right] ds = 0.$$

Die Ausführung der Variation ergibt:

$$\frac{M}{EZ} - \beta \frac{M''}{GF} + w'' + \frac{w}{r^2} = 0.$$

Es folgt somit die bekannte, hier erweiterte Gleichung:

$$(16) \quad w'' + \frac{w}{r^2} = -\frac{M}{EZ} + \beta \frac{M''}{GF}.$$

Es ist sehr beachtenswert, daß die Dehnung der Mittellinie einflußlos ist.

Verfährt man entsprechend bei  $p_2$ , so findet man leicht:

$$\text{a) } Q_2 = M_2'.$$

Ferner aus den Kräften in radialer Richtung:

$$dQ_2 + N_2 \frac{ds}{r} = 0$$

oder

$$N_2 = -M_2'' \cdot r,$$

somit

$$\text{b) } \mathfrak{N}_2 = -M_2'' \cdot r - \frac{M}{r}.$$

Aus dem Moment um den Krümmungsmittelpunkt:

$$p_2 + N_2' - \frac{M_2'}{r} = 0$$

$$p_2 = -\mathfrak{N}_2'$$

c)  $p_2 = + M_2''' r + \frac{M_2'}{r}$ .

Die Einsetzung in die Grundgleichung ergibt:

$$\int_0^s \left[ \frac{M}{EZ} \cdot \delta M_2 + \frac{\beta M'}{GF} \cdot \delta M_2' + \frac{\mathfrak{N}}{EF} \cdot \delta \left( -M_2'' \cdot r - \frac{M_2}{r} \right) - v \cdot \delta \left( M_2''' r + \frac{M_2'}{r} \right) \right] ds = 0,$$

und daraus erhält man:

$$\frac{M}{EZ} - \frac{\beta M'}{GF} - \frac{\mathfrak{N}'' r + \frac{\mathfrak{N}}{r}}{EF} + v''' r + \frac{v'}{r} = 0.$$

Mit Benutzung der Gleichung (16) läßt sich dies leicht umformen in:

$$-\left( w'' + \frac{w}{r^2} \right) + r \left( -\frac{\mathfrak{N}'' + \frac{\mathfrak{N}}{r^2}}{EF} + v''' + \frac{v'}{r^2} \right) = 0$$

oder

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( v' - \frac{w}{r} - \frac{\mathfrak{N}}{EF} \right) + \frac{v' - \frac{w}{r} - \frac{\mathfrak{N}}{EF}}{r^2} = 0.$$

Außer der Lösung:

$$v' - \frac{w}{r} - \frac{\mathfrak{N}}{EF} = C_1 \cos \frac{s}{r} + C_2 \sin \frac{s}{r} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi,$$

die einer Parallelverschiebung entspricht, hat man noch die bekannte Lösung:

$$(17) \quad v' = \frac{w}{r} + \frac{\mathfrak{N}}{EF}.$$

Auch die Gleichung (16) hat, wenn alle Kräfte verschwinden, die Lösung:

$$w = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi,$$

also eine Parallelverschiebung.

3. Bei Stäben anderer Form bezieht man die Durchbiegungen besser auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz. — Es soll die senkrechte Durchbiegung  $w$  für einen ursprünglich krummen belasteten Stab ermittelt werden.

Aus Fig. 2 folgt leicht:

$$Q = \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = M' \cos \alpha$$

$$N_p = -M_p' \sin \alpha + \frac{C}{\cos \alpha}$$

$$p = -M_p'' + C \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d\alpha}.$$

Da  $d\alpha$  in Fig. 2 negativ ist, wird der Krümmungshalbmesser:

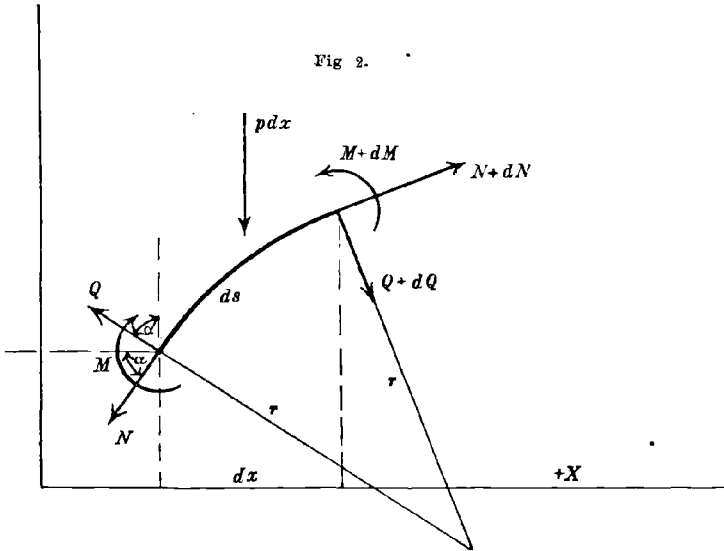
$$r = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Somit ergibt sich

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M}{r} = N + M \frac{d\alpha}{ds} = N + M \frac{d\alpha}{dx} \cos \alpha = N + M \frac{d \sin \alpha}{dx},$$

folglich:

$$\mathfrak{N}_p = -M_p' \sin \alpha + M_p \frac{d \sin \alpha}{dx} + \frac{C}{\cos \alpha}.$$



Der Integrationsweg ist  $ds$ , die unabhängige Veränderliche  $x$ ; daher lautet die Grundgleichung:

$$\delta_p \int_0^l \left[ \frac{M^2}{2EZ \cos \alpha} + \frac{\beta Q^2}{2FG \cos \alpha} + \frac{\mathfrak{N}^2}{2EF' \cos \alpha} - pw \right] dx = 0.$$

Die Einsetzung der ermittelten Werte liefert:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ \frac{M}{EZ \cos \alpha} \cdot \delta M_p + \frac{\beta M' \cos \alpha}{GF'} \cdot \delta M_p' \right. \\ & \left. + \frac{\mathfrak{N}}{EF' \cos \alpha} \cdot \delta \left( -M_p' \sin \alpha + M_p \frac{d \sin \alpha}{dx} + \frac{C}{\cos \alpha} \right) \right. \\ & \left. + w \cdot \delta \left( M_p'' - C \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\frac{M}{EZ \cos \alpha} - \frac{\beta}{GF'} \cdot \frac{d(M' \cos \alpha)}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \mathfrak{N} \operatorname{tg} \alpha \right) + \mathfrak{N} \frac{d \sin \alpha}{dx \cdot \cos \alpha} + w'' = 0.$$

Mit Beachtung der vorhergehenden Gleichungen ist dies leicht umzuformen in:

$$(18) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EZ \cos \alpha} + \frac{\beta}{GF} \cdot \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{EF} \left[ \frac{d}{dx} (\mathfrak{N} \operatorname{tg} \alpha) - \frac{\mathfrak{N}}{r \cos \alpha} \right].^{1)}$$

Zu beachten ist, daß

$$Q = \frac{dM}{ds}.$$

Die Differentialgleichung für die wagerechten Durchbiegungen ergibt sich hieraus durch sinnmäßige Umrechnung auf die andere Achse.

#### IV.

Die Anwendungen des zweiten Variationsprinzips im vorigen Abschnitt setzten das Hookesche Gesetz voraus. Es ist aber mit Leichtigkeit zu sehen, daß überhaupt keine Annahme über die Eigenschaften der Formänderungen nötig ist, wenn man das Prinzip in der Form der Gleichung (8) anwendet. Die Ergebnisse der Variation sind dann einfach die Beziehungen zwischen den inneren Formänderungen, z. B. Dehnungen und Gleitungen, und den äußeren, den Verschiebungen. Man erhält also die Bedingungen der Verträglichkeit der inneren und äußeren Formänderungen, die sogenannten „Kompatibilitätsbedingungen“. Wendet man diese Erwägung auf das erste Beispiel des vorigen Abschnitts an, so erhält man, wenn man mit  $\kappa$  die Krümmungsänderung infolge des Momentes, mit  $\gamma$  die Gleitung infolge der Querkraft bezeichnet:

$$\int_0^l [\kappa \cdot \delta M + \gamma \cdot \delta M' + \delta M'' \cdot y] dx = 0,$$

daher

$$(19) \quad \begin{aligned} & + \kappa - \gamma' + y'' = 0 \\ & \frac{d^2 y}{dx^2} = -\kappa + \frac{d\gamma}{dx}. \end{aligned}$$

Da nach dem Prinzip nur kleine Formänderungen angesetzt werden dürfen, erhält man nur die Glieder erster Ordnung für die Formänderungen.

Wie der Satz bei formbaren Körpern (also auch unelastischen) anzuwenden ist, zeigen die folgenden Beispiele.

1) Die Formel ist auf anderem Wege bereits von Müller-Breslau gegeben worden (Graph. Statik II, 2, 1908, S. 513 Gl. 27 und 28. Ferner: Neuere Methoden der Festigkeitslehre 4. Aufl. S. 248 Formel (120); sie enthält dort ein Versehen. Vergleicht man Formel (60) auf S. 176, so erkennt man, daß in den Formeln (120) und (121) der Faktor  $\frac{ds}{dx}$  im letzten Gliede zu streichen ist; Formel (122) ist wieder richtig.)

1. Es sollen die Beziehungen zwischen den Dehnungen und Gleitungen und den äußeren Verschiebungen  $u, v, w$  eines homogenen Körpers für ein rechtwinkliges Achsenkreuz aufgestellt werden.

Wenn  $X, Y, Z$  Massenkkräfte (bezogen auf die Raumeinheit) nach den drei Achsen darstellen, so bestehen bekanntlich die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z &= 0.\end{aligned}$$

Nach dem zweiten Variationsprinzip verschwindet für sich die über den Gesamtkörper ausgedehnte Variation

$$\int [\varepsilon_x \cdot \delta \sigma_x + \varepsilon_y \cdot \delta \sigma_y + \varepsilon_z \cdot \delta \sigma_z + \gamma_x \cdot \delta \tau_x + \gamma_y \cdot \delta \tau_y + \gamma_z \cdot \delta \tau_z - \delta X \cdot u - \delta Y \cdot v - \delta Z \cdot w] dV = 0.$$

Die Arbeiten der äußeren Kräfte kommen nur in den Randintegralen vor, fallen also im Raumintegral aus.

Für  $X, Y, Z$  führt man die drei obigen Ausdrücke in das Integral ein:

$$\int [\varepsilon_x \cdot \delta \sigma_x + \dots + u \cdot \delta \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dots \right) + v \cdot \delta \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dots \right) + w \cdot \delta \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dots \right)] dV = 0.$$

Die Variation nach den sechs Spannungen einzeln durchgeführt ergibt die Gleichungen:

$$(20) \quad \begin{aligned}\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \gamma_x - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & \gamma_y - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ \varepsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 & \gamma_z - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Das sind die wohlbekanntenen Beziehungen für die homogene infinitesimale Deformation; ihre Ableitung setzt also außer der Kenntnis der Gleichgewichtsbedingungen nur die Anfangsgründe der Variationsrechnung voraus. Es ist klar, daß die Massenkkräfte auch beliebig klein angenommen werden dürfen. —

Bekanntlich kann man die drei Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungen durch die Einführung von drei Spannungsfunktionen entbehrlich machen; die Einsetzung dieser Funktionen ergibt dann bekannte Beziehungen zwischen den Formänderungsgrößen, von denen hier nur die für den Fall des ebenen Problems, wo eine Spannungs-

funktion ausreicht, gegeben werden mag. Es ist hier (bei Ausschluß von Massenkräften)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Somit wird, da die äußeren Lasten wiederum nur in den Randintegralen vorkommen,

$$\iint \left[ \varepsilon_x \cdot \delta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \varepsilon_y \cdot \delta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \gamma \cdot \delta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] h dx dy = 0,$$

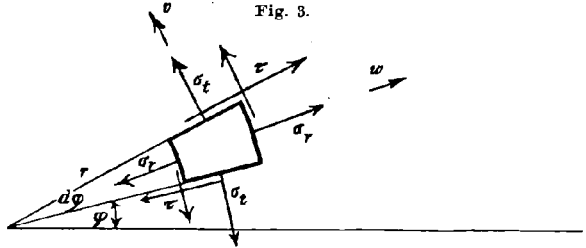
woraus sofort folgt:

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = 0. 1)$$

Die Differentialgleichung für die Spannungsfunktion des ebenen Problems

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

erhält man aus Gleichung (21), wenn man die aus dem Hookeschen Gesetz folgenden Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen einsetzt. Noch einfacher kommt man zu dieser Gleichung, wenn man die Spannungen in dem nach dem Hookeschen Gesetz gebildeten Ausdruck für  $B$  durch  $F$  ausdrückt und nun die Variation nach  $F$  bildet.



2. Es sollen die Ver-einbarkeitsbedingungen für das ebene Problem unter Voraussetzung von Polarkoordinaten hergeleitet werden.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 3 hat man, wenn  $X_r$  und  $X_t$  die Massenkräfte, bezogen auf die Raumeinheit, bezeichnen, bekanntlich<sup>2)</sup>:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + X_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2\tau}{r} + X_t = 0.$$

Das zweite Variationsprinzip ergibt:

$$\iint [(\varepsilon_r \cdot \delta \sigma_r + \varepsilon_t \cdot \delta \sigma_t + \gamma \cdot \delta \tau - \delta X_r \cdot w - \delta X_t \cdot v) r] dr d\varphi h = 0.$$

1) Vgl. Love, Lehrb. d. Elastizität, deutsch von Timpe 1907, S. 59.

2) Vgl. Love, Elastizität, S. 107.

Setzt man die obigen Werte von  $X_r$  und  $X_t$  ein und variiert die einzelnen Spannungen, so folgen die Gleichungen

$$\varepsilon_r r - \frac{\partial(wr)}{\partial r} + w = 0$$

$$\varepsilon_t r - w - \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$$

$$\gamma r - \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial(vr)}{\partial r} + 2v = 0$$

oder<sup>1)</sup>

$$(22) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ \varepsilon_t &= \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \gamma &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned}$$

## V.

Die Formänderungsarbeit  $A_0$  für die Raumeinheit führt den Namen „elastisches Potential“ deswegen, weil ihre partiellen Ableitungen nach den Verzerrungen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  die jeweilig zugehörige Spannung ergeben, also

$$(23) \quad \frac{\partial A_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x \text{ usw.} \quad \frac{\partial A_0}{\partial \gamma_x} = \tau_x \text{ usw.}$$

Das folgt unmittelbar schon aus den Darlegungen zu den Gleichungen (1) und (2). Diese Beziehungen gelten also auch für ein beliebiges Formänderungsgesetz, wenn die Formänderungen nur völlig elastisch sind.

Genau ebenso folgen aus den Gleichungen (8) und (9) die Gleichungsgruppen:

$$(24) \quad \frac{\partial B_0}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x \text{ usw.} \quad \frac{\partial B_0}{\partial \tau_x} = \gamma_x \text{ usw.}$$

Auch hier kann das Formänderungsgesetz beliebig sein, wenn nur völlige Elastizität besteht.

Die beiden Variationsprinzipien zeigen somit in ihren Folgerungen einen vollkommenen Parallelismus, und es ist lehrreich, die einander entsprechenden Sätze nochmals kurz gegenüberzustellen.

a) Wählt man zur Darstellung der beiden Arbeiten  $A$  und  $B$  die Spannungen und die Verzerrungen, so gelangt man zu den soeben erwähnten Differentialsätzen (23) und (24).

b) Der Darstellung der Formänderungsarbeit  $A$  durch die Kraftverschiebungen  $w$  entspricht die Darstellung der Ergänzungsarbeit  $B$

1) Vgl. Love, Elastizität, S. 66.



durch die äußeren Kräfte  $P$ . Es entsprechen sich der Satz von Green (3) und der von Castigliano und Engesser (11).

Dies sind die eigentlichen Differentialbeziehungen; aus den Variationsansätzen folgt:

c) Stellt man die Arbeiten  $A$  und  $B$  durch die Spannungen und Verzerrungen dar, so erhält man nach dem zweiten Variationsprinzip unter Benutzung der Gleichgewichtsbedingungen die Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen (Gleichung 20). Ganz entsprechend erhält man aus dem ersten Variationsprinzip unter Benutzung der Beziehungen der Gleichungen (20) die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen an einem unendlich kleinen Prisma.<sup>1)</sup>

d) Der Darstellung der Arbeit  $B$  durch Funktionen der äußeren Kräfte, die Momente  $M$ , entspricht die Darstellung der Arbeit  $A$  durch Funktionen der Verschiebungen  $w$ , die Ordinaten  $y$  der Biegelinie. Die im Abschnitt I behandelte Knickungsaufgabe ist ein Beispiel für diesen letzten Fall. —

Man erkennt jetzt einen weiteren Parallelismus, der gleichartig bei jedem der beiden Prinzipie auftritt: Den Differentialbeziehungen unter a) entsprechen die Variationsbeziehungen c), und ebenso entsprechen sich die Sätze unter b) und d).

Der Ersatz der Spannungen in der Ergänzungsarbeit  $B$  durch Spannungsfunktionen hat kein eigentliches Gegenstück bei dem ersten Variationsprinzip. Ein solches scheint auch nicht erforderlich zu sein; denn der Möglichkeit, die sechs Spannungen durch drei Spannungsfunktionen auszudrücken, steht gegenüber, daß die sechs Verzerrungen durch drei Verschiebungen ausgedrückt werden können.

## VI.

Während die bisher aufgeführten einander entsprechenden Sätze auch dem Inhalte nach verschieden sind, bildet der Maxwellsche Satz (Gleichung 14):

$$\frac{\partial w_m}{\partial P_n} = \frac{\partial w_n}{\partial P_m}$$

eine bemerkenswerte Ausnahme; denn er sagt nur der Form nach, nicht der Sache nach, etwas anderes aus als sein Gegenstück (Gleichung 4):

$$\frac{\partial P_m}{\partial w_n} = \frac{\partial P_n}{\partial w_m}$$

Innerlich ist dies darin begründet, daß es sich hier nur um Differentialbeziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen handelt, sonach die

1) Vgl. Love, Elastizität, S. 193.

zweite Reihe von Beziehungen denselben Inhalt haben muß wie die erste. — Mathematisch geht die Übereinstimmung aus folgendem Satze hervor:

„Besteht zwischen zwei Gruppen von unabhängigen Veränderlichen  $P$  und  $w$  die Reihe der Beziehungen:

$$\frac{\partial P_m}{\partial w_n} = \frac{\partial P_n}{\partial w_m},$$

so muß auch die Reihe der Beziehungen („Umkehrungen“):

$$\frac{\partial w_m}{\partial P_n} = \frac{\partial w_n}{\partial P_m}$$

bestehen.“

Der Beweis für diesen Satz ist einfach und bereits in den vorhergehenden Abschnitten seinen Grundzügen nach gegeben: Aus der ersten Reihe folgt, daß  $P_m$  der partielle Differentialquotient einer Funktion  $A$  nach  $w_m$  sein muß: aus  $A = \sum \int P dw$  ergibt sich durch partielle Integration, daß  $B = \sum \int w dP$  ein vollständiges Integral sein muß, daß daher  $w_m$  der partielle Differentialquotient von  $B$  nach  $P_m$  ist. Die nochmalige Differentiation ergibt dann die zweite Reihe. —

Ebenso wie der Maxwellsche Satz hat auch seine Erweiterung, der Satz von Betti, nur ein formales Gegenstück. Die verallgemeinerte Form dieses Satzes bei beliebigem Formänderungsgesetz findet man auf folgendem Wege:

Man kann die Verschiebungen  $w$  als Funktionen gewisser Parameter  $u$  betrachten:

$$(25) \quad w_m = f_m(u_1, \dots, u_i, u_k, \dots)$$

Jeder dieser Parameter  $u_i$  kennzeichnet einen bestimmten Verschiebungszustand, der durch eine Kräftegruppe  $P_i$  erzeugt gedacht werden kann. Aus dem ersten Variationsprinzip folgt nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u_i} - \sum \left( P \frac{\partial w}{\partial u_i} \right) &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial u_k} - \sum \left( P \frac{\partial w}{\partial u_k} \right) &= 0, \end{aligned}$$

demnach durch nochmalige Differentiationen nach  $u_k$  und  $u_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \sum \left( P \frac{\partial w}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \sum \left( P \frac{\partial w}{\partial u_k} \right).$$

Führt man die Differentiation aus, so erhält man nach Weghebung der beiderseits gleichen Glieder:

$$(26) \quad \sum \left( \frac{\partial P}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial w}{\partial u_i} \right) = \sum \left( \frac{\partial P}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial u_k} \right).$$

Dies ist die erste Form des verallgemeinerten Satzes von Betti. Werden die Verschiebungen  $w$  selbst als Parameter gewählt, so ergibt sich sofort das Gegenstück des Maxwell'schen Satzes (Gleichung 4), da links nur die Kraft  $P_i$ , rechts nur  $P_k$  übrig bleibt, während alle übrigen Kräfte ausfallen. —

Zur Ableitung des ergänzenden Gegenstücks betrachte man die Kräfte  $P$  als Funktionen gewisser Parameter  $R$ , also

$$(27) \quad P_m = \varphi_m(R_1, \dots, R_i, R_k, \dots).$$

Jeder dieser Parameter  $R_i$  kennzeichnet einen bestimmten Belastungszustand, dem eine Verschiebungsgruppe  $w_i$  zugeordnet ist. Aus dem zweiten Variationsprinzip folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial R_i} - \sum \left( \frac{\partial P}{\partial R_i} \cdot w \right) &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial R_k} - \sum \left( \frac{\partial P}{\partial R_k} \cdot w \right) &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus ganz entsprechend wie oben:

$$(28) \quad \sum \left( \frac{\partial P}{\partial R} \cdot \frac{\partial w}{\partial R_k} \right) = \sum \left( \frac{\partial P}{\partial R_k} \cdot \frac{\partial w}{\partial R_i} \right)$$

als zweite Form des verallgemeinerten Bettischen Satzes. Wählt man die  $P$  selbst als Parameter, so folgt sofort der erweiterte Maxwell'sche Satz (Gleichung 14), da links nur  $w_i$ , rechts nur  $w_k$  übrig bleibt, während alle übrigen Verschiebungen ausfallen.

Die beiden Formen des Bettischen Satzes unterscheiden sich nur durch den Sinn, der den Parametern beigelegt war. Mathematisch ist diese Unterscheidung gleichgültig, und somit sagen beide Formen inhaltlich dasselbe aus. In den Anwendungen wird man natürlich zweckmäßig entweder die  $w$  als *lineare* Funktionen der  $u$  oder die  $P$  als *lineare* Funktionen der  $R$  ansetzen.

Legt man das Hooke'sche Formänderungsgesetz zugrunde, so wird die Übereinstimmung beider Formen besonders deutlich. Da dann wegen des Superpositionsgesetzes sowohl die Verschiebungen als auch die Kräfte lineare Funktionen der Parameter werden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial u_i} = P_{mi} & \quad \frac{\partial P_m}{\partial R_i} = P_{mi} \\ \frac{\partial w_m}{\partial u_i} = w_{mi} & \quad \frac{\partial w_m}{\partial R_i} = w_{mi}, \end{aligned}$$

worin der erste Zeiger den Angriffspunkt der Kraft oder den Ort der Verschiebung angibt, der zweite Zeiger die Kräftegruppe oder

Verschiebungsgruppe kennzeichnet. Damit folgt sowohl aus (27) wie aus (28):

$$(29) \quad \sum(P_{mi} \cdot w_{mk}) = \sum(P_{mk} \cdot w_{mi})$$

oder: Die virtuelle Arbeit der Kräfte des Belastungszustandes  $i$  beim Verschiebungszustand  $k$  ist gleich der virtuellen Arbeit der Kräfte des Belastungszustandes  $k$  beim Verschiebungszustand  $i$ .

-----

## Über Preisverteilung bei Spielturnieren.

Von EDMUND LANDAU in Göttingen.

### Einleitung.

Es mögen  $n \geq 2$  Personen an einem Spielturnier beteiligt sein. Jeder spiele mit jedem ein Spiel, dessen Ergebnis entweder Gewinn für den einen und Verlust für den anderen, oder aber Unentschieden (Remis) ist. Ersterenfalls werde dem Gewinner 1, dem Verlierer 0 in Anrechnung gebracht, letzterenfalls jedem der beiden Spieler  $\frac{1}{2}$ . Dann entsteht, wie es z. B. bei Schachturnieren üblich ist, ein Schema von folgender Gestalt, bei dem jede Zeile das Ergebnis der  $n - 1$  Spiele des an ihrem Anfang genannten Spielers angibt:

$$(1) \quad \begin{array}{c|c|c|c} & A & B & C \\ \hline A & - & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline B & 0 & - & 1 \\ \hline C & \frac{1}{2} & 0 & - \end{array}$$

Allgemein also, wenn die Hauptdiagonale mit Nullen ausgefüllt wird, eine Matrix  $M = (a_{x\lambda})$

$$(2) \quad \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline A_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

von  $n^2$  Elementen  $a_{x\lambda}$  ( $x = 1, \dots, n; \lambda = 1, \dots, n$ ), in der

$$a_{x\lambda} = 0 \quad \text{für } x = \lambda,$$

$$a_{x\lambda} + a_{\lambda x} = 1; \quad a_{x\lambda} = 0, \quad \frac{1}{2} \text{ oder } 1 \text{ für } x \neq \lambda$$

ist.

Es ist nun bei Schachturnieren üblich, für jeden Spieler  $A_x$  die Points seiner  $n - 1$  Partien oder, was dasselbe ist, die ihm entsprechende Zeile  $a_{x1} + \dots + a_{xn} = s_x$  der Matrix zu addieren; dies ergibt im obigen Beispiel:

$$s_1 = 1\frac{1}{2}, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = \frac{1}{2}.$$

Man pflegt nun, wenn  $l < n$  Preise (im Beispiel etwa 2 Preise) zu verteilen sind, sie den  $l$  Spielern mit höchster Zeilensumme<sup>1)</sup> zuzusprechen. Wenn aber — was ja bei manchen Spielen zweckmäßig ist — eine Geldsumme, etwa  $s$  Mark, unter alle Spieler im Verhältnis der Turnierleistungen zu verteilen ist, so ist es üblich, sie im Verhältnis  $s_1 : s_2 : \dots : s_n$  zu verteilen, d. h. dem  $x$ ten Spieler  $s \frac{s_x}{s_1 + \dots + s_n}$  Mark zu geben.<sup>2)</sup>

Gegenüber dieser Art der Bewertung jeder Partie mit demselben Gewicht (d. h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit 1) ist nun von verschiedenen Seiten<sup>3)</sup> eine andere Forderung erhoben worden; es liegt mir als reinem Mathematiker ganz fern, mich über die Berechtigung oder Nichtberechtigung derselben zu äußern; nur über ihre Konsequenzen habe ich einiges zu sagen. Die Forderung besteht darin, nicht jede Gewinnpartie gleich zu bewerten, sondern proportional der aus dem Turnier ersichtlichen Spielstärke des Gegners; desgleichen jede Remispartie proportional der halben Spielstärke.

Man hatte demgemäß vorgeschlagen<sup>4)</sup>: Im Spezialfall (1) den gewonnenen Partien gegen  $A, B, C$  die Gewichte  $1\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$  zu geben, den Remispartien je die Hälfte, und rechnete somit als Turnierleistung

$$\begin{aligned} \text{des } A: & \quad 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}, \\ \text{des } B: & \quad 0 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \text{des } C: & \quad \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 0 \cdot 1 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

wies also  $C$  den zweiten Platz an. Desgleichen beim allgemeinen Schema (2), wo dem Spieler  $A_x$  die Zahl

$$\sum_{\lambda=1}^n a_{x\lambda} \cdot s_\lambda = \sum_{\lambda=1}^n a_{x\lambda} \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n a_{x\lambda} a_{\lambda\mu},$$

1) Was bei Gleichheit von Zeilensummen geschehen soll, hat mit dem Problem meiner vorliegenden Abhandlung nichts zu tun.

2) Da Pfennige nicht geteilt werden können, geht das nicht immer genau zu machen. Welche volle Anzahl von Münzeinheiten jeder Spieler enthält, damit „möglichst genau“ das Verhältnis  $s_1 : s_2 : \dots : s_n$  entsteht, ist das Problem der Proportionalwahl und kommt für den Zweck meiner vorliegenden Abhandlung auch nicht in Betracht. Man denke sich übrigens statt der Geldsumme eine Torte, und jene Schwierigkeit ist gar nicht vorhanden.

3) Literatur s. z. B. bei Ahrens, *Zur relativen Bewertung von Turnierpartien* [Wiener Schachzeitung, Bd. IV (1901), S. 181—192].

4) Nur von diesem Vorschlag handelt meine gegenwärtige Abhandlung.

d. i. offenbar die Summe der Elemente der  $\kappa$ -ten Zeile der Matrix  $M^2$ , zugeordnet wird.

Daß dies Verfahren in sich widerspruchsvoll, also unzulässig ist, habe ich in einer (für Nichtmathematiker geschriebenen und demgemäß den Begriff der Determinante vermeidenden) Notiz<sup>1)</sup> vom Jahre 1895 bemerkt; diese Notiz bezeichnet Herr Ahrens in seinem Artikel „Mathematische Spiele“ der Mathematischen Encyclopädie<sup>2)</sup> vom Jahre 1902 als den richtigen mathematischen Ansatz des noch unerledigten Problems, nachdem er sie in dem schon oben genannten Artikel der Wiener Schachzeitung<sup>3)</sup> mit den Worten erwähnt hatte: „Nach der mathematischen Seite sind, so viel wir sehen, alle bisher gemachten Vorschläge durchaus fehlerhaft und widerspruchsvoll. Zwar hat Herr Dr. E. Landau gezeigt, wie man die verschiedenen Methoden verbessern könne, und die mathematisch correcte Formulierung des Problems angegeben. So präcis und durchsichtig nun auch diese Arbeit ist, so geht doch aus den späteren Publicationen anderer Autoren hervor, dass ihnen das Fehlerhafte ihrer Methoden noch nicht zum Bewusstsein gekommen ist. Ich werde daher in diesem Artikel zwar nicht die Landau'schen Ausführungen über das algebraische Problem, das — nebenbei bemerkt — rein theoretisch betrachtet, auf äusserst schwierige Fragen führt, reproduciren, sondern mich bemühen, an einigen besonders typischen Beispielen vor allem die Widersprüche mit sich selbst, in die die meisten Autoren verfallen, sowie sonstige Irrthümer nachzuweisen. Diese Widersprüche werden gewöhnlich dadurch verursacht, dass fast alle Autoren das doch verpönte Quantitätsprincip zunächst zugrunde legen, also auf einem doch ihrer eigenen Ansicht nach schwankenden Fundament ihr Gebäude errichten“. Der Fehler ist also, um beim Beispiel (1) zu bleiben, folgender: Eine gegen  $B$  gewonnene Partie wird doppelt so hoch bewertet als eine gegen  $C$  gewonnene, während doch das Ergebnis der obigen Rechnung gerade ist, daß  $C$  über  $B$  kommt, sogar um 50% besser abschneidet. Ich brauche wohl für einen mathematisch denkenden Leser diesem einen Beispiel nichts hinzuzufügen, damit er diese Methode über Bord wirft.

Wie ist also zu verfahren? Wenn die obige Qualitätsbewertung die Grundlage der Preisverteilung sein soll, handelt es sich darum — und soweit reicht mein Ansatz vom Jahre 1895 — die unbekannt-

---

1) *Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate* [Deutsches Wochenschatz, Bd. XI, S. 366—369].

2) Bd. I (S. 1080—1093), S. 1081.

3) S. 182.

$n$  Qualitäten  $x_1, \dots, x_n$  der Spieler so zu bestimmen, daß die  $n$  Turnierleistungen

$$\begin{array}{ccccccc} & a_{12}x_2 + \dots & & & + a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 & & + a_{23}x_3 + \dots & & + a_{2n}x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots & & & & + a_{n,n-1}x_{n-1} \end{array}$$

den Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  proportional sind.

Es sind also  $n$  Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ , die alle  $\geq 0$ , aber nicht alle  $= 0$  sind<sup>1)</sup>, und eine Zahl  $r$  so zu bestimmen, daß

$$\begin{array}{ccccccc} & a_{12}x_2 + \dots & & & + a_{1n}x_n = rx_1, \\ a_{21}x_1 & & + a_{23}x_3 + \dots & & + a_{2n}x_n = rx_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots & & & & + a_{n,n-1}x_{n-1} = rx_n \end{array}$$

ist. Eo ipso muß dann  $r \geq 0$  sein. Es handelt sich also um das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} rx_1 - a_{12}x_2 - \dots & & & & - a_{1n}x_n = 0, \\ - a_{21}x_1 + rx_2 - a_{23}x_3 - \dots & & & & - a_{2n}x_n = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - a_{n1}x_1 - \dots & & & & - a_{n,n-1}x_{n-1} + rx_n = 0; \end{array}$$

also<sup>2)</sup>, wenn in bekannter Weise  $e_{x\lambda} = 1$  für  $x = \lambda$ , sonst  $= 0$  ist,

$$(3) \quad \sum_{\lambda=1}^n (re_{x\lambda} - a_{x\lambda})x_\lambda = 0 \quad (x = 1, \dots, n)$$

Das Problem — dessen Lösung sich heute aus neueren Sätzen der Herren Perron und Frobenius ergibt — lautet: Zu entscheiden, ob stets eine Lösung  $x_1, \dots, x_n, r$  mit  $x_x \geq 0$  ( $x = 1, \dots, n$ ),  $x_1 + \dots + x_n > 0$  existiert. Weiter wird es sich dann fragen, was man machen soll, wenn es, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor, mehrere solche Lösungen gibt. Da es sich bei festem  $r$  um  $n$  homogene lineare Gleichungen mit  $n$  Unbekannten handelt, fragt es sich also zunächst, ob die Gleichung

$$(4) \quad | re_{x\lambda} - a_{x\lambda} | = 0$$

1) Wenn  $x_1 = \dots = x_n = 0$  ist, gibt es keine Möglichkeit, die  $s$  Mark unter die Spieler singemäß zu verteilen.

2) Schon oben war  $a_{xx} = 0$  definiert.

eine solche Wurzel  $r$  besitzt, daß die Gleichungen (3) in  $x_1, \dots, x_n$  eine Lösung in Werten  $\geq 0$ , die nicht alle verschwinden, besitzen.

Es war oben — dem Schach mit je einer Partie zwischen je zwei Spielern entsprechend —

$$a_{\kappa\lambda} + a_{\lambda\kappa} = 1; \quad a_{\kappa\lambda} = 1, \frac{1}{2}, 0 \text{ für } 1 \leq \kappa < \lambda \leq n$$

festgesetzt. Natürlich kann man auch allgemeiner annehmen, daß jeder Spieler mit jedem anderen  $w$  (statt 1) Partien spielt und demgemäß (da es auf einen konstanten positiven Faktor nicht ankommt, also die Gesamtleistung beider Spieler bei dem betreffenden Spiel jedesmal = 1 gesetzt werden kann)

$$a_{\kappa\lambda} + a_{\lambda\kappa} = 1, \quad a_{\kappa\lambda} \text{ rational, } 0 \leq a_{\kappa\lambda} \leq 1 \text{ für } 1 \leq \kappa < \lambda \leq n$$

annehmen. Aber  $a_{\kappa\lambda}$  darf für das Folgende auch irrational<sup>1)</sup> sein.

### § 1.

Herr Perron<sup>2)</sup> hat den Satz bewiesen:

*Ist jedes  $a_{\kappa\lambda} > 0$  ( $\kappa = 1, \dots, n; \lambda = 1, \dots, n$ ), so hat die charakteristische Gleichung*

$$(4) \quad |r e_{\kappa\lambda} - a_{\kappa\lambda}| = 0$$

*eine Wurzel  $r$ , welche  $> 0$ , einfach und absolut größer als jede andere Wurzel ist. Für dieselbe sind die  $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix*

$$rE - M = (r e_{\kappa\lambda} - a_{\kappa\lambda})$$

*alle positiv, also die  $n$  linearen Gleichungen*

$$(3) \quad \sum_{\lambda=1}^n (r e_{\kappa\lambda} - a_{\kappa\lambda}) x_\lambda = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, n)$$

*in positiven  $x_1, \dots, x_n$  lösbar; und zwar ist dies abgesehen von einem konstanten Faktor überhaupt die einzige zu  $r$  gehörige Lösung von (3).*

Herr Frobenius<sup>3)</sup> fügte hinzu: Nur der Maximalwurzel  $r$  entspricht eine Lösung in  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n > 0$ .

Das bisher in Erinnerung Gebrachte ist auf mein vorliegendes Problem noch nicht anwendbar, weil ich nur  $a_{\kappa\lambda} \geq 0$  habe. Für Matrizen mit Elementen  $\geq 0$  hat nun Herr Frobenius dem, was aus Stetigkeits-

1) Dies entspricht z. B. dem Spiel, daß beide eine als ideale Linie gedachte Marzipanstange von beiden Seiten bis zum Zusammentreffen durchzuessen haben.

2) *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus* [Mathematische Annalen, Bd. LXVIII (1907), S. 1—76], S. 47, und *Zur Theorie der Matrizen* [ebenda, S. 248—263], S. 261.

3) *Über Matrizen aus positiven Elementen*, II [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1909, S. 514—517, S. 514.



gründen im Perronschen Satz enthalten ist, viel hinzugefügt und speziell folgenden Satz bewiesen<sup>1)</sup>:

Es sei  $a_{\alpha\lambda} \geq 0$  ( $\alpha=1, \dots, n; \lambda=1, \dots, n$ ). Die Matrix  $M = (a_{\alpha\lambda})$  sei unzerlegbar; d. h. es gebe kein System von  $p$  Zeilen und  $q = n - p$  Spalten, deren Indizes die der  $p$  Zeilen zu  $1, 2, \dots, n$  ergänzen ( $p > 0, q > 0$ ), so daß die  $pq$  gemeinsamen Elemente verschwinden. Dann hat die charakteristische Gleichung (4) eine Wurzel  $r$ , welche  $\geq 0$ , einfach und absolut  $\geq$  jeder andern Wurzel ist. Für jenes  $r$  sind die  $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$rE - M = (re_{\alpha\lambda} - a_{\alpha\lambda})$$

positiv, also die  $n$  linearen Gleichungen

$$(3) \quad \sum_{\lambda=1}^n (re_{\alpha\lambda} - a_{\alpha\lambda}) x_{\lambda} = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

in positiven  $x_1, \dots, x_n$  lösbar, was abgesehen von einem konstanten Faktor die einzige zu jenem  $r$  gehörige Lösung von (3) darstellt. Ferner gibt es zu keinem andern Werte von  $r$  eine Lösung von (3) mit  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n > 0$ .

Die Frobeniussche Annahme der Unzerlegbarkeit von  $M$  ist bei meinem Spielproblem dann und nur dann erfüllt, wenn es nicht möglich ist, die Spieler in zwei Klassen einzuteilen, so daß jeder Spieler der ersten Klasse gegen jeden Spieler der zweiten Klasse das Ergebnis 1:0 hat (d. h. im speziellen Fall des gewöhnlichen Schachturniers seine Partie gewonnen hat). In diesem Falle führt also der Ansatz fürs Spielproblem zu einem eindeutigen Resultat.

## § 2.

Nun sei die Spielmatrix nicht unzerlegbar. Dann ist es möglich, die Spieler in zwei Klassen zu zerlegen, so daß jeder der ersten Klasse

1) Über Matrizen aus nicht negativen Elementen [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1912, S. 456—477], insb. S. 464—465. Auch Herr Potron hatte unabhängig die älteren Perron-Frobeniusschen Untersuchungen in einigen Richtungen fortgesetzt und Anwendungen gemacht (die sich nicht mit den meinigen decken): *Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients  $\geq 0$  et leur application aux problèmes de la production et des salaires* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLIII (1911), S. 1129—1132]; *Application aux problèmes de la „production suffisante“ et du „salaire vital“ de quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients  $\geq 0$*  [ebenda, S. 1458—1459]; *Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients  $\geq 0$  et leur application aux problèmes de la production et des salaires* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XXX (1918), S. 53—76].

gegen jeden der zweiten Klasse 1 : 0 erzielt hat, während es nicht möglich ist, die erste Klasse nochmals in diesem Sinne zu zerspalten.

Der Frobeniussche Satz über unzerlegbare Matrizen zeigt, daß mindestens eine Lösung mit  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n > 0$  möglich ist; man nehme nur alle Preise der Spieler, die nicht zur ersten Klasse gehören, = 0 an und behandle die der ersten Klasse entsprechende Matrix, die ja unzerlegbar ist, nach dem Früheren.

Jene Lösung kann die einzige sein, wie das erste der beiden folgenden Beispiele lehrt; sie braucht es aber nicht zu sein, wie das zweite lehrt. Ich nehme beide Beispiele im Schachturnierspezialfall  $a_{x\lambda} = 1, \frac{1}{2}, 0$ .

Erstes Beispiel:

	A	B	C	D	E	F
A	—	1	0	1	1	1
B	0	—	1	1	1	1
C	1	0	—	1	1	1
D	0	0	0	—	1	0
E	0	0	0	0	—	1
F	0	0	0	1	0	—

Hier zerfallen offenbar die 6 Spieler in je drei „obere“ (A, B, C) und „untere“ (D, E, F) Spieler. Es ist das Gleichungssystem aufzulösen:

$$\begin{aligned}
 x_2 + x_4 + x_5 + x_6 &= r x_1, \\
 x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= r x_2, \\
 x_1 + x_4 + x_5 + x_6 - r x_3 &= r x_4, \\
 x_5 &= r x_4, \\
 x_6 &= r x_5, \\
 x_4 &= r x_6.
 \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = \begin{vmatrix} r-1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & r-1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & r-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & r-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & -1 & 0 \\ 0 & r & -1 \\ -1 & 0 & r \end{vmatrix}^2 = (r^3 - 1)^2;$$

jedenfalls muß also  $r = 1$  sein. Daher ist nach den drei letzten der gegebenen Gleichungen

$$x_4 = x_5 = x_6,$$

also nach den drei ersten

$$x_2 + 3x_6 = x_1,$$

$$x_3 + 3x_6 = x_2,$$

$$x_1 + 3x_6 = x_3,$$

woraus durch Addition

$$9x_6 = 0,$$

$$x_6 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_3$$

folgt. Von der ausgesetzten Geldsumme  $s$  erhalten also die Spieler respektive

$$x_1 = \frac{s}{3}, \quad x_2 = \frac{s}{3}, \quad x_3 = \frac{s}{3}, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0.$$

Zweites Beispiel:

	A	B	C	D	E	F
A	—	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
B	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	1	1	1
C	0	$\frac{1}{2}$	—	1	1	1
D	0	0	0	—	1	0
E	0	0	0	0	—	1
F	0	0	0	1	0	—

Hier zerfallen gleichfalls die 6 Spieler in 3 + 3. Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= rx_1, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= rx_2, \\ \frac{1}{2}x_2 + x_4 + x_5 + x_6 &= rx_3, \\ &= rx_4, \\ &= rx_5, \\ &= rx_6. \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = \begin{vmatrix} r & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & r & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r & -1 & 0 \\ 0 & r & -1 \\ -1 & 0 & r \end{vmatrix}.$$

Der erste Faktor  $r^3 - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}$  hat als einzige positive Wurzel  $r_1 = 0,884 \dots$ ; der zweite Faktor  $r^3 - 1$  hat als einzige positive Wurzel  $r_2 = 1$ .

Es kommen also nur die beiden Werte  $r = r_1$  und  $r = r_2$  in Betracht.

1)  $r = r_1 = 0,884 \dots$  gibt auf Grund der drei letzten Gleichungen

$$x_4 + x_5 + x_6 = r_1(x_4 + x_5 + x_6),$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_4 = x_5 = x_6 = 0;$$

dadurch werden die drei ersten Gleichungen

$$-r_1 x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2} x_1 - r_1 x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2} x_2 - r_1 x_3 = 0,$$

woraus

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left| \begin{array}{cc} -r_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -r_1 \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -r_1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -r_1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

$$= (r_1^2 - \frac{1}{4}) : \frac{1}{2} r_1 : \frac{1}{4} = (4r_1^2 - 1) : 2r_1 : 1,$$

$$x_1 = \frac{4r_1^2 - 1}{4r_1^2 + 2r_1} s = \frac{2r_1 - 1}{2r_1} s = 0,434 \dots s;$$

$$x_2 = \frac{2r_1}{4r_1^2 + 2r_1} s = \frac{1}{2r_1 + 1} s = 0,361 \dots s;$$

$$x_3 = \frac{1}{4r_1^2 + 2r_1} s = \frac{1}{2r_1(2r_1 + 1)} s = 0,204 \dots s;$$

$$x_4 = 0; \quad x_5 = 0; \quad x_6 = 0.$$

2)  $r = r_2 = 1$  gibt auf Grund der drei letzten Gleichungen

$$x_4 = x_5 = x_6;$$

alsdann lauten die drei ersten Gleichungen

$$-x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 = -3x_6,$$

$$\frac{1}{2} x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3 = -3x_6,$$

$$\frac{1}{2} x_2 - x_3 = -3x_6$$

und ergeben

$$x_1 = 36x_6, \quad x_2 = 30x_6, \quad x_3 = 18x_6.$$

Das Ergebnis des Ansatzes  $r = r_2$  lautet also

$$x_1 = \frac{36}{87} s = 0,413 \dots s; \quad x_2 = \frac{30}{87} s = 0,344 \dots s; \quad x_3 = \frac{18}{87} s = 0,206 \dots s;$$

$$x_4 = \frac{1}{87} s = 0,011 \dots s; \quad x_5 = \frac{1}{87} s = 0,011 \dots s; \quad x_6 = \frac{1}{87} s = 0,011 \dots s.$$

§ 3.

Um zu jeder Spielmatrix eine eindeutige Preisverteilung herzustellen, muß also irgend eine Festsetzung hinzukommen.

Man könnte z. B. daran denken, die oben angegebene Lösung als die kanonische zu wählen, bei der die Spieler der Unterklasse nichts erhalten, und diese Entscheidung damit rechtfertigen, daß eben die Gesamtheit der Spieler der Unterklasse (als Gesamtheit gedacht<sup>1)</sup>) gar nicht schlechter abschneiden konnte, als indem jeder aus ihr gegen jeden Spieler der Oberklasse 0 : 1 erzielte (ganz gleich wie die Parteien jener Gesamtheit untereinander ausfallen).

Dies ist allerdings eine Begründung, über die sich streiten läßt.

Niemand aber dürfte folgendes Prinzip bestreiten:

*Falls bei festem  $s$  mit einem bestimmten Turnierergebnis ein fester Spieler die Summe  $\alpha$  erhält und ein zweites Turnierergebnis in Betracht gezogen wird, bei dem ceteris paribus<sup>2)</sup> eines seiner Einzelergebnisse  $\vartheta_1 : 1 - \vartheta_1$  sich zu  $\vartheta_2 : 1 - \vartheta_2$  verbessert ( $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 1$ ), so darf er bei dem neuen Ergebnis nicht weniger als  $\alpha$  erhalten.*

Herr Perron, dem ich diese Fragen vorlegte, teilte mir ein Beispiel einer zerlegbaren Matrix mit zwei möglichen Verteilungen mit, in der auf Grund dieses Prinzips überraschenderweise beide Verteilungen zu verwerfen sind.

Danach wäre noch möglich gewesen, daß bei Beschränkung auf unzerlegbare Matrizen das Axiom erfüllt bleibt. Durch Weiterführung des Perronschen Grundgedankens finde ich jedoch, daß es auch hier verletzt ist.

Beispiel: Ich betrachte die beiden Schemata

		A	B	C	
(I)	A	—	1	1 - ε	und
	B	0	—	$\frac{1}{2}$	
	C	ε	$\frac{1}{2}$	—	

		A	B	C	
(II)	A	—	1	1 - ε	,
	B	0	—	1	
	C	ε	0	—	

wo  $1 > \varepsilon > 0$  ist, und behaupte, daß bei passender Wahl von  $\varepsilon$  der Spieler B bei (II) weniger erhält als bei (I).

1) Man denke sich diese Spieler als Mitglieder ein und desselben Schachklubs, der gegen die Mitglieder eines andern Klubs ein Turnier veranstaltet.

2) D. h. alle andern  $\frac{n(n-1)}{2} - 1$  Einzelergebnisse seien dieselben.

In der That strebt bei Abnahme des  $\varepsilon$  zu 0 die positive Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1-\varepsilon \\ 0 & -r & \frac{1}{2} \\ \varepsilon & \frac{1}{2} & -r \end{vmatrix} = -r^3 + (\frac{1}{4} + \varepsilon(1-\varepsilon))r + \frac{\varepsilon}{2} = 0$$

gegen  $\frac{1}{2}$ , die positive Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1-\varepsilon \\ 0 & -r & 1 \\ \varepsilon & 0 & -r \end{vmatrix} = -r^3 + \varepsilon(1-\varepsilon)r + \varepsilon = 0$$

gegen 0. Wenn  $\varepsilon$  hinreichend klein ist, liegt also der Preis des  $B$  bei (I) beliebig nahe an dem aus

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = s \end{cases}$$

bestimmten  $x_2$ , d. i. an  $\frac{s}{6}$ , der Preis des  $B$  bei (II) beliebig nahe an dem aus

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = s \end{cases}$$

bestimmten  $x_2$ , d. i. an 0. Es gibt also, wie behauptet, ein  $\varepsilon$ , so daß  $B$  bei (II) weniger erhält als bei (I).

### Schluß.

Das Qualitätsprinzip der im Vorstehenden benutzten Gelbfuhs-Neustadtl-Brandisschen Methode ist also auch, wenn man den einzig a priori möglichen Ansatz mit unbekanntem  $x_1, \dots, x_n$  macht, zu verwerfen. Denn sonst wird, wie in § 3 bewiesen ist, der alte Scherz zur Wahrheit, daß bei der gewählten Art der Preisberechnung der Spieler bei einer einzelnen Partie eventuell besser tut, auf Verlust als auf Gewinn zu spielen.

Göttingen, den 27. Mai 1913.

## Hydrostatische Gleichungsmaschinen.

Von KARL FUCHS in Preßburg.

Ein System von  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten wollen wir so bezeichnen:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= l_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= l_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Aus Zylindergefäßen, deren Querschnitte durch die Koeffizienten der Gleichungen (1) ausgedrückt werden, und die den Koeffizienten gleich in  $n$  Reihen und  $n$  Kolumnen angeordnet sind, kann man eine große Anzahl von Maschinen bauen, mit denen sich die Werte der Unbekannten  $xy\dots$  auf Grund hydrostatischer Wirkungen bestimmen lassen: zuweilen unmittelbar, zuweilen durch sehr rasche Näherung. Viele dieser Maschinen besitzen den Vorzug, daß sie *keine Reibung* haben.

Die Maschinen, die ein System von der Form (1) auflösen, lösen bei anderer Behandlung auch ein *inverses* Gleichungssystem von der Form

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + \dots &= l_1 \\ b_1 x + b_2 y + \dots &= l_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

auf, wo die Koeffizienten und Absoluten dieselben Werte haben, wie in (1).

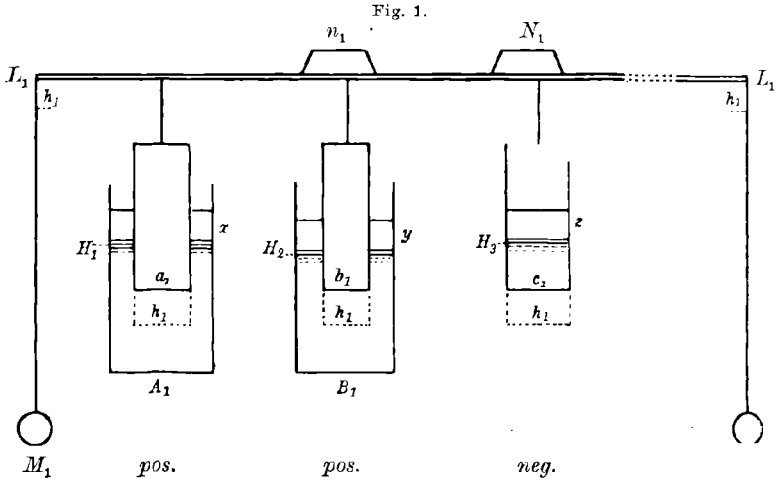
Es sollen hiermit nur *Maschinen ohne Reibung* beschrieben werden.

1. Die folgende Maschine arbeitet mit *Schwimmern*.

Wir setzen vorläufig voraus, daß alle Koeffizienten *positiv* sind.

Jedem Koeffizientenzylinder  $ab\dots$  entspricht ein Standgefäß  $AB\dots$ , das Wasser enthält. Die Zylinder  $a_1 b_1\dots$  der ersten *Reihe* sind mittels einer Leiste  $L_1$  zu einem Schwimmer  $S_1$  verbunden, und mittelst der Absenker  $M_1 M_1$  und des Laufgewichtes  $N_1$  kann man stets den Schwerpunkt so verlegen, daß die Leiste  $L_1$  horizontal liegt. Analog sind alle Reihen beschaffen. Die Wasser der Standgefäße kommunizieren *kolumnenweise*, und in der *Nullstellung* des Apparates zeigen die Wasserspiegel der einzelnen Kolumnen die Höhen  $H_1 H_2\dots$ .

Nun belasten wir die Leisten  $L_1 L_2\dots$  mit Lasten  $n_1 n_2\dots$ . Dann sinken die Schwimmer  $S_1 S_2\dots$  um Strecken  $h_1 h_2\dots$  ein, die Wasserspiegel in den Gefäßkolumnen steigen um Strecken  $xy\dots$ , und jeder



Koeffizientenzylinder erleidet einen erhöhten Auftrieb. Am ersten Schwimmer muß der Zuwachs der Auftriebe die Summe  $n_1$  ergeben. Wenn die Volumeinheit Wasser das Gewicht 1 hat, muß also gelten:

$$(3) \quad a_1(x + h_1) + b_1(y + h_1) + \dots = n_1.$$

Die Summe  $a_1 + b_1 + \dots$  der Zylinderquerschnitte wollen wir mit  $k_1$  bezeichnen. Es gilt dann für die einzelnen Schwimmer:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= n_1 - h_1 k_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= n_2 - h_2 k_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

n die Standgläser nur *wenig weiter* sind als die Koeffizientenzylinder, dann werden  $h_1 h_2 \dots$  so klein, daß angenähert gilt:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= n_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= n_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Erhöhungen der Wasserspiegel an den einzelnen Kolumnen geben also unmittelbar die Werte der Unbekannten  $xy \dots$ , wenn wir nehmen

$$(6) \quad n_1 = l_1 \quad n_2 = l_2 \quad \dots,$$

oder genauer, wenn wir  $n_1 n_2 \dots$  so variieren, daß sich ergibt:

$$(7) \quad n_1 - h_1 k_1 = l_1 \quad n_2 - h_2 k_2 = l_2 \quad \dots$$

Die Werte  $n_1 n_2 \dots$ , die sich aus (7) ergeben, weichen bei engen Standgefäßen nur wenig von den Werten (6) ab.

Wenn ein Koeffizient, wie etwa  $c_1$  in Fig. 1, negativ ist, dann geben wir ihm kein Standgefäß, lassen den Koeffizientenzylinder aber

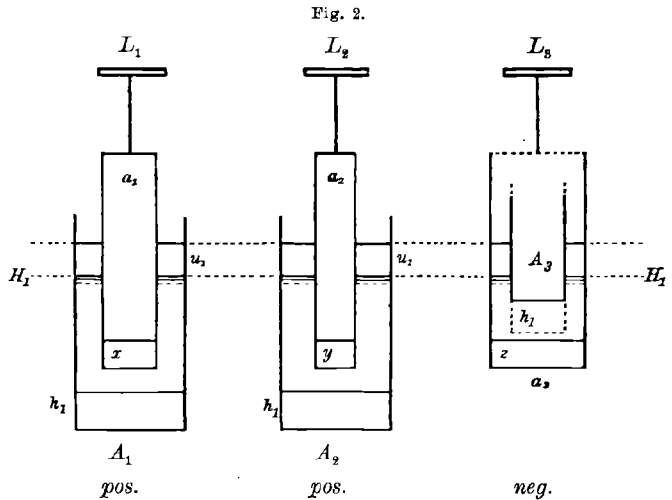


Wasser enthalten, das mit dem Wasser der Standgläser seiner Kolumne kommuniziert.

Wenn wir die Standgläser der einzelnen Reihen nicht neben-, sondern untereinander anordnen, dann fällt die Schwerpunktregelung durch Absenker und Laufgewicht weg.

2. Der beschriebene Apparat kann in der folgenden Weise benutzt werden, die wir die *Inversion* der ersten Anwendung nennen wollen.

Die Fig. 2 stellt die erste *Kolumne* (nicht Reihe) des Apparates dar. Wenn der Apparat in die Nullstellung gebracht ist, *heben* wir diese Kolumne von



Standgläsern um eine Strecke  $h_1$ . Das ist dasselbe, als hätten wir in die Standgläser der Kolumne ein Wasservolumen  $v_1 = F_1 h_1$  angefüllt. Hier bedeutet  $F_1$  den Gesamtquerschnitt der Standgefäße dieser Kolumne. Analog verhalten sich die anderen Kolumnen. Der Wasserspiegel steigt dann in den einzelnen Kolumnen ab-

absolut um Strecken  $u_1 u_2 \dots$ , die Schwimmer  $S_1 S_2 \dots$  aber heben sich absolut um Wege  $xy \dots$ . Über das absolute Niveau  $H_2$  ist dann das Wasservolumen  $f_1 u_1$  getreten, wobei  $f_1$  die *freie* Oberfläche des Kolumnenwassers ist. Um diesen Betrag  $f_1 u_1$  muß das Wasservolumen unter der Ebene  $H_1$  abgenommen haben. Abgenommen hat dieses Volumen unter  $H_1$  durch die Hebung der Gefäßböden um  $h_1$ , zugenommen hat es durch die Hebung der Koeffizientenzylinder um  $xy \dots$ ; es muß also gelten:

$$(8) \quad f_1 u_1 - F_1 h_1 - (a_1 x + a_2 y + \dots),$$

oder allgemein gilt:

$$(9) \quad \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + \dots &= F_1 h_1 - f_1 u_1 \\ b_1 x + b_2 y + \dots &= F_2 h_2 - f_2 u_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Das sind aber die inversen Gleichungen (2), wenn wir  $h_1 h_2 \dots$  so variieren, daß gilt:

$$(10) \quad F_1 h_1 - f_1 u_1 = l_1 \quad F_2 h_2 - f_2 u_2 = l_2 \quad \dots$$

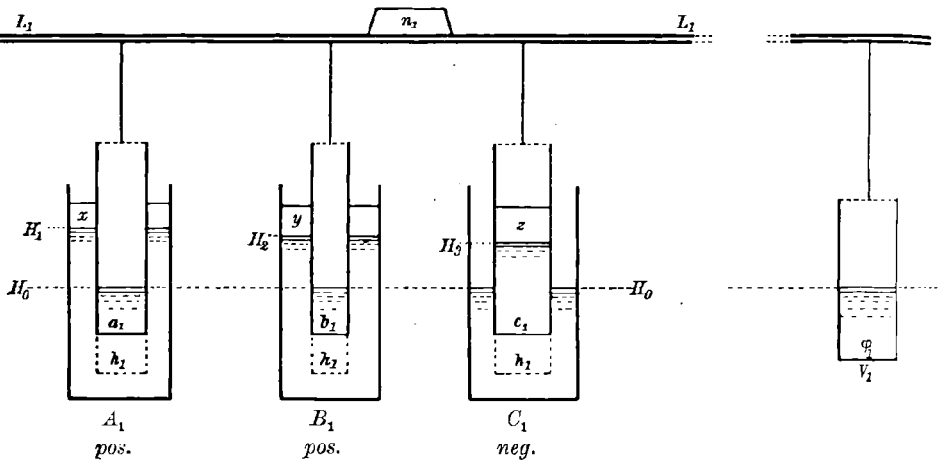
Diese genaueren Werte  $h_1 h_2 \dots$  sind wenig verschieden von den angenäherten Werten:

$$(11) \quad h_1 = \frac{l_1}{F_1} \quad h_2 = \frac{l_2}{F_2}$$

In Fig. 2 ist der Koeffizient  $a_3$  als negativ angesehen. Der entsprechende Zylinder  $a_3$  hat darum nicht ein Standgefäß, sondern einen Kern  $A_3$  bekommen, und dieser wird um  $h_1$  gesenkt.

3. Der folgende Schwimmerapparat ist nur eine verbesserte Form des vorher beschriebenen: die Koeffizientenzylinder sind oben offene

Fig. 3.



höhle Tauchzylinder, die ebenfalls Wasser enthalten, und deren Wände wir zunächst als dickenlos annehmen. Das neue Element des Apparates, die inneren Wasser, lassen wir alle mit einem unendlichen Wasserspiegel kommunizieren, so daß sämtliche innere Spiegel konstant dieselbe absolute Höhe  $H_0$  zeigen. Wenn ein Koeffizient, wie  $c_1$ , negativ ist, dann müssen in seinem Zylinderpaare inneres und äußeres Wasser vertauscht kommunizieren.

Den Vorteil der inneren Wasser läßt schon der Zylindersatz des Koeffizienten  $a_1$  erkennen. Wenn infolge der Belastung  $n_1$  der Zylinder  $a_1$  sich um  $h_1$  gesenkt hat und das äußere Wasser um  $x$  gestiegen ist, dann ist wohl der *Auftrieb* um  $a_1(x + h_1)$  gewachsen. Gleichzeitig aber hat auch die *Belastung* des Zylinders durch inneres Wasser um  $a_1 h_1$  zugenommen, so daß die reine Zunahme des Auftriebes nur mehr  $a_1 x$  ist. Die Gleichung (3) lautet jetzt also einfacher:

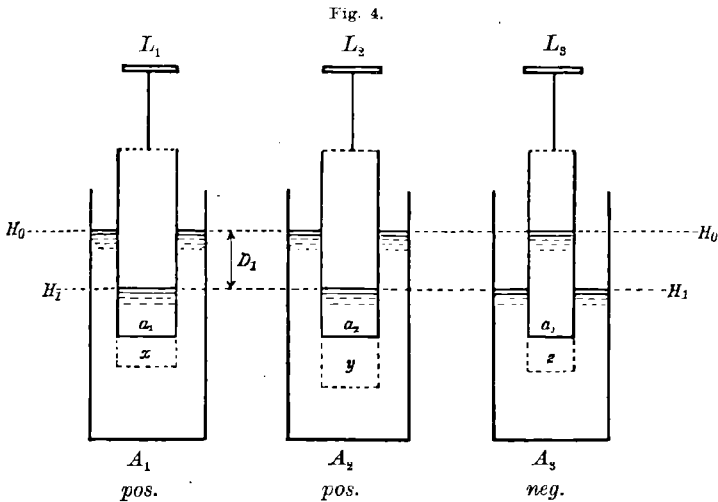
$$(12) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= n_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= n_2 \\ \dots & \end{aligned}$$

Die Niveauänderungen  $xy\dots$  geben uns also *unmittelbar* die reinen Werte der Unbekannten, wenn wir die Gewichte  $n$  der Absoluten  $l$  gleich machen:

$$(13) \quad n_1 = l_1 \quad n_2 = l_2 \quad \dots$$

Die Gleichungen (12) gelten auch für negative Koeffizienten, wenn im Zylindersatz der negativen Koeffizienten die Wasser vertauscht kommunizieren.

4. Denselben Apparat kann man auch *invers* verwenden. Zunächst nehmen wir nur positive Koeffizienten an.



Die äußeren Wasser *sämtlicher* Zylinderpaare lassen wir untereinander kommunizieren, so daß in der Nullstellung alle äußeren Wasser dasselbe Niveau  $H_0$  zeigen; die inneren Wasser aber lassen wir *kolumnenweise* kommunizieren, so daß sie in den einzelnen Kolumnen die Stände  $H_1 H_2 \dots$  zeigen.

In der ersten Kolumne zeigen inneres und äußeres Wasser einen Niveauunterschied  $D_1 = H_0 - H_1$ . Die vereinte Wirkung von innerem und äußerem Wasser gibt also am Koeffizientenzylinder  $a_1$  den resultierenden Auftrieb  $a_1 D_1$ . Das Entsprechende gilt für alle Zylinder.

Nun entnehmen wir dem Becken, das durch die äußeren Wasser dargestellt wird, ein Wasservolumen  $v_1 = l_1$ , und führen es dem Becken zu, das durch die inneren Wasser der ersten Kolumne dargestellt wird. Entsprechend verfahren wir mit den anderen Kolumnen. Die Wirkung wird sein, daß *gar kein Niveau sich ändert*. Nur werden die Schwimmer  $S_1 S_2 \dots$  sich um Strecken  $xy\dots$  senken. Jeder Koeffizientenzylinder nimmt genau so viel Wasser in sein Inneres auf, wie er durch sein Einsinken an äußerem Wasser verdrängt. Die Differenzen  $D_1 D_2 \dots$  bleiben

ungeändert, die resultierenden Auftriebe bleiben ungeändert, und es wird gelten:

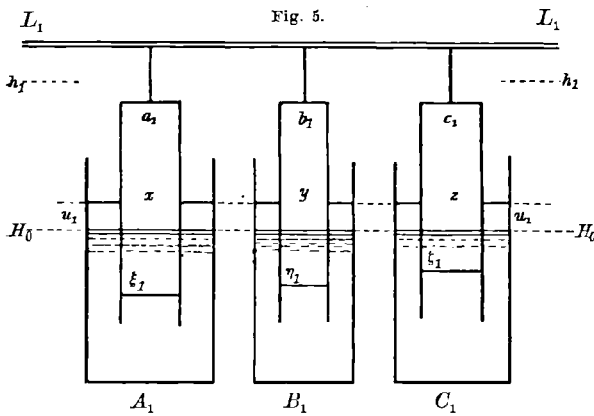
$$(14) \quad \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + \dots &= l_1 \\ b_1 x + b_2 y + \dots &= l_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Wir können also die Werte der Unbekannten als Wege der Leisten  $L_1 L_2 \dots$  unmittelbar und rein ablesen.

Wenn ein Koeffizient negativ ist, dann läßt man inneres und äußeres Wasser des betreffenden Zylinderpaares vertauscht kommunizieren.

Das ist wohl die eleganteste Gleichungsmaschine.

5. Der folgende Apparat arbeitet mit Wasser und *Luftdruck*. Die Koeffizientenzylinder sind oben geschlossene Glocken, die in das Wasser der



Standgläser tauchen und die wir zunächst dickenlos denken. Die Glocken sind *reihenweise* durch Leisten  $L_1 L_2 \dots$  gekuppelt, und *reihenweise* kommunizieren auch die äußeren Wasser der Standgläser; die Lufträume der Glocken aber kommunizieren *kolumnenweise*. In der Null-

stellung ist in allen Glocken nur atmosphärischer Druck, so daß in allen Zylinderpaaren das innere Wasser und daß äußere Wasser den gleichen Stand  $H_0$  zeigen.

Nun *senken* wir die erste Glockenreihe um eine Strecke  $h_1$ . Es entstehen dadurch in den Glockenkolumnen die Luftdrucke  $xy \dots$ ; die inneren Wasserspiegel der ersten Reihe senken sich um Strecken  $\xi_1 \eta_1 \dots$ , während das äußere Wasser dieser Reihe um  $u_1$  steigt.

Wir gewinnen zuerst die *Druckgleichungen*:

$$(15) \quad x = u_1 + \xi_1, \quad y = u_1 + \eta_1, \quad \dots$$

Sodann gewinnen wir eine *Volumgleichung*, die besagt, daß das Wasservolumen  $f_1 u_1$  über dem Niveau  $H_0$  gleich ist der Summe der Wassersäulen, die durch den Luftdruck aus den Glocken gedrängt worden sind:

$$(16) \quad a_1 \xi_1 + b_1 \eta_1 + \dots = f_1 u_1.$$

Wir setzen für  $\xi_1 \eta_1 \dots$  die Werte aus (15) ein, und berücksichtigen, daß für den Gesamtquerschnitt  $F_1$  der Standgläser und die freie Oberfläche  $f_1$  der äußeren Wasser gilt:

$$(18) \quad F_1 - f_1 = a_1 + b_1 + \dots$$

Wir finden dann für die einzelnen Reihen die Gleichungen:

$$(18) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= F_1 u_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= F_2 u_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Um die Werte der Unbekannten  $xy \dots$  zu bestimmen, müssen wir also die Glockenreihen so um Beträge  $h_1 h_2 \dots$  senken, daß die äußeren Wasserhöhen die Werte erhalten:

$$(19) \quad u_1 = \frac{l_1}{F_1}, \quad u_2 = \frac{l_2}{F_2}, \quad \dots$$

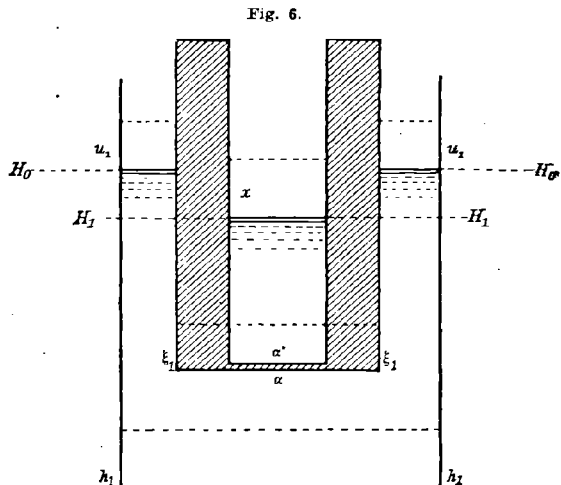
Die Luftdrucke  $xy \dots$  werden an Manometern abgelesen.

Der Apparat in der beschriebenen Form verträgt nur positive Koeffizienten. Die Einstellung des Apparates ist um so bequemer, je kleiner die freie Oberfläche  $f$  ist, je enger also die Standgläser sind.

Die Inversion des Apparates übergehen wir.

6. Im folgenden Apparat ist jeder Koeffizient durch einen *freien* Schwimmer vertreten, der die Form eines Zylinders mit *dicken* Wänden hat und in seiner Höhlung Wasser enthält. Die inneren Wasser (in den Schwimmern) kommunizieren *kolumnenweise*, die äußeren Wasser (in den Standgläsern) kommunizieren *reihenweise*. In der Nullstellung haben alle äußeren Wasser dieselbe absolute Spiegelhöhe  $H_0$ , während die inneren Wasser kolumnenweise die absoluten Stände  $H_1 H_2 \dots$  zeigen.

Nun *heben* wir die erste Reihe von Standgläsern um die Strecke  $h_1$ . Das ist dasselbe, als hätten wir in die Standgläser der ersten Reihe das Wasservolumen  $v_1 = F_1 h_1$  zugefüllt. Durch das Heben der Gefäße werden auch die Schwimmer um Strecken  $\xi_1 \eta_1 \dots$  gehoben, und die inneren



Spiegel heben sich kolumnenweise um Strecken  $xy\dots$  über den alten Stand. Der äußere Gesamtspiegel  $f_1$  der ersten Reihe wird sich um irgendeinen Betrag  $u_1$  heben.

Wir fassen den Schwimmer  $a_2$  ins Auge, der den äußeren Querschnitt  $\alpha$  und einen inneren Querschnitt  $\alpha'$  hat. Der Schwimmer gibt uns auf folgende Weise eine *Druckgleichung*. Die Wasserlast, die der Schwimmer in seinem Inneren trägt, hat einen Zuwachs  $\alpha'(x - \xi_1)$  erhalten; der Auftrieb aber, den der Schwimmer erleidet, hat einen Zuwachs  $\alpha(u - \xi_2)$  bekommen. Die beiden Zuwächse müssen gleich sein:

$$(20) \quad \alpha'(x - \xi_1) = \alpha(u_1 - \xi_1)$$

oder:

$$(21) \quad \alpha'x - \alpha u_1 = -\xi_1(\alpha - \alpha').$$

Für den zweiten Schwimmer  $b_1$  der Reihe gilt analog:

$$(22) \quad \beta'y - \beta u_1 = -\eta_1(\beta - \beta')$$

usw.

Wir finden noch eine *Volumgleichung* für das äußere Wasser der Reihe: das Wasservolumen  $f_1 u_1$ , das *über* das Niveau  $H_0$  getreten ist, muß gleich sein der Volumabnahme des Wassers *unter*  $H_0$ . Dieses Volumen ist durch das Steigen der Gefäßböden verkleinert, durch das Steigen der Schwimmer vergrößert werden. Es muß also gelten:

$$(23) \quad f_1 u_1 = F_1 h_1 - \alpha \xi_1 - \beta \eta_1 - \dots$$

Die Werte von  $\xi, \eta, \dots$  nehmen wir aus (21), (22):

$$(24) \quad f_1 u_1 - F_1 h_1 = \alpha \cdot \frac{\alpha'x - \alpha u_1}{\alpha - \alpha'} + \beta \cdot \frac{\beta'y - \beta u_1}{\beta - \beta'} + \dots$$

Wir setzen nun vereinfachend

$$(25) \quad \frac{\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'} = a_1, \quad \frac{\beta\beta'}{\beta - \beta'} = b_1, \quad \dots$$

Ferner berücksichtigen wir, daß gilt:

$$(26) \quad \frac{\alpha^2}{\alpha - \alpha'} = \alpha \frac{\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'} + \alpha, \quad \dots$$

Endlich gilt auch:

$$(27) \quad F_1 - f_1 = \alpha + \beta + \dots$$

Auf Grund dieser Gleichungen wird aus (24) für die einzelnen Reihen:

$$(28) \quad \begin{aligned} F_1(u_1 - h_1) &= a_1 x + b_1 y + \dots - u_1 k_1 \\ F_2(u_2 - h_2) &= a_2 x + b_2 y + \dots - u_2 k_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

wo, wie schon früher, gilt:

$$(29) \quad k_1 = a_1 + b_1 \dots, \quad k_2 = a_2 + b_2 + \dots, \quad \dots$$

Die Gleichungen (28) werden leicht auf die Form gebracht:

$$(30) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_2 y + \dots &= m_1(u_1 - \mu_1 h_1) \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= m_2(u_2 - \mu_2 h_2) \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Hier sind  $\mu_1, \mu_2, \dots$  echte Brüche. Wenn wir die Hebungen  $h_1, h_2, \dots$  so wählen, daß die rechten Seiten gleich den Absoluten  $c_1, c_2, \dots$  werden, dann geben uns die Niveauänderungen  $xy, \dots$  der inneren Spiegel die Werte der Unbekannten an.

In der beschriebenen Form verträgt der Apparat nur positive Koeffizienten.

Auch dieser Apparat arbeitet bequemer, wenn  $f_1, f_2, \dots$  klein wird, und wenn feste Zylinder in die inneren Wasser tauchen, so daß kleine Schwankungen  $\xi, \eta, \dots$  schon große Schwankungen  $xy, \dots$  verursachen.

7. Der folgende Apparat arbeitet mit *Wasser und Öl*.

Jedem Koeffizienten entspricht ein Standzylinder, dessen innerer Querschnitt durch den entsprechenden Koeffizienten ausgedrückt wird. In der Nullstellung sind sämtliche Zylinder bis zu einer Höhe  $H_1$  mit Wasser, darüber hinaus bis zu einer Höhe  $H_2$  mit Öl gefüllt. Die Wassersäulen kommunizieren *reihenweise*, die Ölsäulen kolumnenweise.

Nun *heben* wir die erste Gefäßreihe um einen Weg  $h_2$ . Das ist dasselbe, als hätten wir in dieser Reihe das Wasservolumen  $v_1 = F_1 h_1$  zugefüllt, wobei  $F_1 = a_1 + b_1 + \dots$  ist. In den Zylindern dieser Reihe werden sich dann die Wasserspiegel um Strecken  $\xi_1, \eta_1, \dots$  über das absolute Niveau  $H_1$  heben, während die Ölspiegel sich um Strecken  $xy, \dots$  über  $H_2$  heben.

Es sei  $H_2 - H_1 = D$ , und die Volumeinheit Öl soll das Gewicht  $\theta = 1 - \delta$  haben.

*Druckgleichungen.* Im Gefäße  $a_1$  befindet sich über  $H_1$  eine Wassersäule von der Höhe  $\xi_1$  und eine Ölsäule von der Höhe  $D + x - \xi_1$ , und diese beiden Säulen geben zusammen in  $H_1$  den einen Druck  $u_1$ :

$$(31) \quad \begin{aligned} u_1 &= \xi_1 + \theta(D + x - \xi_1) \\ &= \theta(D + x) + \delta \xi_1. \end{aligned}$$

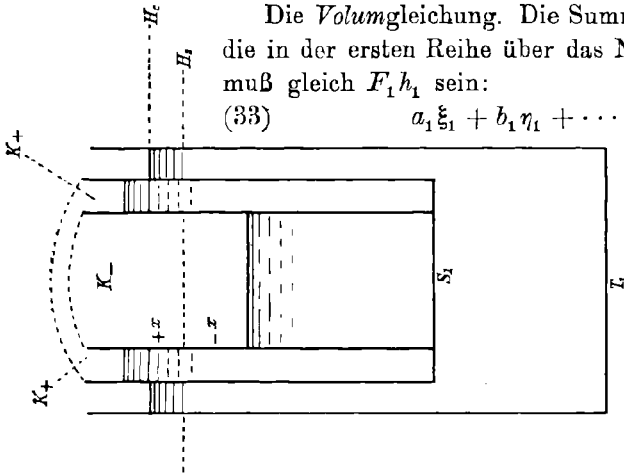
Denselben Druck  $u_1$  muß auch im Gefäße  $b_1$  die Flüssigkeitssäule über  $H_1$  geben:

$$(32) \quad u_1 = \theta(D + y) + \delta \eta_1$$

usw. Diesen Druck  $u_1$  kann man in einem Steigrohr  $M_1$  ablesen, das mit den Wassersäulen der ersten Reihe kommuniziert; in diesem Steigrohr steigt der Wasserspiegel in die Höhe  $u_1$  über  $H_1$ .

Die *Volumgleichung*. Die Summe der Wasservolumina, die in der ersten Reihe über das Niveau  $H_1$  getreten sind, muß gleich  $F_1 h_1$  sein:

$$(33) \quad a_1 \xi_1 + b_1 \eta_1 + \dots = F_1 h_1.$$



Wir nehmen die Werte  $\xi_1 \eta_1 \dots$  aus (31), (32):

$$(34) \quad \Theta(a_1 x + b_1 y + \dots) = F_1(u_1 - \Theta D - h_1 \delta).$$

Nun ist  $\Theta D$  nichts anderes als die Wasserhöhe  $u_0$ , die in der Nullstellung in sämtlichen Steigrohren  $M_1 M_2 \dots$  vorhanden ist. Wir setzen  $u_1 - u_0 = \lambda_1$ , d. h. wir nehmen die Höhe  $u_0$  als Nullpunkt der Manometerstände  $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ , und erhalten dann die Gleichungen:

$$(35) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= F_1(\lambda_1 - h_1 \delta) : \Theta \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= F_2(\lambda_2 - h_2 \delta) : \Theta \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir finden die Unbekannten  $xy \dots$ , wenn wir  $h_1 h_2 \dots$  so nehmen, daß die rechten Seiten der Gleichungen gleich  $h_1 h_2 \dots$  werden.

Wenn wir in jedem Standzylinder von oben her in das Öl einen unbeweglichen zylindrischen Kern ragen lassen, dessen Querschnitt nur um

einiges kleiner ist als der betreffende Standzylinder, dann genügen schon sehr kleine Hebungen  $h_1 h_2 \dots$ , und wir können angenähert schreiben:

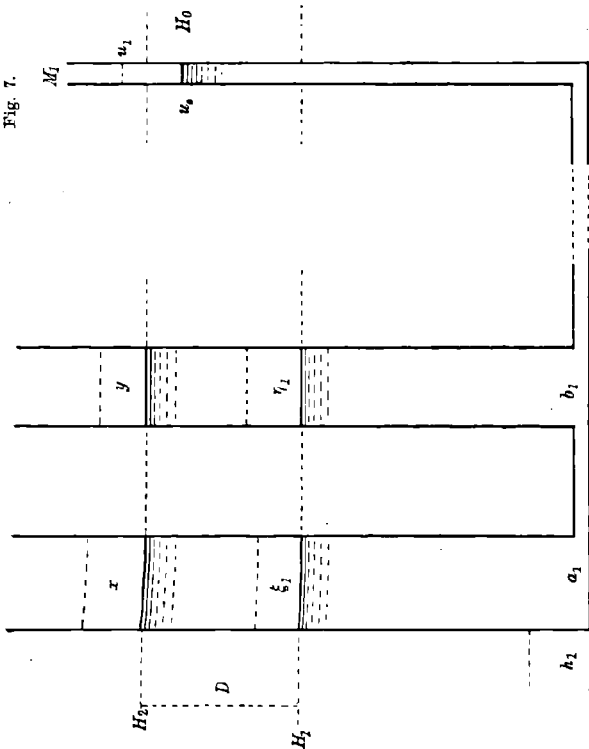


Fig. 7.



$$(36) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots &= F_1 \lambda_1 : \Theta \\ a_2 x + b_2 y + \dots &= F_2 \lambda_2 : \Theta \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Man findet dann die Werte der Unbekannten als Niveauänderungen des Öls, wenn man wählt:

$$(37) \quad \lambda_1 = \frac{l_1 \Theta}{F_1}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2 \Theta}{F_2}, \quad \dots$$

Eine eingehendere Untersuchung lehrt, daß die *untere* Grenze der Ölsäulen die Werte  $xy \dots$  *vervielfacht* zeigt, also ungleich genauere Ableesungen gestattet.

8. In der Maschine (Fig. 3) haben wir angenommen, daß die Koeffizientenzylinder *dickenlos* sind. Es soll gezeigt werden, wie man der Wanddicke Rechnung tragen kann.

Alle Koeffizienten sollen positiv sein. Wir denken uns, die Zylinder  $a_1 b_1 \dots$  wären wohl dickenlos; sie wären aber *innen* mit einer dicken Wand verkleidet. Da die Querschnitte der inneren Wassersäulen dadurch um Beträge  $\alpha\beta \dots$  vermindert werden, wird auch die Belastung des Schwimmers  $S_1$  durch inneres Wasser entsprechend vermindert. Diesen Ausfall an Belastung decken wir dadurch, daß wir an die verlängerte Leiste  $L_1$  ein ergänzendes Gefäß  $V_1$  hängen, dessen innerer Querschnitt  $\varphi_1$  gleich der Summe der Wandquerschnitte  $\alpha_1 \beta_1 \dots$  ist:

$$(38) \quad \varphi_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \dots$$

Dieses Gefäß  $V_1$  enthält Wasser, das mit den inneren Wassern der Koeffizientenzylinder kommuniziert. Was also an Lastwasser infolge der Wanddicke in den Koeffizientenzylindern fehlt, findet sich als Ergänzung im Hilfszylinder  $V_1$  vor. So ist das Fehlen der Wanddicke eliminiert.

Bei einem negativen Koeffizientenzylinder wie  $c_1$  nehmen wir umgekehrt an, daß er wohl dickenlos ist, aber *außen* mit einer dicken Wand verkleidet ist. Diese Wand verursacht, daß der Zylinder  $c_1$  einen zu großen Auftrieb erleidet, der wieder durch das entsprechende Wasser in  $V_1$  kompensiert wird. Wir sehen daraus, daß in Gl. (38) die Wandquerschnitte ohne Rücksicht auf das Vorzeichen des entsprechenden Koeffizienten einzusetzen sind.

So erhalten alle Schwimmer  $S_1 S_2 \dots$  ein Ergänzungsgefäß  $V_1 V_2 \dots$ , das den Fehler der Wanddicke eliminiert.

Ganz analog deuten wir die Maschine Fig. 4. Wir denken, die Koeffizientenzylinder  $a_1 b_1 \dots$  des Schwimmers  $S_1$  (dessen Leiste  $L_1$  die Fig. 4 im Querschnitt zeigt) wären wohl dickenlos; sie wären aber

*außen* mit einer dicken Wand verkleidet, die zur Folge hat, daß der Schwimmer einen zu großen Auftrieb erleidet. Diese Auftriebsexzesse werden dadurch kompensiert, daß die Leiste  $L_1$  ein Ergänzungsgefäß  $V_1$  bekommt, dessen Wasser durch Kommunikation auf dem Niveau  $H_0$  erhalten wird. Das Analoge gilt für die anderen Schwimmer.

Ähnlich verfahren wir bei der Maschine Fig. 5. Die Glocken denken wir uns dickenlos, aber *außen* mit einer dicken Wand verkleidet. Wenn die Leiste  $L_1$  mit den Glocken versenkt wird, verdrängen die mittauchenden dicken Wände äußeres Wasser und stauen es. Dieses gestaute Wasser nimmt ein Ergänzungsgefäß  $V_1$  auf, das an  $L_1$  gehängt ist, so daß die Höhe  $u$  durch Stauung nicht gefälscht wird.

9. Den Apparat Fig. 7 kann man so ergänzen, daß er auch mit negativen Koeffizienten arbeitet. Wir gehen von dem Gedanken aus, daß man in den Gleichungen (1) das negative Vorzeichen eines Gliedes statt auf die Koeffizienten auf die Unbekannte beziehen kann. Wir sagen also, daß alle Koeffizienten positiv sind, daß aber die *Unbekannten* in manchen Gliedern positiv, in anderen negativ zu nehmen sind.

Zur ersten Kolumne von Koeffizientenzylindern gehört ein Zylindergefäß  $T_1$ , das Öl enthält. Das Öl trägt einen Schwimmer  $S_1$ , der aus zwei konzentrischen dickenlosen Zylindern besteht, und die so entstehenden zwei Kammern  $K_+$  und  $K_-$  haben gleiches Volumen. Wenn beide Kammern bis zur absoluten Höhe  $H_2$  mit Öl gefüllt sind, muß das Gefäß  $T_1$  bis zur Höhe  $H_c$  Öl enthalten, und auf dieser Höhe wird es durch Kommunikation mit einem unendlichen Spiegel konstant erhalten. Diese Anordnung hat zur Folge, daß das Öl in den beiden Kammern  $K_+$  und  $K_-$  nur in *gleichen* und *entgegengesetzten* Höhen  $\pm x$  stehen kann. Man läßt nun  $K_+$  mit den Ölsäulen der positiven,  $K_-$  mit den Ölsäulen der negativen Koeffizientenzylinder kommunizieren und gibt so jeder Zylinderkolumne einen Ergänzungsstopf  $T_1 T_2 \dots$ . Durch diese Einrichtung wird der Apparat Fig. 7 befähigt, auch mit negativen Koeffizienten zu arbeiten, und durch dieselbe Einrichtung mit Wasser kann man auch den Apparat Fig. 6 negativen Koeffizienten anpassen. Der Fehler der Wanddicke der Schwimmerwände ist leicht zu eliminieren.

Eine praktische Bemerkung sei gemacht. Ein Koeffizientenzylinder von irgendeinem Querschnitt  $a$  kann leicht in einen Zylinder von einem Querschnitt  $a - a'$  verwandelt werden, indem man in ihn einen zylindrischen Stab vom Querschnitt  $a'$  steckt; und ein Zylinder von einem Querschnitt  $a + a'$  kann ersetzt werden durch *zwei* Zylinder von den Querschnitten  $a$  und  $a'$ .

## Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie.

Von ALBERT EINSTEIN in Berlin und MARCEL GROSSMANN in Zürich.

In einer 1913 erschienenen Abhandlung<sup>1)</sup> haben wir eine verallgemeinerte Relativitätstheorie auf den absoluten Differentialkalkül gegründet, die auch die Theorie der Gravitation umfaßt. In dieser Theorie treten Gleichungssysteme von zwei grundsätzlich verschiedenen Arten auf. Wir haben erstens Gleichungssysteme aufgestellt für den Ablauf materieller (z. B. mechanischer, elektrischer) Vorgänge in einem als gegeben anzusehenden Gravitationsfeld; diese Gleichungssysteme, welche als Verallgemeinerungen entsprechender Gleichungssysteme der ursprünglichen Relativitätstheorie aufgefaßt werden können, sind beliebigen Substitutionen der Raum-Zeit-Variablen („Koordinaten“) gegenüber kovariant. Wir haben zweitens ein Gleichungssystem aufgestellt, welches als Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie aufzufassen ist, und welches das Gravitationsfeld bestimmt, sofern die die materiellen Vorgänge bestimmenden Größen gegeben sind. Zu diesem Gleichungssystem gibt es kein entsprechendes in der ursprünglichen Relativitätstheorie. Im Gegensatz zu den oben erwähnten Gleichungssystemen konnten wir für diese „Gravitationsgleichungen“ die allgemeine Kovarianz nicht nachweisen. Zu ihrer Ableitung war nämlich neben den Erhaltungssätzen nur die Kovarianz gegenüber beliebigen *linearen* Substitutionen vorausgesetzt worden, und es blieb die Frage offen, ob es noch andere Substitutionen gebe, welche die Gleichungen in sich überführen.

Die Entscheidung dieser Frage ist aus zwei Gründen von besonderer Wichtigkeit für die Theorie. Ihre Beantwortung gibt erstens Aufschluß darüber, einer wie weitgehenden Entwicklung der Grundgedanke der Relativitätstheorie fähig ist, hat also große Bedeutung für die Lehre von Raum und Zeit. Zweitens ist das Urteil über den der Theorie vom physikalischen Standpunkte aus zuzuschreibenden Wert in

---

1) Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Leipzig 1913, B. G. Teubner. (Im folgenden abgekürzt zitiert als „Entwurf“). Diese Abhandlung ist abgedruckt in dieser Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 62, S. 225—261.

hohem Maße abhängig von der Beantwortung dieser Frage, wie folgende Überlegung zeigt:

Die ganze Theorie ist hervorgegangen aus der Überzeugung, daß alle physikalischen Vorgänge in einem Gravitationsfeld genau gleich ablaufen, wie die entsprechenden Vorgänge ohne Gravitationsfeld ablaufen, falls man sie auf ein passend beschleunigtes (dreidimensionales) Koordinatensystem bezieht („Äquivalenzhypothese“). Diese auf die Erfahrungstatsache von der Gleichheit der schweren und der trägen Masse gegründete Hypothese erhält dann eine besondere Überzeugungskraft, wenn das „scheinbare“ Gravitationsfeld, welches in bezug auf das beschleunigte (dreidimensionale) Koordinatensystem existiert, als ein „wirkliches“ Gravitationsfeld aufgefaßt werden kann, wenn also Beschleunigungstransformationen (d. h. nichtlineare Transformationen) zu den berechtigten Transformationen der Theorie gehören.

Auf den ersten Blick erscheint es als erstrebenswert, Gravitationsgleichungen zu suchen, die beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sind. Durch eine einfache Betrachtung werden wir aber in § 2 dieser Arbeit zeigen<sup>1)</sup>, daß durch allgemein-kovariante Gleichungen eine vollständige Bestimmung der das Gravitationsfeld charakterisierenden Größe  $g_{\mu\nu}$  unmöglich ist.

*Im folgenden wird nun der Nachweis geführt, daß die von uns aufgestellten Gravitationsgleichungen jenen Grad allgemeiner Kovarianz besitzen, der denkbar ist, unter der Bedingung, daß der Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  durch die Gravitationsgleichungen vollständig bestimmt sein soll; insbesondere ergibt sich, daß die Gravitationsgleichungen Beschleunigungstransformationen (d. h. nichtlineare Transformationen) mannigfaltiger Art gegenüber kovariant sind.*

### § 1. Die Grundgleichungen der Theorie.

Wir haben das energetische Verhalten eines physikalischen Vorganges charakterisiert durch einen kovarianten Tensor  $T_{\mu\nu}$  bzw. den reziproken kontravarianten Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ . Dieser Tensor erfüllt die Gleichungen (10) des „Entwurfes“

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \gamma_{\sigma\mu} T_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu}$$

bzw.

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu}$$

1) Vgl. auch die Bemerkungen im Anhang des Wiederabdruckes in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 62.

welche die Impuls-Energiegleichungen des materiellen Vorganges darstellen. Sämtliche Gleichungen der Theorie nehmen eine besonders übersichtliche Form an, wenn man die Größen

$$(1) \quad \mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} \gamma_{\sigma\mu} T_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}$$

eingführt, die sich nur durch den Faktor  $\sqrt{-g}$  von den Komponenten eines gemischten Tensors<sup>1)</sup> unterscheiden, und deren Inbegriff wir den „Komplex der Energiedichte“ des physikalischen Vorganges nennen. Die obigen Gleichungen lauten dann

$$(1) \quad \sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \gamma_{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\sigma\nu}.$$

Führt man entsprechend an Stelle des Energietensors des Gravitationsfeldes den „Komplex der Energiedichte des Gravitationsfeldes“ ein, nämlich die Größen

$$(2) \quad t_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\sigma\mu} t_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \mathfrak{t}_{\mu\nu},$$

so folgt aus den Gleichungen (14) bzw. (13) des „Entwurfes“

$$(2a) \quad -2\kappa t_{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \left( \sum_{\beta\varrho\tau} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\varrho\tau}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial \gamma_{\varrho\tau}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\varrho\tau} \delta_{\sigma\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\varrho\tau}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \gamma_{\varrho\tau}}{\partial x_{\beta}} \right),$$

wo  $\delta_{\sigma\nu}$  0 oder 1 ist, je nachdem  $\sigma \neq \nu$  oder  $\sigma = \nu$  ist.

An Stelle der Gravitationsgleichung (21) bzw. (18) des „Entwurfes“ treten dann die Gleichungen

$$(II) \quad \sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \sqrt{-g} \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) = \kappa (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu}).$$

Aus (I) und (II) kann man, auf analogem Wege wie in § 5 des „Entwurfes“, die allgemeinen Erhaltungssätze ableiten, die nun die Form annehmen

$$(III) \quad \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu}) = 0.$$

## § 2. Bemerkungen über die Wahl des Koordinatensystems.

Wir wollen nun zunächst ganz abgesehen von den von uns aufgestellten Gravitationsgleichungen zeigen, daß eine vollständige Bestimmung des Fundamentaltensors  $\gamma_{\mu\nu}$  eines Gravitationsfeldes bei gegebenen  $\Theta_{\mu\nu}$  durch ein allgemein-kovariantes Gleichungssystem unmöglich ist.

1) Vgl. § 1 des II. Teiles des „Entwurfes“.

Wir können nämlich beweisen, daß, wenn bei gegebenen  $\Theta_{\mu\nu}$  eine Lösung für die  $\gamma_{\mu\nu}$  bereits bekannt ist, aus der allgemeinen Kovarianz der Gleichungen auf die Existenz weiterer Lösungen geschlossen werden kann.

Es gebe in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit einen Teil  $L$ , in welchem ein „materieller Vorgang“ nicht vorhanden sein soll, in welchem also die  $\Theta_{\mu\nu}$  verschwinden. Durch die außerhalb  $L$  gegebenen  $\Theta_{\mu\nu}$  seien die  $\gamma_{\mu\nu}$  überall, also auch im Innern von  $L$  bestimmt (Annahme a).

Wir denken uns nun statt der ursprünglichen Koordinaten  $x_\nu$  neue Koordinaten  $x'_\nu$  eingeführt von folgender Art. Außerhalb  $L$  sei überall  $x'_\nu = x_\nu$ , innerhalb  $L$  aber sei wenigstens für einen Teil von  $L$  und wenigstens für einen Index  $x'_\nu \neq x_\nu$ . Es ist klar, daß durch eine derartige Substitution erreicht werden kann, daß wenigstens für einen Teil von  $L$   $\gamma'_{\mu\nu} \neq \gamma_{\mu\nu}$  ist. Andererseits ist überall  $\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$ , nämlich außerhalb  $L$ , weil für dieses Gebiet  $x'_\nu = x_\nu$  ist, innerhalb  $L$  aber, weil für dieses Gebiete  $\Theta'_{\mu\nu} = 0 = \Theta_{\mu\nu}$  ist. Wenn also alle Substitutionen zugelassen werden, so würden zu dem nämlichen System der  $\Theta_{\mu\nu}$  mehr als ein System der  $\gamma_{\mu\nu}$  gehören, was im Widerspruch mit der Annahme a) steht.<sup>1)</sup>

Nachdem wir so eingesehen haben, daß eine brauchbare Gravitationstheorie notwendig einer Spezialisierung des Koordinatensystems bedarf, erkennen wir auch leicht, daß bei den von uns angegebenen Gravitationsgleichungen ein spezielles Koordinatensystem zugrunde liegt. Aus den Gleichungen (II) folgen nämlich durch Differentiation nach  $x_\nu$  und Summation über  $\nu$  unter Berücksichtigung der Gleichungen (III) die Beziehungen

$$(IV) \quad \sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) = 0,$$

also vier Differentialbedingungen für die Größen  $g_{\mu\nu}$ , welche wir abgekürzt

$$B_\sigma = 0$$

schreiben wollen.

1) Diese Betrachtung ist bereits in den Bemerkungen im Anhang des Wiederabdruckes des „Entwurfes“ im 62. Band der Zeitschr. f. Math. u. Phys. enthalten. Die sich dort anschließende Behauptung über die Einschränkung des Koordinatensystems ist aber nicht zutreffend; es folgt nämlich aus (III) nur dann, daß nur lineare Substitutionen zulässig sind, wenn man den Größen  $\frac{\gamma_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}$  Tensorcharakter beilegt, was sich als unberechtigt erwiesen hat.

Diese Größen  $B_\sigma$  bilden, wie in § 5 gezeigt ist, keinen allgemein-kovarianten Vektor. Hieraus kann geschlossen werden, daß die Gleichungen  $B_\sigma = 0$  eine wirkliche Bedingung für die Wahl des Koordinatensystems darstellen.<sup>1)</sup>

§ 3. Hamiltonsche Form der Gravitationsgleichungen.

Im nachfolgenden Beweis der Kovarianz der Gravitationsgleichungen wird davon Gebrauch gemacht, daß man diese Gleichungen in die Form eines Variationsprinzipes bringen kann.<sup>2)</sup>

Man kann zeigen, daß die Gravitationsgleichungen (II) gleichbedeutend sind mit der Aussage

$$(V) \quad \int (\delta H - 2\kappa \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu}) d\tau = 0,$$

wo

$$(Va) \quad H = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}$$

ist, und die  $\gamma_{\mu\nu}$  unabhängig voneinander derart variiert werden, daß die Variationen an der Begrenzung des vierdimensionalen Gebietes, auf welches sich die Integration erstreckt, verschwinden.

Berücksichtigt man bei der Berechnung von  $\delta H$  die leicht ersichtlichen Formeln

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu}, \\ \delta\left(\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\delta g_{\tau\varrho}) = -\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g_{\tau\mu} g_{\varrho\nu} \delta \gamma_{\mu\nu}), \\ \delta\left(\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\delta \gamma_{\tau\varrho}), \end{aligned}$$

so findet man mit Rücksicht darauf, daß die Variationen von Oberflächenintegralen verschwinden

$$\begin{aligned} \int \delta H d\tau &= \int \sum_{\mu\nu\alpha\beta\tau\varrho} \left( -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) + \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \gamma_{\tau\varrho} \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right) \delta \gamma_{\mu\nu} \cdot d\tau. \end{aligned}$$

1) Man kann die Gleichungen  $B_\sigma = 0$  auch erhalten, wenn man an den Gravitationsgleichungen die Operation der Divergenz im Sinne des absoluten Differentialkalküls ausführt, und den Erhaltungssatz für die Materie mitbenützt.

2) Die Anregung dazu, uns den zu führenden Beweis durch eine derartige Umformung zu erleichtern, verdanken wir Herrn Paul Bernays in Zürich.

Mit Benutzung der Definitionen (14) und (16) des „Entwurfes“ nimmt somit die Bedingung (V) die Form an

$$\int \sum_{\mu\nu} (D_{\mu\nu}(g) + \kappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})) \delta\gamma_{\mu\nu} \cdot \sqrt{-g} d\tau = 0.$$

Da die  $\delta\gamma_{\mu\nu}$  voneinander unabhängig sein sollen, so folgen hieraus die Gleichungen (21) des „Entwurfes“ d. h. unsere Gravitationsgleichungen in der kovarianten Form.

#### § 4. Beweis eines Hilfssatzes. Angepaßte Koordinatensysteme.

Unsere Aufgabe wird es nun sein, die Kovarianzeigenschaften der Gleichung (V) zu untersuchen. Zu diesem Zwecke suchen wir zunächst die Transformationseigenschaften des Integrales

$$J = \int H d\tau = \int \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \cdot d\tau.$$

Es liege eine beliebige vierdimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  vor, die auf ein Koordinatensystem  $K$  der  $x_\nu$  bezogen sei. Außerdem beziehen wir dieselbe Mannigfaltigkeit  $M$  auf ein zweites Koordinatensystem  $K'$  der  $x'_\nu$ , so daß

$$dx_\nu = \sum_\mu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} dx'_\mu = \sum_\mu p_{\nu\mu} dx'_\mu$$

die Transformationsformeln sind.  $J$  und  $J'$  seien die Werte des oben eingeführten Integrales in bezug auf  $K$  bzw.  $K'$ . Dann ist

$$J' = \int \sqrt{-g'} \cdot \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma'_{\alpha\beta} \frac{\partial g'_{\tau\varrho}}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial \gamma'_{\tau\varrho}}{\partial x'_\beta} d\tau'.$$

Transformiert man  $J'$  auf das Koordinatensystem  $K$ , und berücksichtigt man, daß  $\sqrt{-g'} \cdot d\tau'$  ein Skalar ist, so erhält man

$$J' = \int \sqrt{-g} \sum_{\substack{\mu\nu\alpha\beta \\ r s i k \\ m n \tau \varrho}} \left( \pi_{r\alpha} \pi_{s\beta} \gamma_{r\alpha} \cdot p_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{m\tau} p_{n\varrho} g_{mn}) p_{k\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} (\pi_{\mu\tau} \pi_{\nu\varrho} \gamma_{\mu\nu}) \right) d\tau,$$

also

$$J' = \int \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu m n i k \varrho \tau} \left( \gamma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{m\tau} p_{n\varrho} g_{mn}) \frac{\partial}{\partial x_k} (\pi_{\mu\tau} \pi_{\nu\varrho} \gamma_{\mu\nu}) \right) d\tau.$$

Für die weitere Rechnung wollen wir annehmen, daß sich die Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$  nur unendlich wenig voneinander unterscheiden, d. h. daß die Transformation eine infinitesimale sei. Dann ist zu setzen

$$x_\nu = x'_\nu - \Delta x_\nu,$$



also

$$p_{\nu\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \delta_{\nu\mu} - \frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x'_\mu},$$

und

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} = \delta_{\nu\mu} + \frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\mu},$$

wobei die  $\Delta x_\nu$  als unendlich kleine Größen aufzufassen sind, deren Quadrate und Produkte zu vernachlässigen sind. Dann wird

$$J' - J = -4 \int \sqrt{-g} \sum_{mnik\tau} \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \frac{\partial^2(\Delta x_m)}{\partial x_\tau \partial x_i} \cdot d\tau.$$

Durch partielle Integration entsteht hieraus

$$(3) \quad J' - J = -4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left( \sqrt{-g} \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \frac{\partial(\Delta x_m)}{\partial x_i} \right) d\tau \\ + 4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{-g} \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \Delta x_m \right) d\tau \\ - 4 \int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial^2}{\partial x_\tau \partial x_i} \left( \sqrt{-g} \gamma_{ik} g_{mn} \frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k} \right) \Delta x_m \cdot d\tau.$$

Wir bemerken, daß die beiden ersten dieser Integrale sich ohne weiteres als Oberflächenintegrale schreiben lassen, die wir zur Abkürzung mit  $O_1$  bzw.  $O_2$  bezeichnen. Den Faktor von  $\Delta x_m$  im dritten Integral erkennen wir gemäß der im Anschluß an Gleichung (V) eingeführten Bezeichnung als  $B_m$ . In abgekürzter Schreibweise lautet also die Gleichung (3)

$$(3a) \quad J' - J = O_1 + O_2 - 4 \int \sum_m B_m \Delta x_m \cdot d\tau.$$

Wir haben in § 2 die Gründe auseinandergesetzt, die zu einer Bevorzugung solcher Koordinatensysteme führen, für die die Größen  $B_m = 0$  sind. Solche Koordinatensysteme wollen wir der Mannigfaltigkeit „angepaßte“ nennen. Wie aus Gleichung (3a) hervorgeht, ist das angepaßte Koordinatensystem so gewählt, daß es bei festgehaltenen Randwerten der Koordinaten und ihren ersten Ableitungen (in einem beliebigen Koordinatensystem betrachtet) das Integral  $J$  zu einem Extremum macht.

Eine Transformation zwischen angepaßten Koordinatensystemen wollen wir eine „berechtigte“ nennen. Ist die Transformation von  $K$  auf  $K'$  eine berechtigte, so folgt aus Gleichung (3a)

$$J' - J = O_1 + O_2.$$

## § 5. Beweis der Kovarianz der Gravitationsgleichungen.

Wir betrachten nun außer der in § 4 untersuchten Mannigfaltigkeit  $M$  eine von dieser unendlich wenig abweichende zweite Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ , für welche die Größen  $g_{\mu\nu}$  und deren erste Ableitungen an der Begrenzung des betrachteten Gebietes  $L$  mit den entsprechenden der Mannigfaltigkeit  $M$  übereinstimmen. In  $\bar{M}$  legen wir die Koordinatensysteme  $\bar{K}$  und  $\bar{K}'$  in folgender Weise:

- a) Beide Koordinatensysteme seien der Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  angepaßt.
- b) An der Begrenzung des Gebietes  $L$  sollen die Koordinaten  $\bar{x}_\nu$  mit den  $x_\nu$ , und die Koordinaten  $\bar{x}'_\nu$  mit den  $x'_\nu$  übereinstimmen.
- c) Diese Übereinstimmung der Koordinatensysteme soll nicht nur an der Begrenzung des Gebietes selbst, sondern in Größen erster Ordnung auch unendlich nahe an der Begrenzung stattfinden; diese Bedingung bringt es mit sich, daß die  $\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\sigma}$  mit den  $\frac{\partial(\Delta \bar{x}_\nu)}{\partial \bar{x}_\sigma}$  übereinstimmen.

Die Widerspruchslosigkeit der Bedingungen b) und c) geht aus folgender Überlegung hervor: Da die Mannigfaltigkeit  $M$  auf ein angepaßtes Koordinatensystem bezogen ist, so ist nach § 4 dieses Koordinatensystem  $K$  so gewählt, daß das Integral  $J$  bei festgehaltenen Randwerten der Koordinaten und ihrer ersten Ableitungen ein Extremum ist. Dann ist es möglich auch in die variierte Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  ein angepaßtes Koordinatensystem  $\bar{K}$  zu legen, welches außerhalb  $L$  mit dem Koordinatensystem  $K$  zusammenfällt, also nur innerhalb  $L$  von  $K$  abweicht; denn auch für die variierte Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  muß bei ungeänderten Randwerten ein Extremum des Integrales  $\bar{J}$  existieren, woraus die Erfüllbarkeit der Gleichungen  $B_m = 0$  für die variierte Mannigfaltigkeit folgt.

Nehmen wir zugleich an, daß die Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$ , auf welche wir die Mannigfaltigkeit  $M$  bezogen haben, angepaßt seien, so gelten gemäß (3b) die Gleichungen

$$\begin{aligned} J' - J &= O_1 + O_2, \\ \bar{J}' - \bar{J} &= \bar{O}_1 + \bar{O}_2, \end{aligned}$$

oder nach Subtraktion

$$(\bar{J}' - J') - (\bar{J} - J) = (\bar{O}_1 - O_1) + (\bar{O}_2 - O_2).$$

Aus den Festsetzungen b) und c), sowie aus den Beziehungen von  $M$  zu  $\bar{M}$  geht mit Rücksicht auf (3) hervor, daß  $\bar{O}_1 - O_1$  und  $\bar{O}_2 - O_2$  verschwinden.

$\bar{M}$  können wir als eine aus  $M$  durch Variation hervorgehende Mannigfaltigkeit bezeichnen. Dementsprechend bezeichnen wir sinngemäß

$$\begin{aligned}\bar{J} - J &= \delta_a J, \\ \bar{J}' - J' &= \delta_a J',\end{aligned}$$

und erhalten also

$$(4) \quad \delta_a J' = \delta_a J.$$

Der Index  $a$  soll zum Ausdruck bringen, daß zugleich mit der Mannigfaltigkeit das Koordinatensystem in solcher Weise mitvariiert worden ist, daß das variierte Koordinatensystem der variierten Mannigfaltigkeit stets angepaßt ist, derart, daß das Koordinatensystem an der Begrenzung unvariiert bleibt („angepaßte Variation“).

Unser Ziel ist der Nachweis, daß eine Gleichung

$$\delta J' = \delta J$$

für eine beliebige Variation der Mannigfaltigkeit erfüllt ist, nicht nur wie Gleichung (4) aussagt, für eine *angepaßte* Variation. Nun können wir aber eine beliebige Variation der  $g_{\mu\nu}$  aus einer angepaßten hervorgehen lassen, wenn wir nach ihr noch eine Variation des Koordinatensystems ausführen. Es ergibt sich, daß für eine Variation der  $g_{\mu\nu}$ , die nur einer Variation des Koordinatensystems entspricht, die Variation von  $J$ , die wir mit  $\delta_k J$  bezeichnen, verschwindet, sofern wir voraussetzen, daß die Variationen  $\delta x_i$  und ihre ersten Ableitungen an der Begrenzung des Gebietes verschwinden, und daß das Koordinatensystem, von dem aus die Variation erfolgt, ein angepaßtes System ist. Aus Gleichung (3a) folgt nämlich unmittelbar

$$\delta_k J = O_1 + O_2 - 4 \int \sum_m B_m \delta x_m \cdot d\tau = 0.$$

Wir können daher der Gleichung (4) die Gleichung

$$(5) \quad \delta_k J' = \delta_k J = 0$$

zur Seite stellen. Aus beiden Gleichungen, in Verbindung damit, daß man aus der Superposition einer angepaßten Variation und einer reinen Koordinatenvariation eine beliebige Variation der  $g_{\mu\nu}$  erhält, folgt, daß für eine solche beliebige Variation

$$(6) \quad \delta J' = \delta J$$

ist.

Aus dieser Gleichung kann aber in einfacher Weise die Kovarianz der Gleichung (V) gefolgert werden; denn da die  $\delta g_{\mu\nu}$  kontravariant,

$T_{\mu\nu}$  kovariant sind, so ist  $\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta\gamma_{\mu\nu}$  ein Skalar, und das Gleiche gilt von  $\sqrt{-g} \cdot d\tau$ . Es ist also

$$(7) \quad \int \sqrt{-g'} \cdot \sum_{\mu\nu} T'_{\mu\nu} \delta\gamma'_{\mu\nu} \cdot d\tau' = \int \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta\gamma_{\mu\nu} \cdot d\tau.$$

Aus (6) und (7) folgt, daß die Gleichung (V) allen berechtigten Transformationen des Koordinatensystems gegenüber kovariant ist, sofern die Variationen so gewählt werden, daß die  $\delta\gamma_{\mu\nu}$  und ihre ersten Ableitungen an der Begrenzung des Gebietes verschwinden. Der Variationsatz, dessen Kovarianz auf diese Weise bewiesen worden ist, ist also etwas weniger allgemein als der in § 3 zur Ableitung der Gravitationsgleichungen benutzte. Ein Blick auf die Entwicklungen des § 3 lehrt aber, daß jene Ableitung der Gravitationsgleichungen durch diese einschränkende Randbedingung für die Variation nicht beeinträchtigt wird. Damit ist bewiesen:

*Die Gravitationsgleichungen (II) sind kovariant gegenüber allen berechtigten Transformationen des Koordinatensystems, d. h. gegenüber allen Transformationen zwischen Koordinatensystemen, für welche die Bedingungen*

$$(IV) \quad B_\sigma = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) = 0$$

erfüllt sind.

Wir haben in § 2 behauptet, daß die Ausdrücke  $B_\sigma$  keinen allgemeinkovarianten Vektor bilden. Den Beweis hierfür führen wir deshalb erst an dieser Stelle, weil er sich unter Verwendung der bisher gewonnenen Ergebnisse besonders einfach gestaltet. Wären die  $B_\sigma$  kovariant, so wären alle im Vorhergehenden als angepaßte bezeichneten Koordinatensysteme beliebige Koordinatensysteme. Keiner der Schritte des Beweises würde zufolge dieses Umstandes seine Beweiskraft verlieren. Das Endergebnis des Beweises wäre die völlig allgemeine Kovarianz der Gravitationsgleichungen. Es wäre dann

$$\mathfrak{X}_{\sigma\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \kappa t_{\sigma\nu} \right) \right) = \frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \cdot \mathfrak{X}_{\sigma\nu}$$

ein allgemeiner gemischter Tensor, folglich

$$\sum_{\sigma} \mathfrak{X}_{\sigma\sigma} = - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varrho} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \log g}{\partial x_\beta} \right) - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\varrho\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\varrho\tau}}{\partial x_\beta} \right)$$

ein Skalar bezüglich beliebiger Transformationen. Wie aber aus der

Theorie der Differentialinvarianten hervorgeht<sup>1)</sup>, stimmt diese Größe nicht überein mit der einzigen Differentialinvariante zweiter Ordnung

$$\sum_{imk} \gamma_{im} \{ ik, km \}.$$

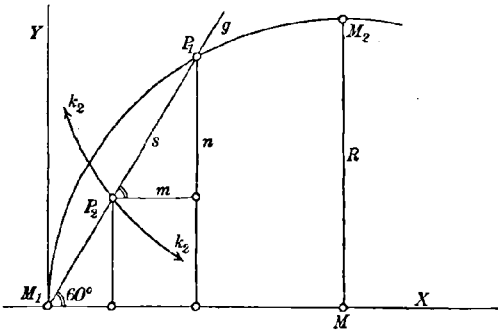
Wenn auch die vorstehenden Überlegungen die angepaßten Koordinatensysteme und die berechtigten Transformationen noch nicht völlig anschaulich machen können, so gewinnt doch die neue Theorie der Gravitation durch diese weitgehende Kovarianz der Gravitationsgleichungen an überzeugender Kraft. Da die Bedingungen  $B_\sigma = 0$ , durch die wir die Koordinatensysteme eingeschränkt haben, eine unmittelbare Folge der Gravitationsgleichungen sind, so ist durch unsere Betrachtungen gezeigt, daß die Kovarianz der Gleichungen eine denkbar weitgehende ist.

1) Vgl. § 4 des II. Teiles des „Entwurfes“.

### Kleinere Mitteilungen.

#### Näherungskonstruktion für die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Elfecks.

Bezeichnet  $M$  den Mittelpunkt des gegebenen Kreises, und sind in diesem  $MM_1, MM_2$  irgend zwei zueinander senkrechte Halbmesser, so trage man den



Halbmesser  $R$  des Kreises von  $M_1$  nach der Seite von  $M_2$  hin als Sehne ein — der Endpunkt heiße  $P_1$ , so daß  $\overline{M_1 P_1} = R$  ist — ziehe die Sehne  $M_1 P_1$  und schneide sie durch den aus  $M_2$  als Mittelpunkt ebenfalls mit dem Halbmesser  $R$  beschriebenen Kreis  $k_2$  in  $P_2$ , dann ist  $\overline{P_1 P_2}$  nahezu gleich der Seite  $s_{11}$  des eingeschriebenen regelmigen 11-ecks.

Zum Beweis bezeichne man in bezug auf das in der Figur angegebene Achsensystem die Koordinaten von  $P_1$  und  $P_2$  beziehlich mit  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ . Dann ergibt sich, wenn  $R = 1$  gesetzt wird:

$$x_1 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

und, weil  $P_2$  der Schnittpunkt des Kreises  $k_2$  zur Gleichung

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

mit der Geraden  $g$  zur Gleichung  $y - x \operatorname{tg} 60^\circ$  ist:

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12}}{4},$$

oder auf vier Dezimalstellen genau:

$$x_2 = 0,2177, \quad y_2 = x_2 \operatorname{tg} 60^\circ = 0,3771.$$

Mit  $m = x_1 - x_2, \quad n = y_1 - y_2$  erhält man schließlich

$$P_1 P_2 = s = \sqrt{m^2 + n^2} = 0,5646.$$

Der genaue Wert ist, ebenfalls auf vier Dezimalen abgerundet:

$$s_{11} = 0,5635.$$

Somit liefert obige Konstruktion die gesuchte Seite des Elfecks etwas zu groß, und zwar ist der Fehler, auf den Halbmesser 1 bezogen:

$$s_{11} - s = -0,0011.$$

Olmütz (Mhren).

RICHARD Graf LAVALUX.

## Bücherschau.

---

**Dr. V. Kommerell**, Rektor des Kgl. Realprogymnasiums in Nürtingen, **Raumgeometrie** (Stereometrie und darstellende Geometrie). Mit Benutzung von Kommerell-Haucks Lehrbuch der Stereometrie für den Schulgebrauch bearbeitet. VII u. 196 S. Mit 115 Figuren. Tübingen 1910, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung. *M* 2.—, geb. *M* 2.60.

Im Jahre 1906 wurden die württembergischen Lehrpläne für Realgymnasien und Oberrealschulen hinsichtlich der Raumgeometrie in der Weise geändert, daß die Behandlung der einfachen Körper an den Anfang zu stellen ist und daß Stereometrie und darstellende Geometrie in enge Verbindung zu treten haben. Das vorliegende Schulbuch trägt diesen Grundsätzen Rechnung. Allerdings ergibt sich bei Einhaltung dieser Reihenfolge die methodische Schwierigkeit, daß die einfachen Körper behandelt werden müssen, bevor die Stereometrie systematisch aufgebaut ist. Der Verfasser umgeht diese Schwierigkeit, dadurch daß er der propädeutischen Behandlung der einfachen Körper (Quader, Würfel, Pyramide, Pyramidenrumpf, Zylinder, Kegel, Kegelumppf, Prisma, Prisma, reguläre Polyeder) „Hilfssätze“ voranstellt und auf deren Beweise im systematischen Teile verweist. Diese einfachen Körper werden sowohl in Grund- und Aufriß, als auch in Parallelprojektion dargestellt. Daran schließt sich die Behandlung von Punkt, Gerade und Ebene in stereometrischer und deskriptiver Behandlung und ebenso der Kegel, nach beiden Gesichtspunkten erörtert. Sphärik und Vielkant bilden den Schluß. Die Darstellung ist klar und deutlich, die Figuren sind ausgezeichnet schön und bildmäßig wirksam.

München.

KARL DOEHLEMANN.

**Prof. Emil Ludwig**, **Barchaneks darstellende Geometrie und Raumlehre.**

Ein Lehr- und Übungsbuch für die IV. bis VII. Klasse der Realschulen. Mit 353 Figuren. Dritte, nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage. Mit Ministerialerlaß vom 15. Okt. 1910, Z. 36678 allgemein zulässig erklärt. 147 S. Wien 1910, Verlag von F. Tempsky. Geh. Kr. 4.—.

Das Buch gibt in einem I. Teil (Vorkurs) eine elementare Darstellung des Grund- und Aufriß-Verfahrens und der Parallelperspektive, wobei der Ausgangspunkt von einfachen Körpern genommen wird, die übrigen drei Teile behandeln die gleichen Gebiete in systematischer Weise, dazu kodierte Projektion, die Kreislinie und ihre Projektion (Kegelschnitte), Kegel-, Zylinder-, Kugel- und Drehflächen mit Einschluß von Schatten-Konstruktionen. Schwierigere Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt. Text und Figuren sind gut durchgearbeitet, die praktischen Beispiele geschickt gewählt.

München, Mai 1913.

KARL DOEHLEMANN.

Prof. Dr. **J. Peters**, Observator am Kgl. Astronomischen Rechen-Institut, **Fünfstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten.** Berlin 1912, Georg Reimer. Geb. *M.* 7.—

Die Tafel bezweckt die Umgehung der bei Benützung einer gewöhnlichen Logarithmentafel für gewisse Rechnungen erforderlichen Umrechnung von Zeit- in Gradmaß und umgekehrt von Grad- in Zeitmaß. Sie enthält in einer Haupttafel die fünfstelligen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten, und in einer Hilfstafel für jede Zehntel-Zeitsekunde die fünfstelligen Logarithmen von  $\sin$  und  $\operatorname{tg}$  von  $0^h 0^m$  bis  $0^h 8^m$  und von  $\cos$  und  $\operatorname{ctg}$  von  $5^h 52^m$  bis  $6^h 0^m$ . Zur ausnahmsweisen schärferen Rechnung bei  $\sin$  und  $\operatorname{tg}$  von  $0^h 0^m$  bis  $0^h 10^m$  auf Grund der Maskelyne'schen Regel sind in einer besonderen Tafel die Hilfsgrößen  $S$  und  $T$  angegeben.

Die Anordnung der Tafel ist derart vorgenommen, daß die fünfstelligen Mantissen je in zwei Gruppen zu zwei bzw. drei Ziffern zerlegt wurden, wobei die erste Gruppe bei der vertikalen gegliederten Haupttafel oben, und bei der horizontal gegliederten Hilfstafel links vorgedruckt wurde; in beiden Fällen wird ein Wechsel in der zweiten Mantissenstelle innerhalb einer Reihe in der üblichen Weise durch einen Stern hervorgehoben.

Für die bequeme Ausführung der Interpolation ist durch die Befügung von besonderen Täfelchen Sorge getragen.

Nach den Angaben des Verfassers wurden bei der Haupttafel alle Werte, und bei der Hilfstafel die Hälfte der Werte durch Abkürzung aus der vom Verfasser und J. Bauschinger herausgegebenen achtstelligen Logarithmentafel<sup>1)</sup> erhalten. Die andere Hälfte der Werte der Hilfstafel wurde in ähnlicher Weise berechnet wie die Werte jener achtstelligen Tafel.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

Prof. Dr. **A. Galle**, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut zu Potsdam, **Mathematische Instrumente.** Leipzig und Berlin 1912, B. G. Teubner. Geb. *M.* 4,80.

Das Buch zerfällt in neun Abschnitte, in denen arithmetische Apparate mit logarithmischer Skala, Rechenmaschinen, die Meßrolle, stetige Rechenapparate, Differentialapparate, Kurvenmesser, Flächenmesser, Apparate zur harmonischen Analyse und Integranten behandelt werden. Mit Rücksicht auf den Umfang des Buches hat der Verfasser die mathematischen Zeicheninstrumente weggelassen. Ein Abschnitt über Apparate zur Auflösung von Gleichungen, der den Umfang des Buches nicht wesentlich vergrößern würde, ließe sich bei einer zweiten Auflage vielleicht noch unterbringen.

In dem Abschnitt über Rechenapparate mit logarithmischer Skala wird insbesondere der gewöhnliche Rechenschieber besprochen; bei der Aufzählung der Instrumente mit anderer Form fehlen die von E. Leder konstruierten Rechenapparate.<sup>2)</sup>

1) Vgl. die Besprechung im 61. Band dieser Zeitschrift (1913), S. 204.

2) Vgl. diese Zeitschrift für Mathematik und Physik, 59. Band (1911), S. 161.



Bei den Rechenmaschinen behandelt der Verfasser reine Additionsmaschinen, erweiterte, für die Multiplikation eingerichtete Additionsmaschinen, eigentliche Multiplikationsmaschinen und Differenzenmaschinen. Nach einer allgemeinen Besprechung der Hauptteile — Zählwerk, Zehnerübertragung und Schaltwerk — einer Rechenmaschine werden die bekanntesten Maschinen kurz beschrieben und die wichtigsten Merkmale in ihrer Konstruktion und bei ihrem Gebrauch angegeben.

Unter den Anforderungen, die an eine „moderne Rechenmaschine“ gestellt werden, wird ein Druckwerk aufgeführt, „das wenigstens das Resultat druckt, wenn möglich auch die Aufgabe“. Diese Anforderung ist etwas zu weitgehend; es gibt viele mit der Rechenmaschine auszuführende Arbeiten, bei denen ein Druckwerk keinen nennenswerten Vorteil bieten würde.

In dem der Meßrolle gewidmeten Abschnitt werden nicht nur diese, sondern auch die sie ersetzenden Vorrichtungen und deren Wirkungsweise behandelt.

Bei den stetigen Rechenapparaten werden insbesondere der Proportionalrechenchieber und der arithmetische und trigonometrische Universalrechenapparat von Ch. Hamann beschrieben.

Den verhältnismäßig größten Teil — nahezu die Hälfte — des ganzen Buches nimmt der Abschnitt über Flächenmesser ein. Nach einer kurzen Besprechung der einfacheren Arten — Flächentafeln, Harfenplanimeter und Verwandlungsplanimeter — werden in ausführlicherer Weise die Planimeter behandelt, die eine Meßrolle in Form einer Integrierrolle besitzen. Den Schluß des Abschnitts über Flächenmesser bilden die Schneidenplanimeter und ihre Abarten.

Außer den mathematischen Grundgedanken und den aus ihnen sich ergebenden Einrichtungen der Instrumente enthält das Buch verschiedenfach auch Angaben über ihren Gebrauch und über die mit ihnen zu erreichende Genauigkeit.

Zur Unterstützung des Textes dient eine große Anzahl von Abbildungen und Figuren.

Eine zusammenhängende Darstellung der Grundlagen und der Einrichtungen der mathematischen Instrumente war seither nicht vorhanden; diese Lücke ist durch das vorliegende Buch ausgefüllt.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

**A. Padoa, La logique déductive dans sa dernière phase de développement.** Avec une préface de G. Peano. 106 S. 8°. Paris 1912, Gauthier-Villars. Geb. frs. 3.25.

Unter „logique déductive“ versteht der Verfasser dasselbe, was sein Meister Peano ursprünglich „logique mathématique“ genannt hatte. Aber mit der Mathematik hat die „deduktive Logik“ nur die Methode gemein und sie kann ihr passende Beispiele entnehmen. Sonst ist diese Disziplin, deren Idee von Leibniz stammt, die dann von Segner und Lambert gefördert, von de Morgan, Boole, Schröder u. a. weiter ausgebaut, von Peano und seinen Mitarbeitern aber besonders verfeinert wurde, rein philosophisch. Das Hauptinstrument dieser „deduktiven Logik“ ist eine gewisse Ideographie, d. h. ein System von (16) Zeichen, als Symbolen für die logischen Verknüpfungen. Padoa vergleicht diese Ideographie, mittels der man Begriffsunterschiede

wahrnehmen und darstellen kann, die dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entgegen, mit einem Mikroskop, das auch gestattet Objekte zu sehen, die dem unbewaffneten Auge verborgen bleiben. Es leidet auch keinen Zweifel, daß diese logische Ideographie eine wesentliche Verbesserung und Verschärfung der durch die Scholastiker überlieferten und ins Breite gezogenen Aristotelischen Logik ermöglicht hat. Was die Darstellungsweise des Verfassers betrifft, so kann man den Worten Peanos, der das Buch als „clair, ordonné, complet“ bezeichnet, nur zustimmen. Padoa führt den Leser auch in die Geschichte der Disziplin ein und er ist hierin wie auch in den sonstigen historischen Bemerkungen recht gewissenhaft. Gerade aus diesem Grunde aber sei hervorgehoben, daß die Bemerkung (S. 21) über das Descartessche (!) Gleichheitszeichen  $\infty$  (nicht  $\infty$ !) ganz unrichtig und die über Einführung des „vinculum“ und der Klammern (S. 46) mindestens unvollständig und daher irreführend ist.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**H. Vuibert, Les Anaglyphes géométriques.** 32 S. 8°. Paris, Librairie Vuibert. [Copyright 1912.]

Die „Anaglyphen“ (*ἡ ἀναγλυφή*, die erhabene Schnitzarbeit) sind Stereoskopbilder, die in zwei Komplementärfarben gezeichnet sind und mit einer entsprechenden Brille betrachtet, sehr schön und deutlich die räumlichen Figuren erkennen lassen. Vor einigen Jahren tauchte ja das Verfahren in Ansichtensammlungen auf. Durch die vorliegende Schrift, deren letzte Hälfte aus den Tafeln besteht, soll die Verwendung der Anaglyphen im Stereometrieunterricht, in der Kristallographie und Physik angebahnt und zugleich auf Sammlungen solcher Anaglyphen aufmerksam gemacht werden, die in Vorbereitung sind.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**Taschenbuch für Mathematiker und Physiker.** Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von **F. Auerbach** und **R. Rothe**. Mit einem Bildnis F. Kohlrauschs. 3. Jahrgang 1913. X u. 364 S. 8°. Leipzig 1913, B. G. Teubner. Geb. *M* 6.—.

Der Absatz dieses Taschenbuches hat sich jetzt, wie es scheint, erfreulicherweise so stetig gestaltet, daß der Verlag sein Erscheinen auf alle zwei Jahre festsetzen kann. Leider mußte, damit der Preis wieder auf die ursprüngliche Höhe gebracht werden konnte, der Umfang gegen den vorigen Jahrgang um etwa 100 Seiten gekürzt werden. Das hatte, abgesehen von verschiedenen Kürzungen, zur Folge, daß besonders im mathematischen Teil vieles enger und kleiner gesetzt wurde. Da außerdem auch stark durchscheinendes Papier verwendet wurde, dürfte für viele die äußerste Grenze der Lesbarkeit erreicht oder schon überschritten sein. Über die Auswahl des Gebotenen hier zu sprechen, ist kein Raum. Auch wird schließlich jeder etwas anderes vermissen. Verschiedentlich gewechselt haben die Verfasser und Themen der Einzelaufsätze. Ganz neu sind in diesem Jahrgang die Aufsätze über Kohlrausch von Warburg, über mehrdeutige Funktionen und Uniformisierung von Bieberbach, über die Internationale Mathematische Unterrichtskommission von Lietzmann, über Quantentheorie von Sommerfeld, über Niedere Geodäsie von Gast

und über Kristallographie von Milch. Der physikalische Teil wurde durch mehrere graphische Darstellungen aus Auerbachs größerem Werk über den Gegenstand bereichert. Eine kleine Zeittafel zur Geschichte der Mathematiker wurde beigegeben. Sehr dankenswert ist, daß sowohl im Inhaltsverzeichnis als im Register auch auf die Beiträge der beiden früheren Jahrgänge hingewiesen wird. Verschlechtert hat sich das Verzeichnis der mathematischen Zeitschriften, indem die laufenden Jahrgänge nicht mehr angegeben wurden. Sonst sei noch bemerkt, daß von Hammers Trigonometrie-Handbuch die 3. Auflage (1907) zitiert werden sollte.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**L. Michaelis**, Einführung in die Mathematik für Biologen und Chemiker. 253 S. 8° mit 96 Textfiguren. Berlin 1912, J. Springer. Geb. *M* 7.80.

**M. Lindow**, Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik. 111 S. 8° mit 42 Textfiguren (Aus Natur und Geisteswelt Nr. 387). Leipzig 1913, B. G. Teubner. Geb. *M* 1.25.

Wie groß heute das Bedürfnis nach Belehrung in höherer Mathematik ist, kann man aus der großen Zahl von Leitfäden ersehen, die in den letzten Jahren auf den Markt kamen. Leider sind gerade diejenigen unter ihnen (und wiederum am meisten die kleineren), die sich an Nichtmathematiker wenden, häufig auch von solchen verfaßt. So ist es mit dem Buche von Michaelis, das mit der Definition beginnt: „Zwei Körper schneiden sich in einer Ebene (!) zwei Ebenen in einer Linie (!) usw.“ Ich bringe noch einige Zitate. S. 6: „Der geom. Ort ist eine Figur (!)“. S. 7: „Jeder Peripheriewinkel über dem Halbmesser (!) ist ... ein rechter“. S. 16: „Die ... Körper teilt man ein in Trieder (!), Tetraeder usw. ein“. „Ein Parallelepipedon (!) mit lauter rechten (!) Winkeln heißt ein Prisma“. „Man teilt die Zahlen ein in 1. Natürliche (!) Zahlen, positive und negative“. S. 54: „Die horizontale Achse (!) nennt man Abszisse“. Das ist nur eine Auswahl. Merkwürdiger Weise verringern sich in den höheren Gebieten diese krassen Fehler. Freilich steht auch da noch allerlei, was nicht richtig, oder wenigstens nicht ohne Einschränkungen richtig ist. Man hat aber im ganzen doch den Eindruck, daß der Verfasser das rein Äußerliche der höheren Rechnungsverfahren beherrscht und anzuwenden weiß. Aber das genügt eben nicht, um ein Lehrbuch zu schreiben. Dabei bin ich weit davon entfernt, dem Verfasser etwa Mangel an Strenge vorzuwerfen: es fehlt eben, wie meine Zitate schon zeigen, an den Grundbegriffen. Auch das Deutsch und die Figuren (bes. S. 74, 76, 165, 198) lassen sehr zu wünschen übrig. Das Buch wäre aber verbesserungsfähig, wenn es bei einer etwaigen Neuauflage von einem Mathematiker gründlich durchgesehen würde.

Michaelis begründet die Herausgabe seines Werkes damit, daß die bestehenden Einführungen den Bedürfnissen der Biologen nicht völlig entsprechen (er bringt aber selbst nur chemische Anwendungen). Wenn aber einer die Grundlagen nur irgendwie ordentlich lernt, so wird er sie schon in seinem eigenen Fach anwenden können. Von diesem Gesichtspunkt aus kann man das Büchlein von Lindow allen Naturwissenschaftlern empfehlen. Der Verfasser ist ein Praktiker und doch Mathematiker. Freilich, manches macht er sich unnötigerweise etwas zu leicht, wie die Einführung der Differentiale und

des Grenzwertes (S. 11 u. S. 92), anderes wieder — ebenso unnötigerweise — zu schwer, wie die Ableitung des Differentialquotienten von  $\sin x$  (S. 25). Hier tut Michaelis das einzig Richtige, er macht den Grenzwert 1 für  $\sin x : x$  bei zu Null abnehmendem  $x$  aus der Logarithmentafel heraus plausibel. Lindow macht etwas Ungewöhnliches, was keineswegs leichter ist als die gewöhnliche, ganz strenge Ableitung, erschleicht aber dabei noch das Resultat, da in der Ausführung ein unbewiesener Grenzwert vorkommt. Die Beispiele zur Anwendung der Taylorsche Reihe sind bei Lindow wirklich schön und auch jedem Biologen verständlich. Auf weitere Einzelheiten kann nicht eingegangen werden. Doch sei noch erwähnt, daß das Wort „integer“, von dem „Integral“ kommt, hier nicht „unversehrt“ bedeutet (s. S. 84), sondern „ganz“, „gesamt“. Denn das Symbol  $\int$ , das Leibniz am 29. Oktober 1675 zum erstenmal schrieb, ersetzte das von ihm vorher im Anschluß an Cavalieri und Wallis benutzte *Omnia l.* Und das Zeichen  $\int$  ist nicht, wie Michaelis schreibt (S. 140) ein großes *S*, sondern ein kleines, langes, wie es bis in die neueste Zeit geschrieben und gedruckt wurde.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie.** Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von K. Manitius. 2 Bände. XXVIII u. 462 S.; VI u. 446 S. kl. 8°. (Bibliotheca Teubneriana.) Leipzig 1912, 1913. M 16.—

Das hier vorliegende Buch wird von allen, die der Geschichte der Astronomie und Mathematik Interesse entgegenbringen, mit besonderer Freude begrüßt werden. Man ist jetzt zwar nicht mehr auf den wenig einwandfreien griechischen Text des Almagest angewiesen, den N. Halma 1813/16 in Paris herausgab, nachdem I. L. Heiberg 1898/1903 eine auf der gründlichsten Durchforschung des gesamten handschriftlichen Materials beruhende Ausgabe der Syntax veröffentlichte. Immerhin aber mußte ein des Griechischen nicht kundiger Astronom auf Halmas französische Übersetzung zurückgreifen, die an allen schwierigen Stellen im Stich läßt und ihren Hauptwert durch die von Delambre beigegebenen sachlichen Anmerkungen empfängt. Hier legt nun Manitius in einer nach Ansicht des Ref. schön gelungenen deutschen Übersetzung das Handbuch des Claudius Ptolemäus vor, eins der wenigen wissenschaftlichen Werke des Altertums, die in tadelloser Verfassung auf uns gekommen sind.

Der Übersetzer hat den Ptolemäischen Text für den modernen Gelehrten so leicht lesbar gemacht, wie er es einst etwa für einen griechischen Zeitgenossen des Autors gewesen sein mag. Die mathematischen Ableitungen und Beweise wurden in die bequeme moderne Formelsprache umgegossen und die von den Abschreibern bisweilen entstellten Zeichnungen exakt wieder zurechtgerückt; zahlreiche neue Figuren sind ferner zur Erläuterung schwieriger Stellen hinzugefügt. Die vielen numerischen Tafeln in ihrem modernen Aussehen verlocken geradezu zu Berechnungen nach der im Ptolemäus zu grunde gelegten Theorie. In den Anhängen der beiden Bände hat der Übersetzer eine Menge wertvollen philologischen und sachlichen Stoffes verarbeitet; darunter Erläuterungen zu schwierigen korrumpierten Textpartien und — was vornehmlich den Astronomen interessiert — Beispiele zum Gebrauch der Ptolemäischen Tafeln nebst

Revisionsrechnungen. Der wichtige und vielumstrittene Fixsternkatalog steht im zweiten Band in sorgfältiger Wiedergabe und Rezension. Die Identifikation der Sterne nahm Manitius von neuem mit modernen Hilfsmitteln vor. Das Resultat dieser Arbeit ist dem Katalog in zwei Kolonnen vorangestellt, deren eine die Nummern der Sterne in L. Ambronn's „Sternverzeichnis für das Jahr 1900.0“ (Berlin 1907) enthält, die andere die Bayerschen Buchstaben oder die Flamsteedschen Zahlen. An den Katalog schließt sich die bekannte treffende Beschreibung des Verlaufs der Milchstraße an, den wir heute nicht besser mit Worten skizzieren können.

In der Einleitung gibt Manitius eine Geschichte der Überlieferung des Werkes und des Textes, die auch den großen politischen Hintergrund malt, auf dem man den von allen Kulturvölkern gleich hoch geschätzten Text des Ptolemäus durch die Jahrhunderte gleiten sieht.

Der Astronom wird in dieser bequemen Form gern ein Buch im Original zur Hand nehmen, das durch 1500 Jahre die Grundlage jeglichen astronomischen Studiums bildete, das Auflage über Auflage erlebte und das in den Kommentaren, die es fand, auch Anlaß zur Niederlegung eigener Forschungen gab. Dem astronomisch interessierten Historiker und Philologen ist es leicht gemacht, sich aus der Lektüre des Handbuches ein übriges gleichgültiges Werturteil von dem vielberühmten Alexandrinischen Astronomen Claudius Ptolemäus zu bilden. Und das muß dahin gehen, daß Ptolemäus weder ein origineller großer Mann, noch ein Kompilator war. Ein großer Mann schon nicht, weil er überhaupt ein Lehrbuch schrieb. Er war ein tüchtiger, gewissenhafter, gelehrter Universitätsprofessor, der mit viel Sorgfalt und Genauigkeit den Stoff seiner Vorlesungen vorbereitete, und so schließlich in langen Jahren ein Lehrbuch zusammentrug. Lücken, die beim Ineinanderpassen sich noch nicht aus dem Vorhandenen schließen ließen, bearbeitete er selbständig und manchmal nicht ohne Glück. Objektiv aber überliefert uns die Syntaxis historisches und wissenschaftliches Material von unschätzbarem Wert. Und dem Autor, dem wir die Erhaltung dieses Schatzes verdanken, dürfen wir sicher die dankbare Anerkennung widmen, wie sie Tacitus hin und wieder mit kühler Reserve zu verteilen pflegt, „haud spernendus vir“.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**W. Leick, Astronomische Ortsbestimmungen mit besonderer Berücksichtigung der Luftschiffahrt.** VIII u. 130 S. 8°. Leipzig 1912, Quelle u. Meyer. Geb. *M.* 3.50.

Der Verf. ist von seiner Tätigkeit als Ballonfahrer her zu der Beschäftigung mit der astronomischen Ortsbestimmung gelangt, und dieser Umstand prägt sich seinem Buche deutlich genug auf. Aber nicht zum Nachteil. Denn es gelingt der Darstellung, diejenigen Schwierigkeiten in den astronomischen Grundlagen besonders eingehend zu erläutern, die geeignet sind, die Männer des Ballonsports von der Anstellung astronomischer Messungen abzuschrecken. So nehmen denn die zum Verständnis der Ortsbestimmungen erforderlichen Grundbegriffe einen ziemlich breiten Raum im Rahmen des Werkchens ein, betonen aber nicht ohne Geschick das Wesentliche. Das den Hauptteil einleitende Kapitel über die astronomischen Meßinstrumente läßt indes sehr die zum Verständnis kaum entbehrlichen Zeichnungen und Abbildungen vermissen.

Unter den Methoden der Ortsbestimmung greift der Verf. diejenigen heraus, die durch Einfachheit der Beobachtung und Rechnung für Ballonzwecke sich empfehlen. Neben den klassischen Methoden, wie sie unmittelbar aus der Betrachtung der Sphäre fließen, werden einige Methoden dargelegt, die speziell in der engeren Fachliteratur der Ballonfahrer ihre Entwicklung oder Tabulierung gefunden haben. Dazu gehören Längenbestimmungen beim ersten Vertikal, Bestimmung der Längenänderung, vollständige Ortsbestimmung aus zwei Fixsternen in gleicher Höhe. Tafeln oder Tafelbeispiele dazu bringt der Anhang des Buches, das sich allgemein die Bogenminute als Genauigkeitsgrenze setzt. Erst nach diesen Ausführungen, die noch keinen mathematischen Formelapparat nötig machten, geht der Verf. an die allgemeine rechnerische Auflösung des astronomischen Fundamentaldreiecks, um dann gleich die graphischen Methoden der Ortsbestimmung folgen zu lassen, die sich allesamt aus dem Begriff des Sumnerkreises ableiten. Dieses auch für den Astronomen durch seine literarische Vollständigkeit interessante Kapitel hätte aber noch sehr an Verständlichkeit gewonnen, wenn der Verf. (oder die Verlagshandlung) sich zur Beigabe von Abbildungen der ganzen Apparate und erläuternder Figuren entschlossen hätte. Ein kurzer Abschnitt behandelt die neueren nomographischen Verfahren, die in zwei verschiedenen Beispielen vorgeführt werden. Nach Ansicht des Ref. ist das Problem der Ortsbestimmung im Ballon am besten gelöst durch die „Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung im Luftballon“ von K. Schwarzschild und O. Birck (vgl. diese Zeitschr. 61 (1912), S. 215).

Der Anhang „Tabellen“ ist zwar zweckmäßig ausgewählt, aber wenig übersichtlich gedruckt. Bedenkt man die schwierigen äußeren Verhältnisse, unter denen diese Tafeln gebraucht werden müssen, so kann man in bestmöglicher Anordnung gar nicht genug tun. Für eine neue Auflage würde sich das Studium einiger musterhaft überlegter und gesetzter astronomischer Tafelwerke empfehlen, wie z. B. Th. Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geogr. Ortsbest.; L. Ambronn, J. Domke, Astronomisch-geodätische Hilfstafeln; J. Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie.

Die Literatur der jungen Disziplin ist in den Fußnoten und einem besonderen Verzeichnis bis Mitte 1912 sehr vollständig nachgewiesen. —

Trotz des großen Nutzens, den die astronomische Ortsbestimmung dem Ballonführer gewährt, macht man heute doch erst vereinzelt Gebrauch davon. Vielleicht ist das vorliegende Buch geeignet, die Abneigung zu verringern. Ein ausführlich vorbereitetes und durchgerechnetes praktisches Beispiel astronomischer Ortsbestimmung im Ballon teilt E. Korn mit in seinem „Fahrbericht des Ballon Bitterfeld I vom 12. 10. 1912.“ (D. Luftfahrer-Ztschr. 16 (1912), S. 625).

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**L. de Ball, Lehrbuch der sphärischen Astronomie.** Mit 112 Figuren im Text und 2 Karten. gr. 8°. XV u. 387 S. Leipzig 1912, W. Engelmann. Geb. M 21.50.

Der Stoff des Lehrbegriffes „sphärische Astronomie“ ist heute so fest umrissen, daß er dem Autor in der Auswahl keine große Freiheit läßt. Und auch in der Art der Bearbeitung unterscheiden sich die bisher vorliegenden Lehr- und Handbücher dieser Disziplin nicht gar sehr. Um nur ein paar der größeren

Werke zu erwähnen, so legen Sawitsch und Herr-Tinter das Hauptgewicht auf die astronomisch-geographische Ortsbestimmung und die zugehörige Theorie und Praxis der Instrumente, Chauvenet behandelt in seinen zwei starken Bänden außerdem eingehend die Anstellung rein astrometrischer Beobachtungen, R. Ball bevorzugt Themata der mathematischen Geographie, Newcomb Fragen der Stellarastronomie und Brünnows verbreitetes Buch, auf dessen Gestaltung Encke nicht ohne Einfluß war, widmet allen Gegenständen ein ziemlich gleichmäßiges Interesse.

Verglichen mit diesen Werken darf man doch den „de Ball“ als eine neuartige Erscheinung willkommen heißen. Er ist rein mathematisch gehalten und betrachtet alle Probleme in abstrakt geometrischer Weise. Das hat den unbestreitbaren, nicht hoch genug zu veranschlagenden Vorzug, daß er dem Leser eine eindringende Kenntnis der Grundlagen der sphärischen Astronomie, der Koordinatensysteme, der Ortsbestimmung der Gestirne sozusagen aufzwingt. Da der Verf. im Vorwort eine übersichtliche und begründende Analyse des Inhaltes seines Buches gibt, so mögen hier nur einige Punkte berührt werden, in denen er von andern Werken sich abhebt. Ein umfangreiches Kapitel (54 Seiten) führt in die Theorie der Drehung der Erde ein; denn — sagt der Verf. mit Recht — „ein großer Teil des Gebietes der sphärischen Astronomie kann nur sehr unvollkommen verstanden werden, wenn man die Theorie der Drehung der Erde nicht gründlich studiert hat.“ Bei der Eigenbewegung der Fixsterne wird auch die Berechnung der Sternströme dargestellt und durch ein Beispiel (Ursastrom) erläutert. Ein großes Kapitel (55 Seiten) enthält die vollständige Theorie der Refraktion nach Radau, ein weiteres die Bildung eines Fundamentalkatalogs. Die Behandlung der Sonnenfinsternisse folgt der Hansenschen Theorie in einer vom Verf. wesentlich vereinfachten Form; für die Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort werden daneben noch Bessels Vorschriften entwickelt. Das Kapitel der „astrographischen Ortsbestimmung“ bildet ein Gegenstück zur geographischen Ortsbestimmung; es beschäftigt sich mit der Bestimmung der Lage der Rotationsachse eines Planeten und der Koordinaten von Punkten auf seiner Oberfläche. Die optische Libration des Mondes fällt ebenfalls in diesen Abschnitt. Ein kurzes Schlußkapitel (9 Seiten) bringt die geometrischen Grundzüge der Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch Beobachtungen außerhalb des Meridians.

Diese Übersicht zeigt schon, daß der Verf. die Theorie der Instrumente nicht in den Rahmen seiner Darstellung aufnahm. Ja, es fehlt überhaupt jede Beziehung auf die Praxis der Beobachtungen. Das gereicht wie angedeutet dem Buch nicht zum Nachteil. Und gerade der beobachtende Astronom wird am ehesten zum de Ball greifen, der ihn in keiner Frage rein mathematischen oder prinzipiellen Charakters im Stich läßt. Der Studierende jedoch zieht erst dann vollen Nutzen aus dem schönen Buche, wenn er schon eine Vorlesung über sphärische Astronomie gehört hat.

Sein Werk hat der Verf. „Herrn Moritz Edlen von Kuffner in Dankbarkeit und Verehrung gewidmet.“ Darin liegt eine feinsinnige Anerkennung für das große Verdienst des Mannes, dessen wissenschaftliches Interesse in Österreich die einzige Sternwarte schuf, die aus einem Guß mit den besten modernen Instrumenten visueller und photographischer Art ausgestattet wurde.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

1. **O. Hartmann, Astronomische Erdkunde.** 4. umgearb. Aufl. Mit 36 Textfig., 1 Sternkarte und 88 Übungsaufgaben. 8°. XII u. 79 S. Stuttgart und Berlin 1912, Fr. Grub. Kart. *M* 1.20.
2. **H. C. E. Martus, Astronomische Erdkunde.** Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Große Ausg. mit 100 Fig. im Text u. 2 Tafeln. 4. Aufl. mit vielen Zusätzen bearb. nach dem Stande d. Wissensch. i. J. 1911. 8°. XX u. 502 S. Dresden und Leipzig 1912, C. A. Koch. *M* 12.50.

1. Der Verf. hat seinem Buche eine Einteilung gegeben, die von der Anordnung des Stoffes abweicht, die man gemeinhin in den zahlreichen Lehrbüchern und Leitfäden der mathematischen Geographie antrifft. Er zerlegt den Text in zwei Hauptteile: die Erscheinungen und die Erklärungen. Der erste Abschnitt schildert die Vorgänge, die wir an Sternhimmel, Erde und Sonne wahrnehmen, der zweite soll die Begründung des Beobachteten geben. Das ist didaktisch nicht ungeschickt und verdient insbesondere deshalb begrüßt zu werden, weil eine solch strenge Trennung gar nicht gelingen kann. Darum ist sie geeignet, den Leser ganz von selbst zu der richtigen Auffassung zu bringen, daß wir schließlich keine Erklärungen, sondern nur möglichst einfache Beschreibungen von Naturvorgängen anstreben. Die Gesetze, die Prinzipien, sind, um es zugespitzt zu sagen, nichts weiter als mnemotechnische Hilfsmittel zur bequemen Rekonstruktion und geistigen Beherrschung komplizierter Naturvorgänge. Und diese Erkenntnis wird beim Studium der astronomischen Erdkunde nach dem Leitfaden O. Hartmanns auch dem Schüler nicht verschlossen bleiben, wenn er sieht, wie hier die Grenzen von Erscheinungen und Erklärungen fließen. Da der Stoff gut ausgewählt, der mathematische Formelapparat nicht zu sparsam behandelt ist, verdient das Büchlein die Anerkennung, die es jetzt zur vierten Auflage geführt hat.

2. Die dritte Auflage des ganz anders gearteten Martusschen Buches erschien i. J. 1904. Sie wurde angezeigt in dieser Ztschr. Bd. 54 (1907), S. 222; die damals erwähnten Versehen sind jetzt beseitigt. Nachträge und Ergänzungen, die der inzwischen verstorbene Verf. hinzufügte, haben den Umfang des Werkes um 29 Seiten verstärkt. Die Vorzüge in Anlage und Durchführung des Buches blieben bestehen und in die eigenartige Sprache liest man sich bald hinein.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**E. Kohlschütter, Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendel-Expedition der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen in den Jahren 1899 und 1900,** ausgeführt von H. Glauning † und E. Kohlschütter. II. Bd.: Die astronomisch-geodätischen Beobachtungen. Mit 4 Tafeln und 5 Figuren im Text. 4°. VI u. 101 S. Abh. d. K. Ges. d. W. Göttingen. Math.-phys. Kl. Neue Folge Bd. VIII, Nr. 5. Berlin 1912, Weidmann. *M* 11.—.

Der I. Band der „Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendel-Expedition“ erschien im Jahre 1907; er berichtete über Verlauf und Ausrüstung der Expedition und brachte die Bearbeitung der barometrischen Höhenmessungen zum Abschluß. Die vorbildliche Bedeutung, die jener Teil für Höhenbestimmungen auf geographischen Forschungsreisen gewonnen hat, kommt auch der hier vorliegenden Diskussion der im Laufe der Expedition gewonnenen absoluten astronomischen Ortsbestimmungen zu.



Als Hauptinstrument diente dasselbe Zenitteleskop, mit dem Hayn die fundamentalen Längenbestimmungen für die Deutschen Kolonien in der Südsee vornahm. Das Instrument war unmittelbar für diesen Zweck auf der Leipziger Sternwarte nach den Angaben von H. Bruns aus einem alten Höhenkreise umgearbeitet worden. Die störenden Mängel, die der provisorische und flüchtige Charakter des in Eile zusammengestellten Apparates nach sich zog, hebt der Verf. nachdrücklich hervor; man erkennt aber auch, daß es nur geringe Übelstände sind, die zwar in Afrika sich nicht mehr abstellen ließen, vor der Abreise in Europa unter den Händen eines geschickten Mechanikers aber leicht hätten bekämpft werden können. Als weiteres Instrument zur astronomischen Ortsbestimmung war noch ein kleines Universal von Bamberg mitgenommen worden, ausgerüstet mit einem Horrebow-Niveau zur Beobachtung gleicher Zenitdistanzen. Zwei Pendeluhren (Straßer & Rohde und Hawelk) und vier Taschenuhren von Lange & Söhne lieferten die Mittel zur Zeitbestimmung und Zeitübertragung. Die Eigentümlichkeiten der Uhrgänge, ihr Verhalten in Ruhe, bei der Ingangsetzung, auf dem Marsche, gegen Temperaturänderungen sind aufs eingehendste geprüft worden.

Die Zeitbestimmungen erfolgten nach der dem benutzten Instrument allein zugänglichen und genauen Methode gleicher Zenitdistanzen zweier Sterne. Sie verteilen sich auf die 42 Stationen der Pendelmessungen. Die Örter der benutzten Sterne legte der Verf. in das Newcombsche Fundamentalsystem und er verwandte große Mühe auf die genaue Ableitung der Reduktionsgrößen für die Sternörter aus anderen Quellen. Die Beobachtungen zeigen eine sehr befriedigende Genauigkeit; der m. F. eines aus durchschnittlich 4 Sternpaaren abgeleiteten Uhrstandes kommt zu  $\pm 0^{\text{s}}.3$  heraus. Bemerkenswert sind die Erfahrungen, die aus dem Vergleich der Genauigkeit der Methoden der Zeitbestimmung an dem kleinen Bambergischen Universal sich ergeben. An 3 Stationen beobachtete Kohlschütter die Zeit auch mit diesem Instrument nach der Methode gleicher Zenitdistanzen, an 5 anderen Orten nach der Methode der Einzel-Zenitdistanzen. Dabei fiel die Methode der gleichen Zenitdistanzen 36 mal so genau aus, als die Messung einzelner Höhen mit dem Höhenkreis.

Die Breitenbestimmungen beruhen ebenfalls auf gleichen Zenitdistanzen. Sie erstrecken sich über 37 Stationen und weisen für das einzelne Breitenpaar einen mittleren Fehler von  $\pm 0.''8$  auf; der mittlere Breitenfehler einer Pendelstation folgt zu  $\pm 0.''5$ . Eine ähnliche Untersuchung wie die für die Zeitbestimmungen ausgeführte zeigt, daß am kleinen Universal nach der Methode gleicher Zenitdistanzen 24 mal so genau beobachtet wird, als wie mit Zuziehung des Höhenkreises durch einzelne Zenitdistanzen.

Absolute Längenbestimmungen nahm der Verf. an 18 Punkten vor. Teils wandte er die Methode der relativen Zenitdistanzen an, d. h. er maß gleiche Zenitdistanzen des Mondes und eines in der Nähe stehenden Vergleichsterns am Zenitteleskop, teils beobachtete er Sternbedeckungen durch den Mond, für die ein Refraktor von 9 cm Öffnung bei 60- oder 30facher Vergrößerung zur Verfügung stand. Den Mondort lieferten Battermanns Formeln, die die Verbesserung der Mondephemeride des Nautical Almanac für jeden Tag zu berechnen erlauben. Für den mittleren Fehler einer absoluten Längenbestimmung findet sich wieder der hinreichend geringe Betrag von  $\pm 2^{\text{s}}.2$ . Im Anschluß an seine afrikanischen Längenbestimmungen bearbeitet nun Kohlschütter die Längen Hayns für Jaluit und Matupi neu, da sich herauszustellen schien, daß

Hayns Beobachtungen dem gleichen systematischen Fehler unterlägen, wie Kohlschüppers eigene, nämlich einer Auffassungsverschiedenheit zwischen Bisektion der Vergleichsterne und Tangierung des Mondrandes. Eine Anzahl von Stationen der Südsee würde auf die Weise gegen Hayns Ausgleichung eine Vergrößerung ihrer Längen um 54'' erleiden.

Zur Zeitübertragung und zur relativen Längenbestimmung solcher Stationen, an denen Mondbeobachtungen nicht vorkommen, verfügte die Expedition über 4 Taschenuhren von Lange & Söhne. Der Verf. entwickelt ein einfaches und beachtenswertes Verfahren, durch das er die täglichen Uhrvergleichen auch wirklich auszunutzen strebt, indem er sie zur Erkennung und Eliminierung von Ungleichmäßigkeiten in Stand und Gang der Uhren während des Marsches heranzieht. Im Gegensatz dazu stellt das sonst übliche Verfahren auf rechnerischem Wege aus allen benutzten Uhren eine fingierte mittlere Uhr her, für die man einen konstanten Reisegang annimmt. Insgesamt sind so noch 28 weitere Stationen in das Netz der absoluten Längen eingehängt worden.

Das reiche Material, das der Band in einer zum Teil recht knappen Form bietet, macht die Grundlage der Hauptaufgabe der Expedition aus, der Pendelmessungen. Dazu treten eine große Fülle wertvoller Erfahrungen, die künftigen astronomischen Expeditionen zum Nutzen gereichen. Freilich mag Kohlschüppers Expedition wohl die letzte gewesen sein, die zu absoluten Längenbestimmungen sich auf den Mond angewiesen sah. Heute schon gestaltet die drahtlose Telegraphie die Längenbestimmung fast ebenso mühelos und genau wie die Breitenbestimmung.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**H. E. Timerding, Die Erziehung der Anschauung.** Mit 164 Textfiguren. VII u. 241. 8°. Leipzig und Berlin 1912, B. G. Teubner. Geh. 4. 80, geb. 5. 60.

In diesem schönen und eigenartigen Buche untersucht der Verfasser, in welcher Weise die geometrischen Formen die Anschauung ausbilden und wie sich diese wiederum als ein wichtiger Faktor im Unterricht erweist. Nach einem kurzen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Anschauung werden die Forderungen der Gegenwart dahin zusammengefaßt, daß an Stelle des Formalismus eine lebendige Erfassung der Wirklichkeit und klare Sachlichkeit treten soll. Der Verfasser betont mit Recht, daß die niederen Schulen den Menschen für die Erwerbsarbeit vorbereiten müssen. Der Unterricht in der Geometrie kann auf dieser Stufe durchaus anschauungsmäßig gehalten sein und die streng logische Ableitung nach Euclids Vorbild ist hier durchaus nicht angebracht. Im 4. Kapitel wird ein solcher Lehrgang kurz skizziert. Daran schließt sich (5. Kap. die Raumbilder) eine Betrachtung der Zeichnung, sofern sie ein Raumobjekt zur Darstellung bringt mit Bemerkungen über geometrische Bilder, Perspective usw. Die andere Art der Verwendung der geometrischen Zeichnung, das Diagramm, behandelt das nächste, „die Zahlbilder“ betitelte Kapitel. Hier möge auf die äußerst instruktive Darstellung einer Zahl durch Quadrate verwiesen werden (S. 156). Sie gibt den Einfluß der verschiedenen Dezimalen in schlagender Weise wieder. Bei einer 2. Auflage wäre dann allerdings auch die Figur 124, an der oben fünf Quadrate fehlen, richtig zu stellen.

Außer der geometrischen Anschauung definiert der Verfasser dann noch eine statische Anschauung, welche Kräftesysteme (etwa in einem Brückenträger) beurteilt, sowie eine physikalische, astronomische und topographische Anschauung; diese letztere wird verfolgt an der Darstellung eines Geländes durch Höhenkurven, Schraffen, Beleuchtung. Rein ästhetische oder künstlerische Fragen, welche sehr nahe liegen würden — man denke an das Problem der Form — werden absichtlich ausgeschlossen. Die Darstellung setzt keine mathematischen Kenntnisse voraus. In einem mathematischen Anhang finden sich Bemerkungen über Korbbögen, Krümmung der Kurven, Epizykloiden und Wellenlinien, die Ausmessung des Kreises und die Grundgesetze der Perspektive. Was die unter e) erwähnte Konstruktion der Ellipse betrifft, so las ich vor kurzem einen ganz ähnlichen Beweis in dem Buche von E. Ludwig: *Barchaneks darstellende Geometrie*. Wien 1910. S. 138. Timmerdings Buch ist gerade in der Gegenwart besonders sympathisch zu begrüßen: scheint doch das Verständnis für geometrische Forschung und für geometrische Schönheit im Zeichen der Arithmetisierung der Mathematik fortwährend abzunehmen.

München, Juli 1913.

KARL DOEHLEMANN.

**Richard Suppantšitsch**, k. k. Professor an der Staatsrealschule im XVIII. Bezirke Wiens, *Leitfaden der darstellenden Geometrie für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien*. Mit 212 Figuren im Text und 204 Aufgaben. 196 S. 8°. Wien 1910, Tempsky. Geb. 3 K.

Das Buch zerfällt in 2 Teile: der erste behandelt das Grund- und Aufriß-Verfahren und die schiefe Projektion, die Fundamentalaufgaben und einfache Schattenkonstruktionen. Der zweite Teil beschäftigt sich mit ebenen Figuren im Raume, mit Prismen, Pyramiden, Umdrehung Cylinders und Umdrehungskegel, der Kugel den Kegelschnitten und Umdrehungsflächen und den Schattenkonstruktionen. Affinität und Kollineation werden herangezogen. Die Darstellung ist klar und sorgfältig. Den eigentlichen Sätzen werden häufig zum besseren Verständnis vorläufige Besprechungen vorausgeschickt, in Hilfsätzen wird auf die eigentlichen Resultate vorbereitet. Trotzdem ist das Werk ziemlich reichhaltig. Die Figuren lassen nichts zu wünschen übrig. Die Worte „Draufsicht“ und „Druntersicht“ (S. 59) aber kann man im Schriftdeutsch nicht zulassen; sie wären durch „Übersicht“ und „Untersicht“ zu ersetzen.

München, Juli 1913.

KARL DOEHLEMANN.

**The Svedberg**, Prof. an der Universität Upsala, *Die Existenz der Moleküle*. Experimentelle Studien. VIII u. 244 S. Mit 4 Taf. u. 78 Abb. im Text. Leipzig 1912, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. M 12.—

Der bekannte schwedische Forscher gibt hier eine Zusammenfassung seiner interessantesten Arbeiten auf dem Gebiete der experimentellen Atomistik. In dem Umstand, daß er sich ganz auf die persönlichen Untersuchungen beschränkt, liegt zugleich der große Vorzug, wie auch ein gewisser Nachteil des Werkes. Denn einerseits bekommt der Leser einen guten Einblick in die Werkstatt eines originalen Forschers, was oft mehr wert ist als die Kenntnisnahme noch so vollständiger Darstellungen aus zweiter Hand. Aber man empfindet doch

andererseits die unvermeidliche Einseitigkeit des Buches mit Bedauern, da der Titel immerhin eine allseitige Behandlung der zeitgemäßen Frage vermuten läßt.

Der Verfasser setzt in der Einleitung auseinander, was, naturwissenschaftlich gesprochen, unter einem Existenzbeweise zu verstehen sei. Ein Beweis für die Existenz der Moleküle ist erbracht, sobald eine Erscheinung vorliegt, die in keiner anderen Weise als durch die Annahme, daß die Materie aus kleinen diskreten Teilchen aufgebaut ist, in Zusammenhang mit unserem naturwissenschaftlichen Weltbilde zu bringen wäre; er ist somit nur solange zwingend, als sich keine bessere Erklärung als die molekular-theoretische finden läßt.

Sodann schreitet der Verfasser zu diesen Beweisen selbst, indem er zuerst die multimolekularen, d. h. durch große Mengen von Molekülen bewirkten Erscheinungen der Lichtabsorption und der Diffusion untersucht. Durch eine Reihe kolorimetrischer und spektrophotometrischer Messungen führt er den Nachweis, daß bezüglich der Farbstärke kein wesentlicher Unterschied zwischen kolloiden, also nachweislich aus diskreten Teilchen bestehenden Lösungen und den molekularen besteht, da mit abnehmender Teilchengröße auch eine stetige Abnahme der Farbstärke Schritt hält. Es liegt also der Analogieschluß nahe, daß auch die molekularen Lösungen aus diskreten Teilchen aufgebaut sind. Ähnlich ergibt die Untersuchung der Diffusionserscheinungen in kolloiden und molekulardispersen Lösungen, daß ein Unterschied beider nur in der Größe der Teilchen begründet sein kann, denn die durch molekularkinetische Betrachtungen gewonnene Diffusionsformel von Einstein und Smoluchowski erklärt für beide Arten von Lösungen die Erscheinungen befriedigend.

Noch fesselnder sind die folgenden Untersuchungen über pauzimolekulare Erscheinungen, bei denen die Tätigkeit nur weniger Moleküle zum Vorschein kommt, da hier die Überlegenheit der Molekulartheorie gegenüber anderen Erklärungsversuchen besonders schlagend ist. Der Verfasser hat sich vor allem um die Beobachtung der Brownschen Bewegung und der spontanen zeitlichen Konzentrationsschwankungen in radioaktiven Lösungen und Gasen große Verdienste erworben. Auch hier handelt es sich darum, die von der Molekulartheorie gegebenen Beziehungen qualitativ und quantitativ zu bestätigen, was tatsächlich überzeugend gelingt. Den Mathematiker wird die Theorie der spontanen Konzentrationsschwankungen besonders anziehen.

Dem Texte sind viele Zahlentabellen und graphische Darstellungen einverleibt, die aber in ihrem Übermaße oft eher verwirren als aufklären. Vielleicht ließe sich in einer neuen Auflage eine engere Auswahl treffen und dafür die einschlägige Literatur ausführlicher berücksichtigen. Jedenfalls wird man das Werk des schwedischen Gelehrten als einen Markstein in der Entwicklung der jüngsten physikalischen Disziplin, der experimentellen Atomistik, begrüßen.

Freiburg i. Br.

FRIEDRICH MÜLLER.

## Geometrische Untersuchungen zur Dynamik des freien starren Körpers im Raume. I.

Von THEODOR PÖSCHL in Prag.

### Einleitung.

Die Methoden und Resultate der Schraubentheorie, wie sie zuerst zusammenfassend von R. S. Ball in seinem bekannten Werke "Theory of Screws" (Cambridge 1900) gegeben wurden, sind längst zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für die Untersuchung mechanischer Systeme geworden. Erst durch sie konnten zahlreiche wichtige Probleme, u. a. die Frage nach der Klassifikation der möglichen Fälle infinitesimaler Beweglichkeit erledigt werden. Die tieferen geometrischen und algebraischen Entwicklungen, wie sie vor allem E. Study in seiner „Geometrie der Dynamen“ (Leipzig 1903) gegeben hat, sind geeignet, den großen Reichtum der damit zusammenhängenden geometrischen Fragestellungen vor Augen zu führen. Unter denen, die neuerdings besonders nachdrücklich auf die Bedeutung der Schraubentheorie für die Mechanik hingewiesen haben, sei noch besonders F. Klein genannt, der sowohl in seinen älteren Arbeiten (Math. Ann. Bd. 2 und 4) wie auch in einer neueren (Ztschr. f. Math. Bd. 47 und Math. Ann. Bd. 62) ihre Pflege besonders zu fördern bestrebt gewesen ist.

Die genannten Arbeiten (außer der letzten von F. Klein) stehen mit der Mechanik dadurch im Zusammenhang, daß sie Bewegungen in einem Zeitelement, kurz gesagt den Geschwindigkeitszustand untersuchen. In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, diese Betrachtungen auf ein zweites Zeitelement auszudehnen und damit eine, soweit dem Verfasser bekannt ist, in der Literatur nicht betrachtete Klasse von Fragen aufzugreifen, die noch weit mehr in das Gebiet der Mechanik hineinspielen, als es die obengenannten geometrischen Untersuchungen tun. Es soll nämlich mit der Schraube der eingprägten Kräfte (Dynamie) *jedesmal auch das ihr zugeordnete Beschleunigungssystem mit betrachtet werden*. Wenn wir — mit allen Vorbehalten — die „kau-

sale“ Vorstellungsweise heranziehen, so erhält durch ein System von eingepprägten Kräften jeder Punkt des bewegten Körpers eine ganz bestimmte Beschleunigung; die Gesamtheit der Beschleunigungen aller Punkte des bewegten Körpers (mögen sie nun dem bewegten Körper selbst angehören oder nicht) bezeichnen wir eben als das Beschleunigungssystem. Es gibt dann, und darauf wollen wir die Betrachtung in erster Linie lenken, i. a. einen und nur einen Punkt, dessen Beschleunigung Null ist, den sog. *Beschleunigungspol*, dessen Kenntnis die Beschreibung des Beschleunigungszustandes wesentlich erleichtert. Seine Bestimmung und seine Beziehungen zur „erzeugenden“ Dynamik sind die Gegenstände, die wir hier untersuchen wollen.

Für das erste Zeitelement würde die analoge Frage so lauten: Welches ist das Impulssystem, das den momentanen Geschwindigkeitszustand  $(u_1 u_2 u_3 p_1 p_2 p_3)$  herzustellen imstande ist? Die Koordinaten der betreffenden Impulsdynamik sind bekanntlich:

$$\xi_i = m u_i, \quad \eta_i = A_i p_i. \quad (i = 1, 2, 3).$$

In der Behandlung von Kraft und Moment einerseits und (infinitesimaler) Rotation und Translation andererseits besteht bekanntlich überdies eine weitgehende formale Analogie, die früher vielfach in kausalem Sinne — und damit unrichtig — gedeutet wurde.

Die Frage nach der Zusammensetzung der Dynamen findet für die hier zu behandelnden Probleme ihre Bedeutung in der Frage nach der *Superposition* der von ihnen erzeugten Beschleunigungssysteme; dabei stellt sich sogleich die Frage ein: wenn die Beschleunigungspole zweier oder mehrerer Beschleunigungssysteme bekannt sind, wo liegt dann der Beschleunigungspol des durch Superposition desselben hervorgehenden resultierenden Beschleunigungssystems?

Diese Frage wird insbesondere dann von Bedeutung sein, wenn die Bewegungsfreiheit des Körpers (auch im zweiten Zeitelement) durch eine bestimmte Anzahl von Bedingungen (1, 2, 3, 4, 5) beschränkt ist, was gleichzeitig dem Beschleunigungszustand eine gleiche Anzahl von Bedingungen auferlegt. Es entsteht dann die Aufgabe, bei gegebenem Geschwindigkeitssystem und gegebenen eingepprägten Kräften das Beschleunigungssystem *und die Reaktionskräfte* zu ermitteln. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich jedoch noch nicht mit diesen weiterreichenden Problemen.

Für die Behandlung derselben Gruppe von Fragen in der Ebene möchte der Verfasser zum Schlusse auf drei seiner früheren Publikationen verweisen (diese Zeitschrift Bd. 58 und 60 und Berichte der Wiener Akademie Bd. 118).

## § 1. Über das Beschleunigungssystem.

Die Frage der Verteilung der Beschleunigungen in einem bewegten System ist schon mehrfach zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden.<sup>1)</sup>

Von den zahlreichen geometrischen Ergebnissen mögen hier nur jene wiedergegeben werden, die für das Problem, das der vorliegenden Abhandlung zugrunde liegt, von Bedeutung sind.

Die Verteilung der Beschleunigungen eines im Raum frei bewegten Körpers um den Beschleunigungspol  $B$  ist dieselbe, als ob dieser Punkt festgehalten würde, und die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung an ihn angesetzt würden. Damit ist der allgemeine Fall auf diesen spezielleren zurückgeführt. Die Punkte des bewegten Systems und die Endpunkte ihrer von irgendeinem Punkt aus abgetragenen Beschleunigungen sind *affine* Systeme; aus dieser Affinität fließen eine Anzahl der bekanntesten Sätze, z. B. der, daß die Punkte gleicher Beschleunigung eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide bilden, für welche  $B$  der gemeinsame Mittelpunkt ist.

Für unsere Zwecke ist insbesondere von Bedeutung die Tatsache, daß (bei gegebenem Geschwindigkeitszustand) der Beschleunigungspol einer Bewegung bekannt ist, wenn man die Achse der Winkelbeschleunigung und die Beschleunigung eines Systempunktes kennt. Stübler hat (a. a. O.) eine Konstruktion des Beschleunigungspols  $B$  aus diesen Elementen angegeben und auch gezeigt, wie man bei gegebenem  $B$  die Beschleunigung jedes anderen Systempunktes finden kann; bezüglich der Ausführung dieser Konstruktion sei auf die genannte Arbeit selbst verwiesen.

## § 2. Grundgleichungen.

1. Zur Aufstellung der Grundgleichungen machen wir folgende Voraussetzungen:

Wir denken uns einen vollständig freien starren Körper und wählen das System der Hauptträgheitsachsen mit dem Massenmittelpunkte  $S$

1) Aus der hierher gehörigen Literatur seien hier außer den bekannten Lehrbüchern von Résal und Schell insbesondere erwähnt (man vergleiche auch die Angaben bei Schell I. Bd. S. 516):

Gruey, Sur les accélérations des points d'un solide en mouvement, Paris (1878).

Gilbert, Recherches sur les accélérations en général, Annales de Bruxelles 13 (1889) und 18 (1894).

Marcolongo, Sull'accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso. Giorn. di mat. 27 (1889).

Stübler, Das Beschleunigungssystem bei der Bewegung eines starren Körpers. Jahresb. d. Dtsch. Math.-Ver. 19 (1910).

als Ursprung zu (beweglichen) Koordinatenachsen  $(x_1, x_2, x_3)$ , die Hauptträgheitsmomente  $A_1, A_2, A_3$  seien gegeben, ebenso die Masse des bewegten Körpers,  $m$ . Der Geschwindigkeitszustand zur Zeit  $t$  wird dann durch Angabe der momentanen Schraubenbewegung festgelegt und wird ebenfalls als bekannt vorausgesetzt: es mögen  $(u_1, u_2, u_3)$  die Komponenten der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  von  $S$  und  $(p_1, p_2, p_3)$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{p}$  des Körpers um  $S$  sein, genommen nach den Achsen  $(x_1, x_2, x_3)$ ; es ist also  $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ , und es werde  $p$  als von Null verschieden vorausgesetzt.<sup>1)</sup>

Dann hat eine Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $(x_1, x_2, x_3)$  nach den Achsen  $(x_1, x_2, x_3)$  die Komponenten

$$(u_1 + p_2 x_3 - p_3 x_2, \dots, \dots)$$

die Gleichungen der Achse der Geschwindigkeitsschraube, der „Windung“ sind dann in Punktkoordinaten

$$(1) \quad \frac{u_1 + p_2 p_3 - p_3 x_2}{p_1} = \frac{u_2 + p_3 x_1 - p_1 x_3}{p_2} = \frac{u_3 + p_1 x_2 - p_2 x_1}{p_3}$$

oder wenn mit

$$(2) \quad k = \frac{u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}}{p^2}$$

der *Parameter* der Schraube bezeichnet wird, so wird die Achse in Linienkoordinaten dargestellt durch

$$(3) \quad p_1 : p_2 : p_3 : u_1 - k p_1 : u_2 - k p_2 : u_3 - k p_3.$$

In (2) bedeutet dabei, wie im folgenden immer,

$$(4) \quad \mathbf{a} | \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{a} | \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

das innere Produkt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , bzw. das innere Quadrat oder Quadrat der Länge des Vektors  $\mathbf{a}$ .

Die Komponenten der Beschleunigung  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  des Punktes  $(x_1, x_2, x_3)$  mit Bezug auf die Achsen  $(x_1, x_2, x_3)$  sind

$$\gamma_1 = \frac{d}{dt}(u_1 + p_2 x_3 - p_3 x_2) + p_2(u_3 + p_1 x_2 - p_2 x_1) - p_3(u_2 + p_3 x_1 - p_1 x_3), \text{ usw.},$$

oder ausgeführt, da  $(x_1, x_2, x_3)$  bei der Differenziation nach  $t$  als konstant zu betrachten sind<sup>2)</sup>

$$(5) \quad \gamma_1 = \frac{d u_1}{d t} + x_3 \frac{d p_2}{d t} - x_2 \frac{d p_3}{d t} + (p_2 u_3 - p_3 u_2) - (p_2^2 + p_3^2) x_1 + p_1 p_2 x_2 + p_1 p_3 x_3, \text{ usw.}$$

1) Die von der sonst meist üblichen abweichende Bezeichnung durch Indizes 1, 2, 3 für die drei Achsen wurde gewählt, weil sich damit viele Formeln im Texte wesentlich einfacher schreiben lassen.

2) Siehe z. B. G. Koenigs, Cinématique I, S. 134.



Setzt man in diesen Gleichungen  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ , so erhält man durch Auflösung nach  $(x_1, x_2, x_3)$  die Koordinaten des i. a. einzigen Punktes ohne Beschleunigung, des sog. *Beschleunigungspols*  $B$ , wir bezeichnen seine Koordinaten mit  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

2. Das Verschwinden der Determinante des Systems (5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(p_2^2 + p_3^2) & p_1 p_2 - \dot{p}_3 & p_1 p_3 + \dot{p}_2 \\ p_1 p_2 + \dot{p}_3 & -(p_3^2 + p_1^2) & p_2 p_3 - \dot{p}_1 \\ p_1 p_3 - \dot{p}_2 & p_2 p_3 + \dot{p}_1 & -(p_1^2 + p_2^2) \end{vmatrix} = 0, \quad \left[ \dot{p}_i = \frac{d p_i}{d t} \right]$$

bedeutet, daß

$$\dot{p}_1 : \dot{p}_2 : \dot{p}_3 = p_1 : p_2 : p_3,$$

d. h. also, daß der Vektor der Winkelgeschwindigkeit mit dem der Winkelbeschleunigung zusammenfällt; es ist bekannt, daß in diesem Fall nicht ein einzelner Beschleunigungspol, sondern eine *Beschleunigungsachse* existiert. Tatsächlich sind in diesem Falle die drei Gleichungen  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$  nur zwei linearen Gleichungen in  $(x_1, x_2, x_3)$  äquivalent und bestimmen daher eine Gerade; die Richtung dieser Achse läuft zu  $p$  normal.

Es ist leicht zu sehen, daß mit  $p \neq 0$  eine weitere Ausartung für den Ort der Punkte ohne Beschleunigung nicht eintreten kann.

3. Auf den gegebenen Körper denken wir uns nun ein System äußerer Kräfte wirkend, das nach  $S$  reduziert, die Komponenten  $(X_1 X_2 X_3)$  für die Einzelkraft  $X$  und  $(Y_1 Y_2 Y_3)$  für das Moment  $Y$  liefert, so daß

$$X = \sqrt{X|X}, \quad Y = \sqrt{Y|Y}.$$

Die Gleichungen für die Achse der Kraftschraube (Dynamie) lauten dann in Punktkoordinaten  $(x_1 x_2 x_3)$

$$(6) \quad \frac{Y_1 + X_2 x_3 - X_3 x_2}{X_1} = \frac{Y_2 + X_3 x_1 - X_1 x_3}{X_2} = \frac{Y_3 + X_1 x_2 - X_2 x_1}{X_3},$$

und ähnlich wie früher in Linienkoordinaten. Wie ist nun der Beschleunigungszustand des Körpers beschaffen, der diesem Kräftesystem entspricht?

Zur Beantwortung dieser Frage ziehen wir die Bewegungsgleichungen für den Körper heran, welche auf das Achsensystem  $(x_1 x_2 x_3)$  bezogen lauten

$$(7) \quad \begin{cases} m \left( \frac{d u_1}{d t} + p_2 u_3 - p_3 u_2 \right) = X_1 \\ m \left( \frac{d u_2}{d t} + p_3 u_1 - p_1 u_3 \right) = X_2 \\ m \left( \frac{d u_3}{d t} + p_1 u_2 - p_2 u_1 \right) = X_3 \end{cases} \quad (7') \quad \begin{cases} A_1 \frac{d p_1}{d t} - (A_2 - A_3) p_1 p_3 = Y_1 \\ A_2 \frac{d p_2}{d t} - (A_3 - A_1) p_3 p_1 = Y_2 \\ A_3 \frac{d p_3}{d t} - (A_1 - A_2) p_1 p_2 = Y_3. \end{cases}$$

Wir setzen nun die Werte der Differenzialquotienten  $\frac{du_1}{dt}, \dots, \frac{dp_1}{dt}, \dots$ , die wir daraus ableiten, in die Gleichungen (5) ein und erhalten

$$(8) \quad \gamma_1 = \frac{x_1}{m} - x_2 \left( \frac{Y_3}{A_3} + \frac{A_1 - A_2 - A_3}{A_3} p_2 p_3 \right) + x_3 \left( \frac{Y_2}{A_2} - \frac{A_1 - A_2 - A_3}{A_2} p_1 p_3 \right) - x_1 (p^2 - p_1^2), \text{ usw.}$$

Um nun statt mit den Beschleunigungen  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  mit reinen Strecken zu operieren, führen wir an ihrer Stelle die *reduzierten* Beschleunigungen  $(g_1, g_2, g_3)$  ein, indem wir (8) durch  $p^2$  dividieren und setzen

$$(9) \quad g_1 = \frac{\gamma_1}{p^2}, \quad g_2 = \frac{\gamma_2}{p^2}, \quad g_3 = \frac{\gamma_3}{p^2},$$

analog statt  $(X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3)$  die *reduzierten* Kräfte und die *reduzierten* Momente, wovon die ersteren gleichfalls den Charakter von reinen Strecken haben, durch

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \frac{X_1}{m p^2}, & \mathfrak{X}_2 = \frac{X_2}{m p^2}, & \mathfrak{X}_3 = \frac{X_3}{m p^2}; & \mathfrak{X} = \sqrt{\mathfrak{X} | \mathfrak{X}} = \frac{R}{m p^2} \\ \mathfrak{Y}_1 = \frac{L_1}{A_1 p^2}, & \mathfrak{Y}_2 = \frac{L_2}{A_2 p^2}, & \mathfrak{Y}_3 = \frac{L_3}{A_3 p^2}; & \mathfrak{Y} = \sqrt{\mathfrak{Y} | \mathfrak{Y}}. \end{cases}$$

Der Einfachheit halber werden wir meist diese Größen  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{Y}_1, \dots$  verwenden.

Ferner operieren wir statt mit  $(p_1 p_2 p_3)$  mit den Richtungskosinussen der Schraubenachse,

$$(11) \quad \lambda_1 = \frac{p_1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{p_2}{p}, \quad \lambda_3 = \frac{p_3}{p}, \quad \lambda | \lambda = 1.$$

Beachten wir endlich daß die in (8) auftretenden Verbindungen der Trägheitsmomente  $(A_1 A_2 A_3)$  die doppelten Trägheitsmomente in bezug auf die Koordinatenebenen sind, so setzen wir

$$(12) \quad A_2 + A_3 - A_1 = 2A'_1, \quad A_3 + A_1 - A_2 = 2A'_2, \quad A_1 + A_2 - A_3 = 2A'_3.$$

Durch Einführung dieser Bezeichnungen schreiben sich die Gleichungen (8) so:

$$(13) \quad \begin{cases} g_1 = \mathfrak{X}_1 - x_1 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) - x_2 \left( \mathfrak{Y}_3 - \frac{2A'_1 \lambda_1 \lambda_2}{A_3} \right) - x_3 \left( \mathfrak{Y}_2 + \frac{2A'_1 \lambda_1 \lambda_3}{A_2} \right) \\ g_2 = \mathfrak{X}_2 + x_1 \left( \mathfrak{Y}_3 + \frac{2A'_2 \lambda_1 \lambda_2}{A_3} \right) - x_2 (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) - x_3 \left( \mathfrak{Y}_1 - \frac{2A'_2 \lambda_2 \lambda_3}{A_1} \right) \\ g_3 = \mathfrak{X}_3 - x_1 \left( \mathfrak{Y}_2 - \frac{2A'_3 \lambda_1 \lambda_3}{A_2} \right) + x_2 \left( \mathfrak{Y}_1 + \frac{2A'_3 \lambda_2 \lambda_3}{A_1} \right) - x_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{cases}$$

Führen wir dann noch zur weiteren Abkürzung der Schreibweise die Bezeichnungen ein

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = a_{11}, & -\frac{2A'_1 \lambda_1 \lambda_2}{A_3} = a_{12}, & -\frac{2A'_1 \lambda_1 \lambda_3}{A_2} = a_{13} \\ -\frac{2A'_2 \lambda_1 \lambda_2}{A_3} = a_{21}, & \lambda_3^2 + \lambda_1^2 = a_{22}, & -\frac{2A'_2 \lambda_2 \lambda_3}{A_1} = a_{23} \\ -\frac{2A'_3 \lambda_1 \lambda_3}{A_2} = a_{31}, & -\frac{2A'_3 \lambda_2 \lambda_3}{A_1} = a_{32}, & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a_{33}, \end{cases}$$

wobei diese sämtlichen Größen  $a_{ik}$  für das vorliegende Problem konstant sind und die Beziehungen gelten

$$(15) \quad \begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= 2, \\ a_{23} + a_{32} &= -2\lambda_2\lambda_3, \quad a_{31} + a_{13} = -2\lambda_3\lambda_1, \quad a_{12} + a_{21} = -2\lambda_1\lambda_2, \end{aligned}$$

so folgen zur Bestimmung des von dem reduzierten System  $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3)$  erzeugten Beschleunigungspols  $B(\xi_1\xi_2\xi_3)$  die einfachen Gleichungen

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + (\mathfrak{Y}_3 + a_{12})\xi_2 - (\mathfrak{Y}_2 - a_{13})\xi_3 = \mathfrak{X}_1 \\ -(\mathfrak{Y}_3 - a_{21})\xi_1 + a_{22}\xi_2 + (\mathfrak{Y}_1 + a_{23})\xi_3 = \mathfrak{X}_2 \\ (\mathfrak{Y}_2 + a_{31})\xi_1 - (\mathfrak{Y}_1 - a_{32})\xi_2 + a_{33}\xi_3 = \mathfrak{X}_3, \end{cases}$$

welche die *Hauptgleichungen* für die folgenden Untersuchungen darstellen. In diesen Formeln ist alles verschwunden, was mit der Translation  $(u_1u_2u_3)$  der gegebenen Schraubebewegung zusammenhängt; alle aus diesen Gleichungen abgeleiteten, für das freie System geltenden Entwicklungen gelten also für *beliebige* Translationen (vgl. § 1).

Wenn wir endlich noch die folgenden Bezeichnungen benützen

$$(16) \quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = \eta_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 = \eta_2 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 = \eta_3, \end{cases}$$

so schreiben sich die Gleichungen (I) noch kürzer so:

$$(I^*) \quad \begin{cases} \mathfrak{Y}_3\xi_2 - \mathfrak{Y}_2\xi_3 + \eta_1 = \mathfrak{X}_1, \\ \mathfrak{Y}_1\xi_3 - \mathfrak{Y}_3\xi_1 + \eta_2 = \mathfrak{X}_2, \\ \mathfrak{Y}_2\xi_1 - \mathfrak{Y}_1\xi_2 + \eta_3 = \mathfrak{X}_3. \end{cases}$$

4. Wir bemerken, daß die Determinante des Systems (16) i. a. von Eins verschieden ist; die dadurch gegebene lineare Transformation stellt *keine* Bewegung dar. Diese Transformation — wir wollen sie mit  $T$  bezeichnen — ordnet jedem Punkte  $B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  einen Punkt  $B_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  zu; ihre Umkehrung bezeichnen wir in gebräuchlicher Weise mit  $T^{-1}$ .

Es ist leicht anzugeben, was diese Transformation  $T$  geometrisch bedeutet. Um dies zu erkennen, schreiben wir die erste Gleichung (16) so:

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + \frac{a_{12}}{2} + a_{21}\xi_2 + \frac{a_{13}}{2} + \frac{a_{31}}{2}\xi_3 + \frac{a_{12}}{2} - \frac{a_{21}}{2}\xi_2 - \frac{a_{31}}{2} - \frac{a_{13}}{2}\xi_3,$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutungen der Größen  $a_{ik}$  in (14)

$$\eta_1 = (1 - \lambda_1^2)\xi_1 - \lambda_1\lambda_2\xi_2 - \lambda_1\lambda_3\xi_3 + \frac{A_1 - A_2}{A_3}\lambda_1\lambda_2\xi_3 - \frac{A_3 - A_1}{A_2}\lambda_1\lambda_3\xi_3.$$

Wenn wir noch die beiden anderen hinzufügen, ergibt sich:

$$(17) \quad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \lambda_1 \lambda_1 \xi_1 + \left( \frac{A_1 - A_2}{A_3} \lambda_1 \lambda_2 \xi_2 - \frac{A_3 - A_1}{A_2} \lambda_1 \lambda_3 \xi_3 \right), \\ \eta_2 = \xi_2 - \lambda_2 \lambda_2 \xi_2 + \left( \frac{A_2 - A_3}{A_1} \lambda_2 \lambda_3 \xi_3 - \frac{A_1 - A_2}{A_3} \lambda_2 \lambda_1 \xi_1 \right), \\ \eta_3 = \xi_3 - \lambda_3 \lambda_3 \xi_3 + \left( \frac{A_3 - A_1}{A_2} \lambda_3 \lambda_1 \xi_1 - \frac{A_2 - A_3}{A_1} \lambda_3 \lambda_2 \xi_2 \right). \end{cases}$$

$\lambda|\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3$  ist die Projektion von  $\vec{SB} \equiv \xi$  auf die Achse der Winkelgeschwindigkeit durch  $S$ , die letzten Glieder sind die Komponenten des seitlichen Produktes („Vektorprodukts“) des Vektors  $\vec{SB}$  und eines Vektors  $\vec{S\delta} \equiv \sigma$  mit den festen Komponenten  $\left( \frac{A_2 - A_3}{A_1} \lambda_2 \lambda_3, \frac{A_3 - A_1}{A_2} \lambda_3 \lambda_1, \frac{A_1 - A_2}{A_3} \lambda_1 \lambda_2 \right)$ . — Die anderen Glieder auf der linken Seite von (I\*) stellen die Komponenten des seitlichen Produktes der Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  dar.

Die Formeln (17) lassen sich in folgende Vektorgleichung zusammenfassen:

$$(18) \quad T) \dots \eta = \xi - \lambda|\xi \cdot \lambda + \sigma \wedge \xi,$$

wenn durch  $\alpha \wedge b$  das seitliche Produkt der Vektoren  $\alpha$  und  $b$  bezeichnet wird.

Die Gleichungen (I\*) lauten mithin in Vektorform:

$$(19) \quad \mathfrak{x} = \eta \wedge \xi + \eta = \xi - \lambda|\xi \cdot \lambda + (\sigma + \eta) \wedge \xi.$$

Wir werden später noch die *transponierte* der linearen Transformation (16) benutzen, (d. h. jene, die durch Vertauschung der Zeilen und Kolonnen in dem Koeffizientenschema der  $a$  entsteht) und wollen sie mit  $\bar{T}$  bezeichnen; ihre Vektordarstellung lautet einfach

$$(20) \quad T) \quad \eta = \xi - \lambda|\xi \cdot \lambda - \sigma \wedge \xi = \xi - \lambda|\xi \cdot \lambda + \xi \wedge \sigma;$$

die Umkehrung dieser letzteren sei  $\bar{T}^{-1}$ .

Ohne damit etwas anderes als die geometrische Zuordnung ausdrücken zu wollen, sagen wir kurz, daß die Dynamie  $(\mathfrak{x}, \eta)$  einen Beschleunigungspol *erzeugt*, dessen Koordinaten durch die Gleichungen (I) gegeben sind.

### § 3. Konstruktion des Beschleunigungspols für eine gegebene Dynamie.

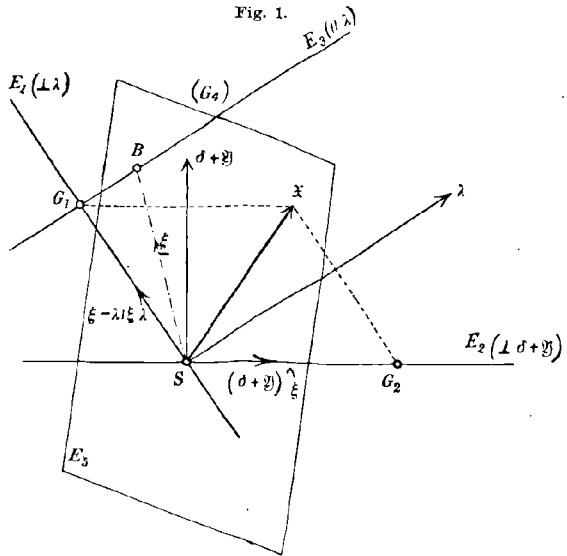
Die erste Frage, die wir nun lösen wollen, ist die:

Wenn die momentane Schraubenbewegung und die Dynamie  $(\mathfrak{x}, \eta)$  der eingepprägten Kräfte gegeben sind, das Beschleunigungssystem, also insbesondere den Beschleunigungspol  $B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  zu ermitteln.

Da die Beschleunigung des Schwerpunktes  $S$  mit  $\mathfrak{X}$  bekannt ist, — die reduzierte Beschleunigung ist  $\mathfrak{X}$  selbst — so wird nach § 1 die Beschleunigung jedes anderen Punktes des Systems bekannt sein, wenn wir den Beschleunigungspol kennen.

Die Koordinaten des gesuchten Beschleunigungspoles ergeben sich durch Auflösungen der Gleichungen (I) nach  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ; diese Auflösung ergibt unübersichtliche, undiskutierbare Ausdrücke. Es ist jedoch leicht, an der Hand der Vektorgleichung (19) eine Konstruktion zur direkten Ermittlung des Beschleunigungspoles anzugeben.

Nach (19) haben wir  $\mathfrak{X}$  in die zwei Komponenten  $\xi - \lambda|\xi \cdot \lambda$  und  $(\sigma + \mathfrak{Y})^{\wedge} \xi$  zu zerlegen, von denen die erste jedenfalls in einer Ebene  $E_1$  senkrecht zu  $\lambda$ , die zweite in einer Ebene  $E_2$  senkrecht zu dem Vektor  $\sigma + \mathfrak{Y}$  liegt (siehe Fig. 1, welche die Projektion auf die Ebene  $\{\sigma + \mathfrak{Y}, \lambda\}$  vorstellt); beide Vektoren gehen natürlich durch  $S$ . Da sie zur Summe



den Vektor  $\mathfrak{X}$  geben sollen, legen wir durch den Punkt  $\mathfrak{X}$  die zu  $E_2$  und  $E_1$  parallelen Ebenen, die  $E_1$  und  $E_2$  bzw. in den Geraden  $G_1$  und  $G_2$  schneiden. Die Ebenen des Büschels durch  $\mathfrak{X}$  schneiden dann aus den geradlinig begrenzten Vektorenbüscheln  $\{S, G_1\}$  und  $\{S, G_2\}$  die überhaupt möglichen Zerlegungen aus. Der Punkt  $\xi$  muß sonach in einer Ebene  $E_3$  liegen, die man durch  $G_1$  parallel zu  $\lambda$  legt.

Bezeichnen wir nun den kürzesten Abstand der Geraden  $G_2$  von  $S$  als Vektor mit  $k$ . Die Ebene  $E_4$  parallel zu  $k$  und  $\sigma + \mathfrak{Y}$  in einem solchen Abstände  $l$ , daß  $(\sigma + \mathfrak{Y})^{\wedge} l = k$ , schneidet die Ebene  $E_3$  in einer Geraden  $G_4$ , die den gesuchten Punkt  $B$  enthält; denn die Endpunkte aller Vektoren, die mit  $\sigma + \mathfrak{Y}$  seitlich multipliziert einen Vektor des Büschels  $\{S, G_2\}$  geben sollen, liegen in dieser Ebene  $E_4$ .

Die Ebene  $E_4$  schneidet ferner  $G_1$  in jenem Punkte, der die Zerlegung von  $\mathfrak{X}$  in die zwei Komponenten  $\xi - \lambda|\xi \cdot \lambda$  und  $(\sigma + \mathfrak{Y})^{\wedge} \xi$  nun vollständig bestimmt. Die Ebene  $E_5$  durch  $S$  senkrecht zu dem letzteren der eben gefundenen Vektoren schneidet  $G_4$  in dem gesuchten Punkte  $B$ .

Es ist sogleich zu sehen, daß diese Konstruktion nur dann unbestimmt wird, wenn  $\sigma + \mathfrak{P}$  zu  $\lambda$  parallel wird, das ist aber gerade der in § 2, Art. 2 betrachtete besondere Fall, in welchem eine Beschleunigungsachse auftritt.

#### § 4. Folgerungen aus den Gleichungen I.

1. Der in den Größen  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  einerseits und  $(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{Y}_1, \dots)$  andererseits lineare (nicht homogene) Charakter der Gleichungen (I) führt zu einer Reihe von einfachen Sätzen über die Lage der Beschleunigungspole für gewisse Mannigfaltigkeiten von Dynamen, von denen wir die wichtigsten hier zusammenstellen wollen.

Wir erhalten zunächst aus den Gleichungen (I) durch Multiplikation mit  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  bzw. und unter Berücksichtigung von (15)

$$(21) \quad \mathfrak{X}_1 \xi_1 + \mathfrak{X}_2 \xi_2 + \mathfrak{X}_3 \xi_3 = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3)^2$$

oder kürzer

$$\mathfrak{X} | \xi = \xi | \xi - (\lambda | \xi)^2.$$

In bezug auf die  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  erhalten wir somit eine Fläche zweiter Ordnung, von welcher man leicht verifiziert, daß die Determinante der quadratischen Glieder identisch verschwindet. Diese Gleichung sagt folgendes aus:

**Satz I.** *Die Beschleunigungspole, welche von der Schar der  $\infty^3$  Dynamen erzeugt werden, die dadurch gekennzeichnet sind, daß sie einem festen Werte von  $\mathfrak{X}$  ( $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3$ ) und beliebigem  $\mathfrak{P}$  ( $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3$ ) entsprechen, liegen auf einem elliptischen Paraboloid, das durch  $\mathfrak{X}$  und die Richtung  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$  der gegebenen Schraubenachse vollständig bestimmt ist, das aber als ganzes von den mechanischen Konstanten des Körpers (u. a. von der Lage und Größe der Hauptträgheitsachsen) vollständig unabhängig ist.*

Dieses Paraboloid hat die durch  $\mathfrak{X}$  und die Richtung  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$  bestimmte Ebene zur Symmetrieebene, und seine reelle Hauptachse ist zur Richtung  $\lambda$  normal; ihre Achse schneidet  $\mathfrak{X}$  im Halbierungspunkt  $\frac{\mathfrak{X}}{2}$ . Das Paraboloid kann auf einfache Weise wie folgt erhalten werden. (Siehe Fig. 2).

Wir ziehen einen beliebigen Strahl  $\varepsilon$  durch  $S$  und suchen den zweiten Schnittpunkt  $B$  ( $S$  selbst ist der erste) von  $\varepsilon$  mit dem Paraboloid (21). Bezeichnen wir mit  $\xi = \overline{SB} = \sqrt{\xi | \xi}$  die Entfernung des Punktes  $B$  von  $S$  und die Winkel  $(\mathfrak{X} \varepsilon) = \beta$ ,  $(\lambda \varepsilon) = \alpha$ , dann schreibt sich (21):

$$\mathfrak{X} \cdot \xi \cos \beta = \xi^2 - \xi^2 \cos^2 \alpha = \xi^2 \sin^2 \alpha,$$

oder ( $\xi = 0$  und)

$$(22) \quad \frac{\mathfrak{X} \cos \beta}{\sin^2 \alpha} = \xi.$$

Wir bekommen also den auf dem Strahl  $\varepsilon$  gelegenen Punkt der Fläche, wenn wir durch den Endpunkt  $\mathfrak{X}$  von  $(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$  eine Ebene senkrecht zu  $\varepsilon$  legen, die  $\varepsilon$  in  $T$  und  $\lambda$  in  $U$  schneidet, so daß  $ST = \mathfrak{X} \cos \beta$  und  $SU = \frac{\mathfrak{X} \cos \beta}{\sin \alpha}$ ; die Normalebene durch  $U$  zu  $\lambda$  schneidet dann wegen

(22) auf  $\varepsilon$  den gesuchten Punkt  $B$  aus. Der Schnitt des Paraboloides (21) mit der Ebene  $\{\mathfrak{X}, \lambda\}$  ist durch die Parabel in Fig. 2 angedeutet.

2. Unter den  $\infty^3$  Dynamen  $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$  kommt auch die Einzelkraft  $\mathfrak{X}$  vor, für sie ist also  $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Y}_3 = 0$ . In diesem Fall ist der Beschleunigungspol gegeben durch

$$\mathfrak{x}_1 = \eta_1, \quad \mathfrak{x}_2 = \eta_2, \quad \mathfrak{x}_3 = \eta_3;$$

wir bezeichnen ihn mit  $B^*$ .

Zu seiner Auffindung dient ebenfalls die in § 3 erklärte Konstruktion, bei der nur  $\sigma$  an die Stelle von  $\sigma + \mathfrak{Y}$  tritt. Der Übergang von  $\mathfrak{X}$  zu  $B^*$  ist äquivalent der oben mit  $T^{-1}$  bezeichneten Transformation.

3. Den  $\infty^3$  in Satz I gekennzeichneten Dynamen entsprechen die  $\infty^3$  Punkte der Fläche (21). Jeder Punkt derselben wird somit durch  $\infty^1$  Dynamen dieser Schar erzeugt, und wir fragen nach dem Ort der Achsen dieser  $\infty^1$  Dynamen. In den Gleichungen (1\*) sind also  $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  und daher auch  $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$  konstant zu halten.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich dann, wenn wir mit  $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3$  multiplizieren und addieren:

$$(23) \quad (\mathfrak{X} - \eta) | \mathfrak{Y} \equiv (\mathfrak{x}_1 - \eta_1) \mathfrak{Y}_1 + (\mathfrak{x}_2 - \eta_2) \mathfrak{Y}_2 + (\mathfrak{x}_3 - \eta_3) \mathfrak{Y}_3 = 0.$$

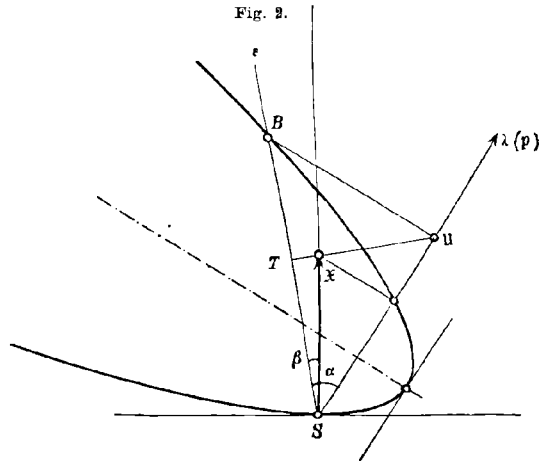
Sämtliche  $\mathfrak{Y}$ , die mit dem festen  $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$  zusammen die  $\infty^1$  Dynamen bestimmen, welche dem Punkte  $B(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  zugeordnet sind, liegen mithin in einer Ebene durch  $S$ , welche den Punkt  $B$  selbst enthält und zum Vektor  $\mathfrak{X} - \eta$  normal steht; die Endpunkte der Strecken  $\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3)$ , wenn sie in  $S$  angesetzt werden, liegen in einer Geraden. Denn aus (1\*) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$(24) \quad \mathfrak{Y} | \mathfrak{Y} \cdot \xi | \xi - (\mathfrak{Y} | \xi)^2 = c^2,$$

wenn

$$c^2 = (\mathfrak{X} - \eta) (\mathfrak{X} - \eta)$$

bedeutet.



Wenn daher  $C$  den Endpunkt des Vektors  $\mathbf{c}$  bedeutet, so daß  $\vec{SC} = \mathbf{c}$ , und wenn irgend ein Strahl in der Ebene (23) mit  $\xi$  den Winkel  $\varphi$  einschließt, so bedeutet (24)

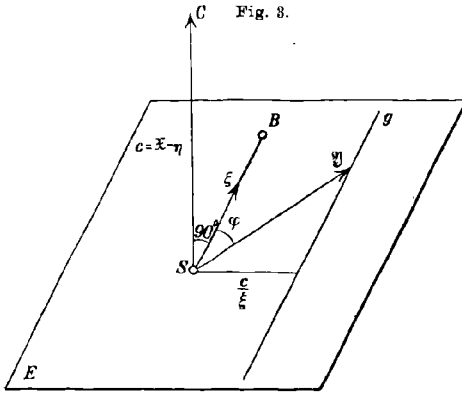
$$\mathfrak{Y}^2 \cdot \xi^2 - \mathfrak{Y}^2 \xi^2 \cos^2 \varphi = c^2$$

also

$$(25) \quad \mathfrak{Y} \sin \varphi = \frac{c}{\xi}.$$

Die Gerade  $g$ , die der Endpunkt von  $\mathfrak{Y}$  in der Ebene (23) durchläuft, liegt parallel zu  $\vec{SB} = \xi$  in einem Abstände  $\frac{c}{\xi}$ , so daß  $\xi \wedge \mathfrak{Y} = \mathbf{x} - \eta$  (Fig. 3).

Wir erhalten somit:



**Satz II.** Die reduzierten Momente der  $\infty^1$  Dynamen, die bei festem  $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$  einen gegebenen Punkt  $B(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  des Paraboloids (21) als Beschleunigungspol erzeugen, bilden einen geradlinig begrenzten Vektorenbüschel mit dem Scheitel  $S$ .

Die Achsen bilden eine Schar von geraden Linien, die einen parabolischen Zylinder umhüllen.

4. Der unendlich ferne Punkt des Paraboloids (21) entspricht nun gerade jener Richtung  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3$ , für die der in § 2, Art. 2 bezeichnete Ausnahmefall eintritt — denn nur für ihn verschwindet die Determinante des Gleichungssystems (I). Diese Gleichungen (I) sind dann nur zwei linearen Gleichungen äquivalent, die den Ort der Punkte mit verschwindender Beschleunigung bestimmen; wir erhalten somit eine Beschleunigungsachse. Ihre Richtung ist parallel der reellen Achse des Paraboloids (21).

5. Nun wollen wir noch einfach unendliche Mannigfaltigkeiten von Dynamen betrachten.

Hält man  $\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3)$  fest und läßt  $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$  frei, so folgen gemäß den Gleichungen (I) alle Punkte des Raumes als Beschleunigungspole. Schränkt man aber bei festem  $\mathfrak{Y}$  die Veränderlichkeit von  $\mathfrak{X}$  so ein, daß die Verhältnisse  $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$  dieselben bleiben,  $\mathfrak{X}$  also einen Strahl durch  $S$  durchläuft, so ist der geometrische Ort der Beschleunigungspole, die von den dadurch gekennzeichneten  $\infty^1$  Dynamen erzeugt werden, wieder eine Gerade durch  $S$ , deren Gleichungen in Punktkoordinaten  $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  so lauten:

$$(26) \quad \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 = (\eta_1 + \mathfrak{Y}_3 \xi_2 - \mathfrak{Y}_2 \xi_3) : (\eta_2 + \mathfrak{Y}_1 \xi_3 - \mathfrak{Y}_3 \xi_1) : (\eta_3 + \mathfrak{Y}_2 \xi_1 - \mathfrak{Y}_1 \xi_2)$$



Wir erhalten somit den

**Satz III.** Die  $\infty^1$  Beschleunigungspole, entsprechend den  $\infty^1$  Dynamen  $\mathfrak{Y} = \text{konst.}$ ,  $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 = \text{konst.}$ , liegen in einer geraden Linie durch  $S$ .

Die Achsen der Dynamen sind eine Schar von parallelen Geraden in einer Ebene.

5. Umgekehrt, wenn wir  $\mathfrak{X}(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)$  festlassen und  $\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3)$  so variieren, daß die Verhältnisse  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3 = \text{konst.} = \tau$  bleiben<sup>1)</sup>, so schreiben wir in (I)  $\tau \mathfrak{Y}_1, \tau \mathfrak{Y}_2, \tau \mathfrak{Y}_3$  für  $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3$  und erhalten durch Multiplikation mit  $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Y}_3$  wieder die Gleichung (23), in der aber  $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  die laufenden Koordinaten sind, und die wir daher so schreiben:

$$(27) \quad \mathfrak{X} | \mathfrak{Y} - \xi_1 \cdot a_{.1} | \mathfrak{Y} - \xi_2 \cdot a_{.2} | \mathfrak{Y} - \xi_3 \cdot a_{.3} | \mathfrak{Y} = 0,$$

wobei natürlich

$$(28) \quad a_{.1} | \mathfrak{Y} = a_{11} \mathfrak{Y}_1 + a_{21} \mathfrak{Y}_2 + a_{31} \mathfrak{Y}_3$$

bedeutet.

Diese Gleichung sagt in Verbindung mit (21) folgendes aus:

**Satz IV.** Die  $\infty^1$  Beschleunigungspole, die von den  $\infty^1$  Dynamen  $\mathfrak{X} = \text{konst.}$ ,  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3 = \text{konst.}$  erzeugt werden, liegen auf einer ebenen Kurve zweiter Ordnung, nämlich auf dem Schnitt der Ebene (27) mit dem elliptischen Paraboloid (21).

Die Achsen dieser Dynamen bilden wieder eine Schar von parallelen Geraden in einer Ebene.

Die Ebene (27) geht durch den oben (Ende des Art. 1 dieses §) bestimmten Punkt  $B^*$  hindurch. Den  $\infty^2$  Strahlen  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3$  durch  $S$  entsprechen so die  $\infty^2$  Ebenen (27), d. h. also die  $\infty^2$  von diesen und der Fläche (21) bestimmten Kegelschnitte.

Die Richtung der Normalen der Ebene (27) ergibt sich, wenn man auf einen beliebigen Punkt  $\mathfrak{Y}$  die in § 2 erklärte transponierte Substitution  $T$  ausübt und den so erhaltenen Punkt mit  $S$  verbindet.

Wir erhalten somit endlich

**Satz V.** Der Beschleunigungspol  $B$ , den eine gegebene Dynamie  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  erzeugt, wird gefunden, indem man die Gerade (26) durch  $S$  mit der Ebene (27) durch  $B^*$  zum Schnitt bringt. Dieser Schnittpunkt liegt natürlich auf dem Paraboloid (21).

### § 5. Bestimmung der Dynamen zu einem gegebenen Punkt als Beschleunigungspol.

Im vorigen Paragraphen haben wir schon die Beziehungen entwickelt, welche zwischen gewissen Mannigfaltigkeiten von Dynamen und

1) Mit  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3 = \text{konst.}$  folgt natürlich auch  $\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3 = \text{konst.}$

den von diesen erzeugten Beschleunigungspolörtern bestehen. Wir kommen nunmehr dazu, das folgende allgemeinere Problem zu behandeln:

Es ist ein fester Punkt  $B(a_1, a_2, a_3)$  gegeben, man soll alle Dynamen bestimmen, die ihn als Beschleunigungspol erzeugen. Es sind mithin alle Dynamen zu suchen, deren Koordinaten  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{Y}_1, \dots$  die drei Gleichungen (I\*) befriedigen, die wir nun so schreiben:

$$(29) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 & + \mathfrak{Y}_2 a_3 - \mathfrak{Y}_3 a_2 = b_1 \\ \mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_1 a_3 & + \mathfrak{Y}_3 a_1 = b_2 \\ \mathfrak{X}_3 + \mathfrak{Y}_1 a_2 - \mathfrak{Y}_2 a_1 & = b_3, \end{cases}$$

wobei in gewohnter symbolischer Schreibweise

$$\{a\}T = \{b\}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir zunächst durch Multiplikation mit  $(a_1, a_2, a_3)$  die folgende:

$$(36) \quad \mathfrak{X} \cdot a = a \mid b = \text{konst.}$$

Die letztere Gleichung sagt aus:

**Satz VI.** *Die Endpunkte der in  $S$  angesetzten reduzierten Kräfte, die  $B(a_1, a_2, a_3)$  als Beschleunigungspol erzeugen, liegen in einer Ebene, die auf  $\overline{SB}$  senkrecht steht und deren senkrechter Abstand von  $S$  durch*

$$\frac{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}{a} = a \sin \alpha,$$

wenn wieder  $a = \sqrt{a \mid a}$ ,  $\sphericalangle(a\lambda) = \alpha$  gesetzt wird, gegeben ist. In Analogie mit einer vom Verfasser früher gebrauchten Bezeichnung nennen wir ein solches Gebilde einen *ebenbegrenzten Kräftebündel*.<sup>1)</sup>

Da es im Raum  $\infty^6$  Dynamen und  $\infty^3$  Punkte gibt, so wird jeder Punkt von  $\infty^3$  Dynamen als Beschleunigungspol erzeugt. Es gilt dann der Satz:

**Satz VII.** *Die Achsen der  $\infty^3$  Dynamen, welche einen Punkt  $B$  als Beschleunigungspol erzeugen, bilden einen Komplex zweiten Grades.*

Um die Gleichung dieses Komplexes zu erhalten, führen wir statt der Schraubenkoordinaten

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3$$

die gewöhnlichen Linienkoordinaten ihrer Achse ein:

$$\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{E}_2 : \mathfrak{E}_3 : \mathfrak{U}_1 : \mathfrak{U}_2 : \mathfrak{U}_3,$$

welche die quadratische Identität befriedigen

$$\mathfrak{E} \mid \mathfrak{U} = 0,$$

1) Siehe diese Zeitschrift, Bd. 60 (1912), S. 154.

wir erreichen dies, indem wir setzen:

$$(31) \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 : \mathfrak{Y}_1 - k\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_2 - k\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{Y}_3 - k\mathfrak{X}_3$$

oder umgekehrt

$$(32) \quad \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Y}_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \eta_1 + k\xi_1 : \eta_2 + k\xi_2 : \eta_3 + k\xi_3,$$

wobei  $k$  den Parameter der Schraube

$$k = \frac{\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{X}}$$

bedeutet.

Wir setzen also:

$$(33) \quad \mathfrak{X}_i = \sigma \xi_i, \quad \mathfrak{Y}_i = \sigma(\eta_i + k\xi_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

damit werden die Gleichungen (26)

$$(34) \quad \xi_1 + \eta_2 a_3 - \eta_3 a_2 + k(\xi_2 a_3 - \xi_3 a_2) = \frac{b_1}{\sigma}$$

nebst zwei analogen, die wir daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes erhalten. Die Elimination von  $k$  und  $\frac{1}{\sigma}$  aus diesen zwei Gleichungen liefert die gesuchte Gleichung des Komplexes in der Form

$$(35) \quad \begin{vmatrix} \xi_1 + \eta_2 a_3 - \eta_3 a_2 & \xi_2 a_3 - \xi_3 a_2 & b_1 \\ \xi_2 + \eta_3 a_1 - \eta_1 a_3 & \xi_3 a_1 - \xi_1 a_3 & b_2 \\ \xi_3 + \eta_1 a_2 - \eta_2 a_1 & \xi_1 a_2 - \xi_2 a_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt und reduziert in der einfachen Gestalt

$$(36) \quad \mathfrak{r} | a \cdot \mathfrak{r} | b - \mathfrak{r} | \mathfrak{r} \cdot a | b - a | b [a \mathfrak{r} \mathfrak{r}] = 0,$$

wenn  $[a \mathfrak{r} \mathfrak{r}]$  das äußere Produkt der drei Vektoren  $a, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}$ , d. h. die Determinante

$$(37) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

bedeutet.

Aus den Gleichungen (34) erkennt man sofort, daß die  $\infty^2$  Dynamen, die einem festen Werte des Parameters  $k$  entsprechen, je eine lineare Kongruenz bilden. Der quadratische Komplex (36) gehört mithin zu jenen, die sich aus linearen Kongruenzen zusammensetzen lassen.

(Fortsetzung folgt.)

## Über Gleichungswagen.

Von P. RIEBESELL in Hamburg.

### § 1. Bedeutung der Gleichungswagen.

Nachdem festgestellt war, daß die Gleichungen vom dritten und vierten Grade nur mit relativ komplizierten Methoden und die Gleichungen höheren Grades allgemein algebraisch nicht mehr auflösbar sind, bemühte man sich, *Näherungsmethoden* zu finden, die mit Hilfe einfacher algebraischer Operationen wenigstens die reellen Wurzeln der Gleichung liefern. Ein zweiter Weg war der *graphische*, der mit geometrischen Hilfsmitteln die Lösung gestattete. Er ist hauptsächlich von d'Ocagne in der Nomographie ausgebaut. Eine dritte Methode benutzt *physikalische* Gesetze, auf ihr beruhen die Rechenmaschinen und Integratoren sowie die reinphysikalischen Apparate, die *Gleichungswagen*, von denen hier die Rede sein soll. Da die verschiedensten physikalischen Kräfte zur Anwendung kommen, ist eine Erweiterung des Begriffs „*Wage*“ erforderlich, und sie soll in einer im Anschluß an Skutsch<sup>1)</sup> verallgemeinerten Form definiert werden als „eine Vorrichtung, die für die Wirkung willkürlich zu wählender Größen eingerichtet ist und benutzt wird, um Beziehungen zwischen diesen Größen aus einer Nullstellung abzuleiten“. Diese Definition umfaßt die verschiedensten Apparate, mit denen nicht nur die *reellen* sondern auch die *komplexen* Wurzeln der Gleichungen beliebigen Grades mit beliebiger Annäherung erhalten werden können.

### § 2. Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Literatur über diesen Gegenstand ist bis 1902 von Mehrke zusammengestellt worden.<sup>2)</sup> Seit dieser Zeit sind zahlreiche neue Methoden erdonnen, die das Gebiet von einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten gestatten. Außerdem lassen sich an den Gleichungen mit einfachen Hilfsmitteln Umformungen vornehmen, die bedeutende Vereinfachungen der Gleichungswagen zur Folge haben und auch ein Auffinden der komplexen Wurzeln ermöglichen. Die vorliegende Arbeit soll außerdem die Möglichkeit der Anwendung allgemeinerer physikalischer und mathematischer Prinzipien dartun. Es kam weniger darauf

1) Diese Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 47 (1902), S. 85.

2) Encykl. d. math. Wiss. I, 2, Numerisches Rechnen.

an, exakt arbeitende Apparate zu konstruieren als *Methoden für ihre Konstruktion* anzugeben. Die Untersuchung der Anwendbarkeit und Brauchbarkeit der maschinellen Vorrichtungen gehört in ein anderes Gebiet.

§ 3. Die mathematischen Grundlagen.

Allgemein ist bisher die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form benutzt worden:

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Die Gleichungswagen, meist mechanischer Natur, die diese Gleichungsform zugrunde legen, werden so eingerichtet, daß die angreifenden Kräfte oder ihre Hebelarme den Koeffizienten bzw. Potenzen von  $x$  proportional sind. Zuweilen kann auch, besonders für kleine  $x$ , die Substitution  $z = \frac{1}{x}$  benutzt werden, wodurch die Gleichung folgende Form erhält:

$$(2) \quad f(z) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + a_n = 0.$$

Außerordentliche Vorteile für die Konstruktion der Wagen bietet nun die Einführung einer Hilfsfunktion

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \nu),^1)$$

wo die  $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$  beliebig gewählt werden können. Man kann dann mit elementaren Hilfsmitteln immer folgende Partialbruchzerlegung vornehmen:

$$(3) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A_0 + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{x - \beta} + \dots + \frac{A_n}{x - \nu} = 0,$$

wo

$$A_1 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \dots$$

Es sind hier wieder Kräfte bzw. Hebelarme zu suchen, die den Koeffizienten proportional, bzw. den Größen  $x - \alpha, x - \beta \dots x - \nu$  umgekehrt proportional sind. Dadurch daß die höheren Potenzen von  $x$  verschwinden, wird die Vereinfachung bzw. Ermöglichung der Apparatur erreicht.

Auch hier ist es häufig zweckmäßig, die Substitution  $x = \frac{1}{z}$  einzuführen, wodurch man erhält:

$$(4) \quad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = A_0 + \frac{A_1 z}{1 - \alpha z} + \frac{A_2 z}{1 - \beta z} + \dots + \frac{A_n z}{1 - \nu z} = 0.$$

Eine weitere Ausgangsform liefert die Gleichung:

$$x = r \cdot \cos \varphi,$$

1) Vgl. Lucas, *Compt. rend.* 1888; Russell u. Alty, *Phil. Mag.* 1909. *Zeitschrift f. Mathematik u. Physik.* 63. Band, 1914. Heft 3.

durch welche folgende Form entsteht:

$$(5) \quad f(\varphi) = r_0 + r_1 \cos \varphi + r_2 \cos 2\varphi + \dots + r_n \cos n\varphi = 0.$$

Letztere wird hauptsächlich bei Apparaten mit Drehvorrichtungen verwendet werden können.

### § 4. Gewöhnliche Wagen.

Eine gewöhnliche Wage hat zuerst Bérard<sup>1)</sup> benutzt, die von Lalanne<sup>2)</sup> vervollkommenet ist. Das Prinzip ist aus Fig. 1 zu entnehmen, in der nur die eine Hälfte ausgeführt ist.

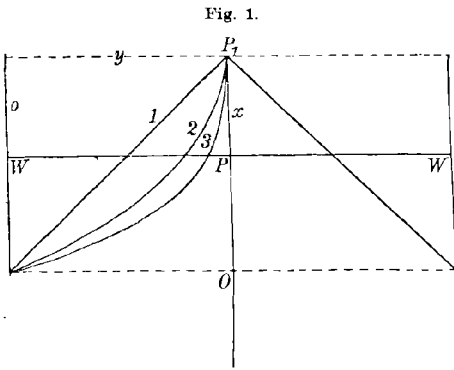


Fig. 1.

Durch Verschiebung des beweglichen Wagebalkens  $W$  auf der festen Achse  $OP_1$  werden die den Koeffizienten proportionalen Gewichte, die bzw. an den Kurven  $y = x^0, y = x^1, y = x^2 \dots$  gleiten, in die Entfernungen  $x^0, x^1, x^2 \dots$  vom Drehpunkt gebracht, wodurch die Momente  $\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2 \dots$  erzeugt werden, die mit den negativen auf der andern Seite ins Gleichgewicht gebracht werden.

Eine einfachere Form ergibt sich, wenn man nicht das feste Kurvensystem an dem beweglichen Wagebalken vorbeischiebt, sondern das ganze, aus Draht konstruierte Kurvensystem als um  $P_1$  beweglichen Wagebalken baut und den Wagebalken  $W$  als Schiene oder „Wurzelsucher“ längs der Achse verschiebt. Jedenfalls ist die Befestigung der Gewichte, die als Reiter auf den Kurven gleiten können, bedeutend einfacher.

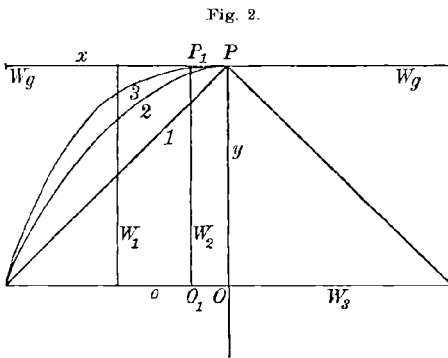


Fig. 2.

Eine ähnliche Form der Wage erhält man durch Befestigung von *Spiralfedern*, die proportional ihrer Länge wirken. Die Potenzen von  $x$  werden wieder durch die Kurven  $y = x, y = x^2 \dots$  nach Fig. 2 konstruiert, in der wieder nur eine Hälfte ausgeführt ist. Ist das Kurvensystem bei  $P$  fest, und werden die Federn

1) Bérard, Opuscles mathématiques, 1810.  
 2) Lalanne, Compt. rend. 1840.

parallel  $W_1$  wirkend gedacht, so sind die Momente  $M_1 = x^0 \cdot x$ ,  $M_2 = x^1 \cdot x$ ,  $M_3 = x^2 \cdot x \dots$ . Wirken dagegen die Spiralfedern alle in  $P_1$ , wo  $PP_1 = 1$  ist, so daß die  $y$ -Achse  $P_1O_1$  ist und wird der Wurzelsucher  $W_3$  mit den Kurven am Wagebalken vorbeigeschoben, so sind die Momente  $M_1 = x^0$ ,  $M_2 = x^1$ ,  $M_3 = x^2 \dots$ .

Die Koeffizienten sind — wenn auch in der Praxis schwierig — durch entsprechende Verkürzungen der Federn anzubringen. Einfacher gestaltet sich die Berücksichtigung der Koeffizienten, wenn der Nullpunkt des Kurvensystems nicht in  $P$  liegt, sondern jede Kurve ihren Nullpunkt im Abstände  $a_1$  bzw.  $a_2 \dots$  von  $PO$  hat, und das Kurvensystem mit dem Wurzelsucher  $W$  am Wagebalken vorbeigeschoben wird, während die Federn durch seitliche Führungen veranlaßt werden, immer senkrecht zum Wagenbalken auf den Kurven zu gleiten, wie in Fig. 3.

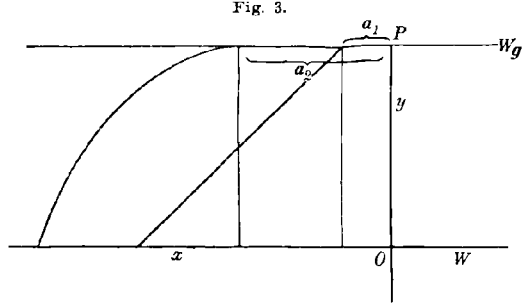


Fig. 3.

Eine andere Form der direkten Wage ist von Kann nach Fig. 4 konstruiert.<sup>1)</sup> Auf einem um  $AB$  drehbaren Brett sind die Kurven  $y = x$ ,  $y = x^2 \dots$  eingeschnitten. Die den Koeffizienten proportionalen Gewichte können so angehängt werden, daß ihre durch das Brett hindurchragenden Köpfe mit Hilfe des Wurzelsuchers  $W$  in der Richtung der  $x$ -Achse verschoben werden können und auf den Kurven gleiten. Die Momente  $a_1x$ ,  $a_2x^2 \dots$  werden durch Verschiebung des Wurzelsuchers ins Gleichgewicht gebracht.

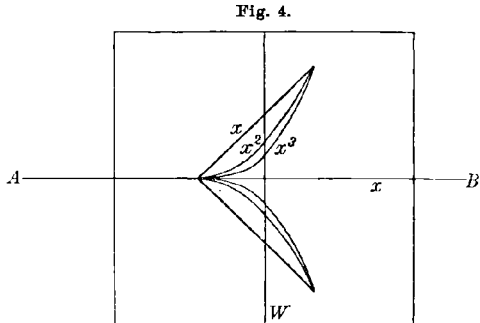


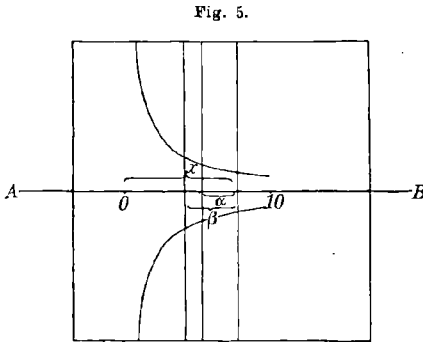
Fig. 4.

### § 5. Die Partialbruchzerlegung.

Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Apparate vereinfachen sich durch Anwendung der Gleichung (3). Dabei ist zu bemerken, daß die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma \dots$  ganz willkürlich gewählt werden dürfen, so daß sie dem jeweiligen Apparat angepaßt werden können. Die Vorrichtungen der

1) Diese Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 48 (1903), S. 266.

Fig. 1—4 vereinfachen sich dahin, daß entweder eine Kurvenart von der Form  $y = \frac{1}{x}$  in zahlreichen Exemplaren auf der Achse in den bezüglichen Abständen  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  befestigt wird oder daß nur eine einzige Kurve dieser Art genommen wird und zahlreiche Wurzelsucher in den Abständen  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  vorbeibewegt werden. So wurde für den Kannschen



Apparat nach Fig. 5 die Kurve  $y = \frac{10}{x}$  gezeichnet. Die Wurzelsucher wurden auf zwei an den Seiten des Brettes befindlichen Schienen, auf denen ihre Entfernung untereinander verändert werden konnte, verschoben.

Der Vorteil der Partialbruchzerlegung wird hauptsächlich bei der Berücksichtigung der *komplexen Wurzeln* sichtbar.

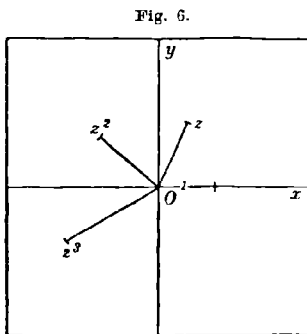
Als erster hat Collignon<sup>1)</sup> diese Wurzeln einer Betrachtung unterzogen, indem er den Wagebalken des Lalanneschen Apparates zu einer Ebene erweiterte. Setze ich

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich:

$$(6) \quad a_0 \cdot r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + a_1 r^{n-1} (\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi) + \dots + a_n = 0.$$

Die einzelnen Summanden sind auf der  $z$ -Ebene darstellbar, und wenn die Ebene im Nullpunkt unterstützt wird und den Koeffizienten entsprechende Gewichte angehängt werden, ergibt sich für die Gleichgewichtslage, d. h. wenn  $O$  Schwerpunkt ist,  $z$  als Lösung der Gleichung (vgl. Fig. 6).



Für die praktische Verwertung, über die Collignon keine Angaben macht, besteht die Schwierigkeit darin, daß bei willkürlicher Änderung von  $z$  die übrigen Gewichte in den bestimmten Entfernungen  $w_2 = z^2$ ,  $w_3 = z^3 \dots$  anzuhängen sind; es wären also die verschiedenen  $w$ -Ebenen auf die  $z$ -Ebene

abzubilden. Das ist recht kompliziert und jedenfalls durch mechanische Vorrichtungen schwer ausführbar.

1) *Traité de mécanique*, 1873, Bd. 2, S. 347.



Einfacher gestalten sich die Abbildungen für die Funktion

$$g(z) = A_0 + \frac{A_1}{z - \alpha} + \frac{A_2}{z - \beta} + \dots,$$

da hier nur Abbildungen durch reziproke Radien in Frage kommen.

In der Fig. 7 seien  $P_1, P_2, P_3$  die Punkte  $z - \alpha, z - \beta, z - \gamma$ , die auf einer Parallelen  $g$  zur reellen Achse liegen.  $Q_1, Q_2, Q_3$ , ihre Abbildungen durch reziproke Radien, liegen bekanntlich auf einem Kreise, der durch den Mittelpunkt der Abbildung geht und dessen Tangente in diesem Punkt zu  $g$  parallel ist.<sup>1)</sup> Man findet ihn also einfach, sobald ein Punkt  $Q_1$  mit Hilfe der Gleichung  $OQ_1 \cdot OP_1 = 1$  bestimmt ist. Das bei der Abbildung erforderliche Herumklappen um die reelle Achse kann fortbleiben, da dadurch in bezug auf die Gleichgewichtslage der Ebene nichts geändert wird.

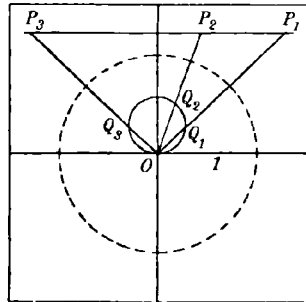


Fig. 7.

### § 6. Die Drehwagen.

Nicht die Nulllage sondern eine bestimmte Gleichgewichtslage benutzt Exner<sup>2)</sup> bei seiner Wage, die in Fig. 8 wiedergegeben ist.

$2n + 1$  Rollen von der Gestalt der Kurven  $L_0, L_1, L'_1, L_2, L'_2 \dots$  sind an derselben horizontalen Drehungsachse angebracht. Die den Koeffizienten. entsprechenden Gewichte  $a_n, a_{n-1}, \dots$  werden an Fäden der Rollen  $L_0, L_1 \dots$  bzw.  $L'_1 \dots$  befestigt. Dann soll nach Drehung des Systems um einen in Bogenmaß gemessenen Winkel  $x$  Gleichgewicht herrschen, es müssen also die Hebelarme der Gewichte proportional  $x, x^2, x^3 \dots$  sein. Es gilt also, die Kurven  $L_0, L_1 \dots$  so zu konstruieren,

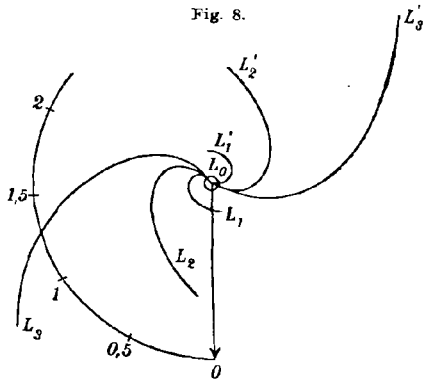


Fig. 8.

daß sie die Enveloppen von Geraden sind, deren Abstand vom Anfangspunkt eine gegebene Funktion des Winkels dieses Abstandes mit der Koordinatenachse ist. Die Gleichung dieser Kurven wird in etwas anderer Form als bei Exner nach Fig. 9 folgendermaßen gefunden.

1) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2.

2) Jahresbericht des k. k. Staatsgymnasiums in Wien IX, 1881.

Die Gleichung der Enveloppe lautet allgemein:

$$(7) \quad f(X, Y, x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

In unserm Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} X \cdot \cos x + Y \sin x - x^n &= 0 \\ -X \cdot \sin x + Y \cdot \cos x - nx^{n-1} &= 0; \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$(8) \quad \begin{cases} X = x^n \cdot \cos x - nx^{n-1} \sin x \\ Y = x^n \cdot \sin x + nx^{n-1} \cos x, \end{cases}$$

die als Parameterdarstellung der Kurve gelten können. In Polarkoordinaten erhält man:

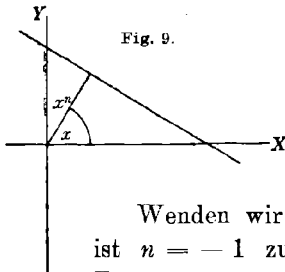


Fig. 9.

$$(9) \quad \begin{cases} r^2 = x^{2n} + n^2 x^{2n-2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{x^n \operatorname{tg} x + nx^{n-1}}{x^n - nx^{n-1} \operatorname{tg} x} \end{cases}$$

Die Kurven gehören dem Typus der Schraubenlinien, und zwar den rechtsgewundenen, an.

Wenden wir nun unsere Gleichung (3) auf diesen Fall an, so ist  $n = -1$  zu setzen, und die Kurvengleichungen nehmen die Form an:

$$(10) \quad \begin{cases} X = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{x^2} \\ Y = \frac{\sin x}{x} - \frac{n \cos x}{x^2} = \frac{-\cos x + x \cdot \sin x}{x^2} \end{cases}$$

oder

$$r^2 = x^{-2} + x^{-4}$$

$$(11) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x \cdot \operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + x}; \quad \text{d. h.} \quad \varphi = x + \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{x} \right).$$

Wir erhalten linksgewundene Schraubenlinien, was dadurch ausgeschaltet werden kann, daß die Wage nach der entgegengesetzten Seite gedreht wird. Der große Vorteil besteht aber darin, daß man nur eine Art von Rollen braucht, da die verschiedenen Winkel  $x - \alpha$ ,  $x - \beta \dots$  durch anfängliche Drehung der verschiedenen Rollen eingestellt werden können.

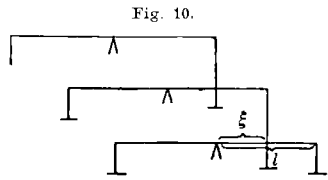
## § 7. Systeme von Wagen.

Mehrere Wagen sind von Grant<sup>1)</sup> benutzt, dessen Apparat von Skutsch<sup>2)</sup> vervollkommenet und leistungsfähig gemacht ist. Das Prinzip ist aus Fig. 10 ersichtlich.

1) American Machinist 1896.

2) a. a. O. S. 95.

$n + 1$  Balkenwagen sind so angeordnet, daß jede mit einem Punkt ihres rechten Armes das rechte Balkenende der folgenden Wage unterstützt. Dabei kann die Entfernung des unterstützenden Punktes vom Drehpunkt bei allen Wagen gleichzeitig um denselben Wert geändert werden. Ist diese Entfernung  $\xi$  und die Armlänge  $l$ , so werden, wenn die Balken durch die Momente  $M_0, M_1 \dots$  belastet sind, die Momente  $M_0, M_1 \frac{\xi}{l}, M_2 \left(\frac{\xi}{l}\right)^2 \dots$  ausgeübt, so daß die Gleichgewichtsbedingung lautet:

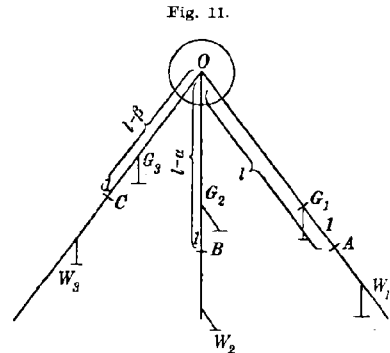


$$(12) \quad M_0 + M_1 \cdot \frac{\xi}{l} + M_2 \left(\frac{\xi}{l}\right)^2 + \dots + M_n \left(\frac{\xi}{l}\right)^n = 0,$$

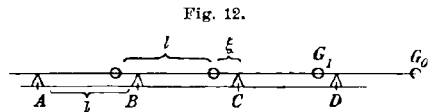
die mit der Gleichung (1) zu vergleichen ist.

Die praktische Durchführung der gleichzeitigen Veränderung des  $\xi$  bei allen Wagebalken wird durch Schraubenspindeln erreicht, die sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die sich wie die Glieder einer arithmetischen Reihe verhalten.

Eine bedeutende Vereinfachung wird wieder durch Anwendung der Gleichungsform (3) erreicht. Die praktische Durchführung gestaltet sich nach Fig. 11 in folgender Weise.



Die gewichtslosen Wagebalken  $W_1, W_2, W_3 \dots$ , denen durch die Verschiebung der Schneiden  $A, B, C \dots$  in Richtung auf  $O$  (etwa durch Schrauben oder über eine Rolle bei  $O$  gezogene Bindfäden) die gemeinsam veränderlichen Längen  $l, l - \alpha, l - \beta \dots$  gegeben werden, üben, wenn sie in der Entfernung  $1$  durch die Gewichte  $G_1, G_2, G_3 \dots$  belastet werden (je nach dem Vorzeichen von verschiedenen Seiten der Schneiden) in  $O$  die Kräfte  $\frac{G_1}{l}, \frac{G_2}{l - \alpha}, \frac{G_3}{l - \beta} \dots$  aus. Die Gleichgewichtslage liefert die Wurzel  $l = x$  der vorgelegten Gleichung.



Ein anderes System von Wagen hat ebenfalls Skutsch angegeben, indem er  $n$  gewichtslose Stäbe von der Länge  $l$  in ihren Endpunkten gelenkig verband und zu einem geraden Stabzug vereinigte, wie in Fig. 12.

Die  $n$  Schneiden  $A, B, C \dots$  haben den Abstand  $l$ , und teilen sämtliche Balken im Verhältnis  $\xi : (l - \xi)$ . Werden in  $G_0, G_1, G_2 \dots$  wieder entsprechende Gewichte angebracht, so herrscht Gleichgewicht, wenn

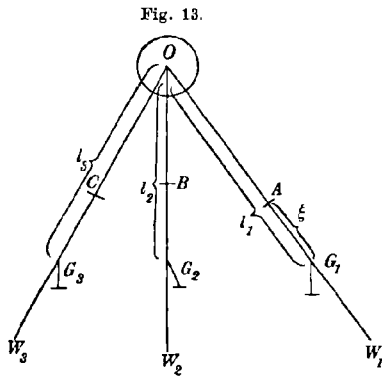
$$(13) \quad \sum_{v=0}^{v=n} (-1)^v G_v \left( \frac{\xi}{l - \xi} \right)^v = 0$$

ist.

Bei Ausführung des Apparates in Zwillingenform läßt sich die Beschränkung auf Gleichungen, die in den Gliedern keinen Zeichenwechsel oder keine Zeichenfolge haben, vermeiden.

Eine wesentliche Vereinfachung erfährt namentlich die praktische Ausführung des Apparates durch Anwendung der Gleichung (4).

Die gewichtslosen Wagebalken  $W_1, W_2, W_3 \dots$  wirken wieder wie in Fig. 11, so auch in Fig. 13, auf  $O$ . Die Schneiden  $A, B, C \dots$  sind gleichmäßig verschiebbar und befinden sich wieder in der Entfernung  $\xi$  von den Enden der  $l_1, l_2, l_3 \dots$  langen Wagebalken. Werden diese durch



$G_1, G_2, G_3 \dots$  belastet, so wirken in  $O$  die Kräfte

$$\frac{G_1 \cdot \xi}{l_1 - \xi} + \frac{G_2 \cdot \xi}{l_2 - \xi} + \frac{G_3 \cdot \xi}{l_3 - \xi} + \dots$$

Gibt man nun der Gleichung (4) die Form:

$$(14) \quad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = A_0 + \frac{A_1 \cdot z}{\frac{1}{\alpha} - z} + \frac{A_2 \cdot z}{\frac{1}{\beta} - z} + \dots,$$

so sieht man sofort die Beziehung, die zwischen den Koeffizienten und den Gewichten bzw. Balkenlängen bestehen muß. Ebenso ist das Vorzeichen ähnlich wie in Fig. 11 zu berücksichtigen.

## § 8. Hydrostatische Wagen.

Waren bisher die *Hebelarme* durch *Potenzen* der Wurzel und die *Kräfte* durch die *Koeffizienten* dargestellt, so gilt das Umgekehrte bei den *hydrostatischen Wagen*.<sup>1)</sup> Es werden hier nach Meslin<sup>2)</sup> Körper

1) Von der Demanetschen Konstruktion (Mathesis 8, 1898) sei hier abgesehen.

2) Compt. Rend. 1900.

in Wasser getaucht, deren Meridian die Fläche  $y^2 = cx^{n-1}$  hat, so daß das Volumen und damit der Auftrieb

$$(15) \quad A = C \cdot x^n$$

wird, wo  $x$  die Tauchtiefe bezeichnet. Die Hebelarme werden durch die Koeffizienten angegeben, so daß in der Entfernung  $a_n$  vom Drehpunkt die Auftriebseinheit angebracht wird, oder in der Entfernung 1 an der andern Seite das Gewicht  $a_n$ . Die Wage wird zunächst ausbalanciert und dann allmählich in eine Flüssigkeit getaucht, bis wieder Gleichgewicht eintritt. Die Rotationskörper von Meslin sind ein zylindrischer Stab, eine Paraboloid, ein Kegel, ein Körper mit semikubischer Parabel als Meridian usw. Skutsch hat gezeigt, daß man bei den Gleichungen dritten Grades mit ebenflächigen Körpern auskommt, indem man den Zylinder durch ein Prisma, das Paraboloid durch einen Keil und den Kegel durch eine Pyramide ersetzt. Schaefer<sup>1)</sup> vereinfacht die Körper dadurch, daß er Schablonen aus Aluminiumguß konstruiert, die die Gleichung

$$(16) \quad 2y = \frac{n \cdot c}{d} \cdot x^{n-1}$$

haben, so daß ihre Fläche

$$(17) \quad F = \frac{c}{d} \cdot x^n$$

wird, und das Volumen des Körpers von der Dicke  $d$

$$(18) \quad V = c \cdot x^n.$$

Dabei ist  $c$  eine Konstante, die für  $x = 1$  die Auftriebseinheit liefert. Durch passende Wahl von  $c$  und  $d$  sind brauchbare Körper zu schaffen.

Bei den Parabeln höherer Ordnung wird jedoch für große  $x$  auch  $y$  sehr groß, wodurch die vom Wasser benetzte Fläche zu erheblichen Fehlern führt. Eine Abhilfe wird hier geschaffen durch den von Schaefer vorgeschlagenen Kunstgriff der Substitution

$$(19) \quad x = \pm \sqrt[n]{\xi},$$

so daß die Flächen der Kurven die Gleichung erhalten

$$(20) \quad F = \frac{c}{d} \xi^{\frac{n}{2}}.$$

Da für große  $x^n$  die  $y$  zu groß werden, muß  $c$  klein genommen werden. So wird bei Schaefer  $c = \frac{1}{10000}$ ,  $d = 0,8$  für  $n = 5$ . Dadurch werden aber die Spitzen der Körper für kleine  $x$  schwer ausführbar.

1) Diese Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 61 (1913), S. 61.

Brauchbare Körper erhält man schon, wenn man etwa aus einer Zinkplatte von 0,5 cm Dicke Kurven von folgender Gestalt aussägt:

$$2y = n \cdot x^{n-1},$$

so daß die Fläche wird

$$F = x^n,$$

wobei als Einheit 1 cm gewählt werden kann. Eventuell ist die Substitution (19) anzuwenden. Falls alle Körper gleich dick sind und als Auftriebseinheit eine Platte von der Oberfläche 1 qcm aus demselben Material benutzt wird, braucht  $d$  nicht berücksichtigt zu werden. Durch Änderung von  $d$  in  $\frac{d}{2}$ ,  $\frac{d}{4}$  . . . sind Konstruktionsschwierigkeiten zu vermeiden. Für größere  $x$  empfiehlt sich entweder die Substitution  $x = 10y$  oder einfacher eine Maßstabsänderung der  $x$  mit entsprechender Änderung der Auftriebseinheit, allerdings auf Kosten der genaueren Ablesung.

Auch bei der hydrostatischen Wage läßt sich nun mit Vorteil das Prinzip der Gleichung (3) anwenden. Man braucht dann nur *eine* Form von Körpern, die den Auftrieb

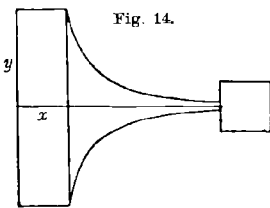


Fig. 14.

$$(21) \quad V = \frac{c}{x}$$

liefern, deren Kurven also die Gleichung haben

$$(22) \quad 2y = -cx^{-2}.$$

Als Beispiel ist in Figur 14 die Kurve

$$2y = \frac{4}{x^2}$$

gezeichnet, wobei der Koeffizient 4 bei der Dicke, bzw. Auftriebseinheit oder beim Hebelarm berücksichtigt werden kann.

Allerdings ist jetzt zu bedenken, daß das Integral

$$\int_0^x 2y dx$$

unendlich wird. Man muß vielmehr nehmen:

$$\int_x^\infty 2y dx = \int_x^\infty \frac{4}{x^2} dx = \frac{4}{x}.$$

Der Körper muß also von  $x$  bis  $\infty$  eintauchen, so daß jetzt  $x$  der aus dem Wasser hervorragende Teil des Körpers ist. Für kleine  $x$  kann der Körper an beliebiger Stelle unterbrochen werden, während das Endstück, in Fig. 14 z. B.

$$\int_4^\infty \frac{4}{x^2} dx = 1 \text{ qcm}$$

als Platte ausgebildet ist.

Die  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$ , ... der Gleichung (3) werden einfach durch Senken der Nullagen der Körper um  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... erhalten.

Man kann in ähnlicher Weise auch das Prinzip des *Schwimmens* benutzen mit Hilfe von Körpern von der Dicke  $a_1, a_2 \dots$  und vom Längsschnitt  $\frac{1}{x}, x^{-1} \dots$ , wie es für Gleichungen mit mehreren Unbekannten im vorliegenden Bande dieser Zeitschrift von K. Fuchs beschrieben ist. Doch ist die praktische Verwendbarkeit wegen der Verschiedenheit der Körper je nach dem verschiedenen Koeffizienten gering.

### § 9. Elektrische Gleichungswagen.

Den Widerstand von Drähten beim elektrischen Strom hat zuerst Kann<sup>1)</sup> zur Lösung von Gleichungen benutzt. Es werden an hintereinander geschalteten parallelen Drähten Schablonen der Form  $y = x$ ,  $y = x^2$ , ..., die an einem Rahmen befestigt sind, vorbeigeschoben, so daß von den Drähten die Längen  $x, x^2 \dots$  abgeschnitten werden. Bei der Nullstellung gibt ein eingeschaltetes Galvanometer einen bestimmten Ausschlag, und werden dann die Widerstände  $x, x^2 \dots$  je nach ihrem Vorzeichen ein- oder ausgeschaltet, so gibt derselbe Ausschlag eine Wurzel der Gleichung. Schwierig ist hierbei die Berücksichtigung der Koeffizienten. Kann schlägt entweder verschiedene Drahtdicken je nach dem Koeffizienten vor, oder Zahnräder, die beim Verschieben des Rahmens selbsttätig die Vielfachen der Drahtlängen einschalten.

Eine bessere Berücksichtigung der Koeffizienten erreichen Russell und Wright<sup>2)</sup> mit einem elektrischen Rechenschieber. Multiplikation und Division werden ebenso wie Addition und Subtraktion durch Hintereinander- oder Parallelschaltung von Drähten bewirkt. Eine Schablone von der Gleichung

$$(23) \quad y = k \cdot 10^{-\frac{x}{k}},$$

die in Fig. 15 wiedergegeben ist, wird mit isoliertem Draht bewickelt.

Längs  $OS$ , die mit logarithmischer Skala versehen ist, gleitet ein Schieber. Steht am Punkte  $N$  der Skala die Zahl  $p$ , so ist

$$ON = h \cdot \log p$$

und

$$y = PN = \frac{k}{p} \cdot s$$

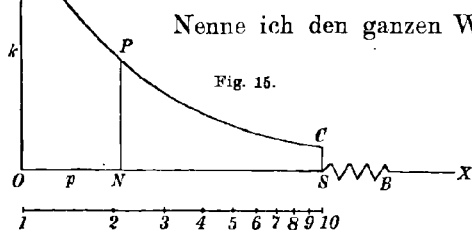
1) Diese Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 48 (1903), S. 266.

2) Phil. Mag. 1909.

3) Man erhält hier also eine Kurve, deren Ordinaten den Ziffern der Abzissenskala umgekehrt proportional sind, die also mit Vorteil auch für alle Gleichungswagen, die auf Gleichung (3) beruhen, benutzt werden kann.

Nun ist der Widerstand des Drahtes zwischen  $O$  und  $N$  annähernd proportional der Fläche  $ONPY$ , d. h. proportional

$$\int_0^x y dx = k \int_0^x 10^{-\frac{x}{h}} dx = \frac{hk}{\lg 10} \left(1 - \frac{y}{k}\right).$$



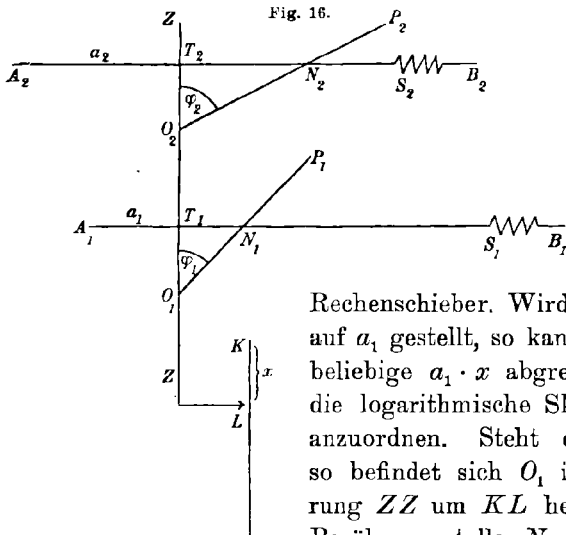
Nenne ich den ganzen Widerstand bis  $x = h$  (oder  $y = \frac{k}{10}$ )  $\frac{9}{10} R$ , und füge an  $S$  einen Draht  $SB = \frac{1}{10} R$ , so ist der Widerstand von  $N$  bis  $B$  gleich  $\frac{y}{k} \cdot R$ , d. h.  $\frac{R}{P}$ .

Werden also solcher Schieberwiderstände nebeneinander geschaltet, so ist der Gesamtstrom

$$\frac{E}{R} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n),$$

wenn  $p$  die Ablesungen auf den Skalen und  $E$  die angewandte Potentialdifferenz bedeuten.

Somit ist durch Parallelschaltung eine Addition erreicht. Die Multiplikation wird nach dem Prinzip des gewöhnlichen Rechenschiebers



durch Hintereinanderschalten erzielt. Soll ich  $p$  mit  $q$  multiplizieren, so lege ich den Nullpunkt einer zweiten logarithmischen Skala auf  $N$  und lese bei dem Punkt  $q$  der zweiten auf der ersten das Produkt  $p \cdot q$  ab. Ebenso verfährt man beim elektrischen

Rechenschieber. Wird die Nulllinie  $ZZ$  der Figur 16 auf  $a_1$  gestellt, so kann ich mit dem Schieber bei  $N_1$  beliebige  $a_1 \cdot x$  abgreifen. Dabei ist es praktisch, die logarithmische Skala wie in Fig. 16 senkrecht anzuordnen. Steht der Zeiger  $L$  auf 1 bei  $K$ , so befindet sich  $O_1$  in  $T_1$ . Wird  $L$  mit der Führung  $ZZ$  um  $KL$  heruntergeschoben, so wird die Berührungsstelle  $N_1$  um  $T_1 N_1$  verschoben, wobei  $T_1 N_1 = T_1 O_1 = LK$  ist, da  $\varphi = 45^\circ$ .

Man ist nun auch in der Lage, beliebige Potenzen von  $x$  zu schaffen, dadurch, daß der Zeiger  $O_1 P_1$  immer andere Winkel mit der Schiene  $ZZ$  bildet, etwa  $T_2 O_2 N_2$ . Da  $T_2 N_2 = T_2 O_2 \cdot \text{tg } \varphi_2$  ist, so ist

$$(24) \quad T_2 N_2 = h \cdot \text{tg } \varphi_2 \cdot \log x = h \cdot \log x^{\text{tg } \varphi_2},$$



so daß der Widerstand des zweiten Schiebers  $\frac{R}{a_2 x + \epsilon \varphi_2}$  ist. Mit einer Tabelle der Tangensfunktion sind daher beliebige Potenzen von  $x$  zu schaffen.

Zur Lösung von Gleichungen sind dann die einzelnen Widerstände dem Vorzeichen der Gleichung entsprechend so in Gruppen parallel zu schalten, daß ein Galvanometer keinen Ausschlag gibt. In Fig. 17 ist das Beispiel

$$a = b + c$$

dargestellt. Die gleichmäßige Einstellung der  $x$  für die  $n + 1$  Brücken geschieht durch die Befestigung sämtlicher Schieber auf  $ZZ$  und Einstellung der Winkel  $\arctang 0, \arctang 1 \dots$

Eine bedeutend einfachere Form erhalten die elektrischen Gleichungswagen durch Einführung des Prinzips der Partialbruchzerlegung.

Während die Kanske Konstruktion durch einheitliche Gestaltung der Kurven oder durch Benutzung nur einer Schablone eine ähnliche Vereinfachung erhält wie die gewöhnliche Wage des § 5, gestaltet sich die elektrische Brückenwage folgendermaßen. In Fig. 18 soll die Gleichung

$$(25) \quad a - \frac{b}{x - \alpha} - \frac{c}{x - \beta} = 0$$

gelöst werden.

$XY$  bedeutet ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das Zentimeterteilung trägt. Auf der  $X$ -Achse ist eine Schiene mit dem Anfangspunkt  $W$  verschiebbar, die Führungsnuten  $N_1, N_2$  für die Zeiger  $O_1 N_1, O_2 N_2$  trägt.  $N_1$  und  $N_2$  haben von  $W$  die Abstände  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . An die  $Y$ -Achse werden gewöhnliche Schieberwiderstände (z. B. Ruhstrat-Widerstände oder einfache Drähte mit Schleifkontakt) herangeschoben.<sup>1)</sup> Auf dem ersten  $A_1 B_1$  wird der Widerstand  $\frac{1}{a}$  abgegriffen. Der zweite

Fig. 17.

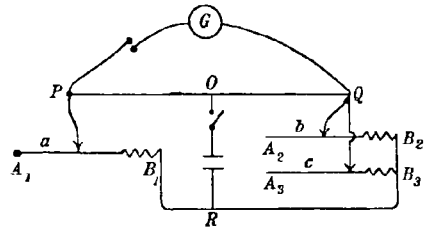
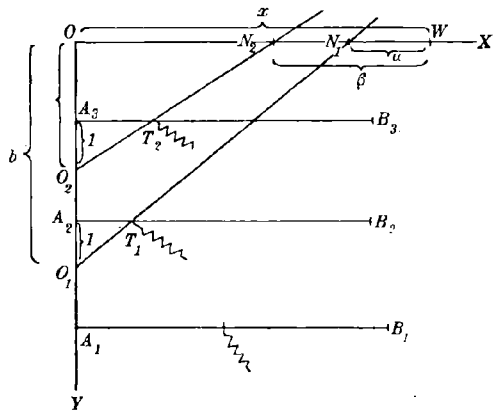


Fig. 18.



1) Durch eine einfache Änderung läßt sich der Apparat auch zum Abgreifen der reziproken Werte und damit zum Hintereinanderschalten der Widerstände einrichten. Das hier angewandte Prinzip der Konstruktion mit Hilfe des *Proportional-satzes* läßt sich auch auf die übrigen Apparate der Gleichung (3) anwenden, ohne daß *Kurven* benutzt werden.

$A_2B_2$  wird im Abstand  $b - 1$  von der  $X$ -Achse aufgestellt, während der zugehörige Zeiger den Abstand  $b$  hat. Der dritte  $A_3B_3$  befindet sich im Abstand  $c - 1$ , sein Zeiger im Abstand  $c$ . Dann wird bei Verschiebung des Wurzelsuchers um  $OW = x$  auf  $A_2B_2$  der Widerstand  $\frac{x - \alpha}{b}$  abgegriffen und auf  $A_3B_3$  der Widerstand  $\frac{x - \beta}{c}$ . Werden nun die drei Widerstände nach Fig. 17 zur Brücke geschaltet, so gibt, wenn das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt,  $x$  die Wurzel der Gleichung an; denn, wenn  $E$  das Potential in  $R$  und  $V$  in  $P$  oder  $Q$  ist, wenn ferner  $r$  der spezifische Widerstand des verwandten Drahtes ist, so gilt nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz:

$$\frac{E - V}{\frac{r}{a}} - \frac{E - V}{r(x - \alpha)} - \frac{E - V}{\frac{r(x - \beta)}{c}} = 0$$

oder

$$a - \frac{b}{x - \alpha} - \frac{c}{x - \beta} = 0,$$

was in (25) verlangt wurde.

### § 10. Elektromagnetische Gleichungswagen.

Während die elektrischen Gleichungswagen ein Aufsuchen der imaginären Wurzeln nur nach umständlichen algebraischen Operationen etwa durch Einsetzen von  $z = x + iy$  und Zurückführen auf Gleichungen höheren Grades<sup>1)</sup>, zulassen, ist es durch eine elektromagnetische Methode möglich, direkt die komplexen Wurzeln zu erhalten. Auf diese Möglichkeit hat zuerst Lucas<sup>2)</sup> hingewiesen, dessen Vorschläge von Russell und Alty<sup>3)</sup> zu praktisch verwertbaren Apparaten ausgebaut sind.

In Gleichung (3) werden die  $\alpha, \beta \dots$  so gewählt, daß

$$(26) \quad \alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu = -\frac{a_1}{a_0}$$

ist, so daß beim Fehlen des zweiten Gliedes die Gleichung besteht

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu = 0.$$

Durch (26) wird auch

$$(26a) \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0.$$

Nun ist die Kraft, die ein langer Draht von der Stromstärke  $i$  auf einen Einheitspol  $P$  in der Entfernung  $r$  ausübt

$$(27) \quad K = \frac{i}{5r}.$$

1) Vgl. Russell und Wright, a. a. O., S. 304.

2) Compt. Rend. 1888.

3) Phil. Mag. 1909.

Habe ich  $n$  Drähte in einer zum magnetischen Meridian senkrechten Ebene, die senkrecht die Zeichnungsebene der Fig. 19 in den Punkten  $B_1, B_2, B_3 \dots$  in den Abständen  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  von  $O$  durchsetzen und von den Strömen  $i_1, i_2, i_3 \dots$  durchflossen sind, so sind die Komponenten der auf  $P(x_1, y_1)$  wirkenden Kraft

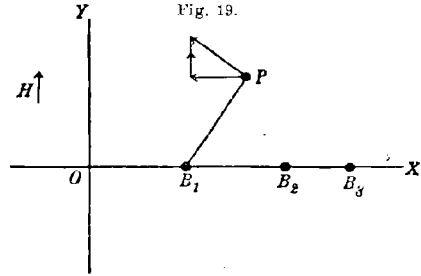
$$-X = \frac{i_1}{5r_1} \cdot \frac{y_1}{r_1} + \frac{i_2}{5r_2} \cdot \frac{y_1}{r_2} + \dots$$

und

$$Y = H + \frac{i_1}{5r_1} \cdot \frac{x_1 - \alpha}{r_1} + \frac{i_2}{5r_2} \cdot \frac{x_1 - \beta}{r_2} + \dots,$$

wobei

$$r_1^2 = (x_1 - \alpha)^2 + y_1^2 \dots$$



Multipliziere ich  $X$  mit  $i$  und subtrahiere, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y + iX &= H + \frac{i_1}{5r_1} (x_1 - \alpha - iy_1) + \frac{i_2}{5r_2} (x_1 - \beta - iy) + \dots \\ (27a) \quad &= H + \frac{\frac{i_1}{5}}{x_1 + iy_1 - \alpha} + \frac{\frac{i_2}{5}}{x_1 + iy_1 - \beta} + \dots \end{aligned}$$

In einem neutralen Punkt ist nun die Kraft 0, d. h.  $X=0, Y=0$ . Ist also  $z = x \pm iy$  ein neutraler Punkt, so ist  $z$  Wurzel der Gleichung

$$(28) \quad H + \frac{\frac{i_1}{5}}{z - \alpha} + \frac{\frac{i_2}{5}}{z - \beta} + \dots = 0,$$

danach stehen die Koeffizienten  $A_1, A_2 \dots$  zu den Intensitäten  $i_1, i_2 \dots$  in der Beziehung

$$(29) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{5 \cdot H \cdot A_1}{\alpha} \\ i_2 = \frac{5 \cdot H \cdot A_2}{\alpha} \\ \dots \end{cases}$$

Da nach (26a)  $\sum i = 0$  ist, wird eine relativ einfache Apparatur ermöglicht.

Zur näheren Untersuchung über die Gestalt des Kraftfeldes sollen folgende Betrachtungen dienen.

Ein Vergleich von (28) mit (27) zeigt, daß die Formel für die magnetische Kraft auch in der komplexen Ebene gilt, so daß ich für die Entfernungen  $r$  die betreffenden  $x + iy - \alpha \dots$  zu nehmen habe. Daraus folgt aber die Notwendigkeit der Untersuchung der Gesamtkraft (27a), die mit  $X_1 + iY_1$  bezeichnet werden möge, auf ihre Existenz als eindeutige analytische Funktion von  $z$ .

Setze ich nach (3) und (27a):

$$(30) \quad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = X_1 + iY_1 = F(z)',$$

so muß die Bedingung erfüllt sein

$$(31) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

Diese Laplacesche Gleichung ist aber, da die einzelnen Summanden in (27) und (28) sich wie Newtonsche Potentiale verhalten, in der  $x, y$ -Ebene erfüllt.

Nimmt man nun an Stelle der elektrischen Ströme in den Punkten  $B_1, B_2 \dots$  Massenpunkte von den Massen  $m_1, m_2 \dots$  an, die umgekehrt proportional ihrer Entfernung auf  $P$  wirken, so ergibt sich die Gesamtkraft

$$(32) \quad X + iY = \sum \frac{m}{z - \alpha}.$$

Die Niveau- und Kraftlinien in diesem Falle sind von Lucas untersucht worden. Qualitativ dasselbe Ergebnis liefert der von Maxwell<sup>2)</sup> konstruierte Fall, daß drei Magnetpole  $+m_1, -m_2, +m_3$  in ihrer Wirkung aufeinander untersucht werden. Die elektromagnetische Wirkung unterscheidet sich nun dadurch von der mechanischen, daß sie in jedem Punkt senkrecht zu der Verbindungslinie der beiden Punkte wirkt.<sup>3)</sup> Wir haben also die senkrechten Trajektorien der mechanischen Kraftlinien als die magnetischen Kraftlinien anzusehen, das sind aber die Niveaulinien des mechanischen Feldes. Diese werden erhalten durch die Gleichung

$$V = \text{const.},$$

wo  $V$  das Potential der Gesamtwirkung bedeutet. Setzen wir nun

$$(33) \quad \lambda(z) = (z - \alpha)^{m_1} \cdot (z - \beta)^{m_2} \dots = \varrho e^{i\varphi},$$

so ist

$$V = \lg \varrho + \text{const.}$$

das Potential der Gesamtkraft (32); denn

$$\frac{d \lg \varrho}{dz}$$

gibt (32).

1) Vgl. Lucas a. a. O. und Géométrie des polynomes, Journal de l'Éc. Polyt. 46, 1879.

2) Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. I, Taf. 5. Vgl. auch F. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen.

3)  $H$  wurde hier der Einfachheit halber nicht berücksichtigt.

Die Gleichungen der Niveaulinien sind dann

$$\rho^2 = \text{const.}$$

Dies sind unsymmetrische Cassinische Linien, die sich aus Kombinationen von Lemniskaten und Kreisbüscheln ergeben. Allerdings bewirkt der Einfluß des erdmagnetischen Feldes eine erhebliche, jedoch nicht charakteristische Änderung. Die singulären Punkte dieser Kraftlinien erhält man nun aus der Gleichung

$$\lambda'(z) = 0.$$

Es gilt aber identisch:

$$\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} = \sum \frac{m}{z - \alpha} = \frac{f'(z)}{\varphi(z)}.$$

Daher ist:

$$\lambda'(z) = \frac{\lambda(z)}{\varphi(z)} \cdot f'(z),$$

oder

$$(34) \quad \lambda'(z) = (z - \alpha)^{m_1-1} (z - \beta)^{m_2-1} \dots f'(z).$$

Es liefern also die Punkte  $\alpha, \beta \dots$  die isolierten Punkte und die Wurzeln von  $f'(z)$  die Knotenpunkte der Kraftlinien.

Nach dem Vorschlag von Russell und Alty werden die neutralen Punkte mit einem Kompaß in der Gaußschen Ebene aufgesucht, die Stromstärken durch  $n - 1$  Ampèremeter bestimmt. Einen andern Vorschlag macht Lucas in einer späteren Arbeit<sup>1)</sup>, in der allerdings  $H$  nicht berücksichtigt ist und keine praktischen Vorschläge gemacht werden. Er will die Längen der Drähte umgekehrt proportional den Koeffizienten  $A_1 \dots$  machen, so daß bei Parallelschaltung der Drähte die Intensitäten der Ströme proportional den Koeffizienten werden, wodurch erreicht wird, daß der Strom vollständig beliebig ist. Nun ist allerdings  $H$  durch eine eiserne Platte auszuschalten, und die Längen der Drähte sind etwa mit der gleichseitigen Hyperbel des § 5 oder der logarithmischen Kurve des § 9 direkt abzugreifen. Bei Berücksichtigung von  $H$  wäre am besten ein Spannungsmesser zu verwenden, der einen Strom von der Spannung

$$V = \frac{5H \cdot R}{a_0},$$

wo  $R$  der spezifische Widerstand des Drahtes ist, in die Parallelschaltung schickt, dann wären, wenn die Drahtlängen den Koeffizienten  $A_1 \dots$  umgekehrt proportional sind, die Stromstärken

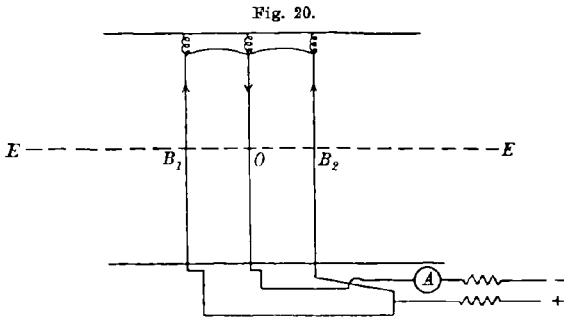
$$i_1 = \frac{5H \cdot A_1}{a_0}$$

. . . . .

1) Compt. rend. 1890.

was (29) verlangt. Dabei ist man an die Bedingung (26) nicht gebunden, kann vielmehr  $\varphi(x)$  ganz willkürlich wählen.

Für eine Gleichung dritten Grades kommt man auch bei einer



Anordnung, die ganz ähnlich derjenigen von Russell und Alty gestaltet ist, mit einem Ampèremeter aus.

Die Gleichung wird auf die Form gebracht

$$x^3 - b^2x + c = 0.$$

Dann ist

$$(35) \quad H \cdot \frac{x^2 - b^2x + c}{x(x^2 - b^2)} = H + \frac{i}{5(x - b)} - \frac{2i}{5x} + \frac{i}{5(x + b)},$$

wo

$$(36) \quad 2i = \frac{5H \cdot c}{b^2}.$$

Drei Drähte durchschneiden (vgl. Fig. 20) die Ebene  $E$  bei  $O, B_1$  und  $B_2$ , wo  $B_1O = OB_2 = b$  ist, und der Strom ist nach (36) reguliert.

### § 11. Erweiterungsmöglichkeiten.

Während die meisten Wagen Kräfte benutzen, die der ersten Potenz einer Größe direkt proportional sind, so daß die höheren Potenzen durch mathematische Hilfsmittel konstruiert werden müssen, sind im § 10 Kräfte benutzt, die umgekehrt proportional den ersten Potenzen gewisser Strecken sind. Selbstverständlich lassen sich auch andere Kräfte, je nach entsprechender Umformung der Gleichung verwenden, und so fällt es nicht schwer, Apparate aus der Optik, etwa nach dem Prinzip der Photometer, aus dem Magnetismus, nach dem Prinzip der Polwage, und aus der Elektrostatik, nach dem Prinzip der Drehwagen, anzugeben, die denselben Gesetzen entsprechen würden wie die hier beschriebenen. Ebenso sind andere Apparate aus der Mechanik, etwa solche, die Torsionen benutzen, oder aus der Elektrizitätslehre, etwa durch Benutzung von Solenoiden, denkbar, die vielleicht praktisch besser verwertbar wären. Auch auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten, sowie auf transzendente Gleichungen sind die hier entwickelten Prinzipien anzuwenden.

Hamburg, September 1913.

Über das Graeffesche Verfahren.<sup>1)</sup>

Von G. POLYA aus Budapest.

Im Folgenden wird gezeigt, daß das Graeffesche Verfahren zur beliebigen Annäherung der absoluten Werte der Wurzeln irgendeiner Potenzreihe taugt. Das Verfahren wird mit dem Hadamardschen verglichen, und die Besonderheiten der praktischen Durchführung, die bei Anwendung auf Potenzreihen auftreten, werden an einem Beispiel erläutert.

Die Fragestellung dieser Arbeit rührt von Herrn C. Runge her. Der Beweis des wichtigsten Satzes I ist das Ergebnis gemeinsamer Überlegungen des Verfassers und des Herrn C. Runge, dessen freundliches Interesse auch für den übrigen Teil der Arbeit förderlich war.

1. Will man die Wurzeln des Polynoms

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

nach dem Graeffeschen Verfahren<sup>2)</sup> berechnen, so bildet man nacheinander die Gleichungen, denen die 2<sup>ten</sup> bzw. die 4<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup>, 16<sup>ten</sup>, 32<sup>ten</sup> ... Potenzen der vorgelegten Gleichung  $f(x) = 0$  genügen. Die Gleichung

$$\left(1 - \frac{z}{\alpha_1^k}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_2^k}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_n^k}\right) = 0,$$

welcher die  $k^{\text{ten}}$  Potenzen der Wurzeln genügen, hat zum ersten, zweiten, ...  $n$ -ten Koeffizienten die erste bzw. die zweite, ...  $n$ -te elementare symmetrische Funktion der  $n$  Größen

$$\frac{1}{\alpha_1^k}, \frac{1}{\alpha_2^k}, \frac{1}{\alpha_3^k}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n^k}.$$

Nehmen wir einen Moment an, die Wurzeln seien von verschiedenem absoluten Betrage

$$\alpha_1 < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \cdots < |\alpha_n|,$$

so ist ersichtlich, daß bei genügend hohem  $k$  in jedem Koeffizienten ein Glied vorwiegt, nämlich in dem ersten das Glied  $\frac{1}{\alpha_1^k}$ , und in den

1) Eine vorläufige Mitteilung „Sur la méthode de Graeffe“ erschien in den Comptes Rendus, T. CLVI, p. 1145 (1913, 1) (Paris).

2) Encke, Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 22 (1841) S. 193—248. C. Runge, Praxis der Gleichungen (1900) S. 157—182. E. Carvallo, Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendentes (1910).

nachfolgenden bzw. die Glieder  $\frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k}, \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k}, \dots$ ; auf Grund dieser Bemerkung lassen sich die absoluten Beträge der Wurzeln aus den Koeffizienten der Gleichung für die  $k^{\text{ten}}$  Potenzen mittels Division und Ausziehung  $k^{\text{ter}}$  Wurzeln in guter Annäherung berechnen.

Wie wir sehen, beruht das Graeffesche Verfahren im wesentlichen auf dem Satze, daß die Koeffizienten eines Polynoms die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln sind; oder wenn das absolute Glied des Polynoms = 1 genommen wird, so sind die Koeffizienten die elementaren symmetrischen Funktionen der reziproken Wurzeln.

Dieser Satz trifft aber auch für ganze transzendente Funktionen vom Geschlechte 0 zu, und daraus ergibt sich sofort, daß das Graeffesche Verfahren auf irgendeine ganze transzendente Funktion vom *endlichen* Geschlechte anwendbar ist. Denn sei  $f(x)$  vom Geschlechte  $p$ ,  $f(0) = 1$ ; dann hat  $f(x)$  die Gestalt

$$f(x) = e^{g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_p x^p} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_\nu}\right) e^{\frac{x}{1\alpha_\nu} + \frac{x^2}{2\alpha_\nu^2} + \dots + \frac{x^p}{p\alpha_\nu^p}}.$$

Ist dann  $k > p$ , und setzen wir

$$e^{\frac{2\pi i}{k}} = \omega,$$

so ist die linke Seite der Gleichung, die die  $k^{\text{ten}}$  Potenzen der Wurzeln gibt,

$$f(x) f(\omega x) f(\omega^2 x) \dots f(\omega^{k-1} x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_\nu^k}\right),$$

also eine ganze transzendente Funktion vom *Geschlechte Null* der Variablen  $x^k$ .<sup>1)</sup>

J. Schur hat, eine Methode von E. Schmidt erweiternd, das Graeffesche Verfahren zur Ermittlung der Eigenwerte der Integralgleichung angewandt. Die Determinante der Integralgleichung mit symmetrischem Kern ist eine ganze Funktion, höchstens vom Geschlechte Eins, und mit lauter reellen Wurzeln; die Berechnung ihrer Wurzeln fällt also unter die eben gemachte Bemerkung.<sup>2)</sup>

1) Borel, Fonctions entières (1900) S. 27—28.

2) Herr J. Schur schlägt, in voller Kenntnis dieser Bemerkung, einen andern Weg ein, der zugleich zur Berechnung der Eigenfunktionen führt, und der die Kenntnis des Geschlechts der Determinante nicht voraussetzt. Vgl. seine Abhandlung, Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen. Mathematische Annalen 67 (1909) S. 306—339.



Wir werden im Folgenden eine beliebige Potenzreihe

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

untersuchen, die im Innern eines Kreises vom Radius  $\rho$  konvergiert, wir werden zeigen, daß die absoluten Werte der Wurzeln der Potenzreihe durch das Graeffesche Verfahren beliebig approximiert werden können.

Genauer gesagt, seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_n| \leq \dots < \rho$$

die nach ihrem absoluten Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = 0$$

innerhalb des Konvergenzkreises, mehrfache in richtiger Mehrfachheit geschrieben; sei ferner

$$f(x)f(\omega x)f(\omega^2 x) \dots f(\omega^{k-1} x) = 1 + a_{1,k} x^k + a_{2,k} x^{2k} + \dots + a_{n,k} x^{nk} + \dots$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

Wir werden drei Sätze beweisen, die sich mit den soeben eingeführten Bezeichnungen so aussprechen lassen:

I. Ist  $|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|$ , oder liegen nur  $n$  Wurzeln im Innern des Konvergenzkreises, so ist in beiden Fällen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \dots \alpha_n^k a_{n,k} = (-1)^n.$$

II. Ist  $|\alpha_n| = |\alpha_{n+1}|$ , so läßt sich noch immer behaupten, daß

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k a_{n,k}| = \text{eine positive ganze Zahl.}$$

III. Liegen im Innern des Konvergenzkreises mit dem Radius  $\rho$  nur  $n - 1$  Wurzeln, so ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{n,k}|} \leq \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}| \rho}.$$

Wir untersuchen also die Größen  $a_{n,k}$ , indem wir  $k$  alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Die Besonderheiten, die auftreten, wenn  $k$  nur die Werte 2, 4, 8, 16, 32, ... annimmt, wie das bei dem gewöhnlichen Graeffeschen Verfahren geschieht, können dann leicht festgestellt werden.

2. Wir nehmen an, daß  $|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|$ , oder daß die Potenzreihe  $f(x)$  nur  $n$  Wurzeln im Innern ihres Konvergenzkreises  $|x| < \rho$  besitzt. Setzt man die logarithmische Ableitung von  $f(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{x - \alpha_n} + b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + \dots,$$

so konvergiert in beiden Fällen die Potenzreihe  $\sum_1^\infty b_n x^{n-1}$  im Innern und auf dem Rande eines Kreises, dessen Radius  $R > |\alpha_n|$  ist. —  $R$  ist nämlich entweder  $|\alpha_{n+1}| - \varepsilon$  oder  $\varrho - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet.

Aus der Konvergenz für  $|x| = R$  folgt, daß

$$(1) \quad |b_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

In dieser Ungleichung kann gewiß  $M \geq 1$  angenommen werden; diese Annahme erspart uns später einiges Schreiben.

Diese Ungleichung (1) drückt die Bedingung des Satzes I in der für unseren Zweck bequemsten Form aus.

Nun ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) e^{\int (b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + \dots) dx} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) e^{\frac{b_1 x}{1} + \frac{b_2 x^2}{2} + \dots + \frac{b_n x^n}{n} + \dots}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & f(x) f(\omega x) f(\omega^2 x) \dots f(\omega^{k-1} x) = \\ (2) \quad & = \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_1^k}\right) \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_2^k}\right) \dots \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_n^k}\right) e^{\sum_1^\infty \frac{b_n x^n}{n} + \sum_1^\infty \omega^n \frac{b_n x^n}{n} + \dots + \sum_1^\infty \omega^{(k-1)n} \frac{b_n x^n}{n}} \\ & = \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_1^k}\right) \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_2^k}\right) \dots \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_n^k}\right) e^{\frac{b_k x^k}{1} + \frac{b_{2k} x^{2k}}{2} + \dots + \frac{b_{nk} x^{nk}}{n} + \dots} \\ & = \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_1^k}\right) \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_2^k}\right) \dots \left(1 - \frac{x^k}{\alpha_n^k}\right) (1 + B_{1,k} x^k + B_{2,k} x^{2k} + B_{3,k} x^{3k} + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \sum_1^\infty \frac{b_{nk} x^{nk}}{n} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile von Formel (2) entsteht, indem wir  $e^{\sum_1^\infty \frac{b_{nk} x^{nk}}{n}}$  nach Potenzen von  $x^k$  entwickeln; dabei bedeutet

$$\begin{aligned} B_{1,k} &= b_k \\ B_{2,k} &= \frac{1}{2!} (b_k^2 + b_{2k}) \\ B_{3,k} &= \frac{1}{3!} (b_k^3 + 3 b_k b_{2k} + 2 b_{3k}) \end{aligned}$$

und allgemein

$$(3) \quad B_{n,k} = \sum \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{b_k}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{b_{2k}}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{b_{nk}}{n}\right)^{\lambda_n},$$

wo die Summation über alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungssysteme  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  der diophantischen Gleichung

$$1 \lambda_1 + 2 \lambda_2 + 3 \lambda_3 + \dots + n \lambda_n = n$$

zu erstrecken ist.<sup>1)</sup>

Nun ist nach Ungleichung (2)

$$|b_k^{\lambda_1} b_{2k}^{\lambda_2} \dots b_{nk}^{\lambda_n}| \leq \frac{M^{\lambda_1}}{R^{k \lambda_1}} \frac{M^{\lambda_2}}{R^{2k \lambda_2}} \dots \frac{M^{\lambda_n}}{R^{n k \lambda_n}} \leq \left(\frac{M}{R^k}\right)^{1 \lambda_1 + 2 \lambda_2 + \dots + n \lambda_n} = \frac{M^n}{R^{n k}},$$

wobei wir unsere Annahme benutzten, daß  $M \geq 1$ . Daher folgt aus Formel (3), daß

$$|B_{n,k}| \leq \frac{M^n}{R^{n k}} \sum \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}}$$

Auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist  $\frac{M^n}{R^{n k}}$  mit einer *nur von n, nicht von k* abhängigen Zahl multipliziert. Dies genügt eigentlich auch für unseren Zweck; setzen wir aber in Formel (3)

$$k = 1$$

$$b_{1k} = b_{2k} = b_{3k} = \dots = b_{nk} = 1,$$

so ergibt die Identität

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = e^{x + x^2 + x^3 + \dots},$$

daß die fragliche Zahl auch von  $n$  unabhängig und genau  $= 1$  ist.<sup>2)</sup> Also gilt die Ungleichung

$$(4) \quad |B_{n,k}| \leq \frac{M^n}{R^{n k}}.$$

3. Aus Formel (2) schließen wir

$$(2') \quad 1 + a_{1,k} x^k + a_{2,k} x^{2k} + \dots + a_{n,k} x^{n k} + \dots = \left(1 - x^k \sum \frac{1}{\alpha_1^k} + x^{2k} \sum \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n k}}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k}\right) (1 + B_{1,k} x^k + \dots).$$

Dabei sind durch die  $\sum$  immer diejenigen elementaren symmetrischen Funktionen der  $n$  Zahlen  $\frac{1}{\alpha_1^k}, \frac{1}{\alpha_2^k}, \dots, \frac{1}{\alpha_n^k}$  angedeutet, die mit dem dahinterstehenden Gliede beginnen.

1) Abgesehen von den Vorzeichen, ist (3) mit der sogenannten *Waring'schen Formel* identisch. Vgl. z. B. Serret, *Algebra*, üb. Wertheim (1878) I S. 376—377.

2) Vgl. z. B. Serret, l. c. II. S. 218—219.

Aus (2') folgt durch Koeffizientenvergleichung

$$\begin{aligned}
 a_{n,k} &= \frac{(-1)^n}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k} + (-1)^{n-1} B_{1,k} \sum \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_{n-1}^k} + \dots + B_{n,k} \\
 &\quad a_{n,k} \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \dots \alpha_n^k = (-1)^n + \\
 &\quad + (-1)^{n-1} (B_{1,k} \alpha_1^k + B_{1,k} \alpha_2^k + \dots + B_{1,k} \alpha_n^k) \\
 &\quad + (-1)^{n-2} (B_{2,k} \alpha_1^k \alpha_2^k + B_{2,k} \alpha_1^k \alpha_3^k + \dots + B_{2,k} \alpha_{n-1}^k \alpha_n^k) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + B_{n,k} \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k.
 \end{aligned}$$

Nach Abschätzung (4) ist

$$\begin{aligned}
 |B_{1,k} \alpha_1^k| &\leq M \left| \frac{\alpha_1}{R} \right|^k, \dots |B_{1,k} \alpha_n^k| \leq M \left| \frac{\alpha_n}{R} \right|^k \\
 |B_{2,k} \alpha_1^k \alpha_2^k| &\leq M^2 \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R^2} \right|^k, \dots |B_{2,k} \alpha_{n-1}^k \alpha_n^k| \leq M^2 \left| \frac{\alpha_{n-1} \alpha_n}{R^2} \right|^k \\
 &\dots \dots \dots \\
 |B_{n,k} \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k| &\leq M^n \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{R^n} \right|^k.
 \end{aligned}$$

Unter den  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$  Gliedern der Differenz

$$a_{n,k} \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k - (-1)^n$$

übersteigt kein einziges die Zahl  $M^n \left| \frac{\alpha_n}{R} \right|^k$ , also ist

$$\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k a_{n,k} = (-1)^n + \mathbf{O} \left( \left| \frac{\alpha_n}{R} \right|^k \right)$$

und somit ist Satz I bewiesen. —

Man findet ebenfalls durch Vergleichung der Koeffizienten in (2') die Gleichung

$$\begin{aligned}
 a_{n+1,k} &= (-1)^n \frac{B_{1,k}}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k} + (-1)^{n-1} B_{2,k} \sum \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_{n-1}^k} + \dots \\
 &\quad \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k R^k a_{n+1,k} = (-1)^n R^k B_{1,k} + \dots
 \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite der letztgewonnenen Gleichung nicht angeschriebenen Glieder haben höchstens die Ordnung  $\left| \frac{\alpha_n}{R} \right|^k$ , nach den eben gemachten Abschätzungen; also besteht von einem gewissen  $k$  an die Ungleichung

$$|\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k R^k a_{n+1,k}| < M + \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| R \sqrt[k]{|a_{n+1,k}|} \leq 1.$$

War aber  $\alpha_n$  die letzte Wurzel, so kann  $R = \rho - \varepsilon$  gesetzt werden, woraus die Richtigkeit des Satzes III folgt.

Um den Beweis von Satz II nicht zu sehr in die Länge zu ziehen, betrachten wir den Fall, daß

$$(5) \quad |\alpha_{p-1}| < |\alpha_p| = |\alpha_{p+1}| = |\alpha_{p+2}| = \dots = |\alpha_n|.$$

Dabei wird noch immer vorausgesetzt, entweder, daß  $\alpha_n$  die letzte Wurzel im Konvergenzkreise, oder daß

$$|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|;$$

ist. Wir werden beweisen, daß unter dieser Bedingung (5)

$$\limsup |\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k a_{p,k}| = n - p + 1.$$

Man erhält aus (2') durch Koeffizientenvergleichung, daß

$$\begin{aligned} a_{p,k} &= (-1)^p \sum \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k} + (-1)^{p-1} B_{1,k} \sum \frac{1}{\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_{p-1}^k} + \dots + B_{p,k} \\ \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k a_{p,k} &= (-1)^p \left( 1 + \frac{\alpha_p^k}{\alpha_{p+1}^k} + \frac{\alpha_p^k}{\alpha_{p+2}^k} + \dots + \frac{\alpha_p^k}{\alpha_n^k} \right) + \dots \end{aligned}$$

Auf Grund der Bedingung (5) und durch Betrachtung der elementaren symmetrischen Funktionen, ergibt sich mit Hilfe der Abschätzung (4), daß die Ordnung der durch die Punkte angedeuteten Glieder die größere der beiden Ordnungen  $\left| \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} \right|^k$  und  $\left| \frac{\alpha_p}{R} \right|^k$  nicht übersteigen kann. Die Anzahl dieser Glieder ist

$$\binom{n}{p} - (n - p + 1) + \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p-2} + \dots + 1,$$

eine von  $k$  unabhängige Zahl.

Ich behaupte *erstens*: da

$$1 = \left| \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} \right| = \left| \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+2}} \right| = \dots = \left| \frac{\alpha_p}{\alpha_n} \right|,$$

so folgt, daß für alle hinreichend großen  $k$

$$|\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k a_{p,k}| < n - p + 1 + \varepsilon,$$

wie klein auch  $\varepsilon > 0$  gewählt sei.

Ich bemerke *zweitens*: es kann gesetzt werden

$$\begin{aligned} \alpha_p &= |\alpha_p| e^{2\pi i \vartheta_p}, \quad \alpha_{p+1} = |\alpha_p| e^{2\pi i \vartheta_{p+1}}, \quad \dots \quad \alpha_n = |\alpha_p| e^{2\pi i \vartheta_n} \\ 1 + \frac{\alpha_p^k}{\alpha_{p-1}^k} + \dots + \frac{\alpha_p^k}{\alpha_n^k} &= 1 + e^{2\pi i (\vartheta_p - \vartheta_{p+1})k} + \dots + e^{2\pi i (\vartheta_p - \vartheta_n)k}. \end{aligned}$$

Man kann<sup>1)</sup>  $k$  eine solche spezielle unendliche Folge von ganzen Zahlen durchlaufen lassen, daß für diese Werte von  $k$  die  $n - p$  Zahlen

$$(\vartheta_p - \vartheta_{p+1})k - [(\vartheta_p - \vartheta_{p+1})k], \dots, (\vartheta_p - \vartheta_n)k - [(\vartheta_p - \vartheta_n)k], \dots$$

1) Vgl. z. B. H. Minkowski, Diophantische Approximationen (1907) S. 8.

gleichzeitig gegen Null konvergieren. ( $[x]$  bedeutet die größte ganze Zahl, die  $\leq x$  ist.)

Also ist für *unendlich viele* Werte von  $k$

$$|\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k a_{p,k}| > n - p + 1 - \varepsilon.$$

Die beiden Ungleichungen zusammen sagen aus, daß

$$\limsup_{k=\infty} |\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_p^k a_{p,k}| = n - p + 1,$$

w. z. b. w.

Waren zufälligerweise

$$\alpha_p = \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_n,$$

so ist in der letztgewonnenen Gleichung  $\limsup$  durch  $\lim$  zu ersetzen.

Führt man den Beweis für Satz II allgemein und nicht unter der speziellen Bedingung (5), so tritt an die Stelle der Zahl  $n - p + 1$  ein gewisser Binomialkoeffizient.

4. Zur Ergänzung betrachten wir noch den Fall, wo keine Wurzeln im Innern des Konvergenzkreises liegen. In diesem Falle haben die logarithmische Ableitung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = t_1 + t_2 x + \dots + t_n x^{n-1} + \dots$$

und die ursprüngliche Potenzreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ &= e^{\frac{t_1 x}{1} + \frac{t_2 x^2}{2} + \frac{t_3 x^3}{3} + \dots} \end{aligned}$$

den nämlichen Konvergenzkreis vom Radius  $\rho$ .

Nun ist (vgl. die Formel (2), (3))

$$a_{1,k} = t_k$$

und folglich

$$\limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{|a_{1,k}|} = \limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{|t_k|} = \frac{1}{\rho}.$$

Nach dieser Bemerkung können wir die Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle beginnen. Wir betrachten die Folge von positiven Zahlen

$$(6) \quad \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_{1,k}|}}, \frac{\limsup \sqrt[k]{|a_{1,k}|}}{\limsup \sqrt[k]{|a_{2,k}|}}, \frac{\limsup \sqrt[k]{|a_{2,k}|}}{\limsup \sqrt[k]{|a_{3,k}|}}, \dots$$

Wird ein Glied dieser Folge (6) durch Verschwinden des Nenners sinnlos, so setzen wir dieses Glied  $= +\infty$ , und brechen mit ihm die Folge (6) ab.

Erster Fall: alle Glieder der Folge (6) sind *kleiner* als die Zahl  $\rho$  (mit Ausschluß der Gleichheit). In diesem Falle muß die Potenzreihe

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

unendlich viele Wurzeln im Innern des Konvergenzkreises haben, und die Folge (6) muß eine nie abnehmende Folge von positiven Zahlen sein, die gegen  $\rho$  konvergieren; und zwar stellen die nacheinanderfolgenden Glieder der Folge (6) die absoluten Beträge der der Größe nach geordneten Wurzeln dar, jede Wurzel mit ihrer Multiplizität berücksichtigt.

Hätte nämlich  $f(x)$  keine Wurzeln im Konvergenzkreise, so wäre schon das erste Glied der Folge (6)  $= \rho$ . Oder wenn  $f(x)$  nur eine endliche Anzahl ( $n$ ) Wurzeln im Innern des Konvergenzkreises besäße, so wären (kraft der Sätze I und II) die ersten  $n$  Glieder der Folge (6) die absoluten Beträge dieser  $n$  Wurzeln, und das  $n + 1^{\text{te}}$  Glied wäre — kraft des Satzes III —  $\geq \rho$ .

Zweiter Fall: das  $n + 1^{\text{te}}$  Glied in der Folge (6) ist das erste, dessen Wert  $\geq \rho$  ist; in diesem Falle hat  $f(x)$  genau  $n$  Wurzeln.

Betrachten wir die Folge (6) nur bis zum ersten Glied (dieses eingeschlossen), das  $\geq \rho$  ist, so hat sie folgende Eigenschaft: ist ein Glied kleiner (also nicht gleich) als das nächstfolgende, so ist im Nenner dieses Gliedes das Zeichen  $\lim \sup$  durch  $\lim$  zu ersetzen.

Diese Sätze geben uns ein theoretisches Verfahren, um die absoluten Beträge der Wurzeln irgendeiner Potenzreihe zu berechnen. Sind alle Wurzeln von verschiedenem absoluten Betrage, und sind die Koeffizienten reell, so ist man selten im Zweifel, welches Vorzeichen den Wurzeln zu geben ist; sind aber die Koeffizienten komplex, jedoch die Wurzeln von verschiedenen absoluten Beträgen, so gestattet noch immer der Satz I die Berechnung der Argumente. Aus Satz I folgt nämlich, für  $|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|$ ,

$$\lim_{k=\infty} \frac{\alpha_{n,k}}{\alpha_{n,k+1}} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Ist also auch

$$|\alpha_{n-1}| < |\alpha_n|,$$

so ist

$$\lim_{k=\infty} \frac{\alpha_{n-1,k+1} \alpha_{n,k}}{\alpha_{n-1,k} \alpha_{n,k+1}} = \alpha_n.$$

Nach einem interessanten Gedankengang von J. König<sup>1)</sup> könnte man, wenn die Bedingung  $|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|$  besteht, nur aus den Vorzeichen der reellen Teile der Zahlen

$$\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \dots, \alpha_{n,k}, \dots$$

1) J. König: Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades. Math. Ann. IX, S. 530 u. ff.

die Summe der Argumente der ersten  $n$  Wurzeln berechnen. Der Beweis beruht ebenfalls auf Satz I; dies wollen wir aber nicht näher ausführen.

5. Diese Resultate zeigen eine merkwürdige Verwandtschaft mit den wohlbekannten Resultaten von Hadamard.<sup>1)</sup>

Um die beiden Verfahren zu vergleichen, denken wir uns die Aufgabe vorgelegt, aus den Koeffizienten der logarithmischen Ableitung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \dots + t_n x^{n-1} + \dots$$

die Wurzeln von  $f(x)$  zu berechnen.

Für die Berechnung der Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage fallen beide Methoden miteinander und mit der alten Bernoullischen Methode (im wesentlichen) zusammen; man bildet

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|t_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{1,k}|}} = |\alpha_1|.$$

Um die größeren Wurzeln zu finden, bildet man nach Hadamard die Determinante

$$D_{k,n-1} = \begin{vmatrix} t_k & t_{k+1} & \dots & t_{k+n-1} \\ t_{k+1} & t_{k+2} & \dots & t_{k+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{k+n-1} & t_{k+n} & \dots & t_{k+2n-2} \end{vmatrix}$$

also eine rationale ganze Funktion der  $2n - 1$  *konsekutiven* Koeffizienten

$$t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+2n-2}.$$

$D_{k,n-1}$  ist „isobar“ vom Gewichte  $nk + n(n-1)$ , wenn jedem Koeffizienten  $t_k$  sein Index  $k$  als Gewicht beigelegt wird.

Oben wurde der Ausdruck

$$a_{n,k} = \sum \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \binom{t_k}{1}^{\lambda_1} \binom{t_{2k}}{2}^{\lambda_2} \dots \binom{t_{nk}}{n}^{\lambda_n}$$

gebildet (vgl. Formel (3)), also eine ganze rationale Funktion der  $n$  *äquidistanten* Koeffizienten

$$t_k, t_{2k}, t_{3k}, \dots, t_{nk}.$$

$a_{n,k}$  ist isobar vom Gewichte  $nk$ , zufolge der Bedingung

$$1 \lambda_1 + 2 \lambda_2 + 3 \lambda_3 + \dots + n \lambda_n = n.$$

1) Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de Mathématiques p. et appl. (4 série, 8) (1892) S. 101 bis 186. Vgl. S. 118—154. Hadamard: La série de Taylor (Scientia) (1901), S. 38—43, 91—93.



Man hat nach Hadamard

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|D_{k,n-1}|} = \frac{1}{|\alpha_{v_1} \alpha_{v_2} \dots \alpha_{v_n}|},$$

wo  $\alpha_{v_1}, \alpha_{v_2}, \dots, \alpha_{v_n}$  die  $n$  verschiedenen Nullstellen vom kleinsten absoluten Betrage bedeuten, ohne Rücksicht auf die Mehrfachheit. (Mehrfache Wurzeln von  $f(x)$  sind nur einfache Pole der logarithmischen Ableitung.)

Nach Satz I und Satz II ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{n,k}|} = \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|}.$$

In letzterer Formel treten mehrfache Wurzeln so oft auf, wie ihre Multiplizität beträgt; dasselbe Resultat wird nach Hadamard erzielt, wenn man die Determinante  $D_{k,n-1}$  nicht aus den Koeffizienten der logarithmischen Ableitung, sondern aus den Koeffizienten der Potenzreihe

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

bildet.

Ist  $|\alpha_{v_n}| < |\alpha_{v_{n+1}}|$ , so besteht die Gleichung<sup>1)</sup>

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{v_1}^k \alpha_{v_2}^k \dots \alpha_{v_n}^k D_{k,n-1} = (-1)^n m_1 m_2 \dots m_n \prod_{j < k}^{1 \dots n} \left( \frac{1}{\alpha_{v_j}} - \frac{1}{\alpha_{v_k}} \right)^2,$$

wo die positiven ganzen Zahlen

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$$

die Multiplizität der Wurzeln  $\alpha_{v_1}, \alpha_{v_2}, \dots, \alpha_{v_n}$  bedeuten; und zwar konvergiert der Ausdruck linker Hand gegen seinen Grenzwert mit einem Fehler, dessen Ordnung  $\left( \frac{|\alpha_{v_n}|}{|\alpha_{v_{n+1}}| - \varepsilon} \right)^k$  ist. Dies ist das Analogon zu unserem Satz I. Wäre die Determinante  $D_{k,n-1}$  anstatt aus den Koeffizienten von  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  aus den Koeffizienten von  $\frac{1}{f(x)}$  gebildet, so würde zwar unter der Bedingung  $|\alpha_n| < |\alpha_{n+1}|$  die Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_{k,n-1}}{D_{k+1,n-1}} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

gelten, dagegen würde der Ausdruck  $\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_n^k D_{k,n-1}$  im allgemeinen keinem bestimmten Grenzwert zustreben, wenn einige unter den Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  einander gleich wären.

1) Vivanti-Gutzmer: Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen (1906) S. 463. Man beachte, daß bei uns die Indices der Koeffizienten um 1 verschoben sind.

6. Wir haben das Hadamardsche und das Graeffesche Verfahren nur in bezug auf die Berechnung der absoluten Werte der im Konvergenzkreis liegenden Wurzeln verglichen. Beide Verfahren gestatten auch die Argumente dieser Wurzeln zu berechnen, aber die dazu angewandten Mittel sind zu heterogen, um mit Nutzen verglichen werden zu können. Das Hadamardsche Verfahren besitzt übrigens eine viel allgemeinere Bedeutung, die jedoch hier nicht berührt zu werden braucht.

Läßt man  $k$  alle ganzen Zahlen durchlaufen, so leisten die beiden Methoden bei Berechnung der absoluten Werte ungefähr dasselbe; auch die Genauigkeit der Annäherung ist von derselben Ordnung, nämlich

$$O\left(\left(\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}| - \varepsilon}\right)^k\right).$$

Einen entschiedenen Vorsprung gewinnt das Graeffesche Verfahren von rechnerischem Standpunkt aus erst dadurch, daß man  $k$  nur die Potenzen von 2 durchlaufen läßt. Dadurch wird erstens die Genauigkeit nach dem  $k$ -ten Schritt ganz erheblich gesteigert; man hat ja für  $\alpha_n < |\alpha_{n+1}|$  nach Satz I:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = \frac{1}{\sqrt[2^k]{a_{n,2^k}}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{2^k} \left(\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}| - \varepsilon}\right)^{2^k}\right) \right\}.$$

Der zweite, und vielleicht noch wichtigere Vorteil ist, daß

$$a_{0,2^k}, a_{1,2^k}, a_{2,2^k}, \dots, a_{n,2^k}, \dots$$

sich sehr einfach und alle *zu gleicher Zeit* aus

$$a_{0,k}, a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{n,k}, \dots$$

berechnen lassen. Man bildet nämlich die dreieckige Tafel

$$(7) \quad \begin{array}{cccccc} a_{0,k}^2 & - a_{1,k}^2 & a_{2,k}^2 & - a_{3,k}^2 & + a_{4,k}^2 & \dots \\ & + 2 a_{0,k} a_{2,k} & - 2 a_{1,k} a_{3,k} & + 2 a_{2,k} a_{4,k} & - 2 a_{3,k} a_{5,k} & \dots \\ & & + 2 a_{0,k} a_{4,k} & - 2 a_{1,k} a_{5,k} & + 2 a_{2,k} a_{6,k} & \dots \\ & & & + 2 a_{0,k} a_{6,k} & - 2 a_{1,k} a_{7,k} & \dots \\ & & & & + 2 a_{0,k} a_{8,k} & \dots \end{array}$$

Dann sind die Summen der aufeinanderfolgenden vertikalen Kolonnen gerade

$$a_{0,2^k}, a_{1,2^k}, a_{2,2^k}, a_{3,2^k}, a_{4,2^k}, \dots$$

(wir haben bisher immer  $a_{0,k} = 1$  gesetzt).

Läßt man  $k$  anstatt durch alle positiven ganzen Zahlen nur durch die Potenzen von 2 ins Unendliche wachsen, so bleiben immerhin die Sätze I und III vollständig richtig. Bei dem Satz II muß aber das Gleichheitszeichen durch das Zeichen  $\leq$  ersetzt werden.

Die reellen und die rein imaginären Wurzeln und überhaupt die Wurzeln, deren Arcus die Form  $2\pi \frac{p}{2^r}$  ( $p, r$  ganz) hat, spielen hier eine ausgezeichnete Rolle, indem ihre  $2^k$ -ten Potenzen von einem gewissen  $k$  an positiv werden. —

7. Um die ersten  $n + 1$  Koeffizienten von  $f(x)f(-x)$ , d. h.  $a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{n,2}$  zu berechnen, braucht man nur die  $2n + 1$  ersten Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  der vorgelegten Reihe  $f(x)$  in Rechnung zu ziehen. Um also z. B. bei der 4<sup>ten</sup> Annäherung (in der Gleichung für die 16<sup>ten</sup> Potenzen) fünf Koeffizienten zu erhalten, (so viele Koeffizienten sind zur Berechnung von vier Wurzeln nötig) muß man von 65 Koeffizienten der vorgelegten Reihe ausgehen.

Da manchmal eben die Berechnung der Koeffizienten der vorgelegten Reihe den schwierigsten Teil der Arbeit bildet, wird man darauf geführt, mit nicht vollständig berechneten Koeffizienten in den Gleichungen für die 2<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup> ... Potenzen zu arbeiten.

So berechnete ich zur Stichprobe die wohlbekanntesten Wurzeln der Gleichung

$$J_0(2\sqrt{z}) = 1 - \frac{z}{1!^2} + \frac{z^2}{2!^2} - \frac{z^3}{3!^2} + \dots = 0$$

nach dem Graeffschen Verfahren. Ich berechnete 17 Koeffizienten (der letzte war also  $\frac{1}{16!^2}$ ); aus diesen 17 Koeffizienten lassen sich vollständig nur 9 Koeffizienten in der Gleichung für  $z^2$  berechnen; ich berechnete noch zwei Koeffizienten ( $a_{9,2}, a_{10,2}$ ), also insgesamt elf, und vernachlässigte den Teil der Ausdrücke von  $a_{9,2}$  und  $a_{10,2}$ , der von  $\frac{1}{17!^2}, \frac{1}{18!^2}, \frac{1}{19!^2}, \frac{1}{20!^2}$  abhängt. So fuhr ich fort, indem ich in der Gleichung für

	$z$	$z^2$	$z^4$	$z^8$	$z^{16}$
bzw.	17	11	7	7	5

Koeffizienten hatte. Hätte ich mich auf „vollständig“ berechnete Koeffizienten beschränkt, so hätte ich in diesen Gleichungen bzw. nur

17	9	5	3	2
----	---	---	---	---

Koeffizienten gehabt. Hätte ich andererseits in der Gleichung für  $z^{16}$  fünf vollständig berechnete Koeffizienten haben wollen, so hätte ich

65	33	17	9	5
----	----	----	---	---

Koeffizienten in diesen Gleichungen berechnen müssen.

Dieses Vernachlässigungsverfahren kommt im wesentlichen auf dasselbe hinaus, was Carvallo<sup>1)</sup> vorgeschlagen hat: man nehme einen

1) Siehe a. a. O. S. 24—26.

„genügend“ hohen Abschnitt der Potenzreihe, und wende das Graeffesche Verfahren auf diesen Abschnitt an. So z. B. hatte ich aus der Gleichung für  $z^{16}$  3 Wurzeln berechnet. Eigentlich ist aber nur der für die erste Wurzel erhaltene Wert ein Näherungswert für die Wurzel der Gleichung  $J_0(2\sqrt{z}) = 0$ ; die übrigen drei Werte sind Näherungswerte, im Sinne des Graeffeschen Verfahrens, für die kleinsten Wurzeln des 17<sup>ten</sup> Abschnittes der Potenzreihe. Ähnlicherweise hat Carvallo in seinem Beispiel ( $\frac{1}{3} = \sin z$ ) in der Gleichung für

$$\begin{matrix} z & z^2 & z^4 & z^8 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Koeffizienten.

Ich wählte mir ein Beispiel, wo die Vernachlässigung systematisch und mit einer rationalen Kontrolle gemacht werden kann.  $J_0(2\sqrt{z})$  ist eine ganze transzendente Funktion, mit lauter reellen positiven Wurzeln, und vom Geschlechte Null.<sup>1)</sup> Folglich sind die Koeffizienten in der Gleichung

$$J_0(2\sqrt{z}) J_0(2\sqrt{\omega z}) \dots J_0(2\sqrt{\omega^{k-1}z}) = 0$$

— nach einer Bemerkung in 1 — bei jedem  $k$  von abwechselndem Vorzeichen. Ich habe die nicht vollständig berechneten Koeffizienten bis zu dem letzten (einschließlich) beibehalten, der noch ein richtiges Vorzeichen gezeigt hat. Trotzdem merkte man schon an der Größenordnung, daß die letzten beibehaltenen Koeffizienten „schlecht“ waren.

Das erhellt aus dem Resultat der Rechnung ebenfalls.

$n$	$a'_{n,8}$	$a'_{n,16}$	$2\sqrt[4]{\frac{a'_{n-1,8}}{a'_{n,8}}}$	$2\sqrt[8]{\frac{a'_{n-1,16}}{a'_{n,16}}}$	$n^{\text{te}}$ Wurzel von $J_0(x)$
1	<sup>-2</sup> 523772	<sup>-3</sup> 274337	2,404	2,4048	2,4048
2	<sup>-9</sup> 463224	<sup>-17</sup> 214294	5,518	5,5193	5,5201
3	<sup>-19</sup> 270018	<sup>-38</sup> 705470	8,722	8,7320	8,6537
4	<sup>-31</sup> 253939	<sup>-62</sup> 644363	11,29	11,278	11,7915
5	<sup>-47</sup> 900748		18,49		14,9309
6	<sup>-60</sup> 273450		13,96		18,0711

(Mit dem Akzent in  $a'_{n,8}$ ,  $a'_{n,16}$  will ich andeuten, daß diese Koeffizienten, wie eben gesagt, nicht vollständig berechnet waren. — <sup>-3</sup>274337 bedeutet  $2,74337 \times 10^{-3}$ . — Die Zahlen in der zweiten und in

1) Ein einfacher Beweis steht bei Laguerre: Oeuvres I, S. 202—204.

der dritten Spalte wurden, ebenso wie die Koeffizienten von  $J_0(2\sqrt{z})$  mit der Rechenmaschine auf sechs Stellen genau berechnet. — Die Zahlen der sechsten Spalte sind dem Jahnke-Emdeschen Buche entnommen.<sup>1)</sup>

Aus der Gleichung für  $z^8$  berechnet ist die 5<sup>te</sup> Wurzel größer als die 6<sup>te</sup>; das spricht dafür, daß die beiden letzten Koeffizienten schon „schlecht“ sind. Die 3<sup>te</sup> und die 4<sup>te</sup> Wurzel scheinen eine konstante Abweichung vom wahren Wert zu zeigen.

Dieser Sachverhalt erklärt sich wahrscheinlich so: das Rechnen mit unvollständig berechneten Koeffizienten läuft, wie schon gesagt, ungefähr darauf hinaus, die Wurzeln eines gewissen Abschnittes anstatt der Wurzeln der Potenzreihe zu approximieren. Nun nähern sich im allgemeinen nur die absolut kleinsten Wurzeln der Abschnitte den Wurzeln der Potenzreihe, während die größeren aus dem Konvergenz- kreise hinaus, oder ins Unendliche streben. Ein schlagendes Beispiel für dieses Verhalten liefern die wohlbekannteren Reihen für  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ , ... Alle diese Reihen stellen ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen einfachen Wurzeln dar, während alle ihre Abschnitte, von einem gewissen an, imaginäre Wurzeln haben (was sich leicht mit Hilfe der Newtonschen Regel zeigen läßt<sup>2)</sup>); so haben z. B. nur die ersten beiden Abschnitte der Reihe  $J_0(2\sqrt{z})$  lauter reelle Wurzeln. Die paarweise auftretenden imaginären Wurzeln der Abschnitte können natürlich nicht nach den einfachen Wurzeln der Funktionen konvergieren, und müssen folglich ins Unendliche streben. — Wenn die Arbeit mit unvollständig berechneten Koeffizienten auf schlechte Resultate führt, so ist dies, wie es scheint, hauptsächlich diesen „überflüssigen“ Wurzeln der Abschnitte zuzuschreiben.

Die im Falle von  $J_0(2\sqrt{z})$  angewandte Kontrolle (richtiges Vorzeichen) ist zwar einfach und systematisch, aber keineswegs sicher, und dabei nur ganz selten anzuwenden. Carvallo schlug vor, die Differenz des Abschnittes und der Reihe in einem gewissen Kreise abzuschätzen, und nur solche Wurzeln des Abschnittes zu betrachten, die innerhalb dieses Kreises liegen.

Das Graeffesche Verfahren scheint nur auf die Berechnung der kleinsten Wurzeln von Potenzreihen mit Vorteil angewandt werden zu können; die gefundenen Werte müssen durch Einsetzen probiert und

1) Jahnke und Emde, Funktionentafeln (Leipzig 1909) S. 122. Tafel IV.

2) Vgl. für diese und ähnliche Erscheinungen meine Arbeit, Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1913, 2, S. 279—295; ferner eine im Archiv d. Math. u. Physik erscheinende Arbeit des Herrn Lukács: Über eine Eigenschaft des Konvergenzkreises.

auf anderem Wege verfeinert werden. Darum ist auch die Rechnung mit unvollständig berechneten Koeffizienten, selbst wenn man sich, ohne genaue Kontrolle, nur durch die Größenordnung führen läßt, nicht völlig abzuraten. Die kleinsten Wurzeln der Abschnitte nähern sich besser den Wurzeln der Reihe, und da die Werte ohnehin durch Einsetzen kontrolliert werden, riskiert man nicht viel dabei.

Die Entscheidung darüber, wie viele Koeffizienten der vorgelegten Reihe zu berechnen, und wie viele Koeffizienten bei den sukzessiven Schritten mitzunehmen sind, bildet das eigentlich Neue gegenüber der Anwendung auf Polynome. Die übrigen Regeln über Reihenfolge der Rechnungen, Erkennung der imaginären Wurzeln, „Zerfällung“ der Gleichung, Beendigen der Rechnung usw. — dürften für Potenzreihen ebenso lauten wie für Polynome.

Es wurden in den ersten Abschnitten dieser Arbeit nicht alle üblichen Kunstgriffe des Graeffeschen Verfahrens gerechtfertigt (jedoch alle, die z. B. in Anwendung auf Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln vorkommen); ich meine aber, daß diese Kunstgriffe bei Potenzreihen zu rechtfertigen nach den gegebenen Ausführungen kaum viel schwieriger sein dürfte als bei Polynomen.



## Sopra la determinazione delle parti visibili di un poliedro rappresentato graficamente

di GINO LORIA a Genova.

Supporremo, come è lecito ed utile di fare, che i piani di proiezione siano trasparenti, mentre che tali non siano i solidi che si rappresentano con i metodi propri della Geometria descrittiva. Si presenta allora la questione di determinare quali siano le facce e gli spigoli d'un assegnata figura poliedrica che riescono visibili all'occhio dell'osservatore, supposto questo situato nel punto ove giace il centro di proiezione, tanto se questo sia un punto proprio, quanto se esso si trovi all'infinito. Siccome si ha l'abitudine di segnare con un tratto continuo soltanto gli spigoli che sono visibili, così la risoluzione di tale questione è indispensabile per eseguire esattamente il punteggiato di qualsiasi disegno di Geometria descrittiva. I trattati da noi conosciuti non danno sopra tale questione regole abbastanza esatte, complete, generali per permettere a tutti di risolverla in ogni caso, cioè qualunque sia la figura che si considera e qualunque sia il metodo di rappresentazione che si usa; si direbbe, anzi, che gli autori suppongono che il disegnatore sia già in

possemo di un concetto chiaro della forma e della posizione della figura rappresentata rispetto agli elementi di riferimento; mentre, all'opposto, uno degli scopi che si vogliono conseguire mediante le figure della Geometria descrittiva è appunto quelle di permettere o di agevolare la concezione della struttura e della situazione delle figure rappresentate. Ora (se non c'inganniamo) le osservazioni esposte nel presente articolo bastano a togliere qualunque incertezza intorno al modo di punteggiare le figure di Geometria descrittiva relative ai poliedri regolari convessi, nell'ipotesi che se ne conosca già la rappresentazione grafica, anche alle persone che non possiedono una spiccata facoltà di concepire le figure a tre dimensioni; anzi il lettore vedrà agevolmente che le regole da noi date possono servire anche quando si tratti di figure più complicate degli ordinari poliedri.

Cominceremo con alcune osservazioni generali semplicissime; ne mostreremo poi l'applicazione al Metodo di Monge (doppia proiezione ortogonale), ai Piani quotati ed alla Proiezione centrale, finendo con qualche generalità concernente l'Assonometria ortogonale.

### Considerazioni generali.

Si suppongano dati un poliedro convesso ed un centro di proiezione (non necessariamente a distanza finita). Qualunque retta passante per questo punto taglia\* la superficie del poliedro in 2, 1 o 0 punti; nel primo caso la si chiami *secante* e nel secondo *tangente* del poliedro: in questo secondo caso essa incontra il *contorno apparente* del poliedro guardato dal centro di proiezione. Evidentemente dei due punti in cui una retta secante un poliedro ne incontra la superficie uno ed un solo è visibile, e, precisamente, è visibile il punto più vicino al centro di proiezione; invece il *punto di contatto* di una retta tangente è sempre visibile.

Emerge da ciò che la proiezione sopra un piano qualunque di un poliedro convesso ricopre *doppiamente* una regione (*semplicemente*) *connessa* del quadro: coll'avverbio "doppiamente" noi intendiamo esprimere che ogni punto di tale regione corrisponde a due punti della superficie poliedrica; mentre all'aggettivo "connesso" noi attribuiamo un senso un po' più ampio del solito, giacchè noi intendiamo che due punti della regione possano congiungersi sempre col mezzo di una linea tutta situata nella regione e chiusa *eventualmente all'infinito* (come ciò succede nei pseudo-poligoni<sup>1)</sup> o nella regione costituita da tutti i punti interni

1) Cfr. le mie Vorlesungen über darstellende Geometrie (Leipzig, Teubner, 1907 e 1913), I. Tl. p. 101. Avverto che, in generale, nel presente scritto mi servirò delle notazioni e della nomenclatura ivi usate.

d'una iperbola). Il contorno di siffatta regione di piano altro non è che la proiezione del contorno apparente del poliedro, vale a dire il luogo geometrico delle tracce sopra il piano di proiezione di tutte le rette tangenti al poliedro stesso.

Se una faccia di un poliedro convesso contiene un punto  $\left\{ \begin{array}{l} \text{visibile} \\ \text{invisibile} \end{array} \right\}$  non situato sul contorno apparente, tale faccia è tutta  $\left\{ \begin{array}{l} \text{visibile} \\ \text{invisibile} \end{array} \right\}$ ; di modo che per riconoscere se una faccia sia visibile basta accertarsi che sia visibile un suo punto non appartenente al contorno apparente del poliedro. A tale scopo consideriamo una retta che passi per il centro di proiezione ed incontri in un punto  $M$  la faccia considerata; essa taglierà una seconda faccia della superficie; sia  $N$  questo nuovo punto d'incontro; ora dei due punti  $M$  e  $N$  uno solo è visibile dal centro di proiezione; secondo che lo è il punto  $M$  od il punto  $N$  sarà visibile la prima o la seconda delle facce di cui si è parlato. Dimodochè la ricerca sulla visibilità è ricondotta alla determinazione di quale dei due punti  $M$ ,  $N$  sia più vicino al centro di proiezione.

Quando si sia riconosciuto direttamente col mezzo di questo artificio che una certa faccia  $f_1$  del poliedro dato è visibile (od invisibile) si può dedurne se lo sia un'altra faccia qualunque, come ora mostriamo. La proiezione  $f'_1$  della faccia  $f_1$  avrà una determinata regione  $f'$  comune con la proiezione di una cert'altra faccia  $f_2$  del poliedro considerato; ora è chiaro che se  $f_1$  è visibile,  $f_2$  sarà invisibile e viceversa. Ragionando ora sopra  $f_2$  come si fece sopra  $f_1$  e seguitando con lo stesso metodo si giungerà ad investigare tutte le facce del poliedro dal punto di vista della visibilità. Allora si sarà in grado di decidere anche quali siano gli spigoli visibili, perchè è chiaro che lo spigolo comune a due facce visibili è sempre visibile, mentre due facce invisibili si tagliano in uno spigolo invisibile e lo spigolo comune ad una faccia visibile e ad una invisibile è visibile ed appartiene al contorno apparente del poliedro.

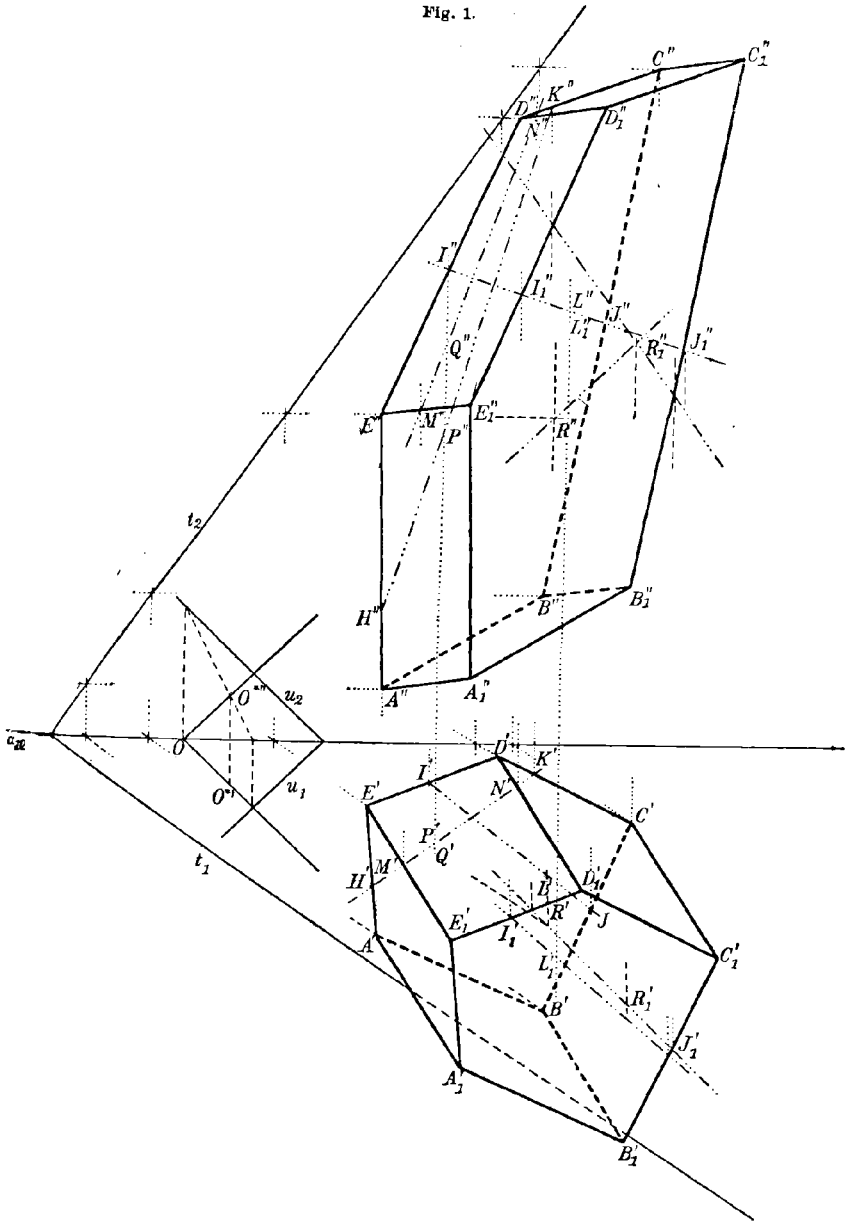
### Metodo di Monge.

Per chiarezza e semplicità della nostra esposizione giova ragionare sopra un caso particolare; ma i lettori vedranno subito che le nostre considerazioni sono sempre applicabili, fatte le modificazioni necessarie caso per caso.

Supponiamo, dunque, che si abbia (Fig. 1) un prisma avente per base un poligono  $ABCDE$ , posto in un piano arbitrario (determinato dalle sue tracce  $t_1$  e  $t_2$ ) e di cui sia nota la proiezione orizzontale  $A'B'C'D'E'$ .



Fig. 1.



Per completare la determinazione di questo poliedro supporremo conosciute le due proiezioni  $A'_1$  e  $A''_1$  del vertice  $A_1$  della seconda base che corrisponde al vertice  $A$  della prima. La proiezione orizzontale del prisma si completa subito perchè i suoi spigoli laterali sono rette fra loro equipollenti e la relazione di equipollenza non scompare passando da una figura ad una sua proiezione parallela. Similmente si trovano le proiezioni verticali di tutti i vertici, dopo di avere determinata la proiezione verticale della base  $ABCDE$  mediante una nota procedura.

Giunti a questo punto, per distinguere le parti visibili dalle invisibili, è necessario considerare separatamente le due proiezioni del poliedro.

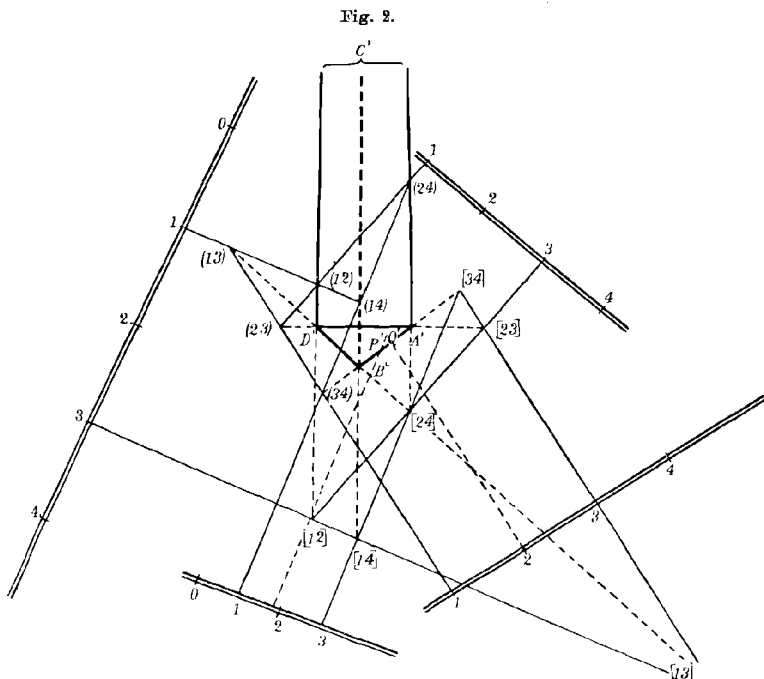
**Proiezione orizzontale.** L'ispezione della figura mostra che i due poligoni  $A'B'C'D'E'$  e  $A'B'_1C'_1D'_1$  hanno una regione comune; fissiamo ad arbitrio un punto di tale regione e consideriamolo come proiezione di un punto  $P$  della base  $ABCDE$  e di un punto  $Q$  della faccia  $DEE_1D_1$ ; determiniamo i punti  $P''$  e  $Q''$ . A tal fine conduciamo per il punto  $P' \equiv Q'$  una retta arbitraria che tagli le rette  $A'E'$  e  $C'D'$  risp. in  $H'$  e  $K'$  e le rette  $E'E'_1$  e  $D'D'_1$  risp. in  $M'$  e  $N'$ .  $H''$  sarà l'intersezione dell'ordinata del punto  $H'$  con la retta  $A''E''$ ; in un modo perfettamente analogo si trovano i punti  $K''$ ,  $M''$ ,  $N''$ . Uniamo mediante rette  $H''$  a  $K''$  e  $M''$  a  $N''$ ; tali rette saranno incontrate dall'ordinata del punto  $P' \equiv Q'$  nei due punti cercati  $P''$  e  $Q''$ . Ora l'esame della figura mostra che la quota orizzontale del punto  $Q$  è maggiore di quella del punto  $P$ ; ciò prova che il primo punto è visibile, mentre il secondo è nascosto, per conseguenza la base  $ABCDE$  è invisibile, mentre è visibile la faccia laterale  $DEE_1D_1$ . Ora i due poligoni  $A'B'C'D'E'$  e  $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$  hanno una regione comune, dunque la seconda base del prisma è visibile; in modo analogo si riconosce che anche le due facce  $CDD_1C_1$  e  $AEE_1A_1$  sono visibili, mentre che le due rimanenti sono nascoste. Segue da ciò che sono invisibili i soli spigoli del prisma che escono dal vertice  $B$ . La Fig. 1 venne punteggiata in base a tali conclusioni.

**Proiezione verticale.** I due poligoni  $A''B''C''D''E''$  e  $A''_1B''_1C''_1D''_1E''_1$  hanno una regione in comune; sia  $L'' \equiv L''_1$  un punto di tale regione, che noi consideriamo come proiezione di un punto  $L$  della prima base del prisma e di un punto  $L_1$  della seconda. Una retta condotta per quel punto taglia le rette  $D''E''$ ,  $D''_1E''_1$ ,  $B''C''$ ,  $B''_1C''_1$  risp. nei punti  $I''$ ,  $I''_1$ ,  $J''$ ,  $J''_1$ ; le corrispondenti ordinate danno sopra le rette  $D'E'$ ,  $D'_1D'_1$ ,  $B'C'$ ,  $B'_1C'_1$  risp. i punti  $I'$ ,  $I'_1$ ,  $J'$ ,  $J'_1$ ; conduciamo le rette  $I'J'$  e  $I'_1J'_1$ ; le loro intersezioni con l'ordinata del punto  $L'' \equiv L''_1$  saranno risp. i punti  $L'$  e  $L'_1$ . Ora, siccome la figura dimostra che la quota verticale del punto

$L_1$  è maggiore di quella di  $L$ , così è il primo di tali punti che è visibile, mentre non lo è l'altro; in conseguenza la prima base del prisma rimane nascosta, mentre la seconda è scoperta. Se, ora, si osserva che i due poligoni  $A''B''C''D''E''$  e  $A''E''E_1''A_1''$  si coprono in parte si vedrà che la faccia  $AE_1A_1$  è visibile; si riconosce similmente che le altre due facce  $DEE_1D_1$  e  $CDD_1C_1$  si trovano nella medesima condizione, mentre le due rimanenti facce sono nascoste. Ne segue che i tre spigoli  $BA$ ,  $BC$ ,  $BD$  sono gli unici invisibili in seconda proiezione; in conseguenza nella Fig. 1 le loro proiezioni verticali vennero punteggiate.

**Metodo dei piani quotati.**

Considerazioni del tutto analoghe possono servire quando si adoperi il metodo dei piani quotati. Per dimostrare la verità di tale asserto



sopra un esempio un po' diverso dal solito, consideriamo (Fig. 2) il tetraedro  $ABCD$  determinato da quattro piani di cui si conoscano le scale di pendenza. Per ottenere le proiezioni dei suoi vertici seghiamo tutta la figura con un piano orizzontale, p. es. con quello di quota 1; le rette condotte dai quattro punti segnati 1 sopra le date scale perpendicolarmente alle sedi delle scale stesse sono lati di un quadri-

latero completo i cui vertici (che noi indicheremo con i simboli (12), (13), (14), (23), (24), (34)) sono evidentemente le proiezioni ortogonali sul quadro delle intersezioni del piano orizzontale ausiliario con gli spigoli del tetraedro  $ABCD$ . Ripetiamo la stessa operazione mediante un secondo piano orizzontale, p. es. servendosi di quello di quota 3 ed otterremo in modo analogo i sei punti [12], [13], [14], [23], [24], [34]. Ne segue che le proiezioni dei sei spigoli sono le rette (12) [12], ..., (34) [34]. Queste rette passano tre a tre per i vertici del tetraedro; ad es. le rette (23) [23], (24) [24], (34) [34] concorrono nel punto  $A'$ . Ora la semplice ispezione della figura prova che i due triangoli  $A'B'C'$  e  $A'B'D'$  hanno una regione comune; prendiamo un punto di essa e designamolo con  $P'$  o con  $Q'$  secondo che è proiezione di un punto del piano  $ABD$  oppure del piano  $ABC$ ; con un noto procedimento si trova che la quota del punto  $P$  è eguale a 2, mentre che quella di  $P$  è minore di 2; ne segue che la faccia  $ABD$  è visibile, mentre non lo è la faccia  $ABC$ . Se ne trae che è pure visibile la faccia  $ACD$  mentre la rimanente  $BCD$  è nascosta; per ciò è invisibile il solo spigolo  $AC$ .

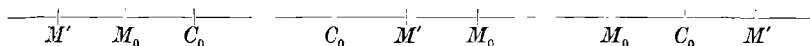
### Metodo della proiezione centrale.

Preliminari. Quando, per rappresentare un poliedro, si adopera il Metodo della proiezione centrale per fissare la posizione di ciascun vertice, oltre la proiezione, bisogna dare una retta ( $T, I'$ ) che lo contiene; ora nella scelta di tale retta non vi è limitazione alcuna, ma si può restringerne l'arbitrarietà assoggettando la traccia  $T$  od il punto di fuga  $I'$  a qualche condizione. Fra gli infiniti sistemi che si potrebbero immaginare uno ve n'ha che sembra particolarmente raccomandabile; esso nasce supponendo che le rette ausiliari relative a tutti i vertici  $M$  del poliedro abbiano il medesimo punto di fuga e come tale giova assumere il punto principale  $C_0$ ; allora la traccia della retta ausiliare non è che il piede  $M_0$  della perpendicolare calata dal punto  $M$  sopra il quadro. Si passa dalla rappresentazione generale del punto  $M \equiv (TI', M')$  a tale rappresentazione speciale ( $M_0, M'$ ) osservando che i tre punti  $M', M_0, C_0$  sono in linea retta e che le rette  $C_0I'$  e  $TM_0$  sono fra loro parallele.

Sopra questo speciale sistema di rappresentazione si possono fare le osservazioni seguenti:

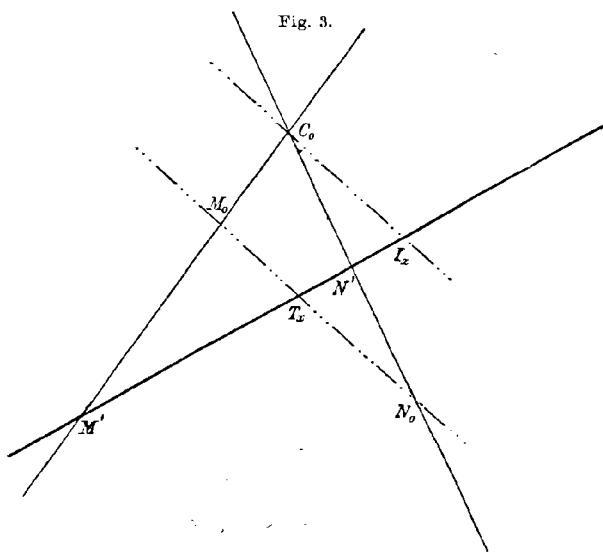
a) Detto sistema si può interpretare dicendo che di ogni punto dello spazio si conoscono la proiezione centrale  $M'$  e la proiezione ortogonale  $M_0$  sul quadro; questi punti non sono fra loro indipendenti, ma vincolati dalla condizione che la loro congiungente passi per il punto principale  $C_0$ . A seconda che il punto  $M$  cade nella  $I$ , nella  $II$

o nella III regione dello spazio, l'ordine di successione di quei tre punti è il primo, il secondo od il terzo dei seguenti:



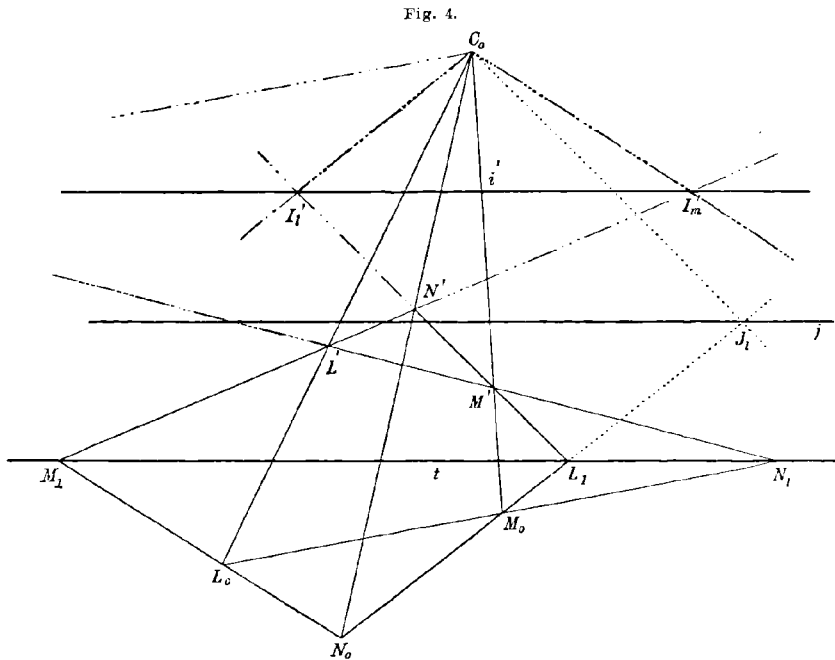
È anche evidente che se due punti  $M$  e  $N$  stanno sopra una retta passante per il centro di proiezione, l'ordine nel quale si seguono i tre punti  $M, N, C$  è lo stesso di quello nel quale si succedono i punti  $M_0, N_0, C_0$ .

b) La determinazione degli elementi descrittivi della retta che unisce i due punti  $M = (M_0, M')$ ,  $N = (N_0, N')$  può farsi agevolmente osservando anzitutto (Fig. 3) che la sua traccia  $T_x$  non è che il punto d'incontro delle rette  $M'N'$  e  $M_0N_0$ . Ne sia poi  $I'_x$  il punto di fuga; applicando la condizione di coplanarità di due rette si vede che le rette  $M_0T'$  e  $C_0I'$  debbono riuscire fra loro parallele; ciò prova che  $I'_x$  non è che il punto d'incontro della retta  $M'N'$  con la parallela condotta dal punto  $C_0$  alla retta  $M_0N_0$ .



c) Si possono anche determinare agevolmente gli elementi descrittivi del piano che passa per i tre punti dati  $L \equiv (L_0, L')$ ,  $M \equiv (M_0, M')$ ,  $N \equiv (N_0, N')$  (Fig. 4) osservando che essi passeranno per gli elementi descrittivi delle tre rette  $MN, NL, LM$ . Ciò prova (v. sopra) che la traccia  $t_x$  di tale piano passa per i tre punti  $M'N', M_0N_0, N'L', N_0L_0, L'M', L_0M_0$ ; in conseguenza essa è più che determinata. Non è senza interesse osservare che la collinearità di questi tre punti è una semplice conseguenza del significato stereometrico della figura piana considerata; onde si ha così una semplice dimostrazione diretta del teorema fondamentale sopra i triangoli prospettivi. Passiamo alla retta di fuga  $i'_x$  del piano  $LMN$ ; per costruirla determiniamo il punto di fuga  $I'_1$  della retta  $MN$ ; è l'intersezione della retta  $M'N'$  con la parallela condotta dal punto  $C_0$  alla retta  $M_0N_0$ ; in modo analogo si possono trovare i punti di fuga  $I'_m$  e  $I'_n$  delle rette  $NL$  e  $LM$ ; ora i tre punti  $I'_1, I'_m, I'_n$  appartengono alla medesima retta  $i'_x$  che è parallela a  $t_x$  ed è la cercata retta di fuga;

si noti che, se si rinuncia alle verifiche, per trovare la retta  $i'_x$  basta determinare uno di quei tre punti e tener conto dell'essere essa parallela a  $t_x$ . La colinearità dei tre punti  $I'_i, I'_n, I'_n$  dà luogo ad un teorema sopra due triangoli prospettivi qualunque che è facile enunciare; si può

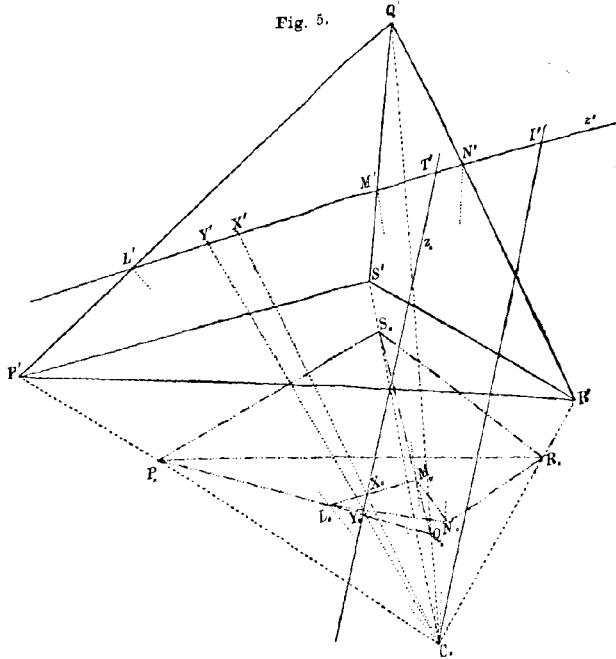


aggiungere che si arriva ad una terza retta  $j$  parallela alle due  $t_x, i'_x$  considerando le intersezioni dei lati del triangolo  $I_0M_0N_0$  con le parallele condotte dal punto  $C_0$  ai lati del triangolo  $L'MN'$ ; la figura mette anche subito in evidenza che la distanza fra il punto  $C_0$  e la retta  $i'_x$  è eguale alla distanza fra le due rette  $t_x$  e  $j'$ .

d) Queste stesse considerazioni porgono una costruzione assai semplice dei punti comuni ad un poliedro ed una retta rappresentati col metode della proiezione centrale (cfr. le mie *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, II T., p. 54—55). Si supponga, infatti, di considerare, ad esempio, un tetraedre i cui vertici siano i punti  $P \equiv (P', P_0)$ ,  $Q \equiv (Q', Q_0)$ ,  $R \equiv (R', R_0)$ ,  $S \equiv (S', S_0)$  e la retta  $r \equiv (T, T')$ . Per trovare i punti in cui questa sega quello, tagliamo il poliedro col piano che proietta la retta  $r$ ; la figura insegna subito che la sezione sarà un triangolo  $LMN$ , avente i vertici risp. sopra gli spigoli  $PQ, QS, QR$ . Di essi le proiezioni centrali si hanno subito; giova trovarne la proiezione ortogonale. A tale scopo si osservi che  $L'$  e  $L_0$  sono allineati

col punto  $C_0$  e che  $I_0$  cadrà sopra la retta  $P_0Q_0$  dal momento che il punto obiettivo  $L$  si trova sopra lo spigolo  $PQ$ ; onde  $I_0$  altro non è che l'intersezione delle due rette  $C_0L'$  e  $P_0Q_0$ . Similmente si trovano i punti  $M_0$  e  $N_0$ .

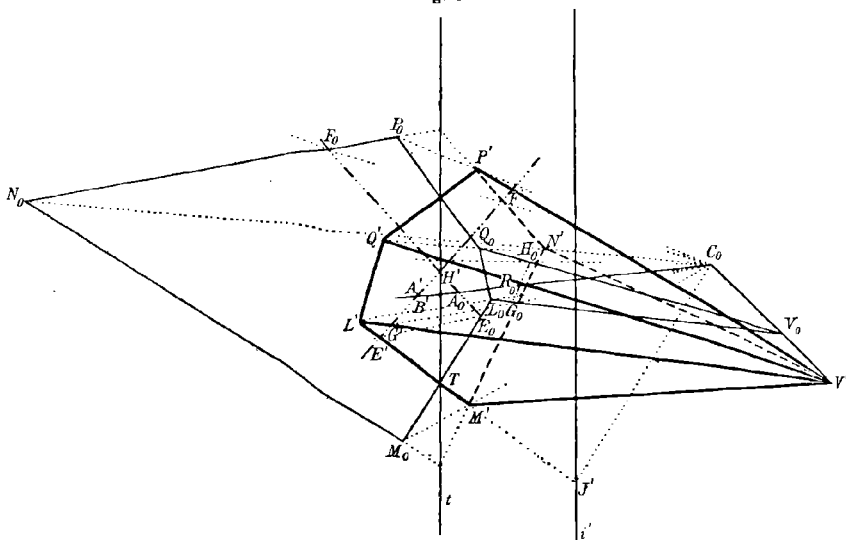
Determiniamo anche la proiezione ortogonale  $r_0$  della retta  $r_0$ : à notoriamente la parallela condotta dal punto  $T$  alla retta  $C_0I'$ . Siccome i punti richiesti sono quelli in cui la retta  $r$  taglia il contorno del triangolo  $LMN$ , così le loro proiezioni ortogonali sono i punti  $X_0$  e  $Y_0$  in cui  $r_0$  taglia il contorno del triangolo  $L_0M_0N_0$ . La figura dice che tali punti appartengono alle rette  $L_0M_0$  e  $L_0N_0$ . Congiungendo  $X_0$  e  $Y_0$  a  $C_0$  mediante rette, queste incontreranno la retta  $r'$  nelle proiezioni  $X'$  e  $Y'$  dei punti richiesti.



Risoluzione del problema. Per fissare le idee supporremo di ragionare sopra la piramide (Fig. 6) determinata dal suo vertice  $V \equiv (V_0, V)$  e dalla sua base, che è il poligono di cui si conosce il piano  $[t, i']$  e la proiezione  $L'M'N'P'Q'$ . L'esame diretto della figura dimostra che nessuno dei vertici della data piramide appartiene alla II regione dello spazio, perciò tutti i suoi spigoli si proietteranno in segmenti propriamente detti e tutte le facce secondo veri poligoni. Per distinguere le parti visibili della data piramide dalle invisibili conviene rappresentare anche i vertici della base col sistema speciale esposto prima. A tale scopo consideriamo il lato  $LM$  della base ed osserviamo che i suoi elementi descrittivi  $T$  e  $I'$  sono le intersezioni della retta  $L'M'$  risp. con  $t$  e  $i'$ ; per conseguenza  $L_0$  e  $M_0$  sono le intersezioni della parallela condotta dal punto  $T$  alla retta  $C_0I'$  risp. con le rette  $C_0I'$  e  $C_0M'$ . Quanto ai punti  $N_0, P_0, Q_0$  si troveranno osservando che le due figure  $L'M'N'P'Q'$  e  $L_0M_0N_0P_0Q_0$  si corrispondono in un'omologia di cui

il centro è il punto principale  $C_0$ , mentre l'asse è la retta  $t$ . Ora i due poligoni  $L'M'N'P'Q'$  e  $V'L'Q'$  hanno una regione comune, onde uno soltanto dei corrispondenti poligoni obbiettivi è visibile dal centro di proiezione. Per distinguere quale lo sia, fissiamo la nostra attenzione sopra un punto di detta regione e consideriamolo siccome proiezione di un punto  $A$  della base della piramide e di un punto  $B$  della faccia  $VLQ$ . Abbiamo bisogno di procurarci i punti  $A_0$  e  $B_0$ . A tale scopo conduciamo una retta arbitraria per il punto  $A' \equiv B'$  e segniamone le

Fig. 5.

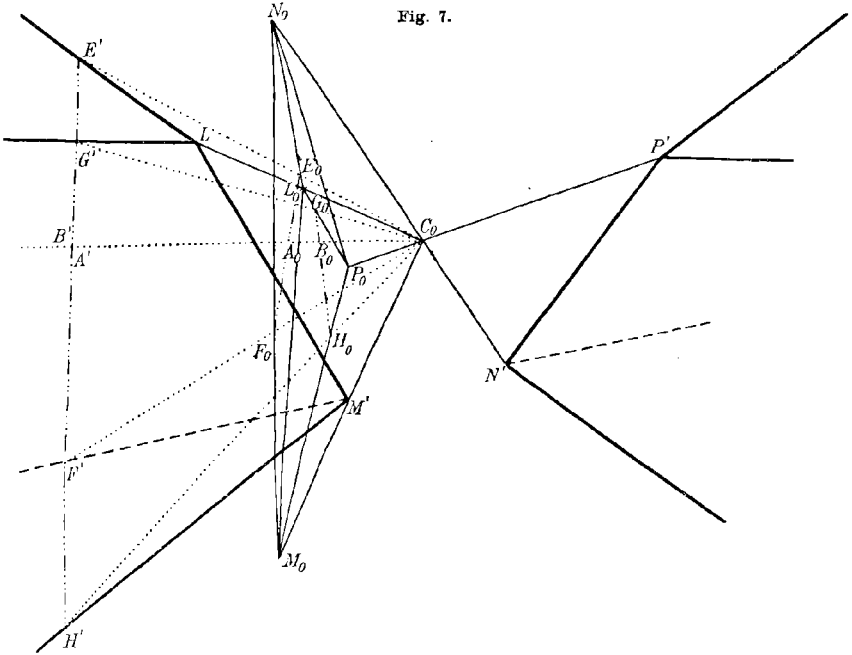


intersezioni  $E', F', G', H'$  risp. con le rette  $L'M', N'P', V'L', V'Q'$ ; unendo questi punti a  $C_0$  e determinando le intersezioni della congiungenti risp. con le rette  $L_0M_0, N_0P_0, V_0L_0, V_0Q_0$ , si otterranno i punti  $E_0, F_0, G_0, H_0$ ; ora le rette  $E_0F_0$  e  $G_0H_0$  saranno tagliate dalla retta che unisce il punto principale  $C_0$  al punto  $A' \equiv B'$  nei punti cercati  $A_0$  e  $B_0$ . Esaminando la figura risultante si scorge subito che il punto  $B_0$  cade fra  $A_0$  e  $C_0$ ; perciò è il punto  $B$  che solo è visibile dal centro di proiezione, dunque la base della piramide resta nascosta, mentre è visibile la faccia  $VLQ$ . Da ciò risulta che sono pure visibili le facce  $VLM$  e  $VPQ$ , mentre non lo sono  $VMN$  e  $VNP$ ; quindi gli unici spigoli nascosti sono  $MN, NP$  e  $VN$ .

Il procedimento esposto è ancora applicabile quando uno o più dei vertici del dato poliedro considerato cadano nella seconda regione dello spazio; soltanto bisogna distinguere con cura quali siano le facce del dato poliedro che si proiettano secondo poligoni e quali in pseudo-po-



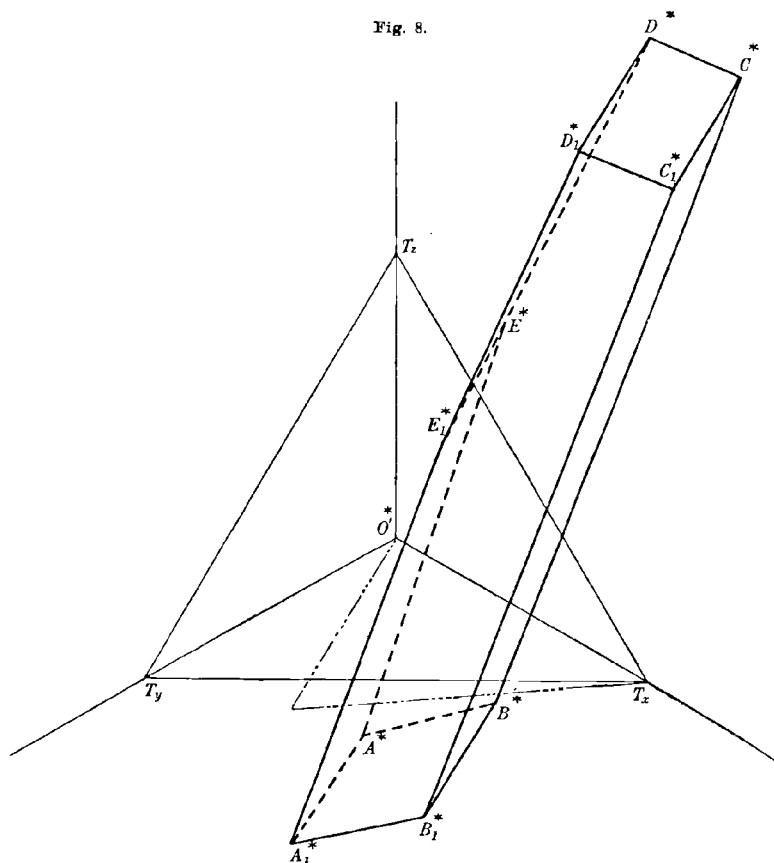
ligoni. Per chiarire il nostro concetto supponiamo (Fig. 7) che si abbia un tetraedro di vertici  $L \equiv (L_0, L')$ ,  $M \equiv (M_0, M')$ ,  $N \equiv (N_0, N')$ ,  $P \equiv (P_0, P')$ . La figura mostra subito che il punto  $L$  cade nella I regione dello spazio,  $M$  nella III e gli altri due nella II; per conseguenza i soli spigoli  $LM$  e  $NP$  si proiettano secondo segmenti propriamente



detti, mentre gli altri quattro daranno per proiezione altrettanti pseudo-segmenti; tutte le facce poi si proietteranno secondo pseudo-triangoli. Ora i due pseudo-triangoli  $L'M'N'$  e  $L'M'P'$  hanno una parte comune, dunque delle due facce corrispondenti una soltanto è visibile. Per decidere quale sia, si può procedere precisamente come nel caso precedente, cioè considerare un punto  $A' \equiv B'$  di quella regione, riguardarlo come proiezione di un punto  $A$  della faccia  $LMN$  e di un punto  $B$  della faccia  $LMP$  e finalmente costruire i punti  $A_0$  e  $B_0$ . E siccome  $B_0$  cade fra  $A_0$  e  $C_0$ , è la faccia  $LMP$  che è visibile, mentre  $LMN$  è nascosta. Ne consegue che è visibile anche la faccia  $LNP$  mentre non lo è la faccia  $MNP$ . Per conseguenza non vi è di nascosto che lo spigolo  $MN$ .

Osservazioni. I. È importante osservare che nelle considerazioni e costruzioni precedenti interviene il punto principale, ma la distanza non ha parte alcuna; ciò prova che se il centro di proiezione varia percorrendo la perpendicolare innalzata dal punto principale al quadro, la

figura obbiettiva muterà, ma non ne muteranno le relazioni di visibilità rispetto al centro di proiezione.



II. Le stesse considerazioni servono evidentemente a distinguere le facce illuminate del poliedro da quelle oscure, nell' ipotesi che nel centro di proiezione si trovi una fonte di luce.

### Assonometria ortogonale.

Per esaurire la questione esporremo qualche osservazione atta a dimostrare che i medesimi principii possono applicarsi all' Assonometria, limitandoci, per rimanere in questioni suscettibili di più frequenti applicazioni, all' Assonometria ortogonale.

Conveniamo anzitutto d'indicare in generale con  $J^*$  la proiezione assonometrica di una figura  $J$  e, per fissare le idee, ragioniamo sul

prisma rappresentata alla Fig. 1.<sup>1)</sup> Sia  $O$  l'origine delle coordinate e  $[u_1, u_2]$  il piano che funge da quadro assonometrico. Giova rappresentare subito il piede  $O^*$  della perpendicolare calata da  $O$  sul piano  $[u_1, u_2]$ ; converremo che il punto di vista sia il punto all'infinito nella direzione  $OO^*$ . Sia  $R$  un punto arbitrario della base  $ABCDE$  del prisma; da questo punto conduciamo la parallela alla retta  $OO^*$ ; tale parallela incontrerà in un secondo punto la superficie del poliedro; la figura ci dice che l'incontro ha luogo in un punto  $R$  della seconda base del prisma; ora siccome i due sensi  $RR_1$  e  $OO^*$  sono concordi, è evidente, che attualmente il solo punto  $R_1$  è visibile; epperò è visibile la seconda base del prisma, invisibile la prima. Effettuiamo ora la proiezione assonometrica del prisma (Fig. 8) segnando successivamente i punti  $A^*, \dots, E^*, A_1^*, \dots, E_1^*$ . Siccome i due poligoni  $A^* \dots E^*$ , e  $A_1^* \dots E_1^*$  hanno una regione comune, d'accordo con quanto precede, si può affermare che una soltanto delle due basi del prisma è visibile e che precisamente lo è la base  $A_1 \dots E_1$ . Allora la figura porta a concludere che sono pure visibili le tre facce laterali  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CDD_1C_1$ , mentre le due rimanenti  $AA_1E_1E$  e  $DD_1E_1E$  rimangono nascoste; ciò prova che sono invisibili soltanto gli spigoli del prisma che si dipartono dai vertici  $A$  e  $E$ .

Genova, 16 Agosto 1913.

## Schwingungen unter Einfluß einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung.

Von H. BURKHARDT in München.

1. Die Methode der sukzessiven Approximationen zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen führt bekanntlich auch dann, wenn die erste Annäherung nur trigonometrische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen liefert, auf sog. Säkularterme, d. h. auf Glieder, welche diese Veränderliche außerhalb der Zeichen der trigonometrischen Funktionen enthalten. Den Astronomen ist ein von Newcomb und Lindstedt angegebenes Verfahren geläufig, durch das man das Auftreten

1) Nell' Assonometria si suppone di regola che le figure considerate siano determinate dando di ciascun punto le coordinate cartesiane ortogonali; ma con questi dati nulla di più facile di trovare la rappresentazione col metodo di Monge; onde la supposizione da noi fatta non contraddice a quella che si fa d'ordinario quando si parla d' Assonometria.

solcher Glieder vermeiden kann; dagegen scheint wenig bekannt zu sein, daß dieses Verfahren auch für die Behandlung von Problemen der terrestrischen Mechanik mit Nutzen herangezogen werden kann, obwohl das bereits Herr J. Horn<sup>1)</sup> allgemein auseinandergesetzt hat und auch das von Herrn D. J. Korteweg<sup>2)</sup> im Interesse der mechanischen Auffassung der Lichtemission entwickelte Verfahren damit im wesentlichen identisch ist. Es wird daher vielleicht doch manchem Leser der Zeitschrift nicht unwillkommen sein, wenn ich das Verfahren an dem Beispiel der Gleichung

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = a \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

noch einmal auseinandersetze; Herr R. Emden hat mir schon vor einiger Zeit mitgeteilt, daß es gegenwärtig für manche Zwecke von Nutzen sein würde, wenn man das Integral dieser Gleichung in einer für die Rechnung brauchbaren Gestalt besäße.<sup>3)</sup>

Dasjenige Integral dieser Gleichung, das für  $t=0$  den Anfangsbedingungen

$$(2) \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

genügt, ist für hinlänglich kleine  $x_0$ , wie bereits Herr Horn im Vorbeigehen bemerkt und neuerdings Herr von Ignatowski<sup>4)</sup> auf Grund der Darstellung der Lösung durch eine Quadratur näher dargelegt hat, periodisch und läßt sich daher nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen einer zur Zeit proportionalen Größe entwickeln. Um diese

1) Zeitschr. Math. Phys. **47**, 1902, S. 400.

2) Amsterd. Verhandl. **5**, 1897; franz. arch. néerl. (2) **1**, 1898, S. 229.

3) Bis zu Gliedern erster Ordnung einschließlich (wo noch kein Säkularglied beseitigt zu werden braucht) ist die Rechnung bereits von S. D. Poisson (*traité de mécanique* 2me éd. **1**, Paris 1833, nr. 189, p. 357) durchgeführt worden. Den Fall, daß neben dem zum Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungsglied noch ein anderes auftritt, das der Geschwindigkeit selbst proportional ist, hat E. J. Routh behandelt (*Dynamik der Systeme starrer Körper*, **2**, § 364, S. 264 der deutschen Übersetzung); seine Methode versagt aber für den im Text besprochenen Fall.

4) Arch. Math. Phys. (3) **17**, 1911, S. 339. Man kann übrigens mit Herrn A. Föppl (*Dynamik*, 3. Aufl., Leipzig 1909, S. 57) diese Darstellung der Lösung durch eine Quadratur auch auf einem weniger künstlichen Wege als Herr von Ignatowski erhalten: die Gleichung enthält die Zeit nicht explizite, sondern nur ihr Differential, läßt sich also in eine Gleichung mit  $x$  als unabhängiger und  $\frac{dx}{dt}$  als abhängiger Variablen transformieren; diese Gleichung ist für  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$  linear.

Entwicklungen zu erhalten, führen wir dem Newcomb-Lindstedt-  
schen Verfahren entsprechend<sup>1)</sup> durch die Substitutionen

$$(3) \quad w = \frac{nt}{\sqrt{1+\mu}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0}$$

neue Veränderliche ein;  $\mu$  bedeutet dabei eine Konstante, über die wir  
uns noch Verfügung vorbehalten. Die Differentialgleichung geht da-  
durch über in:

$$(4) \quad \frac{d^2 \xi}{dw^2} + (1 + \mu)\xi = \alpha \left( \frac{d\xi}{dw} \right)^2,$$

die Anfangsbedingungen in:

$$(5) \quad \xi = 1, \quad \frac{d\xi}{dw} = 0 \quad \text{für } w = 0.$$

Dabei ist  $\alpha = ax_0$  eine dimensionslose Konstante, die für das Folgende  
als „hinlänglich klein“ vorausgesetzt werden muß; aus den genannten  
Untersuchungen von Herrn v. Ignatowski geht hervor, daß sie jeden-  
falls kleiner als  $\frac{1}{2}$  sein muß, wenn überhaupt die den angenommenen  
Anfangsbedingungen genügende Lösung periodisch sein soll.

Der Gleichung (4) kann nun durch eine Entwicklung der Form

$$(6) \quad \xi = \xi_0 + \alpha \xi_1 + \alpha^2 \xi_2 + + \dots$$

genügt werden; verlangt man, daß in dieser Entwicklung keine andern  
als trigonometrische Funktionen von  $w$  auftreten; so kann das dadurch  
erreicht werden, daß man auch für  $\mu$  eine Entwicklung der Form<sup>2)</sup>:

$$(7) \quad \mu = \alpha^2 \mu_2 + + \dots$$

ansetzt, die einzelnen Glieder der Entwicklung (6) den Bedingungen

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_0}{dw^2} + \xi_0 &= 0; & \xi_0 &= 1, & \frac{d\xi_0}{dw} &= 0 \quad \text{für } w = 0; \\ \frac{d^2 \xi_1}{dw^2} + \xi_1 &= \left( \frac{d\xi_0}{dw} \right)^2; & \xi_1 &= 0, & \frac{d\xi_1}{dw} &= 0 \quad \text{für } w = 0; \\ \frac{d^2 \xi_2}{dw^2} + \xi_2 &= -\mu_2 \xi_0 + 2 \frac{d\xi_0}{dw} \frac{d\xi_1}{dw}; & \xi_2 &= 0, & \frac{d\xi_2}{dw} &= 0 \quad \text{für } w = 0; \end{aligned}$$

unterwirft und dabei  $\mu_2, \dots$  jedesmal so bestimmt, daß in den Inte-  
gralen aller dieser Gleichungen nur trigonometrische Funktionen von  $w$   
auftreten. Das gibt der Reihe nach:

1) Die Anwendung dieses Verfahrens vereinfacht sich hier vermöge der be-  
sonderen Form der Gleichung noch dadurch, daß  $\mu$  auf der rechten Seite von (4)  
nicht auftritt.

2) Daß man in die Entwicklung von  $\mu$  nach Potenzen von  $\alpha$  kein Glied erster  
Ordnung aufzunehmen braucht, läßt sich bereits aus den Resultaten von Poisson  
schließen.

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \cos w, \\ \xi_1 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos w + \frac{1}{6} \cos 2w, \\ \mu_2 &= \frac{1}{3}, \\ \xi_2 &= -\frac{2}{3} + \frac{61}{72} \cos w - \frac{2}{9} \cos 2w + \frac{1}{24} \cos 3w;\end{aligned}$$

also:

$$(9) \quad \xi = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha^2}{3} + \dots + \left(1 - \frac{2\alpha}{3} + \frac{61\alpha^2}{72} + \dots\right) \cos w + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{2\alpha^2}{9} + \dots\right) \cos 2w + \left(\frac{\alpha^3}{24} + \dots\right) \cos 3w + \dots$$

Daraus folgt, daß  $\xi$  zunächst abnimmt, bis  $w$  den Wert  $\pi$  erreicht hat; der zugehörige Wert von  $\xi$  ist<sup>1)</sup>:

$$(10) \quad \xi_\pi = -1 + \frac{4\alpha}{3} - \frac{16\alpha^2}{9} + \dots$$

Es ist also der Mittelpunkt der ersten (Halb-)Schwingung:

$$(11) \quad 1 + \frac{\xi_\pi}{2} x_0 = \frac{2ax_0^2}{3} - \frac{8a^2x_0^3}{9} + \dots;$$

ihre (Doppel-)Amplitude:

$$(12) \quad (1 - \xi_\pi) x_0 = 2x_0 - \frac{4ax_0^2}{3} + \frac{16a^2x_0^3}{9} + \dots;$$

ihre Dauer:

$$(13) \quad T = \frac{\pi\sqrt{1+\mu}}{n} = \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{3} + \dots} = \frac{\pi}{n} \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + \dots\right).$$

Handelte es sich nur um die Integration der Differentialgleichung (1), so würde man die Abszisse des zweiten Umkehrpunkts aus denselben Formeln durch die Annahme  $w = 2\pi$  erhalten; er fiel also mit dem Ausgangspunkt zusammen; und von da an würde sich der ganze Schwingungsvorgang periodisch wiederholen. Aber physikalisch hat die Aufgabe doch nur dann einen Sinn, wenn die Dämpfung der Bewegungsrichtung stets entgegengerichtet ist; es muß also für die Rückschwingung das Zeichen von  $a$  umgekehrt werden.<sup>2)</sup> Soll unter dieser Voraussetzung die bisher betrachtete Bewegung weiter verfolgt werden, so ist in den Formeln  $a$  durch  $-a$ ,  $x_0$  durch  $x_\pi$ , also  $\alpha$  durch

$$-ax_\pi = -\alpha\xi_\pi = \alpha - \frac{4\alpha^2}{3} + \dots$$

1) Man kann die Gleichung (10) auch erhalten, indem man mit Hilfe der in Note 4 von S. 304 erwähnten Quadratur den Wert von  $\xi$ , für den  $\frac{d\xi}{dt}$  wieder = 0 wird, durch Reihenumkehrung bestimmt. Das Glied mit  $\alpha$  ist so von Herrn Föppl S. 58 bestimmt worden.

2) Man beachte dabei, daß für das physikalische Problem das ursprüngliche  $a$  das entgegengesetzte Zeichen haben muß wie  $x_0$ , daß also  $\alpha$  für dieses Problem eine negative Größe ist.

zu ersetzen. Innerhalb der bisher benutzten Annäherung ergibt sich dann die Dauer der Rückschwingung als ebensogroß wie die der Herschwingung; dagegen der scheinbare Mittelpunkt der Rückschwingung bestimmt sich zu:

$$(14) \quad -\frac{2ax_0^2}{3} + \frac{8a^2x_0^3}{9} + \dots,$$

und der nächste Umkehrpunkt hat die Abszisse:

$$\begin{aligned} (15) \quad (x_{2\pi}) &= x_\pi \left( -1 + \frac{4}{3} \left( \alpha - \frac{4\alpha^2}{3} + \dots \right) - \frac{16}{9} (\alpha + \dots)^2 + \dots \right) \\ &= x_0 \left( 1 - \frac{4\alpha}{3} + \frac{16\alpha^2}{9} + \dots \right) \left( 1 - \frac{4\alpha}{3} + \frac{32\alpha^2}{9} + \dots \right) \\ &= x_0 \left( 1 - \frac{8\alpha}{3} + \frac{64\alpha^2}{9} + \dots \right) \\ &= x_0 - \frac{8ax_0^2}{3} + \frac{64a^2x_0^3}{9} + \dots \end{aligned}$$

2. Will man dasselbe Verfahren zur Aufsuchung der den Anfangsbedingungen

$$(16) \quad x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0$$

genügenden Lösung der Differentialgleichung (1) anwenden, und will man dabei den Vorteil nicht aufgeben, der darin liegt, daß in den zu der entsprechenden Lösung der reduzierten Gleichung gehörenden Anfangsbedingungen der Parameter  $\mu$  nicht auftritt, so hat man neben der ersten Substitutionsgleichung (3) an Stelle der zweiten diesmal

$$(17) \quad \xi = \frac{n}{v_0} \frac{x}{\sqrt{1+\mu}}$$

zu setzen. Wird noch

$$(18) \quad \frac{av_0}{n} = \alpha$$

gesetzt, so nimmt die reduzierte Gleichung die Form an:

$$(19) \quad \frac{d^2\xi}{dw} + (1+\mu)\xi = \alpha\sqrt{1+\mu} \left( \frac{d\xi}{dw} \right)^2,$$

die etwas weniger einfach als (4) ist, übrigens in derselben Weise behandelt und innerhalb des hier benutzten Grades der Annäherung sogar mit ihr identifiziert werden kann, indem der Unterschied erst bei den Gliedern 3. Ordnung wirksam wird. Die Gleichung für die drei ersten Glieder der Entwicklung (6) haben dann dieselbe Form wie in (8), nur bei der ersten sind die Anfangsbedingungen:

$$(20) \quad \xi_0 = 0, \quad \frac{d\xi_0}{dw} = 1.$$

Die Integration liefert hier:

$$(21) \quad \begin{aligned} \xi_0 &= \sin w, \\ \xi_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos w - \frac{1}{6} \cos 2w, \\ u_2 &= \frac{1}{3}, \\ \xi_2 &= \frac{25}{72} \sin w - \frac{1}{9} \sin 2w - \frac{1}{24} \sin 3w. \end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer ist also (immer innerhalb des hier benutzten Grades der Annäherung) in beiden Fällen dieselbe, wenn das  $x_0$  des einen Falles gleich dem  $\frac{v_0}{n}$  des andern genommen wird.

Mit diesen Resultaten stimmen diejenigen nicht überein, die Herr von Ignatowski aus der Lösung durch eine Quadratur abgeleitet hat. Er ersetzt nämlich die in dieser Quadratur vorkommende Exponentialfunktion  $\exp(-2ax)$  durch die drei ersten Glieder ihrer Entwicklung nach Potenzen von  $2ax$ , wodurch die Quadratur sich auf eine zyklometrische reduziert. Es ist aber diese Exponentialfunktion mit einem Faktor:

$$(22) \quad -\frac{c}{a} = v_0^2 - \frac{n^2}{2a^2}$$

multipliziert, dessen beide Glieder unter den auch von Herrn von Ignatowski festgehaltenen Voraussetzungen des Näherungsverfahrens von verschiedener Größenordnung sind; denn wenn  $a$  klein sein soll, so muß  $v_0$  klein gegen  $\frac{n}{a}$  sein. Will man also konsequent vernachlässigen, so muß man entweder einen Teil der von Herrn von Ignatowski mitgenommenen Glieder weglassen — das würde aber gänzliche Vernachlässigung der Dämpfung bedeuten — oder wenigstens ein weiteres Glied noch mitnehmen — das würde aber auf ein zu numerischer Behandlung wenig bequemes elliptisches Integral führen.

3. Nach Abschluß der vorhergehenden Untersuchungen wurde ich zufällig durch eine Notiz des Herrn J. Sommer<sup>1)</sup> auf die ein ähnliches Problem betreffenden Untersuchungen von Fr. W. Bessel<sup>2)</sup> aufmerksam. Bei Bessel handelt es sich nicht um die Differentialgleichung

1) Zeitschr. Verm. 40, 1911, S. 337.

2) Astr. Nachr. 9, 1831, S. 221 = Abhandl. 2, S. 210. Die dort zitierte Abhandlung von G. Piola in den effemeridi di Milano für 1831 war mir nicht zugänglich. Merkwürdig ist übrigens, daß Bessel nur das oben als das „mathematische“ bezeichnete Problem behandelt, während doch für seinen Zweck nur das „physikalische“ in Betracht kommen konnte und er auch an anderer Stelle (Abhandl. 2, S. 183) ausdrücklich von der Möglichkeit spricht, daß ein auftretender Koeffizient „eine zweiförmige Funktion ist, welche für beide Richtungen der Bewegung einen verschiedenen Ausdruck erhält“.



(1), sondern um eine andere, bei der an Stelle des Gliedes mit  $x$  selbst ein solches mit  $\sin x$  steht; sein Verfahren läßt sich aber auch auf die hier vorliegende Gleichung anwenden. Werden die Bezeichnungen von 1. beibehalten, so ist zur Bestimmung der Schwingungsdauer die Quadratur<sup>1)</sup>:

$$(23) \quad nT = \int \frac{a\sqrt{2} \exp(-ax) dx}{\sqrt{(1+2ax) \exp(-2ax) - (1+2ax_0) \exp(-2ax_0)}}$$

auszuwerten. Zu diesem Zwecke ist zunächst das Maximum der unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Funktion zu bestimmen; es liegt bei  $x=0$  und hat den Wert 1. Demgemäß ist eine neue Variable  $s$  durch die Gleichung

$$(24) \quad (1+2ax) \exp(-2ax) = 1 - 2s^2$$

und eine neue Konstante  $s_0$  durch die entsprechende Gleichung

$$(25) \quad (1+2ax_0) \exp(-2ax_0) = 1 - 2s_0^2$$

einzuführen; wird zur Abkürzung

$$(26) \quad ax = \eta$$

gesetzt und wird die Exponentialfunktion nach Potenzen ihres Arguments entwickelt<sup>2)</sup>, so ergibt sich:

$$(27) \quad s^2 = \eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 + \eta^4 + \dots,$$

also:

$$(28) \quad s = \eta - \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{5}{18}\eta^3 + \dots$$

und umgekehrt:

$$(29) \quad \eta = s + \frac{2}{3}s^2 + \frac{11}{18}s^3 + \dots;$$

1) Das Verfahren, durch das Bessel zu solchen Quadraturen kommt, würde sich hier folgendermaßen gestalten: man müßte eine Hilfsgröße  $z$  durch die Gleichung

$$n^2 z^2 = n^2 x^2 - \dot{x}^2$$

einführen; es folgt dann:

$$(z^2 - x^2) a dx - z dz = 0,$$

wodurch, wie Bessel sich ausdrückt, „das Zeitdifferential eliminiert ist“. Diese Gleichung hat einen integrierenden Faktor, der nur von  $x$  abhängt, nämlich  $\exp(-2ax)$ ; [sie ist nämlich linear in  $z^2$ , ebenso wie die von Bessel selbst behandelte linear in  $\cos \gamma$ ]; usw. — Man erkennt übrigens, daß dieses  $z$  sich von dem  $\frac{dx}{dt}$ , das bei dem in Note 4 von S. 304 erwähnten Verfahren auftritt, nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet.

2) Diese Entwicklung muß auch hier mindestens bis zu Gliedern 4. Ordnung getrieben werden, wenn man überhaupt den Einfluß der Dämpfung auf die Periode bekommen will.

daraus dann weiter:

$$(30) \quad \exp(-\eta) = 1 - s - \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{9}s^3 + \dots$$

und durch Differentiation:

$$(31) \quad \exp(-\eta) d\eta = (1 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2 + \dots) ds,$$

also:

$$(32) \quad n dt = \frac{(1 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2 + \dots) ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}$$

und schließlich:

$$(33) \quad nT = \int_{-s_0}^{s_0} \frac{(1 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s^2 + \dots) ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \pi(1 + \frac{1}{6}s_0^2 + \dots).$$

Man erkennt die Übereinstimmung dieses Resultates mit (13), wenn man beachtet, daß die hier mit  $s_0$  bezeichnete Größe von der dort mit  $\alpha$  bezeichneten sich nur um Glieder höherer Ordnung als die hier behaltene unterscheidet.

Soweit nur die Berechnung der Schwingungsdauer in Betracht kommt, hat das Besselsche Verfahren vor dem Newcomb-Lindstedtschen einen unleugbaren Vorteil: es läßt a priori erkennen, daß in der Entwicklung der Schwingungsdauer nach Potenzen von  $s_0$  nur Potenzen mit geraden Exponenten auftreten. Freilich fallen die Glieder ungerader Ordnung erst beim letzten Schritt, dem Übergang von (32) zu (33), heraus und müssen bis dahin mit durchgeschleppt werden. Es wäre zu erwägen, wie man das vermeiden kann; ich werde an anderer Stelle<sup>1)</sup> darauf zurückkommen. Will man die Annäherung mit diesem Verfahren weiter treiben, so ist die Reihenumkehrung, die von (28) zu (29) führt, lästig; indessen auch bei dem Newcomb-Lindstedtschen Verfahren wächst die Mühe der Berechnung etwa proportional dem Quadrat der Anzahl der zu berechnenden Glieder.

4. Über den Verlauf der Bewegung während der einzelnen Schwingung gibt das Besselsche Verfahren keine Auskunft; Bessel hatte bei der ihm vorliegenden physikalischen Aufgabe keinen Anlaß, sich diese Frage zu stellen. Man könnte daran denken, es mit dem von Weierstraß<sup>2)</sup> angegebenen Verfahren zur Umkehrung von Quadraturen zu kombinieren, bei dem ja die Berechnung der Periode als bereits erledigt vorausgesetzt wird; indessen ist durch die Besselsche Substitution (24) für die Anwendung der Weierstraßschen Methode nichts gewonnen;

1) Das ist inzwischen Jahresb. d. D. Math.-Ver. 22, 1913, S. 225 geschehen.

2) Berl. Ber. 1866, S. 77. Werke 2, S. 1.

und überdies bietet die Weierstraßsche Abhandlung an entscheidenden Stellen<sup>1)</sup> Dunkelheiten, deren Aufhellung mir nicht gelungen ist. Kann irgend ein Schüler oder Schüler eines Schülers von Weierstraß hierzu aus mündlicher Tradition noch etwas mitteilen?

## Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit.

Von Dr. Ing. H. HENCKY in Darmstadt.

### I. Die Differentialgleichung der verfeinerten Theorie ebener Platten in Polarkoordinaten.<sup>2)</sup>

Die Spannungen, welche an einer belasteten dünnen Platte den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten, zerfallen in zwei verschiedene Arten. Die Spannungen der einen Art setzen sich zu Biegemomenten zusammen, die der andern Art zu Spannungsergebnissen, welche gleiche Richtung mit der elastischen Fläche der Platte haben und die Lasten nach Art einer Kette auf die Auflager übertragen.

Je nachdem man eine dieser beiden Arten von Kräften allein berücksichtigt, erhält man zwei Grenzfälle, einmal den Fall der Platte mit unendlich kleiner Durchbiegung, in welcher nur Biegemomente auftreten, andererseits den Fall der Platte mit verschwindender Biegesteifigkeit, welche als Kettenfläche betrachtet werden kann. Obgleich in Wirklichkeit keiner dieser beiden Grenzfälle rein vorkommt, ist es doch nützlich, sich über die Grenzen Rechenschaft zu geben, innerhalb deren die Spannungen und Durchbiegungen sich ändern.

Die folgenden Entwicklungen beschränken sich auf den Fall der Kreisplatte mit symmetrischer Belastung. Berücksichtigt man sowohl Biegemomente wie Spannungsergebnisse, so erhält man das simultane System von Differentialgleichungen:

---

1) Wie hat sich Weierstraß in einem Falle wie dem hier vorliegenden die Wahl der von ihm mit  $G(x, n)$  bezeichneten Funktionen (S. 12) gedacht? und mit welchem Recht nimmt er S. 15 für die Konstantenbestimmung an, daß die von ihm benutzten Entwicklungen noch für  $x = a$  und  $x = 0$  konvergieren, bzw. so gut konvergieren, daß sie zu numerischer Berechnung noch brauchbar sind?

2) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik Bd. V. S. 132 u. f. — Encyclopädie der math. Wissenschaften Bd. IV. Mechanik 27. Th. v. Kármán (Nr. 8 Ebene Platten).

$$(1) \quad \frac{h^3}{12} \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \zeta - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \frac{d\zeta}{dr} \right) = p^1)$$

$$(2) \quad r \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = - \frac{E}{2} \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^2 + \text{Const.}$$

$$(3) \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}; \quad \sigma_t = \frac{d^2 F}{dr^2} \cdot 2)$$

Die Last  $p$  in Gl. (1) muß man sich in zwei Bestandteile zerlegt denken, von denen der eine von den Biegemomenten, der andere von den über den Querschnitt gleichmäßig verteilten Spannungen aufgenommen wird.

Die Gl. (1) enthält die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in senkrechter Richtung, die Gl. (3) gegen Verschieben in horizontaler Richtung, die Gl. (2) enthält das Elastizitätsgesetz in Verbindung mit den kinematischen Bedingungen des Problems.

Vernachlässigt man in Gl. (1) die dritte Potenz von  $h$  gegen die erste und nimmt  $p$  konstant an, so läßt sich eine Lösung des obigen Gleichungssystems angeben, welche zwar nicht in geschlossener Form, aber doch durch so konvergente Reihen darstellbar ist, daß der numerischen Auswertung nichts im Wege steht.

Diese Lösung läßt sich übrigens auch für den Fall verallgemeinern, daß  $p$  durch eine Potenzreihe oder überhaupt als endliche und eindeutige Funktion von  $r$  gegeben ist.

## II. Die Differentialgleichung der dünnen Platten ohne Biegesteifigkeit.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (3) erhält man aus der Gl. (2)

$$(4) \quad r \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_t) + \frac{E}{2} \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^2 = 0.$$

Die Integrationskonstante wird 0, weil die Änderung der Spannungen in Plattenmitte mit dem Radius einen endlichen Wert haben und  $\frac{d\zeta}{dr} = 0$  für  $r = 0$  werden muß.

Die zweite Gleichung könnte aus (1) durch Vernachlässigung des ersten Gliedes und Integration gewonnen werden, läßt sich aber auch direkt ableiten.

1) A. Föppl, Vorl. über techn. Mechanik Bd. V. S. 139, wo die Ableitung der Diffgl. ausführlich dargestellt ist.

2) Die Bezeichnungen sind im wesentlichen dieselben wie in der Encykl. der math. Wiss.

Es gilt nämlich für jeden konzentrischen Kreisschnitt, daß die Summe der Vertikalkomponenten von  $\sigma_r$ , der innerhalb des Kreises befindlichen Belastung gleich wird. Nimmt man an, daß man den Sinus mit der Tangente verwechseln darf, so ergibt sich

$$\sigma_r h \cdot 2r\pi \cdot \frac{d\xi}{dr} + r^2\pi \cdot p = 0$$

oder

$$(5) \quad \sigma_r \frac{d\xi}{dr} + \frac{rp}{2h} = 0$$

$$(5a) \quad \frac{d\xi}{dr} = - \frac{rp}{2h\sigma_r}.$$

Sowohl die Durchbiegungen  $\xi$ , wie die radialen und tangentialen Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  sind durchweg in dem hier in Betracht kommenden Intervall endliche, eindeutige und stetige Funktionen, außerdem auch symmetrisch zur Plattenmitte.

Sie sind daher in dem Intervall von  $\frac{r}{a} = 0$  bis  $\frac{r}{a} = 1$ , wo  $a$  der Radius der Platte, durch Potenzreihen darstellbar, welche nur die geraden Potenzen von  $\left(\frac{r}{a}\right)$  enthalten, und könnten in solche Potenzreihen entwickelt werden, wenn sie bereits in irgend einer Form gegeben wären.<sup>1)</sup>

Unter Berücksichtigung der mechanischen Ähnlichkeit setzen wir daher

$$(6) \quad \sigma_r = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{E p^3 a^2}{h^2}} \left\{ B_0 + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$(7) \quad \sigma_t = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{E p^3 a^2}{h^2}} \left\{ B_0 + 3 B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 5 B_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$(8) \quad \xi = a \sqrt[3]{\frac{p a}{E h}} \left\{ \sum_0^n A_n - \left(\frac{r}{a}\right)^2 [A_0 + A_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + A_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots] \right\}.$$

Die Beziehungen (3) werden durch die Gl. (6) und (7) befriedigt, die Gl. (8) ergibt für  $r = a$   $\xi = 0$ ; die Werte der Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  lassen sich aus der Differentialgleichung und aus den Randbedingungen ermitteln.

Man erhält mit Gl. (6) und (7)

$$r \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_t) = \sqrt[3]{\frac{E p^3 a^2}{h^2}} \left\{ 1 \cdot 2 \cdot B_2 + 2 \cdot 3 B_4 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 3 \cdot 4 B_6 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + 4 \cdot 5 B_8 \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \dots \right\}.$$

1) Vgl. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. § 14. Entwicklung in einfache Kugelfunktionen.

Substituiert man den Wert von  $\frac{d\xi}{dr}$  aus Gl. (5a) in Gl. (4), so heben sich die Dimensionsgrößen heraus, wenn man noch  $\sigma_r$  durch seine Potenzreihe ersetzt, und man erhält die Beziehung

$$(9) \left\{ B_0 + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \right\}^2 \left\{ 1 \cdot 2 \cdot B_2 + 2 \cdot 3 \cdot B_4 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \dots \right\} + 2 = 0.$$

Konvergieren die beiden Reihen unbedingt, was hier vorausgesetzt werden soll, so kann man das Multiplikationstheorem von Cauchy für unendliche Reihen anwenden und nach Potenzen von  $\frac{r}{a}$  ordnen. Da die Gl. (9) für alle Werte von  $\frac{r}{a}$  gelten soll, muß jeder Koeffizient für sich verschwinden; d. h. es müssen die Beziehungen gelten

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot B_0^2 B_2 + 2 = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 2 B_0 B_2^2 + 2 \cdot 3 \cdot B_0^2 B_4 = 0 \\ 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) B_0 B_2 B_4 + 1 \cdot 2 \cdot B_2^3 + 3 \cdot 4 B_0^2 B_6 = 0 \\ 2(1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) B_0 B_2 B_6 + (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) B_2^2 B_4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 B_0 B_4^2 \\ \quad + 4 \cdot 5 B_0^2 B_8 = 0 \\ 2(1 \cdot 2 + 4 \cdot 5) B_0 B_2 B_8 + (2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) B_2^2 B_6 \\ \quad + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3) B_2 B_4^2 + 2(2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) B_0 B_4 B_6 \\ \quad + 5 \cdot 6 B_0^2 B_{10} = 0 \\ 2(1 \cdot 2 + 5 \cdot 6) B_0 B_2 B_{10} + (2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5) B_2^2 B_8 \\ \quad + 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) B_2 B_4 B_6 + (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) B_0 B_4 B_8 \\ \quad + 2 \cdot 3 B_4^3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot B_0 B_6^2 + 6 \cdot 7 B_0^2 B_{12} = 0. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Alle Koeffizienten  $B_n$  lassen sich nach Gl. (10) durch Potenzen von  $B_0$  darstellen. Es wird

$$(10a) \left\{ \begin{array}{l} B_0 = B_0 \\ B_2 = -\frac{1}{B_0^2} \\ B_4 = -\frac{2}{3 B_0^4} \\ B_6 = -\frac{13}{18 B_0^6} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} B_8 = -\frac{17}{18 B_0^8} \\ B_{10} = -\frac{37}{27 B_0^{10}} \\ B_{12} = -\frac{407}{189 B_0^{12}} \end{array} \right.$$

Der Wert von  $B_0$  ist vorläufig ganz unbestimmt und hängt von der Randbedingung ab, welche noch nicht benützt ist. Nimmt man an,

daß die Platte am Rande festgehalten wird, so muß die Dehnung  $\varepsilon_r$  verschwinden; d. h.  $\varepsilon_r = \left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right) \frac{1}{E} = 0$  für  $r = a$ .

Nach (6) und (7) ergibt sich ( $m$  Querkontraktionskoeffizient).

$$(11) \quad B_0\left(1 - \frac{1}{m}\right) + B_2\left(3 - \frac{1}{m}\right) + B_4\left(5 - \frac{1}{m}\right) + \dots = 0.$$

Mit den bereits berechneten Werten von  $B_n$  lautet die Bedingungsgleichung für  $B_0$

$$11a) \quad \left\{ \begin{aligned} & B_0\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \left(3 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{B_0^2} - \left(5 - \frac{1}{m}\right) \frac{2}{3B_0^3} - \left(7 - \frac{1}{m}\right) \frac{13}{18B_0^4} - \left(9 - \frac{1}{m}\right) \frac{17}{18B_0^5} \\ & - \left(11 - \frac{1}{m}\right) \frac{37}{27B_0^6} - \left(13 - \frac{1}{m}\right) \frac{407}{189B_0^7} - \dots = 0 \end{aligned} \right.$$

und mit  $m = \frac{10}{3}$

$$B_0 - \frac{3,85714}{B_0^2} - \frac{4,4762}{B_0^3} - \frac{4,8389}{B_0^4} - \frac{8,2167}{B_0^5} - \frac{14,663}{B_0^6} - \frac{27,3}{B_0^7} - \dots = 0 = f(B_0).$$

Hieraus auf 3 Dezimalen genau

$$B_0 = 1,713.$$

Physikalische Bedeutung können nur die Wurzeln der Gleichung haben, welche  $> 1$  sind. Trägt man die Werte von  $f(B_0)$  als Ordinaten und die Werte von  $B_0$  als Abszissen ab, so erkennt man leicht, daß die Funktion  $f(B_0)$  die Abszissenachse nur einmal zwischen  $B_0 = +1$  und  $B_0 = +\infty$  schneidet. Die Aufgabe hat also nur eine Lösung.

Noch ein anderer Fall der Auflagerung läßt sich erledigen, wenn man annimmt, daß die Platte am Rand überhaupt nicht festgehalten ist, aber um den kleinen Betrag  $\Delta a$  übersteht. In diesem Fall muß die Randbedingung lauten  $\frac{\Delta a}{a}\sigma_t + \sigma_r = 0$ , wovon man sich durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen für den Auflagerring überzeugt.

Für  $\Delta a = 0$  muß aber  $\sigma_t$  am Rand unendlich werden, d. h. die Platte wird am Rand knicken; dieser Fall soll hier nicht weiter verfolgt werden, da er nur ein geringes praktisches Interesse für sich in Anspruch nehmen kann.

Um die Aufgabe für die am Rand festgehaltene Platte vollständig zu lösen, muß man noch die Gleichung der elastischen Fläche bestimmen.

Setzt man in die Gl. (5) die Reihen für  $\sigma_r$  und  $\frac{d\xi}{dr}$ , so heben sich die Dimensionsgrößen wieder weg, und man erhält

$$12) \quad \left\{ B_0 + B_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_4\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \right\} \left\{ A_0 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 A_2 + 3\left(\frac{r}{a}\right)^4 A_4 + \dots \right\} - 1 = 0$$

und hieraus aus der Multiplikationsregel von Cauchy

$$(12a) \left\{ \begin{array}{l} A_0 B_0 - 1 = 0 \\ A_0 B_2 + 2 A_2 B_0 = 0 \\ A_0 B_4 + 2 A_2 B_2 + 3 A_4 B_0 = 0 \\ A_0 B_6 + 2 A_2 B_4 + 3 A_4 B_2 + 4 A_6 B_0 = 0 \\ A_0 B_8 + 2 A_2 B_6 + 3 A_4 B_4 + 4 A_6 B_2 + 5 A_8 B_0 = 0 \\ A_0 B_{10} + 2 A_2 B_8 + 3 A_4 B_6 + 4 A_6 B_4 + 5 A_8 B_2 + 6 A_{10} B_0 = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

oder mit Benutzung der Werte von  $B_*$

$$\begin{array}{l|l|l} A_0 = + \frac{1}{B_0} & A_4 = + \frac{5}{9 B_0^2} & A_8 = + \frac{7}{6 B_0^{13}} \\ A_2 = + \frac{1}{2 B_0^3} & A_6 = + \frac{55}{72 B_0^{10}} & A_{10} = + \frac{205}{108 B_0^{16}} \end{array}$$

Die Spannung in Plattenmitte wird

$$(13) \quad \sigma_m = \frac{B_0}{4} \sqrt[3]{E p^2 \frac{a^2}{h^2}}$$

die Spannung am Rande

$$(14) \quad \sigma_a = \frac{1}{4} \sqrt[3]{E p^2 \frac{a^2}{h^2}} \left\{ B_0 - \frac{1}{B_0^2} - \frac{2}{3 B_0^6} - \frac{13}{18 B_0^8} - \frac{17}{18 B_0^{11}} - \frac{37}{27 B_0^{14}} - \frac{407}{189 B_0^{17}} - \dots \right\}$$

die Durchbiegung in Plattenmitte wird

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = a \sqrt[3]{\frac{p a}{E h}} \sum_0^u A_n \\ = a \sqrt[3]{\frac{p a}{E h}} \left\{ \frac{1}{B_0} + \frac{1}{2 B_0^3} + \frac{5}{9 B_0^5} + \frac{55}{72 B_0^{10}} + \frac{7}{6 B_0^{13}} + \frac{205}{108 B_0^{16}} + \dots \right\} \end{array} \right.$$

Der Wert von  $B_0$  ist dabei für ein gegebenes  $m$  aus der Gl. (11a) zu ermitteln. Für  $m = \frac{10}{3}$  ergeben sich die Formeln

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = 0,423 \sqrt[3]{E p^2 \frac{a^2}{h^2}} \text{ (Spannung in Plattenmitte)} \\ \sigma_a = 0,328 \sqrt[3]{E p^2 \frac{a^2}{h^2}} \text{ (Spannung am Rande)} \\ f = 0,662 a \sqrt[3]{\frac{p a}{E h}} \text{ (Durchbiegung in Plattenmitte)}. \end{array} \right.$$

Die Werte der Spannungen sind so angegeben, wie sie aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen, da auf die verschiedenen Theorien für die richtige Beurteilung der Bruchgefahr hier nicht eingegangen werden soll.



In ganz ähnlicher Weise, wie es hier für die biegsame Platte geschehen ist, ließe sich das Problem unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit lösen.

Man erkennt aber ohne weiteres aus der Gl. (1), daß in diesem Fall die Dimensionsgrößen in die Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der Reihenentwicklungen eingehen. Man würde schließlich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten von unendlich hohem Grad erhalten, die durch Probieren in jedem einzelnen Fall aufgelöst werden müßten. Dieses Verfahren ist jedoch so umständlich, daß von einer Durchführung abgesehen werden soll.

---

## Bücherschau.

**C. Runge und F. Emde, Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in Sinuswellen.** Nebst einer Erläuterung von C. Runge. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen kommt auf die Berechnung der sog. Fourier-Koeffizienten hinaus. Bei einer approximativ-numerischen Berechnung derselben geht man aus von  $n$  Werten der gegebenen Funktion, die diese an  $n$  äquidistanten Stellen der Periode annimmt. Sind  $y_\lambda$  die betreffenden Funktionswerte, so werden die Koeffizienten durch die Summen

$$a_\lambda = \frac{2}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} y_\lambda \cdot \cos \lambda \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$b_\lambda = \frac{2}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} y_\lambda \cdot \sin \lambda \cdot \frac{2\pi}{n}$$

approximiert und die eigentliche Rechenaufgabe besteht in der zweckmäßigen Berechnung dieser Summen.

Runge geht aus von einer Einteilung der Periode in zwölf Teile, so daß die Summen aus je zwölf Gliedern bestehen. Aus den zwölf Funktionswerten lassen sich die zwölf ersten Koeffizienten  $a_0 \cdots a_6$  und  $b_1 \cdots b_5$  einer mit diesen Gliedern abbrechenden trigonometrischen Reihe so berechnen, daß diese die zwölf gegebenen Werte wirklich annimmt.

Die auszuwertenden Summen bestehen hierbei aus zwölf Gliedern, in denen nur die Sinus der Vielfachen von  $30^\circ$  auftreten, also die Werte von  $0$ ;  $\pm \frac{1}{2}$ ;  $\pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ;  $\pm 1$ . Durch Zusammenfassen der Summanden in geeignete Partialsummen können die Summen schnell berechnet werden.

Bei einer Einteilung der Periode in 24 Teile lassen sich aus den 24 gegebenen Funktionswerten die ersten 24 Koeffizienten  $a_0 \cdots a_{12}$  und  $b_1 \cdots b_{11}$  bestimmen. Ihre Berechnung wird in diesem Falle zurückgeführt auf eine zweimalige Durchführung der Rechnung für zwölf Ordinaten. Hierbei werden einmal die zwölf Ordinaten  $y_0, y_2, y_4, \dots$  mit geradem Index, das andere Mal die anderen, in die Rechnung eingeführt und man erhält zwei Gruppen von je zwölf Koeffizienten. Durch eine gewisse Mittelbildung kann man nun aus diesen die eigentlich verlangten 24 Koeffizienten berechnen.

In den mehr oder weniger starken Abweichungen der provisorisch berechneten Koeffizienten der beiden Gruppen hat man dabei noch ein Kriterium dafür, ob sich die gegebene Funktion bereits durch einen 12-gliedrigen trigo-

nometrischen Ausdruck wiedergeben läßt, oder ob dazu mehr Glieder erforderlich sind. Das erstere ist nämlich der Fall, wenn die bezw. Koeffizienten beider Gruppen nicht wesentlich voneinander abweichen.

Das soeben erschienene Rechnungsformular soll nun eine zweckmäßige Durchführung der oben angedeuteten Rechnungen ermöglichen. Durch geeignete Vordrucke wird den gegebenen Funktionswerten sowie den im Verlauf der Rechnung sich ergebenden Größen ein ganz bestimmter Platz zugewiesen, wodurch die Bildung der Summen ganz wesentlich erleichtert wird. Die Rechnung wird dabei in der Tat zweimal für je zwölf Ordinaten durchgeführt. Geeignete Kontrollen erlauben eine Prüfung der Resultate, wobei es sehr angenehm ist, daß sich die einzelnen Teile der ganzen Rechnung für sich kontrollieren lassen.

Ferner ist noch eine Umrechnungstabelle dafür vorgesehen, wenn man die trigonometrische Reihe nur aus Sinusgliedern zusammensetzen und in jedes Glied einen Phasenwinkel einführen will. Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß sich dasselbe Formular auch zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, die zwölf oder vierundzwanzig Funktionswerte einer trigonometrischen Reihe aus den Koeffizienten zu bestimmen, verwenden läßt.

Die dem Schema beigegebene Erläuterung ist reichlich kurz gehalten, wenigstens mit Rücksicht darauf, daß bei diesem Formular in erster Linie an die Bedürfnisse der Praktiker gedacht ist, denen der Gedankengang der ganzen Rechnung fremd ist.

Das Formular kann aber nicht nur jedem, der es mit der Zerlegung periodischer Funktionen zu tun hat, empfohlen werden, sondern auch jedem an numerischen Rechnungen überhaupt Interessierten, da es ein Musterbeispiel ist für eine übersichtliche Anordnung einer umfangreicheren Rechnung, wodurch bekanntlich der Erfolg in vielen Fällen ausschlaggebend bedingt ist.

Göttingen.

H. v. SANDEN.

**Gino Loria**, professore nella R. Università di Genova. **Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva**. Con 62 incisioni. Ulrico Hoepli Milano 1912, Manuali Hoepli serie scientifica 148- 149. X u. 235 S. kl. 8.

Das Buch gibt eine Fortsetzung der in der gleichen Sammlung von dem gleichen Verfasser bearbeiteten *Metodi di geometria descrittiva* und es wird die Darstellung für gewöhnlich in dem Mongeschen System, gelegentlich jedoch auch in Zentralprojektion oder kotierter Projektion durchgeführt. Der Verfasser behandelt das Dreikant und die Polyeder, ebene und Raumkurven, die Flächen im allgemeinen, die Rotations- und allgemeinen Schraubenflächen, Zylinder und Kegelflächen und endlich die abwickelbaren und windschiefen Regelflächen; alles in größter Kürze, aber doch mit Hervorhebung des Wesentlichen. In mathematischer Hinsicht kann die Darstellung als ausgezeichnet bezeichnet werden, namentlich was die möglichste Allgemeinheit der Methoden betrifft. So werden z. B. die Rotationsflächen ganz allgemein durch Bewegung einer Kurve gegeben und wir finden (S. 137) eine sehr schöne und allgemeine Lösung der Aufgabe, die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Rotationsfläche zu bestimmen. Zu erwähnen ist ferner, daß das Buch auch die analytischen Formeln der betrachteten Gebilde, die Gleichungen für die Tangente, Tangentenebene usw. gibt. Die praktische Seite aber kommt zu kurz. In bezug auf

die Figuren könnte mehr geboten werden. Fürs erste ist überhaupt an Figuren gespart worden. Denn die allgemeinen Ausführungen über Kurven usw. würden sehr gewinnen, wenn sie durch gute Figuren illustriert würden. Weiter geben aber auch die beigegefügte Figuren nur die betreffende Konstruktion, aber fast nie ein Gesamtbild des betrachteten Gebildes. Wenn z. B. (S. 103) von der logarithmischen Spirale die Rede ist, so wäre es vorteilhaft, die ganze Kurve zu zeichnen, nicht bloß ein kleines Stück derselben. Auf S. 5 ist die Zahl der Schnittlinien der beiden Kegel falsch angegeben; sie beträgt im allgemeinen 4; Figur 54 enthält einen Irrtum; der Punkt  $K$  muß auf der Konturmantellinie liegen.

München.

KARL DOEHLEMANN.

**Dr. Marcel Großmann**, Professor an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich. **Einführung in die darstellende Geometrie.** Leitfaden für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Zweite neu bearbeitete Auflage mit 80 Übungsaufgaben und 118 Figuren in besonderem Heft. 92 S. Basel 1912, Helbing und Lichtenhahn.

Den Inhalt des Buches charakterisieren die Kapitelüberschriften: Die Normalprojektion auf eine Ebene. Die Normalprojektionen auf zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen. Darstellung der Polyeder, ihrer Schnitte, Durchdringungen und Netze. Darstellung von krummen Flächen. Elemente der Axonometrie. Elemente der Zentralprojektion. Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte.

Die Darstellung ist einfach und klar, die Figuren sind übersichtlich, wenn auch nicht nach dem Geschmack des Referenten.

München.

KARL DOEHLEMANN.

**Dr. phil. Eugen Wendling**, **Der Fundamentalsatz der Axonometrie.** 96 S. 8. Zürich 1912, Speidel.

Der Verfasser hat in dankenswerter Weise die ganze Literatur über den Pohlkeschen Satz durchgearbeitet und zusammengestellt. Er selbst gibt verschiedene Ergänzungen und eine Vereinfachung der Konstruktion. Zu erwähnen wäre auch noch eine Arbeit von Denizot: Wien. Ber. 117, 1908.

München, Oktober 1913.

KARL DOEHLEMANN.

**H. Capelle**, **Die mathematische Geographie und ihre Nutzenanwendung.**

Für den Gebrauch an nautischen und höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Mit zahlr. Fig. im Text, 3 Karten in Steindruck und 28 Tafeln räumliche Photographien. V u. 268 S. 8. Berlin 1913, E. S. Mittler und Sohn.

Die Neuartigkeit dieses Buches besteht darin, daß es wohl zum ersten Mal versucht, das stereoskopische Bild in weitem Umfang zur Unterstützung der Anschauung im Unterricht heranzuziehen. Auf 56 Bildseiten werden hier in Raumanschauung alle diejenigen Verhältnisse der mathematischen Geographie vorgeführt, die den Gegenstand des Werkes bilden. Eine Durchsicht der Blätter unter dem Stereoskop zeigt, daß die meisten Bilder auch einen guten stereo-

skopischen Effekt geben. Allerdings sieht man, daß an die Vorstellungsgabe des Schülers sehr geringe Ansprüche gestellt sind; selbst für die einfachsten Beziehungen z. B. der Koordinatensysteme untereinander findet man stets mehrere Darstellungen. Der Verf. beruft sich hier auf seine zehnjährige Erfahrung als Lehrer an der Ingenieur- und Deckoffizierschule in Wilhelmshaven; dem möchte indes Ref. seinen eigenen Eindruck entgegenstellen, den er während einer etwa einjährigen Tätigkeit als Lehrer an einer Navigationsschule gewann: dem Seemann fällt es gar nicht schwer, „sich von Vorgängen im Raume eine zutreffende Vorstellung zu machen“.

So zahlreich wie die stereoskopischen Bilder, so ausführlich, man darf schon sagen umständlich ist der Text. Gegenstand der Darstellung ist etwa das Pensum, das ein Schiffer für kleine Fahrt an astronomischen Kenntnissen gebraucht. Die Breitenbestimmung aus Meridian- und Nebenmeridianhöhe und die Längenbestimmung aus Einzelhöhe und Chronometerzeit wird gelehrt, dazu der Begriff der Standlinie und ihre Benutzung auf der Seekarte erläutert. Die auftretenden Formeln der sphärischen Astronomie sind aber nicht entwickelt, nur mitgeteilt.

Das Vorwort des Verf. schließt mit den Worten: „Bei der Wiedergabe des Textes habe ich mich bemüht, nichts vorauszusetzen und in ihm alle Gedankensprünge, die naturgemäß bei dem lernenden Schüler Lücken hinterlassen müssen, zu vermeiden.“

Straßburg i. E.

WIRZ.

**C. V. L. Charlier, Studies in stellar statistics. II. The motion of the stars.** 110 S. und 7 Tafeln. 4. Meddel. Lunds astronom. observat. Ser. II. Nr. 9. Lund 1913, C. W. K. Gleerup.

In dem im J. 1912 ausgegebenen I. Teil seiner „Studies in stellar statistics“ (siehe diese Ztschr. Bd. 61 (1913), S. 437) hatte der Verf. die Verteilung der Sterne in bezug auf die Milchstraße und Ausdehnung und Gestalt des sichtbaren Sternsystems untersucht. Der vorliegende II. Teil ist dem Studium der beobachteten Bewegungen der Sterne senkrecht zum Visionsradius, den transversalen scheinbaren Eigenbewegungen (EB), gewidmet. Das Material bilden die Sterne bis zur sechsten Größenklasse, deren EB dem „Preliminary general catalogue of stars“ von Boss entnommen werden können. Führt der I. Teil in die Tiefen des Universums, so diskutiert der II. Teil die Bewegungsverhältnisse in der Nachbarschaft unserer Sonne; denn die zugezogenen Sterne sind einmal hell (nicht schwächer als  $6^m$ ) und dann zeigen sie eben noch eine EB. Die vorhandenen EB-Daten ordnete der Verf. in die 48 inhaltsgleichen Trapeze, deren er sich auch in der ersten Studie bedient und die er hier auf Tafel VI übersichtlich im Bilde nochmals mit den von ihm gewählten Bezeichnungen vorführt. Jedes Trapez ist unabhängig für sich behandelt worden und die Resultate der Abzählungen werden ausführlich mitgeteilt.

Das Hauptproblem in der Diskussion der Sternbewegungen besteht darin, aus der Verteilung der beobachteten transversalen EB in AR und Dekl. die Häufigkeitskurve der entsprechenden projizierten linearen Geschwindigkeiten kennen zu lernen. Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir die Zahl der Sterne der verschiedenen scheinbaren Größen und die Streuung ihrer absoluten Größen kennen. Unter absoluter Größe versteht der Verf. die auf die Entfernung eines

Siriometers (= 1 000 000 Erdbahnhalbachsen) reduzierte Größe eines Sternes. Die mathematische Untersuchung zeigt nun, daß der Übergang von der Verteilung der EB zu jener der linearen Bewegungen vermittelt wird durch einen einzigen Parameter  $q$ , den der Verf. zu 1.27 annimmt. Der Apex der Sonnenbewegung kommt im Mittel aus den Ergebnissen für die Sterne 4. und 5. Größe heraus zu

$$A = 270^0 \quad D = + 33^0$$

und die mittlere Parallaxe der Sterne 5<sup>m</sup> findet sich

$$\pi_{5,5} = 0''\cdot01126 \pm 0''\cdot00042.$$

Zugleich mit dem Apex bestimmt Charlier die Bewegung des Knotens der invariablen Ebene des Planetensystems auf der Ebene der Milchstraße; er gelangt zu dem Resultat, daß der Pol dieser in direktem Sinne vor sich gehenden Rotation in  $\alpha_0 = 187^0$ ,  $\delta_0 = + 15^0$ , also nicht weit vom Milchstraßenpol entfernt liege und daß die Umlaufzeit der Knoten etwa 370 Millionen Jahre betrage.

Der zweite Abschnitt der Arbeit studiert die Häufigkeitsverteilung der linearen Geschwindigkeiten und führt zu dem Ergebnis, daß die ersten Glieder der Geschwindigkeiten sich ziemlich gut einer ellipsoidischen Verteilung der EB anschließen. Die große Achse des Ellipsoids zeigt auf den Punkt (Vertex) AR =  $18^h 51^m$ , Decl. =  $- 19^0\cdot4$ , die Exzentrizität wäre 0.863, und die Sterne bewegten sich dann durchschnittlich doppelt so rasch auf den Vertex zu und von ihm weg, als in der Richtung senkrecht zur Ellipsoidachse. Die Reste der Darstellung, die diese ellipsoidische Hypothese übrig läßt, sind nicht unerheblich. Durch Annahme zweier unabhängiger Sternströme (Kapteyn) können die Abweichungen indes nach den Untersuchungen des Verf. sicher nicht verringert werden.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**A. Höfler, Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie.** Mit 2 Tafeln u. 80 Fig. im Text. XII u. 414 S. 8. Leipzig und Berlin 1913, B. G. Teubner. Geb. M 12.—.

Das Buch enthält viel Polemik, mehr vielleicht, als den meisten Lesern lieb sein wird. Denn die „Klagen und Anklagen“, die „Abwehr alter und neuer Bedenken“, die bekämpften „Gefahren“, die vielen Anekdoten aus der Praxis des Unterrichts und der Erfahrung des Verf. zerhacken den Vortrag und stellen die Geduld dessen, der in die sachlichen Absichten des Werkes eindringen will, unnötigerweise auf eine nicht leichte Probe.

Die sicher notwendige und zum Teil schon durchgeführte Reform des Unterrichts in der mathematischen Geographie strebt Höfler in der Weise an, daß er gleich im Anfang auf die Wahrnehmungen des Schülers aufbaut, ihn zu eigenen Beobachtungen der Sonne angeleitet wissen will. So sollen auf der untersten Stufe, die die zwei ersten Schuljahre umfaßt, die Kugelgestalt der Erde und der Sinn ihres Gradnetzes erkannt werden. Die zweite Stufe (3. und 4. Schuljahr) lernt den Mond kennen, und erst dann folgt die erste Orientierung am Fixsternhimmel. Daran läßt sich leicht die jährliche Bewegung der Sonne im Tierkreis und nun auch die wirkliche Bewegung des Mondes um die Erde anschließen. Zwanglos geht es hierauf über zum heliozentrischen

System des Kopernikus. Die dritte Stufe (5. und 6. Schuljahr) nützt die inzwischen erworbenen mathematischen Kenntnisse aus und zeigt deren Anwendung auf astronomische Rechnungen. Der Abschnitt bringt eine große Anzahl schöner Aufgaben aus Kreislehre, Ähnlichkeit, ebener und sphärischer Trigonometrie, die mit großem Geschick allen Zweigen des bisherigen astronomischen Pensums entnommen sind. Die Aufgaben sind nicht zu schwierig; sie setzen aber Schüler voraus, die dem Gegenstande mit Liebe gefolgt sind. Die vierte Stufe (7. und 8. Schuljahr) soll an erster Stelle das gewonnene astronomische Weltbild in das physikalische einfügen. Einen breiten Raum muß hier die Verknüpfung von Keplers phoronomischen Gesetzen mit Newtons dynamischem Gesetz einnehmen. Die Lichter aus Optik und Astrophysik hätte erst das letzte (8.) Schuljahr dem bisher rein mathematischen und phoronomischen Weltbilde aufzusetzen.

In dem Buche verstreut finden sich viele Aufgaben, Lehrproben, Vorschläge für den astronomischen Handfertigkeitsunterricht und gute Abbildungen, die sicher wertvolle Anregungen bilden für manchen, der in der Praxis des Mittelschulunterrichts steht. Dennoch möchte Ref. seine Meinung dahin aussprechen, daß das speziell österreichische Schulverhältnisse berücksichtigende Buch durch Weitschweifigkeit ermüdet und durch die Zerschnittenheit des Stoffes, die mosaikartige Unruhe der Darstellung auch als Nachschlagewerk verliert. Weniger wäre mehr.

Das Maß astronomischer Kenntnisse, das der Verf. für den Mittelschulabsolventen anstrebt, ist nicht übertrieben. Und an manchen höheren Schulen, des westlichen Deutschland zumal, wird das auch schon erreicht. Meist sind es die Anstalten der großen Städte, die im allgemeinen mit Leichtigkeit tüchtige Lehrkräfte erwerben und festhalten können. —

Es ist eine immer wiederkehrende Klage in den Lehrbüchern und Leitfäden der mathematischen Geographie, daß gerade für die Himmelskunde so wenig Interesse und Verständnis im gebildeten Publikum bestehe. Dennoch trifft das heute nicht mehr zu. Dafür spricht nicht nur die weite Verbreitung kleiner astronomischer Fernrohre, sondern auch der rasche Verkauf der letzten Auflagen des besten populär-astronomischen Werkes im Deutschen Sprachgebiet: die dritte Auflage von Newcomb-Engelmanns „Populärer Astronomie“ erschien 1905, die vierte Auflage 1910 und die fünfte starke Auflage, bearbeitet von Kempf, Eberhard, Ludendorff, Schwarzschild, wurde schon 1913 notwendig. Das spricht eine beredte Sprache für das Bedürfnis nach solider und zuverlässiger Belehrung aus dem gesamten Gebiete der Himmelskunde.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**W. Láska, Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie.** II. Teil: Praktische und theoretische Astronomie nebst der mathematischen Geographie. VIII u. 164 S. 8. Bremerhaven und Leipzig 1913, L. v. Vangerow. Geh. M 5.—.

Der I. Teil dieses Buches erschien 1906, er führte den Untertitel „Sphärische Astronomie“; ein kurzes Referat findet man in dieser Zeitschrift Bd. 56 (1908), S. 334. Der vorliegende II. Teil ist der praktischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie gewidmet. Auf insgesamt

353 Seiten hat also der Verf. das ganze Gebiet der Astronomie mit Ausschluß der Astrophysik zu behandeln unternommen. Das vorausgesetzte Maß mathematischer Kenntnisse ist nicht gering; mit Differential- und Integralrechnung muß der Leser vertraut sein.

Die Aufzählung der Abschnitte mag eine nähere Würdigung des Inhaltes ersetzen. I. Astronomische Messungen; enthält die Theorie der Meßinstrumente. II. Die geographischen Ortsbestimmungen. III. Die Bahnbestimmung; führt u. a. die Berechnung der Kreisbahn durch, erläutert die Bestimmung einer parabolischen Bahn, enthält Absätze über das Mondstörungsglied der Erdbewegung und über den Zusammenhang zwischen Sonnenparallaxe und Erdmasse und schließt mit der Ermittlung der Rotationselemente der Sonne. IV. Die astronomische Phänomenologie; Bestimmung der Schiefe der Ekliptik, Zeitgleichung und Zeitrechnung, Mondbewegung und Finsternisse. V. Kartographie. Die letzten Paragraphen des Kapitels behandeln die Indikatric von Tissot und ihre Benutzung zur Beurteilung der Kartendarstellungen. VI. Die Geometrie der Erdgestalt. Rechnungen auf dem Ellipsoid.

Die Übersicht zeigt schon die Vielheit der behandelten Gegenstände. Man wundert sich daher auch nicht, wenn die sehr kurz gehaltenen Paragraphen oft ihr Thema nicht zu Ende führen, sondern ziemlich plötzlich abbrechen. Unrichtigkeiten, Ungenauigkeiten, schiefe Ausdrücke sind gar nicht selten. Ein reiches Fehlerverzeichnis zum I. Teil bildet das Ende des II. Teiles.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**C. Schoy, Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen.** Zum Gebrauch für den Unterricht an höheren Schulen sowie beim Selbststudium. Mit 24 Fig. auf einer Tafel. IV u. 89 S. gr. 8<sup>o</sup>. Hamburg 1913, H. Grand.

Der Verf. konstatiert im Vorwort einen Mangel an Aufgabensammlungen aus dem Gebiete der sphärischen Trigonometrie. Den will er durch das vorliegende Heft heben, das eine Anzahl Aufgaben mit ihren Lösungen zusammenstellt, deren Stoffe der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie entnommen sind.

Das Material ist in 55 Aufgaben zerlegt, die nach fünf Abschnitten gruppiert sind. Abgesehen von der Anregung, die der Mittelschullehrer aus der Schrift schöpft, wird auch der Geograph und Astronom das Heft mit Interesse durchblättern. Den meisten Aufgaben hat der Verf. in historischen und literarischen Notizen ihren Heimatschein anhängen können, und alle klassischen Aufgaben der sphärischen Astronomie und noch manche andere finden sich hier bequem vereinigt. Der I. Abschnitt (Bestimmung der geographischen Breite) bringt natürlich auch die Douwessche Methode und das Pothensche Problem auf der Sphäre. Der II. kurze Abschnitt zeigt die Anwendung der Hyperbelfunktionen auf einige einfache Aufgaben der astronomischen Geographie. Die geringen erforderlichen Kenntnisse über Hyperbelfunktionen werden auf eine Seite zusammengedrängt den Lösungen vorangeschickt. Recht schöne Aufgaben bietet der III. Abschnitt (sphärische Maxima und Minima), darunter auch das früher viel behandelte und berühmte Problem der kürzesten Dämmerung. Auf weniger schwierige als langwierige Lösungen führen die Aufgaben des IV. Abschnittes (Zeit- und Ortsbestimmungen sowie verwandte



Probleme), und der V. Abschnitt (Geometrische Örter) dürfte für den Schüler wohl überhaupt nicht in Frage kommen. Aufgaben aus der Gnomonik und die strenge Behandlung von Schattenaufgaben, mit denen sich schon die arabischen Astronomen beschäftigten, bilden den reizvollen Inhalt dieses letzten Paragraphen. Um den Charakter dieser Aufgaben anzudeuten, sei die letzte, 55. Aufgabe des Buches hier hingestellt. „Nach den mohammedanischen Religionslehrern Måleh und Hambeleh ist das *Asr* jene Zeit des Nachmittags, die in dem Augenblick eintritt, in welchem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten vermehrt um die Länge des Gnomons ist. Welches ist der geometrische Ort aller Endpunkte dieser so definierten Nachmittagsschatten auf dem Zifferblatt einer Bazithah (Horizontalsonnenuhr)?“ —

Für die numerische Berechnung von astronomischen Beobachtungen zur geographischen Ortsbestimmung kommt allerdings keine der von Schoy behandelten Lösungen in Betracht; in der Praxis führt stets irgendeine indirekte Methode leicht, sicher, bequem zum Ziele. Es mag diese selbstverständliche Bemerkung hier noch stehen, weil immer wieder „neue Methoden“ geographischer Ortsbestimmung auf den Plan treten, die entweder komplizierte Beobachtungen und langwierige Rechnungen oder nur das letztere verlangen, und in die Behauptung ausklingen, daß die umständlichen langen Formeln rechtfertigt seien.

Schoys Schrift weist einen unangenehmen buchtechnischen Fehler auf: sie hat kein Inhaltsverzeichnis.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. II. De Meteoroscopiis**, herausgeg. von J. Würschmidt unter Benutzung der Vorarbeiten von A. Björnbo. Mit einem Vorwort von E. Wiedemann und 97 Fig. im Text. 260 S. 8. Leipzig und Berlin 1913, B. G. Teubner. Geh. *M.* 12.—.

Die Schriften des Nürnberger Mathematikers, Astronomen und Pfarrers Johannes Werner (1468—1528) sind zu seinen Lebzeiten nur zum Teil im Druck erschienen. Ein umfangreiches Manuskript zur sphärischen Trigonometrie wird hier zum erstenmal veröffentlicht. Den ersten Teil der Handschrift, betitelt „de triangulis sphaericis libri quatuor“ gab noch A. A. Björnbo im Jahre 1907 selbst heraus; für den vorliegenden zweiten Teil ist das von ihm vorbereitete und hinterlassene Material an J. Würschmidt übergegangen, der die Herausgabe dieses großen Werkes besorgte und insbesondere den lateinischen Text „de meteoroscopiis“ nicht einfach wörtlich übersetzte, sondern „den Inhalt der einzelnen Sätze und Beweise, erläutert durch Figuren, in moderner mathematischer Sprache, aber im engen Anschluß an Werners Behandlungsweise“ darstellte. Zur Charakterisierung der Handschrift und zur Textgeschichte beider Werke hatte schon Björnbo 1907 die nötigen Angaben gemacht.

Ein Meteoroskop nennt Werner eine Vorrichtung zur mechanischen Auflösung sphärischer Dreiecke. Er beschreibt in der vorliegenden Schrift vier solcher Apparate und schiebt ihrer Darstellung die nötigen Lehrsätze über Projektionen voraus. Er erläutert dann die Konstruktion des „ersten Meteoros-

skops“, das aus der Abbildung einer äquatorealen stereographischen Projektion besteht, um deren Mittelpunkt ein der Entwurfsart entsprechend geteiltes Lineal drehbar ist. Am einfachsten lassen sich mit dem Instrument rechtwinklige sphärische Dreiecke sozusagen direkt ablesen; daß aber auch komplizierte Aufgaben durch Zurückführung auf rechtwinklige Dreiecke leicht gelöst werden, das zeigt Werner an zahlreichen Aufgaben des umfangreichen dritten Buches, die alle der sphärischen Astronomie, der mathematischen Geographie und der Astrologie entnommen sind. Das „zweite Meteoroskop“ besteht aus einem Quadranten, dessen Umfang in  $90^\circ$  geteilt ist und dessen Basisradius eine Sinusteilung trägt. Das zugehörige Lineal wird gleich der Basis nach Sinus geteilt und im Mittelpunkt des Quadranten drehbar befestigt. Außerdem erhält das Lineal noch eine zweite Teilung in 60 gleiche Teile. Das „dritte Meteoroskop“ beruht auf der äquatorealen orthographischen Projektion; es verlangt die Zeichnung einer Schar von Ellipsen, deren Konstruktion angegeben wird. Das „vierte Meteoroskop“ erlaubt eine Reihe von Aufgaben einfach zu lösen, bei denen man am ersten Meteoroskop mehrere Fundamentalaufgaben anwenden muß. Zugrunde liegt wieder eine orthographische Projektion; sie ist aber mit zwei Linealen ausgerüstet, von denen nur eines in beliebig viele gleiche Teile geteilt zu sein braucht. Die Leistungsfähigkeit dieser Konstruktion erläutert Werner wieder durch viele Aufgaben aus der reinen und angewandten sphärischen Trigonometrie.

Es ist sehr zu bedauern, daß diesem wichtigen Werke kein Inhaltsverzeichnis beigegeben worden ist.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**Theodor Vahlen, Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie.** Mit 127 Figuren im Text. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Bd. XXXIII. XII u. 349 S. 8. Leipzig und Berlin 1911, B. G. Teubner. Geh. *M* 11,—, geb. *M* 12,—.

In den ersten vier Teilen behandelt der Verfasser die linearen, quadratischen und kubischen Konstruktionen, wobei noch zwischen projektiven, affinen und metrischen zu unterscheiden ist. Die verschiedensten Zeicheninstrumente, Lineal, Zirkel, Streckenübertrager usw. werden in bezug auf ihren Konstruktionsbereich und ihre Leistungsfähigkeit untersucht. Dann geht der Verfasser zu den höheren algebraischen und transzendenten Konstruktionen über; die Geometrographie und einiges über Fehlertheorie wird hier angeschlossen. Der 5. bis 8. Teil des Buches ist den Approximationen gewidmet. Natürlich steht dabei das Problem der Quadratur des Kreises im Mittelpunkt der ganzen Betrachtung. Handelt es sich um die näherungsweise Darstellung des Kreisumfangs als rationales Vielfaches des Durchmessers, so nennt der Verfasser diese Annäherungen „numerisch“. Weiter suchte man gesetzmäßige Darstellungen der Zahl  $\pi$  und der damit zusammenhängenden goniometrischen, zyklometrischen, logarithmischen und Exponential-Funktionen. Alle diese Betrachtungen faßt der Autor unter dem Begriff „analytische Approximationen“ zusammen. Jede angenäherte Darstellung der Zahl  $\pi$  führt dann aber wieder zu einer Näherungskonstruktion, womit man zu den „konstruktiven Approxi-

mationen“ gelangt. Der letzte, 8. Teil behandelt endlich die Irrationalität und Transzendenz der Zahlen  $e$  und  $\pi$ , wobei der Verfasser den von ihm in den Math. Annalen Bd. 53 gegebenen Beweis reproduziert. Das Buch verrät eine geradezu erstaunliche Kenntnis der ungeheuren Literatur, viele Zusammenhänge, Korrekturen und Verbesserungen werden gegeben. Das Bestreben, sich möglichst kurz zu fassen, führt allerdings hie und da zu Unklarheit (S. 114, S. 142). Die Figuren müßten bei einer 2. Auflage numeriert werden, und dann könnten auch die „Hypothenusen“ auf S. 239 verschwinden. Daß das Buch die Lücke ausfüllen kann, welche zwischen dem mathematischen Unterricht an den Mittelschulen und an den Hochschulen klafft, glaubt der Referent allerdings nicht. Denn es ist wesentlich ein Nachschlagebuch, wenn sich der Verfasser auch redlich bemüht hat, so weit als möglich eine zusammenhängende Darstellung zu geben.

München, März 1914.

KARL DOEHLEMANN.

**Ph. Maennchen, Geheimnisse der Rechenkünstler.** IV u. 48 S. 8<sup>o</sup>.

**A. Witting und M. Gebhardt, Beispiele zur Geschichte der Mathematik.** Ein math.-hist. Lesebuch. II. Teil. VIII u. 61 S. 8<sup>o</sup>. (Math. Bibliothek 13 bzw. 15). Leipzig 1913, B. G. Teubner. Kart. je  $\mathcal{M}$  — 80.

Die Bändchen der „Math. Bibliothek“ gehen, so höre ich, gut, wiewohl der Preis von  $\mathcal{M}$  — 80 für manche (z. B. das von Maennchen) etwas hoch ist. Nicht „die Geheimnisse“ der Rechenkünstler will der Verfasser enthüllen, da er sie vielleicht nicht alle kennt, aber einige gibt er preis, die sich in zwei Kategorien teilen: die Ausziehung von Wurzeln und die Bestimmung des Osterdatums bzw. der Mondphase für ein gegebenes Datum. Der Abschnitt über die „denkenden“ Rosse von Elberfeld ist eigentlich überflüssig, da er dem Verfasser nur dazu dient, mit einigen Scherzen auf den Rechenkünstler Ferrol überzuleiten. Man sollte aber nicht von einem „Ferrolschen Rechenverfahren“ sprechen. Denn wie schon Herr Maennchen selbst sagt, ist Ferrols Multiplikationsverfahren uralte und der Gebrauch negativer Ziffern nicht neu, aber auch das Divisionsverfahren, das Herr Maennchen in der Literatur noch nicht gefunden hat, ist mit dem von J. B. Fourier in seiner *Analyse des équations déterminées* (Paris 1831, S. 187 ff.) gegebenen völlig identisch, nur daß eben Ferrol im Kopf rechnet. Wegen der Neuheit des Gegenstandes wird das gut geschriebene Bändchen vermutlich viele Leser finden.

In gleicher Weise verdient das zweite Bändchen vielseitige Aufmerksamkeit. Überall ist Interesse da für historische Ausführungen, besonders im Unterricht; schlimm aber sieht es mit den großen Handbüchern aus, aus denen der Lehrer selbst vor allem seine Kenntnisse schöpfen muß. Als bestimmt richtig kann man bei dem heutigen Zustande eigentlich nur das betrachten, was man in einer ersten Quelle gelesen hat. Da sind Quellenbändchen, mit zuverlässigen Anmerkungen versehen, wie ein Trank dem Durstigen. Das vorliegende geht vom Jahr 1000 etwa bis zum 16. Jahrhundert und bringt Stücke aus arabischen Mathematikern, aus Leonardo de Cremona, aus Cossischen Schriften, (darunter Regiomontan, Dürer, Riese, Stifel, Scheubel, Rudolff), aus Cardanos *Ars magna*, einiges von Gemma Frisius und Bombelli usw. Die fremdsprachlichen Stücke mußten ja bei dem vorliegenden Zwecke leider übersetzt werden („*Arithmetica integra*“ heißt nicht „Reine Arithmetik“ (S. 39),

sondern „Gesamte A.“), die deutschen aber sind im genauen Wortlaut wiedergegeben und werden den Schülern mit ihrer krausen Orthographie viel Freude bereiten. Ich mache einige kleine Bemerkungen. Beim 2. und 3. Stück sind die Zitate der Überschriften unvollständig. Es könnte erwähnt werden, daß Drachme (S. 26), Dragma (S. 23) und Dirhem (S. 6) denselben Stamm haben. Bei Nikolaus von Cusa (S. 44) brauchte man nur zu sagen, daß „Cusa“ den Ort Cues (a. d. Mosel) bedeutet, um die „deutsche Abstammung“ sofort zu erklären. Bei Rudolffs *Coß* (herausgeg. von M. Stifel 1553) dürfte (ähnlich wie es an anderen Stellen geschah) in einer Fußnote erwähnt werden, daß die 1. Auflage schon 1525 erschienen war. Der Originaltitel sollte wohl (der leichteren Bestellung auf Bibliotheken wegen) bei allen Werken angegeben werden. Auch wäre bei einer zweiten Auflage beizufügen, wann das betreffende Verfahren zum erstenmal auftrat. In der Ausstattung ist das Bändchen musterhaft.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.** Erster Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. VI u. 202 S. gr. 8<sup>o</sup> m. 99 Textfiguren. Zweiter Teil: Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. IV u. 382 S. gr. 8<sup>o</sup> m. 96 Textfiguren. Leipzig 1913, B. G. Teubner. Geb. *M* 6.— bzw. *M* 13.—.

Dieses Werk fügt nicht bloß den bestehenden Übungsbüchern ein weiteres bei, sondern stellt einen neuen Typus dar, in dreierlei Hinsicht. Erstens, und das ist die Hauptsache, bringt es eine reiche Auswahl von wirklichen physikalischen und technischen Anwendungen und an geometrischen meist solche, die auch ein praktisches Interesse haben. Daß diesen Aufgaben auch die Lösungen beigefügt sind, ist sehr begrüßenswert; denn nichts entmutigt mehr als eine Aufgabe, die man nicht herausgebracht hat. Zweitens gibt der Verfasser an vielen Stellen zuverlässige und bibliographisch genaue Literaturangaben, die den Studierenden zum weiteren Eindringen reizen sollen. Drittens enthält jeder Band ein ganz eingehendes Sach- (und Namen-) Register, wodurch es ermöglicht wird, eine Aufgabe, deren man sich nur flüchtig erinnert, sofort wieder zu finden. Daß die gewöhnlichen notwendigen Differentiations- und Integrationsübungen daneben nicht vernachlässigt wurden, ist selbstverständlich. Was würden die Herren Strauch und Dölp aber für Gesichter machen, wenn sie noch sehen könnten, wie das hier alles miteinander in Zusammenhang steht. Ich möchte die beiden Dingeldeyschen Bücher allen Studierenden, insbesondere auch denen der reinen Mathematik, aufs wärmste empfehlen.

Sachlich erwähne ich zum ersten Band, daß seit dessen Erscheinen die ganze Geschichte von den Bienenzellen und den Mathematikern Maraldi, König usw. (s. dort S. 120) von H. Vogt als schönes Märchen entlarvt wurde (s. dessen Büchlein *Geometrie u. Ökonomie d. Bienenzelle*, Breslau 1911).

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

## Neue Bücher.

### Astronomie, Geodäsie, Nautik.

1. KRÜGER, L., Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel und die Ebene. (Veröffentlichung des kgl. preußischen geodätischen Instituts, neue Folge Nr. 60.) Potsdam 1914, (Leipzig, Teubner). *M* 3.—  
S. auch 58, 61.

### Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

2. ATTWOOD, EDWARD, L., and COOPER, J. C. G., A textbook of laying off: or, the geometry of shipbuilding. London 1914, Longmans. 6 s.
3. AUERBACH, FELIX, Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und den Gebrauch der Methode. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 437. Bändchen.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
4. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome III, 2. vol.; Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire. Paris 1913, (Leipzig, Teubner), *M* 6.—
5. HAUSSNER, ROB., Darstellende Geometrie. Erster Teil. Elemente; ebenflächige Gebilde. 3., verm. u. verb. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 142.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen. geb. *M* —.90.
6. HYELEMSLEV, JOHANNES, Darstellende Geometrie. (Handbuch der angewandten Mathematik, II.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 5.40; geb. in Leinw. *M* 6.—
7. KEISER, KARL, Freies Skizzieren ohne u. nach Modell f. Maschinenbauer. Ein Lehr- und Aufgabenbuch für den Unterricht. 2., erweit. Aufl. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 3.—
8. MÜLLER, REINHOLD, Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. tech. Hochschule zu Braunschweig. 2. Aufl. Nachtrag. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 1.—  
S. auch 72, 87.

### Geschichte.

9. JENTSCH, EERNST, Julius Robert Mayer. Seine Krankheitsgeschichte u. die Geschichte seiner Entdeckung. Berlin 1914, Springer. *M* 4.—; geb. in Leinw. *M* 4.80.
10. HOBSON, E. W., John Napier and the invention of logarithms, 1614. A Lecture. Cambridge 1914, University Press. 1 s. 6 d.
11. HORN, CARL, Goethe als Energetiker, verglichen mit den Energetikern Robert Mayer, Ottomar Rosenbach, Ernst Mach. Leipzig 1914, Barth. *M* 2.—
12. PITONI, RINALDO, Storia della fisica. Torino 1913. L. 4.—

13. SMITH, DAV. EUGENE, and MIKAMI, JOSHIO, A history of Japanese mathematics. Leipzig 1914, Meiner. Geb. in Leinw. *M* 15.—  
S. auch 76.

#### Mechanik.

14. ALLIEVI, LORENZO, Teoria del colpo d'ariete. Nota I: Esposizione generale del metodo. Roma 1914 L. 4.—
15. ALTENRIETH, ED., Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik f. Maschinen- und Bauingenieure. 2. Aufl. Neu bearb. v. Max Enslin. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 18.—
16. CONTALDI, P., La meccanica e le macchine nella scuola e nell'industria. Vol. I: Meccanica generale e meccanica applicata. 3a ediz. riveduta e ampliata. Milano 1913. L. 12.—
17. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. IV. Bd.: Mechanik. 1 II. 3. Heft. Leipzig 1914, Teubner. *M* 4.60.  
— dasselbe. 2 II. 4. Heft. Ebd. *M* 3.60.
18. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Éd. française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande. Tome IV., 5. vol. Systèmes déformables. Fasc. 2. Paris 1914, (Leipzig, Teubner). *M* 4.20.
19. FISCHER, GEO., Das Spiel der Kräfte im Verbundbalken. Eine Darstellung der Lehre vom Verbund, von der Spannungsverteilung und Ermittlung in auf Biegung beanspruchten Eisenbetonkörpern. Lissa 1914, Eulitz. *M* 6.—
20. FÖPPL, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Dritter Band. Festigkeitslehre. 5. Aufl. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—
21. FULLER, C. E., and JOHNSTON, W. A., Applied Mechanics. Vol. I. Statics and Kinetics. London 1913, Chapman & Hall. 10 s. 6 d.
22. GIORLI, E., Momenti d'inerzia e loro applicazioni ad uso degl'ingegneri, ecc. (Man. Hoepli.) Milano 1913. L. 2.50.
23. JUNG, WILH., Über die Kulissensteuerung der Walzenzugmaschine. Leipzig 1913, Teubner.
24. KLEIN, F. u. SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels. Heft I: Die kinematischen u. kinetischen Grundlagen der Theorie. Zweiter durchgesehener Abdruck. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 5.60; geb. in Leinw. *M* 6.60.
25. LAMB, HORACE, Dynamics. Cambridge 1914, University Press. 10 s. 6 d.
26. LEITZ, HEINR., Die Berechnung der frei aufliegenden rechteckigen Platten. (Forscherarbeiten aus dem Gebiete des Eisenbetons, 23. Heft.) Berlin 1914, Ernst & Sohn. *M* 3.60.
27. MAGGI, G. A., Geometria del movimento: lezioni di cinematica. Con un'appendice sulla geometria della massa. Pisa 1914. L. 8.—
28. MARCUS, H., Der doppelt gekrümmte Träger u. das schiefe Gewölbe im Eisenbetonbau. Ein Beitrag zu ihrer Berechnung. (Forscherarbeiten aus dem Gebiete des Eisenbetons, 24. Heft.) (Erweit. Sonderdr. aus: „Ztschr. f. Bauwesen“.) Berlin 1914, Ernst & Sohn. *M* 2.80.
29. WITTENBAUER, F., Aufgaben aus der techn. Mechanik. I. Bd. Allgemeiner Teil. 3., verm. u. verb. Aufl. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 6.40.  
S. auch 32, 34, 37, 44, 49.

#### Physik.

30. BAULINO, C., L'entropia e i diagrammi entropici, con molte applicazioni numeriche. Livorno 1914. L. 5.—  
— Trattato di macchine termiche. Vol. I: Elementi di termodinamica pratica. Libro di testo per la r. Accademia navale, con molti esempi numerici. Livorno 1914. L. 8.—

31. BENISCHKE, GUST., Die wissenschaftlichen Grundlagen d. Elektrotechnik. 3., teilweise umgearb. u. verm. Aufl. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 15.—
32. BRENDT, GEO. W., Physikalisches Praktikum. 1. Teil. Mechanik, Akustik, Wärme, Optik. 2. verb. u. verm. Aufl. Jena 1914, Schmidt.  
Geb. in Leinw. *M* 4.50.
33. CORNISH, VAUGHAN, Waves of sand and snow and the eddies which make them. London 1914, Unwin. 10 s.
34. Fortschritte, Die, der Physik im J. 1913. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 69. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikal. Chemie. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 26.—
35. FRÄNCKEL, ALFR., Theorie der Wechselströme. Berlin 1914, Springer.  
Geb. in Leinw. *M* 10.—
36. GOCKEL, A., Die Radioaktivität von Boden und Quellen. (Sammlung Vieweg Heft 5.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 3.—
37. HÄNERT, L., Angewandte Mechanik. Leitfaden der Naturlehre. Beiheft Physikalische Aufgaben der Artillerie, Navigation u. des Schiffbaus. Berlin 1914, Mittler & Sohn. *M* 2.—
38. HERTZ, HEINR., Gesammelte Werke. II. Bd. Untersuchungen über die Ausbreitung der elektr. Kraft. 3., m. der 2. gleichlaut. Aufl. Leipzig 1914, Barth. *M* 6.—; geb. in Halbfrz. *M* 7.50.
39. HICKS, W. M., A critical study of spectral series. Part. III. The atomic weight term and its import in the constitution of spectra (Royal Society). London 1913, Dulau. 4 s. 6 d.
40. HINZ, ADF., Thermodynamische Grundlagen der Kolben- u. Turbokompressoren. Graphische Darstellung für die Berechnung u. Untersuchung. Berlin 1914, Springer.  
Geb. in Leinw. *M* 12.—
41. JACKSON, D. C. and J. P., Alternating currents and alternating current machinery. New edition, rewritten and enlarged. London 1914, Macmillan. 23 s.
42. KRUMME, WILHELM, Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearb. v. Karl Bergwitz u. Hugo Fenkner. Erste Stufe: Pedsum der Obertertia u. Untersekunda. 4., umgearb. u. erw. Aufl. Berlin 1913, Grote. Geb. *M* 4.—
43. LORIA, ST., Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem. (Sammlung Vieweg Heft 4.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 3.—
44. PALÁGYI, MELCH., Die Relativitätstheorie in der modernen Physik. Vortrag. Berlin 1914, Reimer. *M* 1.50.
45. PLANCK, MAX, Neue Bahnen der physikalischen Erkenntnis. Rektorats-Rede, Leipzig 1914, Barth. *M* 1.—
46. POHL, R., u. PRINGSHEIM, P., Die lichtelektrischen Erscheinungen. (Sammlung Vieweg Heft 1.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 3.—
47. POYNTING, J. H., and THOMSON, SIR J. J., A text-book of Physics: Electricity and Magnetism. London 1914, Griffin. 10 s. 6 d.
48. SCHACHENMAYER, RICH., Zur mathematischen Theorie der Bewegung an Schirmen von beliebiger Form. Karlsruhe 1914, Braun.
49. SCHÄFER, CLEMENS, Einführung in die theoretische Physik. In zwei Bänden. I. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper u. Mechanik der Kontinua (Elastizität u. Hydrodynamik). Leipzig 1914, Veit & Co. *M* 18.—; geb. in Leinw. *M* 20.—
50. SCHÜLE, W., Technische Thermodynamik. 2., erweit. Aufl. der „Techn. Wärme-mechanik“. 2. (Schluß-)Bd.: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der techn. Anwendungen. Berlin 1914, Springer.  
Geb. in Leinw. *M* 10.—

51. SCHWEYDAR, WILHELM, Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond. (Veröffentlichung des Kgl. preußischen geodätischen Instituts, neue Folge Nr. 59.) Potsdam 1914 (Leipzig, Teubner).
52. SVEDBERG, THE, Die Materie. Ein Forschungsproblem in Vergangenheit u. Gegenwart. Deutsche Übersetzung v. H. Finkelstein. Leipzig 1914, Akad. Verlagsgesellschaft. *M* 6.50; geb. in Leinw. *M* 7.50.
53. THOMÁLEN, ADF., Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik. 6., verb. Aufl. Berlin 1914, Springer. Geb. *M* 12.—
54. VOLTERRA, VITO, Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik, gehalten im September 1909 an der Clark-University. Mit Zusätzen und Ergänzungen des Verfassers deutsch v. Ernst Lamlá. (Aus: „Archiv der Mathem. u. Physik.“) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 3.—
55. Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, gehalten in Göttingen auf Einladung der Kommission der Wolfskehlstiftung von M. Plank, P. Debye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld und H. A. Lorentz. Mit Beiträgen von H. Kamerlingh-Onnes u. W. H. Keesom, sowie einem Vorwort von D. Hilbert. (Mathem. Vorlesungen an der Universität Göttingen: VI.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner, *M* 7.—; geb. in Leinw. *M* 8.—
56. ZEHNDER, LUDW., Grundriß der Physik. 2. umgearb. Aufl. Tübingen 1914, Laupp. *M* 7.—; geb. *M* 8.—  
S. auch 9, 11, 12, 59, 70, 73, 74, 76.

## Tafeln.

57. HOLBORN, L., u. SCHEEL, KARL, Vier- und fünfstellige Logarithmentafeln nebst einigen physikalischen Konstanten. 2. verb. Aufl. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 0.80.
58. Jahrbuch, Nautisches, oder Ephemeriden u. Tafeln für das Jahr 1916 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Berlin 1914, Heymann. Geb. in Halbleinw. *M* 1.50.
59. KÜSTER, F. W., Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner u. Physiker. 14., verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1914, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 2.80.
60. MRHA, JOS., u. OPPELT, RUD., Tabellen zur Zinseszinsrechnung u. Versicherungsrechnung. 2. unveränd. Aufl. Prag 1914, André. *M* 1.—
61. SCHRÖDER, ADF., H., Nautische Rechen-Vorlagen für kleinere und mittlere Fahrt. Mit einem Vorwort v. F. Bolte. Berlin 1914, Wedekind & Co. In Leinw.-Mappe u. geh. *M* 3.50.
62. ZIMMERMANN, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 7. Aufl. Ausg. A (ohne besondere Quadrattaf.) Berlin 1913, Ernst & Sohn. Geb. in Leinw. *M* 5.—  
S. auch 3, 10, 40.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung.

63. BOREL, ÉMILE, Le hasard. Paris 1914, Alcan. Fr. 3.50.
64. HACK, FRZ., Wahrscheinlichkeitsrechnung. Neudruck. (Sammlung Göschen Nr. 508.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen. Geb. in Leinw. *M* 9.—

## Verschiedenes.

65. Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen, veranlaßt und herausgegeben vom deutschen Ausschuß für technisches Schulwesen Bd. V. Arbeiten auf dem Gebiete des technischen Hochschulwesens. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.



66. BAROLIN, JOHANNES C., Der Hundertstundentag. Wien u. Leipzig 1914, Braumüller. *M* 1.50; geb. in Leinw. *M* 2.50.
67. DELENS, P., Problèmes d'arithmétique amusante. Paris 1914, Vuibert. Fr. 2.—
68. DRESSLER, H., und KÖRNER, K., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen u. Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen und Anhalt. (Abh. über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band V Heft 4.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 4.80.
69. GALITZIN, FÜRST B., Vorlesungen über Seismometrie. Deutsche Bearbeitung, unter Mitwirkung von Clara Reinfeldt hrsg. von O. Hecker. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 22.—; geb. in Leinw. *M* 24.—
70. GANS, RICHARD, Einführung in die Vektoranalysis, mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 3.40; geb. in Leinw. *M* 4.—
71. GINZEL, F. K., Handbuch der mathematischen u. technischen Chronologie. Das Zeitrechnungswesen der Völker. 3. Bd. Zeitrechnung der Makedonier, Kleinasier u. Syrer, der Germanen u. Kelten, des Mittelalters, der Byzantiner (u. Russen), Armenier, Kopten, Abessinier, Zeitrechnung der neueren Zeit, sowie Nachträge zu den 3 Bänden. Leipzig 1914, Hinrichs. *M* 16.—; geb. in Leinw. *M* 19.—.
72. GOSSNER, B., Kristallberechnung u. Kristallzeichnung. Ein Hilfsbuch der Kristallographie mit Betonung der graphischen Verfahren, sowie der analyt. u. zonalen Beziehungen. Leipzig 1914, Engelmann. *M* 8.—
73. HAAS, ARTH. ERICH, Der Geist des Hellenentums in der modernen Physik. Antrittsvorlesung. Leipzig 1914, Veit & Co. *M* 1.20.
74. HERZOG, S., Theoretische u. praktische Einführung in die allgemeine Elektrotechnik. Handbuch für das Selbststudium. Stuttgart 1914, Enke. *M* 12.—; geb. in Leinw. 13.40.
75. HICKMANN, REINHOLD, Wertvolle Kunstgriffe und Vorteile beim Schnellrechnen. Lehrbuch aller praktischen Abkürzungs-Methoden zum raschen und bequemen Bewältigen großer Zahlen. Mit Anh.: Zahlenkunststücke u. arithm. Geheimnisse. 3. Aufl. Leipzig 1914, Schlöffel. *M* 1.—
76. HOFFMANN, CURT, Ältere und neue Ansichten über das Erdinnere. Vortrag bei der von der Oberrealschule und dem Gymnasium in Ravensburg gemeinsam veranstalteten Feier des Geburtsfestes S. M. des Königs Wilhelm II. am 26. Februar 1914. Ravensburg 1914, Alber. *M* —.80.
77. JACOB, JOSEF, Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts. Mit einem Vorwort von Ernst Mach. Wien 1913, Pichlers Witwe & Sohn. *K* 4.—; geb. *K* 4.50.
78. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band 42. Jahrg. 1911. (In 3 Heften.) Heft 3. Berlin 1914, Reimer. *M* 18.50.
79. Kultur der Gegenwart, Die, Teil III Abteilung 1: Die mathematischen Wissenschaften. 2. Lfg.: A. VOSS, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. — H. E. TIMMERDING, Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. Berlin u. Leipzig 1914, Teubner. *M* 6.—.
80. LIETZMANN, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussischen Volks- u. Mittelschulen. (Abh. über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band V Heft 6.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 3.—.
81. LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1913. (Schriften des deutschen Ausschusses für den mathem. u. naturw. Unterr., Heft 18.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* —.50.
82. LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Neu bearb. von A. Donadt. Leipzig 1914, Brandstetter. *M* 3.60; geb. *M* 4.10.

83. MICHNIK, HUGO, Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren. I. Teil. Leipzig 1914. Teubner.
84. MORROW, JOHN, Entwerfen und Berechnen der Dampfturbinen mit besonderer Berücksichtigung der Überdruckturbine einschl. der Berechnung von Oberflächenkondensatoren und Schiffschrauben. Autoris. deutsche Ausg. v. Carl Kisker. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 14.—.
85. POINCARÉ, H., Wissenschaft u. Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 3. verb. Aufl. Leipzig 1914, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 4.80.
86. POINCARÉ, HENRI, Wissenschaft und Methode. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen v. F. und L. Lindemann. („Wissenschaft u. Hypothese“ XVII.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 5.—.
87. SANDEN, H. VON, Praktische Analysis. (Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. von H. E. Timerding, L.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 3.60; geb. in Leinw. *M* 4.20.
88. VATER, RICH., Die neueren Wärmekraftmaschinen. I. Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. („Aus Natur u. Geisteswelt“ 21. Bdchn.) 4. Aufl. Leipzig 1914, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
89. VOSS, A., Über die mathematische Erkenntnis. („Die Kultur der Gegenwart“, Teil III, Abtlg. 1, 3. Aufl.) Berlin u. Leipzig 1914. *M* 5.—.
90. WILDA, HERM., Die Dampfturbinen. Ihre Wirkungsweise, Berechnung u. Konstruktion. 1. Teil. Theorie der Dampfturbinen. 3., erweiter. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 274.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.90.
91. — Dasselbe. 2. Teil. Die Berechnung der Dampfturbinen u. die Konstruktion der Einzelteile. 3., erweiter. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 715.) Ebenda. Geb. in Leinw. *M* —.90.
92. — Dasselbe. 3. Teil. Die Regelung der Dampfturbinen, Verwertung des Abdampfes, die Kondensationsanlagen, die Bauarten der Dampfturbinen. 3., erweiter. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 716.) Ebenda. Geb. in Leinw. *M* —.90.

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- AUBERT, P. et PAPELIER, G., Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Tome I. Paris (1914), Vuibert. Fr. 6.—
- AUERBACH, F., Die graphische Darstellung, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 3.
- BACKES, WILHELM, Weitere Beweise für den Fermatschen Satz. 2., umgearb. u. veränd. Aufl. v.: Ein Beweis des Fermatschen Satzes. Mainz 1914, Lehrlingshaus. *M* 3.—.
- BAROLIN, JOHANNES C., Der Hundertstudentenag, s. N. B. 66.
- BAVINK, BERNHARD, Allgemeine Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaft. Eine Einführung in die moderne Naturphilosophie. Leipzig 1914, Hirzel. *M* 6.—; geb. *M* 7.—.
- BOREL, ÉMILE, Le hasard, s. N. B. 63.
- DECKERT, ADALBERT, Lehrbuch der Mathematik. Breslau, Görlich. I. Algebra u. Planimetrie für Präparandenanstalten. Geb. *M* 3.30. II. Algebra für Seminare. Geb. *M* 2.50. III. Planimetrie u. Trigonometrie f. Seminare. Geb. *M* 3.50.
- Dasselbe, erweiterte Sonderausgaben aus Bd. III: Stereometrie, geb. *M* 1.75; Trigonometrie, geb. *M* 1.75.

- DELENS, P., Problèmes d'arithmétique amusante, s. N. B. 67.
- DRESSLER, H., und KÖRNER, K., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen usw., s. N. B. 68.
- FRIEDRICH, MAX, Grundzüge der analytischen Geometrie. 3. Aufl., durchgesehen u. verb. v. Ehrig. Leipzig 1914, Weber. Geb. in Leinw. *M* 2.50.
- FORSYTH, A. R., Lectures introductory to the theory of functions of two complex variables, delivered to the University of Calcutta during January and February 1913. Cambridge 1914, University Press. 10 s.
- Fortschritte der Psychologie u. ihrer Anwendungen unter Mitwirkung von Wilhelm Peters hrsg. v. Karl Marbe. II. Band, V. Heft. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 3.—
- FÜPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. 3. Bd., s. N. B. 20.
- GABRILOVITSCH, LEONID, Über mathematisches Denken und den Begriff der aktuellen Form. (Bibliothek f. Philosophie, 8. Band. Beilage zu Heft 4 des Archivs f. systematische Philosophie, Bd. XXVI.) Berlin 1914, Simion Nf. *M* 2.50.
- GALITZIN, FÜRST B., Vorlesungen über Seismometrie, s. N. B. 69.
- GANS, R., Einführung in die Vektoranalysis, s. N. B. 70.
- GANTER, H., u. RUDOLPH, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. I. Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. 8., verb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—
- GOCKEL, A., Die Radioaktivität von Boden und Quellen, s. N. B. 36.
- HAUSSNER, K., Darstellende Geometrie, s. N. B. 5.
- HESSENBERG, GERHARD, Ebene und sphärische Trigonometrie. 3., Neubearb. Aufl. (Sammlung Göschen.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.90.
- HJELMSLEV, J., Darstellende Geometrie, s. N. B. 6.
- HOBSON, E. W., John Napier and the invention of logarithms, s. N. B. 10.
- HÖLDER, OTTO, Die Arithmetik in strenger Begründung. Programmabhandlung der philosophischen Fakultät zu Leipzig. Leipzig 1914, Leipzig. *M* 2.60.
- HOPFMANN, C., Ältere u. neuere Ansichten über das Erdinnere, s. N. B. 76.
- HOLBORN-SCHEEL, Vier- u. fünfstellige Logarithmentafeln, s. N. B. 57.
- JACOB, JOSEF, Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts, s. N. B. 77.
- KLEIN, F., und SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels, s. N. B. 24.
- KÖHLER, WALTHER, Geist und Freiheit. Allgemeine Kritik des Gesetzesbegriffes in Natur- und Geisteswissenschaft. Tübingen 1914, Mohr. *M* 4.80.
- KÖNIG, BERTHOLD, u. MATUSCHEK, JOHANN, Anorganische Chemie für die Oberstufe der Realgymnasien. Wien 1914, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. K. 3.—
- KRUMME, W., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 42.
- KRÜGER, L., Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion, s. N. B. 1.
- Kultur der Gegenwart, Die, Teil III Abteilg. 1. Die mathematischen Wissenschaften, 2. Lfg., s. N. B. 79.
- LIEBMAN, H., und ENGEL, F., Die Berührungstransformation, Geschichte u. Invariantentheorie. Zwei Referate, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Ergänzungsbände V. Band.) Leipzig 1914, Teubner. *M* 3.—
- LIEZMANN, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preußischen Volks- u. Mittelschulen, s. N. B. 80.
- LIEZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht im J. 1913, s. N. B. 81.
- LORIA, ST., Die Lichtbrechung in Gasen, s. N. B. 43.
- LOTS, ALFRED,  $x^n + y^n = z^n$ ? Beweis des großen Fermatschen Satzes. Altenburg S. A. 1914, Selbstverlag.
- LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis, s. N. B. 82.

- MAURER, H., Richtige elementare Lösung der Fermatschen Problems  $x^n + y^n = z^n$ .  
Zürich 1914, Orell Füssli. Fr. 1.—
- MICHNICK, HUGO, Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren, s. N. B. 83.
- NETTO, EUGEN, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende  
der ersten Semester. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.  
M 4.40; geb. in Leinw. M 5.—
- POHL-PRINGSHEIM, Die lichtelektrischen Erscheinungen, s. N. B. 46.
- POINCARÉ, H., Wissenschaft u. Hypothese, s. N. B. 85.
- POINCARÉ, HENRI, Wissenschaft u. Methode, s. N. B. 86.
- ROSENBERG, F., Das Ferrolsche neue Rechnungs-Verfahren. Eine Umwälzung in der  
Welt der Zahlen. Als Manuskript gedruckt.
- SANDEN, H. VON, Praktische Analysis, s. N. B. 87.
- SCHACHENMEIER, R., Zur mathematischen Theorie der Bewegung an Schirmen,  
s. N. B. 48.
- SCHÄFER, OL., Einführung in die theoretische Physik, I., s. N. B. 49.
- SCHALLER, J. GEORG, Beweis der Richtigkeit des „großen Fermatschen Satzes“.  
Nebst Anhang. Grabow i. Meckl. (1913), Selbstverlag. M 2.—
- SCHMEHL, CHR., Die Algebra u. algebraische Analysis nebst einer elementaren  
Theorie der Determinanten u. den Anfangsgründen der Differentialrechnung  
in den oberen Klassen von höheren Lehranstalten. 2. verb. Aufl. Gießen  
1914, Roth. M 2.50; geb. M 3.—
- SCHWEYDAR, W., Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne u. Mond,  
s. N. B. 51.
- VOLTERRA, VIRO, Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen  
Physik, s. N. B. 54.
- Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, von  
Planck usw., s. N. B. 55.
- VOSS, A., Über die mathematische Erkenntnis, s. N. B. 89.
- VIAL, L.-CH.-E., La machine humaine. 2. éd. revue et accrue. Paris 1914, Maloine.
- WATSON, G. N., Complex integration and Cauchy's theorem, (Cambridge Tracts in  
Mathematics and mathematical Physics Nr. 15.) Cambridge 1914, University  
Press. 3 s.

## Vergleich der Widerstandsmessungen in einem Kanal und in einem Luftstrahl.<sup>1)</sup>

Von V. VALCOVICI in Jassy (Rumänien).

### Einleitung.

Die verschiedenen hydrodynamischen Ansätze zur Behandlung des Widerstandsproblems vermögen uns keine Schlüsse von praktischer Bedeutung über den Verlauf der Bewegung und über die Größe der da auftretenden Kräfte zu geben. Für die meisten Forderungen der Praxis bleibt man auf das Experiment angewiesen; man läßt einen Strom in einem Kanal (wie in der Göttinger Versuchsanstalt) fließen oder einen freien Strahl aus einer Düse (wie in der Eiffelschen Versuchsanstalt) gegen den Körper strömen und mißt dann die hydrodynamischen Drucke. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen werden mangels etwas Besseren als in der in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit geltend betrachtet. Die Aufgabe dieser Arbeit soll die Bestimmung der Abweichungen jeder von diesen zwei Versuchsarten von dem Verhalten in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit sein; dabei soll überall die zweidimensionale Helmholtzsche Bewegung zugrunde gelegt sein.

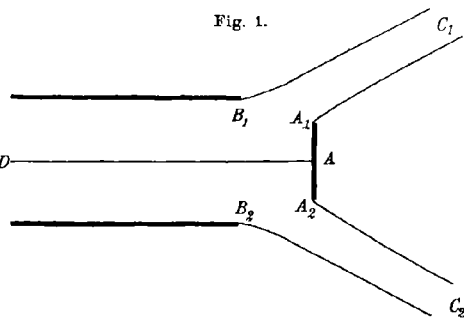
Es wird zunächst die symmetrische Strömung aus einer Düse mit ebenen Wänden gegen eine Platte behandelt; durch Spezialisierung bekommt man den Fall der Platte in einem Kanal mit parallelen, ebenen Wänden. Der funktionentheoretische Teil wird im folgenden nur kurz skizziert; für die strenge und ausführlichere Behandlung dieses Teiles verweise ich auf den ersten Teil meiner Dissertation.

### § 1. Die Eiffelsche Einrichtung.

Aus einer symmetrischen Düse (Fig. 1) kommt ein Strahl  $B_1 C_1 B_2 C_2$  heraus und stößt gegen eine senkrecht zur Strömungsrichtung in der Mitte der Strömung gestellte ebene Platte  $A_1 A_2$ . Wir beziehen diese Bewegung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Staupunkt  $A$  und mit den Achsen  $AA_1$  als  $y$ -Achse und einer dazu

1) Auszug aus meiner Dissertation: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen, Göttingen 1913.

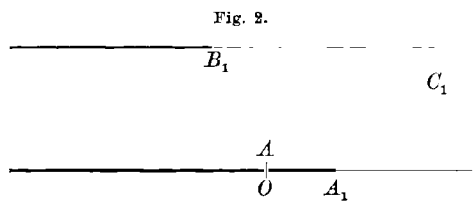
senkrecht stehenden Gerade als  $x$ -Achse; die positive Richtung derselben soll die der Geschwindigkeit auf der Stromlinie  $DA$  sein. Die Rechnung wollen wir dadurch vereinfachen, daß wir die Stromlinie  $DA$  als starre Wand betrachten. Hat das komplexe Potential  $f = \varphi + i\psi$  den Wert Null in  $A$ , so wird das in der  $f$ -Ebene entsprechende Gebiet durch die Fig. 2 dargestellt sein. Es sei  $a$  der Abstand  $AA_1$  in der  $f$ -Ebene, d. h. der Wert des Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$  in  $A_1$  und  $(b, \pi c)$  die Koordinaten des Punktes  $B_1$  ebenfalls in der  $f$ -Ebene, d. h. die Werte des Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$  und der Stromfunktion  $\psi$  in  $B_1$ . Dieser Streifen in der  $f$ -Ebene wird durch die Beziehung



(1) 
$$f = c \log \frac{mF + n}{F + n}$$

konform auf die obere Hälfte der  $F$ -Ebene (Fig. 2) abgebildet; dabei sind:

(2) 
$$m = \frac{\frac{a}{e^c} - \frac{b}{e^c} + 2e^{\frac{a+b}{c}}}{\frac{b}{e^c} - \frac{a}{e^c} + 2}, \quad n = \frac{\frac{a}{e^c} + \frac{b}{e^c}}{e^c + e^c + 2}.$$



Es gelten die Ungleichungen:

$$0 < \frac{n}{m} < 1,$$

so daß der durch die Beziehung

(2') 
$$\frac{n}{m} = \cos \varepsilon_0$$

definierte Winkel  $\varepsilon_0$  reell zwischen Null und  $\frac{\pi}{2}$  angenommen werden darf. Sind  $u$  und  $v$  die Komponenten der Geschwindigkeit nach den betrachteten Koordinatenachsen, so ist bekanntlich  $u - iv$  eine analytische Funktion  $w$  von  $x + iy$ , so daß

$$\frac{df}{dz} = w$$

ist, wobei

$$z = x + iy$$

ist.

Wir definieren durch die Beziehung

(3) 
$$w = e^{-it}$$

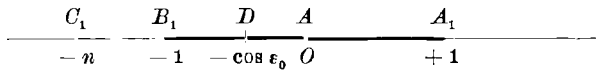
eine analytische Funktion

$$t = \theta + i\varrho$$

von  $z$ ; ihr Realteil  $\theta$  gibt den Neigungswinkel der Geschwindigkeit gegen die  $Ox$ -Achse und ihr Imaginärteil  $\varrho$  den Logarithmus des absoluten Betrages der Geschwindigkeit an. Sie ist eine reguläre analytische Funktion  $F$  in der oberen Halbebene  $\Im(F) \geq 0$ . Auf dem Teil  $A_1 \infty CB_1$  von dem Rande dieses Gebietes ist  $\varrho = 0$ , da wir den konstanten absoluten Betrag der Geschwindigkeit auf den freien Grenzen gleich 1 setzen wollen. Ferner haben wir  $\theta = \frac{\pi}{2}$  auf der Strecke  $AA_1$  und  $\theta = 0$  auf  $B_1DA$ . Wir haben also mit einer gemischten Randwertaufgabe zu tun, die wir durch einen Kunstgriff, den man Levi-Civita verdankt<sup>1)</sup>, auf eine gewöhnliche Randwertaufgabe zurückführen wollen. Wir bilden nämlich zuerst die positive Halbebene  $\Im(F) \geq 0$  auf das Innere eines

Fig. 3.

Halbkreises in der  $s$ -Ebene konform ab, so daß die Strecke



$B_1A_1$  auf dem Halbkreis selbst und das Stück  $A_1 \infty C_1B_1$  auf den Durchmesser abgebildet wird (Fig. 3). Dies erreicht man durch die Beziehung:

$$(4) \quad F = -\frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right)$$

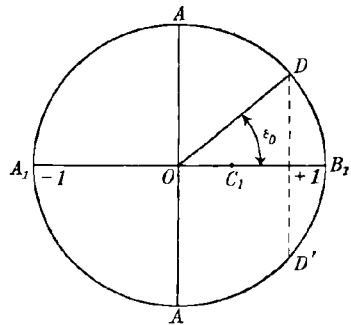
oder

$$(4') \quad s = -F + \sqrt{F^2 - 1}.$$

$s$  ist also eine mehrdeutige Funktion  $F$  mit den Verzweigungspunkten  $F = \pm 1$ ; wenn wir diese beiden Punkte durch kleine Halbkreise oberhalb der reellen Achse ausschließen und einen bestimmten Zweig der Funktion  $s(F)$  herausgreifen, dann bleibt sie in der ganzen oberen Hälfte der  $F$ -Ebene eindeutig. Wir wollen denjenigen Zweig der Funktion  $s(F)$

betrachten, welcher den Wert  $+i = e^{+\frac{\pi}{2}i}$  annimmt, wenn  $F$  auf irgend einem in der oberen Hälfte der  $F$ -Ebene enthaltenen Wege in dem Nullpunkt ankommt. Dem Halbkreis  $B_1DAA_1$  (Fig. 4) entspricht in der  $F$ -Ebene die Strecke  $B_1DA A_1$ , denn  $s$  ist gleich  $e^{i\varepsilon}$  in diesem Falle, wenn  $\varepsilon$  das Argument der Veränderlichen  $s$  bedeutet und also  $F = -\cos \varepsilon$ , wie sich aus der Beziehung (4) ergibt; der Winkel  $DOB_1$

Fig. 4.



1) Scie e leggi di resistenza, Rendiconti Palermo, 1907.

ist gerade der oben definierte Winkel  $\varepsilon_0$ . Ebenso einfach sieht man ein, daß sich die gradlinigen Strecken  $A_1B$  in der  $s$ -Ebene und  $A_1\infty BC_1$  in der  $F$ -Ebene entsprechen. Im übrigen entspricht der positive Laufsin in der  $F$ -Ebene bzgl. ihrer oberen Hälfte dem positiven Laufsin längs des Randes in der  $s$ -Ebene in bezug auf das Innere des betrachteten Halbkreises, woraus man schließen darf, daß die Beziehung (4) die obere Halbebene  $\Im(F) > 0$  auf das Innere des Halbkreises in der  $s$ -Ebene konform abbildet. Die gesuchte Funktion  $t$ , welche jetzt das Innere dieses Halbkreises als Regularitätsgebiet besitzt, hat ihren Imaginärteil gleich Null auf der Strecke  $A_1B_1$  der reellen Achse in der  $s$ -Ebene. Sie kann also unter diese Achse mittels des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes analytisch fortgesetzt werden. Das neue Regularitätsgebiet der Funktion  $t(s)$  wird das Innere des vollen Kreises  $|s|=1$  sein. Ihr Realteil  $\theta$  nimmt den konstanten Wert  $\frac{\pi}{2}$  auf dem Kreisbogen  $A_1A$  und den Wert Null auf  $ADB_1$  an. Auf dem unteren Halbkreis bekommt man das Verhalten von  $\theta$  durch analytische Spiegelung.

Nun können wir die im Innern des Kreises  $|s|=1$  harmonische Funktion  $\theta$  bestimmen, und somit die Funktion  $t(s)$  selbst bis auf eine additive Konstante, welche übrigens durch die Symmetrieeigenschaft der Funktion  $t(s)$  eindeutig bestimmt ist. Die Schwarzsche Formel<sup>1)</sup>, welche die Funktion  $t(s)$  direkt durch die Randwerte  $\bar{\theta}(\varepsilon)$  ihres Realteiles  $\theta$  angibt, liefert

$$t(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{\theta}(\varepsilon) \frac{1-s^2}{1-2s \cos \varepsilon + s^2} \cdot d\varepsilon,$$

wobei

$$\bar{\theta}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{„ } \frac{\pi}{2} < \varepsilon \leq \pi \end{cases}$$

ist. In dem Punkte  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  ist die Randfunktion  $\bar{\theta}$  nicht erklärt; da bleibt sie aber endlich und somit ist die Existenz der oben angegebenen Form von  $t(s)$  gesichert. Die Rechnung gibt:

$$(5) \quad t(s) = \frac{i}{2} \log \left( \frac{s-i}{1-si} \right).$$

Mittels dieser Funktion kann man jede kinematische oder dynamische Größe berechnen.

1) Schwarz, Abhandlungen, II.



§ 2. Die Bestimmungsgleichungen für die Parameter  $a, b, c$ .

Man hat für das Linienelement  $|dz|$ :

$$|dz| = \frac{|df|}{w};$$

auf  $A_1A_1$  ist  $df$  reell und positiv und

$$w = e^{\varrho} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = |w| \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Daraus hat man die Beziehung:

$$|dz| = \frac{df}{w} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

auf  $AA_1$ . Man erhält aber aus (1)

$$df = \frac{c(n - \cos \varepsilon_0)}{(F + \cos \varepsilon_0)(F + n)} dF.$$

Ersetzen wir hierin  $F$  kraft der Beziehung (4) durch  $-\cos \varepsilon$ , so bekommen wir:

$$df = \frac{c(n - \cos \varepsilon_0) \sin \varepsilon}{(\cos \varepsilon_0 - \cos \varepsilon)(n - \cos \varepsilon)} \cdot d\varepsilon.$$

Somit hat man für  $|dz|$  auf  $AA_1$  den Ausdruck:

$$dz = \frac{c(n - \cos \varepsilon_0) \sin \varepsilon}{(\cos \varepsilon_0 - \cos \varepsilon)(n - \cos \varepsilon)} e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} d\varepsilon;$$

dabei ist  $e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$  durch den sich aus (5) ergebenden Wert:

$$\left\{ \operatorname{tang} \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

zu ersetzen. Sodann erhält man für die Länge  $\frac{d}{2}$  der Platte  $AA_1$ :

$$\frac{d}{2} = \int_A^{A_1} |dz| = c(n - \cos \varepsilon_0) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \varepsilon \cdot \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot d\varepsilon}{(\cos \varepsilon_0 - \cos \varepsilon)(n - \cos \varepsilon)}$$

oder, wenn man  $\operatorname{tg} \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = u$  setzt:

$$(6) \quad \frac{d}{2} = 2c(n - \cos \varepsilon_0) \int_0^1 \frac{(1 - u^2) \cdot du}{u^{\frac{1}{2}} [(1 + u^2) \cos \varepsilon_0 + 2u] [n(1 + u^2) + 2u]}$$

Andere zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter  $a, b, c$  erhält man, wenn man die bekannten Koordinaten  $\left(x_0, \frac{D}{2}\right)$  des Punktes  $B_1$  (Fig. 1) mittels  $t(s)$  ausdrückt. Dabei bedeutet  $D$  den Durchschnitt

$B_1 B_2$  (Fig. 1) des Tunnels. Die Koordinaten  $x, y$  irgendeines Punktes  $M$  in der  $z$ -Ebene werden durch die Gleichung:

$$z = x + iy = \int_A^M \frac{df}{w}$$

gegeben, wobei der Integrationsweg von  $A$  bis  $M$  innerhalb des Halbkreises in der  $s$ -Ebene verläuft. Auf diese Weise bekommt man den folgenden Ausdruck für die Koordinaten  $x_0, \frac{D}{2}$  des Punktes  $B_1$ :

$$(7) \quad x_0 + i \frac{D}{2} = c(n - \cos \varepsilon_0) \int_{s=i}^1 \left( \frac{s-i}{1-si} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dF}{(F + \cos \varepsilon_0)(F+n)};$$

dabei sind  $F$  und  $dF$  durch die Beziehung (4) gegeben. Wir wollen nebenbei bemerken, daß man die Formel (6) in derselben Weise bekommen könnte.

Der Integrationsweg in der Formel (7) ist irgendeine analytische, in dem Regularitätsgebiet der Funktion  $t(s)$  enthaltene, die beiden Punkte  $i$  und  $1$  verbindende Kurve; wir nehmen als solche den Kreisbogen  $AD$  (Fig. 4) bis auf den singulären Punkt  $D$ , den wir durch einen kleinen Halbkreis nach innen vermeiden. Dann kann man (7) folgendermaßen umgestalten:

$$x_0 + i \frac{D}{2} = c(n - \cos \varepsilon_0) \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin \varepsilon \cdot \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}}{(\cos \varepsilon_0 - \cos \varepsilon)(n - \cos \varepsilon)} \cdot d\varepsilon \\ + i\pi c \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Das letzte Glied rechter Hand ist das Resultat der Integration längs des kleinen Halbkreises um den Punkt  $D$ , also das halbe Residuum des Integranden in diesem Punkte. Das Integral rechter Hand soll seinen Cauchyschen Hauptwert darstellen; der singuläre Punkt dabei ist  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (d. h.  $D$ ), wie es zu erwarten war. Im übrigen ist dieses Integral reell, sodaß man schreiben kann:

$$(7) \quad \begin{cases} x_0 = c(n - \cos \varepsilon_0) \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin \varepsilon \cdot \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}}{(\cos \varepsilon_0 - \cos \varepsilon)(n - \cos \varepsilon)} \cdot d\varepsilon, \\ \frac{D}{2} = \pi c \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Für die letzte von diesen zwei Gleichungen hat man unmittelbar eine physikalische Deutung; die Geschwindigkeit in dem Punkte  $D$  im Unendlichen ist nämlich gleich  $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4}\right)}$ , die man aus (5) herleiten kann, und das Produkt  $\frac{D}{2} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$  stellt gerade die Hälfte der sekundlich ins Gefäß gekommenen Wassermenge dar, die offenbar gleich der Differenz  $\pi c$  der Werte der Stromfunktion auf den Stromlinien  $DB_1C_1$  und  $DAA_1C_1$  ist.

§ 3. Die Gleichungen zur Bestimmung der drei Parameter  $a, b, c$ .

Durch die Funktion  $t(s)$  lassen sich sämtliche Bewegungsparameter ausdrücken; die dazu gehörigen Werte enthalten dennoch die Konstanten  $a, b, c$  als unbekannte Parameter. Dieselben lassen sich mittels der drei Gleichungen (6) und (7') bestimmen. Durch die Ausführung der Quadratur erhält man aus (6), wenn man  $c$  durch seinen aus (7') entnommenen Wert

$$(7'') \quad c = \frac{D}{2\pi} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

ersetzt:

$$(A) \quad \frac{\pi}{2} \lambda^2 \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \\ + \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - \sin \alpha \log \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right\} \\ - \frac{\pi}{2} \cos \alpha;$$

dabei bedeutet  $\alpha$  den durch die Gleichung:

$$(8) \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{n}$$

definierten, im Intervalle  $(0, \frac{\pi}{2})$  enthaltenen Winkel und  $\lambda^2$  das Verhältnis  $\frac{d}{D}$ . In ähnlicher Weise ergibt sich aus (7'):

$$(B) \quad -\xi \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \\ = \left\{ \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} + \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \right\} \log \left( \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} - 1}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} + 1} \right) \\ - 2 \cos \alpha \log \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \pi \sin \alpha.$$

$\xi$  ist an Stelle der Größe  $-2\pi \frac{x_0}{D}$  gesetzt worden; es mißt die in  $\frac{D}{2\pi}$  Einheiten ausgedrückte Entfernung des Staupunktes  $A$  (Fig. 1) von der

Projektion  $B$  des Punktes  $B_1$  auf die  $Ox$ -Achse und ist positiv oder negativ, je nachdem  $A$  sich rechts oder links von  $B$  befindet.

(A) und (B) stellen zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter  $\varepsilon_0$  und  $\alpha$  dar; mittels (7'') hat man alsdann  $c$  und durch (2') und (2) die Größen  $a$  und  $b$  selbst.

#### § 4. Die verschiedenen geometrischen und kinetischen Parameter der Bewegung.

Der durch die Beziehung (4') definierte Winkel  $\varepsilon_0$  wird sehr klein, wenn  $D$  ins Unendliche wächst, denn dann wird  $c$  sehr groß und also sowohl  $m$  als auch  $n$  werden beinahe gleich 1. Anstatt  $\varepsilon_0$  wollen wir einen neuen Parameter  $\varkappa$  einführen, derart daß

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = 1 + \varkappa$$

ist;  $\varkappa$  darf infolgedessen als sehr klein angenommen werden, wenn  $D$  sehr groß ist.

Die Geschwindigkeit  $V_D$  im Punkte  $D$  bekommt man aus (5); es ergibt sich

$$V_D = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$$

oder durch den neu eingeführten Parameter  $\varkappa$  ausgedrückt:

$$(9) \quad V_D = \frac{1}{1 + \varkappa}.$$

Den Winkel  $\theta_C$ , den der Strahl im Punkte  $C_1$  mit der Achse einschließt, bekommt man ebenfalls aus (5) für  $F = -n$ , d. h.  $s = n - \sqrt{n^2 - 1}$ ; rechnet man das aus, so bekommt man:

$$(10) \quad \theta_C = \alpha.$$

Für den gegen die Platte  $A_2A_1$  ausgeübten Widerstand  $W$  finden wir mittels des Impulssatzes:

$$W = \frac{D}{2} (1 + V_D^2) - 2\pi c \cos \alpha.^1)$$

Ersetzen wir  $2\pi c$  durch  $D \cdot V_D$  und  $\cos \alpha$  durch  $1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , so bekommen wir:

$$W = \left\{ (1 - V_D)^2 + 4 V_D \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \frac{D}{2},$$

oder, wenn wir anstatt  $V_D$  seinen durch (9) angegebenen Wert nehmen:

$$(11) \quad W = \left\{ \frac{\varkappa^2}{(1 + \varkappa)^2} + 4 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \varkappa} \right\} \frac{D}{2}.$$

1) Für die Ableitung dieser Formel siehe ebenfalls den ersten Teil meiner Dissertation.

Bei den Eiffelschen Versuchen bezieht man den Widerstand auf die Geschwindigkeit, welche auf der freien Grenze herrscht, d. h. auf 1 in unserem Falle; infolgedessen ist  $\frac{W}{d}$  gleich dem dimensionslosen Faktor  $\Psi^1$ ), den wir  $\Psi_E$  nennen wollen:

$$(12) \quad \Psi_E = \left\{ \frac{\kappa^2}{(1+\kappa)^2} + 4 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\kappa} \right\} \frac{1}{2\lambda^2}.$$

Im Falle des in der  $x$ -Richtung unendlich ausgedehnten Kanals wird  $\alpha = 0$ , denn  $b$  wird unendlich groß und also  $n = 1$ , wie es sich aus der Gleichung (2) ergibt. Die Widerstandsformel lautet in diesem Falle:

$$W = \frac{\kappa^2 D}{2(1+\kappa)^2}.$$

Bei den Versuchen der Göttinger Anstalt könnte man daran denken, diese Widerstände auf die Geschwindigkeit in  $D$  zu beziehen, d. h. auf  $V_D = \frac{1}{1+\kappa}$ ; dividiert man  $W$  durch  $V_D$  und durch  $d$ , so erhält man den dimensionslosen Faktor  $\Psi$ , den wir  $\Psi_k$  nennen wollen:

$$(13) \quad \Psi_k = \frac{\kappa^2}{2\lambda^2}.$$

Auf den Vorschlag von Prof. Prandtl bezieht man jedoch den gefundenen Widerstand auf die Geschwindigkeit in einiger Entfernung hinter dem Körper, oder was hier dasselbe ist, auf die Geschwindigkeit an der freien Grenze, d. h. auf 1. Den entsprechenden Zahlenfaktor  $\Psi'_k$  bekommt man, indem man den Wert des Widerstandes bloß durch  $d$  dividiert:

$$(13') \quad \Psi'_k = \frac{\kappa^2}{2\lambda^2(1+\kappa)^2}.$$

Wir wollen noch den Fall des vollkommen freien Strahles betrachten, d. h.  $b = \infty$ ; aus (2) erhalten wir  $m = n$ , also  $\varepsilon_0 = 0$  und infolgedessen  $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = 1$ . Der Widerstand wird also durch die Formel (11) gegeben, wo wir  $\kappa = 0$  setzen müssen: Der entsprechende dimensionslose Faktor  $\Psi_s$  ergibt sich durch Division des Widerstandes durch  $d$ :

$$(14) \quad \Psi_s = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\lambda^2}.$$

1) Betreffs dieser Bezeichnung siehe Ludw. Prandtl, Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformeln, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorschiffahrt, 1910.

§ 5. Die Bestimmung von  $\alpha$  und  $\kappa$ .

Diese beiden Größen werden in dem allgemeinen Falle mit Hilfe der Gleichungen (A) und (B) bestimmt. Zu diesem Zwecke werden wir die verschiedenen in (A) und (B) auftretenden Funktionen von  $\varepsilon_0$  und  $\alpha$  durch Potenzreihen nach  $\kappa$  und  $\alpha$  ersetzen;  $\alpha$  wird nämlich auch sehr klein, wenn  $D$  stark wächst, denn  $n$  wird in diesem Falle nahezu gleich 1, wie die zweite von den Formeln (2) zeigt.

Man hat

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \operatorname{arctg}(1 + \kappa) = \frac{\pi}{4} + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{4} + \frac{\kappa^3}{12} \pmod{5};$$

durch (mod. 5) wollen wir andeuten, daß die höheren ganzen Potenzen von  $\kappa$  als die vierte vernachlässigt worden sind. Ferner hat man:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3}{12} \pmod{5} \end{aligned}$$

und:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \kappa} = 1 - \kappa + \kappa^2 - \kappa^3 + \kappa^4 \pmod{5},$$

so daß die Beziehung:

$$\begin{aligned} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} + \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} \\ = \frac{\pi}{2} + \kappa^2 \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \kappa^3 \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{11 + 3\pi}{12} \kappa^4 \pmod{5} \end{aligned}$$

gilt. Außerdem können wir schreiben:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \pmod{5},$$

$$\log \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right\} = -\alpha = \frac{\alpha^3}{6} \pmod{5},$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \pmod{5}$$

und also:

$$\sin \alpha \cdot \log \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right\} + \frac{\pi}{2} \cos \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha^2 \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{48} \alpha^4 \pmod{5}.$$

Führt man diese Werte in die Gleichung (A) ein, so erhält man

$$(A') \quad 2\pi \frac{1 + \kappa}{4 + \pi} \lambda^3 = \kappa^3 + \alpha^2 - \kappa^3 + \frac{11 + 3\pi}{3(4 + \pi)} \kappa^4 - \frac{\pi}{12(4 + \pi)} \alpha^4 \pmod{5}.$$

Durch ähnliche Reinentwicklungen bekommt man aus (B):

$$(B') \quad -\xi(1 + \kappa) = \log \frac{\kappa^3}{\alpha^2} - \kappa - \alpha\pi + \kappa^2 \log \frac{\kappa}{2} + \alpha^2 \log \frac{\alpha}{2} + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\alpha^2}{6} \pmod{3}.$$

Die Größe  $\lambda$  wollen wir als sehr klein ansehen. Dagegen werden wir die Größenordnung des Verhältnisses  $\xi$  vollkommen willkürlich lassen; es wird in der Tat sogar unendlich groß, wenn sich die Wände des Gefäßes bis ins Unendliche in der positiven Richtung der  $x$ -Achse ausdehnen (Kanal), oder wenn das Gefäß vollkommen nach links (Fig. 5) verschwindet (der Fall des vollkommen freien Strahles). Diese beiden extremen Fälle wollen wir ausschließen und annehmen, daß  $\lambda\xi =$

$-2\pi \frac{d}{D} \cdot \frac{x_0}{D}$  immer noch sehr klein angenommen werden darf. Setzen wir etwa:

$$x = x_1 (1 + x'), \quad \alpha = \alpha_1 (1 + \alpha'),$$

wobei  $x'$  und  $\alpha'$  zwei kleine Korrekturen bedeuten, so erhalten wir aus (B')

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} = e^{-\xi}$$

und aus (A')

$$x_1^2 + \alpha_1^2 = \frac{2\pi}{4 + \pi} \lambda^2,$$

indem wir die Größen gleicher Ordnung gleich setzen. Daraus ergibt sich

$$(15) \quad \begin{cases} x_1^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{(4 + \pi)(1 + e^\xi)}, \\ \alpha_1^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{(4 + \pi)(1 + e^{-\xi})}. \end{cases}$$

Setzen wir ferner:

$$x' = x_2 (1 + x''), \quad \alpha' = \alpha_2 (1 + \alpha''),$$

führen diese Werte in (A') und (B') ein und greifen wieder die Glieder gleicher Größenordnung heraus, so bekommen wir:

$$(16) \quad \begin{cases} x_2 + \alpha_2 e^\xi = \frac{2 + e^\xi}{2} x_2 \\ x_2 - \alpha_2 = \left(1 - \xi + \pi e^{\frac{\xi}{2}}\right) \frac{x_1}{2}. \end{cases}$$

In derselben Weise können wir die ersten Annäherungen  $x_3$  und  $\alpha_3$  der Größen  $x''$  bzw.  $\alpha''$  berechnen. Es ergibt sich:

$$(17) \quad \begin{cases} 2(x_2 x_3 + e^\xi \alpha_2 \alpha_3) = (4 + e^\xi) x_1 x_2 - x_2^2 - \alpha_2^2 e^\xi - \frac{44 + 12\pi - \pi e^\xi}{12(4 + \pi)} x_1^2 \\ 2(x_2 x_3 - \alpha_2 \alpha_3) = (1 - \xi) x_1 x_2 + x_2^2 - \alpha_2^2 + \pi \alpha_1 \alpha_2 - x_1^2 \log \frac{x_1}{2} + \frac{1}{4} \\ - \alpha_1^2 \left(\log \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{6}\right); \end{cases}$$

dabei haben wir angenommen, daß  $x_1^2, \alpha_1^2, x_1^2 \log x_1, \alpha_1^2 \log \alpha_1$  kleine Größen von derselben Größenordnung sind. Das Erscheinen dieser letzten Größen in der Berechnung angenäherter Werte von  $x$  und  $\alpha$  hat uns

verhindert für  $\kappa$  und  $\alpha$  von vornherein Entwicklungen nach Potenzen von  $\lambda$  anzusetzen; in der Tat verträgt sich die Gleichung (B) mit keinem solchen Potenzansatz. Jedenfalls kann man auf ähnliche Weise jede gewünschte Approximation berechnen.

Im Falle des Kanals hat man, wie oben bemerkt,  $n = 1$ , also  $\alpha = 0$ ; die Gleichung (A) oder (A') sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{2\pi}{4+\pi}(1+\kappa)\lambda^2 = \kappa^2 - \kappa^3 + \frac{11+3\pi}{3(4+\pi)}\kappa^4,$$

woraus man durch Vergleich der Größen gleicher Größenordnung bekommt:

$$(18) \quad \kappa_1^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{4+\pi}, \quad \kappa_2 = \kappa_1, \quad \kappa_3 = \frac{25+6\pi}{6(4+\pi)}\kappa_1.$$

Die Gleichung (B) bzw. (B') reduziert sich zu der Identität  $\infty = \infty$ .

Dagegen hat man  $\kappa = 0$  für den vollkommen freien Strahl. Die Gleichung (A') reduziert sich zu der folgenden:

$$\frac{2\pi\lambda^2}{4+\pi} = \alpha^2 - \frac{\pi}{12(4+\pi)} \cdot \alpha^4 \pmod{6}.$$

Die exakte Form (A) dieser Gleichung enthält nur gerade Potenzen von  $\alpha^2$ , was man unmittelbar verifizieren kann, wenn man  $\alpha$  mit  $-\alpha$  umtauscht. Wir können also den Potenzansatz

$$\alpha^2 = a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4$$

machen. Die obige Gleichung liefert:

$$(19) \quad \alpha^2 = \frac{2\pi}{4+\pi}\lambda^2 + \frac{\pi^2}{3(4+\pi)^3}\lambda^4 \pmod{\lambda^6}.$$

Die Gleichung (B) resp. (B') wird die Identität  $-\infty = -\infty$ .

## § 6. Die Berechnung von $\Psi_E$ .

Um  $\Psi_E$  numerisch auszuwerten, müssen wir seinen durch (12) angegebenen Wert nach Potenzen von  $\kappa$  und  $\alpha$  entwickeln. Wenn man in der Klammer die fünfte Potenz von  $\kappa$  und  $\alpha$  vernachlässigt, so hat man:

$$\Psi_E = \frac{\kappa_1^2}{2\lambda^2} \left[ \frac{(1+\kappa)^2}{(1+\kappa')^2} + (1+\alpha')^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2}{12}e^{\xi}\right)}{1+\kappa} \right],$$

oder der Größe nach geordnet:

$$\Psi_E = \frac{\pi}{4+\pi} \left\{ 1 + \frac{2\kappa_2 + 2e^{\xi}\alpha_2 - \kappa_1(2+e^{\xi})}{1+e^{\xi}} \right. \\ \left. + \frac{2(\kappa_2\kappa_3 + \alpha_2\alpha_3e^{\xi}) - 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 3\kappa_1^2 + e^{\xi}\left(\alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2}{16} + \alpha_1^2 - 2\alpha_2\kappa_1 - \kappa_1\kappa_2\right)}{1+e^{\xi}} \right\}.$$



Das von der ersten Ordnung kleine Glied in der Klammer verschwindet infolge der ersten von den Gleichungen (16), so daß die Abweichung  $\delta_E = \Psi_E - \Psi$  von dem Kirchhoffschen Widerstandsfaktor

$$\Psi = \frac{\pi}{4 + \pi} \text{ gleich dem von der zweiten Ordnung kleinen Ausdruck:}$$

$$\delta_E = \frac{\pi}{4 + \pi} \cdot \frac{2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 e^\xi) - 6\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_1^2 + e^\xi \left( \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{16} + \alpha_1^2 - 2\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 \right)}{1 + e^\xi}$$

ist. Ersetzt man hierin die Klammer  $2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 e^\xi)$  durch ihren aus (17) entnommenen Wert und benutzt man hinterher noch die erste von den Gleichungen (16), so erhält man schließlich:

$$(20) \quad \delta_E = \frac{\pi[4 + \pi e^\xi - (4 + \pi)e^{2\xi}]}{12(4 + \pi)(1 + e^\xi)} \alpha_1^2 = \frac{\pi^2[4 + \pi e^\xi - (4 + \pi)e^\xi]}{6(4 + \pi)^2(1 + e^\xi)^2} \cdot \lambda^2$$

Das Augenfälligste bei dieser Formel ist wohl das Verschwinden von  $\delta_E$  für  $\xi = 0$ , d. h. wenn die Platte sich in (B) befindet, dann gibt es keine Abweichung von dem Kirchhoffschen Widerstandskoeffizienten bis auf Größen von der Größenordnung von  $\lambda^3$ . Sonst verschwindet  $\delta_E$  nirgends, so daß diese Lage als die günstigste bei den Eiffelschen Widerstandsversuchen zu betrachten wäre.

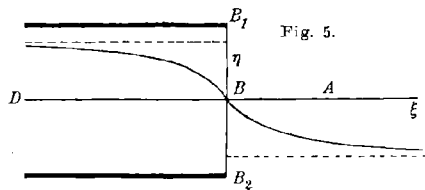
Maßgebend bei der Variation von  $\delta_E$  ist der Faktor:

$$(21) \quad \eta = \frac{4 + \pi e^\xi - (4 + \pi)e^{2\xi}}{(1 + e^\xi)^2}$$

Man erhält durch Differentiation:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -e^\xi \cdot \frac{8 - \pi + (8 + 3\pi)e^\xi}{(1 + e^\xi)^3}$$

Diese Ableitung ist fortwährend negativ und verschwindet nirgends im Endlichen. Daraus schließen wir, daß  $\delta_E$  negativ für positive Werte für  $\xi$  und positiv für negatives  $\xi$  ausfällt, d. h. bedeutet  $\xi$  eine positive Zahl, dann ist  $\eta(\xi) = -\eta_1$  und  $\eta(-\xi) = +\eta_2$ , wobei  $\eta_1$  und  $\eta_2$  zwei positive Größen sind; die Differenz  $\eta_1 - \eta_2$  ist gleich  $\pi \cdot \left( \frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1} \right)^2$ , also



immer positiv: Von zwei in bezug auf die Öffnung  $B_1 B_2$  symmetrischen Lagen der Platte ist die im Kanal befindliche die geeignetere für die Widerstandsversuche.

Der Verlauf der Kurve ist ungefähr durch die Figur 5 gegeben.

§ 7. Die Berechnung der Größen  $\Psi_k$ ,  $\Psi'_k$  und  $\Psi_s$ .

Für den Kanal hat man aus (13):

$$\Psi_k = \frac{\kappa_1^2}{2\lambda^2} (1 + \kappa')^2,$$

wenn die Geschwindigkeit vor dem Körper gemessen wird. Führt man den durch (18) gegebenen Wert von  $\kappa_1^2$  ein und zieht man den Kirchhoffschen Widerstandskoeffizienten  $\Psi = \frac{\pi}{4 + \pi}$  ab, so erhält man:

$$\delta_k = \frac{\pi}{4 + \pi} \{2\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_3\kappa_2\} = 0,825\lambda + 1,232\lambda^2 \pmod{\lambda^3}.$$

Der positive Fehler beträgt bei  $\lambda^2 = \frac{1}{10}$  ungefähr 27%.

Bezieht man den Widerstand auf die Geschwindigkeit hinter dem Körper, so hat man aus (13')

$$\Psi'_k = \frac{\kappa_1^2}{2\lambda^2} \cdot \frac{(1 + \kappa')^2}{(1 + \kappa)^2} = \frac{\pi}{4 + \pi} \{1 + 2\kappa_1(\kappa_3 - \kappa_1)\}.$$

Für den entsprechenden Fehler  $\delta'_k$  hat man:

$$\delta'_k = \frac{2\pi}{4 + \pi} (\kappa_3 - \kappa_1)\kappa_2 = +0,018\lambda^2 \pmod{\lambda^3}.$$

Der Fehler ist ebenfalls positiv aber bedeutend kleiner als  $\delta_k$ ; er ist vollkommen vernachlässigbar bei der heutigen Genauigkeit der hydrodynamischen Messungen. Der Widerstandsfaktor der Platte in dem vollkommen freien Strahle wird durch die Formel (14) gegeben:

$$\Psi_s = \frac{\alpha^2}{2\lambda^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right).$$

Wenn man hierin  $\alpha^2$  durch seinen durch (19) gegebenen Wert ersetzt und daraus den Kirchhoffschen Druck abzieht, so hat man für den Fehler  $\delta_s$ :

$$\delta_s = -\frac{4\pi^2}{6(4 + \pi)^3} \lambda^3 = -0,018\lambda^2 \pmod{\lambda^4}.$$

Der Fehler ist in diesem Falle negativ und bei gleichem  $\lambda$  gleich dem Fehler  $\delta'_k$  im absoluten Betrage.

Man kann also sagen, daß die Abweichung  $\delta$  des Zahlenfaktors  $\Psi$  von dem Kirchhoffschen wenigstens für sehr kleines  $\lambda$  eine monoton abnehmende Funktion von  $\xi$  ist. Sie ist positiv und gleich  $0,018\lambda^2$ , wenn die Versuchsplatte sehr weit im Kanal steht; kommt die Platte immer näher an die Öffnung  $B_1B_2$  heran, so nimmt  $\delta$  beständig ab und verschwindet schließlich, wenn die Platte dicht vor der Öffnung steht. Rückt die Platte weiter nach rechts, so wird  $\delta$  negativ und

nimmt stets ab, bis sie sehr weit von  $B$  den Wert  $-0,018\lambda^2$  erreicht. Der qualitative Verlauf von  $\delta$  als Funktion von  $\xi$  ist durch die in Figur 5 gezeichnete Kurve gegeben.

§ 8. Die Fehlerkurven  $\delta'_k$  und  $\delta_s$ .

Ich will jetzt den allgemeinen Verlauf der Größen  $\delta'_k$  und  $\delta_s$  als Funktionen von  $\lambda^2$  studieren. Für den Kanal reduziert sich die Gleichung (A) zu der folgenden:

$$(A'') \quad \frac{\pi}{2} \lambda^2 x = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}.$$

Dabei ist

$$x = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)} = \frac{1}{V_D}.$$

Der Widerstandsfaktor  $\Psi'_k$  wird durch die Gleichung (13') oder

$$(13'') \quad \Psi'_k = \frac{(x-1)^2}{2\lambda^2 x^2}$$

gegeben und also

$$(22) \quad \delta'_k = \frac{(x-1)^2}{2\lambda^2 x^2} - \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

Wir müssen den Wert von  $x$  als Funktion von  $\lambda$  aus (A'') herausziehen und denselben in (22) einsetzen. Dieser Wert wird durch den Schnittpunkt der Kurve

$$(23) \quad y = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$$

mit der Geraden

$$(24) \quad y = \frac{\pi}{2} \lambda^2 x$$

bestimmt.

Die Kurve (23) geht durch den Punkt  $x = 1, y = 0$ , wo sie die  $x$ -Achse berührt, und besitzt die Asymptote

$$y = \frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{\pi}{2}.$$

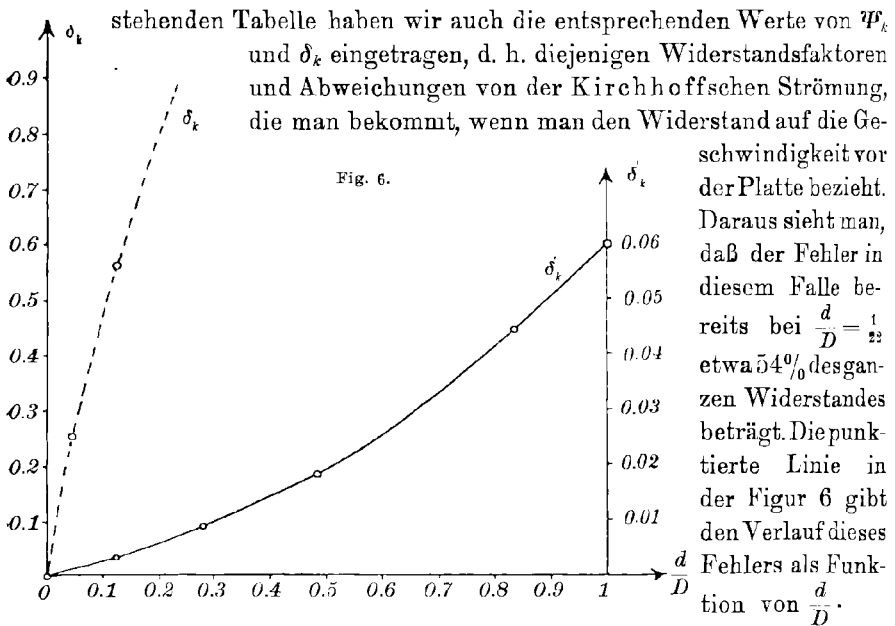
Die Gerade (24) schneidet sie in zwei Punkten, wenn  $\lambda^2 < 1$  ist. Ist  $\lambda^2 > 1$ , so gibt es nur einen Schnittpunkt mit einer Abszisse kleiner als 1. Die Abszisse soll aber gleich  $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$ , d. h. größer als 1 sein, so daß nur dieser Schnittpunkt für uns in Betracht kommt. Daraus sieht man, daß es immer eine Lösung gibt, wenn  $\lambda^2 < 1$  ist; für  $\lambda^2 > 1$  gibt es aber keine Lösung.

Die Variation von  $\delta'_k$  als Funktion von  $\lambda^2$  kann man auch dadurch bekommen, daß man in (A'') verschiedene Werte für  $x$  einsetzt und

dazu die entsprechenden Werte von  $\lambda$  berechnet. Man bekommt auf diese Weise folgende Tabelle:

$x$	$V_D = \frac{1}{x}$	$\lambda^2 = \frac{d}{D}$	$\Psi'_k$	$\delta'_k$	$\Psi_k$	$\delta_k$
$\frac{5}{4}$	0,8	0,045	0,4409	0,001	0,689	0,249
$\frac{3}{2}$	0,67	0,125	0,443	0,003	0,997	0,557
2	0,5	0,279	0,4486	0,009	1,795	1,355
3	0,33	0,485	0,458	0,018	4,127	3,687
10	0,1	0,837	0,484	0,044	48,38	47,94
$\infty$	0	1	0,5	0,06	$\infty$	$\infty$

Daraus erhält man die durch die Figur 6 angegebene Kurve als die die Variation von  $\delta'_k$  als Funktion von  $\frac{d}{D}$  darstellende. In der vor-



stehenden Tabelle haben wir auch die entsprechenden Werte von  $\Psi_k$  und  $\delta_k$  eingetragen, d. h. diejenigen Widerstandsfaktoren und Abweichungen von der Kirchhoffschen Strömung, die man bekommt, wenn man den Widerstand auf die Geschwindigkeit vor der Platte bezieht. Daraus sieht man, daß der Fehler in diesem Falle bereits bei  $\frac{d}{D} = \frac{1}{2}$  etwa 54% des ganzen Widerstandes beträgt. Die punktierte Linie in der Figur 6 gibt den Verlauf dieses Fehlers als Funktion von  $\frac{d}{D}$ .

Bei dem vollkommen freien Strahl wird die Gleichung (A) durch die folgende ersetzt:

$$(A''') \quad \frac{\pi}{2} \lambda^2 = \frac{\pi}{2} + \sin \alpha \log \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \frac{\pi}{2} \cos \alpha.$$

Der Widerstandsfaktor  $\Psi_s$  wird durch die Gleichung (14) gegeben, und der entsprechende Fehler beträgt also den Wert:

$$\delta_s = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\lambda^2} - \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

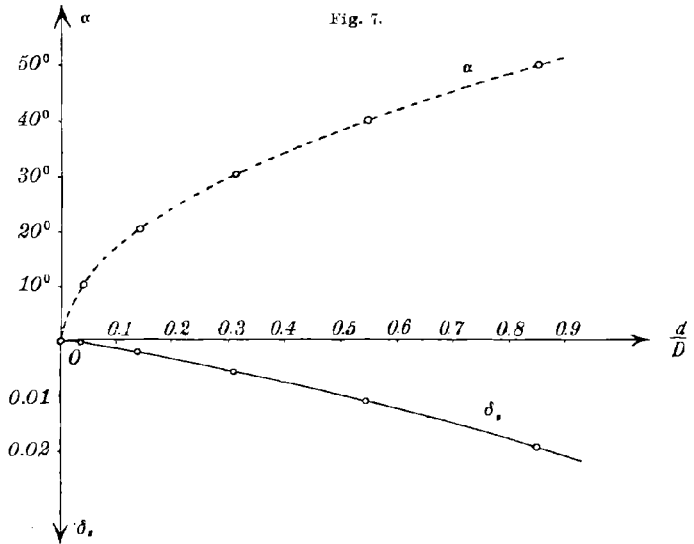
Setzt man in (A''') verschiedene Werte für  $\alpha$  ein und berechnet den dazu entsprechenden Wert von  $\lambda^2$ , so erhält man folgende Tabelle:

$\alpha$	$\lambda^2 = \frac{d}{D}$	$\psi_s$	$\delta_s$
10°	0,035	0,4393	— 0,0005
20°	0,138	0,4378	— 0,0021
30°	0,309	0,4340	— 0,006
40°	0,546	0,4286	— 0,0113
50°	0,85	0,4204	— 0,0195
90°	$\infty$	0	— 0,44

Der Fehler ist überall negativ und sehr klein im absoluten Betrage. Die Divergenz der beiden Zweige des Strahles hinter der Platte ist aber beträchtlich; sie beträgt den Wert von 20° bereits bei dem Werte 0,035 von  $\frac{d}{D}$ . Figur 7 stellt die Variation von  $\delta_s$  (vollgezogene Linie) und von  $\alpha$  (punktirte Linie) als Funktion von  $\frac{d}{D}$  dar.

§ 9. Zusammenfassung der Resultate und Schlußbemerkungen.

Der Fehler  $\delta$ , den man bei der experimentellen Ermittlung des Widerstandes begeht, ist sowohl bei den Eiffelschen als



auch bei den Göttinger Versuchen sehr klein; er ist kleiner als  $\frac{d}{D}$  in erster Annäherung, d. h. praktisch vernachlässigbar, und zwar positiv im Falle des Kanals und negativ bei der Eiffelschen Einrichtung. Diese Tatsache steht im Einklang mit dem Experiment; die sich aus den Eiffelschen Messungen ergebenden Zahlen sind nämlich kleiner als die von der Göttinger Versuchsanstalt veröffentlichten, die Unterschiede sind jedoch sehr klein.<sup>1)</sup> Es ergibt sich übrigens als günstigste Lage der Platte

1) Siehe hierzu O. Föppl, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt von Eiffel verglichen mit den Gött. Resultaten, Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiff-fahrt, 1912.

in einem Kanal mit parallelen Wänden die unmittelbar vor der Öffnung des Kanals, wo  $\delta$  gleich Null wird.

Auffallend groß wird der positive Fehler  $\delta$ , wenn der Widerstand bei den Versuchen im Tunnel auf die Geschwindigkeit vor der Platte bezogen wird;  $\delta$  beträgt in diesem Falle  $0,8 \sqrt{\frac{d}{D}}$  in erster Annäherung. Die Erklärung hiervon ist darin zu suchen, daß die Geschwindigkeit weit vor der Platte bedeutend kleiner als die weit hinter der Platte ist. Die sich theoretisch ergebende Geschwindigkeit vor der Platte ist nach der Formel (9) gleich  $1 - \alpha_1$  in erster Annäherung, wenn die Geschwindigkeit weit hinter der Platte gleich 1 ist. Der Unterschied zwischen den beiden Geschwindigkeiten vor und hinter der Platte beträgt also  $0,94 \sqrt{\frac{d}{D}}$ , d. h. 0,30 etwa bei  $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$ . In Wirklichkeit ist dieser Unterschied viel kleiner, da die Geschwindigkeit hinter der Platte infolge der dort auftretenden turbulenten Bewegung vermindert wird. Man ermittelt also experimentell Widerstandsfaktoren, welche um ein paar Prozent größer sind, als die in der nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit auftretenden. Dieser Geschwindigkeitsunterschied vor und hinter der Platte wird bei der Eiffelschen Einrichtung sehr klein, wenn die Platte sehr weit von der Öffnung angebracht wird. Er ist nämlich in erster Annäherung gleich  $\sqrt{\frac{2\pi}{(4+\pi)(1+e^{-\xi})}} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}}$ ; für  $\xi = \infty$  verschwindet er. Diese Lage der Platte ist aber aus praktischen Gründen unbrauchbar, denn der aus der Öffnung  $B_1 B_2$  austretende Strahl wird in einiger Entfernung vollkommen turbulent.

Jedenfalls liefern die Messungen im Kanal, wenn der Widerstand auf die Geschwindigkeit vor dem Körper bezogen wird, die größten Abweichungen; aus dem Grunde empfiehlt es sich, denselben auf die Geschwindigkeit hinter dem Körper zu beziehen.

Betreffs der Strömung eines Strahles aus einem Kanal mit parallelen Wänden ist noch Folgendes zu bemerken. Die beiden Zweige des Strahles hinter der Platte laufen divergent unter dem Winkel  $2\alpha$ , wobei  $\alpha$  in erster Annäherung nach der zweiten von den Gleichungen (15) gleich  $\sqrt{\frac{2\pi}{(4+\pi)(1+e^{-\xi})}} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}}$  ist. Die Kurve, welche die Variation von  $\alpha$  als Funktion von  $\frac{d}{D}$  darstellt, hat also einen parabolischen Charakter wenigstens für kleine Werte für  $\frac{d}{D}$ ; für den Fall, daß die Wände des Kanals verschwinden, weicht sie sehr wenig von einer wirklichen Parabel ab (vgl. die punktierte Linie auf der Fig. 7 sowie die Tabelle auf Seite 353).

Will man die beiden Zweige des Strahles hinter der Platte in einem zweiten Kanal auffangen, so muß der Anfangsquerschnitt dieses letzten Kanals größer als der des ersten sein und zwar für jede Platte ein anderer. Ist z. B. der Abstand zwischen den beiden parallelen Wänden des ersten Kanals gleich 1,50 m, so muß die Öffnung des zweiten 3 m betragen, wenn  $\xi = 3$ ,  $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$  und die Entfernung zwischen den beiden Kanälen 3,60 m ist.

## Über die Randkorrektion des Dreiplattenkondensators.

Von G. A. SHOOK in Urbana, Illinois.

In der physikalischen Zeitschrift für den November 1912 haben E. Grüneisen und E. Giebe den folgenden Ausdruck für die Kapazität des Dreiplattenkondensators ohne Beweis angegeben:

$$C = \frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right),$$

wo  $C$  die Kapazität,  $R$  den Radius der drei parallelen Kreisplatten,  $a$  die Distanz zwischen den Platten und  $\lambda$  die konstante Zahl 2,1426902 bedeuten. In dieser Mitteilung soll die Herleitung der Randkorrektion

$$\frac{R}{\pi} \left( 2 \log 2 - \frac{2}{\lambda^2 - 1} \right)$$

mit Hilfe der Transformation von Schwarz-Cristoffel gegeben werden. Ein Polygon in der  $z$ -Ebene wird in jener Transformation in die  $w$ -Achse der  $W$ -Ebene verwandelt mittels der Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{\bar{a} \bar{w}} = H(w - w_1)^{\alpha_1 - 1} (w - w_2)^{\alpha_2 - 1}.$$

$H$  ist eine reelle Konstante;  $w_1, w_2 \dots w_n$  entsprechen den Eckpunkten des Polygons und  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  sind die inneren Winkel des Polygons.

Wenn das Polygon eine Anzahl Leiter von verschiedenem Potential bedeutet, dann ist eine Transformation nicht genügend; denn die verschiedenen Potentiale können nicht dargestellt werden durch eine gerade Linie von konstantem Potential, z. B. durch die  $U$ -Achse der  $w$ -Ebene allein. Wir betrachten daher eine dritte Ebene  $\mathfrak{B}$  mit den Achsen  $X$  und  $Y$ . Ein gegebenes Polygon von Leitern in der  $z$ -Ebene mag zunächst in die  $X$ -Achse der  $\mathfrak{B}$ -Ebene transformiert werden. Wenn die Potentiale der Leiter gegeben sind, so kann das entsprechende Polygon in der  $W$ -Ebene bestimmt und dieses in die  $\mathfrak{B}$ -Ebene transformiert werden.





Wenn  $x$  groß ist und  $y = a$ , dann ist  $\mathfrak{z} = 1$ , daher

$$\kappa \frac{\lambda^2 - 1}{2} i\pi = ia$$

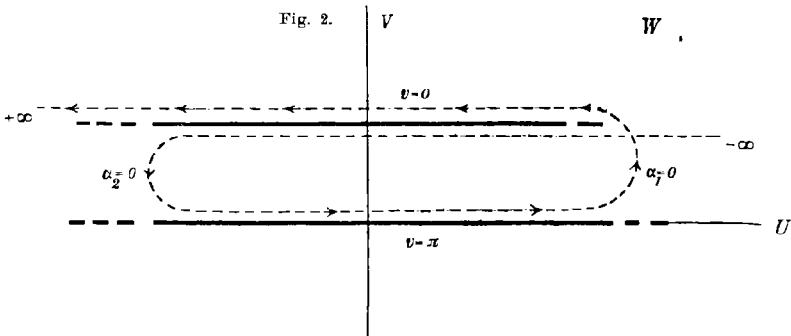
$$\kappa = \frac{2a}{(\lambda^2 - 1)\pi}$$

Die Lösung nimmt jetzt die Form an:

$$(1) \quad z = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{\mathfrak{z}^2}{\lambda^2 - 1} - \log(\mathfrak{z}^2 - 1) + i\pi \right] = x + iy.$$

Dadurch wird die  $z$ -Ebene in die  $\mathfrak{z}$ -Ebene transformiert, und wir wollen nun weiter die  $W$ -Ebene in die  $\mathfrak{z}$ -Ebene transformieren mittels der Gleichung:

$$\frac{dW}{d\mathfrak{z}} = L(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1)^{\alpha_1 - 1} (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_2)^{\alpha_2 - 1}.$$



In der  $W$ -Ebene wird das Polygon gebildet durch zwei unendliche parallele Ebenen  $v = 0$  und  $v = \pi$  gemäß der Fig. 2. In diesem Polygon haben wir die folgenden Wertepaare:

Für  $\alpha_1 = 0 \quad \mathfrak{z} = 1$   
 „  $\alpha_2 = 0 \quad \mathfrak{z} = -1$

$$\frac{dW}{d\mathfrak{z}} = L(\mathfrak{z} - 1)^{-1} (\mathfrak{z} + 1)^{-1},$$

daher:

$$W = L \left( \log \frac{\mathfrak{z} - 1}{\mathfrak{z} + 1} + J \right) = u + iv.$$

Auf der unteren Seite der Platte  $A$  der Figur 1 läuft  $\mathfrak{z}$  von 1 nach  $\lambda$  und  $\mathfrak{z} - 1$  ist daher positiv. Da  $A$  das Potential 0 hat, so liefert die letzte Gleichung:

$$L \left( \log \frac{\mathfrak{z} - 1}{\mathfrak{z} + 1} + J \right) = u + io.$$

Daher ist

$$J = 0.$$

Auf der oberen Seite der Platte  $B$  ändert sich  $\beta$  von 0 bis 1,  $\beta - 1$  ist daher negativ, somit

$$\log \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \log \frac{-\beta + 1}{\beta + 1} + i\pi.$$

Die vorhergehende Gleichung gibt daher:

$$L\left(\log \frac{-\beta + 1}{\beta + 1} + i\pi\right) = u + i\pi.$$

Folglich

$$L = 1.$$

Die zweite Transformation erscheint jetzt in der Form:

$$(2) \quad W = \log \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = u + iv.$$

Die Ladung auf einem Streifen von 1 cm Breite und von der Länge  $PQ'$  der Platte  $B$  der Figur 1 ist gleich:

$$l_1 = \frac{1}{4\pi}(U_Q - U_P)$$

oder

$$l_1 = \frac{1}{4\pi}(U_P - U_Q).$$

Wir betrachten einen Streifen auf der Platte  $B$ . In  $P$  gilt:  $x = 0$ ;  $y = 0$  und  $\beta = 0$ . Dafür folgt aus der Gleichung (2)

$$W = \log(-1) = i\pi = U_P + i\pi$$

$$U_P = 0.$$

Wenn  $x$  wächst, dann nähert sich  $\beta$  rasch dem Werte 1, so daß, wenn  $Q$  weit vom Rande entfernt ist, die Gleichung (2) die Form annimmt:

$$W = \log(\beta - 1) - \log 2 = U_Q + i\pi$$

$$W = \log(1 - \beta) + i\pi - \log 2 = U_Q + i\pi$$

$$U_Q = \log(1 - \beta) - \log 2.$$

Um  $\beta$  durch  $z$  auszudrücken, gehen wir zurück auf Gleichung (1). Wenn wir daselbst  $\beta = 1$  setzen, dann folgt:

$$z = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda^2 - 1} - \log(\beta + 1)(\beta - 1) + i\pi \right]$$

$$z = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda^2 - 1} - \log(1 - \beta) - i\pi - \log 2 + i\pi \right]$$

$$z = x + io.$$

Daher

$$x = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda^2 - 1} - \log(1 - \beta) - \log 2 \right]$$

$$\log(1 - \beta) = -\frac{x\pi}{a} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} - \log 2;$$

also

$$U_Q = -\frac{x\pi}{a} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} - 2 \log 2.$$

Die Ladung auf jenem Streifen von 1 cm Breite wird jetzt:

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi} U_q = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{x\pi}{a} - \frac{1}{\lambda^2 - 1} + 2 \log 2 \right]$$

$$c_1 = \frac{x}{4a} \left[ 1 + \frac{2a}{x\pi} \log 2 - \frac{a}{x\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right].$$

Dies ist die Ladung auf einem Streifen mit der Oberfläche  $x$  auf der oberen Seite der Platte  $B$ ; die totale Ladung auf dem Streifen  $x$  ist daher zweimal so groß. Die Kapazität dieses Streifens ist daher:

$$C = \frac{e}{\pi} = \frac{x}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{a}{x\pi} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \right].$$

Die Konstante  $\lambda$  kann folgendermaßen bestimmt werden: Wir setzen in Gleichung (1)  $x = 0$ ;  $y = a$  und  $\beta = \lambda$

$$\frac{a}{\pi} \left[ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} - \log(\lambda^2 - 1) + i\pi \right] = 0 + ia$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \log(\lambda^2 - 1).$$

Durch eine graphische Lösung erhalten wir für  $\lambda$  den Wert:

$$\lambda = 2,1427.$$

Die Korrektur für die Breite 1 cm wird gleich

$$\frac{1}{2\pi^2} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right).$$

Wenn wir jetzt annäherungsweise annehmen, daß die Korrektur für eine Kreisplatte von großem Radius dieselbe sei wie für einen geradlinigen Rand, so wird die Korrektur für den ganzen Umfang:

$$\frac{2\pi R}{2\pi^2} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) = \frac{R}{\pi} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right).$$

Die korrigierte Kapazität wird daher gleich

$$C = \frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi} \left( 2 \log 2 - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right).$$

Dabei ist noch vorausgesetzt, daß die Dicke der Platten verschwindet. Würden wir die Dicke berücksichtigen, so hätten wir für die Transformation der  $z$ -Ebene in die  $\beta$ -Ebene die Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{d\beta} = \alpha(\beta - c)^{\frac{1}{2}}(\beta - b)^{\frac{1}{2}}(\beta - 1)^{-1}(\beta - a)^{\frac{1}{2}}(\beta + a)^{\frac{1}{2}}(\beta + 1)^{-1}(\beta + b)^{\frac{1}{2}}(\beta + c)^{\frac{1}{2}}.$$

In der Lösung des vorliegenden Problems bin ich von Prof. Jacob Kunz unterstützt worden.

Urbana, Illinois, 22. Okt. 1913.

## Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung.

Von MAX LAGALLY in München.

In den letzten Jahren hat sich eine Reihe von Autoren<sup>1)</sup> mit der Strömung des Wassers in Drehungshohlräumen, insbesondere in Turbinen beschäftigt; der Zweck ihrer Arbeiten ist die Auffindung von in der Praxis brauchbaren, vorwiegend zeichnerischen Methoden zur Herstellung des Strömungsbildes in der Meridianebene und zur konstruktiven Ermittlung der geeignetsten Schaufelform. Im Gegensatz zu diesen Arbeiten hat R. v. Mises<sup>2)</sup> die allgemeinste Flüssigkeitsströmung vom mathematischen Standpunkt aus untersucht und durch geeignete Spezialisierung auf die Theorie der Turbinen angewandt.

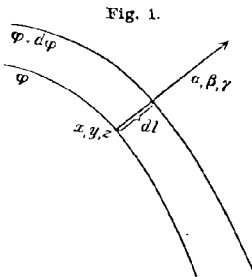
Die vorliegende Abhandlung nimmt in der Auffassung einen mittleren Standpunkt ein; sie untersucht die allgemeine räumliche Potentialströmung nach ihren geometrischen Eigenschaften, sowie nach der Verteilung der lebendigen Kraft. Naturgemäß ist ein Teil der gewonnenen Sätze in den oben genannten Arbeiten enthalten oder schon früher wenigstens in speziellen Fällen bekannt gewesen.

Ein System von einfach unendlich vielen Flächen soll durch eine Gleichung  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  gegeben sein, wo  $\alpha$  einen Parameter bedeutet, der für jede von den Flächen einen festen Wert hat. Schreitet man längs einer Normalen von einem Punkt der

Fläche  $\varphi$  bis zur benachbarten  $\varphi + d\varphi$  fort, so sind die Änderungen der Koordinaten

$$dx = dl \cos \alpha \quad dy = dl \cos \beta \quad dz = dl \cos \gamma,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel der Normalen und  $dl$  der unendlich



1) V. Kaplan, Die zweidimensionale Turbinentheorie mit Berücksichtigung der Wasserreibung und deren Anwendung und Ergebnisse bei Schaufelkonstruktionen. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen. 9. Bd. (1912), S. 533 f. — Bauersfeld, Die Konstruktion der Francis-Schaukel nach der Lorenzschen Turbinentheorie und ihre Eigenschaften. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 56. Bd. (1912), S. 2045 f. — M. Broszko, ebenda. 57. Bd. (1913), S. 677.

2) R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, diese Zeitschrift für Mathematik und Physik. 57. Bd. (1909), S. 1 f.

kleine Abstand der benachbarten Flächen in dem betreffenden Punkt ist. Dabei wächst der Parameter um

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= dl \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \right] \end{aligned}$$

Da andererseits die Richtungskosinus der Normalen den Größen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  proportional und durch die Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

gegeben sind, ist

$$d\varphi = dl \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Damit sind der unendlich kleine Abstand und auch die Koordinatenänderungen gegeben. Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = M,$$

so gelten die folgenden Grundgleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\varphi_x}{\sqrt{M}}, \quad \cos \beta = \frac{\varphi_y}{\sqrt{M}}, \quad \cos \gamma = \frac{\varphi_z}{\sqrt{M}} \\ d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{M}} \\ dx = \frac{\varphi_x d\varphi}{M}, \quad dy = \frac{\varphi_y d\varphi}{M}, \quad dz = \frac{\varphi_z d\varphi}{M}. \end{array} \right.$$

Die Orthogonaltrajektorien der Flächen  $\varphi$  sind durch das Gleichungssystem

$$(1a) \quad dx:dy:dz = \varphi_x:\varphi_y:\varphi_z$$

bestimmt.

Es sei nun auf einer Fläche  $\varphi$  ein System von Parameterkurven  $u, v$  angenommen, das auf alle anderen Flächen  $\varphi$  in der Weise über-

tragen werden soll, daß den Punkten sämtlicher Flächen  $\varphi$  längs einer beliebigen Orthogonaltrajektorie die gleichen Werte  $u, v$  zukommen. Dann kann man  $u, v$  und  $\varphi$  als Parameter der Punkte des Raumes auffassen; die Gleichung  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  ist durch 3 Gleichungen

$$x = x(u, v, \varphi) \quad y = y(u, v, \varphi) \quad z = z(u, v, \varphi)$$

zu ersetzen. Die Parameterflächen  $\varphi$  sind die Ausgangsflächen, während sich die Parameterflächen  $u$  und  $v$  in den Orthogonaltrajektorien der Flächen  $\varphi$  schneiden.

Da der Wert des Parameters  $\varphi$  sich nicht ändert, wenn man auf einer Fläche  $\varphi$  fortschreitet, gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial v} = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben

$$(2) \quad \begin{aligned} \Sigma \varphi_x x_u &= \varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_z z_u = 0 \\ \Sigma \varphi_x x_v &= \varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_z z_v = 0 \end{aligned}$$

und durch Differentiieren nach  $u$  und  $v$ :

$$(2a) \quad \begin{aligned} \Sigma \varphi_{xu} x_u &= -\Sigma \varphi_x x_{uu} \\ \Sigma \varphi_{xu} x_v &= -\Sigma \varphi_x x_{uv} \\ \Sigma \varphi_{xv} x_u &= -\Sigma \varphi_x x_{vu} \\ \Sigma \varphi_{xv} x_v &= -\Sigma \varphi_x x_{vv} \end{aligned}$$

Nach den getroffenen Vereinbarungen sind die Koeffizienten des Linienelementes der Flächen  $\varphi$ :

$$E = \Sigma x_u^2 \quad F = \Sigma x_u x_v \quad G = \Sigma x_v^2$$

längs einer Orthogonaltrajektorie nur von dem Parameter  $\varphi$  abhängig. Gleiches gilt von den 2. Fundamentalgrößen, die sich in folgende Form bringen lassen:

$$(3) \quad \begin{aligned} D &= \Sigma \cos \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\Sigma \varphi_x x_{uu}}{\sqrt{M}} \\ D' &= \Sigma \cos \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\Sigma \varphi_x x_{uv}}{\sqrt{M}} \\ D'' &= \Sigma \cos \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\Sigma \varphi_x x_{vv}}{\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit des Linienelementes von den Parameter  $\varphi$  ergibt sich in folgender Weise:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \varphi}.$$

Führt man in  $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \varphi}$  die Differentiation nach  $\varphi$  zuerst aus und berücksichtigt, daß nach (1)  $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\varphi_x}{M}$  ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\varphi_x}{M} = \frac{\varphi_{xu}}{M} - \frac{\varphi_x M_u}{M^2},$$

also

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{2}{M} \sum \varphi_{xu} x_u - \frac{2 M_u}{M^2} \sum \varphi_x x_u.$$

Unter Berücksichtigung von (2) und (2a) und (3) erhält man

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = - \frac{2}{M} \sum \varphi_x x_{uu} = - \frac{2 D}{\sqrt{M}}.$$

Ebenso findet man die Änderungen von  $F$  und  $G$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \varphi} &= - \frac{2 D}{\sqrt{M}} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= - \frac{2 D'}{\sqrt{M}} \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= - \frac{2 D''}{\sqrt{M}} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4) lassen einige bemerkenswerte Schlüsse zu: Wenn die von einer Haupttangentenkurve einer Fläche  $\varphi$  ausgehenden Orthogonaltrajektorien auf allen Flächen  $\varphi$  eine Haupttangentenkurve ausschneiden, so sind auf diesen sämtlichen Haupttangentenkurven entsprechende Bögen gleich lang. Wenn allgemein bei der durch die Orthogonaltrajektorien vermittelten Abbildung die Haupttangentenkurven einander entsprechen, so sind die von ihnen gebildeten Netze ineinander deformierbar durch alleinige Änderung der Maschenwinkel, ohne Änderung der Maschenlängen, wie das von dem Beispiel der konfokalen einschaligen Hyperboloide bekannt ist.

Das von den Haupttangentenkurven einer beliebigen Fläche  $\varphi$  gebildete Netz kann auf die benachbarte Fläche  $\varphi + d\varphi$  dadurch angelegt werden, daß sich die Knoten des Netzes in Richtung der Normalen verschieben. Wenn umgekehrt ein Netz eine Deformation gestattet, bei der sich die Knoten in Richtung der Normalen bewegen, so ist es ein Haupttangentennetz.

Wenn sich auf sämtlichen Flächen  $\varphi$  ein konjugiertes System entspricht, so hat  $F$  auf sämtlichen Flächen in entsprechenden Punkten den gleichen Wert. Bilden insbesondere die konjugierten Kurven auf einer Fläche die Krümmungslinien, so tun sie es auf sämtlichen Flächen.

Die von den Krümmungslinien einer beliebigen Fläche  $\varphi$  ausgehenden Orthogonaltrajektorien schneiden, wie auch aus der Anschauung unmittelbar folgt, die benachbarte Fläche in einem Orthogonalsystem.

Es soll nun die Änderung des Querschnittes einer von Orthogonaltrajektorien gebildeten Röhre untersucht werden. Nimmt man als Querschnitt ein von aufeinander folgenden Parameterlinien gebildetes Parallelogramm:

$$dw = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \lg dw &= \frac{1}{2} \frac{E \frac{\partial G}{\partial \varphi} + G \frac{\partial E}{\partial \varphi} - 2F \frac{\partial F}{\partial \varphi}}{EG - F^2} \\ &= \frac{-ED'' - GD' + 2FD'}{(EG - F^2)\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{\partial \lg dw}{\partial \varphi} = \frac{H}{\sqrt{M}},$$

wenn  $H$  die mittlere Krümmung der Fläche bedeutet. Führt man nach (1) in (5) den Abstand  $dl$  zweier aufeinander folgenden Flächen ein, so ergibt sich:

$$(5a) \quad \frac{\partial \lg dw}{\partial \varphi} = H \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi}; \quad d \lg dw = H dl.$$

Die Gleichungen (5) und (5a) geben einen *einfachen Zusammenhang zwischen dem Querschnitt einer von Orthogonaltrajektorien gebildeten Röhre und der mittleren Krümmung der geschnittenen Fläche.*

Sind die durch  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  dargestellten Flächen Minimalflächen, so hat jede von Orthogonaltrajektorien gebildete Röhre einen konstanten Querschnitt. In ähnlicher Weise wie die Änderung des Querschnittes einer Röhre läßt sich die Änderung ihres Winkels untersuchen. Die Bedingung für die Unveränderlichkeit des Winkels ist  $HF' + 2D' = 0$ .

Ich will nun die mittlere Krümmung einer Fläche  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  an irgendeiner Stelle als Funktion von  $x, y, z$  berechnen. Zu dem Zweck sei die Gleichung der Fläche nach  $z$  aufgelöst:

$$z = f(x, y).$$

Führt man die Kurven  $x = \text{const.}$  und  $y = \text{const.}$  auf der Fläche als Parameterlinien ein und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

so werden die Koeffizienten des Linienelementes

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

und die Größen der 2. Fundamentalform

$$D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D' = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$



während die mittlere Krümmung folgende Form annimmt:

$$H = \frac{2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Fläche  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  lassen sich die Größen  $p, q, r, s, t$  durch implizite Differentiation berechnen. Aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz &= 0 \\ \varphi_{xx} dx^2 + 2\varphi_{xy} dx dy + \varphi_{yy} dy^2 + 2\varphi_{xz} dx dz + 2\varphi_{yz} dy dz + \varphi_{zz} dz^2 \\ &+ \varphi_x d^2 x + \varphi_y d^2 y + \varphi_z d^2 z = 0 \end{aligned}$$

ergeben sich durch Vergleich mit

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy \\ d^2 z &= r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 + p d^2 x + q d^2 y \end{aligned}$$

folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} & r &= -\frac{\varphi_{xx} + 2p\varphi_{xz} + p^2\varphi_{zz}}{\varphi_z} \\ q &= -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} & s &= -\frac{\varphi_{xy} + p\varphi_{yz} + q\varphi_{xz} + pq\varphi_{zz}}{\varphi_z} \\ & & t &= -\frac{\varphi_{yy} + 2q\varphi_{yz} + q^2\varphi_{zz}}{\varphi_z}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für die mittlere Krümmung:

$$\begin{aligned} H = \frac{\varphi_z^2}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^{\frac{3}{2}}} &\left[ -2pq\varphi_{xy} - 2p^2q\varphi_{yz} - 2pq^2\varphi_{xz} - 2p^2q^2\varphi_{zz} \right. \\ &+ \varphi_{yy} + 2q\varphi_{yz} + q^2\varphi_{zz} + p^2\varphi_{yy} + 2p^2q\varphi_{yz} + p^2q^2\varphi_{zz} \\ &\left. + \varphi_{xx} + 2p\varphi_{xz} + p^2\varphi_{zz} + q^2\varphi_{xx} + 2pq^2\varphi_{xz} + p^2q^2\varphi_{zz} \right]. \end{aligned}$$

Wenn man in der Klammer den Ausdruck  $\varphi_{zz} + p^2\varphi_{xx} + q^2\varphi_{yy}$  hinzufügt und wieder subtrahiert, erhält man:

$$\begin{aligned} H = \frac{\varphi_z^2}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^{\frac{3}{2}}} &\left[ (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz})(1 + p^2 + q^2) \right. \\ &\left. - \varphi_{xx}p^2 - \varphi_{yy}q^2 - \varphi_{zz} - 2pq\varphi_{xy} + 2p\varphi_{xz} + 2q\varphi_{yz} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (6) \quad H = \frac{1}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^{\frac{3}{2}}} &\left[ (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz})(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \right. \\ &\left. - (\varphi_{xx}\varphi_x^2 + 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_{yy}\varphi_y^2 + 2\varphi_{xz}\varphi_x\varphi_z + 2\varphi_{yz}\varphi_y\varphi_z + \varphi_{zz}\varphi_z^2) \right]. \end{aligned}$$

Der so erhaltene Ausdruck für die mittlere Krümmung läßt sich noch vereinfachen. Aus

$$M = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$$

erhält man durch Differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_x &= \varphi_{xx} \varphi_x + \varphi_{xy} \varphi_y + \varphi_{xz} \varphi_z \\ \frac{1}{2} M_y &= \varphi_{xy} \varphi_x + \varphi_{yy} \varphi_y + \varphi_{yz} \varphi_z \\ \frac{1}{2} M_z &= \varphi_{xz} \varphi_x + \varphi_{yz} \varphi_y + \varphi_{zz} \varphi_z, \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} [\varphi_x M_x + \varphi_y M_y + \varphi_z M_z] = \sum_x \sum_y \varphi_{xy} \varphi_x \varphi_y.$$

Da dieser Ausdruck in  $H$  vorkommt, ergibt sich

$$(6a) \quad H = \frac{1}{M^{\frac{3}{2}}} \left[ (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) M - \frac{1}{2} (\varphi_x M_x + \varphi_y M_y + \varphi_z M_z) \right].$$

Dieser Ausdruck läßt noch eine besondere Vereinfachung zu, wenn die Flächen  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  Potentialflächen sind, d. h. der Gleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

genügen: dann wird die mittlere Krümmung<sup>1)</sup>:

$$(6b) \quad H = \frac{-1}{2 M^{\frac{3}{2}}} \left[ \varphi_x M_x + \varphi_y M_y + \varphi_z M_z \right].$$

Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich der Abstand zweier benachbarter Flächen  $\varphi$  ändert, wenn man längs einer Orthogonaltrajektorie um gleiche Beträge  $d\varphi$  fortschreitet. Aus

$$\frac{\partial l}{\partial \varphi} = M^{-\frac{1}{2}}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \lg \frac{\partial l}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial M}{M \partial \varphi} \\ (7) \quad &= -\frac{1}{2} \frac{1}{M} \left[ M_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + M_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + M_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{M^2} \left[ M_x \varphi_x + M_y \varphi_y + M_z \varphi_z \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat nur, wenn die Flächen  $\varphi$  Potentialflächen sind und sich die mittlere Krümmung einführen läßt, eine einfache geometrische Bedeutung. Man erhält dann:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \lg \frac{\partial l}{\partial \varphi} = \frac{H}{\sqrt{M}}; \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \varphi^2} = H \cdot \left( \frac{\partial l}{\partial \varphi} \right)^2$$

oder

$$(8a) \quad d \lg \frac{\partial l}{\partial \varphi} = H dl.$$

---

1) Das Vorzeichen von  $H$  bereitet Schwierigkeiten. Da  $\sqrt{1+p^2+q^2}$  positiv zu nehmen ist, gilt das gleiche für  $\sqrt{1+\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_z}\right)^2+\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_z}\right)^2}$ ; setzt man dafür  $\frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}} = \frac{\varphi_x}{M^{\frac{1}{2}}}$ , so hat man dem  $M^{\frac{1}{2}}$  stets das Zeichen von  $\varphi_z$  zu geben.

Die logarithmische Änderung des Abstandes zweier Potentialflächen ist an jeder Stelle gleich dem Abstand der Potentialflächen mal der mittleren Krümmung. Dieser Satz entspricht in der Form vollständig dem durch die Gleichungen (5) und (5a) ausgesprochenen, viel allgemeiner gültigen Satz über den Querschnitt einer Röhre.<sup>1)</sup>

Im folgenden soll die Untersuchung auf Potentialflächen beschränkt bleiben und der Funktion  $\varphi$  die Bedeutung eines Geschwindigkeitspotentials beigelegt werden. Dann ergibt der Vergleich von (5) und (8)

$$d \lg dw = d \lg \frac{\partial l}{\partial \varphi},$$

also

$$(9) \quad dw = c \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi},$$

wo  $c$  eine Konstante bedeutet.

Der Querschnitt einer Stromröhre ist an jeder Stelle proportional dem Abstand zweier benachbarter Potentialflächen, wenn man um konstante Potentialdifferenzen fortschreitet.<sup>2)</sup> Dieser Satz gibt eine Verallgemeinerung der bekannten Quadrateinteilung der Ebene durch Potentialkurven und Stromlinien, und führt darauf zurück, wenn die Potentialflächen Zylinderflächen sind.

Der Inhalt eines so bestimmten Raumelementes einer Stromröhre ist  $dl \cdot dw = \frac{c dl^2}{d\varphi}$ . Die Geschwindigkeit der Strömung ist  $v = \frac{d\varphi}{dl}$ ; bezeichnet man mit  $\rho$  die Dichte der strömenden Flüssigkeit, so ist die lebendige Kraft im Innern des Raumelementes:

$$\frac{\rho c dl^2}{2 d\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dl} \right)^2 = \frac{\rho c d\varphi}{2} = \text{const.}$$

Jede Stromröhre wird also durch die Potentialflächen, die nach gleichen Potentialdifferenzen angeordnet sind, in Raumelemente zerlegt, denen die gleiche lebendige Kraft innewohnt. Auch dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines für ebene Strömungen geltenden Energiesatzes.<sup>3)</sup>

Wenn es gelingt, eine Potentialfläche durch zwei Scharen von Parameterkurven in  $\infty^2$  Parallelogramme so einzuteilen, daß der Inhalt eines jeden Parallelogramms dem Abstand der betreffenden Stelle von der benachbarten Potentialfläche proportional ist, so geben die von diesen Parallelogrammen ausgehenden Stromröhren zusammen mit den  $\infty^1$  Po-

1) Ein ähnlicher Satz findet sich bei Kimmel, Theorie der Luftschrauben auf aerodynamischer Grundlage, Dissertation, München 1912, S. 7.

2) Lanchester (Aerodynamik, Bd. I, S. 71) stellt den Satz als Behauptung auf; Beweis und Quellenangaben fehlen.

3) Vgl. Lanchester, Aerodynamik, Bd. I, S. 92.

*tentialflächen eine Einteilung des Raumes nach Raumelementen mit gleichem Energieinhalt.*

Die Flüssigkeitsmenge, die in der Sekunde durch einen Querschnitt einer Stromröhre fließt, ist durch das Produkt aus Querschnitt und Geschwindigkeit gegeben; also:

$$v \cdot dw = \frac{d\varphi}{dl} \cdot dw = c.$$

Da dieser Ausdruck längs der ganzen Stromröhre konstant ist, so fließt, wie zu erwarten, durch jeden Querschnitt die gleiche sekundliche Flüssigkeitsmenge; ihr Volumen, also die Ergiebigkeit der Röhre ist durch die Konstante  $c$  gegeben.

Dieser Schluß läßt sich auch umkehren und, soweit es sich nur um den Nachweis des obigen Energiesatzes handelt, zum Ausgangspunkt der Betrachtung machen.<sup>1)</sup> Weil durch jeden Querschnitt der Röhre bei einer stationären Strömung die gleiche Flüssigkeitsmenge in der Sekunde fließt, so ist  $dw \cdot \frac{d\varphi}{dl}$  längs der ganzen Röhre konstant.

Schreitet man also um gleiche Beträge des Geschwindigkeitspotentials  $d\varphi$  fort, so zerfällt die Röhre in Zellen, deren Querschnitt ihrer Länge proportional ist. In zwei Röhren, in denen die gleiche sekundliche Flüssigkeitsmenge fließt, hat  $\frac{dw \cdot d\varphi}{dl}$  den gleichen konstanten Wert.

Unterteilt man beide Röhren durch Potentialflächen mit gleichem konstanten Potentialunterschied  $d\varphi$ , so hat der Quotient aus Querschnitt und Länge der so entstandenen Zellen ebenfalls in beiden Röhren den gleichen konstanten Wert. Wenn man folglich die ganze Strömung in Röhren zerlegt, in denen sämtlich die gleiche Sekundenmenge durch jeden Querschnitt strömt, und wenn man diese Röhren durch Potentialflächen mit gleichem Potentialunterschied  $d\varphi$  unterteilt, so zerfällt die ganze Strömung in Zellen, deren Querschnitt zur Länge im gleichen Verhältnis steht. Die in jeder dieser Zellen enthaltene Flüssigkeit besitzt dieselbe lebendige Kraft:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e}{2} dl dw \cdot \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)^2 = \frac{e}{2} \frac{dw d\varphi}{dl} \cdot d\varphi = \frac{ec}{2} \cdot \frac{d\varphi}{2}.$$

Besteht das System von Potentialflächen aus lauter Minimalflächen, so ist wegen  $H = 0$  nach (5) und (8) sowohl  $dw$  als auch  $dl$  konstant. Längs einer Stromlinie sind also alle Potentialflächen gleich weit voneinander entfernt; der Querschnitt einer Stromröhre ändert in ihrem ganzen Verlauf seine Größe nicht. Die Geschwindigkeit der Strömung ist in der ganzen Stromröhre konstant. Als ein nicht ganz triviales

1) Einen ähnlichen Gedankengang verfolgt Broszko a. a. O. bei der Untersuchung der achsensymmetrischen Meridionalströmung in Drehungshohlräumen.

Beispiel werden wir ein System von Minimal-Schraubenflächen kennen lernen.

Wenn die *Potentialflächen* die eine Schar der Flächen eines *dreifachen Orthogonalsystems* bilden, sind die Stromlinien die Schnittlinien der beiden anderen Scharen. Jede Stromröhre, die ein von Krümmungslinien einer der Flächen begrenztes Flächenelement als Querschnitt hat, schneidet jede von den Flächen in einem ebenso begrenzten Flächenelement. Der Querschnitt der Röhre bleibt rechteckig. Aus den Gleichungen (4) ist ersichtlich, daß nur in dem einen Fall, in dem sich die Krümmungslinien auf sämtlichen Flächen entsprechen, der Querschnitt einer an einer Stelle rechtwinkligen Stromröhre rechtwinklig bleibt.

In dem von den *konfokalen Flächen 2. Grades* gebildeten dreifachen Orthogonalsystem läßt sich, wie zuerst Lamé<sup>1)</sup> gezeigt hat, jede Flächenschar als System von Potentialflächen anordnen; in den zugehörigen Stromlinien schneiden sich die beiden anderen Flächenscharen. Wenn

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

die Gleichung des konfokalen Systems ist, so muß das Potential  $V$ , vorausgesetzt daß die Flächen der einen Schar als Potentialflächen aufgefaßt werden können, eine noch unbekannte Funktion von  $\lambda$  sein,

$$V = V(\lambda),$$

und entsprechend den Grenzen, zwischen denen sich  $\lambda$  ändern kann, wird  $V$  gewissen Beschränkungen unterworfen sein. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

geht über in

$$\frac{d^2 V}{d\lambda^2} [\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2] + \frac{dV}{d\lambda} [\lambda_{xx} + \lambda_{yy} + \lambda_{zz}] = 0.$$

Bestimmt man  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$  durch implizite Differentiation, so erhält man tatsächlich eine Gleichung zwischen  $V$  und  $\lambda$  allein, nämlich

$$\frac{d^2 V}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right) = 0,$$

deren Integral

$$V = \frac{k}{2} \int \frac{d\lambda}{V(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

ist, in dem  $k$  eine willkürliche Konstante bedeutet. Führt man elliptische Koordinaten ein und schreibt jedem Punkt die 3 Parameter

1) Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes par G. Lamé, Paris 1857, p. 17, 18.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der durch ihn gehenden Flächen zu, so wird das Linienelement des Raumes

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_{1,2,3} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)} d\lambda_1^2.$$

In diesen Ausdruck sollen die Potentiale der 3 Flächen

$$V_i = \frac{k_i}{2} \int \frac{d\lambda_i}{\sqrt{(a^2 + \lambda_i)(b^2 + \lambda_i)(c^2 + \lambda_i)}}$$

eingeführt werden; die Konstanten  $k_i$  sind nur dadurch beschränkt, daß die Potentiale  $V_i$  reell werden sollen.

Trifft man bezüglich der Größenbeziehungen von  $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  die Voraussetzung

$$+\infty > \lambda_1 > -c^2 > \lambda_2 > -b^2 > \lambda_3 > -a^2,$$

so wird  $(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)$  negativ, während die entsprechenden Produkte mit  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  positiv sind. Man kann also  $k_1 = 1, k_2 = \sqrt{-1} = i, k_3 = 1$  setzen. Dann nimmt das Linienelement des Raumes die Form

$$ds^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) dV_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1) dV_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) dV_3^2$$

an, in der die Größen  $\lambda_i$  durch die  $V_i$  ausgedrückt werden können, am einfachsten durch drei Weierstraßsche  $p$ -Funktionen, die zum selben Periodenparallelogramm gehören.

$$\lambda_i = p\left(\frac{V_i}{k_i}\right) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Betrachtet man die zu den Potentialflächen des einen Systems, etwa  $V_1$  gehörige Strömung, so ist der Querschnitt einer Stromröhre

$$dw = (\lambda_2 - \lambda_3) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} dV_2 dV_3,$$

während die Distanz benachbarter Potentialflächen durch

$$dl = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} dV_1$$

gegeben ist. Der Quotient

$$\frac{dw}{dl} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{dV_2 dV_3}{dV_1}$$

ist längs der ganzen Stromröhre, die durch ein Wertesystem  $\lambda_2, \lambda_3, dV_2, dV_3$ , definiert ist, konstant, wenn man um konstante Differenzen  $dV_1$  fortschreitet. Das Raumelement der so unterteilten Stromröhre ist:

$$dw \cdot dl = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) dV_1 dV_2 dV_3.$$

Die Geschwindigkeit der Strömung ist:

$$\frac{dV_1}{dl} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}}$$

und die lebendige Kraft in einem Raumelement ist:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{\rho}{2} (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) dV_1 dV_2 dV_3 \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} \\ &= \frac{\rho (\lambda_2 - \lambda_3)}{2} dV_1 dV_2 dV_3, \end{aligned}$$

wenn  $\rho$  wie früher die Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Die Energie ist also in jedem Element der Stromröhre dieselbe. Durch jedes Raumelement gehen drei Strömungen hindurch, deren Energien sich verhalten wie  $(\lambda_2 - \lambda_3) : (\lambda_1 - \lambda_2) : (\lambda_1 - \lambda_3)$ , so daß die Energie einer von ihnen (der dritten) gleich der Summe der Energien der beiden anderen ist.

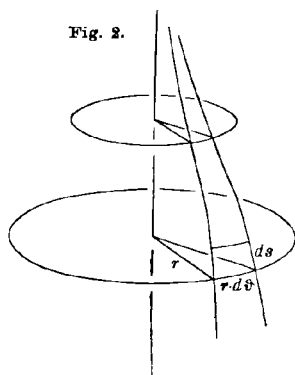
Die Energie benachbarter Stromröhren ist dem Wert von  $(\lambda_2 - \lambda_3)$  proportional; man überzeugt sich leicht, daß es nicht möglich ist, auf den Krümmungslinien beider Systeme eine solche Einteilung zu treffen, daß in sämtlichen Stromröhren zwischen zwei Potentialflächen die gleiche Energie fließt. Dagegen ist ebenso wie die Energie einer Stromröhre auch die Energie der Gesamtströmung zwischen zwei Potentialflächen der Potentialdifferenz proportional.

Wenn eine Schar von Drehflächen mit gemeinsamer Achse ein System von Potentialflächen bildet, so lassen sich die Stromlinien zu zwei Flächenfamilien zusammenfassen, welche mit den Drehflächen ein dreifaches Orthogonalsystem bilden. Die Stromlinien sind ebene Kurven; ihre Ebenen bilden das eine Flächensystem; das andere wird von den Drehflächen gebildet, die durch Drehung einer Stromlinie entstehen. Zum Unterschied von den konfokalen Flächen 2. Grades ist es hier möglich, die Krümmungslinien, die Parallelkreise und Meridiane, so einzuteilen, daß alle einer Ausgangsfläche anliegenden Raumelemente gleichen Energieinhalt haben. Da die Stromröhren selbst von den folgenden Potentialflächen nach gleichem Energieinhalt unterteilt werden, und außerdem ihren rechteckigen Querschnitt beibehalten, wird der Raum in unendlich kleine rechteckige Elemente von gleichem Energieinhalt geteilt.

Bezeichnet man (Fig. 2) den Radius eines Parallelkreises mit  $r$ , sein Bogenelement mit  $r d\vartheta$ , so hat man das Bogenelement  $ds$  der Meridiane bis zum nächsten Parallelkreis so groß zu nehmen, daß der Rechtecksinhalt  $r d\vartheta ds$  für konstantes  $d\vartheta$  an jeder Stelle der Fläche dem Abstand  $dl$  von der nächsten Potentialfläche proportional ist:

$$r d\vartheta ds = c \cdot dl.$$

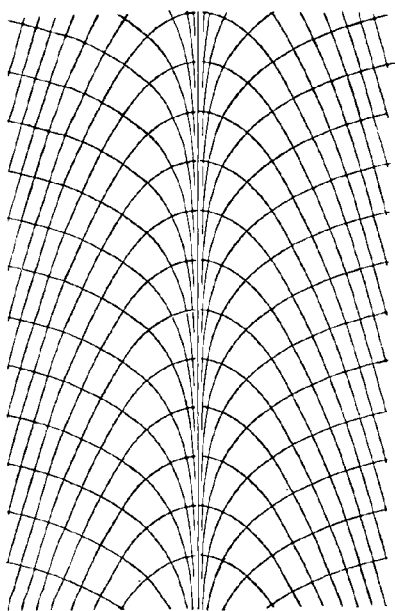
Fig. 2.



Weil  $\frac{r d\vartheta ds}{dl}$  längs jeder Stromröhre von selbst konstant ist, so hat  $c$  im ganzen Raum den gleichen Wert.

Betrachtet man den Teil der Strömung zwischen zwei aufeinander folgenden Meridianebenen, und die in einer solchen Ebene von den Meridiankurven und den Stromlinien gebildete Einteilung, so erhält man ein

Fig. 3.



Netz von Rechtecken mit den Seiten  $ds$  und  $dl$ . Dabei ist:

$$\frac{dl}{ds} = r \frac{d\vartheta}{c}.$$

Der Quotient der Rechteckseiten ist der Entfernung von der Drehachse proportional.<sup>1)</sup> Bei Annäherung an die Drehachse nähert sich die durchströmte Richtung  $dl$  des Rechtecks dem Wert Null, mit wachsender Entfernung von der Achse dem Wert unendlich, wenn nicht die andere Seite unter jede Grenze sinkt.

Beispiel: Die Drehflächen

$$z - \lg r = V$$

sind Potentialflächen, die durch Verschiebung längs der Drehachse zur Deckung kommen. Die Größe der Verschiebung ist das Maß der Potentialdifferenz zweier Flächen. Die Distanz

ist  $dl = \frac{r dV}{\sqrt{1+r^2}}$ , das Bogenelement der Meridiankurve  $ds = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} dr$ .

Die Einteilung der Meridiankurven ist auf sämtlichen Flächen dieselbe; sie ist durch die Forderung:

$$r d\vartheta ds = c dl$$

$$ds = \frac{c dl}{r d\vartheta}$$

gegeben. Die Strömungslinien sind die Parabeln  $z + \frac{r^2}{2} = k$ , wo  $k$  eine Konstante ist. Sie bringen, wenn man  $k$  um einen geeigneten konstanten Betrag wachsen läßt, von selbst die verlangte Einteilung auf allen Potentialflächen hervor.

1) Dieser Satz findet sich sowohl bei Kaplan und Broszko als auch bei v. Mises und bildet die Grundlage für die konstruktive Aufsuchung der Strömungsbilder.



Um eine Potentialströmung allgemein nach Raumelementen von gleichem Energieinhalt zu unterteilen, genügt es nach dem früheren, eine von den Potentialflächen durch zwei geeignete Kurvensysteme  $u$  und  $v$  so einzuteilen, daß der Inhalt eines jeden Flächenelementes der Distanz von der benachbarten Potentialfläche proportional ist.

$$\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = c_0 \, dl = \frac{c_0}{\sqrt{M}} \, d\varphi.$$

Dabei ist  $du$  und  $dv$  als konstant zu betrachten, also kann

$$(10) \quad \sqrt{EG - F^2} \sqrt{M} = c$$

gesetzt werden.

Transformiert man das Linienelement der Fläche, die zunächst auf  $x$  und  $y$  als Parameterkurven bezogen sei, auf neue Koordinaten  $u$  und  $v$ , so ist:

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq \, dx \, dy + (1 + q^2) dy^2 = E du^2 + 2F du \, dv + G dv^2$$

Führt man  $u = u(xy)$  und  $v = v(xy)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[ E \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + G \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 \\ & + 2 \left[ E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx \, dy \\ & + \left[ E \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + G \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dy^2, \end{aligned}$$

dann ist die Diskriminante:

$$1 + p^2 + q^2 = (EG - F^2) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Gleichung (10) wird

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{M} = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

oder wenn man in  $M$  und  $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$  die Differentialquotienten von  $\varphi$  einführt:

$$(11) \quad \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = c \cdot \varphi_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Wie man sieht, kann man von den beiden Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  eine, etwa  $v(x, y)$  willkürlich annehmen; die andere genügt dann einer linearen partiellen Differentialgleichung, deren allgemeines Integral von einer willkürlichen Funktion abhängt. Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen sind:

$$(12) \quad dx : dy : du = \frac{\partial v}{\partial y} : - \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}{c \cdot \varphi_z}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

erhält man ein erstes Integral  $v(x, y) = c_1$ ; berechnet man hieraus und aus  $\varphi(x, y, z) = \alpha$  die Größen  $y$  und  $z$  als Funktionen von  $x$ , so läßt sich  $\frac{dv}{dx}$  als Funktion von  $x$  allein darstellen; durch Integration ergibt sich ein zweites Integral der Lagrangeschen Gleichungen und somit das *allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung für  $u(x, y)$ , deren Integration auf diese Weise auf die Lösung algebraischer Aufgaben und eine Quadratur zurückgeführt ist.*

Ein paar geometrisch einfache Fälle verdienen hervorgehoben zu werden. Wählt man als Kurven  $v$  die „Äquidistanzkurven“  $M = \text{const.}$ , die zugleich Kurven gleicher Geschwindigkeit sind, so haben sämtliche einer Kurve  $v$  anliegenden Parallelogramme gleichen Inhalt. Eine so gefundene Einteilung liefert zwar eine Teilung des Raumes nach Raumelementen von gleichem Energieinhalt, aber die anderen Potentialflächen sind im allgemeinen nach anderen Gesetzen geteilt als die Ausgangsfläche, da den Äquidistanzkurven der Ausgangsfläche im allgemeinen nicht die Äquidistanzkurven der anderen Potentialflächen entsprechen. Das ist nur der Fall, wenn  $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$  eine Funktion von  $M$  allein ist.

Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \sum_i \frac{\partial M}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi}$$

oder nach (1):

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{\partial M}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi}$$

und (6)

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = -2H\sqrt{M}.$$

*Also nur in solchen Systemen von Potentialflächen, in denen die Äquidistanzkurven Kurven konstanter mittlerer Krümmung sind, entsprechen sich die Äquidistanzkurven.* Das ist z. B. bei den Rotationsflächen der Fall, und wie wir bald sehen werden, bei den Schraubenflächen; außerdem natürlich bei den Flächen konstanter mittlerer Krümmung, insbesondere den Minimalflächen.

Nimmt man als Kurven  $v = \text{const.}$  eine Schar von *geodätisch parallelen Linien* in gleichem Abstand, so muß die Länge des Elementarparallelogramms proportional der Distanz sein. Eine Äquidistanzkurve, welche die geodätisch parallelen Linien schneidet, bestimmt also die Lage von unendlich vielen Parallelogrammen gleicher Länge. Doch bildet eine Schar von geodätischen Parallelen zusammen mit den Äquidistanzkurven

nur dann eine Einteilung der Fläche von der gewünschten Art, wenn zwei beliebige Äquidistanzkurven auf sämtlichen geodätisch parallelen Linien Bögen von gleicher Länge ausschneiden. Das ist z. B. auf den Rotations- und Schraubenflächen der Fall, wenn die geodätischen Parallelen so gewählt werden, daß sie durch Rotation, bzw. Schraubung ineinander übergehen.

*Beispiel der Schraubenflächen.* Sucht man eine Strömung, die insofern Rotationssymmetrie besitzt, als ihre Potentialflächen durch Drehung um eine feste Achse ineinander übergehen, so erhält man durch Transformation der Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Diese Gleichung läßt ein Integral von der Form

$$a \cdot \vartheta + bz + c \lg r = V$$

oder

$$a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b \cdot z + c \lg \sqrt{x^2 + y^2} = V$$

zu; die dargestellten Flächen sind Schraubenflächen, unter denen unter anderen die Minimalschraubenfläche enthalten ist. Die Äquidistanzkurven sind Schraubenlinien gleicher Ganghöhe, und zwar werden sie als Kurven konstanter mittlerer Krümmung durch die Stromlinien ineinander übergeführt. Nimmt man auf einer Schraubenfläche zu den Schraubenlinien noch ein beliebiges System von Kurven hinzu, die ihrerseits durch Schraubung um gleiche Beträge sich miteinander vertauschen, so erhält man eine Einteilung der Fläche, welche zu einer Teilung des Raumes nach Elementen von gleichem Energieinhalt führt. Hierzu braucht man nur die Abstände der Schraubenlinien so zu wählen, daß die Inhalte der zwischen zwei beliebigen Trajektorien gelegenen Parallelogramme proportional der Distanz sind. Den Trajektorien entsprechen durch Abbildung mittels der Stromlinien auf den anderen Potentialflächen wieder Kurvensysteme, deren einzelne Kurven durch Schraubung ineinander übergehen, deren Gesamtheit aber aus dem Ausgangskurvensystem im allgemeinen nicht durch Drehung hervorgeht. Es gibt vielmehr nur ein einziges Kurvensystem, dem diese Eigenschaft zukommt; es wird auf den Potentialflächen durch jene  $\infty^1$  Rotationsflächen ausgeschnitten, auf denen sich die  $\infty^2$  Stromlinien anordnen lassen, und kann ebenso wie die Stromlinien selbst durch Quadraturen erhalten werden. Auf der Minimalschraubenfläche fällt es mit den Äquidistanzkurven zusammen, weshalb diese Fläche von der folgenden Betrachtung auszuschließen ist. Läßt man eine beliebige Stromlinie sich um die Achse des Systems



Die Richtung einer Stromlinie ist nach (1) durch:

$$\frac{dx}{dl} = X = \frac{\varphi_x}{\sqrt{M}}$$

und entsprechende Ausdrücke für  $\frac{dy}{dl}$  und  $\frac{dz}{dl}$  gegeben. Durch nochmaliges Differenzieren ergibt sich:

$$\frac{d^2x}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varphi_x}{\sqrt{M}} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dl}.$$

Nun ist:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varphi_x}{\sqrt{M}} \right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \varphi} - \frac{\varphi_x}{2\sqrt{M^3}} \frac{\partial M}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial \varphi} = \varphi_{xx} \cdot \frac{\varphi_x}{M} + \varphi_{xy} \cdot \frac{\varphi_y}{M} + \varphi_{xz} \cdot \frac{\varphi_z}{M} = \frac{1}{2} \frac{M_x}{M}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = M_x \cdot \frac{\varphi_x}{M} + M_y \cdot \frac{\varphi_y}{M} + M_z \cdot \frac{\varphi_z}{M} = -2H\sqrt{M}.$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varphi_x}{\sqrt{M}} \right) = \frac{M_x}{2M^{\frac{3}{2}}} + \frac{H}{M} \varphi_x$$

$$\frac{d^2x}{dl^2} = \frac{M_x}{2M} + \frac{H \cdot \varphi_x}{\sqrt{M}} = \frac{M_x}{2M} - \frac{\Sigma M_x \varphi_x}{2M^2} \varphi_x$$

Die Schmiegungebene einer Stromlinie ist durch

$$\begin{vmatrix} x - \xi & \frac{dx}{dl} & \frac{d^2x}{dl^2} \\ y - \eta & \frac{dy}{dl} & \frac{d^2y}{dl^2} \\ z - \zeta & \frac{dz}{dl} & \frac{d^2z}{dl^2} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben, wenn mit  $\xi, \eta, \zeta$  ihre laufenden Koordinaten bezeichnet werden.

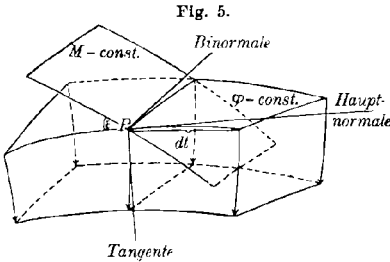
Setzt man für  $\frac{dx}{dl}, \frac{d^2x}{dl^2}$  usw. ihre Werte ein, so folgt, wenn unwesentliche Faktoren unterdrückt werden, als Gleichung der Schmiegungebene:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} x - \xi & \varphi_x & M_x \\ y - \eta & \varphi_y & M_y \\ z - \zeta & \varphi_z & M_z \end{vmatrix} = 0.$$

Die Richtungskosinus ihrer Normalen, also der Binormalen der Stromlinie, sind den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix}$$

proportional. Die Elemente der ersten Zeile dieser Matrix bestimmen die Normale der Potentialfläche  $\varphi = \text{const.}$ , die der zweiten Zeile die Normale der Fläche gleicher Geschwindigkeit  $M = \text{const.}$



Die Schmiegungebene einer Stromlinie steht in jedem Punkt auf der hindurchgehenden Potentialfläche und der Fläche gleicher Geschwindigkeit senkrecht; ihre Binormale ist Tangente der Schnittlinie dieser beiden Flächen, also der Äquidistanzkurve.

Für die erste Krümmung der Stromlinie ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2M^2} \sqrt{M^2 \Sigma M_x^2 - 2M(\Sigma M_x \varphi_x)^2 + (\Sigma M_x \varphi_x)^2 \Sigma \varphi_x^2} \\ (14) \quad \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{2M^{\frac{3}{2}}} \sqrt{M \Sigma M_x^2 - (\Sigma M_x \varphi_x)^2}. \end{aligned}$$

Die Hauptnormale einer Stromlinie berührt die Potentialfläche in einer Richtung, welche auf der Äquidistanzkurve senkrecht steht. Diese Richtung des Geschwindigkeitsgefälles auf der Fläche gleichen Geschwindigkeitspotentials soll mit  $t_1, t_2, t_3$  bezeichnet werden.

Dann gelten zur Bestimmung der  $t_i$  die drei Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} = 0, \\ t_1 \varphi_x + t_2 \varphi_y + t_3 \varphi_z = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1.$$

Die erste dieser Gleichungen gestattet, die  $t_i$  als lineare Kombinationen der Differentialquotienten von  $\varphi$  und  $M$  darzustellen:

$$t_1 = \alpha \varphi_x + \beta M_x \text{ usw.},$$

aus der zweiten und dritten lassen sich dann die Multiplikatoren  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen;

$$\begin{aligned} \alpha \Sigma \varphi_x^2 + \beta \Sigma \varphi_x M_x &= 0 \\ \alpha^2 \Sigma \varphi_x^2 + 2\alpha\beta \Sigma \varphi_x M_x + \beta^2 \Sigma M_x^2 &= 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-\Sigma M_x \varphi_x}{\sqrt{M \Sigma M_x^2 - (\Sigma M_x \varphi_x)^2}}, & \beta &= \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M \Sigma M_x^2 - (\Sigma M_x \varphi_x)^2}}, \\ t_1 &= \frac{-\varphi_x \Sigma M_x \varphi_x + M_x M}{\sqrt{M \Sigma M_x^2 - (\Sigma M_x \varphi_x)^2}}, \end{aligned}$$

nebst entsprechenden Ausdrücken für  $t_2$  und  $t_3$ .

Schreitet man in der so definierten Richtung um ein Linienelement  $dt$  fort, so ist die Änderung, die  $M$  dabei erleidet, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M_x t_1 + M_y t_2 + M_z t_3 = \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{M \Sigma M_x^2 - (\Sigma M_x \varphi_x)^2} \cdot 1)$$

Durch Einführung der ersten Krümmung der Stromlinien wird eine Vereinfachung erzielt,

$$(15) \quad \frac{1}{2M} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{\rho}$$

Berücksichtigt man, daß  $M = v^2$  ist, wo  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, so folgt

$$(15') \quad \begin{aligned} \frac{\partial \lg v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \\ \frac{dv}{v} &= \frac{dt}{\rho} \end{aligned}$$

*Schreitet man auf einer Potentialfläche in Richtung des Geschwindigkeitsgefälles fort, so ist die logarithmische Änderung der Geschwindigkeit gleich dem Produkt aus der Fortschreitung und der ersten Krümmung der durch den Ausgangspunkt gehenden Stromlinie.*

Sind die Potentialflächen Zylinderflächen, so werden die Äquidistanzkurven von den Mantellinien gebildet, während die Gefällslinien mit den ebenen Potentialkurven selbst zusammenfallen, deren Ebenen auf den Mantellinien senkrecht stehen. Der Satz gilt also ohne weiteres auch für die ebene Strömung. — Wenn die Potentialflächen Umdrehungsflächen mit gleicher Achse sind, so sind die Parallelkreise Äquidistanzkurven, die Meridiane Gefällslinien. Der Satz gilt also für das in einer Meridianebene von den Meridianen und Stromlinien gebildete Orthogonalsystem und ist für diesen speziellen Fall bereits von Bauersfeld<sup>2)</sup> aufgestellt worden.

Stellt man die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = -2H\sqrt{M}$$

oder

$$\frac{\partial M}{\partial l} = \frac{\partial M}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dl} = -2HM$$

mit Gleichung (15) zusammen:

$$\frac{\partial \lg \sqrt{M}}{\partial l} = -H, \quad \frac{\partial \lg \sqrt{M}}{\partial t} = \frac{1}{\rho},$$

1) Wie auch an anderen Stellen, ist hier die Unbestimmtheit des Vorzeichens störend.

2) Bauersfeld, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. 56 (1912), S. 2046. Dort findet der Satz zur Konstruktion des Strömungsbildes in Francis-Turbinen Verwendung.

so ergibt sich eine Reziprozität zwischen den Stromlinien und Gefällslinien einerseits, der mittleren Krümmung der Potentialflächen und der ersten Krümmung der Stromlinien anderseits.

Durch Differentiieren der beiden Gleichungen nach  $t$  und  $l$  findet man:

$$(16) \quad -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial l}.$$

Schreitet man von einem Punkt aus auf einer Gefällslinie einer Potentialfläche und auf einer Stromlinie um gleiche Wegdifferenzen ( $dt = dl$ ) fort, so ändert sich die mittlere Krümmung der Potentialfläche und die erste Krümmung der Stromlinie um gleiche Beträge.

Wenn die Potentialflächen Zylinderflächen sind, geht die mittlere Krümmung in die Krümmung der Potentialkurven der ebenen Strömung über. Bezeichnet man mit  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die Krümmungsradien, mit  $s_1$  und  $s_2$  die Bogenlänge zweier Kurvenscharen, die die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen, so folgt aus (16) ein bekannter spezieller Satz:

$$(16') \quad \frac{\partial \frac{1}{\rho_1}}{\partial s_1} = \frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{\partial s_2} \quad .^1)$$

Bezeichnet man mit  $\varepsilon$  den Winkel, unter dem eine Potentialfläche von einer Fläche gleicher Geschwindigkeit geschnitten wird, so ist:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \frac{\sum M_x \varphi_x}{\sqrt{\sum M_x^2} \sqrt{M}} = -\frac{2HM}{\sqrt{\sum M_x^2}} \\ \sin \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{\sum M_x^2} \sqrt{M}} \sqrt{M \sum M_x^2 - (\sum M_x \varphi_x)^2} = \frac{2M}{\rho \sqrt{\sum M_x^2}}, \end{aligned}$$

also

$$(17) \quad \cotg \varepsilon = -H \cdot \rho.$$

Die Kotangente des Winkels einer Fläche gleicher Geschwindigkeit mit einer Potentialfläche ist gleich dem Produkt aus der mittleren Krümmung der Potentialfläche und der ersten Krümmung der Stromlinie. Für ebene Strömungen ergibt sich in der Bezeichnung von (16'):

$$(17') \quad -\frac{\rho_1}{\rho_2} = \tg \varepsilon.$$

Wie insbesondere aus dem durch (16) dargestellten Satz ersichtlich ist, läßt sich eine räumliche Potentialströmung in der Umgebung eines beliebigen Punktes durch eine ebene Potentialströmung in erster Näherung ersetzen, deren Ebene auf der durch den Punkt gehenden Äquidistanzkurve senkrecht steht, und deren zylindrische Potentialflächen die gegebenen Potentialflächen in der Umgebung des Punktes längs der Gefällslinien berühren.

1) Ein direkter Beweis dieses Satzes findet sich z. B. bei R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. 1. Bd. Leipzig 1908, S. 167. Die positive Richtung der Bogen  $s_2$  ist dabei umgekehrt.



## Zur Dynamik ebener Flüssigkeitsbewegungen.

Von † M. JAEGER in Lindenberg.<sup>1)</sup>

Das Fundament jeder Dynamik von Flüssigkeitsbewegungen ist die sogenannte Bernoullische Gleichung, die ein Integral der Eulerschen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen darstellt. Bezeichnet  $p$  den Druck,  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential,  $q$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung,  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $\Omega$  das Potential äußerer auf die Flüssigkeit ausgeübter Kräfte, so lautet diese Gleichung

$$(1) \quad + \frac{1}{2} q^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \int \frac{dp}{\rho} + F(t)$$

oder, wenn wir  $\rho$  als konstant voraussetzen und  $p$  als die Unbekannte auffassen:

$$(2) \quad p = \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 - \Omega \right).$$

Der Druck besteht also aus drei Bestandteilen, deren einer  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  nur von Veränderung des Bewegungszustandes, dessen zweiter unabhängig vom ersten von der örtlichen Geschwindigkeit abhängt. Das Integral des dritten, erstreckt über die Oberfläche eines eingetauchten Körpers, stellt den archimedischen Auftrieb dar. Das Interesse der Hydrodynamiker hat sich bisher fast ausschließlich dem zweiten Teile zugewendet; wir wollen ihn als den *Geschwindigkeitsdruck* bezeichnen, zum Unterschied vom ersten, den wir *Impulsdruck* nennen wollen, während der dritte Bestandteil der *archimedische Druck* heißen soll. Der Name des ersten Bestandteiles als „Impulsdruck“, dessen Ermittlung für beliebige Profile bewegter Körper bei zweidimensionaler Strömung die folgende Untersuchung gilt, soll folgendermaßen gerechtfertigt werden: Wir denken an eine Flüssigkeitsbewegung, die im Unendlichen in Ruhe ist, und nur durch Bewegung eines Körpers hervorgerufen wird, indem die Flüssigkeit gezwungen ist, dem Körper auszuweichen. Es soll diese Bewegung des Körpers plötzlich mit der Geschwindigkeit  $c$  einsetzen; vermöge der Inkompressibilität der Flüssigkeit wird demgemäß auch diese sich instantan in der durch die hydrodynamischen Grundgleichungen vorgeschriebenen Weise in Bewegung setzen. Das Koordinatensystem, auf das die ab-

1) Der Verfasser hat als Obermatrose im freiwilligen Marine-Fliegerkorps bei einem Überlandflug am 17. Februar 1915, seinem 31. Geburtstag, durch Absturz den Tod für sein Vaterland erlitten. Die Schriftleitung.

soluten Bewegungen bezogen werden, ist im Körper fest gedacht. Denken wir uns die Definitionsgleichungen des Geschwindigkeitspotentials

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$$

durch  $c$  dividiert, so ist ersichtlich, daß die räumliche Konstante  $c$  aus dem Geschwindigkeitspotential der betrachteten Strömung als Faktor abgespalten werden kann.

$$(3) \quad \varphi = c\varphi_0.$$

Hier ist  $\varphi_0$  nur noch vom Ort, nicht von der Zeit abhängig, weil unser Koordinatensystem mit dem Körper fortschreitet. So ergibt sich der impulsive Bestandteil des Druckes  $p_i$  durch Differentiation

$$(4) \quad p_i = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \varphi_0 \frac{dc}{dt}$$

und der impulsive Druck, der die betreffende Bewegung der Flüssigkeit erzeugt, ist

$$(5) \quad \int_i^{i+\delta t} p_i dt = \rho \varphi_0 \bar{c} = \rho \varphi;$$

$\bar{c}$  ist die in der Zeit  $\delta t$  erreichte Geschwindigkeit der Körperbewegung.

Das Bild einer ebenen Flüssigkeitsbewegung kann als die Abbildung einer Ebene

$$\chi = \varphi + i\psi$$

auf die Ebene

$$z = x + iy$$

durch eine Funktion

$$\chi = f(z)$$

aufgefaßt werden. Hierbei können beide Ebenen mehrblättrige oder unendlich vielblättrige Riemannsche Flächen sein. Die Geschwindigkeit der Strömung wird durch den Vektor

$$(6) \quad w = u - iv = -\frac{d\chi}{dz}$$

gekennzeichnet.

Die Resultierende ( $X, Y$ ) der Geschwindigkeitsdrucke ergibt sich dann<sup>1)</sup> als das komplexe Residuum der Funktion  $w^2$  und zwar als

$$(7) \quad X - iY = \frac{i\rho}{2} \int w^2 dz = \frac{i\rho}{2} \int \left(\frac{d\chi}{dz}\right)^2 dz.$$

Es liegt nahe anzunehmen, daß auch der Impulsdruck sich als ein vom Wege unabhängiges Integral der  $xy$ -Ebene und also in komplexer Form darstellen lasse.

1) Vgl. H. Blasius, Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik, diese Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 58 (1910), S. 93.

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß das Residuum

$$\int w dz = - \int d\varphi - i \int d\psi$$

die Summe der Zirkulation und der imaginär genommenen Quellenergiebigkeit darstellt, in unserem einfachsten Fall der zirkulationslosen Umströmung eines Hindernisses also null ist.

Da der Druck physikalisch nur eine einwertige Funktion des Ortes sein kann, ist klar, daß wir uns auf den Fall eines einwertigen Geschwindigkeitspotentials beschränken müssen, so wie wir auch eine Zirkulationsbewegung in der völlig reibungslosen Flüssigkeit durch keine Bewegung des Körpers hervorbringen können, sondern dazu weitere Kräfte brauchen, die sich über einen solchen Querschnitt der Flüssigkeit erstrecken, der den Raum zu einem einfach zusammenhängenden macht. Diese Beschränkung ist aber in Wahrheit der Allgemeinheit unserer Resultate nicht hinderlich, denn die Kräfte, die bei der Ablösung von Wirbeln und infolge davon bei Einleitung der Zirkulationsbewegung auftreten, werden sich zu den für einwertiges Geschwindigkeitspotential zu untersuchenden Impulskräften ebenso unabhängig addieren wie ein mehrwertiges Potential zu dem der zirkulationslosen Strömung.

Es sei das Residuum

$$(8) \quad ki \int \chi dz = \xi - i\eta;$$

wobei

$$(9) \quad k = \rho h \frac{dc}{dt};$$

$h$  ist die Dicke der in Betracht gezogenen Schicht der ebenen Bewegung.

Wir wählen als Integrationsweg die Oberfläche des Hindernisses und haben

$$\begin{aligned} -i \int \chi dz &= \int \dot{\varphi} dy + \int \dot{\psi} dx + i \left( \int \dot{\psi} dy - \int \dot{\varphi} dx \right) \\ &= \int \dot{\varphi} dy - i \int \dot{\varphi} dx, \end{aligned}$$

also

$$(10) \quad \xi = k \int \dot{\varphi} dy$$

$$(11) \quad \eta = k \int \dot{\varphi} dx;$$

$\xi$  und  $\eta$  sind die Komponenten des impulsiven Druckes: Die ebene Bewegung einer Flüssigkeit soll nur von der Bewegung eines in ihr befindlichen zylindrischen Körpers herrühren und demgemäß die Flüssig-

keit im Unendlichen in Ruhe sein. Die gesamte kinetische Energie  $T$  der Flüssigkeit wird nach der Greenschen Verwandlung bestimmt aus

$$(12) \quad \frac{2T}{\rho \cdot h} = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist über Oberflächen mit dem Element  $ds$  und der Normalenrichtung  $n$  zu erstrecken, die das Integrationsgebiet völlig einschließen. Wir beziehen wieder die absoluten Bewegungen auf ein im Körper festes Koordinatensystem und können dann das Linienintegral der rechten Seite lediglich über die Körperoberfläche erstrecken, während das Flächenintegral der linken Seite auf das unendliche zweifach zusammenhängende von der Flüssigkeit erfüllte Gebiet sich bezieht.<sup>1)</sup> Die Bewegung des Körpers sei durch die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  und die Rotation  $q$  charakterisiert. Das in Rede stehende Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  stellt sich dann dar als

$$(13) \quad \varphi = u\varphi_u + v\varphi_v + q\varphi_q.$$

Hier sind  $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_q$  die durch die Geschwindigkeiten dividierten Potentiale der jeweils von den einzelnen Bewegungen  $u, v, q$  des Körpers hervorgerufenen Flüssigkeitsbewegungen. Nach Green gilt nun in bezug auf die rechte Seite von Gl. (12)

$$(14) \quad \int \varphi_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial n} ds = \int \varphi_v \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds,$$

und es wird demnach

$$(15) \quad \frac{2T}{\rho \cdot h} = Au^2 + Bv^2 + 2Cuv + 2q(Du + Ev) + Rq^2,$$

wobei

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \int \varphi_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial n} ds \\ B = \int \varphi_v \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \\ C = \int \varphi_u \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds = \int \varphi_v \frac{\partial \varphi_u}{\partial n} ds \\ D = \int \varphi_u \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} ds = \int \varphi_q \frac{\partial \varphi_u}{\partial n} ds \\ E = \int \varphi_v \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} ds = \int \varphi_q \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \\ R = \int \varphi_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} ds. \end{array} \right.$$

1) Vgl. hierzu und zum Folgenden Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Joh. Friedel, Leipzig 1907, und Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I.

Mit Rücksicht auf die Wahl unseres Koordinatensystems ist nun

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_u}{\partial n} = \cos(nx) \\ \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = \cos(ny) \\ \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = x \cos(ny) - y \cos(nx); \end{cases}$$

so wird

$$(18) \quad \begin{cases} A = \int \varphi_u dy & D = \int \varphi_u x dx - \int \varphi_u y dy \\ B = \int \varphi_v dx & E = \int \varphi_v x dx - \int \varphi_v y dy. \\ C = \int \varphi_q dy = \int \varphi_q dx \end{cases}$$

Wir wollen, da uns hier nur der Einfluß der Flüssigkeit auf die Bewegung des Körpers interessiert, uns diesen als massenlos vorstellen. Die Flüssigkeitsbewegung sei in der kurzen Zeit  $t_1 - t_0$  aus der Ruhe entstanden, infolge der auf den Körper ausgeübten großen Kräften  $X, Y$  vom Moment  $M$ . Wir verstehen unter dem Impuls der Bewegung

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = \int_{t_0}^{t_1} X dt \\ \eta = \int_{t_0}^{t_1} Y dt \\ \lambda = \int_{t_0}^{t_1} M dt. \end{cases}$$

In bekannter Weise ist dann

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\partial T}{\partial u} \\ \eta = \frac{\partial T}{\partial v} \\ \lambda = \frac{\partial T}{\partial q}. \end{cases}$$

Hieraus folgt unter Rücksicht auf Gl. (15)

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho h} \xi = Au + Cv + Dq \\ \frac{1}{\rho h} \eta = Cu + Bv + Eq \\ \frac{1}{\rho h} \lambda = Du + Ev + Rq. \end{cases}$$

Eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel  $\alpha$

$$(22) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A - B}$$

führt die Gleichung über in die Form

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho h} \xi' = A'u' + D'q \\ \frac{1}{\rho h} \eta' = B'v' + E'q \\ \frac{1}{\rho h} \lambda' = E'u' + D'v' + Rq, \end{cases}$$

so daß bei  $q = 0$   $\xi'$  mit  $u'$  und  $\eta'$  mit  $v'$  verschwindet.

Offenkundig stellt die Transformation (22) den Übergang auf die Hauptachsen der Ellipse

$$(24) \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2q(Dx + Ey) = \text{const.}$$

(Gl. 15) dar. Denkt man sich von dem willkürlich im Körper angenommenen Bezugspunkt aus die Geschwindigkeitsvektoren  $(u, v)$  abgetragen, welche mit je einer vorgegebenen Energiemenge dem Körper erteilt werden können, so erfüllen deren Endpunkte je eine Ellipse der Schar (24).

*Ihre Hauptachsen sind durch die Form der Gl. (23) charakterisiert, daß nämlich, wenn von einer Drehung abgesehen wird ( $q = 0$ ), der Impuls in der Bewegungsrichtung liegt. Für alle anderen Richtungen weicht der zu gebende Impuls von der Richtung der gewollten Bewegung ab.* Wir nennen diese Achsen die *hydrodynamischen Achsen* des Körpers.

Diese Achsen sind die bekannten Richtungen, in denen ein stabiles oder labiles Gleichgewicht einer Translationsbewegung besteht.

Es liegt nahe, die vorstehenden Untersuchungen auf die Bewegung eines *Flügels* anzuwenden, die Lage der hydrodynamischen Achsen aufzusuchen und die Größe und Richtung der Kräfte zu bestimmen, welche bei plötzlichen Bewegungsänderungen auftreten. Die Gl. (21) zeigen, daß hierzu die Kenntnis der Größen  $A, B, C, D$  und  $E$  nötig ist. Würden wir die nach denselben Ansätzen durchzuführende Untersuchung von Schiffschwankungen<sup>1)</sup> hier erstreben, so hätten wir das Hauptinteresse auf  $R$  zu richten, welche Größe im vorliegenden Zusammenhang bedeutungslos ist.

Die mit graphischen Methoden durchzuführende Konstruktion des Bildes der dem Körper ausweichenden Parallelströmung gestattet<sup>2)</sup>, die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente, den eigentlichen Trägheitszuwachs  $A$  bzw.  $B$  aus der Figur zu entnehmen und zwar als einen den Körper umschließenden Flächeninhalt. Derselbe ist in Fig. 1 und 2 für zwei zueinander senkrechte Strömungen für das behandelte Flügelprofil eingezeichnet. Ergebnisreicher ist der Weg, die Integrationen 10 und 11 nicht durch Planimetrieren, sondern durch ein Kräftepolygon

1) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften IV 22, 7 a.

2) Vgl. meine Dissertation: Graphische Integrationen in der Hydrodynamik, Göttingen 1909, S. 36 und 40.

Fig. 1.

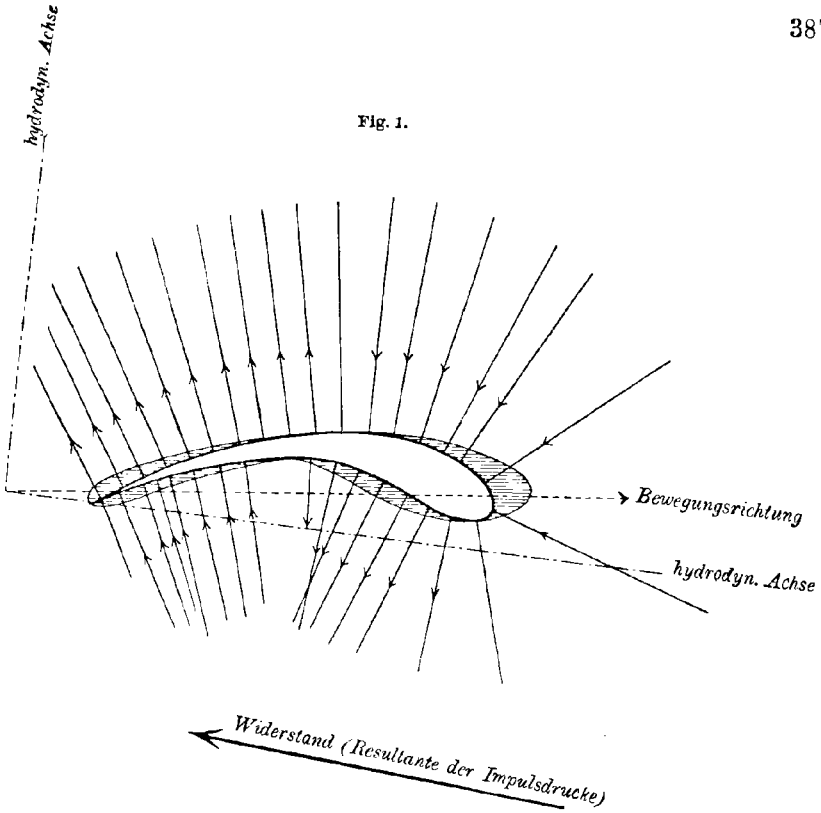
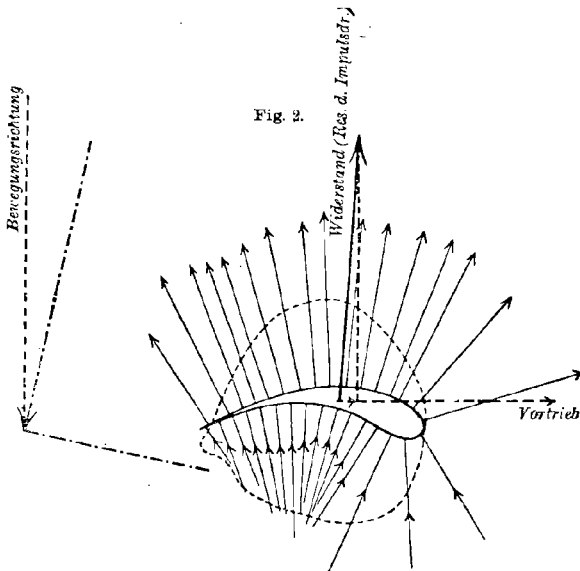


Fig. 2.



auszuführen, indem man senkrecht zu jedem Oberflächenelement  $\mathcal{A}$ , eine Kraft  $\varphi \mathcal{A}$ , zeichnet und alle Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt. Man erhält so den Vektor Gl. 8

$$(25) \quad \xi - i\eta = \rho h \bar{c} \int \chi dz$$

in der  $xy$ -Ebene. Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  der Parallelströmung hängt nun mit demjenigen  $\varphi'$  der Ausweichbewegung der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit, welches auf ein ebenfalls im Körper festes Koordinatensystem bezogen werden soll (vgl. S. 381), in folgender Weise zusammen:

$$\varphi - cx = \varphi'$$

Die Differenz des ganzen Flächeninhalts und des Körperprofils mit der Flüssigkeit erfüllt ergibt den Trägheitszuwachs  $A$  bzw.  $B$ , während die volle Fläche (einschließlich des Körperprofils) die Kraft mißt, welche bei Beschleunigung der Strömung den Körper mitzureißen, bei einer Abnahme ihn gegen den Strom zu treiben bestrebt ist.

Mit dem Impulsdruck

$$(26) \quad \begin{cases} \xi = \rho h A c \\ \eta = \rho h C c \end{cases}$$

sind  $A$  und  $C$  graphisch ermittelt als die Komponenten der Impulsdrucke in Richtung des Stromes und senkrecht zu ihm. Für eine gegen die vorige um  $\frac{\pi}{2}$  gedrehte Stromrichtung haben wir

$$(27) \quad \begin{cases} \xi' = \rho h C c \\ \eta' = \rho h B c. \end{cases}$$

Aus einem solchen zweiten Strömungsbild haben wir also *die Größe B gewonnen und eine Kontrolle des Wertes C*. Weiter kann nun durch ein Seilpolygon auch die *Lage* der Kraft gefunden werden, welche auf den masselosen Körper angewendet die gewünschte Bewegung hervorruft. Für die gezeichneten Strömungen haben wir aus (21)

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda x = \rho h D \\ \lambda y = \rho h E, \end{cases}$$

somit auch *die Koeffizienten D und E graphisch ermittelt*, und es kann für jede beliebige Strömung nach Gl. (21) die Resultierende des Impulsdruckes nach Größe und Richtung eingezeichnet werden. Besondere Beachtung verdient bei einem *Flügelprofile* die Lage der hydrodynamischen Achsen, die nach Gl. (22)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}$  einzuzeichnen sind.

Die Achse der kleinsten kinetischen Energie geht unter sanfter Neigung gegen die Flügelsehne abwärts, wie die Bewegung im Gleitflug. Die Achsenrichtung des größten Widerstandes gegen Bewegungs-



änderung ist nicht die beim Flügelschlag angewendete, vielmehr *entsteht bei der Resultante aus der nach unten gerichteten Schlagbewegung mit der Vorwärtsbewegung ein Vortrieb*. In der Tat sieht man auch die Vögel, wenn sie gegen den Wind fliegen, viel mit den Flügeln schlagen, obwohl sie doch sicher keiner vermehrten Tragkraft bedürfen.

Es ist aber nicht zu erwarten, daß die erhaltenen Resultate durchweg und ohne weiteres sich auf die Wirklichkeit werden anwenden lassen. Die verwendeten Methoden sollen auf das Studium der bei Flügelschlagbewegungen auftretenden Kräfte hinführen. Zu einer weiteren Ausgestaltung einer Theorie der Schlagbewegung ist es notwendig, die Vorstellung der Zirkulation um den Flügel, deren Fruchtbarkeit aus den Arbeiten von Kutta und Blasius erhellt, zu den erhaltenen Resultaten hinzuzufügen. Wir haben uns also in Gl. (15) noch ein Zusatzglied, welches die Energie der Zirkulation enthält, hinzuzudenken. Es würde dieses Glied sodann Zusatzgrößen zu dem Impuls  $\xi\eta$  zur Folge haben. Die Betrachtung derselben ist aber hier unterblieben, weil die Zirkulation durch keine am Körper angreifende Kraft hervorgerufen werden kann, sondern dazu die Reibung der Flüssigkeit in Betracht gezogen werden muß. Hierzu bietet die Prandtlsche Grenzschichtentheorie die Möglichkeit und es wäre in Fortsetzung des Ausgeführten notwendig, in der Art der von Kármánschen Arbeiten zu untersuchen, welche Kräfte die Wirbelablösung auf den Flügel ausübt.

Ein Vergleich mit Experimenten ist zurzeit noch nicht möglich. Während die alten Experimentatoren Poncelet, Didion, Duchemin den in Rede stehenden Teil des Widerstandes bei Bewegungsänderung berücksichtigt haben, hat man lange Zeit hernach nur noch an die stationäre Bewegung gedacht. Bei O. Lilienthal findet sich die Bemerkung, daß die bei Schlagbewegungen der Vogelflügel auftretenden Kräfte den zwanzigfachen Betrag des normalen Widerstandes erreichen. Neuerdings ist Herr G. Lilienthal mit Messungen in dieser Richtung beschäftigt. Auch anderwärts wendet sich das Interesse der hier vorggeführten Aufgabe zu und zwar in dem Maße, als einerseits der Wunsch besteht, die bei plötzlichen Bewegungsänderungen der Flugapparate — auch beim Einfallen von Böen — auftretenden Beanspruchungen kennen zu lernen<sup>1)</sup>; andererseits ist das Problem des Schwingenflugapparates in der gegenwärtigen Entwicklung der Flugtechnik nicht völlig zurückgetreten.

1) Erwähnt sei hier, daß die wissenschaftliche Gesellschaft für Flugtechnik bei ihrer Tagung im Juli 1913 ein Preisausschreiben erlassen hat für einen im Flugzeug mitzunehmenden Apparat, der diese Beanspruchungen registrieren soll.

## Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein und desselben Zeitraums.

Von HANS KOEPLER in Berlin.

### Erster Teil.

Zur Grundlage bei der Berechnung des jährlichen Risikos der Todes- und Erlebensfallversicherungen wählten Wittstein und Hattendorf das einfache Bernoullische Theorem. Daher liegt es nahe, zur Berechnung des jährlichen Risikos einer Versicherung, welche auf mehr als zwei sich zu eins ergänzenden Wahrscheinlichkeiten beruht, eine Untersuchung anzustellen über das Bernoullische Theorem für mehr als zwei Ereigniszahlen. Dies führt zu dem Satze:

Gibt es  $n$  Wahrscheinlichkeiten, deren Summe

$$p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_n = 1$$

ist, und beträgt die Gesamtzahl der möglichen Fälle  $s$ , so ist die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung  $\pm \sigma_i$  von der wahrscheinlichsten Anzahl  $sp_i$  gegeben durch den Ausdruck

$$P(\pm \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2sp_i(1-p_i)}} e^{-\frac{1}{2sp_i(1-p_i)} \sigma_i^2}.$$

Die Entstehung dieses seiner Form nach allgemein bekannten Gesetzes erfordert, daß man bei beliebig gewähltem  $\sigma_i$  den übrigen Abweichungen  $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$  alle nur zulässigen Werte zu erteilen hat. Aus diesem Grunde darf man im vorliegenden Falle das Bernoullische Theorem nicht in derselben Weise anwenden wie bei den einfacheren Risikoberechnungen. Unser Augenmerk diesem Umstande zuwendend, wollen wir uns zunächst mit folgendem Problem beschäftigen:

Das Eintreffen des Ereignisses  $E_1$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ist, bringt den Verlust  $D$ , das Eintreffen des Ereignisses  $E_2$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist, führt den Gewinn  $G_1$  herbei, während das Eintreffen des Ereignisses  $E_3$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_3$  ist, den Gewinn  $G_2$  zur Folge hat. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2$  und  $p_3$  bestehe die Beziehung

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Hat nun ein Unternehmer  $s$  Risikoverträge auf das Eintreffen des Ereignisses  $E_1$  abgeschlossen, so besteht für ihn die Wahrscheinlichkeit

$$P(s_1, s_2, s_3) = \frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3},$$

daß er in  $s_1$  Fällen den Schaden  $D$  zu verzeichnen hat, während er mit der gleichen Wahrscheinlichkeit die Gewinne  $s_2 G_1$  und  $s_3 G_2$  erwarten kann, demnach darf der Unternehmer den Verlust erwarten

$$\begin{aligned} N(s_1, s_2) &= s_1 D - s_2 G_1 - s_3 G_2 \\ &= s_1 D - s_2 G_1 - (s - s_1 - s_2) G_2 \\ &= s_1 (D + G_2) - s_2 (G_1 - G_2) - s G_2, \end{aligned}$$

welcher ein Gewinn ist, im Falle die Ungleichung besteht

$$s_1 (D + G_2) < s_2 (G_1 - G_2) + s G_2.$$

Ist  $s_1$  gleich der erwartungsmäßigen Zahl von Schadenfällen, also gleich  $sp_1$ , und ferner  $s_2 = sp_2$  gleich der zu erwartenden Zahl von Gewinnfällen  $G_1$  infolge des Eintritts des Ereignisses  $E_2$ , so wird

$$N(sp_1, sp_2) = sp_1 (D + G_2) - sp_2 (G_1 - G_2) - s G_2.$$

Diese Differenz muß gleich null sein, sofern es sich um einen einer sogenannten billigen Wette entsprechenden Vertrag handelt. In diesem Falle wird nämlich aus

$$\begin{aligned} sp_1 (D + G_2) - sp_2 (G_1 - G_2) - s G_2 &= 0 \\ p_1 D &= p_2 G_1 + (1 - p_1 - p_2) G_2 = p_2 G_1 + p_3 G_2. \end{aligned}$$

Es findet also auch in einem verwickelteren Falle die Regel Bestätigung, daß die Gewinnerwartungen zweier Spieler gerechterweise einander gleich sein müssen. Weiterhin läßt sich zeigen, daß die Gewinnhoffnung des Unternehmers auch null ist, wenn er eine sehr große Zahl von gleichen Verträgen abschließt. Man kann annehmen, daß bei  $s$  Verträgen  $s_1 = sp_1 + \sigma_1$  Schadenfälle  $D$  eintreten, während die Gewinne  $G_1$  in  $s_2 = sp_2 + \sigma_2$  und die Gewinne  $G_2$  in  $s_3 = sp_3 + \sigma_3$  Fällen zu erwarten sind. Macht man über die Größe der Abweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  irgendwelche Annahmen, so ist damit gleichzeitig auch  $\sigma_3$  bestimmt, weil wegen

$$sp_1 + sp_2 + sp_3 = s$$

stets sein muß

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Die mathematische Erwartung der Gebarung  $N(\sigma_1, \sigma_2)$ , welche die Form annimmt

$$\begin{aligned} N(\sigma_1, \sigma_2) &= (sp_1 + \sigma_1)(D + G_2) - (sp_2 + \sigma_2)(G_1 - G_2) - s G_2 \\ &= \sigma_1 (D + G_2) - \sigma_2 (G_1 - G_2), \end{aligned}$$

läßt sich hiernach durch den Ausdruck veranschaulichen

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = P(\sigma_1, \sigma_2) N(\sigma_1, \sigma_2),$$

in welchem  $N(\sigma_1, \sigma_2)$  einen Gewinn bedeutet, wenn die Ungleichung besteht

$$\sigma_1(D + G_2) < \sigma_2(G_1 - G_2),$$

und einen Verlust, falls die Ungleichung statthat

$$\sigma_1(D + G_2) > \sigma_2(G_1 - G_2).$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  wird aus der Wahrscheinlichkeit  $P(s_1, s_2, s_3)$  auf folgende Weise gefunden:

Substituieren wir  $s_1 = sp_1 + \sigma_1$ ,  $s_2 = sp_2 + \sigma_2$ ,  $s_3 = sp_3 - \overline{\sigma_1 + \sigma_2}$ , so erhalten wir

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s!}{(sp_1 + \sigma_1)! (sp_2 + \sigma_2)! (sp_3 - \overline{\sigma_1 + \sigma_2})!} p_1^{sp_1 + \sigma_1} p_2^{sp_2 + \sigma_2} p_3^{sp_3 - \overline{\sigma_1 + \sigma_2}}.$$

Wenden wir zunächst die Stirlingsche Formel an, so bekommen wir, vorerst zur Abkürzung  $\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_3$  schreibend und beachtend, daß

$$e^{-s} = e^{-\sum_1^3 (sp_i + \sigma_i)}$$

ist:

$$\begin{aligned} P(\sigma_1, \sigma_2) &= \sqrt{2\pi} s^s \prod_1^3 \frac{p_i^{sp_i + \sigma_i}}{\sqrt{2\pi} (sp_i + \sigma_i) (sp_i + \sigma_i)^{(sp_i + \sigma_i)}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}} \prod_1^3 \frac{(sp_i)^{sp_i + \sigma_i + 1/2}}{(sp_i + \sigma_i)^{(sp_i + \sigma_i + 1/2)}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}} \prod_1^3 \left(1 + \frac{\sigma_i}{sp_i}\right)^{-(sp_i + \sigma_i + 1/2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}} e^{-\sum_1^3 (sp_i + \sigma_i + 1/2) \ln \left(1 + \frac{\sigma_i}{sp_i}\right)}. \end{aligned}$$

Ähnlich wie beim einfachen Bernoullischen Theorem haben wir dem Exponenten von  $e$  einen vereinfachten Wert beizulegen. Entwickeln wir die Logarithmen in Reihen, wiederum  $\sigma_3 = -(\sigma_1 + \sigma_2)$  setzend, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_1^3 (sp_i + \sigma_i + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{\sigma_i}{sp_i}\right) \\ &= (sp_1 + \sigma_1 + \frac{1}{2}) \left[ \frac{\sigma_1}{sp_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{sp_1}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_1}{sp_1}\right)^3 - \dots \right] \\ &+ (sp_2 + \sigma_2 + \frac{1}{2}) \left[ \frac{\sigma_2}{sp_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2}{sp_2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2}{sp_2}\right)^3 - \dots \right] \\ &+ (sp_3 - \overline{\sigma_1 + \sigma_2} + \frac{1}{2}) \left[ -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{sp_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{sp_3}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{sp_3}\right)^3 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Nun lösen wir die Klammern auf und vernachlässigen einerseits alle Glieder, in welchen die Potenzen der Abweichungen den zweiten Grad übersteigen. Fernerhin unterdrücken wir auch die Glieder, welche von der Ordnung  $\frac{1}{\sqrt{s p_i}}$  sind, wenn angenommen wird, daß die entsprechenden Abweichungen  $\sigma_i$  von der Ordnung  $\sqrt{s p_i}$  sind. Es ergibt sich alsdann für den Exponenten der Näherungswert

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \frac{\sigma_1^2}{s p_1} - \frac{\sigma_1^2}{2 s p_1} + \sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{s p_2} - \frac{\sigma_2^2}{2 s p_2} - (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{s p_3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2 s p_3} \\ = \frac{\sigma_1^2}{2 s p_1} + \frac{\sigma_2^2}{2 s p_2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2 s p_3} = \frac{1}{2 s} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_1^2 + \frac{1}{2 s} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_2^2 + \frac{1}{s p_3} \sigma_1 \sigma_2 \\ = a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \sigma_1 \sigma_2. \end{aligned}$$

Darnach beträgt also die Wahrscheinlichkeit der beiden voneinander unabhängigen Abweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ :

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2 \pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2}.$$

Setzen wir vorläufig noch  $\frac{1}{2 \pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3}} = K$ , so finden wir

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = K e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} [\sigma_1 (D + G_2) - \sigma_2 (G_1 - G_2)].$$

Da  $s_1$  und  $s_2$  alle Werte von 0 bis  $s$  annehmen können, also  $\sigma_1$  variierbar ist von  $\sigma_1 = -s p_1$  bis  $\sigma_1 = s(1 - p_1)$  und  $\sigma_2$  von  $\sigma_2 = -s p_2$  bis  $\sigma_2 = s(1 - p_2)$ , so beläuft sich die mit einem Geschäfte von  $s$  gleichartigen Risikoverträgen verbundene Verlust- oder Gewinnerwartung auf

$$H = \int_{-s p_1}^{s(1-p_1)} \int_{-s p_2}^{s(1-p_2)} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} [\sigma_1 (D + G_2) - \sigma_2 (G_1 - G_2)] d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Für diese können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} H &= K (D + G_2) \int_{-s p_1}^{s(1-p_1)} e^{-a_1 \sigma_1^2} \sigma_1 d\sigma_1 \int_{-s p_2}^{s(1-p_2)} e^{-a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_2 \\ &\quad - K (G_1 - G_2) \int_{-s p_2}^{s(1-p_2)} e^{-a_2 \sigma_2^2} \sigma_2 d\sigma_2 \int_{-s p_1}^{s(1-p_1)} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1 \\ &= K (D + G_2) U_1 - K (G_1 - G_2) U_2. \end{aligned}$$

Machen wir die übliche Annahme, daß bereits für unbedeutende Werte von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Wahrscheinlichkeit  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  sehr klein wird, so können wir die oberen Grenzen durch  $+\infty$  und die unteren Grenzen

durch  $-\infty$  ersetzen. Beide Doppelintegrale lassen sich alsdann leicht nach derselben Art behandeln. Wir betrachten z. B. das Doppelintegral

$$U_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1 \sigma_1^2} \sigma_1 d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_2.$$

Um dasselbe auswerten zu können, sehen wir zunächst  $\sigma_1$  als konstant an und ergänzen die Exponenten des Integranden des zweiten Integrals zu einem vollständigen Quadrat; wir erhalten dann

$$U_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_1 - \alpha) \sigma_1^2} \sigma_1 d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a_2} \sigma_2 + \sqrt{\alpha} \sigma_1)^2} d\sigma_2,$$

wobei  $\alpha$  durch die Gleichung

$$2\sqrt{a_2} \sqrt{\alpha} = a_3$$

bestimmbar ist. Weiterhin finden wir, wenn wir  $(a_1 - \alpha) \sigma_1 = u$ , sowie  $\sqrt{a_2} \sigma_2 + \sqrt{\alpha} \sigma_1 = z$  setzen,

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}(a_1 - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_2}(a_1 - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u du.$$

Da aber  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u du = 0$ , so ist sowohl  $U_1 = 0$ , als auch  $U_2 = 0$ .

Somit folgt

$$H = K(D + G_2)0 - K(G_1 - G_2)0 = 0.$$

Die Erfahrung lehrt nun aber, daß sich Risikoverträge mangels einer hinreichend großen Anzahl niemals im Einklange mit der mathematischen Erwartung abwickeln. Es besteht daher die weitere Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit einer beliebig gewählten Abweichung

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D + G_2) - \sigma_2(G_1 - G_2)$$

zu bestimmen, wenn die voneinander unabhängigen Abweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsgesetze unterliegen:

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2},$$

wobei die Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  abkürzende Bezeichnungen für die oben gefundenen Werte sind.

Um auch die Vorkehrungen für eine später zu besprechende Aufgabe zu finden, wollen wir auf Grund des ermittelten Wahrscheinlichkeitsgesetzes die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers

$$\delta = c_1 \sigma_1 \pm c_2 \sigma_2$$

ableiten. Zu diesem Behuf eliminieren wir  $\sigma_2$  mittels der Substitution

$$\sigma_2 = \pm \frac{1}{c_2} (\delta - c_1 \sigma_1)$$

aus dem Exponenten der Wahrscheinlichkeit und bekommen

$$\begin{aligned} a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \sigma_1 \sigma_2 &= \left(\frac{a_2}{c_2^2}\right) \delta^2 + \left(a_1 + \frac{a_2 c_1^2}{c_2^2} \mp \frac{a_3 c_1}{c_2}\right) \sigma_1^2 \\ &+ \left(\pm \frac{a_3}{c_2} - \frac{2 a_2 c_1}{c_2^2}\right) \delta \sigma_1 \\ &= A_1 \delta^2 + A_2 \sigma_1 + A_3 \delta \sigma_1. \end{aligned}$$

Da man für  $d\sigma_2$  zu setzen hätte  $\pm \frac{d\delta}{c_2}$ , so ergibt sich

$$P(\delta, \sigma_1) = \frac{1}{2\pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3} (\pm c_2)} e^{-A_1 \delta^2 - A_2 \sigma_1^2 - A_3 \delta \sigma_1}.$$

Um aus diesem Ausdruck die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Abweichung  $\delta$  zu finden, erteilen wir der Abweichung  $\sigma_1$  alle nur möglichen Werte, währenddessen  $\delta$  als konstant ansehend. Es ist dies statthaft, weil zuvor  $\sigma_2$  eliminiert wurde. Infolge der vorläufigen Konstanz von  $\delta$  ist dann  $\sigma_2$  gezwungen, ständig ausgleichende Werte anzunehmen, so daß die Gleichung

$$\delta = c_1 \sigma_1 \pm c_2 \sigma_2$$

während des ganzen Integrationsprozesses befriedigt wird. Zur Durchführung der Integration setzen wir

$$\begin{aligned} A_1 \delta^2 + A_2 \sigma_1^2 + A_3 \delta \sigma_1 &= B_1 \delta^2 + (B_2 \delta + B_3 \sigma_1)^2 \\ &= (B_1 + B_2^2) \delta^2 + B_3^2 \sigma_1^2 + 2 B_2 B_3 \delta \sigma_1; \end{aligned}$$

es ergibt sich sodann das Gleichungssystem

$$B_1 + B_2^2 = A_1, \quad B_3^2 = A_2, \quad 2 B_2 B_3 = A_3,$$

aus welchem wir erhalten:

$$B_3 = \sqrt{A_2}, \quad B_2 = \frac{A_3}{2\sqrt{A_2}}, \quad B_1 = \frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2}$$

und somit

$$P(\delta, \sigma_1) = \frac{1}{2\pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3} (\pm c_2)} e^{-\frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2} \delta^2 - \left(\frac{A}{2\sqrt{A_2}} \delta + \sqrt{A_2} \sigma_1\right)^2}.$$

Setzen wir abkürzend

$$\frac{A_3}{2\sqrt{A_2}} \delta + \sqrt{A_2} \sigma_1 = \varphi,$$

so haben wir an Stelle des früher zu benutzenden  $d\sigma_1$  zu setzen  $\frac{d\varphi}{\sqrt{A_2}}$ . Für die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung  $\delta$  ergibt sich somit

$$P(\delta) = \frac{1}{2\pi s \sqrt{p_1 p_2 p_3} (\pm c_2 \sqrt{A_2})} e^{-\frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2} \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi^2} d\varphi,$$

und wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi^2} d\varphi = \sqrt{\pi}$ ,

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2s \sqrt{p_1 p_2 p_3} (\pm c_2 \sqrt{A_2})} e^{-\frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2} \delta^2}.$$

Wir finden weiterhin

$$\pm c_2 \sqrt{A_2} = \sqrt{a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 \mp a_3 c_1 c_2}$$

und

$$\frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2} = \frac{4 a_1 a_2 - a_3^2}{4(a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 \mp a_3 c_1 c_2)}.$$

Führen wir nun noch für  $a_1, a_2, a_3$  die Werte ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$2s \sqrt{p_1 p_2 p_3} (\pm c_2 \sqrt{A_2}) = \sqrt{2s [p_1(1-p_1)c_1^2 + p_2(1-p_2)c_2^2 \mp 2p_1 p_2 c_1 c_2]},$$

$$(a) \quad 4 a_1 a_2 - a_3^2 = \frac{1}{s^2 p_1 p_2 p_3},$$

$$\frac{4 A_1 A_2 - A_3^2}{4 A_2} = \frac{1}{2s [p_1(1-p_1)c_1^2 + p_2(1-p_2)c_2^2 \mp 2p_1 p_2 c_1 c_2]}.$$

Beiläufig sei bemerkt, daß die Beziehung (a) noch durch eine andere Berechnung gewonnen werden kann. Das Integral

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

hat nämlich den Wert

$$U = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{\sqrt{D}},$$

wobei ist

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{1}{2} a_3 \\ \frac{1}{2} a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - \frac{1}{4} a_3^2.$$

(Vergleiche auch Dienger, Die Laplacesche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen, Wien 1875). Die Wahrscheinlichkeit zweier Größen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , welche mit einer dritten  $\sigma_3$  der Bedingung

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

unterworfen sind, ist folglich (nach der Regel von Bayes) darstellbar durch den Ausdruck

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{4 a_1 a_2 - a_3^2}}{2\pi} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2},$$

welcher unter dem Namen „Fehlergesetz in der Ebene“ bekannt ist. (Siehe beispielsweise „Ausgleichsrechnung“ von Prof. Bauschinger im ersten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Seite 796; ferner Ch. M. Schols „Over de Theorie der Fouten in de



Ruimte en in het platte vlak“, sowie „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Prof. Hack, Seite 100.)

Wir kommen somit zu den noch der Verallgemeinerung fähigen Ergebnissen:

Besteht für zwei voneinander unabhängige Größen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  das gemeinsame Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2}}{2\pi} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2},$$

so unterliegt die Funktion

$$\delta = c_1 \sigma_1 \pm c_2 \sigma_2$$

dem Wahrscheinlichkeitsgesetze

$$(A) \quad P(\delta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 \delta^2},$$

in welchem die Präzision nach der Formel zu berechnen ist

$$\eta = \frac{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2}}{2 \sqrt{a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 + a_3 c_1 c_2}}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit der Abweichung

$$\delta = N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D + G_2) - \sigma_2(G_1 - G_2)$$

finden wir darnach das Gesetz (A) mit der Präzision

$$\eta = 1 : \sqrt{2s[p_1(1-p_1)(D+G_2)^2 + p_2(1-p_2)(G_1-G_2)^2 + 2p_1p_2(D+G_2)(G_1-G_2)]}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der zu erwartende Verlust  $N(\sigma_1, \sigma_2)$  zwischen die Grenzen 0 und  $R$  fällt, beträgt also

$$\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^R e^{-\eta^2 \delta^2} d\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{R\eta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Phi(R\eta).$$

Setzen wir  $R\eta = \gamma$ , so folgt für  $R$  die Formel

$$(1) \quad R = \gamma \sqrt{2s[p_1(1-p_1)(D+G_2)^2 + p_2(1-p_2)(G_1-G_2)^2 + 2p_1p_2(D+G_2)(G_1-G_2)]} \\ = \gamma \sqrt{2s\varrho^2},$$

welche wir als Risiko bezeichnen wollen.

Es gibt nun noch andere Arten von Risikoverträgen. Eine Gattung, welche größere Bedeutung hat, ist von der Beschaffenheit, daß

mit dem Eintritte des Ereignisses  $E_1$  der Schaden  $D_1$ ,

„ „ „ „ „  $E_2$  „ „  $D_2$ ,

„ „ „ „ „  $E_3$  „ Gewinn  $G$

verbunden ist.

Hat nun ein Unternehmer wiederum  $s$  gleichartige Verträge abgeschlossen, so besteht für ihn die Wahrscheinlichkeit  $P(s_1, s_2, s_3)$ , den Verlust

$$N_1(s_1, s_2) = s_1 D_1 + s_2 D_2 - s_3 G = s_1 D_1 + s_2 D_2 - (s - s_1 - s_2) G \\ = s_1(D_1 + G) + s_2(D_2 + G) - sG$$

zu erleiden. Derselbe stellt aber einen Gewinn dar, sofern die Ungleichung statthat

$$s_1(D_1 + G) + s_2(D_2 + G) < sG.$$

In der Voraussetzung, daß auch diese Vertragsart der Spielregel genügt, daß also ist

$$p_1 D_1 + p_2 D_2 = p_3 G,$$

finden wir

$$\begin{aligned} N_1(sp_1, sp_2) &= sp_1(D_1 + G) + sp_2(D_2 + G) - sG \\ &= s[p_1 D_1 + p_2 D_2 - (1 - p_1 - p_2)G] = s[p_1 D_1 + p_2 D_2 - p_3 G] = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir in Übereinstimmung mit den vorangehenden Betrachtungen  $s_1 = sp_1 + \sigma_1$  und  $s_2 = sp_2 + \sigma_2$ , so folgt

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D_1 + G) + \sigma_2(D_2 + G).$$

Gemäß den bereits angestellten Berechnungen besteht alsdann die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} \Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt,$$

daß der Verlust  $N_1(\sigma_1, \sigma_2)$  innerhalb der Grenzen 0 und  $R$  liegt. Das Risiko dieser Vertragsart hat also die Form

$$\begin{aligned} &= \frac{\gamma}{\eta_1} \\ \text{(II)} \quad &= \gamma \sqrt{2s[p_1(1-p_1)(D_1+G)^2 + p_2(1-p_2)(D_2+G)^2 - 2p_1p_2(D_1+G)(D_2+G)]} \\ R &= \gamma \sqrt{2s\sigma_1^2}. \end{aligned}$$

Nach der Wahl der Grenze  $\gamma$  der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

können wir auch bei den hier betrachteten Verträgen das Risiko in Analogie zur Fehlertheorie verschieden benennen.

Für $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,70711$	heiße das Risiko mittleres,
„ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	„ „ „ durchschnittliches
„ $\gamma = 0,47694$	„ „ „ wahrscheinliches,
„ $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0,28209$	„ „ „ mathematisches.

Um die so benannten Risikoarten zu erhalten, hat man also die absoluten Risikobeträge  $\sqrt{\xi \rho^2}$  oder  $\sqrt{\xi \rho_1^2}$  mit den Koeffizienten

$$\gamma \sqrt{2} = 1 \quad (\text{mittl. R.})$$

$$\gamma \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,79788 \quad (\text{durschn. R.})$$

$$\gamma \sqrt{2} = 0,47694 \sqrt{2} = 0,67449 \quad (\text{wahrsch. R.})$$

$$\gamma \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,39894 \quad (\text{mathem. R.})$$

zu multiplizieren.

Die Wahrscheinlichkeiten, die den hier angeführten Werten von  $\gamma$  entsprechen, haben der Reihe nach die Größe

$$0,68467; \quad 0,57505; \quad 0,5; \quad 0,31005.$$

Von den verschiedenen Risikoarten erweckt das an letzter Stelle genannte Risiko unser besonderes Interesse. Darstellbar durch das Integral

$$E = \int_0^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} u \, du,$$

darf es wohl in Anlehnung an die Definitionen von J. Brodén (Bemerkungen über Mengenlehre und Wahrscheinlichkeitstheorie, Malmö 1901) auch als der wahrscheinlichste Wert des Risikos bezeichnet werden. Ein Verdienst Hattendorfs ist es, die vorstehende Formel, welche wir auch bei Wittstein (Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften) finden, durch Ausführung einer  $n$ -fachen Integration dargestellt zu haben. Für die hier betrachteten Vertragsarten ist die Herleitung eine weit schwierigere. Betrachten wir die erste derselben, so besteht die Aufgabe, die Integration

$$K \iint e^{-\alpha_1 \sigma_1^2 - \alpha_2 \sigma_2^2 - \alpha_3 \sigma_1 \sigma_2} (c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

derart vorzunehmen, daß den Ungleichungen

$$\infty \geq c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 \geq 0$$

ständig genügt wird. Zur Ausführung der Lösung setzen wir zunächst

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = \lambda_1 [\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \sigma_2] - \lambda_2 [\sqrt{\alpha_2} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_2} \sigma_2],$$

wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei Koeffizienten darstellen, deren Bedeutung aus den folgenden Vornahmen hervorgeht. Zur Bestimmung der unbekannt angenommenen Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dient das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \sqrt{\alpha_1} - \lambda_2 \sqrt{\alpha_2} = c_1$$

$$\lambda_1 \sqrt{\alpha_1} - \lambda_2 \sqrt{\alpha_2} = -c_2,$$

aus welchem man erhält

$$\lambda_1 = \frac{c_1 \sqrt{\alpha_2} + c_2 \sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1 \sqrt{\alpha_1} + c_2 \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}.$$

Wir finden nun für das Risiko die Integraldifferenz

$$E = K\lambda_1 \int \int e^{-\alpha_1 \sigma_1^2 - \alpha_2 \sigma_2^2 - \alpha_3 \sigma_1 \sigma_2} [\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \alpha_2] d\sigma_1 d\sigma_2 \\ - K\lambda_2 \int \int e^{-\alpha_2 \sigma_1^2 - \alpha_1 \sigma_2^2 - \alpha_3 \sigma_1 \sigma_2} [\sqrt{\alpha_2} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_2} \sigma_2] d\sigma_1 d\sigma_2,$$

welche wir umgestalten in

$$E = K\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_2^2} d\sigma_2 \int_{\frac{c_2}{c_1} \sigma_2}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \alpha_2)^2} [\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \alpha_2] d\sigma_1 \\ + K\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1^2} d\sigma_1 \int_{\frac{c_1}{c_2} \sigma_1}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha_2} \sigma_2 + \sqrt{\alpha_2} \alpha_1)^2} [\sqrt{\alpha_2} \sigma_2 + \sqrt{\alpha_2} \alpha_1] d\sigma_2 \\ = K(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2).$$

Aus dieser Umformung ist ersichtlich, daß die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  durch die Gleichungen

$$\alpha_3 = 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \alpha_3 = 2\sqrt{\alpha_2 \alpha_1}$$

bestimmt sind. Das Vorzeichen des zweiten Doppelintegrals wurde in das entgegengesetzte verwandelt, weil bei diesem zunächst nach der zweiten Variablen integriert wird. Dabei erhält aber die erste Variable das entgegengesetzte Vorzeichen, und die Gleichung

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = \lambda_1 [\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \alpha_2] - \lambda_2 [\sqrt{\alpha_2} \sigma_2 + \sqrt{\alpha_2} \alpha_1]$$

würde sonst nicht mehr befriedigt werden. Die Doppelintegrale  $U_1$  und  $U_2$  sind von gleicher Beschaffenheit, so daß es genügt, eins zu betrachten. Da bei der Innenintegration von  $U_1$  die Variable  $\sigma_1$  von  $\frac{c_2}{c_1} \sigma_2$  bis  $\infty$  zu variieren ist, so hat man die funktionale Variable  $\sqrt{\alpha_1} \sigma_1 + \sqrt{\alpha_1} \alpha_2$  von  $(\frac{c_2}{c_1} \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_1}) \sigma_2$  bis  $\infty$  zu integrieren. Es ergibt sich hiernach

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_2^2} d\sigma_2 \int_{(\frac{c_2}{c_1} \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_1}) \sigma_2}^{\infty} e^{-z^2} z dz.$$

Weil nun  $\int_{\gamma}^{\infty} e^{-z^2} z dz = \frac{1}{2} e^{-\gamma^2}$ , so folgt ferner

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[ \alpha_2 - \alpha_1 + \left( \frac{c_2 \sqrt{\alpha_1}}{c_1} + \sqrt{\alpha_1} \right)^2 \right] \sigma_2^2} d\sigma_2 \\ = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 + \left( \frac{c_2 \sqrt{\alpha_1}}{c_1} + \sqrt{\alpha_1} \right)^2}} = \frac{c_1}{2\sqrt{\alpha_1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2 + \alpha_2 c_1 c_2}}.$$

Durch entsprechende Berechnungen findet man

$$U_2 = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_1 - a_2 + \left(\frac{c_1\sqrt{a_2}}{c_2} + \sqrt{a_2}\right)^2}} = \frac{c_2}{2\sqrt{a_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 + a_3 c_1 c_2}}.$$

Substituiert man nun die Werte in

$$E = K(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2),$$

so findet man

$$E = \frac{K\sqrt{\pi} [\sqrt{a_2} c_1 (c_1 \sqrt{a_2} + c_2 \sqrt{a_2}) + \sqrt{a_1} c_2 (c_1 \sqrt{a_1} + c_2 \sqrt{a_1})]}{2 (\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{a_1 a_2}) \sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 + a_3 c_1 c_2}},$$

worin zu setzen ist

$$\sqrt{a_2} c_1 (c_1 \sqrt{a_2} + c_2 \sqrt{a_2}) + \sqrt{a_1} c_2 (c_1 \sqrt{a_1} + c_2 \sqrt{a_1}) = a_2 c_1^2 + a_1 c_2^2 + a_3 c_1 c_2$$

und

$$(\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{a_1 a_2}) \sqrt{a_1 a_2} = a_1 a_2 - \frac{1}{4} a_3^2.$$

Mithin bekommt man

$$E = \frac{2K\sqrt{\pi}}{4a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 + a_3 c_1 c_2}.$$

Es war aber

$$K = \frac{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2}}{2\pi},$$

daher kommt

$$E = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4(a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 + a_3 c_1 c_2)}{4a_1 a_2 - a_3^2}}.$$

Durch eine analoge Untersuchung gelangt man zu dem mathematischen Risiko der zweiten Vertragsart. Dasselbe wird durch die Formel

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4(a_1 c_2^2 + a_2 c_1^2 - a_3 c_1 c_2)}{4a_1 a_2 - a_3^2}}$$

zum Ausdrucke gebracht.

Viel einfacher ist die Darstellung des sogenannten mittleren Risikos, welches in Analogie zum mittleren Fehler durch das Integral

$$M^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} u^2 du$$

veranschaulicht wird. Für die erste Vertragsart setze man

$$M^2 = \frac{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1 \sigma_1^2 - a_2 \sigma_2^2 - a_3 \sigma_1 \sigma_2} (c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2)^2 d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Nun findet man bei Hack (S. 101) die Integrale

$$\frac{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\sigma_1^2 - a_2\sigma_2^2 - a_3\sigma_1\sigma_2} \sigma_1^2 d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{2a_2}{4a_1a_2 - a_3^2},$$

$$\frac{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\sigma_1^2 - a_2\sigma_2^2 - a_3\sigma_1\sigma_2} \sigma_2^2 d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{2a_1}{4a_1a_2 - a_3^2},$$

$$\frac{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\sigma_1^2 - a_2\sigma_2^2 - a_3\sigma_1\sigma_2} \sigma_1\sigma_2 d\sigma_1 d\sigma_2 = -\frac{a_3}{4a_1a_2 - a_3^2},$$

deren Anwendung auf die Formel führt

$$M = \sqrt{\frac{2(a_1c_2^2 + a_2c_1^2 + a_3c_1c_2)}{4a_1a_2 - a_3^2}}.$$

Für die zweite Vertragsart ergibt sich durch eine entsprechende Berechnung

$$M_1 = \sqrt{\frac{2(a_1c_2^2 + a_2c_1^2 - a_3c_1c_2)}{4a_1a_2 - a_3^2}}.$$

Das im Vorangehenden für eine Gruppe gleichartiger Verträge Besprochene behält auch Gültigkeit, wenn ein Unternehmer  $m$  verschiedene Gruppen von gleichartigen Verträgen unterhält. Die als sehr groß zu behandelnden Anzahlen der Verträge, welche die einzelnen Gruppen bilden, seien der Reihe nach

$${}^{(1)}s, \quad {}^{(2)}s, \quad \dots, \quad {}^{(m-1)}s, \quad {}^{(m)}s.$$

Bezeichnet alsdann  $x$  eine Zahl aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis  $m$ , so gelte die Festsetzung, daß in der  $x$ -ten Gruppe für jeden der  ${}^{(x)}s$  Verträge

mit der Wahrscheinlichkeit  ${}^{(x)}p_1$  der Verlust  ${}^{(x)}D$ , bzw. der Verlust  ${}^{(x)}D_1$ ,  
 „ „ „ „  ${}^{(x)}p_2$  „ Gewinn  ${}^{(x)}G_1$  „ „ „  ${}^{(x)}D_2$ ,  
 „ „ „ „  ${}^{(x)}p_3$  „ „ „  ${}^{(x)}G_2$  „ „ „ Gewinn  ${}^{(x)}G$   
 zu erwarten ist.

Ein Verlust oder Gewinn in dieser Gruppe beziffert sich sonach auf

$${}^{(x)}\delta = {}^{(x)}N(\sigma_1, \sigma_2) = {}^{(x)}\sigma_1({}^{(x)}D + {}^{(x)}G_2) - {}^{(x)}\sigma_2({}^{(x)}G_1 - {}^{(x)}G_2),$$

bzw. auf

$${}^{(x)}\delta_1 = {}^{(x)}N_1(\sigma_1, \sigma_2) = {}^{(x)}\sigma_1({}^{(x)}D_1 + {}^{(x)}G) + {}^{(x)}\sigma_2({}^{(x)}D_2 + {}^{(x)}G).$$

Erteilen wir nun  $x$  alle Werte von 1 bis  $m$ , so erhalten wir für den gesamten Verlust oder Gewinn den Betrag

$$A = \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}N(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}\delta.$$

Die Wahrscheinlichkeit dieser Abweichung beträgt bekanntlich

$$W = \frac{\prod_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}\eta}{(\sqrt{\pi})^m} e^{-\sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}\eta^2 {}^{(x)}\delta^2},$$

wobei gemäß unseren Untersuchungen zu setzen ist entweder

$${}^{(x)}\eta = \frac{1}{\sqrt{2 {}^{(x)}s {}^{(x)}\varrho^2}} \quad \text{oder} \quad {}^{(x)}\eta = \frac{1}{\sqrt{2 {}^{(x)}s {}^{(x)}\varrho_1^2}},$$

und die Größen  ${}^{(x)}\varrho^2$  und  ${}^{(x)}\varrho_1^2$  die Bedeutung haben, die ihnen nach den Formeln (I) und (II) zukommen.

Aus dem vorstehenden Wahrscheinlichkeitsprodukte findet man, wie beispielsweise auch Lindelöf (Über die Ermittlung der Genauigkeit der Beobachtungen bei der Analyse periodischer Erscheinungen und in der Methode der kleinsten Quadrate, Helsingfors 1901) gezeigt hat, die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes

$$A = \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}\delta$$

in dem bekannten Ausdrucke

$$P(A) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 A^2},$$

in welchem zu setzen ist

$$H = \frac{1}{\sqrt{\sum_{x=1}^{x=m} \frac{1}{{}^{(x)}\eta^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s {}^{(x)}\varrho^2}}.$$

Mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma=HK} e^{-t^2} dt$$

kann man sonach erwarten, daß ein Gesamtgewinn oder Verlust bis zu  $K$  Mark eintritt. Dabei wird  $K$  bestimmt durch die Formel

$$K = \frac{\gamma}{H} = \gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s {}^{(x)}\varrho^2}.$$

Wie wir sehen, ist  $K$  die Größe, die wir früher als Risiko bezeichneten. Setzen wir daher

$$R = \frac{\gamma}{H},$$

so ergibt sich auch

$$H \cdot K = \frac{\gamma \cdot K}{R} \quad (1)$$

1) Die Größen  $K$  und  $R$  stellen die Risikobeträge desselben Versicherungsbestandes dar; sie unterscheiden sich aber voneinander infolge ungleicher Werte

Da Risikoberechnungen nur zum Rückhalt gegen etwaige Leistungen vorzunehmen sind, welche die rechnungsmäßigen Deckungsmittel übersteigen, so hat man sich eigentlich nur mit den einseitigen Wahrscheinlichkeiten zu befassen.

Es beträgt darnach die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schaden höchstens die Summe  $K$  erreicht,

$$\Psi\left(\frac{\gamma K}{R}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\gamma K}{R}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\gamma K}{R}\right).$$

Ferner hat die Wahrscheinlichkeit, daß der Schaden größer als die Summe  $K$  ist, den Wert

$$\Theta_1\left(\frac{\gamma \cdot K}{R}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\gamma K}{R}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma K}{R}\right)\right].$$

Diese Wahrscheinlichkeit benutzte Schönwiese zur Berechnung der Risikorücklage. (Österreichische Versicherungszeitung, XXIII. Jahrgang Nr. 48).

Rechnet man eher mit einem Gewinn beliebiger Größe, gibt aber der Möglichkeit Raum, daß allenfalls ein Verlust bis zur Höhe von  $K$  Mark eintreten kann, so hat man die Wahrscheinlichkeit anzuwenden

$$\Theta_2\left(\frac{\gamma K}{R}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\gamma K}{R}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\gamma K}{R}\right)\right],$$

mittelst derer Dr. Paul Radtke (Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten, S. 18) eine vergleichende Statistik aufstellte.

An diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Erläuterungen reihe sich noch der Hinweis, daß in Anlehnung an Bienaymé (s. Mayer-Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1879; ferner J. W. Hultman, Minsta Qvadratmetoden, Stockholm 1860) die Wahrscheinlichkeit

$$\Omega(\gamma) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\gamma} u^{m-1} e^{-u^2} du$$

des Sicherheitskoeffizienten  $\gamma$ . Setzt man hiernach  $K = \nu R$ , so erhält man  $HK = \gamma \cdot \nu$ , und es ist  $\gamma \nu$  das Argument der Wahrscheinlichkeit einer Abweichung bis zur Größe des  $\nu$ -fachen Risikos  $R$ . Da man setzen kann  $\gamma \cdot \nu = \gamma'$ , so ist  $\nu$  bestimmt durch den Quotienten  $\frac{\gamma'}{\gamma}$ .



besteht, oder die gleichwertige

$$\Omega(\gamma) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z} dz,$$

daß beispielsweise in der  $x$ -ten Gruppe der Verlust den Betrag

$$\frac{\gamma}{\binom{x}{\eta}} = \gamma \sqrt{2 \binom{x}{\eta} \rho^2}$$

oder den Betrag

$$\frac{\gamma}{\binom{x}{\eta_1}} = \gamma \sqrt{2 \binom{x}{\eta_1} \rho_1^2}$$

nicht überschreiten werde.

Unsere Untersuchungen eignen sich außerordentlich zur Bemessung des jährlichen Risikos verwickelterer Versicherungsformen mit und ohne Rückgewähr. Wir denken uns eine Versicherung, welche auf den alljährlich möglichen Eintritt des Ereignisses  $E_1$  abgeschlossen ist. Tritt das Ereignis  $E_1$  ein, dessen Wahrscheinlichkeit für einen  $x$ -Jährigen  $p_x^{(1)}$  ist, so wird der Betrag  $K_{x+1}$  gezahlt. Tritt das Ereignis  $E_2$  ein, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_x^{(2)}$  ist, so erlischt die Versicherung, ohne daß eine Leistung erfolgt. Sofern keines der beiden Ereignisse eintritt, liege der Fall der Beharrung vor, d. h. die Versicherung laufe weiter.

Die einmalige Prämie dieser Versicherung wird berechnet nach der Formel

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{x=0}^{x=n-1} x | p_x^{(1)} v^{x+1} K_{x+x+1} \quad \left( {}_x p_x^{(1)} = {}_{x-1} p_x^{(2)} p_{x+x}^{(1)}, \quad {}_0 p_x^{(1)} = p_x^{(1)}, \quad {}_{x-1} p_x^{(2)} = \prod_{t=0}^{t=x-1} p_{x+t}^{(2)} \right).$$

Die zur Bemessung der jährlichen Beitragszahlung notwendige Rente ergibt sich aus der Formel

$$a_x = 1 + \sum_{x=0}^{x=n-1} {}_x p_x^{(3)} v^{x+1}, \quad ({}_0 p_x^{(3)} = p_x^{(3)}),$$

so daß die jährliche Prämie durch den Quotienten

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\mathfrak{A}_x}{a_x}$$

dargestellt wird. Die Reserve am Schlusse des  $(x+1)$ ten Versicherungsjahres beträgt

$${}_x V_{x+1} = \mathfrak{A}_{x+x+1} - \mathfrak{B}_x a_{x+x+1},$$

während die ihr entsprechende aufgezinste Risikoprämie den Wert hat

$${}_x \Pi_{x+1} = p_{x+x}^{(1)} (K_{x+x+1} - {}_x V_{x+1}) - p_{x+x}^{(2)} {}_x V_{x+1}.$$

Setzen wir mit Beachtung der Gleichung

$$\begin{aligned} N(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1(D + G_2) - \sigma_2(G_1 - G_2) \\ D &= K_{x+x+1} - ({}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1}), \\ G_1 &= {}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1}, \\ G_2 &= r_x\Pi_{x+1}, \end{aligned}$$

so erhalten wir durch Substitution dieser Werte in die Formel

$$\begin{aligned} s^2 &= p_1(1 - p_1)(D + G_2)^2 + p_2(1 - p_2)(G_1 - G_2)^2 \\ &\quad + 2p_1p_2(D + G_2)(G_1 - G_2) \end{aligned}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} s^2 &= p_{x+x}^{(1)}(1 - p_{x+x}^{(1)})(K_{x+x+1} - {}_xV_{x+1})^2 + p_{x+x}^{(2)}(1 - p_{x+x}^{(2)})({}_xV_{x+1})^2 \\ &\quad + 2p_{x+x}^{(1)}p_{x+x}^{(2)}(K_{x+x+1} - {}_xV_{x+1}){}_xV_{x+1}. \end{aligned}$$

Diese der Risikoberechnung einer größeren Anzahl gleichartiger Verträge eigentümliche Größe kann als das mittlere Risiko der einzelnen Versicherung bezeichnet werden. In Nr. 95 des 49. Jahrganges der deutschen Versicherungszeitung (1908) habe ich  $s^2$  für die einfache Invaliditätsrente aufgestellt, indem ich das Quadrat des jährlichen Risikos als die Größe definierte, welche sich ergibt, wenn die Gewinn- und Verlustbeträge der Gewinn- oder Verlustgleichung

$$\begin{aligned} p_{x+x}^{(1)} \{ - [K_{x+x+1} - ({}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1})] \} + p_{x+x}^{(2)} ({}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1}) \\ + p_{x+x}^{(3)} (r_x\Pi_{x+1}) = 0 \end{aligned}$$

quadriert werden. In der erwähnten Arbeit fand ich durch Umformung aus der Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} ({}_xM_{x+x})^2 &= p_{x+x}^{(1)} [K_{x+x+1} - ({}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1})]^2 \\ &\quad + p_{x+x}^{(2)} ({}_xV_{x+1} + r_x\Pi_{x+1})^2 + p_{x+x}^{(3)} (r_x\Pi_{x+1})^2 \end{aligned}$$

die Formel

$$\begin{aligned} ({}_xM_{x+x})^2 &= p_{x+x}^{(1)}(1 - p_{x+x}^{(1)})(K_{x+x+1})^2 + p_{x+x}^{(3)}(1 - p_{x+x}^{(3)})({}_xV_{x+1})^2 \\ &\quad - p_{x+x}^{(1)}p_{x+x}^{(3)}(2K_{x+x+1}{}_xV_{x+1}). \end{aligned}$$

Setzen wir in derselben

$$p_{x+x}^{(3)}(1 - p_{x+x}^{(3)}) = (1 - p_{x+x}^{(1)} - p_{x+x}^{(2)})(p_{x+x}^{(1)} + p_{x+x}^{(2)})$$

und

$$p_{x+x}^{(1)}p_{x+x}^{(3)} = p_{x+x}^{(1)}(1 - p_{x+x}^{(1)} - p_{x+x}^{(2)}),$$

so ergibt sich durch einfache Umformungen

$$\begin{aligned} ({}_xM_{x+x})^2 &= p_{x+x}^{(1)}(1 - p_{x+x}^{(1)})(K_{x+x+1} - {}_xV_{x+1})^2 + p_{x+x}^{(2)}(1 - p_{x+x}^{(2)})({}_xV_{x+1})^2 \\ &\quad + 2p_{x+x}^{(1)}p_{x+x}^{(2)}(K_{x+x+1} - {}_xV_{x+1}){}_xV_{x+1}. \end{aligned}$$

Wir finden also

$$s^2 = ({}_xM_{x+x})^2.$$

Diese Übereinstimmung zwischen der elementaren und der analytischen Methode wird durch die Untersuchungen des kommenden Abschnitts noch bestätigt. Die dort vorgenommenen Entwicklungen zeigen deutlich den Zusammenhang der als Risiko des einzelnen Vertrages bezeichneten Größe mit dem analytischen Risiko.

Zum Schlusse betrachten wir noch den Fall, daß von dem Eintritte des Ereignisses  $E_1$  die Summe  $K_{x+\alpha}^{(1)}$ , von dem Eintritte des Ereignisses  $E_2$  aber die Summe  $K_{x+\alpha}^{(2)}$  abhängig ist ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ ).

Die einmalige Prämie dieser Versicherung läßt sich durch die Formel

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{\alpha=0}^{x-n-1} v^{\alpha+1} ({}_x p_x^{(1)} K_{x+\alpha+1}^{(1)} + {}_x p_x^{(2)} K_{x+\alpha+2}^{(2)})$$

veranschaulichen. Man kann dieselbe noch ausgestalten durch Hinzufügung des Gliedes

$${}_{n-1} p_x^{(3)} v^n K_{x+n}^{(3)}.$$

Auf Grund desselben hätte der Versicherte bei Erreichung des Alters  $x+n$  Anspruch auf die Summe  $K_{x+n}^{(3)}$ . Weiterhin bestehen die Formeln

$${}_x V_{x+1} = \mathfrak{A}_{x+x+1} - \mathfrak{B}_x a_{x+x+1}$$

und

$$r_x \Pi_{x+1} = p_{x+\alpha}^{(1)} (K_{x+\alpha+1}^{(1)} - {}_x V_{x+1}) + p_{x+\alpha}^{(2)} (K_{x+\alpha+1}^{(2)} - {}_x V_{x+1}).$$

Mit Beachtung der Gleichung

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D_1 + G) + \sigma_2(D_2 + G)$$

setzen wir

$$D_1 = K_{x+\alpha+1}^{(1)} - ({}_x V_{x+1} + r_x \Pi_{x+1})$$

$$D_2 = K_{x+\alpha+1}^{(2)} - ({}_x V_{x+1} + r_x \Pi_{x+1})$$

$$G = r_x \Pi_{x+1}$$

und bekommen durch Einführung dieser Werte in die Formel

$$s_1^2 = p_1(1-p_1)(D_1 + G)^2 + p_2(1-p_2)(D_2 + G)^2 - 2p_1p_2(D_1 + G)(D_2 + G)$$

den der betrachteten Versicherung entsprechenden Ausdruck

$$s_1^2 = p_{x+\alpha}^{(1)}(1-p_{x+\alpha}^{(1)})(K_{x+\alpha+1}^{(1)} - {}_x V_{x+1})^2 + p_{x+\alpha}^{(2)}(1-p_{x+\alpha}^{(2)})(K_{x+\alpha+1}^{(2)} - {}_x V_{x+1})^2 - 2p_{x+\alpha}^{(1)}p_{x+\alpha}^{(2)}(K_{x+\alpha+1}^{(1)} - {}_x V_{x+1})(K_{x+\alpha+1}^{(2)} - {}_x V_{x+1}).$$

Die soeben vorgenommenen Berechnungen sind jedoch nur richtig, sofern ist

$$K_{x+\alpha+1}^{(1)} > {}_x V_{x+1} + r_x \Pi_{x+1},$$

$$K_{x+\alpha+1}^{(2)} > {}_x V_{x+1} + r_x \Pi_{x+1}.$$

In der Praxis kann häufig der Fall auftreten, daß zwar ist

$$K_{x+x+1}^{(1)} > {}_xV_{x+1} + r_x \Pi_{x+1},$$

indes

$$K_{x+x+1}^{(2)} < {}_xV_{x+1} + r_x \Pi_{x+1};$$

dann haben wir es wiederum mit einem Risikovertrage der ersten Gattung zu tun. Behufs Berechnung des Risikos denken wir uns in

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D + G_2) - \sigma_2(G_1 - G_2)$$

die Werte eingesetzt

$$D = K_{x+x+1}^{(1)} - ({}_xV_{x+1} + r_x \Pi_{x+1})$$

$$G_1 = ({}_xV_{x+1} + r_x \Pi_{x+1}) - K_{x+x+1}^{(2)}$$

$$G_2 = r_x \Pi_{x+1}.$$

Aus der Formel

$$s^2 = p_1(1 - p_1)(D + G_2)^2 + p_2(1 - p_2)(G_1 - G_2)^2 \\ + 2p_1p_2(D + G_2)(G_1 - G_2)$$

finden wir alsdann

$$s^2 = p_{x+x}^{(1)}(1 - p_{x+x}^{(1)})(K_{x+x+1}^{(1)} - {}_xV_{x+1})^2 \\ + p_{x+x}^{(2)}(1 - p_{x+x}^{(2)})({}_xV_{x+1} - K_{x+x+1}^{(2)})^2 \\ + 2p_{x+x}^{(1)}p_{x+x}^{(2)}(K_{x+x+1}^{(1)} - {}_xV_{x+1})({}_xV_{x+1} - K_{x+x+1}^{(2)}).$$

Wie diese verallgemeinerten Beispiele erkennen lassen, eignen sich unsere Formeln recht gut zur Berechnung des jährlichen Risikos von Versicherungen auf den Invaliditätsfall mit und ohne Rückgewähr beim Tode als Aktiver, zweitens von Heiratsaussteuerversicherungen für Mädchen mit und ohne Rückgewähr beim Tode vor der Eheschließung, drittens, für besondere Arten der Junggesellenversicherung und schließlich für temporäre und alternative Todesfallversicherungen bei Verwendung von Stornotafeln.

## Zweiter Teil.

Während wir im Vorangehenden das Risiko auf kombinatorischer Grundlage darstellten, also beispielsweise nach dem Vorgange von Wittstein und Hattendorf und in Anlehnung an die auf das Bernoullische Theorem gestützten Betrachtungen über die mathematische Hoffnung im Lehrbuche von Meyer-Czuber, wollen wir nun in Kürze zeigen, daß wir dieselben Formeln und entsprechende allgemeinere finden, wenn wir die Laplacesche Methode zur Anwendung bringen. Dieses Verfahren, welches ebenfalls in dem bereits erwähnten Ab-

schnitte des Meyer-Czuberschen Lehrbuches zur Besprechung kommt, ist beispielsweise auch von Dienger (vgl. Dr. Karl Wagner: Das Problem vom Risiko) und von Küttner (Das Risiko der Lebensversicherungs-Anstalten und Unterstützungskassen) angewendet worden. Zur Herleitung von Formen des Fehlergesetzes dient es N. Sabudski (Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Ritter von Eberhard) und dem schwedischen Astronomen C. V. L. Charlier (Archiv för matematik, astronomie o. fysik, Bd. 2), während Norbert Herz (Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung) das Laplacesche Fehlergesetz selbst in dieser Weise darstellt. In den soeben angeführten Werken von Meyer-Czuber, Sabudski und N. Herz begegnet das Verfahren übrigens noch des öfteren bei der Behandlung anderer Aufgaben. Auch E. Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 2 das Theorem von Poisson) und A. A. Markoff (Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann § 24, Ein verallgemeinertes Würfelproblem) bedienen sich desselben. Von den älteren Werken ist vor allem das Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Poisson zu nennen. Ein Verdienst von Poisson ist es, die Laplacesche Methode vervollkommenet und eine größere Zahl von Anwendungen gegeben zu haben, die allerdings mehr oder weniger miteinander verwandt sind. Einer der ersten deutschen Mathematiker, welche mit den Schöpfungen des Laplace und Poisson erfolgreich arbeiteten, war Bessel. Er erfand das nach ihm benannte Fehlergesetz, zu dessen Darstellung er eine besondere Methode des Diskontinuitätsfaktors benutzte (Schumachers Astronomische Nachrichten, Bd. 15, Altona 1838). Eine modernisierte Herleitung dieses Diskontinuitätsfaktors findet man in dem bereits genannten Werke von Czuber (Nr. 126, Gesetz, welchem eine lineare Funktion unabhängiger Beobachtungsfehler folgt) und bei F. Hack (§ 24, Hilfssätze über bestimmte Integrale).

Ehe wir uns jedoch der Besprechung des Risikos nach der Laplaceschen oder französischen Methode zuwenden, erscheint es noch bemerkenswert, daß wir bereits die Wahrscheinlichkeit  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  nach diesem Verfahren hätten ermitteln können. Wir betrachten die erzeugende Funktion

$$X = (p_1 e^{u^2} + p_2 e^{\sigma^2} + p_3)^n$$

und entwickeln dieselbe in eine Reihe, welche nach Potenzen der Zahl  $e$  fortschreitet. Das Ergebnis dieser Entwicklung sei

$$\sum P(s', s'') e^{(s'u + s''\sigma)^2}$$

wo  $P(s', s'')$  die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß das Ereignis  $E_1$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ist,  $s'$  mal, und das Ereignis  $E_2$ , dessen

Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist,  $s''$  mal eintritt. Um nun die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß das Ereignis  $E_1$   $s_1$  mal und das Ereignis  $E_2$   $s_2$  mal eintritt, bilden wir die Gleichung

$$\Sigma P(s', s'') e^{(s' - s_1)u i + (s'' - s_2)v i} = X e^{-(s_1 u + s_2 v) i}.$$

Integrieren wir diese sowohl nach  $u$  als nach  $v$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$ , so ergibt sich

$$P(s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(s_1 u + s_2 v) i} du dv$$

als Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Für jede ganze Zahl  $a$  ist nämlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm a \omega i} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos a \omega \pm i \sin a \omega) d\omega = \frac{2}{a} \sin a \pi = 0,$$

und andererseits

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi, \quad \text{so wie} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du dv = (2\pi)^2.$$

Um für die Wahrscheinlichkeit  $P(s_1, s_2)$  einen geeigneten Näherungswert zu erhalten, setzen wir

$$\begin{aligned} X &= [p_1(1 + ui - \frac{1}{2}u^2 - \dots) + p_2(1 + vi - \frac{1}{2}v^2 - \dots) + p_3]^s \\ &= [1 + (p_1 u + p_2 v)i - \frac{1}{2}(p_1 u^2 + p_2 v^2) - \dots]^s \\ \ln X &= s \ln [1 + (p_1 u + p_2 v)i - \frac{1}{2}(p_1 u^2 + p_2 v^2) + \dots] \\ &= s(p_1 u + p_2 v)i - \frac{s}{2}(p_1 u^2 + p_2 v^2) + \frac{s}{2}(p_1 u + p_2 v)^2 \\ &= (s p_1 u + s p_2 v)i - \frac{s}{2} p_1(1 - p_1)u^2 - \frac{s}{2} p_2(1 - p_2)v^2 - s p_1 p_2 u i v i \\ &= \Omega, \end{aligned}$$

so daß sich die Annäherung ergibt

$$X = e^{\Omega}.$$

Setzen wir für  $X$  den gefundenen Wert in die Formel für  $P(s_1, s_2)$ , so gelangen wir zu der Näherungsformel

$$P(s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Omega - (s_1 u + s_2 v) i} du dv.$$

In der Annahme, daß der Integrand bereits für mäßige Werte von  $u$  und  $v$  sehr klein ist, erweitern wir die Integralgrenzen bis  $-\infty$  und  $+\infty$ . Zunächst  $u$  als konstant ansehend, können wir das Doppelintegral in der Form schreiben

$$P(s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\infty} e^{(s p_2 - s_1 u i - \frac{s}{2} p_1(1 - p_1)u^2)} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{((s p_2 - s_2) - s p_1 p_2 u i) v i - \frac{s}{2} p_2(1 - p_2)v^2} dv.$$

Weil nun ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm bxi - ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} P(s_1, s_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(sp_1 - s_1)ui - \frac{s}{2} p_1 (1 - p_1) u^2} du \sqrt{\frac{\pi}{\frac{s}{2} p_2 (1 - p_2)}} e^{-\frac{[(sp_2 - s_2) - sp_1 p_2 u]^2}{2s p_2 (1 - p_2)}} \\ &= \frac{e^{-\frac{(sp_2 - s_2)^2}{2s p_2 (1 - p_2)}}}{2\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2s p_2 (1 - p_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[ (sp_1 - s_1) + \frac{p_1 (sp_2 - s_2)}{1 - p_2} \right] ui - \left[ \frac{s}{2} p_1 (1 - p_1) - \frac{sp_1^2 p_2}{2(1 - p_2)} \right] u^2} du \\ &= \frac{e^{-\frac{(sp_2 - s_2)^2}{2s p_2 (1 - p_2)}}}{2\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2s p_2 (1 - p_2)}} \frac{e^{-\frac{\left[ (sp_1 - s_1) + \frac{p_1 (sp_2 - s_2)}{1 - p_2} \right]^2}{2s p_1 (1 - p_1) - \frac{2s p_1^2 p_2}{1 - p_2}}}}{\sqrt{\frac{s}{2} p_1 (1 - p_1) - \frac{sp_1^2 p_2}{2(1 - p_2)}}}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck müssen wir zuvörderst setzen

$$\begin{aligned} \left[ (sp_1 - s_1) + \frac{p_1 (sp_2 - s_2)}{1 - p_2} \right]^2 &= (sp_1 - s_1)^2 + \frac{2p_1}{1 - p_2} (sp_1 - s_1)(sp_2 - s_2) \\ &\quad + \frac{p_1^2}{(1 - p_2)^2} (sp_2 - s_2)^2. \end{aligned}$$

Weiterhin finden wir

$$\begin{aligned} \sqrt{2s p_2 (1 - p_2)} \sqrt{\frac{s}{2} p_1 (1 - p_1) - \frac{sp_1^2 p_2}{2(1 - p_2)}} &= \sqrt{s^2 p_1 p_2 (1 - p_1 - p_2)}, \\ \frac{(sp_2 - s_2)^2}{2s p_2 (1 - p_2)} + \frac{p_1^2 (sp_2 - s_2)^2}{2s p_1 (1 - p_1)(1 - p_2) - 2s p_1^2 p_2 (1 - p_2)} &= \frac{1 - p_1}{2s p_2 (1 - p_1 - p_2)}, \\ \frac{1}{2s p_1 (1 - p_1) - \frac{2s p_1^2 p_2}{1 - p_2}} &= \frac{1 - p_2}{2s p_1 (1 - p_1 - p_2)}, \\ \frac{\frac{2p_1}{1 - p_2}}{2s p_1 (1 - p_1) - \frac{2s p_1^2 p_2}{1 - p_2}} &= \frac{1}{s(1 - p_1 - p_2)}. \end{aligned}$$

Führen wir schließlich noch die Abkürzungen ein  $sp_1 - s_1 = \sigma_1$  und  $sp_2 - s_2 = \sigma_2$ , so stellt

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{s^2 p_1 p_2 (1 - p_1 - p_2)}} e^{-\frac{1 - p_2}{2s p_1 (1 - p_1 - p_2)} \sigma_1^2 - \frac{1 - p_1}{2s p_2 (1 - p_1 - p_2)} \sigma_2^2 - \frac{1}{s(1 - p_1 - p_2)} \sigma_1 \sigma_2}$$

die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  dar.

Nachdem uns diese Berechnung mit dem Wesen der Laplaceschen Methode vertraut gemacht hat, treten wir an die unmittelbare Berechnung des Risikos heran.

Für die erste Gattung des Risikovertrages, bei welcher für den Unternehmer aus jedem Verträge ein Verlust oder der eine zweier verschiedenen Gewinne erwachsen kann, finden wir die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtverlustes  $K$  nach der bekannten Formel

$$(A) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-K\omega i} d\omega,$$

wenn wir für die erzeugende Funktion der gesuchten Wahrscheinlichkeit setzen

$$X = (p_1 e^{D\omega i} + p_2 e^{-G_1\omega i} + p_3 e^{-G_2\omega i})^s = \sum P_k e^{k\omega i}.$$

Alsdann erscheint auch auf der rechten Seite die Wahrscheinlichkeit  $P$  des Verlustes  $K$ , weil stets ist

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi$$

und

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm a\omega i} d\omega = 0.$$

Durch Ausführung der Integration ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm a\omega i} d\omega = \frac{1}{e^{a\pi i} a i} (e^{2a\pi i} - 1).$$

Bedeutet  $a$  eine ganze Zahl, so folgt wegen  $e^{2a\pi i} = 1$  sogleich (2). Wenn jedoch  $a$  eine irrationale Zahl vorstellt, so werde zuvörderst gesetzt  $a = k \cdot \alpha$ . Dabei bezeichne  $k$  eine ganze und  $\alpha$  eine irrationale Zahl. Durch diese Vorkehrung ergibt sich

$$e^{2a\pi i} = e^{2k\alpha\pi i} = (e^{2k\pi i})^\alpha = 1,$$

wodurch wiederum die Formel (2) bestätigt wird.

Da stets ist

$$p_1 D = p_2 G_1 + p_3 G_2,$$

so erhalten wir nach der üblichen Methode für  $X$  den Näherungswert

$$X = e^{-\frac{s}{2} [p_1 D^2 + p_2 G_1^2 + p_3 G_2^2] \omega^2},$$

mittels dessen die Wahrscheinlichkeit die Form annimmt

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{s}{2} [p_1 D^2 + p_2 G_1^2 + p_3 G_2^2] \omega^2 - K\omega i} d\omega.$$



Durch Anwendung der bekannten Vornahmen ergibt sich hieraus die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtverlustes  $K$  in dem Ausdruck

$$P(K) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2s\varrho^2}} e^{-\frac{1}{2s\varrho^2} K^2}.$$

Wir können nun die Wahrscheinlichkeit  $\Phi(\gamma)$  einer Abweichung

$$\pm K = \pm \frac{\gamma}{H} = \pm \gamma \sqrt{2s\varrho^2}$$

sogleich bestimmen.

In den beiden letzten Formeln setzten wir  $\varrho^2$  für den durch Symmetrie sich auszeichnenden Ausdruck

$$p_1 D^2 + p_2 G_1^2 + p_3 G_2^2.$$

Indessen bleibt noch zu zeigen, daß dieser identisch ist mit der Größe  $\varrho^2$  des ersten Teiles. Aus der Bedingungsgleichung

$$p_1 D = p_2 G_1 + p_3 G_2$$

ergibt sich

$$p_1 D = p_2 G_1 + (1 - p_1 - p_2) G_2 = G_2 - p_1 G_1 + p_2 (G_1 - G_2),$$

also ist

- a)  $G_2 - p_1(D + G_2) + p_2(G_1 - G_2) = 0$
- b)  $p_1(D + G_2) - p_2(G_1 - G_2) - G_2 = 0$
- c)  $p_1 D - p_2 G_1 - (1 - p_1 - p_2) G_2 = 0.$

Addieren wir diese drei Nullwerte zur Basis der Quadrate  $D^2$ ,  $G_1^2$  und  $G_2^2$ , so bekommen wir

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= p_1 [D + G_2 - p_1(D + G_2) + p_2(G_1 - G_2)]^2 \\ &\quad + p_2 [G_1 + p_1(D + G_2) - p_2(G_1 - G_2) - G_2]^2 \\ &\quad + (1 - p_1 - p_2) [G_2 + p_1 D - p_2 G_1 - (1 - p_1 - p_2) G_2]^2 \\ &= p_1 [(1 - p_1)(D + G_2) + p_2(G_1 - G_2)]^2 \\ &\quad + p_2 [p_1(D + G_2) + (1 - p_2)(G_1 - G_2)]^2 \\ &\quad + (1 - p_1 - p_2) [p_1(D + G_2) - p_2(G_1 - G_2)]^2 \\ &= [p_1(1 - p_1)^2 + p_2 p_1^2 + (1 - p_1 - p_2) p_1^2] (D + G_2)^2 \\ &\quad + [p_1 p_2^2 + p_2(1 - p_2)^2 + (1 - p_1 - p_2) p_2^2] (G_1 - G_2)^2 \\ &\quad + 2[p_1(1 - p_1) p_2 + p_2 p_1(1 - p_1) - (1 - p_1 - p_2) p_1 p_2] (D + G_2) (G_1 - G_2). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} p_1(1 - p_1)^2 + p_2 p_1^2 + (1 - p_1 - p_2) p_1^2 &= p_1(1 - p_1) \\ p_1 p_2^2 + p_2(1 - p_2)^2 + (1 - p_1 - p_2) p_2^2 &= p_2(1 - p_2) \\ p_1(1 - p_1) p_2 + p_2 p_1(1 - p_2) - (1 - p_1 - p_2) p_1 p_2 &= p_1 p_2 \end{aligned}$$

und somit

$$q^2 = p_1(1-p_1)(D+G_2)^2 + p_2(1-p_2)(G_1-G_2)^2 + 2p_1p_2(D+G_2)(G_1-G_2).$$

Zur Berechnung des Risikos der zweiten Vertragsart, bei welcher einer der Verluste  $D_1$  und  $D_2$  oder der Gewinn  $G$  eintreten kann, haben wir in die Formel (A) einzusetzen

$$X = (p_1 e^{D_1 \omega i} + p_2 e^{D_2 \omega i} + p_3 e^{-G \omega i})^s = \Sigma P_k e^{k \omega i}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$p_1 D_1 + p_2 D_2 = p_3 G$$

finden wir den Näherungswert

$$X = e^{-\frac{s}{2} [p_1 D_1^2 + p_2 D_2^2 + p_3 G^2] \omega^2}$$

und vermöge desselben für die Wahrscheinlichkeit  $P$  den genäherten Ausdruck

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{s}{2} [p_1 D_1^2 + p_2 D_2^2 + p_3 G^2] \omega^2 - K \omega i} d\omega.$$

Auf bekannte Weise ergibt sich hieraus die Wahrscheinlichkeit des Verlustes  $K$

$$P(K) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2s} q_1^2} e^{-\frac{1}{2s} \frac{K^2}{q_1^2}},$$

in welcher bedeutet

$$q_1^2 = p_1 D_1^2 + p_2 D_2^2 + p_3 G^2.$$

Mit Zuhilfenahme der Bedingungsgleichung

$$p_1 D_1 + p_2 D_2 = (1 - p_1 - p_2) G$$

läßt sich zeigen, daß  $q_1^2$  den Wert hat

$$q_1^2 = p_1(1-p_1)(D_1+G)^2 + p_2(1-p_2)(D_2+G)^2 - 2p_1p_2(D_1+G)(D_2+G),$$

welcher bereits im ersten Teile hergeleitet wurde.

Der besondere Vorzug der Laplaceschen Methode besteht aber darin, daß ihre Anwendbarkeit das Vorhandensein von  $s$  gleichartigen Verträgen nicht zur Bedingung macht. Selbst bei der Voraussetzung, daß sämtliche  $s$  Verträge untereinander verschieden sind, gelingt es, in formaler Analogie zur Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems ein der Exponentialformel genügendes Risiko herzuleiten. Dabei wird die Erfüllung des Erfordernisses, daß die Anzahl  $s$  hinreichend groß ist, vorausgeschickt.

Um wiederum mit Hilfe der Formel (A) die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes  $K$  bei der ersten Vertragsart zu bestimmen, haben wir zu setzen

$$X = \prod_{\nu=1}^{s=3} ({}^{(\nu)}p_1 e^{(\nu)D_1 \omega i} + {}^{(\nu)}p_2 e^{(\nu)G_1 \omega i} + {}^{(\nu)}p_3 e^{(\nu)G_2 \omega i})$$

und erhalten sodann auf Grund der üblichen Reihenentwicklungen

$$X = e^{-\frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} ((^{(\kappa)}p_1)^{(\kappa)}D^2 + (^{(\kappa)}p_2)^{(\kappa)}G_1^2 + (^{(\kappa)}p_3)^{(\kappa)}G_2^2) \omega^2}$$

Das Risiko nimmt darnach die Form an

$$K = \gamma \sqrt{2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} [(^{(\kappa)}p_1)^{(\kappa)}D^2 + (^{(\kappa)}p_2)^{(\kappa)}G_1^2 + (^{(\kappa)}p_3)^{(\kappa)}G_2^2]}.$$

Für die zweite Vertragsart müssen wir der erzeugenden Funktion die Form geben

$$X = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} ((^{(\kappa)}p_1)^{e^{(\kappa)}D_1 \omega i} + (^{(\kappa)}p_2)^{e^{(\kappa)}D_2 \omega i} + (^{(\kappa)}p_3)^{e^{-^{(\kappa)}G \omega i}}),$$

welche in den Näherungswert

$$X = e^{-\frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} ((^{(\kappa)}p_1)^{(\kappa)}D_1^2 + (^{(\kappa)}p_2)^{(\kappa)}D_2^2 + (^{(\kappa)}p_3)^{(\kappa)}G^2) \omega^2}$$

umzuformen ist. Daher hat das Risiko der zweiten Vertragsart die Form

$$K = \gamma \sqrt{2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} [(^{(\kappa)}p_1)^{(\kappa)}D_1^2 + (^{(\kappa)}p_2)^{(\kappa)}D_2^2 + (^{(\kappa)}p_3)^{(\kappa)}G^2]}.$$

Zur Darstellung der abgeleiteten Risikoformeln können wir uns auch des Verfahrens bedienen, welches bei Meyer-Czuber für einen einfacheren Fall gezeigt wird. Dasselbe erfordert eine andere Erklärung der Risikoverträge. Für die erste Vertragsart setzen wir dieses Mal fest, daß das Ereignis  $E_1$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ist, den Schaden  $\mathfrak{D}$  herbeiführt, während der Eintritt des Ereignisses  $E_2$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist, den Gewinn  $\mathfrak{G}$  zur Folge hat. Aus jedem Verträge fließt eine Risikoprämie  $\mathfrak{P}$ , welche der Unternehmer für die durch die Übernahme des Vertrages erwachsende Verbindlichkeit empfängt. Diese Risikoprämie ist gleich dem früheren Gewinne  $G_2$ ; denn sie bedeutet für den einzelnen Vertrag einen Gewinn, wenn das Ereignis  $E_3$  stattfindet, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_3$  ist. Gemäß dieser Definition ist die Risikoprämie  $\mathfrak{P}$  ein Bestandteil des früheren Gewinnes  $G_1$ , wie sie andererseits in dem Schaden  $D$  der früheren Definition als subtraktives Glied enthalten sein muß. Da nämlich der Unternehmer den Betrag  $\mathfrak{P}$  als Gegenleistung erhält, so kann er diesen bereits zur Herabsetzung der eintretenden Schäden verwenden. Nun wird aber hier die mit dem Gewinn  $G_2$  identische Risikoprämie  $\mathfrak{P}$  als natürliches Äquivalent des übernommenen Risikos betrachtet, daher darf dieselbe bei den Größen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{G}$  nicht zur Verrechnung kommen. Unseren Erörterungen entsprechend ist hiernach

$$\mathfrak{D} = D + G_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} = G_1 - G_2.$$

Damit die Formel

$$(A') \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y e^{-\Re \omega i} d\omega$$

die Wahrscheinlichkeit bedeute, daß der Gesamtverlust den Betrag  $\Re$  ausmache, haben wir zunächst zu setzen

$$Y = \prod_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 e^{(x)\mathfrak{D} \omega i} + {}^{(x)}p_2 e^{(x)\mathfrak{G} \omega i} + {}^{(x)}p_3).$$

Führen wir die üblichen Umformungen aus, so ergibt sich der Näherungswert

$$Y = e^{\sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D} - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{G})) \omega i - \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\varrho^2 \omega^2)}$$

in welchem ist

$$\begin{aligned} ({}^{(x)}\varrho^2 &= ({}^{(x)}p_1 (1 - ({}^{(x)}p_1) ({}^{(x)}\mathfrak{D})^2 + ({}^{(x)}p_2 (1 - ({}^{(x)}p_2) ({}^{(x)}\mathfrak{G})^2 + 2 ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{D} ({}^{(x)}\mathfrak{G})) \\ &= ({}^{(x)}p_1 (1 - ({}^{(x)}p_1) ({}^{(x)}D + ({}^{(x)}G_2)^2 + ({}^{(x)}p_2 (1 - ({}^{(x)}p_2) ({}^{(x)}G_1 - ({}^{(x)}G_2)^2 \\ &\quad + 2 ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}D + ({}^{(x)}G_2) ({}^{(x)}G_1 - ({}^{(x)}G_2)). \end{aligned}$$

Vermöge desselben finden wir nach Ausführung der Integration die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtverlustes  $\Re$  in dem Ausdrücke

$$P(\Re) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\varrho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\varrho^2} \left[ \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D} - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{G})) - \Re \right]^2}$$

Diese Wahrscheinlichkeit hat dieselbe Bedeutung wie die früher abgeleitete. Setzen wir

$$({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D} - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{G})) = ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}D + ({}^{(x)}G_2) - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}G_1 - ({}^{(x)}G_2)$$

und beachten die Gleichung

$$({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}D + ({}^{(x)}G_2) = ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}G_1 + (1 - ({}^{(x)}p_1 - ({}^{(x)}p_2) ({}^{(x)}G_2),$$

so finden wir

$$\begin{aligned} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}D + ({}^{(x)}G_2) &= ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}G_1 + (1 - ({}^{(x)}p_1 - ({}^{(x)}p_2) ({}^{(x)}G_2) + ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}G_2) \\ &= ({}^{(x)}G_2 + ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}G_1 - ({}^{(x)}G_2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D} - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{G})) &= ({}^{(x)}G_2 - ({}^{(x)}\mathfrak{P}) \\ \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D} - ({}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{G})) &= \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P}). \end{aligned}$$

Führen wir nun für  $\Re$  die Zerlegung ein

$$\Re = \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P}) + K$$

so bedeutet

$$P(K) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} e^{x^2}}} e^{-\frac{1}{2 \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} e^{x^2}} K^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Verlust  $K$  betrage; denn um diesen übersteigen die Auszahlungen die verfügbare Risikoprämiensumme.

Einer entsprechenden Abänderung läßt sich naturgemäß auch die zweite Vertragsart unterziehen.

Beim Eintritte des Ereignisses  $E_1$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ist, entsteht der Schaden  $\mathfrak{D}_1$ ; infolge des Eintritts des Ereignisses  $E_2$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist, dagegen der Schaden  $\mathfrak{D}_2$ . Jeder Vertrag bringt dem Unternehmer als Entgelt die Risikoprämie  $\mathfrak{P}$ . Aus der Summe der Risikoprämien erwächst ein umso größerer Gesamtgewinn, je öfter das Ereignis  $E_3$  eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_3$  ist.  $\mathfrak{P}$  ist identisch mit dem Gewinne  $G$  der früheren Definition.

Stellen wir entsprechende Untersuchungen an wie bei der ersten Vertragsgattung, so finden wir

$$\mathfrak{D}_1 = (D_1 + G) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_2 = (D_2 + G).$$

Um mittels der Formel (A') die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtverlustes  $\mathfrak{K}$  zu bestimmen, führen wir die erzeugende Funktion ein

$$Y = \prod_{x=1}^{x=s} \left( \binom{x}{x} p_1 e^{(x)\mathfrak{D}_1 \omega^x} + \binom{x}{x} p_2 e^{(x)\mathfrak{D}_2 \omega^x} + p_3 \right),$$

aus welcher sich der Näherungswert ableiten läßt

$$Y = e^{\sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} p_1 (x)\mathfrak{D}_1 + \binom{x}{x} p_2 (x)\mathfrak{D}_2} \omega^i - \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} \varrho_1^2 \omega^2.$$

In diesem bedeutet

$$\begin{aligned} (x)\mathfrak{S}_1^2 &= (x)p_1(1 - (x)p_1)(x)\mathfrak{D}_1^2 + (x)p_2(1 - (x)p_2)(x)\mathfrak{D}_2^2 - 2(x)p_1(x)p_2(x)\mathfrak{D}_1(x)\mathfrak{D}_2 \\ &= (x)p_1(1 - (x)p_1)((x)D_1 + (x)G)^2 + (x)p_2(1 - (x)p_2)((x)D_2 + (x)G)^2 \\ &\quad - 2(x)p_1(x)p_2((x)D_1 + (x)G)((x)D_2 + (x)G). \end{aligned}$$

Weiterhin ermitteln wir für die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes  $\mathfrak{K}$  die Formel

$$P(\mathfrak{K}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} \varrho_1^2}} e^{-\frac{1}{2 \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} \varrho_1^2} \left[ \sum_{x=1}^{x=s} \binom{x}{x} p_1 (x)\mathfrak{D}_1 + \binom{x}{x} p_2 (x)\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{K} \right]^2}$$

Da sich nun zeigen läßt, daß

$$\sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 ({}^{(x)}\mathfrak{D}_1 + {}^{(x)}p_2 ({}^{(x)}\mathfrak{D}_2)) = \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P}),$$

ist, und die Zerlegung vorgenommen werden kann

$$\mathfrak{R} = \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P}) + K,$$

so ergibt sich aus der vorstehenden Wahrscheinlichkeit jene eines Verlustes  $K$

$$P(K) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}q_1^2)}} e^{-\frac{1}{\frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}q_1^2)} - K^2}$$

Wie bei dem vorigen Beispiele, so bedeutet auch hier die Größe  $K$  den Mehrbetrag an Auszahlungen über die vorhandene Risikoprämiensumme.

Die Übereinstimmung beider Methoden läßt sich übrigens schon beim Beginne der wahrscheinlichkeitstheoretischen Berechnungen darlegen. Setzt man nämlich von vornherein

$$\mathfrak{R} = \Sigma ({}^{(x)}\mathfrak{P}) + K,$$

so ergibt sich für die erste Vertragsart

$$\begin{aligned} Y e^{-\mathfrak{R} \omega i} &= \prod_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_1 \omega i) + ({}^{(x)}p_2 e^{-({}^{(x)}\mathfrak{G} \omega i) + ({}^{(x)}p_2) e^{-\left(\sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P} + \mathfrak{R}) \omega i\right)}} \\ &= \prod_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_1 - ({}^{(x)}\mathfrak{P}) \omega i) + ({}^{(x)}p_2 e^{-({}^{(x)}\mathfrak{G} + ({}^{(x)}\mathfrak{P}) \omega i) + ({}^{(x)}p_3 e^{-({}^{(x)}\mathfrak{P} \omega i)} e^{-\mathfrak{R} \omega i} \\ &= X e^{-\mathfrak{R} \omega i} \end{aligned}$$

und für die zweite

$$\begin{aligned} Y e^{-\mathfrak{R} \omega i} &= \prod_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_1 \omega i) + ({}^{(x)}p_2 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_2 \omega i) + ({}^{(x)}p_3) e^{-\left(\sum_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}\mathfrak{P} + \mathfrak{R}) \omega i\right)}} \\ &= \prod_{x=1}^{x=s} ({}^{(x)}p_1 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_1 - ({}^{(x)}\mathfrak{P}) \omega i) + ({}^{(x)}p_2 e^{({}^{(x)}\mathfrak{D}_2 - ({}^{(x)}\mathfrak{P}) \omega i) + ({}^{(x)}p_3 e^{-({}^{(x)}\mathfrak{P} \omega i)} e^{-\mathfrak{R} \omega i} \\ &= X e^{-\mathfrak{R} \omega i}. \end{aligned}$$

Da bei rechtmäßigen Verträgen die Verlusterwartung gleich sein muß der Gewinnerwartung, so hat man zu setzen:

a) für die erste Vertragsart

$$p_1 (\mathfrak{D} - \mathfrak{P}) = p_2 (\mathfrak{G} + \mathfrak{P}) + p_3 \mathfrak{P},$$

b) für die zweite Vertragsart

$$p_1 (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{P}) + p_2 (\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{P}) = p_3 \mathfrak{P}.$$

Beachtet man nun, daß  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , so folgt

für a)  $\mathfrak{P} = p_1 \mathfrak{D} - p_2 \mathfrak{G}$

„ b)  $\mathfrak{P} = p_1 \mathfrak{D}_1 + p_2 \mathfrak{D}_2$ .

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Risikoprämien verwickelterer Versicherungen, so bemerkt man, daß ist:

a)  $\mathfrak{D} = K - V, \quad \mathfrak{G} = V;$

b)  $\mathfrak{D}_1 = K_1 - V, \quad \mathfrak{D}_2 = K_2 - V;$

b') oder für  $K_2 < V: \mathfrak{D} = K_1 - V, \quad \mathfrak{G} = V - K_2.$

Dabei bedeuten  $K, K_1, K_2$  die versicherten Leistungen (Summen oder Rentenbarwerte) und  $V$  die Reserve am Ende des betrachteten Versicherungsjahres. Kaum eines besonderen Hinweises bedarf es, daß die Methode auch Gültigkeit behält, wenn beide Vertragsarten und gar noch andere gemeinsam betrachtet werden.

Hinsichtlich der mathematischen Darstellung mögen noch einige Bemerkungen Platz finden.

Statt die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega^2 - K \omega i} d\omega$$

beispielsweise in die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4H^2} \omega^2} \cos K \omega d\omega$$

umzubilden, welche bekanntermaßen die Gauß'sche Form annimmt

$$P(K) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 K^2},$$

(siehe auch das Besselsche Fehlergesetz bei G. Zachariae, De Mindeste Quadraters Methode), können wir von der Formel (A) ausgehend, so gleich die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen suchen, daß der Verlust innerhalb zweier Grenzen liegt. In Anlehnung an Poisson findet man für die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes zwischen  $k_1$  und  $k_2$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi \sum_{k_1}^{k_2} e^{-k \omega i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi \frac{e^{-k_1 \omega i} - e^{-(k_2+1) \omega i}}{1 - e^{-\omega i}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi \frac{e^{-(k_1 - \frac{1}{2}) \omega i} - e^{-(k_2 + \frac{1}{2}) \omega i}}{e^{\frac{1}{2} \omega i} - e^{-\frac{1}{2} \omega i}} d\omega. \end{aligned}$$

Beachten wir ferner, daß die Beziehung statthat

$$\sin \frac{1}{2} \omega = \frac{e^{\frac{1}{2} \omega i} - e^{-\frac{1}{2} \omega i}}{2 i} = -\frac{i}{2} (e^{\frac{1}{2} \omega i} - e^{-\frac{1}{2} \omega i}),$$

so folgt

$$(C) \quad \Phi = \frac{i}{4 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \frac{e^{-(k_2 + \frac{1}{2}) \omega i} - e^{-(k_1 - \frac{1}{2}) \omega i}}{\sin \frac{1}{2} \omega} d\omega.$$

Setzen wir nunmehr  $k_1 - \frac{1}{2} = -K$  und  $k_2 + \frac{1}{2} = K$ , so beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung innerhalb der Grenzen  $-K$  und  $K$

$$(D) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{i}{4 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \frac{e^{-K \omega i} - e^{K \omega i}}{\sin \frac{1}{2} \omega} d\omega = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \frac{e^{K \omega i} - e^{-K \omega i}}{2 i} \frac{d\omega}{\sin \frac{1}{2} \omega} \\ &= \frac{1}{2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \frac{\sin K \omega}{\sin \frac{1}{2} \omega} d\omega. \end{aligned}$$

Auf Grund unserer früheren Ausführungen setzen wir hierauf

$$X = e^{-\frac{1}{4} R^2 \omega^2}, \quad (\frac{1}{4} R^2 = \frac{1}{2} \Sigma(x) S^2),$$

entwickeln fernerhin  $\sin \frac{1}{2} \omega$  in die Reihe

$$\sin \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{3! 2^3} \omega^3 + \frac{1}{5! 2^5} \omega^5 - \dots$$

und begnügen uns mit dem ersten Gliede derselben. Wenn wir schließlich noch die Grenzen bis  $\pm \infty$  ausdehnen, so ergibt sich

$$(E) \quad \Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4} R^2 \omega^2} \frac{\sin K \omega}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4} R^2 \omega^2} \frac{\sin K \omega}{\omega} d\omega.$$

Bei der Entwicklung des Poissonschen Satzes wird bisweilen gezeigt, daß die Beziehung statthat

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4} R^2 \omega^2} \frac{\sin K \omega}{\omega} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{R} \int_0^K e^{-\frac{1}{R^2} u^2} du.$$

Somit finden wir

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi} R} \int_0^K e^{-\frac{1}{R^2} u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Hierbei ist  $\gamma = \frac{K}{R}$ , und daher wiederum  $K = \gamma R$ .

Zu demselben Ergebnisse kommt man auch durch Anwendung der verwandten Rechnungsweise, deren sich A. A. Markoff (§ 16 Grenzwert



der Wahrscheinlichkeiten) bedient. Fernerhin findet man den mit der Wahrscheinlichkeit  $\Phi(ah)$  identischen Ausdruck

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \frac{\sin(2au)}{u} du$$

auch dargestellt bei H. Bruns (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, § 31 die Funktionen  $\Phi(x)$  und  $sg(x)$ ).

### Dritter Teil.

Wenn auch das Verfahren des Laplace recht handlich und ansprechend ist, so versagt es doch bei Problemen über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit. Stellen wir uns die Aufgabe, die behandelten Risikoarten auf Grund der Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu berechnen, also nach dem Vorgange von E. Blaschke (Vorlesungen über mathematische Statistik, § 46 die Versicherungsprämie), so sehen wir uns veranlaßt, zu der Rechnungsweise des ersten Teiles zurückzukehren. Zur Ausführung unseres Vorhabens ist es notwendig, die bekannte Formel von Condorcet zu verallgemeinern. Nachdem bei  $s = s_1 + s_2 + s_3$  Versuchen die Ereignisse  $E_1, E_2, E_3$  beziehungsweise  $s_1, s_2, s_3$  mal eingetreten sind, soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß dieselben Ereignisse bei  $s'$  weiteren Versuchen beziehungsweise  $s'_1, s'_2, s'_3$  mal eintreffen.

Sind  $x_1, x_2, x_3$  die unbekanntenen Wahrscheinlichkeiten für das einmalige Eintreffen von  $E_1, E_2, E_3$ , so ist die Wahrscheinlichkeit des  $s_1$ -maligen Eintreffens von  $E_1$ , des  $s_2$ -maligen Eintreffens von  $E_2$  und des  $s_3$ -maligen Eintreffens von  $E_3$  bei  $s$  Versuchen gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}.$$

Da aber die Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  unbekannt sind, so haben wir die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die Kombination  $(s_1, s_2, s_3)$  stattgefunden hat, wenn den Ereignissen  $E_1, E_2, E_3$  die Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  zukommen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt nach der Bestimmungsweise der wahrscheinlichsten Hypothese

$$\frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}}{\int_{(s)} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} dx_1 dx_2 dx_3} \quad ;$$

denn der Faktor  $\frac{s!}{s_1! s_2! s_3!}$  fällt aus dem Zähler und dem Nenner fort. Die Integration des Nenners ist derart auszuführen, daß stets der Bedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

genügt wird. Setzen wir daher für das Integral des Nenners das andere

$$\int_0^1 x_1^{s_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{s_2} (1-x_1-x_2)^{s_3} dx_2 = \frac{s_1! s_2! s_3!}{(s+2)!},$$

so erhalten wir für die betrachtete Wahrscheinlichkeit den Wert

$$\frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}.$$

Unter Zugrundelegung der Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse  $E_1, E_2, E_3$  bei  $s'$  neuen Versuchen  $s'_1, s'_2, s'_3$  mal in beliebiger Reihenfolge eintreten werden,

$$\frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} x_1^{s'_1} x_2^{s'_2} x_3^{s'_3},$$

die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit der nacheinander stattgefundenen Erscheinungen ist gleich

$$\frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3},$$

und weil man  $x_1, x_2, x_3$  nicht kennt, so hat man die Summe aller nur möglichen Wahrscheinlichkeiten zu bilden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird darnach durch den Ausdruck dargestellt

$$W = \frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} \int_{(3)}^1 x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3} dx_1 dx_2 dx_3,$$

in welchem man, der Bedingung  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  genügend, setzen muß

$$\begin{aligned} & \int_{(3)}^1 x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 x_1^{s_1+s'_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{s_2+s'_2} (1-x_1-x_2)^{s_3+s'_3} dx_2 = \frac{(s_1+s'_1)! (s_2+s'_2)! (s_3+s'_3)!}{(s+s'+2)!}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit die erste Verallgemeinerung der Condorcetschen Formel

$$W = \frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} \frac{(s_1+s'_1)! (s_2+s'_2)! (s_3+s'_3)!}{(s+s'+2)!}.$$

Setzen wir in derselben

$$s'_1 = s' \frac{s_1}{s} + \sigma_1 = s p_1 + \sigma_1, \quad s'_2 = s' \frac{s_2}{s} + \sigma_2 = s' p_2 + \sigma_2,$$

$$s'_3 = s' \frac{s_3}{s} + \sigma_3 = s' p_3 + \sigma_3,$$

so können wir vermöge des Ausdruckes

$$W = \frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{(s' p_1 + \sigma_1)! (s' p_2 + \sigma_2)! (s' p_3 + \sigma_3)!} \frac{[(s+s') p_1 + \sigma_1]! [(s+s') p_2 + \sigma_2]! [(s+s') p_3 + \sigma_3]!}{(s+s'+2)!}$$

die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ableiten. Wenden wir wie im ersten Teile die Stirlingsche Formel an und entwickeln nach logarithmischen Reihen, so ergibt sich nach mehreren Umformungen

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{s}{2\pi s'(s+s')} \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-\frac{s^2}{2s'(s+s')} \left( \frac{\sigma_1^2}{p_1} + \frac{\sigma_2^2}{p_2} + \frac{\sigma_3^2}{p_3} \right)}.$$

Da wegen

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

und

$$\begin{aligned} s'_1 + s'_2 + s'_3 &= s'p_1 + \sigma_1 + s'p_2 + \sigma_2 + s'p_3 + \sigma_3 \\ &= s'(p_1 + p_2 + p_3) + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = s' \end{aligned}$$

stets die Bedingung

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

befriedigt werden muß, so hat man eine der Abweichungen durch die beiden anderen auszudrücken. Setzen wir daher

$$\sigma_3^2 = (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2,$$

so folgt

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s}{2\pi s'(s+s')} \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-\frac{s^2}{s'(s+s')} \left[ \frac{1}{2s} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_1^2 + \frac{1}{2s} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_2^2 + \frac{1}{s p_3} \sigma_1 \sigma_2 \right]}$$

oder

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s}{2\pi s'(s+s')} \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-\frac{s^2}{s'(s+s')} (a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \sigma_1 \sigma_2)}.$$

Um vermöge dieses Gesetzes die Wahrscheinlichkeit der Funktion

$$\delta = c_1 \sigma_1 \pm c_2 \sigma_2$$

abzuleiten, haben wir die Berechnungen des ersten Teiles zu wiederholen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß bei jeder Integration der Faktor

$$\frac{s^2}{s'(s+s')}$$

berücksichtigt werden muß. Diesem Umstande Rechnung tragend, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(\delta) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \delta^2},$$

in welcher die Präzision H durch die Formel

$$\frac{1}{H^2} = 2s \left( 1 + \frac{s'}{s} \right) [p_1(1-p_1)c_1^2 + p_2(1-p_2)c_2^2 \mp 2p_1 p_2 c_1 c_2]$$

bestimmt wird.

Auf Grund unserer Untersuchungen können wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

erwarten, daß die Abweichung

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D + G_2) - \sigma_2(G_1 - G_2)$$

zwischen die Grenzen

$$\pm \gamma \sqrt{2s' \left(1 + \frac{s'}{s}\right) [p_1(1-p_1)(D+G_2)^2 + p_2(1-p_2)(G_1-G_2)^2 + 2p_1p_2(D+G_2)(G_1-G_2)]}$$

und die Abweichung

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(D_1 + G) + \sigma_2(D_2 + G)$$

zwischen die Grenzen

$$\pm \gamma \sqrt{2s' \left(1 + \frac{s'}{s}\right) [p_1(1-p_1)(D_1+G)^2 + p_2(1-p_2)(D_2+G)^2 - 2p_1p_2(D_1+G)(D_2+G)]}$$

fällt.

Wenn wir diese Formeln hier aufgestellt haben, so geschah es nur, um einen vollständigen Überblick der Theorie zu geben. Eine große Bedeutung kann ihnen nicht beigemessen werden, weil der Faktor  $1 + \frac{s'}{s}$  der Einheit umso näher rückt, je kleiner die Zahl  $s'$  der Versicherten im Verhältnis zu  $s$  ist. Da nun die Praxis eher mit Fällen zu rechnen hat, bei welchen  $s'$  bedeutend kleiner als  $s$  ist, so wird man  $\frac{s'}{s}$  vernachlässigen können. Dadurch gelangt man aber zur Methode des ersten Teiles.

#### Vierter Teil.

Den Schluß unserer Ausführungen bilde ein Hinweis auf den weiteren Ausbau der Theorie des Risikos. An die Darstellung des letzteren reiht sich die Berechnung der von Wittstein eingeführten *Risikoreserve*, welche von Prof. Bohlmann (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 1, ferner: Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des Sechsten Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien 7. bis 13. Juni 1909) und von Dr. Radtke (s. a. a. O.) eingehend behandelt wurde. Bezeichnet man die Risikoreserve durch  $\mathfrak{R}$ , so heißt die zu ihrer Berechnung dienende Formel

$$\mathfrak{R} = \gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s^{(x)} \varrho^2} - G.$$

Dabei bedeutet im einfachsten Falle  $G$  den Barwert der Sicherheitszuschläge, welche während der betrachteten Periode vereinnahmt werden. Weil man setzen kann

$$G = \varphi \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s^{(x)} \varrho^2},$$

so läßt sich die Risikoreserve in der Form des Risikos selbst darstellen. Man erhält

$$\mathfrak{R} = (\gamma - \varphi) \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s^{(x)} \varrho^2}.$$

Solange die Ungleichung  $\gamma > \varphi$  besteht, schützt die Risikoreserve vor einem mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} \Phi(\gamma - \varphi)$$

zu erwartenden Verluste.

Mittels der Risikoreserve pflegt man die *Minimalzahl der Versicherten* zu berechnen. Durch Bildung der Durchschnittswerte

$$\frac{\sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s^{(x)} \varrho^2}{\sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s} = M^2$$

und

$$\frac{G}{\sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s} = g$$

erhält man, nachdem man noch die Abkürzung

$$\sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s = s$$

eingeführt hat,

$$\mathfrak{R} = \gamma \sqrt{2s} \cdot M - s \cdot g.$$

Da für große Werte von  $s$  die Risikoreserve negativ wird, so bezeichnet man denjenigen Wert von  $s$ , für welchen die Risikoreserve Null wird, als die *Minimalzahl der Versicherten*. Nennt man dieselbe  $s_0$ , so folgt aus

$$\gamma \sqrt{2s_0} M - s_0 g = 0$$

der Ausdruck

$$s_0 = 2 \left( \frac{\gamma \cdot M}{g} \right)^2,$$

$$= \sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s \left( \frac{R}{G} \right)^2.$$

$$\left( R = \gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} \sum^{(x)} s^{(x)} \varrho^2} \right).$$

Es ist einleuchtend, daß für einen anderen Sicherheitskoeffizienten  $\gamma'$  die Minimalzahl

$$s'_0 = 2 \left( \frac{\gamma' M}{g} \right)^2$$

426 Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein u. desselben Zeitraums.  
 ausmacht. Dividiert man mit  $s'_0$  in  $s_0$ , so ergibt sich die Proportion

$$\gamma : \gamma' = \sqrt{s_0} : \sqrt{s'_0},$$

die sich durch den folgenden Satz aussprechen läßt:

Die Sicherheitskoeffizienten verhalten sich zueinander wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Minimalzahlen.

Von der Minimalzahl  $s_0$  unterscheidet sich die Anzahl

$$s^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma M}{g} \right)^2,$$

welche aus

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \frac{\gamma M}{\sqrt{2s}} - g = 0$$

gefunden wird.  $s^{(0)}$  stellt die Zahl der Versicherten dar, welche die *Risikoreserve* zu einem *Maximum* macht; denn es ist

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{ds^2} = - \frac{\gamma M}{2s\sqrt{2s}}.$$

Weil  $\mathfrak{R}$  für  $s^{(0)}$  den Wert  $s^{(0)}g$  annimmt, so hat die entsprechende Risikoreserve die Größe

$$2s^{(0)}g.$$

Das von Prof. Broggi (Versicherungsmathematik, Leipzig 1911) wohl zuerst berechnete Maximum der Risikoreserve führt zu dem Satze, daß die Versichertenzahl, welche das Maximum erzeugt, den vierten Teil der Minimalzahl beträgt.

Auf Grund der Theorie des Risikos läßt sich auch die Frage beantworten, wie hoch die Summe oder Rente eines neu hinzukommenden Vertrages sein darf. Zur Lösung dieses *Problems vom Maximum der neuen Versicherung* verwendet man neuerdings vornehmlich den Landré'schen Ansatz (vgl. Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung sowie das bereits angeführte Werk von Blaschke), welcher auf der Einführung des Begriffs vom *relativen Risiko* beruht. Man kann das letztere auf verschiedene Weise definieren. Für die hier betrachteten Versicherungsarten werde das relative Risiko durch den Quotienten dargestellt

$$rR = \frac{\gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s^{(x)} q^x}}{\sum_{x=1}^{x=m} {}^{(x)}s^{(x)} \mathfrak{P}}$$

In diesem bedeutet  ${}^{(x)}\mathfrak{P}$  die aufgezinsten Risikoprämie, welche jedem der  ${}^{(x)}s$  Versicherten eigentümlich ist. Um auch dem relativen Risiko eine

wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung zu geben, denke man sich die Verluste oder Gewinne durch die Gleichung

$$K = \psi \sum_{z=1}^{z=m} {}^{(x)}s^{(x)}\mathfrak{P}$$

dargestellt; dann darf man mit der Wahrscheinlichkeit  $\Phi(\gamma)$  erwarten, daß der Faktor  $\psi$  innerhalb der Grenzen liegt

$$\pm \frac{\gamma \sqrt{2 \sum_{z=1}^{z=m} {}^{(x)}s^{(x)}e^z}}{\sum_{z=1}^{z=m} {}^{(x)}s^{(x)}\mathfrak{P}}$$

Handelt es sich um Versicherungen auf das Kapital oder die Rente  ${}^{(x)}C$ , so werde gesetzt

$$\begin{aligned} {}^{(x)}e &= {}^{(x)}C \cdot {}^{(x)}M, \\ {}^{(x)}\mathfrak{P} &= {}^{(x)}C \cdot {}^{(x)}\Pi. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet  ${}^{(x)}M$  das mittlere Risiko und  ${}^{(x)}\Pi$  die aufgezinste Risikoprämie des betreffenden Vertrages für die versicherte Einheit. Setzt man zuvörderst

$$rR = \frac{\gamma \sqrt{2sC^2M^2}}{s \cdot C \cdot \Pi} = \gamma \sqrt{\frac{2M}{s\Pi}},$$

so kann man mit Benutzung einer leicht herstellbaren Hilfstabelle in einfacher Weise den Durchschnittsvertrag bestimmen, welcher den Wert des berechneten Risikos nahezu unverändert läßt. Da das relative Risiko  $s$  völlig gleichartiger Verträge unabhängig ist von der versicherten Summe oder Rente, so darf man für  $C$  einen Durchschnittswert einführen, beispielsweise den Betrag

$$C = \frac{\sum_{z=1}^{z=m} {}^{(x)}s^{(x)}\mathfrak{P}}{\sum_{z=1}^{z=m} {}^{(x)}s^{(x)}\Pi}$$

Unter dem Maximum der Summe oder der Rente des neu hinzutretenden Vertrages versteht man nun denjenigen Wert, welcher das relative Risiko unverändert läßt, also der Gleichung genügt

$$\gamma \sqrt{\frac{2M}{s\Pi}} = \gamma \sqrt{\frac{2(sC^2M^2 + X^2M_1^2)}{s \cdot C\Pi + X\Pi_1}}$$

Hierin bezeichnet  $X$  den zu bestimmenden Maximalwert und  $M_1$  und  $\Pi_1$  die dem neuen Vertrage entsprechenden Werte des mittleren Risikos und der Risikoprämie. Durch Auflösung der vorstehenden Gleichung nach  $X$  erhält man

$$X = \frac{\Pi_1}{\Pi} \frac{2C}{\left(\frac{M_1}{M}\right)^2 - \frac{1}{s} \left(\frac{\Pi_1}{\Pi}\right)^2}$$

Ist  $s$  hinreichend groß, so wird man

$$\frac{1}{s} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} \right)^2$$

vernachlässigen dürfen. Für das Maximum ergibt sich sodann der Näherungswert

$$X = 2 \frac{\Pi_1}{\Pi} \left( \frac{M}{M_1} \right)^2 C.$$

Beiläufig sei bemerkt, daß auch L. François, Brüssel, das Problem nach der Landréschen Methode behandelt hat. (La Réassurance dans l'assurance sur la vie; Septième Congrès international d'Actuaires, Amsterdam, 2 au 7 Septembre 1912).

Wie Hausdorff (Das Risiko bei Zufallsspielen, siehe auch Broggi) zuerst gezeigt hat, läßt sich das vorstehende Problem noch verallgemeinern. Man kann annehmen, es treten zu dem alten Bestande  $s_1$  neue Verträge hinzu. Jeder derselben ist auf das Kapital oder die Summe  $C_1$  abgeschlossen. Das mittlere Einheitsrisiko dieser Verträge sei mit  $M_1$  bezeichnet, und die Risikoprämie für die Einheit betrage  $\Pi_1$ . Damit das relative Risiko des neuen Bestandes jenem des alten Bestandes gleich sei, muß die Gleichung erfüllt werden

$$\gamma \sqrt{\frac{2}{s} \frac{M}{\Pi}} = \frac{\gamma \sqrt{2(s C^2 M^2 + s_1 C_1^2 M_1^2)}}{s \cdot C \Pi + s_1 C_1 \Pi_1}.$$

Durch Auflösung derselben findet man

$$2 C \frac{\Pi_1}{\Pi} + \frac{s_1}{s} C_1 \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} \right)^2 = C_1 \left( \frac{M_1}{M} \right)^2$$

und hieraus

$$s_1 = s \left[ \left( \frac{\Pi M_1}{\Pi_1 M} \right)^2 - 2 \left( \frac{C \Pi}{C_1 \Pi_1} \right) \right]$$

oder

$$s_1 = s \left[ \left( \frac{M_1}{\Pi_1} \right)^2 : \left( \frac{M}{\Pi} \right)^2 - 2 \left( \frac{C \Pi}{C_1 \Pi_1} \right) \right].$$

Soll also das relative Risiko unverändert bleiben, so darf die Zahl der neuen Verträge die durch den vorstehenden Ausdruck gegebene Zahl  $s_1$  nicht überschreiten.

Will man endlich noch die Frage beantworten, wie die versicherten Kapitalien oder Renten beschaffen sein müssen, damit das relative Risiko zu einem *Minimum* wird, so setze man

$${}^r R = \frac{\gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{z=m} {}^{(x)}s {}^{(x)}C^2 {}^{(x)}M^2}}{\sum_{x=1}^{z=m} {}^{(x)}s {}^{(x)}C {}^{(x)}\Pi} = \frac{\gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{z=s} C_x^2 M_x^2}}{\sum_{x=1}^{z=s} C_x \Pi_x}.$$



Man sieht sodann, daß  $R$  einen ausgezeichneten Wert annimmt, im Falle auch die Funktion

$$F = \frac{\sum C_x^2 M_x^2}{(\sum C_x \Pi_x)^2}$$

einen solchen darstellt. Damit ein Maximum oder Minimum stattfindet, muß sein

$$\frac{\partial F}{\partial C_i} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \dots, s)$$

Weil nun

$$\frac{\partial F}{\partial C_i} = 2 \frac{C_i M_i^2 (\sum C_x \Pi_x) - \sum C_x^2 M_x^2 \Pi_i}{(\sum C_x \Pi_x)^3},$$

so hat man

$$C_i M_i^2 (\sum C_k \Pi_k) - \sum C_k^2 M_k^2 \Pi_i = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{C_i M_i^2}{\Pi_i} = \frac{\sum C_k^2 M_k^2}{\sum C_k \Pi_k}$$

$$(i = 1, 2, \dots, s)$$

und ferner

$$C_i : C_k = \frac{\Pi_i}{M_i^2} : \frac{\Pi_k}{M_k^2}.$$

Besteht diese Proportion für alle Werte von  $i$  und  $k$ , so ist das relative Risiko ein Minimum.

Man überzeugt sich leicht, daß dasselbe Wertesystem das relative Risiko zu einem Minimum macht, sofern noch die Bedingung gestellt wird, daß die Risikoprämiensumme  $\sum C_i \Pi_i = S$  konstant bleibe. Statt diese Aufgabe zu lösen, kann man aber auch das Extremum der Funktion

$$f = \sum C_i^2 M_i^2 + \lambda (\sum C_i \Pi_i - S)$$

aufsuchen, in welcher  $\lambda$  die zu bestimmende Korrelate ist.

Nachdem bereits Radtke das *Minimum des Risikos*

$$R = \gamma \sqrt{2 \sum_{x=1}^{x=m} \binom{x}{s} \rho^x}$$

bei konstanter Gesamtsumme vermöge der Multiplikatorenmethode berechnet hatte, wurde dieselbe Aufgabe von Prof. Broggi in der gleichen Weise behandelt. Zur Bestimmung des Extremums genügt es, den Ausdruck

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{x=1}^{x=m} \binom{x}{s} \rho^x$$

zu untersuchen, der zu diesem Zwecke in der Form

$$(1) \quad \mathfrak{M}^2 = \sum_{i=1}^{i=s} C_i^2 M_i^2$$

430 Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein u. desselben Zeitraums.  
dargestellt werde. Da die Bedingungsgleichung

$$(2) \quad C = \sum_{i=1}^{i=s} C_i$$

befriedigt werden muß, so hat man das Extremum mit Berücksichtigung der vorstehenden Beziehung zu ermitteln. Indem man beispielsweise  $C_s$  als Funktion von  $C_1, C_2, \dots, C_{s-1}$  ansieht, erhält man aus (1) die Minimumbedingungen

$$(a) \quad \frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial C_i} = 2 C_i M_i^2 + 2 C_s \frac{\partial C_s}{\partial C_i} M_s^2 = 0,$$

( $i = 1, 2, \dots, s-1$ )

und aus (2)

$$(b) \quad \frac{\partial C_s}{\partial C_i} = -1.$$

( $i = 1, 2, \dots, s-1$ )

Setzt man nun (b) in (a) ein, so bekommt man

$$(c) \quad 2 C_i M_i^2 = 2 C_s M_s^2,$$

( $i = 1, 2, \dots, s-1$ )

woraus allgemein folgt

$$C_i : C_k = \frac{1}{M_i^2} : \frac{1}{M_k^2}.$$

Mittels dieses Ergebnisses findet man aber auch

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{i=1}^{i=s} C_i C_k M_k^2 = C_k M_k^2 \sum_{i=1}^{i=s} C_i = C \cdot C_k M_k^2.$$

Führt man noch den Durchschnittswert ein

$$M = \frac{\mathfrak{M}}{C},$$

so folgt

$$C_k : C = \frac{1}{M_k^2} : \frac{1}{M^2}.$$

In Worten heißt dies:

Bei gegebener Gesamtsumme der versicherten Summen oder Renten ist das mittlere Gesamtrisiko ein Minimum, wenn die auf die einzelnen Verträge entfallenden Renten oder Summen sich zur Gesamtsumme verhalten wie die umgekehrten Quatrare der zugehörigen mittleren Einheitsrisiken.

Ist

$$M_i = M_s$$

( $i = 1, 1, \dots, s-1$ ),

so ergibt sich aus (c)

$$C_i = C_s$$

( $i = 1, 2, \dots, s-1$ ).

Diese Gleichung stellt den bereits von Landré und später auch von Czuber (vgl. a. a. O.) aufgestellten Satz dar:

Bei gegebener Gesamtsumme und gleichem Einheitsrisiko der einzelnen Verträge ist das Risiko ein Minimum, wenn die versicherten Summen oder Renten von derselben Größe sind.

Der Kürze wegen beschränken wir uns darauf, die Werte der Kapitalien bzw. der Renten zu ermitteln, die das Extremum des betreffenden Risikos erzeugen, unterließen es jedoch, die Kriterien der Minima herzuleiten. Am einfachsten erfolgen die Herleitungen auf elementarem Wege, indem man für die  $i$ te Variable  $x_i$  setzt  $x_i^{(0)} + \xi_i$ . Dabei bedeutet  $x_i^{(0)}$  den Wert, welcher das Extremum erzeugt, und  $\xi_i$  irgendeine Abweichung von demselben. (Siehe Schwering, Lehrbuch der kleinsten Quadrate, S. 36).

## Nachtrag.

### Elementare Herleitungsmethoden.

#### I.

Eine Zahl von Fachleuten wird gegen unsere Darstellungen den beliebten Einwand erheben, daß dieselben nur für eine sehr große Zahl von Einzelfällen Gültigkeit haben, während es sich meistens um die Begutachtung eines kleineren Kreises von Versicherungsnehmern handeln wird. Hierauf läßt sich zunächst erwidern, daß das sogenannte mittlere Risiko stets anwendbar ist, selbst wenn es sich nur um die Schätzung eines kleinen Versicherungsbestandes handelt. Vermöge eines elementaren Verfahrens, wie wir es zum Beispiel bei G. F. Lipps (Die psychischen Maßmethoden; 15. Die Mittelwerte der Beobachtungsreihen) besprochen finden, können wir den mittleren Fehler aller möglichen Abweichungen von der rechnungsmäßigen Gebahrung berechnen. Auch dieses Mal werde die Annahme gemacht, es seien  $s$  gleichalterige Versicherte vorhanden, von denen jeder mit der Wahrscheinlichkeit  $p_1$  die Leistung  $K$  erwartet. Tritt das Ereignis ein, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist, so erlischt der Vertrag. Dem Institute verfällt alsdann die am Ende des Jahres vorhandene Reserve  $V$ . Sofern das Ereignis eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_3$  ist, gewinnt das Institut die aufgezinsten Risikoprämie  $\Pi$ . Die Gesamtsumme aller Risikoprämien zusammen mit den frei gewordenen Reserven deckt den gesamten Schaden, im Falle sich der Wandel des Bestandes in Übereinstimmung mit den Rechnungsgrundlagen vollzieht. Wie aber die Erfahrung lehrt, finden stets Abweichungen statt. Um daher den zu befürchtenden mittleren

Fehler des zu erwartenden Ergebnisses zu bestimmen, bilden wir die Quadratsumme

$$M^2 = \sum_{s_1!s_2!s_3!} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} [s_1(K - V) - s_2V - s\Pi]^2,$$

die wir uns übrigens entstanden denken können aus der der ersten Definition entsprechenden Quadratsumme

$$M^2 = \sum_{s_1!s_2!s_3!} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} [s_1(K - V - \Pi) - s_2(V + \Pi) - s_3\Pi]^2.$$

Die angedeutete Summation ist hierbei über alle nur möglichen Werte von  $s_1, s_2, s_3$  zu erstrecken, welche der Gleichung genügen

$$s_1 + s_2 + s_3 = s.$$

Lösen wir das Quadrat auf und setzen für die Wahrscheinlichkeit zur Abkürzung  $P_{(s_1, s_2, s_3)}$ , so folgt

$$\begin{aligned} M^2 &= (K - V)^2 \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_1^2 + V^2 \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_2^2 + \Pi^2 \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} \\ &\quad - 2(K - V)V \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_1 s_2 - 2s(K - V)\Pi \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_1 \\ &\quad + 2sV\Pi \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} \cdot s_2. \end{aligned}$$

Nun finden wir durch Anwendung eines bekannten Kunstgriffs, der in vielen Lehrbüchern gezeigt wird, so auch bei Bobeck (Wahrscheinlichkeitsrechnung),

$$\begin{aligned} \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_i &= s p_i, \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \\ \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_i^2 &= s(s - 1) p_i^2 + s p_i, \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \\ \Sigma P_{(s_1, s_2, s_3)} s_i s_k &= s(s - 1) p_i p_k. \\ &\quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k). \end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} M^2 &= (K - V)^2 [s(s - 1) p_1^2 + s p_1] + V^2 [s(s - 1) p_2^2 + s p_2] + s^2 \Pi^2 \\ &\quad - 2(K - V)V s(s - 1) p_1 p_2 - 2s(K - V)\Pi s p_1 + 2sV\Pi s p_2. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der schon früher mitgeteilten Formel

$$\Pi = p_1(K - V) - p_2V$$

läßt sich die mittlere Abweichung auf die durch besondere Einfachheit sich auszeichnende Form bringen

$$M = \sqrt{s[p_1(K - V)^2 + p_2V^2 - \Pi^2]}.$$

Entfernen wir andererseits  $\Pi$  durch Einsetzung der angegebenen Formel, so erhalten wir den bereits bekannten Ausdruck

$$M = \sqrt{s[p_1(1 - p_1)(K - V)^2 + p_2(1 - p_2)V^2 + 2p_1p_2(K - V)V]}.$$

Diesen Untersuchungen kann man die Folgerung entnehmen, daß der mittlere Verlust oder Gewinn innerhalb der Grenzen  $\pm M$  liegen wird.

II.

Ein umfassenderes Hilfsmittel zur Herleitung des Risikos einer kleineren Anzahl von Verträgen bietet der erste Satz von Tschetschew.<sup>1)</sup> Dieser Umstand ist bereits von Prof. Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 191 und 192) erkannt worden, doch mag eine für die von uns betrachteten Verträge besonders eingerichtete Darstellung hier Platz finden.

Es seien  $s$  verschiedene Verträge vorhanden. Beim  $x$ ten Verträge ist zu erwarten mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &({}^x)p_1 \text{ der Verlust } ({}^x)D \text{ oder der Verlust } ({}^x)D_1 \\ &({}^x)p_2 \text{ „ Gewinn } ({}^x)G_1 \text{ „ „ „ } ({}^x)D_2 \\ &({}^x)p_3 \text{ „ „ } ({}^x)G_2 \text{ „ „ Gewinn } ({}^x)G. \end{aligned}$$

Wie früher sei

$$({}^x)p_1 + ({}^x)p_2 + ({}^x)p_3 = 1,$$

und ferner

$$({}^x)p_1 ({}^x)D - ({}^x)p_2 ({}^x)G_1 + ({}^x)p_3 ({}^x)G_2 = 0$$

oder

$$({}^x)p_1 ({}^x)D_1 + ({}^x)p_2 ({}^x)D_2 - ({}^x)p_3 ({}^x)G = 0.$$

Bezeichnen wir mit  $K$  einen der möglichen Gesamtverluste oder Gewinne, welcher mit der Wahrscheinlichkeit

$$({}^1)p_{i_1} ({}^2)p_{i_2} ({}^3)p_{i_3} \dots ({}^x)p_{i_x} \dots$$

( $i_x = 1_x, 2_x, 3_x$ )

zu erwarten ist, so stellt

$$\sum ({}^x)K^2 ({}^1)p_{i_1} ({}^2)p_{i_2} ({}^3)p_{i_3} \dots ({}^x)p_{i_x} \dots$$

die mathematische Hoffnung der Quadrate aller nur möglichen Verluste oder Gewinne dar. Führen wir die Summation in bezug auf den ersten Vertrag aus, so erhalten wir

$$\sum ({}^{s-1}) ({}^1)p_1 ({}^1)K_1^2 + ({}^1)p_2 ({}^1)K_2^2 + ({}^1)p_3 ({}^1)K_3^2 ({}^2)p_{i_2} ({}^3)p_{i_3} \dots ({}^x)p_{i_x} \dots$$

Nun lassen sich die Verluste oder Gewinne  $({}^1)K_1, ({}^1)K_2, ({}^1)K_3$  zerlegen in die den Wahrscheinlichkeiten  $({}^1)p_1, ({}^1)p_2, ({}^1)p_3$  entsprechenden Ergebnisse des ersten Vertrages und einen unbestimmten, vorderhand konstanten Teil, welcher von den Wahrscheinlichkeiten des ersten Vertrages unabhängig ist. Setzen wir daher beispielsweise

$$\begin{aligned} ({}^1)K_1 &= ({}^1)D + ({}^2)K \\ ({}^1)K_2 &= - ({}^1)G_1 + ({}^2)K \\ ({}^1)K_3 &= - ({}^1)G_2 + ({}^2)K, \end{aligned}$$

1) Die Kenntnis der richtigen Aussprache des sonst „Tschetschew“ geschriebenen Namens verdanke ich Herrn Prof. Dr. Mehmke.

so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(s-1)} [ {}^{(1)}p_1 ( {}^{(1)}D^2 + 2 {}^{(1)}D {}^{(2)}K + {}^{(2)}K^2 ) + {}^{(1)}p_2 ( {}^{(1)}G_1^2 - 2 {}^{(1)}G_1 {}^{(2)}K + {}^{(2)}K^2 ) \\ & \quad + {}^{(1)}p_3 ( {}^{(1)}G_2^2 - 2 {}^{(1)}G_2 {}^{(2)}K + {}^{(2)}K^2 ) {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots \\ & = \Sigma^{(s-1)} [ {}^{(1)}p_1 {}^{(1)}D^2 + {}^{(1)}p_2 {}^{(1)}G_1^2 + {}^{(1)}p_3 {}^{(1)}G_2^2 + 2 ( {}^{(1)}p_1 {}^{(1)}D - {}^{(1)}p_2 {}^{(1)}G_1 \\ & \quad - {}^{(1)}p_3 {}^{(1)}G_2 ) {}^{(2)}K + {}^{(2)}K^2 ] {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots \end{aligned}$$

Indem wir noch die schon früher gebrauchte Bezeichnung einführen

$${}^{(1)}p_1 {}^{(1)}D^2 + {}^{(1)}p_2 {}^{(1)}G_1^2 + {}^{(1)}p_3 {}^{(1)}G_2^2 = {}^{(1)}M^2,$$

erhalten wir als Ergebnis der ersten Summation

$$\Sigma^{(s-1)} [ {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}K^2 ] {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots$$

Wir wiederholen darauf die Summation in bezug auf den zweiten Vertrag und bekommen

$$\Sigma^{(s-2)} [ {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}M^2 + {}^{(3)}K^2 ] {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir zu der Gleichung

$$\Sigma^{(s)} K^2 {}^{(1)}p_{i_1} {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots = {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}M^2 + {}^{(3)}M^2 + \dots + {}^{(x)}M^2 + \dots$$

Die weitere Herleitung des Satzes stimmt mit den üblichen Darstellungen überein. Ehe wir dieselbe jedoch wiedergeben, vergegenwärtigen wir uns, daß die Bezeichnung  $\Sigma^{(s)}$  nur beziehentlich der aufeinander folgenden Summationen nach Verträgen zulässig ist. Im ganzen gibt es  $3^s$  verschiedene Gesamtgewinne oder Verluste, von denen einem jeden eine der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten

$$P_{(i)} = {}^{(1)}p_{i_1} {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(x)}p_{i_x} \dots$$

zukommt. Hiernach können wir die gefundene Beziehung auch in der Form schreiben

$$\Sigma P_{(i)} K_{(i)}^2 = \Sigma {}^{(x)}M^2,$$

aus welcher zunächst folgt

$$\frac{\Sigma P_{(i)} K_{(i)}^2}{\Sigma {}^{(x)}M^2} = 1.$$

Bezeichnet jetzt  $t$  eine nicht näher bestimmte Zahl, so können wir die neue Gleichung bilden

$$\frac{\Sigma P_{(i)} K_{(i)}^2}{t^2 \Sigma {}^{(x)}M^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Nun wird es unter den Quotienten der linken Seite eine Anzahl geben, bei welchen ist

$$(a) \quad \frac{K_{(i)}^2}{t^2 \Sigma {}^{(x)}M^2} < 1.$$

Diese Glieder vernachlässigen wir, indem wir sie Null setzen. Die übrig bleibenden Quotienten genügen der Ungleichung

$$(b) \quad \frac{K_{(\lambda)}^2}{t^2 \Sigma^{(\lambda)} M^2} \geq 1.$$

Ersetzen wir in denselben den Bruch  $\frac{K_{(\lambda)}^2}{t^2 \Sigma^{(\lambda)} M^2}$  durch 1, so kommen wir zu dem Ergebnisse, daß die Wahrscheinlichkeitensumme  $W'$  dieser Ungleichung der hieraus folgenden Ungleichung unterliegt

$$W' < \frac{1}{t^2}.$$

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitensumme der Ungleichung (a) mit  $W$ , so muß sein

$$W + W' = 1.$$

Weil nun aber ist

$$W + \frac{1}{t^2} > 1,$$

so folgt

$$W > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Endlich  $t^2 = 2\gamma^2$  setzend, gelangen wir zu dem Satze:

Mit einer Wahrscheinlichkeit

$$W > 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

darf man erwarten, daß der eintretende Gesamtverlust oder Gewinn durch die Ungleichung

$$K < \pm \gamma \sqrt{2 \Sigma^{(\lambda)} M^2}$$

begrenzt ist.

Ohne den besonderen Zweck unserer nachträglichen Ausführungen einschränken zu wollen, scheint uns der Hinweis zweckmäßig zu sein, daß auch die einfacheren Berechnungsweisen des Risikos unter bestimmten Voraussetzungen die Anwendung der höheren Wahrscheinlichkeitsrechnung zulassen.

Wir kehren zur ersten Darstellung unseres Nachtrags zurück und machen die Voraussetzung, daß die Vertragszahl  $s$  hinreichend groß sei. Alsdann können wir annehmen, daß die eintretenden Verluste oder Gewinne beständig veränderlich das Gaußsche Fehlergesetz befolgen. Indem wir das Genauigkeitsmaß  $H$  als unbekannt ansehen, bestimmen wir nach Gauß (Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate; in deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Bürsch und Dr. P. Simon, S. 131) jenen Wert von  $H$ , für welchen

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-HM^2}$$

ein Maximum wird. Differentiieren wir nach  $H$  und setzen den Differentialquotienten Null, so muß  $H$  die Gleichung

$$\frac{1}{H} - 2HM^2 = 0$$

befriedigen, also den Wert

$$H = \frac{1}{\sqrt{2M^2}}$$

annehmen. Mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

können wir nunmehr erwarten, daß der Verlust oder Gewinn innerhalb der Grenzen liege

$$\pm \gamma \sqrt{2M}.$$

Auch das an zweiter Stelle behandelte Tschebyschoffsche Verfahren läßt sich, wie Tschebyschoff selbst wußte, bei Erfüllung gewisser Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion zurückführen. Im Anhang 1 des bereits erwähnten Lehrbuchs von A. A. Markoff finden wir den dort in allgemeinerer Form ausgesprochenen Satz:

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=s} z_k'$$

von möglichen Werten der voneinander unabhängigen Funktionalgrößen

$$\begin{matrix} z_k \\ (k=1, 2, \dots, s) \end{matrix}$$

innerhalb der Grenzen liege

$$\pm \gamma \sqrt{2 \sum_{k=1}^{k=s} a_k},$$

wobei die Größen  $a_k$  die mathematischen Hoffnungen von  $z_k^2$  sind, nähert sich mit unbegrenzt wachsendem  $s$  dem Grenzwerte

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

Dabei müssen die unabhängigen Größen  $z_k$  folgenden Bedingungen unterliegen:

1. die mathematischen Hoffnungen der Größen  $z_k$  sind gleich Null;
2. die mathematischen Hoffnungen der aufeinander folgenden Potenzen der Größen  $z_k$  bleiben endlich für jeden Wert von  $s$ , ohne völlig zu verschwinden.



## Kleinere Mitteilungen.

---

### Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften.

Der von Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig am 31. Januar 1912 gestiftete *Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften*, der zum ersten Male für Arbeiten auf dem Gebiete des Mathematischen Unterrichts verliehen werden sollte, ist durch Verfügung des Stifters dem Geh. Regierungsrat Professor Dr. Felix Klein in Göttingen, Mitglied des Herrenhauses, zugesprochen worden.

---

## Bücherschau.

---

### **L. Prandtl, Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung.** Jena 1913, A. Fischer. Preis *M* 1.60.

Die Broschüre enthält einen Abdruck zweier Artikel L. Prandtls aus dem „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“; ihrem Inhalte nach kann sie jedoch als ein kleines Lehrbuch bezeichnet werden. In kurzer und überaus anschaulicher und präziser Form werden die Begriffe erklärt, die in der Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper vorkommen, und ebenso klar werden die wichtigsten Probleme, Methoden und Ergebnisse auseinandergesetzt, die — zum großen Teil durch die eigenen Arbeiten Prandtls — heute als gesicherter Besitz der Wissenschaft gelten können. So dürfte die Darstellung der Abschnitte über Flüssigkeitsreibung und über den „Mechanismus“ des Widerstandes von Körpern in Flüssigkeiten — um nur etwas aus dem reichen Inhalte zu nennen — an Klarheit kaum zu übertreffen sein. Über hundert Abbildungen, darunter einige der bekannten Prandtlschen Strömungsbilder, vervollständigen noch die Verdeutlichung der Worte; außerdem werden sehr zweckmäßig ausgewählte Literaturangaben zur weiteren Orientierung gegeben.

Die Tendenz des kleinen Buches geht dahin, die Verbindung zwischen der sog. theoretischen Hydromechanik und der Hydraulik der Ingenieure noch weiter zu festigen, die sehr zum Heile der beiden noch vor kurzem sich ganz getrennt entfaltenden Gebiete nunmehr tatsächlich gefunden zu sein scheint. Möge es in den Kreisen der Physiker und auch der Ingenieure recht weite Verbreitung finden!

Prag.

TH. PÖSCHL.

**A. Mitzscherling, Das Problem der Kreisteilung.** Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. VI u. 214 S. 8<sup>o</sup> m. 210 Textfiguren. Leipzig 1913, B. G. Teubner. Geb. *M* 8.40.

Das Buch wurde aus dem Nachlaß des in jungen Jahren verstorbenen Verfassers herausgegeben und von einem Hochschullehrer mit empfehlendem Vorwort versehen. In diesem Vorwort wird auf zweierlei hingewiesen. Es ist ja unterdessen Th. Vahlens Werk *Konstruktionen und Approximationen* (Leipzig 1911) erschienen, das den hier behandelten Stoff in nuce ebenfalls enthält. Da ist mit Recht gesagt, daß das vorliegende Buch viel eingehender und schulmäßiger ist als die betreffenden Kapitel bei Vahlen, der sich ein weit höheres Ziel steckte. Ich stehe auch nicht an, von diesem Gesichtspunkte aus Mitzscherlings Arbeit als nützlich zu bezeichnen und sie den Schulmännern zur Belebung des Unterrichts recht zu empfehlen. Denn das Buch von G. Loria über die speziellen ebenen Kurven (2. Aufl. Leipzig 1910/11), aus dem Mitzscherling einen großen Teil seines Stoffes entnahm, dürfte wegen seines hohen Preises nicht die Verbreitung finden, die dem vorliegenden Buche zu wünschen ist.

Das Buch will aber, wie schon sein Untertitel sagt, auch historisch genommen werden und aus diesem Grunde wird es im Vorwort noch besonders empfohlen unter Hinweis auf die richtige Bemerkung M. Gebhardts, daß der Lehrer selbst nur unter Schwierigkeiten geschichtliche Belehrung und Anregung finde. Dieser Hinweis des Vorworts zeigt nur von neuem, daß man in den allerweitesten Kreisen gar nicht weiß, woran es hier fehlt, und ich möchte daher nachdrücklich auf die Leitartikel von G. Eneström zu den Bänden 13 (1913) und 14 (1914) der dritten Reihe der „Bibliotheca mathematica“ aufmerksam machen, wo man es deutlich lesen kann. Leider wußte auch unser Verfasser nicht, daß man, um etwas historisch Brauchbares zu liefern, Vorstudien machen muß, die umso schwieriger sind, als es hierzu weder mündliche Anleitung in Vorlesungen, noch irgendwie gedruckte Leitfäden gibt. Denn die Geschichte der Mathematik ist eben kein „Fach“. Die erste Forderung ist, daß man ordentlich und gleichmäßig zitiert. Aber hier sind bei Büchern meist nicht die Erscheinungsjahre, ja gelegentlich nicht einmal die Auflage (wohl aber die Seitenzahl!) angegeben. Die Zeitschriftentitel werden abgekürzt, wie es gerade kommt oder wie es die benützte sekundäre Quelle gab. Als solche Quelle diente mehrfach auch M. Simons in dieser Hinsicht sicher nicht vorbildliche *Entwicklung der Elem.-Geom. i. 19. Jhrh.* (Leipzig 1906), ein Buch, das aber nur ein einziges Mal wirklich angeführt wird. Und was sollen die zahlreichen aus Loria entnommenen Zitate von Arbeiten, die der Verfasser selbst nie sah und von denen viele für den deutschen Lehrer einfach unzugänglich sind? In eigentlich historischer Beziehung befriedigt das Buch ebensowenig. Von einer „neuen Monographie aus dem Gebiete der Geschichte der Mathematik“ kann gar keine Rede sein. Ob überhaupt irgendeine neue historische Tatsache mitgeteilt wird, erscheint mir zweifelhaft. Das würde noch nichts ausmachen; aber, was der Verfasser bringt, sind eben nur gelegentliche Lesefrüchte aus zum Teil veralteten Quellen. Vahlen steht in bibliographischer und in historischer Hinsicht weit höher.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

## Neue Bücher.

## Analysis.

1. CZUBER, EMANUEL, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. I. Bd. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. 3., sorgfältig durchgesehene u. erw. Aufl. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.  
M 12.—; geb. in Leinw. M 14.—.
2. HELØ, JOHAN, Über die Newtonsche Näherungsmethode und eine Verallgemeinerung derselben. Akademische Abhandlung. Helsingfors 1914, Druckerei der Finnischen Literatur-Gesellschaft.
3. HOAG, C. G., A theory of interest. New York 1914, Macmillan. Cloth \$ 1.50.
4. ZAWADZKI, W., Les mathématiques appliquées à l'économie politique. Paris 1914, Rivière.  
Fr. 8.—.

## Astronomie, Geodäsie.

5. GUARRERA, P., Corso di nautica astronomica teorico e pratico. Vol. I: Elementi di cosmografia e d'astronomia sferica. Palermo 1914, Mirto. L. 4.50.
6. HAGEN, JOH. GEO., S. J., Die veränderlichen Sterne. I. Bd. Geschichtlich-technischer Tl. 2. Lfg. Die Beobachtg. der veränderl. Sterne. Freiburg i. B. 1914, Herder.  
M 10.—.
7. JAHRBUCH, Berliner astronomisches, f. 1916, m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1)–(754)f. 1914. Hrg. v. dem königl. astronom. Recheninstitut zu Berlin. Berlin 1914, Dümmler.  
M 12.—.
8. JORDAN, W., Handbuch der Vermessungskunde. Fortgesetzt v. C. Reinhertz. 2. Bd. Feld- und Landmessung. 8. erweit. Aufl. Bearb. v. O. Eggert. Stuttgart 1914, Metzler.  
geb. in Leinw. M 23.—; in Halbdr. M 24.—.
9. MOULTON, F. R., An introduction to Celestial Mechanics. 2nd revised ed. London 1914, Macmillan.  
15 s.
10. PRZYBYŁOK, E., Polhöhen-Schwankungen. (Sammlung Vieweg Heft 11.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn.  
M 1.60.

## Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

11. ATTWOOD, E. L., and COOPER, J. C. G., A textbook of laying off; or the geometry of shipbuilding. New York 1914, Longmans. Cloth \$ 1.75.
12. DALWIGK, F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie. (In 2 Bänden.) II. Perspektive, Zentralkollineation u. Grundzüge der Photogrammetrie. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.  
M 10.—; geb. in Leinw. M 11.—.
13. KOMMERELL, V., Raumgeometrie (Stereometrie u. darstellende Geometrie). Mit Benützung v. Kommerell-Haucks Lehrbuch der Stereometrie f. den Schulgebrauch bearbeitet. 2. Aufl. Tübingen 1914, Laupp.
14. PIRANI, MARCELLO v., Graphische Darstellung in Wissenschaft u. Technik. (Sammlung Göschen Nr. 728.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen.  
geb. in Leinw. M —.90.
15. TRACY, J. C., and NORTH, H. B., Descriptive geometry. I. Lines and planes. II. Solids. New York 1914, Wiley.  
Cloth. \$ 2.—.

**Geschichte.**

16. BUBNOW, NIKOLAUS, Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte. Berlin 1914, Friedländer & Sohn. *M* 10.—.  
S. auch 6.

**Mechanik.**

17. BENDIXSEN, AXEL, Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen. Berlin 1914, Springer. *M* 3.—.
18. BOURGUIGNON, P., Cours de cinématique théorique et appliquée. T. II. Paris 1914, Prieur. Fr. 15.—.
19. COTTON, ÉMILE, Cours de Mécanique générale. (Introduction à l'étude de la Mécanique industrielle.) Vecteurs — Géométrie des masses — Principes — Cinématique — Statique. (Bibliothèque de l'Élève Ingénieur.) Grenoble 1914, Rey. (Paris, Gauthiers-Villars et C<sup>ie</sup>.) Fr. 5.—.
20. DUNCAN, J., Applied mechanics for engineers. New York 1914, Macmillan. Cloth \$ 2.60.
21. FANKHAUSER, ED., Die Festigkeit kegel- und kugelförmiger Böden u. Deckel. (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 162. u. 163. Heft.) Berlin 1914, Springer. *M* 2.—.
22. HERNDL, A., Formelsammlung u. Anleitung f. die Berechnung v. Massivkonstruktionen aus Eisenbeton. München 1914, Duncker & Humblot. geb. in Leinw. *M* 3.20.
23. KLEINLOGEL, A., Rahmenformeln. Gebrauchsfertige Formeln f. einhüftige, zwei-stielige, dreieckförmige u. geschlossene Rahmen aus Eisen oder Eisenbeton, nebst Anh. in Sonderfällen teilweise u. ganz eingespannter Träger. Berlin 1914, Ernst & Sohn. *M* 10.—; geb. *M* 11.—.
24. MAGGI, GIAN ANTONIO, Geometria del movimento. Lezioni di Cinematica, con un 'appendice sulla Geometria della Massa. Pisa 1914, Spoerri.
25. MAURER, E. R., Technical mechanics. 3d ed., rewritten. New York 1914, Wiley. Cloth. \$ 2.50.
26. NEWTON, ISAAC, DAN. BERNOULLI u. PATRICK D'ARCY, Abhandlungen über jene Grundsätze der Mechanik, die Integrale der Differentialgleichungen liefern (1687; 1745 u. 1747). (Ostwald's Klassiker Nr. 191). Aus dem Lat. u. Franz. übers. von A. v. Öttingen. Hrsg. v. E. B. Jourdain. Leipzig 1914, Engelmann. geb. in Leinw. *M* 2.80.
27. POHL, KARL, Untersuchungen üb. das Zusammenwirken wagerechter Verbände u. eingespannter Stützen im Eisenhochbau. Leipzig 1914, Engelmann. *M* 2.80.  
S. auch 9, 30, 41, 51, 59, 60, 61.

**Physik.**

28. BECKER, A. u. C. RAMSAUER, Über radioaktive Meßmethoden u. Einheiten. Aus dem radiolog. Institut der Universität Heidelberg. Mit e. Vorwort v. P. Lenard. Heidelberg 1914, Winter. *M* —.80.
29. BERNDT, GEO. W., Physikalisches Praktikum. 2. Tl. Elektrizität u. Magnetismus. 2. verb. u. verm. Aufl. v.: Physikalisches Praktikum 2. Tl. v. G. Berndt u. B. Boldt. Jena 1914, Schmidt. geb. in Leinw. *M* 4.50.
30. BRILL, A., Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 1.20.
31. DANNEEL, HEINRICH, Elektrochemie II. Experimentelle Elektrochemie. Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. 2. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 253.) Berlin u. Leipzig 1914, Göschen. geb. in Leinw. *M* —.90.
32. FINDLAY, ALEX., Der osmotische Druck. Autoris. deutsche Ausg. v. Guido Szivessy. Mit e. Einföhrng. zur deutschen Ausg. v. Wilh. Ostwald. Dresden 1914, Steinkopff. *M* 4.—.

33. GRIMSEHL, E., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche beim Unterricht, bei akadem. Vorlesungen u. zum Selbststudium. (In 2 Bdn.) 1. Bd. 3., verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1914, Teubner. Für vollständig  $\mathcal{M}$  15.—; geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  16.—.
34. HÄNERT, L., Physikalische Aufgaben der Artillerie, Navigation u. des Schiffbaus. (Beiheft zur angewandten Mechanik, Leitfaden der Naturlehr.) Berlin 1914, Mittler & Sohn.  $\mathcal{M}$  2.—.
35. HEIMHOLTZ, H. v., Vorlesungen über theoretische Physik. Hrsg. v. Arth. König, Otto Krigar-Menzel, Carl Runge. 5. Bd. Vorlesungen üb. die elektromagnet. Theorie des Lichts. Hrsg. v. Arth. König u. Carl Runge. 2. unveränd. Abdr. (Manuldr.) Leipzig (1897) 1914, Barth.  $\mathcal{M}$  14.—; geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  15.50.
36. HUGHES, A. L., Photo-Electricity. Cambridge 1914, University Press. 6 s.
37. KAROLLUS, FRANZ, Anflösungen der Aufgaben im Lehrbuche der Physik f. die oberen Klassen der Mittelschulen von Ignaz G. Wallentin. Mit Anleitungen bei schwierigeren Aufgaben. Wien 1914, Pichlers Witwe & Sohn. K. 1.—.
38. KOHLRAUSCH, FRIEDRICH, Lehrbuch der praktischen Physik. 12., stark vermehrte Aufl., in Gemeinschaft m. H. Geiger, E. Grüneisen, L. Holborn, W. Jäger, E. Orlich, K. Scheel, O. Schönrock hrsg. v. E. Warburg. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  11.—.
39. LANGGUTH, MAX J., Der physikalische Schülerversuch in der Volksschule. Hildesheim u. Leipzig 1914, Lax.  $\mathcal{M}$  3.—; geb.  $\mathcal{M}$  3.70.
40. LODGE, SIR OLIVER, Radioaktivität u. Kontinuität. 2 Vorträge. (I. Die Entdeckung der Radioaktivität u. deren Einfluß auf die Entwicklung der physikal. Wissenschaft, Becquerel-Gedächtnisrede. II. Kontinuität. Eröffnungsrede.) Leipzig 1914, Barth.  $\mathcal{M}$  5.—; geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  6.—.
41. LORENTZ, H. A., Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen, gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem, bearb. v. W. H. Keesom. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.  $\mathcal{M}$  1.40.
42. LUMMER, O., Verflüssigung der Kohle u. Herstellung der Sonnentemperatur. (Sammlung Vieweg, Doppelheft 9/10.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn.  $\mathcal{M}$  5.—.
43. LYON, W. V., Problems in alternating current machinery. New York 1914, Mc Graw-Hill. Cloth \$ 1.50.
44. MORECROFT, J. H., Continuous and alternating current machinery. (Wiley technical series.) New York 1914, Wiley. Cloth \$ 1.75.
45. OMBECK, HUGO, Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, hrsg. vom Verein deutscher Ingenieure, 158. u. 159. Heft.) Berlin 1914, Springer.  $\mathcal{M}$  2.—.
46. PUNT, Elektrotechnisches Merkbuch f. Artillerie-Spezialisten der Kaiserlichen Marine. Berlin 1914, Mittler u. Sohn. Brosch.  $\mathcal{M}$  2.—.
47. SUMPF, K., Grundriß der Physik. Ausg. B, vorzugweise f. Realschulen u. die Unterstufe höherer Realanstalten, höhere Bürgerschulen u. verwandte Anstalten. Hrsg. v. H. Hartenstein u. W. Bahrdt. Hildesheim u. Leipzig, Lax. geb.  $\mathcal{M}$  2.70.
48. TREFFTZ, ERICH, Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. Diss. Straßburg i. E. Leipzig 1914, Teubner.  $\mathcal{M}$  2.—.
49. THOMSON, WILLIAM, Über die dynamische Theorie der Wärme mit numerischen Ergebnissen aus Herrn Joules Äquivalent e. thermischen Einheit u. Herrn Regnaults Messungen am Dampf (1851 u. 1852). (Ostwalds Klassiker Nr. 193.) Ins Deutsche übertr. u. hrsg. v. Walt. Block. Leipzig 1914, Engelmann. geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  5.20.
50. WEIMARN, P. P. v., Zur Lehre v. den Zuständen der Materie (Preisschrift der kaiserl. Akademie der Wissenschaften St. Petersburg u. der kaiserlichen Universität Moskau.) 2 Bde. Text und Atlas. Dresden 1914, Steinkopff.  $\mathcal{M}$  7.—; geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  9.—.

51. WEINSTEIN, MAX B., Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld. (Sammlung Vieweg Heft 8.) Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 2.—  
 52. ZEHNDER, LUDWIG, Grundriß der Physik. 2. umgearb. Aufl. Tübingen 1914, Laupp. *M* 7.—; geb. in Leinw. *M* 8.—

#### Tafeln, Rechenapparate.

53. KENNELLY, A. E., Complex hyperbolic and circular functions. Vol. 1: Tables. Cambridge, Mass., 1914, Harvard University. \$ 3.—  
 54. PASCAL, E., I miei integrali per equazioni differenziali. Napoli 1914, Pellerano. L. 6.—  
 55. TRAUTWINE, J. C., Table of four-place logarithms from Trautwine's civil engineers pocket-book. Philadelphia 1914, Trautwine. S. auch 14, 16.

#### Verschiedenes.

56. BONNAR, W., The mathematical laws of psychic phenomena; discovered, formulated and elucidated with practical diagrams. Buffalo, N. Y., 1913. Bonnar. £ 5.—  
 57. Ergebnis der Beratungen des Deutschen Ausschusses für technisches Schulwesen über Hochschulfragen. V. Bericht des Deutschen Ausschusses für technisches Schulwesen. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.  
 58. GUTZMER, A., Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908 bis 1913. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner.  
 59. Leitfaden für den Unterricht in der Artillerie auf der Marineschule, Schiffsartillerie-Schule und an Bord der Schulschiffe. 2. Teil: Pulverlehre, theoretische Ballistik, angewandte Ballistik und Schußwirkung. Hrsg. v. der Inspektion des Bildungswesens der Marine 5., neubearb. Aufl. Berlin 1914, Mittler u. Sohn. *M* 3.25; geb. *M* 4.—  
 60. MOYER, J. A., Steam turbines; a practical and theoretical treatise, including a discussion of the gas turbine. 2d edition revised and enlarged. New York 1914. Wiley. Cloth £ 3.50  
 61. SCHOKLITSCH, ARMIN, Über Schleppkraft und Geschiebebewegung. Leipzig 1914, Engelmann. *M* 3.20  
 62. SCHOUTEN, J. A., Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. Mit einem Einführungswort v. F. Klein. Leipzig und Berlin 1914, Teubner. *M* 11.—  
 63. WÜLFING, E. A., Die 32 kristallographischen Symmetrieklassen u. ihre einfachen Formen. 2., gänzlich umgestaltete u. erweiterte Aufl. der Tabellarischen Übersicht der einfachen Formen der 32 kristallographischen Symmetriegruppen. Berlin 1914, Gebr. Bornträger. *M* 4.40

#### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ÅKESSON, O. A., The motion and the distribution of the sunspots. A statistical investigation, (Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, serie II, Nr. 11. Kongl. Physiografiska Sällskapets Handlingar, Band 25, Nr. 10). Lund 914. (Leipzig, Harrassowitz.)  
 BARTHEL, ERNST, Der Irrtum „g“. Ein Traktat über den freien Fall. Leipzig 1914, Hillmann. *M* 1.—

- BERLINER, H., Involutionsysteme in der Ebene des Dreiecks. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 8. —
- BRAUDE, L., Les coordonnées intrinsèques. Théorie et applications. Avec un portrait d'Ernest Cesàro. („Scientia“ Nr. 34.) Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 2. —
- BRILL, A., Das Relativitätsprinzip, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 30.
- BUDNOW, N., Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur, s. N. B. 16.
- COTTON, E., Cours de mécanique générale, s. N. B. 19.
- CZUBER, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 1.
- DALWIGK, F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie, II, s. N. B. 12.
- DANNEEL, H., Elektrochemie, II, s. N. B. 31.
- DICKSON, L. E., Linear algebras. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 16.) Cambridge 1914, University Press. 3 s.
- Ergebnis der Beratungen des Deutschen Ausschusses f. technisches Schulwesen über Hochschulfragen, s. N. B. 57.
- FABARIUS, WALDEMAR, Leonard Euler und das Problem Fermat. Ein Nachtrag zu Eulers Anleitung zur Algebra. Cassel 1914, Siering. *M* 1. 20.
- FORSYTH, A. R., A treatise on Differential Equations. 4<sup>th</sup> ed. London 1914, Macmillan and Co. 14 s.
- GOUSSAT, ÉDOUARD, Lehrbuch der Analysis. I. Nach der 2. Aufl. des französischen Originals übersetzt v. Felix James Schwarz †. Mit einem Begleitwort v. Gerhard Kowalewski, Leipzig 1914, Veit & Co. *M* 12. —; geb. *M* 13.50.
- GUTZMER, A., Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses f. den mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht, s. N. B. 58.
- HÄNERT, L., Physikalische Aufgaben, s. N. B. 34.
- HELß, J., Über die Newtonsche Näherungsmethode, s. N. B. 2.
- HENJE, HANS, The distribution of the stars to the eleventh magnitude. (Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium serie II, Nr. 10. Kongl. Fysio-grafiska Sällskapets Handlingar. Band 25, Nr. 1.) Lund 1914. (Leipzig, Harrassowitz.)
- KAROLLUS, FRANZ, Auflösungen der Aufgaben im Lehrbuche der Physik f. die oberen Klassen der Mittelschulen von Ignaz G. Wallentin. Gelöst u. mit Anleitungen bei schwierigen Aufgaben versehen. Wien 1914, Pichlers Witwe & Sohn.
- KNAB, PETER, Rechenbuch f. höhere u. mittlere Lehranstalten. 2. u. 3., verb. Aufl. Freiburg i. B. 1914, Herder. *M* 2.50; geb. *M* 3. —.
- KRAUS, KONRAD, Grundriß der Geometrie u. d. geometrischen Zeichnens f. Lehrerbildungsanstalten. 4., umgearb. Aufl. Wien 1914, Pichlers Witwe & Sohn. geb. K. 2.70.
- KOHLRAUSCH, FR., Lehrbuch der praktischen Physik, s. N. B. 38.
- KOMMERELL, V., Raumgeometrie (Stereometrie u. darstellende Geometrie) s. N. B. 13.
- LANGGUTH, MAX J., Der physikalische Schülerversuch in der Volksschule, s. N. B. 39.
- Leitfaden f. den Unterricht in der Artillerie, s. N. B. 59.
- LORENTZ, H. A., Das Relativitätsprinzip, s. N. B. 41.
- LUMMER, O., Verflüssigung der Kohle u. Herstellung der Sonnentemperatur, s. N. B. 42.
- MAGGI, GIAN ANTONIO, Dinamica fisica. Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali. Con un appendice sul Calcolo del Movimento, il Calcolo Vettoriale e la Cinematica. Pisa 1912, Spoerri. L 8. —
- MAGGI, G. A., Geometria del movimento, s. N. B. 24.
- NEUMANN, C., Über die Dirichletsche Theorie der Fourierschen Reihen. Ein Versuch, die Dirichletsche Theorie so umzugestalten, daß sie Auskunft gibt nicht nur über die Gleichwertigkeit zwischen der gegebenen Funktion und der ihr entsprechenden Fourierschen Reihe, sowie über die Konvergenz der Reihe, sondern auch über die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz. (Abh. der mathem. physikal. Klasse der Kgl. sächs. Ges. der Wiss. Nr. II.) Leipzig 1914, Teubner. *M* 3. —.

- PIRANI, M. v., Graphische Darstellung in Wissenschaft u. Technik, s. N. B. 14.
- PRZYBYLLOK, E., Polhöhen-Schwankungen. s. N. B. 10.
- PUNT, Elektrotechnisches Merkbuch, s. N. B. 46.
- SCHOUTEN, S. A., Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, s. N. B. 62.
- Schulwart-Fachkatalog Nr. 4: Physik, Chemie, Technologie. Leipzig 1914,  
Volckmar. kostenfrei.
- Derselbe Nr. 5. Mathematik, technische Fächer, Fachunterricht. Ebenda.  
kostenfrei.
- SCHWERING, KARL, u. KBIMPHOFF, WILH., Ebene Geometrie, nach den amtlichen Vor-  
schriften bearb. 8. Aufl. Freiburg i. B. 1914, Herder. *M* 2.—; geb. *M* 2.50.
- SEBRET, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks  
Übersetzung. 4. u. 5. Aufl., bearb. v. Georg Scheffers. III. Differentialgleichungen  
u. Variationsrechnung. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 13.—; geb. in  
Leinw. *M* 14.—
- SUMPF-HARTENSTEIN-BAHRDT, Grundriß der Physik, s. N. B. 47.
- THOMPSON, A. W. H., A new analysis of plane geometry, finite and differential.  
With numerous examples. Cambridge 1914, University Press.
- TREFFTZ, E., Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen, s. N. B. 49.
- Verwaltungs-Bericht über das zehnte Geschäftsjahr 1912—1913 und Bericht  
über die zehnte Ausschußsitzung des Deutschen Museums. München 1914,  
Oldenbourg.
- WEINSTEIN, M. B., Kräfte u. Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld, s.  
N. B. 51.
- WIELEUTNER, H., Algebraische Kurven. I. Gestaltliche Verhältnisse. (Sammlung  
Götschen Nr. 435, neue Bearbeitung.) Berlin u. Leipzig 1914, Götschen. geb. in  
Leinw. *M* —.90.
- WÜLFING, E. A., Die 32 kristallographischen Symmetrieklassen u. ihre einfachen  
Formen, s. N. B. 63.
- ZEHNDER, LUDW., Grundriß der Physik, s. N. 52.
- ZEUTHEN, H. G., Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. (Teubners  
Sammlung Bd. 39.) Leipzig u. Berlin 1914. Teubner. *M* 16.—; geb. *M* 17.—.