ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA

F. Brioschi e L. Cremona,

in continuazione di quelli già pubblicati dal prof. Tortolini.

SERIE II. - TOMO VII.

(dal maggio 1875 all'ottobre 1876.)

MILANO.

G. BERNARDONI EDITORE-TIPOGRAFO.

INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES COURBES

QUI ONT UNE MÊME SURFACE POLAIRE

(*par Mr. l'abbé* Aoust *professeur à Marseille.*)

La recherche des courbes qui ont une même surface polaire, lieu des intersections successives des plans normaux à ces courbes, dépend du calcul intégral; elle se lie intimement à plusieurs questions de la théorie des surfaces et entre autres à la détermination des surfaces dont toutes les lignes de courbure d'une série sont planes; elle se lie aussi à plusieurs problèmes sur les courbes non planes, tels que le problème des courbes parallèles, des courbes développées d'une courbe donnée. Le but de ce travail est de montrer comment on obtient les intégrales premières et secondes des équations différentielles des courbes de la question posée au moyen des équations que nous avons données (*Comptes rendus,* t. 70, pag. 978) du problème général des roulettes dans le cas où une courbe non plane, entrainant le point décrivant, roule sur une courbe également non plane sous cette condition que les plans osculateurs des deux courbes coïncident à chaque instant.

Pour mettre la solution dont nous parlons dans tout son jour, il convient de traiter d'abord analytiquement la question et de la résoudre ensuite au moyen des formules des roulettes.

§ I. Solution analytique.

1. *Equations différentielles.* Soient les équations de l'arête de rebroussement de la surface polaire

(1) $$\{x' = \phi(t), \quad y' = \phi_1(t), \quad z' = \phi_2(t)\};$$

t étant la variable qui fixe la position du point; x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe; x, y, z les coordonnées du point correspondant de la courbe cherchée. Nous appelerons C', C la première et la seconde de ces courbes. Soient τ, ρ, ν la tangente, le rayon de courbure, et la binormale de la courbe C; $d\varepsilon$, $d\omega$, $d\vartheta$ les angles de première, de seconde et de troisième courbure; ds la différentielle de l'arc; nous représentons par les mêmes lettres accentuées les éléments correspondants de la courbe C'. Il est évident que les coordonnées x', y', z' de l'arête C' sont données par les équations du plan normal à la courbe C supposée connue, et les derivées première et seconde de cette équation. Si l'on représente ces trois équations par

$$(2) \qquad \{N=0, \quad N'=0, \quad N''=0\}$$

le système de ces trois équations dans les quelles x', y', z' sont remplacées par leurs valeurs tirées des équations (1), sont les équations différentielles des courbes cherchées.

2. *Réduction des équations différentielles.* Les équations (2) sont des équations différentielles du premier, du deuxième et du troisième ordre; nous allons prouver que l'intégration de ces équations ne dépend que d'une équation du second ordre, linéaire, à coefficients constants à l'exception du dernier terme qui est fonction de la variable t. Si nous employons le signe S pour indiquer une somme qui s'étend à chacune des coordonnées x, y, z, la première des équations N est

$$N=S(x-x')\cos\widehat{\tau x}=0;$$

elle exprime que la distance de deux points correspondants des deux courbes C et C' est normale à la tangente τ. Si l'on a égard aux valeurs des différentielles de $\cos\widehat{\tau x}$ et de $\cos\widehat{\rho x}$ qui sont:

$$\frac{d\cos\widehat{\tau x}}{ds}=\frac{\cos\widehat{\rho x}}{\rho}, \quad \frac{d\cos\widehat{\rho x}}{ds}=-\frac{\cos\widehat{\tau x}}{\rho}-\frac{d\omega}{ds}\cos\widehat{\nu x};$$

on a pour l'équation N':

$$N'=S(x'-x)\frac{d\cos\widehat{\tau x}}{ds}-1=S(x'-x)\cos\widehat{\rho x}-\rho=0;$$

et pour l'équation N'':

$$N''=S(x'-x)\frac{d\cos\widehat{\rho x}}{ds}-\frac{d\rho}{ds}=S(x'-x)\cos\widehat{\nu x}+\frac{d\rho}{d\omega}=0.$$

Or, l'équation N' exprime que la projection de la distance de deux points correspondants des deux courbes C et C' sur le rayon de courbure de la courbe C est égale à ce rayon de courbure, et la seconde, que la projection de cette même distance sur la génératrice de la surface polaire est égale à $-\frac{d\rho}{d\omega}$; cette distance peut donc être considérée comme la résultante de deux composantes orthogonales, l'une égale à ρ, et l'autre égale à $-\frac{d\rho}{d\omega}$; cela posé, comme la projection d'une résultante sur une direction est égal à la somme des projections des composantes sur la même direction, si l'on remarque que ρ, ρ'; τ, ν'; ν, τ' sont parallèles deux à deux, et que, par suite, $d\varepsilon'$, $d\omega$ sont égaux, ainsi que $d\varepsilon$ et $d\omega'$, l'on obtient les trois équations contenues dans le type suivant, en y remplaçant successivement x, x' par y, y'; z, z'.

$$x' - x = \rho \cos \widehat{\rho' x} - \frac{d\rho}{d\varepsilon'} \cos \widehat{\tau' x}; \tag{3}$$

et ces équations ont cela de remarquable que les quantités x', $\cos\widehat{\rho' x}$, $\cos\widehat{\tau' x}$ $d\varepsilon'$ se rapportant maintenant à la courbe C' et nullement à la courbe C, sont des fonctions connues de la variable t, de sorte que si l'on obtient ρ en fonction de t, les coordonnées x, y, z seront connues en fonction de cette variable au moyen de ces équations. Si l'on différentie l'équation (3), on trouvera par des réductions intuitives, l'équation suivante

$$\rho + \frac{d}{d\varepsilon'}\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon'}\right) = \rho'. \tag{4}$$

Cette équation se rapportant aussi à la courbe C', il en résulte que le rayon ρ' de courbure de la courbe C' est connu en fonction de ε' et que, par conséquence, l'intégration des équations N, N', N'' est ramenée à l'intégration d'une seule équation linéaire du second ordre à coefficients constants entre les deux variables ρ et ε', ε' étant égale à $\int d\varepsilon' + \varepsilon_0$, dans la quelle ε_0 est la constante d'intégration.

3. *Intégrales.* L'équation (4) s'intègre immédiatement, et si l'on représente par a et b les constantes introduites par l'intégration, on obtient l'équation suivante :

$$\rho = a \sin\varepsilon' + b \cos\varepsilon' + \sin\varepsilon' \int \rho' \cos\varepsilon' d\varepsilon' - \cos\varepsilon' \int \rho' \sin\varepsilon' d\varepsilon'. \tag{5}$$

Les équations (1) de la courbe C' font connaître ε' en fonction de la variable

t, donc si dans l'équation (5) on remplace ε' par cette fonction et qu'on porte les valeurs de ρ et de $\frac{d\rho}{d\varepsilon'}$ dans les trois équations (3), on aura les intégrales générales des équations différentielles (2), et ces intégrales feront connaître x, y, z explicitement en fonction de t. Mais il est mieux d'éxprimer en fonction de ε' les coordonnées x', y', z' ainsi que les cosinus des angles que τ' et ρ' font avec les trois axes; on obtient ainsi les trois équations contenues dans le type suivant

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x'-x &= (\sin\varepsilon'\cos\widehat{\rho' x}-\cos\varepsilon'\cos\tau' x)\left(a+\int\rho'\cos\varepsilon' d\varepsilon'\right)+\\ &+(\cos\varepsilon'\cos\widehat{\rho' x}+\sin\varepsilon'\cos\widehat{\tau' x})\left(b-\int\rho'\sin\varepsilon' d\varepsilon'\right),\end{aligned}\right.$$

lesquelles sont les intégrales générales des courbes qui ont pour surface polaire la surface développable, lieu des tangentes à la courbe donnée C'; ce qui est la solution du problème que nous nous étions proposé.

§ II. Solution géométrique.

4. *Première méthode.* Cette méthode fait dépendre la question d'une seule équation linéaire du premier ordre et conduit avec non moins de facilité aux intégrales des courbes dont il s'agit.

Développons la surface polaire sur un de ses plans tangents; la courbe C' se transformera en une courbe plane C'_1; menons par un point fixe O'_1 du plan les deux axes $O'_1x'_1$, $O'_1y'_1$, rectangulaires, situés dans ce plan; les coordonnées x'_1, y'_1 d'un point de la courbe C' par rapport à ces axes seront donnés par les équations:

$$(7)\qquad \left\{x'_1-x_0=\int\rho'\cos\varepsilon' d\varepsilon',\quad y'_1-y_0=\int\rho'\sin\varepsilon' d\varepsilon'\right\},$$

il suffit maintenant d'exprimer en fonction de ε' les coordonnées x, y, z du point O'_1 par rapport aux axes fixes auxquels la courbe C' est rapportée; or, si dans les différentes positions du plan tangent, on abaisse du point O'_1 une perpendiculaire p à la tangente à la courbe C', qui se confond avec la génératrice rectiligne de contact, le lieu des pieds M de la perpendiculaire dans le plan tangent sera la podaire du point O'_1 par rapport à la courbe C'_1 et si l'on appelle τ' la longueur comptée sur cette tangente à partir du point de contact jusqu'au pied M de la perpendiculaire, et α l'angle de cette perpendiculaire avec l'élément de la podaire, on aura les deux équations suivantes:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{-d\tau' + ds'}{\tau' d\varepsilon'} = \frac{p}{\tau'}. \tag{8}$$

Si l'on remarque que par la nature de la podaire l'angle α est égal à l'angle que la distance du point O'_1 au point correspondant de la courbe C'_1 fait avec la tangente τ', on aura la relation:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{y'_1 dx'_1 - x'_1 dy'_1}{y'_1 dy'_1 + x'_1 dx'_1}, \tag{9}$$

laquelle fera connaître tang α en fonction de ε' au moyen des équations (7) de la courbe C'_1; d'après cela, la première des équations (8) que nous écrivons sous la forme suivante:

$$\frac{d\tau'}{d\varepsilon'} + \tau' \text{tang}\,\alpha - \rho' = 0, \tag{10}$$

devient l'équation résolvante de la question. C'est une équation linéaire du premier ordre entre les deux variables τ' et ε'; son intégrale est

$$\tau' = e^{-\int \text{tang}\alpha . d\varepsilon'} \left(\tau_0 + \int \rho' e^{\int \text{tang}\alpha . d\varepsilon'} d\varepsilon' \right). \tag{11}$$

D'une autre part, la seconde des équations (8) donne p en fonction de ε', exprimée explicitement par la relation suivante

$$p = \text{tang}\,\alpha \cdot e^{-\int \text{tang}\alpha . d\varepsilon'} \left(\tau_0 + \int \rho' e^{\int \text{tang}\alpha d\varepsilon'} \cdot d\varepsilon' \right) \tag{12}$$

en remarquant que dans ces deux équations la constante d'intégration est τ_0 laquelle est fonction des constantes x_0, y_0.

Les équations (11) et (12) donnent la solution de la question, puisque, si l'on projette la figure sur les axes fixes de x, y, z, on obtiendra les trois équations contenues dans le type suivant:

$$x' - x = -\tau' \cos \widehat{\tau'_1 x} + p \cos \widehat{\rho'_1 x} \qquad [3]\ (*) \tag{3'}$$

dans lesquelles il suffira de substituer les valeurs de τ' et de p que nous venons de trouver.

(*) Le chiffre 3 entre crochets [ ], placé à droite d'une équation, indique le nombre d'équations que l'on obtient en y changeant successivement x en y et en z.

5. *Seconde équation résolvante.* On peut, sans sortir de la méthode, éviter l'équation linéaire complète (10) et obtenir une équation résolvante plus simple. En effet, si l'on rapporte la podaire à ses deux coordonnées polaires qui sont, d'une part, le rayon vecteur p et, de l'autre, l'angle $pO'_1x'_1$, on a l'équation

$$\frac{dp}{p} = \operatorname{cotg}\alpha \, d\varepsilon'; \tag{13}$$

et comme α est connu en fonction de ε' par suite de l'équation (9), les variables de l'équation (13) sont séparées, et l'on obtient l'intégrale suivante

$$p = p_0 e^{\int \operatorname{cotg}\alpha d\varepsilon'},$$

dans laquelle p_0 est la constante d'intégration. En portant cette valeur dans la seconde des équations (8), on trouve la valeur de τ'

$$\tau' = p_0 \operatorname{cotg}\alpha \, e^{\int \operatorname{cotg}\alpha d\varepsilon'},$$

et finalement les équations (3)', dans lesquelles on substitue les valeurs de p et de τ' que nous venons de trouver, deviennent

$$x' - x = p_0(\operatorname{cotg}\alpha \cos\widehat{\tau' x} + \cos\widehat{\rho' x})e^{\int \operatorname{cotg}\alpha d\varepsilon'}. \quad [3] \tag{6)'$$

6. *Seconde méthode.* La marche que nous allons suivre donne immédiatement, sous forme explicite, les intégrales du problème qui se présente alors comme cas particulier du problème général des roulettes, enoncé sous la forme suivante (*Comptes rendus*, t. 70, pag. 978): « Une courbe non plane roule sans glissement sur une autre courbe non plane avec cette condition, qu'à chaque instant les plans osculateurs des deux courbes coïncident; trouver sous forme finie les équations de la courbe engendrée par un point solidairement lié avec la première courbe. »

Considérons la courbe plane C'_1 qui aurait pour rayon de courbure la même fonction de ε' qui donne la valeur de ρ'; les équations cartésiennes de la courbe C'_1 par rapport à deux axes rectangulaires $O'_1x'_1$, $O'_1y'_1$ menés dans son plan par le point fixe O'_1 sont celles que nous avons données au commencement du n.° 4; on connait donc en fonction d'une seule variable ε' ou t la distance R d'un point de la courbe C'_1 au point O'_1, ainsi que l'angle de cette distance avec la droite fixe $O'_1x'_1$. Supposons maintenant que l'on fasse rouler sans glissement la courbe C'_1 sur la courbe C', par cette condition que le plan de la première coïncide à chaque instant avec le plan osculateur de la seconde; le point O'_1 engendrera, dans ce mouvement, la courbe cherchée, de sorte que si

x, y, z sont les coordonnées du point décrivant O'_1 par rapport aux axes fixes auxquels la courbe C' est rapportée, en remarquant que $\cos \widehat{R\nu}$ est nul par ce que l'angle $\widehat{R\nu}$ est droit, on aura les trois équations contenues dans le type suivant:

$$(6)'' \qquad x - x' = R(\cos \widehat{R\tau'} \cos \widehat{\tau' x} + \cos \widehat{R\rho'} \cos \widehat{\rho' x}); \quad [3]$$

et comme tout est connu dans le second membre en fonction de t ou de ε', ce sont les équations de la courbe et, par conséquent, elles ne sont pas distinctes des intégrales des équations différentielles (2).

7. *Identité des intégrales.* Il est facile de démontrer *a postériori* que les différentes intégrales que nous venons d'obtenir par différents procédés, sont identiques.

Considérons en premier lieu les équations (6) fournies par le procédé analytique; si l'on rapporte les deux axes $O'_1 x'_1$, Ox aux trois directions rectangulaires τ', ρ', ν', et qu'on remarque que les angles $\widehat{x'_1 \nu}$, $\widehat{y'_1 \nu}$ sont droits, on a les deux équations:

$$\cos \widehat{x'_1 x} = -\cos \widehat{\tau' x} \cos \varepsilon' + \cos \widehat{\rho' x} \sin \varepsilon',$$

$$\cos \widehat{y'_1 x} = \cos \widehat{\tau' x} \sin \varepsilon' + \cos \widehat{\rho' x} \cos \varepsilon'.$$

Donc, si l'on a égard aux équations (7), les équations (6) deviennent

$$x' - x = x'_1 \cos \widehat{x'_1 x} + y'_1 \cos \widehat{y'_1 x} = R \cos \widehat{Rx}. \quad [3]$$

Donc les intégrales (6) ne sont pas distinctes des équations (6)'.

En second lieu, si l'on élimine τ' et α entre l'équation (13) et les deux équations (8), on tombe sur l'équation

$$\rho' = p + \frac{d}{d\varepsilon'}\left(\frac{dp}{d\varepsilon'}\right),$$

qui coïncide avec l'équation (4). Ceci prouve que la solution analytique du problème ne diffère pas de la solution donnée par la première méthode géométrique.

Ainsi la marche due à la géométrie a cet avantage que, suivant les propriétés géométriques mises en jeu pour trouver la courbe, on tombe ou sur une relation différentielle du second ordre, ou sur une différentielle du premier ordre, ou enfin sur une équation finie. Les deux premières circonstances se rapportent au cas où les propriétés sont relatives au rayon de courbure ou à la tangente; la dernière se rapporte au cas où ces propriétés dévoilent un mode de génération de la courbe par suite du déplacement d'un de ses points.

§ III. **Passage d'une intégrale particulière à l'intégrale générale.**

8. *Des courbes parallèles.* Si l'on mène à une courbe C une série de normales des différents points de cette courbe, de sorte que deux normales infiniment voisines se rencontrent, et qu'à partir des pieds de toutes ces normales on porte sur chacune des longueurs égales, les extrèmités de ces longueurs formeront une seconde courbe qui est la *courbe parallèle* de la ligne C. Il est évident que la courbe C et la parallèle ont même surface polaire, lieu des intersections des plans normaux; de là résulte que si l'on connait une seule courbe C, en cherchant les courbes parallèles on aura toutes les courbes qui ont même surface polaire que la ligne C. On voit, en effet, que les équations d'une courbe parallèle d'une courbe donnée contiennent deux constantes arbitraires: l'une relative à la position d'une des normales de la série qui se rencontrent successivement et l'autre relative à la longueur invariable, prise sur chacune d'elles à partir de son pied; et on voit de plus que, par une détermination convenable de ces deux constantes, on peut faire passer la courbe par un point quelconque de l'espace. Ces considérations montrent que lorsqu'on connait un seul système d'intégrales particulières des équations (2), on peut obtenir les intégrales générales. Ainsi, le passage d'une intégrale particulière à l'intégrale générale est une question que la géométrie sait aussi résoudre.

Des développées d'une courbe non plane. Si l'on mène en tous les points de la courbe C les normales qui se rencontrent deux à deux successivement, le lieu des intersections est une développée de la courbe C. Si l'on développe successivement tous les plans normaux de la courbe C sur un seul, tous les points de la courbe C se reduiront à un seul point A; donc tous les pieds des normales se superposeront, et comme elles se rencontrent deux à deux successivement, toutes les normales seront superposées et ne formeront, par le développement de la surface polaire qu'une seule et même ligne droite. De là résulte que si réciproquement, on mène dans ce plan par le point A toutes les droites possibles, lorsque le plan s'enveloppera sur la surface polaire, les droites s'enrouleront sur les développées de la courbe C; et comme ce raisonnement existe pour une quelconque des courbes parallèles de la ligne C, on voit qu'une droite quelconque tracée dans le plan normal avant son enveloppement sur la surface polaire, déterminera lorsqu'il l'aura enveloppée une courbe développée ou de la courbe C ou d'une des parallèles de cette courbe. On voit également que toutes les courbes parallèles d'une ligne C ont, pour des points correspondants, même flexion $d\omega$ et que leurs rayons de première courbure ne peuvent différer que par une constante.

9. *Recherche des équations des lignes parallèles à une ligne C.* Il y a deux cas à considerer, suivant que l'on connait les équations de la courbe C ou les équations de la courbe C', arête de rebroussement de la surface polaire de la courbe C.

1.° Si l'on connait les équations

$$x=f(t),\quad y=f_1(t),\quad z=f_2(t)$$

de la courbe C, on mène par deux points infiniment voisins pris sur cette courbe deux normales qui se rencontrent en un point de la surface polaire de la courbe C; l'angle de la normale et de la génératrice correspondante de cette surface est égale à la somme des flexions $d\omega$ de la courbe C augmentée d'une constante relative à la génératrice initiale, et variant, pour cette génératrice, suivant l'inclinaison de la normale initiale sur cette génératrice, de sorte que cet angle Ω est donné par la relation

$$\Omega=\int d\omega+\omega_0;$$

or, si l'on opère comme au n.° 7 et qu'on appelle n la longueur constante comptée sur la normale à partir de son pied, on a les trois équations contenues dans le type suivant:

$$\cos\widehat{nx}=\cos\widehat{\rho x}\sin\left(\omega_0+\int d\omega\right)+\cos\widehat{\nu x}\cos\left(\omega_0+\int d\omega\right)\qquad[3]$$

qui font connaître les angles que la normale n fait avec les trois axes; par conséquent, les équations de la courbe parallèle de la courbe C, sont

$$(14)\qquad \frac{X-x}{\cos\widehat{nx}}=\frac{Y-y}{\cos\widehat{ny}}=\frac{Z-z}{\cos\widehat{nz}}=n,$$

dans lesquelles X, Y, Z sont les coordonnées courantes; ces coordonnées sont donc connus en fonction de la variable independante t. Les équations de la courbe parallèle de C sont donc les intégrales générales des équations (2), uniquement déduites d'un système d'intégrales particulières des mêmes équations.

2.° Si la courbe C' est connue, on tracera une droite l quelconque dans le plan osculateur de la courbe C', on prendra sur cette droite à partir du point où elle coupe la tangente une longueur dont la projection sur la direction du rayon de courbure de la ligne C' soit égale au rayon de courbure de la courbe C augmenté d'une costante; de sorte que si l'on appelle τ'' la longueur de la tangente à la courbe C', comprise entre le point de contact et son intersection avec la droite l, et ε' l'angle de cette droite et de la tangente, les coordonnées X, Y, Z de la courbe cherchée seront données par les trois équations contenues dans le type suivant

$$(15) \qquad x' - X = \tau'' \cos\widehat{\tau'' x} + \frac{a+\rho}{\sin\varepsilon'} \cos\widehat{lx}. \qquad [3]$$

Comme ρ est donné par l'équation (5), il n'y a plus à déterminer dans ces équations que les cosinus des angles que la droite l fait avec les trois axes fixes et la longueur τ''; or l'on a, d'une part,

$$\cos\widehat{lx} = \cos\widehat{\rho' x}\sin\varepsilon' + \cos\widehat{\tau' x}\cos\varepsilon' \qquad [3]$$

et d'une autre part, si l'on considère la position infiniment voisine de τ'', on obtient l'équation

$$\frac{ds' - d\tau''}{\tau''\, d\varepsilon'} = \operatorname{cotg}\varepsilon',$$

qui donne l'équation différentielle linéaire du premier ordre, suivante

$$\frac{d\tau''}{d\varepsilon'} + \tau'' \operatorname{cotg}\varepsilon' = \rho',$$

dont l'intégrale est, en représentant par a une constante arbitraire,

$$(16) \qquad \tau'' \sin\varepsilon' = \int \rho' \sin\varepsilon' d\varepsilon' + a.$$

En portant cette valeur de τ'' et les valeurs des $\cos\widehat{lx}$ dans les équations (15) et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon_0 + \int d\varepsilon'$, où ε_0 est une constante arbitraire, on tombe sur des équations équivalentes aux équations (6).

La solution de ce second cas est donc une nouvelle solution du problème qui fait l'objet de ce mémoire.

10. *Equations des développées d'une courbe et de ses parallèles.* La recherche des développées d'une courbe C et des développées de ses parallèles présente aussi deux cas, suivant que l'on connait la courbe C ou la courbe C';

et nous ne donnons la solution de cette question déjà résolue par les géométres que parce qu'elle est implicitement contenue dans la solution du problème que nous venons de traiter.

1.° Si la courbe C est donnée, les équations (14) seront les équations de la développée, pourvu que dans la dernière l'on remplace n par une longueur variable ayant pour projection, sur la normale principale de C, le rayon de courbure de cette ligne; on a ainsi, en représentant par X, Y, Z les coordonnées de la développée, les équations suivantes:

$$(17)\qquad \frac{X-x}{\cos\widehat{nx}}=\frac{Y-y}{\cos\widehat{ny}}=\frac{Z-z}{\cos\widehat{nz}}=\frac{\rho}{\cos\left(\omega_0+\int d\omega\right)}.$$

2.° Si la courbe C' est donnée, les positions de l'extremité de la ligne τ'' donnent les coordonnées de la développée d'une quelconque des parallèles de la courbe C, on a donc les équations de ces courbes

$$(17)'\qquad \frac{x'-X}{\cos\widehat{\tau' x}}=\frac{y'-Y}{\cos\widehat{\tau' y}}=\frac{z'-Z}{\cos\widehat{\tau' z}}=\tau''=\frac{a+\int\rho'\sin\varepsilon' d\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}.$$

Ceci nous conduirait à une dernière solution géométrique de la recherche des intégrales des équations différentielles (2). En effet si l'on considère la surface développable dont l'arête de rebroussement est la développée (17) et que l'on mène une développante quelconque de cette arête, les équations de cette développante ne seraient autre chose que les intégrales des équations (2). Ce calcul sera développé dans un numéro suivant.

§ IV. **Généralisation.**

11. Problème. *Etant donnée l'arête C' de rebroussement d'une surface développable, on fait rouler sans glissement sur cette surface un plan contenant une courbe D et, dans chaque position du plan, on mène sur la génératrice rectiligne de contact une perpendiculaire tangente à la courbe D; déterminer le lieu des points de contact de cette tangente à la courbe D.*

On développera comme au n.° 4 la surface développable sur un de ses plans tangents; la courbe C' se transforme en une courbe plane C'_1 dont les équations par rapporte à deux axes fixes rectangulaires $O'_1x'_1$, $O'_1y'_1$ situés dans ce plan seront les équations (7). Puisque la courbe D est connue, on connait aussi les équations de cette courbe par rapport aux mêmes axes; soient σ son arc et r son rayon de courbure; la question consiste à exprimer les coordonnées x, y, z du point de contact de la perpendiculaire p à la génératrice, tangente à la courbe D. Pour rester fidèle à notre notation du n.° 4, nous appelons τ' la longueur de la génératrice, à partir de son point de contact avec la courbe C' jusqu'au pied M de la perpendiculaire p, et α l'angle de cette perpendiculaire avec l'élément de la courbe, lieu des points M; si l'on considère une position infiniment voisine des longueurs p et τ', on aura les deux équations:

$$(18) \qquad \begin{cases} p\,d\varepsilon' = ds' - d\tau', \\ \tau' d\varepsilon' = d\sigma + dp; \end{cases}$$

desquelles on déduit la relation suivante

$$\frac{ds'}{d\varepsilon'} = p + \frac{d}{d\varepsilon'}\left(\frac{dp}{d\varepsilon'}\right) + \frac{d}{d\varepsilon'}\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right).$$

On a donc l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante

$$(4)'' \qquad \frac{d}{d\varepsilon'}\left(\frac{dp}{d\varepsilon'}\right) + p = \rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'};$$

or le second membre est une fonction connue de ε', on trouvera donc l'intégrale de cette équation sans difficulté et l'on voit par la comparaison des équations (4) et (4)'' que l'on passera de l'intégrale (5) à l'intégrale de l'équation (4)'' en changeant dans la première la quantité ρ' placée sous le signe $\int$ en $\rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'}$; on obtiendra ainsi l'intégrale suivante:

$$(5) \quad p = \left[a + \int\left(\rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'}\right)\cos\varepsilon'\,d\varepsilon'\right]\sin\varepsilon' + \left[b - \int\left(\rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'}\right)\sin\varepsilon'\,d\varepsilon'\right]\cos\varepsilon'.$$

Si l'on projette les deux côtés de l'angle $\widehat{p\tau'}$ sur les trois axes coordonnés fixes, on aura les trois équations contenues dans le type suivant

$$(19) \qquad x' - X = -\tau' \cos\widehat{\tau' x} + p\cos\widehat{\rho' x}; \qquad [3]$$

or, si l'on remarque d'après la seconde des équations (18), l'on a

$$\tau' = \frac{dp}{d\varepsilon'} + r,$$

les équations (19) deviendront après la substitution des valeurs de p et de τ'

$$(19)' \quad \left\{ \begin{aligned} x' - X = -r\cos\widehat{\tau' x} + \left[a + \int\left(\rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'}\right)\cos\varepsilon'\, d\varepsilon'\right]\cos\widehat{x'_1 x} + \\ + \left[b + \int\left(\rho' - \frac{dr}{d\varepsilon'}\right)\sin\varepsilon'\, d\varepsilon'\right]\cos\widehat{y'_1 x}. \qquad [3] \end{aligned} \right.$$

Ces équations donnent les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de la courbe explicitement exprimées en fonction de ε'.

12. *Interprétation géométrique.* Cherchons quelle devrait être l'arête de rebroussement C'' pour que la surface développable lieu de ses tangentes fût la surface polaire de la courbe dont le rayon de courbure serait égal à la somme de la perpendiculaire p et du rayon de courbure correspondant d'une développante de la courbe plane D.

Soit R le rayon de courbure, on aura d'après les données de la question

$$R = p + \int r\, d\varepsilon';$$

or si l'on appelle R' le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de C'', l'équation (4) appliquée aux rayons de courbure R et R' donnera la relation

$$R' = p + \int r\, d\varepsilon' + \frac{d^2p}{d\varepsilon'^2} + \frac{dr}{d\varepsilon'};$$

donc, par suite de l'équation (4)$'$, on obtient pour R' la valeur suivante

$$R' = \rho' + \int r\, d\varepsilon'.$$

Ce résultat indique que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement C'' sera égal au rayon de courbure de l'arête de rebroussement C' augmenté du rayon de courbure correspondant d'une développante de la courbe plane D et que cette relation a lieu quelle que soit la loi des flexions de l'arête C''.

§ V. **Applications.**

13. *Surfaces dont les lignes de courbure sont planes.* Appliquons l'analyse qui précéde à la recherche des équations des surfaces dont les lignes de courbure d'une série sont planes. Nous avons déjà donné ces équations dans notre *Analyse des courbes tracées sur une surface quelconque,* pag. 157, en supposant connues les équations de la courbe C. Si l'on connait seulement les équa-

tions de l'arête de rebroussement C' de la surface polaire de la courbe C comme le suppose Monge dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § XXV, on opérera de la manière suivante: Au moyen des équations (1) de la courbe C' on calculera, n.° 10, les équations (17) des développées de la courbe C. Soient donc X, Y, Z les coordonnées en fonction de t d'une de ces développées; soient σ son arc et T la longueur d'une de ses tangentes comprise entre le point de contact et le point correspondant de la développante C, cette courbe donne la relation

$$\sigma + T = b,$$

dans la quelle b est une constante, par suite les équations cartesiennes de cette développante sont:

$$\frac{X-x}{\cos\widehat{Tx}} = \frac{Y-y}{\cos\widehat{Ty}} = \frac{Z-z}{\cos\widehat{Tz}} = b - \sigma. \tag{20}$$

Cela posé, la surface dont les lignes de courbure d'une série sont planes est la surface engendrée par le profil d'une courbe plane dont le plan coupe normalement suivant une génératrice T la surface développable, lieu des tangentes de la développée (X, Y, Z), et dont une point fixe O'_1 parcourt la développante C de telle sorte, qu'une droite fixe $O'_1\xi$ située dans ce plan coïncide successivement avec les génératrices T de la surface.

Si donc l'équation du profil par rapport aux deux axes fixes $O'_1\xi$, $O'_1\zeta$, situés dans le plan mobile, est la suivante

$$\zeta = f(\xi), \tag{21}$$

en réprésentant par X', Y', Z' les coordonnées, par rapport aux axes fixes, d'un point quelconque de la surface décrite, il suffira de projeter un système de coordonnées ζ et ξ de la courbe du profil sur ces axes, pour obtenir les trois équations contenues dans le type suivant

$$X' - x = \xi\cos\widehat{\xi x} + \zeta\cos\widehat{\zeta x} \qquad [3] \tag{22}$$

qui sont les équations de la surface cherchée, de sorte que les coordonnées X', Y', Z' sont connues en fonction des deux variables indépendantes t et ξ. En éliminant ces deux variables entre les trois équations (22) on aurait l'équation cartésienne de cette surface entre les trois coordonnées X', Y', Z'.

14. *Développement des calculs.* Si l'on se reporte au n.° 9, on obtient les équations

$$ds' - d\tau'' = d\sigma\cos\varepsilon',$$
$$\tau'' d\varepsilon' = d\sigma\sin\varepsilon';$$

de la seconde on déduit la valeur de σ donnée par la relation

$$\sigma = \int \left(\frac{a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \right) d\varepsilon';$$

on a de plus les trois équations contenues dans le type suivant:

$$\cos \widehat{Tx} = \cos \varepsilon' \cos \widehat{\tau' x} + \sin \varepsilon' \cos \widehat{\nu' x}; \qquad [3]$$

donc, par la substitution des valeurs de X, Y, Z tirées des équations (17)', dans les équations (20), on aura le trois équations de la développante C contenues dans le type suivant:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & x' - x + \frac{\cos \widehat{\tau' x}}{\sin \varepsilon'} \left(a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon' \right) = \\ & = \left[b - \int \left(\frac{a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \right) d\varepsilon' \right] (\cos \varepsilon' \cos \widehat{\tau' x} + \sin \varepsilon' \cos \widehat{\nu' x}). \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont la nouvelle forme des intégrales générales des équations (12); ce sont les intégrales que nous avons annoncées à la fin du n.° 10.

Enfin, si l'on remarque que dans les équations (22), $\cos \widehat{\xi x}$ égale $\cos \widehat{Tx}$ et que la valeur de $\cos \widehat{\zeta x}$ est donnée par l'équation

$$\cos \widehat{\zeta x} = - \sin \varepsilon' \cos \widehat{\tau' x} + \cos \varepsilon' \cos \widehat{\nu' x},$$

les équations (22) deviennent

$$(22)' \quad X' - x = [\xi \cos \varepsilon' + f(\xi) \sin \varepsilon'] \cos \widehat{\tau' x} + [\xi \sin \varepsilon' + f(\xi) \cos \varepsilon'] \cos \widehat{\nu' x}.$$

Si l'on retranche, membre à membre, de ces équations les équations (23), on obtient les coordonnées X', Y', Z' d'un point quelconque de la surface, exprimées explicitement en fonction des variables ξ et τ par les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} & X' - x' - \frac{\cos \tau' x}{\sin \varepsilon'} \left(a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon' \right) = \\ & = \left\{ (\xi - b) \cos \varepsilon' - f(\xi) \sin \varepsilon' + \cos \varepsilon' \int \left(\frac{a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \right) d\varepsilon' \right\} \cos \widehat{\tau' x} \\ & + \left\{ (\xi - b) \sin \varepsilon' + f(\xi) \cos \varepsilon' + \sin \varepsilon' \int \left(\frac{a + \int \rho' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{\sin \varepsilon'} \right) d\varepsilon' \right\} \cos \widehat{\nu' x} \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

et telles sont les équations de la surface cherchée.

14. *Des courbes dont la surface polaire a pour arête de rebroussement une hélice.* Il convient d'appliquer nos formules générales à un exemple. On donne une hélice tracée sur un cylindre circulaire et l'on se propose de trouver les équations de toutes les courbes qu'ont pour surface polaire, lieu des plans normaux, la surface développable dont cette hélice est l'arête de rebroussement.

Soit R le rayon de la base du cylindre, i l'angle constant que la tangente à l'hélice fait avec le plan de cette base; si l'on pose $a = \operatorname{tang} i$, les équations de l'hélice sont:

$$\{x' = R\cos t, \quad y' = R\sin t, \quad z' = aRt\}. \tag{24}$$

En représentant toujours par τ', ρ', ν' la tangente, le rayon de courbure, et la binormale de cette courbe, l'on a les équations suivantes:

$$\begin{array}{lll}
\cos\widehat{\tau', x} = -\sin t\cos i, & \cos\widehat{\tau', y} = \cos t\cos i, & \cos\widehat{\tau', z} = \sin i \\
\cos\widehat{\rho', x} = -\cos t, & \cos\widehat{\rho', y} = -\sin t, & \cos\widehat{\rho', z} = 0 \\
ds' = \dfrac{dt}{\cos i}, & d\varepsilon' = \cos i\, dt, & \rho' = \dfrac{R}{\cos^2 i}.
\end{array}$$

D'après ces dernières valeurs de ρ' et de $d\varepsilon'$, l'équation (4) devient

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho\cos^2 i = R,$$

dont l'intégrale, en représentant par α et A deux constantes arbitraires, et en posant $\cos i = m$, prend la forme suivante

$$\rho = \frac{R}{m^2} + A\cos(mt + \alpha).$$

Si l'on porte cette valeur de ρ et celle de sa derivée $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ dans les équations (3) ainsi que les valeurs de x', y', z', qui donnent les coordonnées de l'hélice (24), on obtient les trois équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l}
x = -Ra^2\cos t + A\{\cos t\cos(mt+\alpha) + m\sin t\sin(mt+\alpha)\} \\
y = -Ra^2\sin t + A\{\sin t\cos(mt+\alpha) - m\cos t\sin(mt+\alpha)\} \\
z = \quad Rat \qquad + A\sin i\sin(mt+\alpha).
\end{array}\right. \tag{25}$$

qui sont les équations de toutes les courbes qui ont pour surface polaire la surface développable dont l'arête de rebroussement est l'hélice proposée.

On obtient une solution particulière de la question en posant A nul, cette solution donne les valeurs suivantes:

$$x = -Ra^2\cos t, \quad y = -Ra^2\sin t, \quad z = Rat;$$

qui sont les équations d'une hélice, qui a le même pas que l'hélice proposée (24) et dont le rayon R_1 de la base cylindrique est liée avec le rayon R de la base du cylindre de l'hélice donnée par la relation

$$R_1 = R\,\mathrm{tang}^2 i.$$

15. *Conclusion.* L'analyse dont nous venons de faire usage, nous donne la solution de cette question générale consistant à trouver toutes les courbes qui coupent orthogonalement les positions successives d'un plan qui se meut d'après une loi quelconque. Car puisque la loi du mouvement du plan est déterminée, il sera facile d'avoir les équations de l'arête de rebroussement de la surface développable engendrée par les intersections successives des positions de ce plan, et alors la question sera ramenée à chercher toutes les courbes qui ont pour surface polaire cette surface développable. Si l'on traitait directement la question sans recourir aux équations de l'arête de rebroussement, on obtiendrait un système de deux équations lineaires simultanées du premier ordre à coefficients variables; et l'analyse précédente démontre qu'on parviendrait par un changement de variables à intégrer ce système d'équations; mais ici, comme dans tout le cours de l'étude que nous venons de faire, on est guidé par la géométrie sur le genre de transformation qui conduit à cette intégration.

Marseille, 19 avril 1874.

INTORNO

AD UNA CLASSE DI INTEGRALI

ESPRIMIBILI CON SOLI LOGARITMI.

(*Nota di* Carlo Maria Piuma, *dottore aggregato in Matematica nella R. Università di Genova.*)

Nella presente Nota io mi propongo di estendere agli integrali della forma

$$\int \frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}}, \tag{1}$$

[dove m è un numero primo, n un intero positivo qualunque ed f e θ rappresentano due polinomi interi rispetto alla x, pel secondo dei quali posto

$$\theta = \prod_{b=0}^{b=g} (x - a_b)^{c_b} \tag{2}$$

sieno tutti i $c_b < m^n$] il teorema che dimostrai nella mia Nota che ha per titolo: *Proprietà di una classe di integrali di irrazionali algebrici possibili con soli logaritmi,* pel caso di $n = 1$. (Vedasi Tortolini, *Annali di Matematica pura ed applicata,* vol. IV, pag. 4.)

1. Rappresentiamo con α una radice primitiva dell'equazione

$$x^{m^n} - 1 = 0 \tag{3}$$

e con M_K funzioni intere della x, posto

$$X_{q,p} = \sum_{K=0}^{K=m^n-1} \left(\alpha^{q+m^{n-1}p}\, \theta^{\frac{1}{m^n}}\right)^K M_K, \tag{4}$$

se l'integrale (1) è esprimibile, con soli logaritmi, come è noto, devesi avere

$$\int \frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}} = A \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \log X_{q,p}^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}, \tag{5}$$

dove A è una costante; e sappiamo pure, che se $X_{\varphi,\chi}$ è nullo per un valore h_0 della x, esiste sempre una potenza $(x-h_0)^{\beta_{\varphi,\chi}}$ di $x-h_0$ per la quale il rapporto

$$\frac{X_{\varphi,\chi}}{(x-h_0)^{\beta_{\varphi,\chi}}}$$

conserva un valore finito e diverso da zero per $x=h_0$, e di più che $\beta_{\varphi,\chi}$ è un'intero se h_0 non è eguale ad alcuno degli a_b; e nel caso contrario, $\beta_{\varphi,\chi}$ può anche essere frazionario, ma allora il denominatore della frazione rappresentata da $\beta_{\varphi,\chi}$ è divisore di m^n (vedasi la mia Nota precitata, pag. 7); per cui posto

$$Y_{\varphi,\chi}=X_{\varphi,\chi}^{m^n},\ \text{e},\ m^n\beta_{\varphi,\chi}=\gamma_{\varphi,\chi}$$

si vede che $Y_{\varphi,\chi}$ è della stessa forma (4) di $X_{\varphi,\chi}$, e $\gamma_{\varphi,\chi}$ è un intero; inoltre evidentemente si ha

$$\frac{X_{\varphi,\chi}^{m^n}}{(x-h_0)^{m^n\beta_{\varphi,\chi}}}=\frac{Y_{\varphi,\chi}}{(x-h_0)^{\gamma_{\varphi,\chi}}}=Z_{\varphi,\chi}$$

dove $Z_{\varphi,\chi}$ rappresenta una funzione di x nè nulla nè infinita per $x=h_0$.

Dalla (5) poi si deduce

$$\int\frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}}=\frac{A}{m^n}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\log\left(X_{q,p}^{m^n}\right)^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}=A_1\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\log Y_{q,p}^{\alpha^{q+m^{n-1}p}},\tag{7}$$

essendo $\frac{A}{m^n}=A_1$ costante. È chiaro che se nella (7) scriviamo $X_{\varphi,\chi}$ al luogo di $Y_{\varphi,\chi}$, che hanno la stessa forma (4), ed A al luogo di A_1 che sono costanti, otteniamo un'espressione della forma (5), in cui le $X_{\varphi,\chi}$ avendo la forma data dalla (4), possiamo supporre che se una di esse si annullasse per $x=h_0$, esisterebbe sempre una potenza intera $(x-h_0)^{\gamma_{\varphi,\chi}}$ di $x-h_0$ per la quale i due rapporti

$$\frac{X_{\varphi,\chi}}{(x-h_0)^{\gamma_{\varphi,\psi}}}\ \text{e}\ \frac{(x-h_0)^{\gamma_{\varphi,\chi}}}{X_{\varphi,\chi}}$$

resterebbero finiti per $x=h_0$.

2. Poniamo quindi

$$X_{\varphi,\chi}=(x-h_0)^{\gamma_{\varphi,\chi}}Z_{\varphi,\chi}\tag{8}$$

dove $Z_{\varphi,\chi}$ si conserva finita e differente da zero per $x=h_0$. Dalla differenziazione della (5) tenuto conto della (8) si ottiene

$$f - A\theta^{\frac{1}{m^n}} \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \alpha^{q+m^{n-1}p} \frac{Z'_{q,p}}{Z_{q,p}} = \frac{A\theta^{\frac{1}{m^n}}}{x-h_0} \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \gamma_{q,p}\alpha^{q+m^{n-1}p},$$

ma, per $x = h_0$, il primo membro dell'eguaglianza precedente non è infinito, mentre il secondo lo diverrebbe [ciò che risulta dal fatto che, anche ammesso $\theta = 0$ per $x = h_0$, si avrebbe $\theta = (x - h_0)^\eta \theta_1$, θ_1 essendo un polinomio intero diverso da zero, per $x = h_0$, e $\eta < m^n$] quando non si avesse

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \gamma_{q,p}\alpha^{q+m^{n-1}p} = \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \alpha^q \{\gamma_{q,m-1}\alpha^{(m-1)m^{n-1}} + \\ &+ \gamma_{q,m-2}\alpha^{(m-2)m^{n-1}} + \gamma_{q,m-3}\alpha^{(m-3)m^{n-1}} + \cdots + \gamma_{q,0}\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

per cui questa relazione deve essere verificata dagli interi $\gamma_{\varphi,\chi}$ e da α.

L'equazione

$$x^{(m-1)m^{n-1}} + x^{(m-2)m^{n-1}} + x^{(m-3)m^{n-1}} + \cdots + 1 = 0 \tag{10}$$

è irriducibile, e perchè α è radice primitiva della (3), deve pure essere radice della (10) che ammette tutte e sole le radici primitive della suddetta equazione (3), quindi dovremo avere

$$\alpha^{(m-1)m^{n-1}} + \alpha^{(m-2)m^{n-1}} + \alpha^{(m-3)m^{n-1}} + \cdots + 1 = 0 \tag{11}$$

e moltiplicandone i due membri per

$$\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \gamma_{q,m-1}\alpha^q$$

si ottiene

$$\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \alpha^q \{\gamma_{q,m-1}\alpha^{(m-1)m^{n-1}} + \gamma_{q,m-1}\alpha^{(m-2)m^{n-1}} + \gamma_{q,m-1}\alpha^{(m-3)m^{n-1}} + \cdots + \gamma_{q,m-1}\} = 0$$

risultato che, sottratto membro a membro dalla (9) ci fornisce

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \alpha^q \{(\gamma_{q,m-2} - \gamma_{q,m-1})\alpha^{(m-2)m^{n-1}} + \\ &+ (\gamma_{q,m-3} - \gamma_{q,m-1})\alpha^{(m-3)m^{n-1}} + \cdots + \gamma_{q,0} - \gamma_{q,m-1}\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ora la (12) è soddisfatta da α radice di un'equazione irriducibile (10) di grado $(m-1)m^{n-1}$, e i coefficienti delle diverse potenze di α nella (12) sono interi, ed il grado della potenza più elevata di α in quest' ultima equazione non supera $(m-2)m^{n-1}+m^{n-1}-1=(m-1)m^{n-1}-1$, quindi è inferiore almeno di un' unità al grado della (10), il che ci fornisce la serie seguente di eguaglianze

$$\gamma_{\varphi,m-1}=\gamma_{\varphi,m-2}=\gamma_{\varphi,m-3}=\cdots=\gamma_{\varphi,1}=\gamma_{\varphi,0} \tag{13}$$

o ciò che torna lo stesso ci dà per risultato che gli m esponenti $\gamma_{\varphi,\chi}$ che hanno eguale il primo indice φ sono eguali tra loro. Ripetendo gli stessi calcoli e gli stessi ragionamenti per un altro valore qualunque h_1 di x pel quale X_{φ_1,χ_1} fosse nullo, si perverrebbe ad un risultato analogo; da ciò è facile concludere che esistono m^{n-1} funzioni intere della x

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ldots\ \lambda_{m^{n-1}}$$

delle quali però alcune possono essere anche eguali a costanti diverse da zero, tali che posto

$$X_{\varphi,\chi}=\lambda_\varphi T_{\varphi,\chi} \tag{14}$$

nessuna delle funzioni $T_{\varphi,\chi}$ così definita sia nulla od infinita per valori finiti della x.

3. Sia ora

$$V_\varphi=\frac{\prod\limits_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} X_{q,p}}{\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} X_{\varphi,p}},$$

ed osservando che per la (11) si ha

$$1+\alpha^{m^{n-1}}+\alpha^{2m^{n-1}}+\cdots+\alpha^{(m-1)m^{n-1}}=0$$

poichè α è radice primitiva della (3), e quindi

$$\int\frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}}=\frac{A}{m}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\log(X^m_{q,p})^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}+\frac{A}{m}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}V_q^{\alpha^{q+m^{n-1}p}} \tag{15}$$

$$=\frac{A}{m}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p-0}^{p=m-1}\log(X^m_{q,p}V_q)^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}.$$

Ma $X^m_{\varphi,\chi}V_\varphi$ è della forma attribuita a $X_{\varphi,\chi}$ dalla (4) e si passa da $X^m_{0,0}V_0$ a $X^m_{\varphi,\chi}V_\varphi$ col sostituire nella prima di queste due funzioni $\alpha^{\varphi+m^{n-1}\psi}\theta^{\frac{1}{m^n}}$ al luogo di $\theta^{\frac{1}{m^n}}$, sostituzione colla quale si passa da $X_{0,0}$ a $X_{\varphi,\chi}$, e facendo

$$U_{\varphi,\chi}=X^m_{\varphi,\psi}V_{\varphi,\chi}\ \text{ e }\ \xi=\lambda_0^m\,\lambda_1^m\ldots\,\lambda^m_{m^{n-1}-1}$$

poichè

$$X^m_{\varphi,\chi}=\lambda^m_\varphi T^m_{\varphi,\psi} \text{ e } V_\varphi=-\frac{\prod\limits_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{q,p}}{\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{\varphi,p}}\cdot\frac{\xi}{\lambda^m_\varphi}$$

si ha

$$U_{\varphi,\chi}=X^m_{\varphi,\chi}V_\varphi=\xi T^m_{\varphi,\chi}\frac{\prod\limits_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{q,p}}{\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{\varphi,p}}=\xi R_{\varphi,\chi}, \tag{16}$$

ponendo

$$R_{\varphi,\chi}=T^m_{\varphi,\chi}\frac{\prod\limits_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{q,p}}{\prod\limits_{p=0}^{p=m-1} T_{\varphi,p}},$$

per cui $R_{\varphi,\chi}$ è differente da zero ed è finito per valori finiti della x. La (15) diviene dunque

$$\int\frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}}=\frac{A}{m}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\log(X^m_{q,p}V_q)^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}=\frac{A}{m}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}U_{q,p}^{\alpha^{q+m^{n-1}p}}; \tag{17}$$

ma $\frac{A}{m}$ è una costante e $U_{\varphi,\chi}$ è della forma, assegnata per $X_{\varphi,\chi}$ dalla (4); dunque scrivendo nell'ultimo membro della (17) A al luogo di $\frac{A}{m}$ e $X_{\varphi,\chi}$ al luogo di $U_{\varphi,\chi}$ otteremo una relazione della forma della (5) soltanto, che in essa, ci sarà lecito supporre che le $X_{\varphi,\chi}$ soddisfino alla

$$X_{\varphi,\chi}=\xi R_{\phi,\chi} \tag{18}$$

dove $R_{\varphi,\chi}$ rappresenta una funzione finita e diversa da zero per qualunque valore finito della x, e dove ξ è un polinomio intero rispetto alla stessa variabile.

4. Le (4) tenuto conto delle (18) ci forniscono

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\alpha^{-\omega(q+m^{n-1}p)}X_{q,p}&=\xi\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\alpha^{-\omega(q+m^{n-1}p)}R_{q,p}\\&=\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\sum_{K=0}^{K=m^n-1}\alpha^{(K-\omega)(q+m^{n-1}p)}\theta^{\frac{K}{m^n}}M_K\\&=\sum_{K=0}^{K=m^n-1}\frac{\alpha^{(K-\omega)m^n}-1}{\alpha^{(K-\omega)}-1}M_K\theta^{\frac{K}{m^n}},\end{aligned}$$

ora, essendo ω e K interi e positivi ed entrambi minori di m^n, il numeratore di quest' ultima frazione sarà sempre zero, ed il denominatore differente da zero, eccetto il caso di $K=\omega$, nel qual caso la frazione ha per valore m^n, quindi finalmente avremo

$$m^n M_\omega \theta^{\frac{\omega}{m^n}} = \xi \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \alpha^{-\omega(q+m^{n-1}p)} R_{q,p} = \xi N_\omega \tag{19}$$

ponendo

$$N_\omega = \sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \alpha^{-\omega(q+m^{a-1}p)} R_{q,p}$$

per cui evidentemente N_ω non diviene infinito per valori finiti della x, e facendo

$$\omega c_b = m^n r_{b,\omega} + s_{b,\omega}, \quad s \geqq 0 \text{ e } s < m^n,$$

dalla (19) si ricava

$$N_\omega = m^n \frac{M_\omega \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{r_{b,\omega}}}{\xi} \cdot \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{s_{b,\omega}}{m^n}}$$

ed essendo $s_{b,\omega} < m^n$ e N_ω non divenendo infinito per valori finiti della x, dovrà lo stesso verificarsi pel quoziente

$$P_\omega = \frac{M_\omega \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{r_{b,\omega}}}{\xi}$$

di due polinomi interi della x e quindi dovrà ridursi ad un polinomio intero, da cui

$$N_\omega = m^n P_\omega \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{s_{b,\omega}}{m^n}}$$

e

$$M_\omega \theta^{\frac{\omega}{m^n}} = \xi P_\omega \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{s_{b,\omega}}{m^n}} \tag{20}$$

e le (18) divengono

$$R_{\varphi,\chi} = \sum_{K=0}^{K=m^n-1} \alpha^{-K(\varphi+m^{n-1}\chi)} P_K \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{s_{b,K}}{m^n}}. \tag{21}$$

E da qui si vede che $R_{\varphi,\chi}$ ha la stessa forma di $X_{\varphi,\chi}$ soltanto che in esso al luogo di $\theta^{\frac{\omega}{m^n}} = \prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{\omega c_b}{m^n}}$ si sostituisce $\prod_{b=0}^{b=g} (x-a_b)^{\frac{s_{b,\omega}}{m^n}}$ dove $s_{b,\omega}$ rappresenta il resto minimo positivo di $c_b\omega$ relativamente al modulo m^n.

5. Se nella (5) sostituiamo $\xi R_{\varphi,\chi}$ al luogo di $X_{\varphi,\chi}$ ed osserviamo che

$$1+\alpha^3+\alpha^3+\cdots\alpha^{m^n-2}+\alpha^{m^n-1}=0$$

si ricava

$$\int\frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}}=A\sum_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\sum_{p=0}^{p=m-1}R_{q,p}^{\chi^{q+m^{n-1}p}} \tag{22}$$

deve $R_{\varphi,\chi}$ conserva un valore finito e differente da zero per tutti i valori finiti della x. Quindi il prodotto

$$\prod_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod_{p=0}^{p=m-1}R_{q,p}$$

che è un polinomio intero rispetto alla x, e che non si annulla per valori finiti attribuiti a questa variabile, deve ridursi ad una costante. E l'equazione

$$\prod_{q=0}^{q=m^{n-1}-1}\prod_{m=0}^{p=m-1}R_{q,p}=\text{costante}$$

è l'espressione del teorema dimostrato (pag. 21 volume suddetto) nella ipotesi di $n=1$ nell'indicata mia Nota esteso al caso generale di n qualunque, per l'integrale

$$\int\frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m^n}}},$$

essendo m un numero primo; con che ho conseguito l'oggetto del presente mio lavoro.

Sestri-Levante, 24 agosto 1874.

I COMPLESSI E LE CONGRUENZE LINEARI

NELLA GEOMETRIA PROJETTIVA. (*)

(*Memoria del prof.* Enrico d'Ovidio, *a Torino.*)

I.

Sia

$$\sum y_{ij} z_{kl} = 0 \text{ ovvero } \sum \eta_{ij} \zeta_{kl} = 0$$
$$(ijkl = 1234,\ 3412,\ 1342,\ 4213,\ 1423,\ 2314)$$

l'equazione di un complesso lineare C di 1.° grado: essendo costante per una stessa retta il rapporto $z_{ij} : \zeta_{kl}$, sarà pure costante per uno stesso complesso il rapporto $y_{ij} : \eta_{kl}$, e noi per semplicità attribuiremo sempre a questo rapporto il valore $\sqrt{a}$ o l'eguale $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Le sei quantità

$$y_{12},\quad y_{34},\quad y_{13},\quad y_{42},\quad y_{14},\quad y_{23}$$

si diranno coordinate-raggi omogenee del complesso, e le

$$\eta_{12},\quad \eta_{34},\quad \eta_{13},\quad \eta_{42},\quad \eta_{14},\quad \eta_{23}$$

le coordinate-assi omogenee.

Diremo poi invariante di un complesso C la funzione quadratica

$$I_{yy} \equiv 2\sqrt{a}(y_{12}y_{34} + y_{13}y_{42} + y_{14}y_{23}) = \sum y_{ij}\eta_{ij}$$
$$(ij = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23)$$

o la equivalente

$$I_{\eta\eta} = 2\sqrt{a}(\eta_{12}\eta_{34} + \eta_{13}\eta_{42} + \eta_{14}\eta_{23}) = \sum y_{ij}\eta_{ij},$$

(*) Questa Memoria fa seguito allo « *Studio sulla Geometria projettiva* » pubblicato negli *Annali di Matematica pura ed applicata* (Serie II, t. VI, da pag. 72 a 100). Mi si permetta quindi di supporre nel lettore la conoscenza del citato *Studio* (almeno de' §§ I, II, III, X), e di continuare a fare uso delle notazioni ivi adottate.

ed invariante simultaneo di due complessi C, C' la funzione bilineare

$$I_{yy'} = \sqrt{a} \sum y_{ij} y'_{kl} = \sum y_{ij} \eta'_{ij}$$

o la equivalente

$$I_{\eta\eta'} = \sqrt{\alpha} \sum \eta_{ij} \eta'_{kl} = \sum y_{ij} \eta'_{ij}.$$

L'annullarsi dell'invariante di un complesso è la condizione perchè il complesso sia speciale intorno ad una retta, cioè si riduca ad una retta (direttrice) ed alle sue secanti: allora le y e le η divengono le coordinate z o ζ di quella retta.

Le rette appartenenti ad un complesso sono in numero tre volte infinito. Le rette comuni a due complessi C, C' sono in numero due volte infinito, e sono comuni anche a tutti i complessi di coordinate

$$\lambda y_{12} + \mu y'_{12}, \ldots \text{ ovvero } \lambda \eta_{12} + \mu \eta'_{12}, \ldots$$

$\lambda : \mu$ essendo un parametro arbitrario: tutti questi complessi, in numero semplicemente infinito, o meglio tutte le rette comuni ad essi, costituiscono una congruenza lineare. Fra' complessi della congruenza ve ne ha due speciali corrispondenti a' valori di $\lambda : \mu$ forniti dalla equazione

$$I_{\lambda y + \mu y', \lambda y + \mu y'} = 0 \text{ ossia } I_{yy} \lambda^2 + 2 I_{yy'} \lambda \mu + I_{y'y'} \mu^2 = 0,$$

e le loro direttrici diconsi le direttrici della congruenza.

L'annullarsi dell'invariante simultaneo di due complessi è la condizione perchè questi siano in involuzione, ossia perchè i punti (o piani), corrispondenti ad uno stesso piano (o punto) qualunque nei due complessi, siano coniugati armonicamente rispetto a' punti d'intersezione del piano con le due direttrici della congruenza originata da' due complessi (o rispetto a' piani condotti pel punto e per le direttrici). Allora, rotando un piano intorno a una retta che si appoggi alle direttrici, i punti corrispondenti ne' due complessi generano su quella retta una involuzione quadratica; e similmente, scorrendo un punto su una retta che si appoggi alle direttrici, i piani corrispondenti ne' due complessi generano intorno a quella retta una involuzione quadratica.

Quando di due complessi in involuzione uno è speciale, la sua direttrice appartiene all'altro; e quando entrambi sono speciali, le loro direttrici s' incontrano, ossia sono in un piano. Infatti l'equazione di un complesso può scriversi:

$$I_{yz} = 0.$$

II.

Tutti i complessi possibili in uno spazio di tre dimensioni costituiscono uno spazio di 5 dimensioni, il quale può organizzarsi in infiniti modi, così che riesca di curvatura costante. Per es., possiamo assumere come equazione dell'assoluto, o spazio limite di quattro dimensioni, rispetto allo spazio suddetto, la seguente:

$$A_{yy} \equiv \sum b_{ij,pq} y_{ij} y_{pq} = 0$$

$$(ij,\ pq = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23)$$

ovvero la

$$A_{\eta\eta} \equiv \sum \beta_{ij,pq} \eta_{ij} \eta_{pq} = 0;$$

che equivale alla prima, poichè dalla ipotesi

$$y_{ij} : \eta_{kl} = y_{pq} : \eta_{rs} = \sqrt{\alpha}$$

$$(ijkl,\ pqrs = 1234,\ 3412, \ldots)$$

e dalla relazione già dimostrata (*Studio* ecc., X)

$$b_{ij,pq} = \frac{1}{\alpha} \beta_{kl,rs}$$

risulta

$$A_{yy} = A_{\eta\eta}. \tag{1}$$

Anzi, più generalmente, costruite con le coordinate di due complessi C, C' le due funzioni bilineari

$$A_{yy'} \equiv \sum b_{ij,pq} y_{ij} y'_{pq}, \quad A_{\eta\eta'} \equiv \sum \beta_{ij,pq} \eta_{ij} \eta'_{pq},$$

si ha

$$A_{yy'} = A_{\eta\eta'}. \tag{2}$$

Si ha pure

$$\frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{ij}} : \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_{kl}} = \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3}$$

L'attuale scelta dell'assoluto de' complessi ci è suggerita dalla seguente riflessione. I complessi speciali formano nello spazio de' complessi un parziale spazio di quattro dimensioni caratterizzato dalla equazione $I_{yy} = 0$, ed allora le y o η divengono le coordinate z o ζ delle loro direttrici. Ora fra codesti complessi appartengono all'assoluto, qualunque esso sia, quelli le cui direttrici hanno delle coordinate z o ζ soddisfacenti alla equazione dell'assoluto; e siccome l'equazione dell'assoluto de' punti o de' piani espressa in coordinate di rette z o ζ, quale fu ottenuta nel citato *Studio* (X), è

$$A_{zz} \equiv \sum b_{ij,pq} z_{ij} z_{pq} = 0 \text{ ovvero } A_{\zeta\zeta} \equiv \sum \beta_{ij,pq} \zeta_{ij} \zeta_{pq} = 0,$$

vale a dire appunto ciò che diviene la $A_{yy}=0$ o $A_{\eta\eta}=0$ quando si mutano le y e η nelle z e ζ, così apparisce manifesta l'opportunità di assumere $A_{yy}=0$ o $A_{\eta\eta}=0$ come assoluto de' complessi.

Dato un complesso

$$C \ldots \sum y_{ij} z_{kl} = 0,$$

le rette coniugate alle rette di C, rispetto all'assoluto de' punti o de' piani, comporranno un altro complesso c, che diremo coniugato a C. Sapendo che quando due rette di coordinate z o ζ e Z o Z sono coniugate, può assumersi

$$z_{ij} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{\mathrm{ZZ}}}{\partial \mathrm{Z}_{ij}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{\partial A_{ZZ}}{\partial Z_{kl}},$$

se si sostituisce questa espressione di z nella equazione di C, si ottiene $A_{yZ}=0$ ossia

$$\sum \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{ij}} Z_{ij} = 0$$

come equazione del complesso c coniugato di C.

Quindi è lecito assumere come coordinate di c

$$Y_{ij} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{kl}} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_{ij}} \text{ [per la (3)]}, \tag{4}$$

e simmetricamente

$$\mathrm{H}_{ij} = \frac{\sqrt{a}}{2} \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_{kl}} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{ij}}. \tag{4$'$}$$

Da queste formole è facile dedurre le seguenti identità:

$$A_{yy} = A_{\eta\eta} = A_{YY} = A_{\mathrm{HH}} = I_{yY} = I_{\eta\mathrm{H}} \tag{5}$$

$$I_{yy} = I_{\eta\eta} = I_{YY} = I_{\mathrm{HH}} = A_{yY} = A_{\eta\mathrm{H}} \tag{6}$$

$$A_{yy'} = A_{\eta\eta'} = A_{YY'} = A_{\mathrm{HH}'} = I_{yY'} = I_{\eta\mathrm{H}'} \tag{7}$$

$$I_{yy'} = I_{\eta\eta'} = I_{YY'} = I_{\mathrm{HH}'} = A_{yY'} = A_{\eta\mathrm{H}'}, \tag{8}$$

visto che la A_{YY} si trasforma nella $A_{\eta\eta}$ mediante la sostituzione $Y_{ij} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_{ij}}$, e così via.

Ciò posto, un complesso C è in involuzione col coniugato c quando $I_{y\Upsilon}=0$, ovvero [per la (5)] $A_{yy}=0$, onde si conclude che l'assoluto de' complessi è il sistema di que' complessi che sono in involuzione co' loro coniugati.

Se un complesso appartiene all'assoluto, lo stesso avviene del coniugato.

Quando un complesso è speciale, il coniugato è anche speciale, e le loro direttrici sono due rette coniugate: esse dovranno incontrarsi nel caso della involuzione, e però saranno tangenti in uno stesso punto e piano all'assoluto de' punti o de' piani, e saranno armoniche rispetto alle generatrici relative a quel punto o piano. Per conseguenza, l'assoluto dello spazio di quattro dimensioni (non di curvatura costante) costituito da' complessi speciali contiene i complessi speciali intorno alle tangenti all'assoluto de' punti e de' piani.

Da ultimo vanno notate le seguenti identità, che sono in fondo le stesse di quelle stabilite nel § X della citata Memoria:

$$A_{yy'}=A_{\eta\eta'}=-\frac{1}{\beta}\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y' & \beta \end{Vmatrix}=-\frac{1}{b}\begin{Vmatrix} 0 & \eta \\ \eta' & b \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} A_{yy_1} & A_{yy_2} \\ A_{y'y_1} & A_{y'y_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{\eta\eta_1} & A_{\eta\eta_2} \\ A_{\eta'\eta_1} & A_{\eta'\eta_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\beta}\begin{Vmatrix} 0 & & y \\ & & y' \\ y_1 & y_2 & \beta \end{Vmatrix}=\frac{1}{b}\begin{Vmatrix} 0 & & \eta \\ & & \eta' \\ \eta_1 & \eta_2 & b \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

e così di seguito, sino alla

$$\begin{vmatrix} A_{yy_1} & \cdot\ \cdot & A_{yy_6} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{y^{\mathrm{v}}y_1} & \cdot\ \cdot & A_{y^{\mathrm{v}}y_6} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{\eta\eta_1} & \cdot\ \cdot & A_{\eta\eta_6} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{\eta^{\mathrm{v}}\eta_1} & \cdot\ \cdot & A_{\eta^{\mathrm{v}}\eta_6} \end{vmatrix}=\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} y_{12} & \cdot\ \cdot & y_{23} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y^{\mathrm{v}}_{12} & \cdot\ \cdot & y^{\mathrm{v}}_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{1,12} & \cdot\ \cdot & y_{1,23} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{6,12} & \cdot\ \cdot & y_{6,23} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{b}\begin{vmatrix} \eta_{12} & \cdot\ \cdot & \eta_{23} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta^{\mathrm{v}}_{12} & \cdot\ \cdot & \eta^{\mathrm{v}}_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \eta_{1,12} & \cdot\ \cdot & \eta_{1,23} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_{6,12} & \cdot\ \cdot & \eta_{6,23} \end{vmatrix}.$$

Queste identità sussistono quando le y e le η denotano rispettivamente le coordinate-raggi e le coordinate-assi sia di un medesimo complesso, sia di due complessi coniugati.

III.

Nell'attuale spazio di complessi va definita come distanza di due complessi C, C' la quantità

$$(CC') = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{A_{yy'} + i\sqrt{A_{yy}A_{y'y'} - A^2_{yy'}}}{A_{yy'} - i\sqrt{A_{yy}A_{y'y'} - A^2_{yy'}}} = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{A_{\eta\eta'} + i\sqrt{A_{\eta\eta}A_{\eta'\eta'} - A^2_{\eta\eta'}}}{A_{\eta\eta'} - i\sqrt{A_{\eta\eta}A_{\eta'\eta'} - A^2_{\eta\eta'}}}, \qquad (1)$$

ove $i = \sqrt{-1}$; dalla quale definizione si ricava

$$\cos(CC') = \frac{A_{yy'}}{\sqrt{A_{yy}A_{y'y'}}} = -\frac{\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y' & \beta \end{Vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & \beta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & y' \\ y' & \beta \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{[per la (9) II]}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen}^2(CC') = \frac{A_{yy}A_{y'y'} - A^2_{yy'}}{A_{yy}A_{y'y'}} = \frac{\beta\begin{Vmatrix} 0 & & y \\ & & y' \\ y & y' & \beta \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & \beta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & y' \\ y' & \beta \end{Vmatrix}} \quad \text{[per la (10) II]}, \qquad (3)$$

ove è indifferente mutare le y nelle η e scambiare mutuamente le b con le β.

Quando i due complessi sono speciali, le loro coordinate divengono le coordinate delle rispettive rette direttrici, ed allora il coseno della distanza de' due complessi diviene ciò che noi chiamammo (*Studio,* III) il co-momento delle due rette, cioè il prodotto de' coseni delle loro due distanze, nel senso spiegato nel precitato *Studio.*

La congruenza CC' possiede due complessi appartenenti all'assoluto, e le coordinate $(\lambda y_{ij} + \mu y'_{ij})$ di uno qualunque di essi corrispondono a' valori di $\lambda : \mu$ forniti dalla equazione $A_{\lambda y + \mu y', \lambda y + \mu y'} = 0$ ovvero

$$A_{yy}\lambda^2 + 2A_{yy'}\lambda\mu + A_{y'y'}\mu^2 = 0. \qquad (4)$$

Detti $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$ questi valori, si ha evidentemente dalla (1)

$$(CC') = \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right).$$

Se chiamiamo, col sig. Lindemann, rapporto anarmonico di quattro complessi congruenti, per es.

$$C, \quad C', \quad \lambda_1 C + \mu_1 C', \quad \lambda_2 C + \mu_2 C',$$

la quantità $\frac{\lambda_1}{\mu_1}:\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, come quella che rappresenta il rapporto anarmonico de' punti o piani corrispondenti ad uno stesso piano o punto qualunque ne' quattro complessi, avremo che la distanza di due complessi è eguale al logaritmo, diviso per $2i$, del rapporto anarmonico determinato da essi con quei due loro congruenti che fanno parte dell'assoluto.

Sono ad una stessa distanza D da un complesso C' tutti quei complessi C che verificano la equazione

$$\cos^2 D \cdot A_{y'y'} \cdot A_{yy} - A^2_{yy'} = 0:$$

essi formano uno spazio di quattro dimensioni che può dirsi circoscritto all'assoluto.

Sono a distanza nulla da C' que' complessi pe' quali

$$A_{y'y'} A_{yy} - A^2_{yy'} = 0:$$

essi costituiscono similmente uno spazio di quattro dimensioni circoscritto all'assoluto; e le congruenze che ciascuno di essi determina con C' possono dirsi tangenti all'assoluto, poichè per esse i due complessi appartenenti all'assoluto coincidono, come apparisce dalla superiore equazione (4) in $\lambda:\mu$.

Sono a distanza $\frac{\pi}{2}$ da C', e però saranno detti ortogonali a C', i complessi C pe' quali

$$A_{yy'} = 0:$$

essi costituiscono uno spazio di quattro dimensioni e di curvatura costante ortogonale a C'. Nella congruenza determinata da ciascuno di essi con C' i due complessi appartenenti all'assoluto sono armonici rispetto a C e C', poichè la detta equazione in $\lambda:\mu$ dà attualmente $\frac{\lambda_1}{\mu_1}:\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -1$. Inoltre, essendo $I_{Yy'} = A_{yy'} = 0$, si vede che l'ortogonalità di due complessi significa che ciascuno è in involuzione col coniugato dell'altro.

Sono a distanza infinita da un complesso C' tutti i complessi pe' quali $A_{yy}=0$, vale a dire quelli dell'assoluto; onde questo può anche chiamarsi l'infinito dell'attuale spazio di complessi.

Gli elementi (complessi) comuni a' quattro spazii di quattro dimensioni ora considerati sono i medesimi: essi costituiscono uno spazio di tre dimensioni contraddistinto dalle equazioni

$$A_{yy} = 0, \quad A_{yy'} = 0,$$

il quale comprende i complessi in involuzione co' proprii coniugati e con C'.

La distanza di due complessi è eguale a quella de' loro coniugati.

Dati due complessi C, C', e designato con c il coniugato di C, si ha dalla (2)

$$\cos(c\,C') = \frac{A_{Yy'}}{\sqrt{A_{YY} A_{y'y'}}} = \frac{I_{yy'}}{\sqrt{A_{yy} A_{y'y'}}} = \frac{I_{\eta\eta'}}{\sqrt{A_{\eta\eta} A_{\eta'\eta'}}} .$$

Questa espressione la chiameremo **momento** de' complessi C, C'. Essa è nulla per due complessi in involuzione, infinita quando uno de' complessi almeno appartiene all' assoluto.

Il momento di un complesso rispetto a sè stesso equivale al momento del complesso coniugato rispetto a sè stesso, esprimendo entrambi il coseno della distanza fra i due complessi coniugati: il valore ne è

$$\frac{I_{yy}}{A_{yy}} \text{ ovvero } \frac{I_{\eta\eta}}{A_{\eta\eta}} .$$

Tale momento è nullo per i complessi speciali, infinito per quelli dell' assoluto, ed eguale a ± 1 per que' complessi che soddisfanno rispettivamente alle equazioni $A_{yy} = \pm I_{yy}$, fra' quali si trovano i complessi speciali dell' assoluto.

IV.

I complessi coniugati a quelli di una congruenza danno origine ad un' altra congruenza, che diremo **coniugata** alla prima. Le rette delle due congruenze sono coniugate ciascuna a ciascuna, e in particolare le direttrici; inoltre le due rette comuni alle congruenze sono coniugate, e sono precisamente quelle sulle quali va contata la **doppia distanza** di ciascuna coppia di direttrici (l. c. III).

Quando due complessi C, c sono coniugati, la loro congruenza coincide con la coniugata, le due direttrici sono coniugate, e le altre rette della congruenza sono anche coniugate a due a due. Fra esse figurano quattro rette coniugate a sè stesse, cioè le quattro generatrici dell' assoluto de' punti o de' piani che secano le due direttrici.

Nella presente congruenza appartengono all' assoluto due complessi corrispondenti a' valori di $\lambda : \mu$ forniti dalla equazione (4) del § III, che per le (5) e (7) del § II diviene

$$A_{yy} \lambda^2 + 2 I_{yy} \lambda \mu + A_{yy} \mu^2 = 0 :$$

essi coincidono con C e c quando questi appartengono all' assoluto, sono ortogonali quando C e c sono speciali, e coincidono quando il momento di C e c rispetto a sè stessi è ± 1.

Le due direttrici poi si determinano mediante la equazione

$$I_{yy}\lambda^2 + 2A_{yy}\lambda\mu + I_{yy}\mu^2 = 0:$$

esse coincidono quando il momento di C rispetto a sè stesso è ± 1.

Un complesso che coincida col suo coniugato è manifestamente caratterizzato dalle equazioni [cfr. II (4)]

$$\varepsilon y_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{kl}},$$

le quali sono sei di numero e contengono come incognite i rapporti di cinque delle y alla sesta, più il fattore ε. Esse però non son tutte indipendenti.

Per vederlo, supponiamo per un momento l'assoluto de' punti riferito ad un tetraedro proprio coniugato rispetto ad esso; supponiamo, cioè,

$$A_{xx} = \sum a_i x_i^2,$$

onde

$$a = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad \alpha = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

$$A_{\eta\eta} = \sum \frac{\eta_i^2}{a_i},$$

$$A_{yy} = \sum a_i a_j y^2_{ij}, \quad A_{\eta\eta} = \sum \frac{\eta^2_{ij}}{a_i a_j},$$

$$b = (a_1 a_2 a_3 a_4)^3 = a^3, \quad \beta = \alpha^3 \ (*).$$

Allora le equazioni in esame divengono

$$\begin{array}{lll} \varepsilon y_{12} = a_3 a_4 y_{34} & \varepsilon y_{13} = a_4 a_2 y_{42} & \varepsilon y_{14} = a_2 a_3 y_{23} \\ \varepsilon y_{34} = a_1 a_2 y_{12} & \varepsilon y_{42} = a_1 a_3 y_{13} & \varepsilon y_{23} = a_1 a_4 y_{14}, \end{array}$$

e da due qualunque che si trovino nella stessa verticale si ricava

$$\varepsilon = \pm\sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} = \pm\sqrt{a}.$$

Quindi si scorge che le dette equazioni si riducono a tre:

$$\sqrt{a_1 a_2}\, y_{12} = \pm\sqrt{a_3 a_4}\, y_{34}, \quad \sqrt{a_1 a_3}\, y_{13} = \pm\sqrt{a_4 a_2}\, y_{42}, \quad \sqrt{a_1 a_4}\, y_{14} = \pm\sqrt{a_2 a_3}\, y_{23},$$

ove i segni $\pm$ si corrispondono; e se ne trae, indicando con λ, μ, ν tre indeterminate,

$$y_{12} = \lambda : \sqrt{a_1 a_2}, \quad y_{34} = \pm\lambda : \sqrt{a_3 a_4},$$

$$y_{13} = \mu : \sqrt{a_1 a_3}, \quad y_{42} = \pm\mu : \sqrt{a_4 a_2},$$

$$y_{14} = \nu : \sqrt{a_1 a_4}, \quad y_{23} = \pm\nu : \sqrt{a_2 a_3}.$$

(*) Le relazioni $b = a^3$, $\beta = \alpha^3$ sussistono dunque anche per la forma più generale delle A_{xx}, ecc.

Dunque vi sono due serie doppiamente infinite di complessi coincidenti co' loro coniugati, rappresentate dalle due equazioni

$$\lambda(z_{12}\sqrt{a_1 a_2} \pm z_{34}\sqrt{a_3 a_4}) + \mu(z_{13}\sqrt{a_1 a_3} \pm z_{42}\sqrt{a_4 a_2}) + \nu(z_{14}\sqrt{a_1 a_4} \pm z_{23}\sqrt{a_2 a_3}) = 0.$$

I complessi di ciascuna serie hanno di comune infinite rette, generatrici di uno stesso sistema di una superficie di secondo grado. E di ciascuna serie fanno parte infiniti complessi speciali, le cui direttrici sono determinate dalle coordinate

$$\begin{aligned} z_{12} &= \lambda : \sqrt{a_1 a_2}, & z_{34} &= \pm\lambda : \sqrt{a_3 a_4}, \\ z_{13} &= \mu : \sqrt{a_1 a_3}, & z_{42} &= \pm\mu : \sqrt{a_4 a_2} \\ z_{14} &= \nu : \sqrt{a_1 a_4}, & z_{23} &= \pm\nu : \sqrt{a_2 a_3} \end{aligned}$$

con la condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0.$$

Queste direttrici, essendo evidentemente coniugate con sè stesse, sono generatrici di uno stesso sistema dell'assoluto de' punti o de' piani. Dunque le rette comuni a' complessi della prima serie sono le generatrici dell'un sistema nell'assoluto de' punti o de' piani, e le rette comuni a' complessi della seconda serie sono le generatrici dell'altro sistema. Il primo sistema di generatrici corrisponde al segno — nelle soprascritte espressioni delle z e il secondo sistema al segno $+$.

Ritornando alla forma generale delle A_{xx}, ecc., si può concludere che vi sono due serie doppiamente infinite di complessi coincidenti co' loro coniugati, e le loro coordinate soddisfanno alle rispettive equazioni

$$\pm\sqrt{a}\,y_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{kl}} \quad \text{ovvero} \quad \pm\sqrt{\alpha}\,\eta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_{kl}};$$

che a queste due serie appartengono rispettivamente i complessi speciali intorno a' due sistemi di generatrici dell'assoluto de' punti o de' piani, e le coordinate di queste generatrici soddisfanno rispettivamente alle equazioni

$$\pm\sqrt{a}\,z_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{zz}}{\partial z_{kl}} \quad \text{ovvero} \quad \pm\sqrt{\alpha}\,\zeta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta_{kl}};$$

e che infine le generatrici dell'un sistema sono le rette comuni a' complessi dell'altra serie, e viceversa.

Si osservi che le precedenti equazioni nelle y sono verificate quando si pone $y_{12} = \lambda y'_{12} + \mu y''_{12}$, ecc., $(y'_{12}, \ldots)$ e $(y''_{12}, \ldots)$ essendo due particolari soluzioni delle medesime; sicchè è chiaro che due complessi di una stessa serie danno luogo ad una congruenza di complessi appartenenti tutti a quella serie, e le direttrici della congruenza sono due generatrici dell' assoluto de' punti o de' piani.

Una conseguenza analitica delle cose ora esposte si è che il determinante delle equazioni $\pm\sqrt{a}\, y_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{yy}}{\partial y_{kl}}$ è nullo, ossia

$$\begin{vmatrix} b_{12,34} \mp \sqrt{a} & b_{13,34} & \ldots & b_{34,34} \\ b_{12,42} & b_{13,42} \mp \sqrt{a} & \ldots & b_{34,42} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{12,12} & b_{13,12} & \ldots & b_{34,12} \mp \sqrt{a} \end{vmatrix} = 0,$$

identità che si scinde in due per via del segno $\mp$, e che sussiste anche fra le β ed α.

V.

In ogni congruenza esiste un complesso involutorio od ortogonale ad un complesso dato: poichè se C', C'' sono due complessi della congruenza e C il complesso dato, ciascuna delle equazioni

$$I_{\lambda y' + \mu y'', y} = 0 \quad A_{\lambda y' + \mu y'', y} = 0$$

fornisce un valore per $\lambda : \mu$.

Quindi, date due congruenze, i loro complessi si possono far corrispondere in modo che due complessi corrispondenti siano involutorii od ortogonali. Si hanno così due serie proiettive di complessi. Ed è chiaro che i punti (o piani) corrispondenti ad uno stesso piano (o punto) arbitrario in due complessi corrispondenti formano due punteggiate proiettive (o due fasci proiettivi).

In particolare, i complessi di una stessa congruenza si possono far corrispondere in modo da essere a due a due involutorii od ortogonali; e le varie coppie così condizionate formano una involuzione quadratica. Ciò è d' accordo col fatto che nella congruenza esistono due complessi in involuzione con sè stessi (quelli speciali intorno alle due generatrici) e due complessi ortogonali a sè stessi (quelli che appartengono all' assoluto).

Dato un complesso C', vi sono infiniti complessi C in involuzione con esso, cioè quelli che verificano la equazione lineare $I_{yy'} = 0$: essi costituiscono uno spazio parziale di quattro dimensioni e di curvatura costante nello spazio totale de' complessi. In particolare, i complessi speciali intorno alle rette del complesso C' formano uno spazio parziale di tre dimensioni nello spazio precedente. E qui si noti che, se un complesso C' è in involuzione con altri due C, C_1, tale sarà con tutti quelli della loro congruenza; poichè dalle relazioni $I_{yy'}=0$, $I_{y_1y'}=0$ si deduce subito $I_{\lambda y+\mu y_1, y'}=0$, qualunque sia $\lambda:\mu$. Quando avviene questo fatto, che un complesso sia in involuzione con tutti quelli di una congruenza, si dirà che quel complesso è in involuzione con la congruenza.

I complessi in involuzione con due complessi dati C', C'', e quindi con la loro congruenza, costituiscono uno spazio di tre dimensioni e di curvatura costante, come è provato dalle $I_{yy'}=0$ $I_{yy''}=0$. E i complessi speciali intorno alle rette della congruenza formano uno spazio parziale di due dimensioni nel precedente.

I complessi in involuzione con tre complessi dati C', C'', C''', non congruenti (e quindi con le infinite congruenze che se ne possono dedurre), fanno uno spazio di due dimensioni e di curvatura costante. Tutte le rette comuni a' detti complessi C', C'', C''', ecc. sono generatrici di uno stesso sistema di una superficie di secondo grado, e i complessi speciali intorno ad esse fanno parte dello spazio in esame.

I complessi in involuzione con quattro complessi dati, de' quali tre qualunque non siano congruenti, sono in involuzione con le infinite congruenze originate da questi, e formano uno spazio di una dimensione e di curvatura costante. Tale spazio è una congruenza; poichè le coordinate di ciascun suo elemento C, soddisfacendo a quattro equazioni lineari $I_{yy'}=0$, ecc., possono esprimersi come funzioni lineari omogenee di due parametri λ, μ; vale a dire che si può porre

$$y_{ij}=\lambda p_{ij}+\mu q_{ij}.$$

Le direttrici della congruenza sono le due rette comuni a' quattro complessi dati.

Vi è un sol complesso in involuzione con cinque complessi dati a tre a tre non congruenti.

La condizione perchè vi sia un complesso involutorio a sei altri dati e non congruenti a tre a tre, è che il determinante delle coordinate di questi sei complessi sia nullo.

Tutto quanto è stato detto circa i complessi in involuzione con uno o più complessi dati C', C'', ecc. si applica immediatamente a' complessi ortogonali ad uno o più complessi dati, poichè essi sono in involuzione co' coniugati dei dati (cfr. III). Così, un complesso ortogonale ad altri due, sarà ortogonale a tutti quelli della loro congruenza, e si dirà ortogonale alla congruenza. Inoltre, si vede che la condizione per l'esistenza di un complesso ortogonale a sei complessi dati è che si annulli il determinante delle coordinate di questi, come nel caso della involuzione; poichè se un complesso è ortogonale a' sei dati, il suo coniugato sarà in involuzione con questi, e viceversa.

Reciprocamente, è manifesto che ogni complesso le cui coordinate verifichino delle equazioni lineari, è in involuzione co' complessi aventi per coordinate i coefficienti di queste equazioni, ovvero ortogonale a' coniugati di tali complessi.

Se un complesso C è in involuzione con una congruenza $C'C''$, ogni congruenza che contenga C si dirà in involuzione con quella congruenza $C'C''$. Questo stato delle due congruenze è reciproco. Infatti sia C''' un altro complesso di una congruenza che contiene C: allora nella $C'C''$ esisterà, un complesso in involuzione con C''', e questo complesso, essendo in involuzione anche con C per ipotesi, sarà in involuzione con tutta la congruenza CC''': adunque le due congruenze sono tali che ciascuna contenga un complesso in involuzione con l'altra.

Analogamente, due congruenze tali che la prima contenga un complesso ortogonale alla seconda, e quindi la seconda contenga un complesso ortogonale alla prima, si diranno ortogonali mutuamente.

Due complessi ed altri due in involuzione con ambedue i primi, danno origine a due congruenze che possono dirsi in perfetta involuzione, poichè ciascuna ha tutti i complessi in involuzione con l'altra. Le direttrici dell'una congruenza secano quelle dell'altra formando un quadrilatero gobbo, le cui diagonali sono le due rette comuni alle due congruenze. Ad ogni congruenza corrisponde un numero quattro volte infinito di congruenze in perfetta involuzione con essa; poichè le due coppie di lati opposti in un quadrilatero gobbo qualunque possono essere scelte come direttrici di due congruenze in perfetta involuzione.

Analogamente, due complessi ed altri due ortogonali a ciascuno di essi generano due congruenze perfettamente ortogonali, cioè tali che ciascuna abbia tutti i suoi complessi ortogonali all'altra. Le direttrici di ciascuna congruenza sono ortogonali a quelle dell'altra (nel senso spiegato nello *Studio,* III), poichè secano le coniugate di queste. Due rette ed altre due rette che sechino le loro coniugate sono sempre direttrici di due congruenze perfettamente ortogonali. Ad ogni congruenza ne corrispondono ∞^4 ortogonali.

VI.

Due complessi $C\ C'$ individuano una congruenza. Con le sei coordinate di C e le corrispondenti di C' si può formare la matrice

$$\left| \begin{matrix} y_{12} & y_{34} & y_{13} & y_{42} & y_{14} & y_{23} \\ y'_{12} & y'_{34} & y'_{13} & y'_{42} & y'_{14} & y'_{23} \end{matrix} \right|,$$

dalla quale si ricavano quindici determinanti di second' ordine, che indicheremo con la lettera u variata mediante due coppie d'indici, come segue:

$$u_{12,34} = y_{12}y'_{34} - y'_{12}y_{34}, \ldots, \quad u_{14,23} = y_{14}y'_{23} - y'_{14}y_{23}.$$

Se denotiamo, per brevità, rispettivamente con

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \end{matrix}$$

i gruppi

$$\begin{matrix} 12 & 34 & 13 & 42 & 14 & 23, \end{matrix}$$

potremo scrivere

$$u_{\text{I},\text{II}} = y_{\text{I}}y'_{\text{II}} - y'_{\text{I}}y_{\text{II}}, \ldots, \quad u_{\text{V},\text{VI}} = y_{\text{V}}y'_{\text{VI}} - y'_{\text{V}}y_{\text{VI}},$$

o in generale

$$u_{ij} = y_i y'_j - y'_i y_j,$$

indicando con ij ciascuna delle quindici combinazioni binarie che si possono fare con gl'indici I, II, ecc. in modo che in ogni combinazione il primo indice sia minore del secondo.

Le quindici quantità u le chiameremo c o o r d i n a t e - r a g g i omogenee della congruenza.

Quando scrivendo u_{ij} non si vuole supporre sempre $i<j$, bisogna ricordare che $u_{ij} = -u_{ji}$ e $u_{ii} = 0$.

Le quindici coordinate u non sono tutte indipendenti: poichè si ha identicamente

$$\left\| \begin{matrix} y_{\text{I}} & y_{\text{II}} & y_{\text{III}} & y_{\text{IV}} & y_{\text{V}} & y_{\text{VI}} \\ y'_{\text{I}} & y'_{\text{II}} & y'_{\text{III}} & y'_{\text{IV}} & y'_{\text{V}} & y'_{\text{VI}} \\ y_{\text{I}} & y_{\text{II}} & y_{\text{III}} & y_{\text{IV}} & y_{\text{V}} & y_{\text{VI}} \\ y'_{\text{I}} & y'_{\text{II}} & y'_{\text{III}} & y'_{\text{IV}} & y'_{\text{V}} & y'_{\text{VI}} \end{matrix} \right\| = 0$$

ovvero

$$u_{ij}u_{kl} + u_{ik}u_{lj} + u_{il}u_{jk} = 0, \tag{1}$$

indicando con ijkl una combinazione quaternaria degl'indici I, II,...

Si ottengono così fra le u quindici relazioni, le quali però non sono tutte indipendenti, ma si riducono a sei, come or ora mostreremo.

In primo luogo si osservi che mutando uno o ambedue i complessi C C' in altri della stessa congruenza, le coordinate u variano tutte, ma proporzionalmente, onde i loro mutui rapporti, che son poi ciò che importa considerare, rimangono inalterati. Ne segue che in ogni funzione omogenea di grado nullo delle u è lecito mutare a piacere i due complessi dalle cui coordinate le u sono composte.

Ciò premesso, si possono scegliere i due complessi C C' individuanti la congruenza in modo che siano rispettivamente in involuzione con due complessi dati qualunque $C_1 C_2$, poichè in ogni congruenza esiste un complesso in involuzione con un complesso dato (V): allora le equazioni $I_{yy_1}=0$, $I_{y'y_2}=0$ permetteranno di esprimere una coordinata di ciascuno de' complessi C C' in funzione lineare omogenea delle altre cinque, e quindi le coordinate u della congruenza si potranno esprimere come funzioni bilineari omogenee di cinque coordinate di C e di cinque di C', vale a dire che risulteranno proporzionali ad altrettante funzioni bilineari non omogenee de' rapporti di quattro coordinate di C ad una delle altre due e di quattro coordinate di C' ad una delle altre due; onde la congruenza sarà individuata per mezzo di otto variabili indipendenti.

Segue da ciò che delle quindici relazioni innanzi accennate fra le coordinate u di una congruenza solo sei sono indipendenti, e le altre sono conseguenze di esse.

Ora consideriamo il sistema o complesso di primo grado delle congruenze, in numero sette volte infinito, che soddisfanno ad una equazione lineare fra le loro coordinate

$$\sum t_{ij} u_{ij} = 0.$$

Ad ogni gruppo di valori de' quindici coefficienti

$$t_{\mathrm{I,II}}, \quad t_{\mathrm{I,III}}, \ldots, \quad t_{\mathrm{V,VI}},$$

o meglio ad ogni gruppo di valori de' rapporti di quattordici di essi al rimanente, corrisponde un complesso di congruenze: se dunque si assume un complesso di congruenze come elemento di uno spazio di quattordici dimensioni, le t saranno le coordinate omogenee di un elemento di questo spazio. Anzi, essendo le t indipendenti l'una dalle altre, ogni spazio di quattordici dimensioni potrà venir rappresentato, elemento per elemento, dallo spazio che ha per elementi i complessi di congruenze. E si noti che nulla vieta di dare alle t gli stessi indici adottati per le u, purchè si supponga $t_{ij} = -t_{ij}$.

L'insieme di tutte le possibili congruenze costituisce uno spazio parziale di otto dimensioni nello spazio de' complessi di congruenze: questo spazio parziale è contraddistinto dalle relazioni innanzi stabilite fra le u, coordinate di un elemento di esso.

Risultamenti del tutto analoghi si ottengono partendo dalla considerazione delle coordinate-assi di due complessi C, C' che individuano una congruenza. Si assumeranno allora come coordinate-assi omogenee della congruenza CC' le quindici quantità v definite dalle equazioni

$$v_{12.34} = \eta_{12}\eta'_{34} - \eta'_{12}\eta_{34}, \dots, \quad v_{14.23} = \eta_{14}\eta'_{23} - \eta'_{14}\eta_{23}$$

o più brevemente

$$v_{ij} = \eta_i\eta'_j - \eta'_i\eta_j;$$

fra le quali coordinate passano quindici relazioni, riducibili a sei, della forma

$$v_{ij}v_{kl} + v_{ik}v_{lj} + v_{il}v_{jk} = 0. \qquad (1)'$$

Supposto, come fu stabilito fin dal principio,

$$y_{12} : \eta_{34} = \dots = y'_{12} : \eta'_{34} = \dots = \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

si ha fra le coordinate-raggi ed assi di una stessa congruenza la relazione

$$u_{ij} : v_{i'j'} = \alpha = \frac{1}{a}, \qquad (2)$$

purchè le u e le v siano composte mediante le coordinate-raggi ed assi di una medesima coppia di complessi, e ii', jj' indichino uno qualunque de' gruppi

(I, II) (II, I) (III, IV) (IV, III) (V, VI) (VI, V)

ossia

(12, 34) (34, 12) (13, 42) (42, 13) (14, 23) (23, 14).

Per analogia, chiameremo coordinate-assi di un complesso di congruenze le quantità τ definite dalla equazione

$$t_{ij} : \tau_{i'j'} = \alpha = \frac{1}{a}. \qquad (3)$$

VII.

In infiniti modi possiamo organizzare lo spazio de' complessi di congruenze talmente che riesca di curvatura costante: possiamo, per esempio, scegliere per assoluto lo spazio di tredici dimensioni determinato dalla equazione

$$A_{tt} \equiv \sum c_{ij,mn} t_{ij} t_{mn} = 0,$$

ove sia posto

$$c_{ij,mn} = \begin{vmatrix} b_{im} & b_{in} \\ b_{jm} & b_{jn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \beta_{im} \partial \beta_{jn}} \tag{1}$$

e ij, mn indichino le combinazioni binarie degl' indici I, II,...

Conformemente a questa scelta, assumeremo la

$$A_{uu} \equiv \sum c_{ij,mn} u_{ij} u_{mn} = 0$$

come equazione dell' assoluto per lo spazio (non di curvatura costante) delle congruenze.

Fu già asservato [II (10)] che

$$\begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yy'} \\ A_{y'y} & A_{y'y'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{Vmatrix} 0 & & y \\ & & y' \\ y & y' & \beta \end{Vmatrix},$$

ora l' ultimo determinante si sviluppa in

$$\sum \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \beta_{im} \partial \beta_{jn}} (y_i y'_j - y'_i y_j)(y_m y'_n - y'_m y_n)$$

ovvero in A_{uu}; dunque

$$A_{uu} = A_{yy} A_{y'y'} - A^2_{yy'},$$

sicchè la equazione $A_{uu} = 0$ equivale all' altra

$$A_{yy} A_{y'y'} - A^2_{yy'} = 0.$$

Ma dimostrammo (III) che nelle congruenze CC' soddisfacenti a questa equazione i due complessi che appartengono all' assoluto de' complessi coincidono, sicchè tali congruenze possono chiamarsi t a n g e n t i all' assoluto de' complessi: per conseguenza l' a s s o l u t o d e l l e c o n g r u e n z e è c o s t i t u i t o d a l l ' i n s i e m e d e l l e c o n g r u e n z e t a n g e n t i a l l ' a s s o l u t o d e ' c o m p l e s s i.

L' equazione dell' assoluto de' complessi di congruenze, espressa nelle coordinate τ, sarà la seguente:

$$A_{\tau\tau} \equiv \sum \gamma_{ij,mn} \tau_{ij} \tau_{mn} = 0,$$

ove si ponga

$$\gamma_{ij,mn} = \begin{vmatrix} \beta_{im} & \beta_{in} \\ \beta_{jm} & \beta_{jn} \end{vmatrix} = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 b}{\partial b_{im} \partial b_{jn}}; \tag{2}$$

infatti dalla più volte adoperata relazione $b_{ij,pq} = \frac{1}{\alpha} \beta_{kl,rs}$ si ricava

$$b_{im} = \frac{1}{\alpha} \beta_{i'm'}, \text{ ecc.},$$

e quindi si ha dalle (1) e (2)

$$c_{ij,mn}=\frac{1}{\alpha^2}\begin{vmatrix}\beta_{i'm'} & \beta_{i'n'}\\ \beta_{j'm'} & \beta_{j'n'}\end{vmatrix}=\frac{1}{\alpha^2}\gamma_{i'j',m'n'};$$

d'altra parte [VI (3)]

$$t_{ij}=\alpha\tau_{i'j'},\quad t_{mn}=\alpha\tau_{m'n'};$$

per conseguenza

$$A_{tt}=\sum\gamma_{i'j',m'n'}\tau_{i'j'}\tau_{m'n'}$$

ossia

$$A_{tt}=A_{\tau\tau}. \tag{3}$$

In particolare, posto

$$A_{vv}=\sum\gamma_{ij,mn}v_{ij}v_{mn},$$

sarà

$$A_{uu}=A_{vv},$$

sicchè $A_{vv}=0$ è l'equazione dell'assoluto delle congruenze espressa in coordinate-assi.

Similmente, se con le coordinate di due elementi de' due spazii in questione si costruiscano le funzioni bilineari

$$A_{tt'} \text{ e } A_{\tau\tau'},\quad A_{uu'} \text{ e } A_{vv'},$$

si trova

$$A_{tt'}=A_{\tau\tau'},\quad A_{uu'}=A_{vv'}. \tag{4}$$

Si ha pure

$$\frac{\partial A_{tt}}{\partial t_{ij}}:\frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial \tau_{i'j'}}=\frac{1}{\alpha}=a=\frac{\partial A_{uu}}{\partial u_{ij}}:\frac{\partial A_{vv}}{\partial v_{i'j'}}. \tag{5}$$

Fra le c e le γ passano le seguenti relazioni

$$\sum_j c_{ij}\gamma_{ij}=1,\quad \sum_j c_{ij}\gamma_{pj}=0. \tag{6}$$

Risolvendo un sistema di equazioni lineari e chiamando c, γ i discriminanti delle forme quadratiche A_{tt}, $A_{\tau\tau}$, se ne deduce

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial c_{ij}},\quad c_{ij}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ij}}; \tag{7}$$

e quindi si ottiene (precisamente come nel § I del citato *Studio*)

$$c\gamma=1 \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix}\gamma_{im} & \gamma_{in}\\ \gamma_{jm} & \gamma_{jn}\end{vmatrix}=\frac{1}{c}\frac{\partial^2 c}{\partial c_{im}\partial c_{jn}},\quad \begin{vmatrix}c_{im} & c_{in}\\ c_{jm} & c_{jn}\end{vmatrix}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\gamma_{im}\partial\gamma_{jn}}, \tag{9}$$

e così di seguito.

Dal fin qui detto si rileva che le forme A_{tt}, $A_{\tau\tau}$ sono reciproche e che si trasformano l'una nell'altra mediante le sostituzioni lineari reciproche

$$t_{ij}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{\tau\tau}}{\partial \tau_{ij}}, \quad \tau_{ij}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{tt}}{\partial t_{ij}}; \tag{10}$$

e in particolare le A_{uu}, A_{vv} si trasformano l'una nell'altra mediante le sostituzioni

$$u_{ij}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{vv}}{\partial v_{ij}}, \quad v_{ij}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{uu}}{\partial u_{ij}}.$$

Le u e le v che figurano in queste sostituzioni sono le coordinate-raggi ed assi rispettivamente di due congruenze coniugate, purchè queste s'intendano individuate da due coppie di complessi coniugati nella formazione delle loro coordinate: infatti in questa ipotesi si ha [cfr. II (4)]

$$u_{ij}=y_i y'_j-y'_i y_j=\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_i} & \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_j} \\ \frac{\partial A_{\eta'\eta'}}{\partial \eta'_i} & \frac{\partial A_{\eta'\eta'}}{\partial \eta'_j} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \beta_{i,\mathrm{I}}\dots & \beta_{i,\mathrm{VI}} \\ \beta_{j,\mathrm{I}}\dots & \beta_{j,\mathrm{VI}} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \eta_{\mathrm{I}}\dots & \eta_{\mathrm{VI}} \\ \eta'_{\mathrm{I}}\dots & \eta'_{\mathrm{VI}} \end{vmatrix}=\sum_{pq}\gamma_{ij,pq}v_{pq}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{vv}}{\partial v_{ij}}.$$

Quindi è facile dedurre, analogamente a quello che facemmo nel § II, che le t e le τ che figurano nelle sostituzioni (10) testè considerate sono le coordinate-raggi ed assi rispettivamente di due complessi coniugati di congruenze, cioè composti di congruenze coniugate ciascuna a ciascuna.

Rimanendo in questa ipotesi, ed indicando con le t' e τ' le coordinate di altri due complessi coniugati di congruenze, si dimostra facilmente la identità

$$A_{tt'}=A_{\tau\tau'}, \tag{11}$$

e subordinatamente la

$$A_{uu'}=A_{vv'}.$$

Meritano, anche di esser notate le seguenti identità, che derivano immediatamente da quelle stabilite nel § I dello *Studio* per i spazii di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante:

$$A_{tt'}=A_{\tau\tau'}=-\frac{1}{\gamma}\begin{Vmatrix} 0 & t \\ t' & \gamma \end{Vmatrix}=-\frac{1}{c}\begin{Vmatrix} 0 & \tau \\ \tau' & c \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} A_{tt_1} & A_{tt_2} \\ A_{t't_1} & A_{t't_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{\tau\tau_1} & A_{\tau\tau_2} \\ A_{\tau'\tau_1} & A_{\tau'\tau_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\gamma}\begin{Vmatrix} 0 & & t \\ & & t' \\ t_1 & t_2 & \gamma \end{Vmatrix}=\frac{1}{c}\begin{Vmatrix} 0 & & \tau \\ & & \tau' \\ \tau_1 & \tau_2 & c \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

e così di seguito sino alla

$$\begin{vmatrix} A_{tt_1} & \cdot\,\cdot & A_{tt_{15}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ A_{t^{14}t_1} & \cdot\,\cdot & A_{t^{14}t_{15}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\tau\tau_1} & \cdot\,\cdot & A_{\tau\tau_{15}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ A_{\tau^{14}\tau_1} & \cdot\,\cdot & A_{\tau^{14}\tau_{15}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} t_{\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & t_{\mathrm{XV}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ t_{\mathrm{I}}^{14} & \cdot\,\cdot & t_{\mathrm{XV}}^{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{1,\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & t_{1,\mathrm{XV}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ t_{15,\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & t_{15,\mathrm{XV}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \tau_{\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & \tau_{\mathrm{XV}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \tau_{\mathrm{I}}^{14} & \cdot\,\cdot & \tau_{\mathrm{XV}}^{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_{1,\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & \tau_{1,\mathrm{XV}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \tau_{15,\mathrm{I}} & \cdot\,\cdot & \tau_{15,\mathrm{XV}} \end{vmatrix}.$$

In queste relazioni le t e le τ possono indifferentemente rappresentare le coordinate-raggi ed assi rispettivamente sia di uno stesso complesso di congruenze sia di due complessi coniugati.

Da ultimo, si può dimostrare che i discriminanti delle A_{tt}, $A_{\tau\tau}$ sono rispettivamente le quindicesime potenze di quelli delle A_{xx} $A_{\xi\xi}$, ossia le quinte potenze di quelli delle A_{yy}, $A_{\eta\eta}$.

Infatti, supponendo la A_{xx} ridotta alla forma canonica

$$A_{xx} = \sum a_i y_i^2,$$

come nel § IV, si trova

$$A_{tt} = \sum a_i a_j \cdot a_m a_n t^2_{ij,mn} \quad A_{\tau\tau} = \sum \frac{\tau^2_{ij,mn}}{a_i a_j \cdot a_m a_n},$$

onde

$$c = (a_1 a_2 a_3 a_4)^{15} = a^{15} = b^5, \quad \gamma = \alpha^{15} = \beta^5.$$

VIII.

Abbiamo innanzi (V) dimostrato che, se un complesso è in involuzione con due complessi di una congruenza, sarà in involuzione con tutti gli altri complessi della congruenza, e perciò potrà dirsi in involuzione con la congruenza. Cerchiamo ora la relazione che deve passare fra le coordinate del complesso e quelle della congruenza quando questo fatto ha luogo.

Se C è il complesso dato, e C' C'' due complessi qualunque della congruenza, dovranno verificarsi le seguenti due equazioni di condizione, necessarie e sufficienti: $I_{yy'}=0$, $I_{yy''}=0$, ovvero (I)

$$\sum y_{ij}\eta'_{ij}=0 \quad \sum y_{ij}\eta''_{ij}=0,$$
$$(ij=12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23).$$

Da esse si ricava

$$\sum_{ij} y_{ij}(\eta'_{ij}\eta''_{mn}-\eta''_{ij}\eta'_{mn})=0$$
$$(mn=12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23),$$

che può scriversi

$$\sum_i y_i v_{ij}=0 \text{ ovvero } \sum_i \eta_i u_{ij}=0. \tag{1}$$

ove i, j indicano gl' indici I, II,... VI già definiti (VI).

L' ultima equazione ne fornisce sei, ma di queste solo due sono indipendenti.

Deriva da quanto precede che le condizioni affinchè un complesso sia ortogonale ad una congruenza sono

$$\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial A_{yy}}{\partial y_i}u_{ij}=0 \text{ ovvero } \sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_i}v_{ij}=0, \tag{2}$$

le quali equivalgono a due sole indipendenti.

Quando il complesso C è speciale, le condizioni d' involuzione e di ortogonalità ora esposte divengono le condizioni affinchè una retta (la direttrice di C) o appartenga ad una congruenza, cioè ne incontri le direttrici, o sia ortogonale ad esse.

Cercheremo, in secondo luogo, la condizione affinchè due congruenze siano **in involuzione od ortogonali**, tali cioè che l' una abbia un complesso involutorio od ortogonale dell' altra, e quindi viceversa (V).

Siano C C' due complessi dell' una congruenza, e C_1 C_2 due dell' altra: nel caso della involuzione dovrà aversi simultaneamente $I_{\lambda y+\mu y', y_1}=0$ $I_{\lambda y+\mu y', y_2}=0$, ossia

$$I_{yy_1}\lambda+I_{yy_2}\mu=0 \quad I_{y'y_1}\lambda+I_{y'y_2}\mu=0;$$

onde la condizione

$$\begin{vmatrix} I_{yy_1} & I_{yy_2} \\ I_{y'y_1} & I_{y'y_2} \end{vmatrix}=0,$$

che si trasforma facilmente nella

$$\begin{vmatrix} y_{\text{I}} & y_{\text{II}} & \cdot\ \cdot & y_{\text{VI}} \\ y'_{\text{I}} & y'_{\text{II}} & \cdot\ \cdot & y'_{\text{VI}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{1,\text{I}} & \eta_{1,\text{II}} & \cdot\ \cdot & \eta_{1,\text{VI}} \\ \eta_{2,\text{I}} & \eta_{2,\text{II}} & \cdot\ \cdot & \eta_{2,\text{VI}} \end{vmatrix}=0$$

ovvero

$$\sum u_{ij} v'_{ij} = 0, \tag{3}$$

indicando con le u e le v' le coordinate-raggi ed assi rispettivamente delle due congruenze.

Ne segue che la condizione di ortogonalità fra due congruenze è

$$\sum_{ij} u \cdot \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{u'u'}}{\partial u'_{ij}} = 0,$$

ossia

$$A_{uu'} = 0. \tag{4}$$

Le condizioni affinchè un complesso C appartenga ad una congruenza $C'C''$ si esprimono mediante le loro coordinate y e u, osservando che allora dovrà coesistere il sistema di sei equazioni

$$\lambda y_i + \lambda' y'_i + \lambda'' y''_i = 0 \quad (\mathrm{i} = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{VI})$$

fra λ, λ', λ'': onde le condizioni, delle quali quattro sole indipendenti:

$$\left\| \begin{matrix} y_{\mathrm{I}} & y_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{\mathrm{VI}} \\ y'_{\mathrm{I}} & y'_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y'_{\mathrm{VI}} \\ y''_{\mathrm{I}} & y''_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y''_{\mathrm{VI}} \end{matrix} \right\| = 0$$

ovvero

$$y_i u_{jk} + y_j u_{ki} + y_k u_{ij} = 0 \tag{5}$$

ijk essendo un gruppo di tre fra gl' indici I, II,...

Due congruenze CC' C_1C_2 in generale non hanno alcun complesso comune: perchè lo abbiano dovranno verificarsi le sei equazioni in λ, λ', λ_1 λ_2:

$$\lambda y_i + \lambda' y'_i + \lambda_1 y_{1,i} + \lambda_2 y_{2,i} = 0;$$

onde le condizioni

$$\left\| \begin{matrix} y_{\mathrm{I}} & y_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{\mathrm{VI}} \\ y'_{\mathrm{I}} & y'_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y'_{\mathrm{VI}} \\ y_{1,\mathrm{I}} & y_{1,\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{1,\mathrm{VI}} \\ y_{2,\mathrm{I}} & y_{2,\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{2,\mathrm{VI}} \end{matrix} \right\| = 0,$$

le quali equivalgono a tre, e possono scriversi così, introducendo le coordinate u, u' delle congruenze:

$$(u_{ij} u'_{kl} + u_{ik} u'_{lj} + u_{il} u'_{jk}) + (u_{kl} u'_{ij} + u_{lj} u'_{ik} + u_{jk} u'_{il}) = 0 \tag{6}$$

ijkl essendo quattro degl' indici I, II,...

Ma ogni complesso di una congruenza, combinato con un complesso arbitrario, dà origine ad un numero quattro volte infinito di congruenze aventi un complesso comune con la data; onde le congruenze aventi un complesso comune con una data sono in numero cinque volte infinito.

Le congruenze aventi complessi comuni con due date sono in numero due volte infinito, essendo determinate da un complesso dell' una e da uno dell' altra. E le condizioni affinchè un dato complesso C appartenga ad una di siffatte congruenze aventi elementi comuni con due date $C'C''$, $C_1 C_2$ sono espresse dalle sei equazioni simultanee:

$$\lambda y_i + \lambda' y'_i + \lambda'' y''_i + \lambda_1 y_{1,i} + \lambda_2 y_{2,i} = 0,$$

dalle quali risulta

$$\left\| \begin{matrix} y_{\mathrm{I}} & y_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{\mathrm{VI}} \\ y'_{\mathrm{I}} & y'_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y'_{\mathrm{VI}} \\ y''_{\mathrm{I}} & y''_{\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y''_{\mathrm{VI}} \\ y_{1,\mathrm{I}} & y_{1,\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{1,\mathrm{VI}} \\ y_{2,\mathrm{I}} & y_{2,\mathrm{II}} & \cdot\ \cdot & y_{2,\mathrm{VI}} \end{matrix} \right\| = 0,$$

ovvero, introducendo le coordinate u u' delle date congruenze:

$$\sum y_i (u_{jk} u'_{lm} + u_{jl} u'_{mk} + u_{jm} u'_{kl} + u_{lm} u'_{jk} + u_{mk} u'_{jl} + u_{kl} u'_{jm}) = 0, \qquad (7)$$

ove la somma si estende alle permutazioni circolari del gruppo ijklm, e questo è per ciascuna equazione il gruppo di cinque fra gl' indici I, II, ecc. Si hanno così sei equazioni di condizione, di cui però due sole indipendenti.

Date tre congruenze, non vi è in generale alcuna congruenza che abbia elementi comuni con esse: quando vi fosse dovrebbero verificarsi le sei equazioni:

$$\lambda y_i + \lambda' y_i' + \lambda'' y_i'' + \lambda''' y_i''' + \lambda_1 y_{1,i} + \lambda_2 y_{2,i} = 0$$

supposto che CC', $C''C'''$, $C_1 C_2$ siano le tre congruenze. Quindi dovrebbe essere

$$\left| \begin{matrix} y_{\mathrm{I}} & y_{\mathrm{I}}' & y_{\mathrm{I}}'' & y_{\mathrm{I}}''' & y_{1,\mathrm{I}} & y_{2,\mathrm{I}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{\mathrm{VI}} & y_{\mathrm{VI}}' & y_{\mathrm{VI}}'' & y_{\mathrm{VI}}''' & y_{1,\mathrm{VI}} & y_{2,\mathrm{VI}} \end{matrix} \right| = 0;$$

introducendo le coordinate u, u', u'' delle tre congruenze, si ha la condizione

$$\sum u_{\text{I},\text{II}} u'_{\text{III},\text{IV}} u''_{\text{V},\text{VI}} = 0, \tag{8}$$

ove la somma si estende a tutte le permutazioni di prima classe del gruppo (I, II,..., VI).

IX.

Nello spazio di quattordici dimensioni studiato al § VII va definita come distanza di due elementi E, E' la espressione

$$(EE') = \frac{1}{2i} l \frac{A_{tt'} + i\sqrt{A_{tt}A_{t't'} - A^2_{tt'}}}{A_{tt'} - i\sqrt{A_{tt}A_{t't'} - A^2_{tt'}}} = \frac{A_{\tau\tau'} + i\sqrt{A_{\tau\tau}A_{\tau'\tau'} - A^2_{\tau\tau'}}}{A_{\tau\tau'} - i\sqrt{A_{\tau\tau}A_{\tau'\tau'} - A^2_{\tau\tau}}}; \tag{1}$$

da cui si ricava

$$\cos(EE') = \frac{A_{tt'}}{\sqrt{A_{tt}A_{t't'}}} = -\frac{\begin{Vmatrix} 0 & t \\ t' & \gamma \end{Vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & t \\ t & \gamma \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & t' \\ t' & \gamma \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}^2(EE') = \frac{A_{tt}A_{t't'} - A^2_{tt'}}{A_{tt}A_{t't'}} = \frac{\gamma\begin{Vmatrix} 0 & & t \\ & & t' \\ t & t' & \gamma \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & t \\ t & \gamma \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & t' \\ t' & \gamma \end{Vmatrix}}, \tag{3}$$

ove è lecito mutare le t nelle τ e scambiare le c con le γ.

Quando le t e τ si mutano nelle coordinate-raggi ed assi di due congruenze, le precedenti formole definiscono la distanza di due congruenze G, G'.

Precisamente come al § III, si vede che sono a distanza infinita da una congruenza G' tutte le congruenze appartenenti all'assoluto; sono a distanza nulla dalla G' tutte le congruenze G per le quali è soddisfatta la equazione

$$A_{uu}A_{u'u'} - A^2_{uu'} = 0;$$

sono a distanza $\frac{\pi}{2}$ dalla G' tutte le congruenze G per le quali si ha $A_{uu'} = 0$, cioè appunto tutte le congruenze che già chiamammo o r t o g o n a l i alla G' (cfr. V e VIII).

La nozione ora introdotta di distanza fra due congruenze si può ricondurre a quella più semplice di distanza fra complessi, a quello stesso modo come altrove (*Studio,* III) riducemmo la nozione di distanza fra due rette a quella di distanza fra punti o piani.

A tale uopo consideriamo due congruenze G, G'. Ad ogni complesso C della prima corrisponde nella stessa un complesso C' in involuzione con C (cfr. V); ed a' complessi C C' corrispondono rispettivamente nella seconda congruenza i due complessi C'' C''' in involuzione con essi (cfr. V): a C'' poi corrisponde nella stessa seconda congruenza un complesso in involuzione con C'', che chiameremo C^{IV}. Ora è chiaro che C''' e C^{IV} variando generano due serie projettive di complessi: infatti ad ogni posizione di C''' ne corrisponde una di C', e quindi una di C, e quindi una di C'', e quindi una di C^{IV}; e viceversa. Vi sono dunque nelle serie suddette due elementi uniti, ossia coincidenti co' corrispondenti: chiameremo C'_1 C'_2 questi due elementi, su' quali è da osservare che quando C''' e C^{IV} coincidono in C'_1, C'' coincide con C'_2, e viceversa. Se dunque siano C_1 C_2 i due complessi involutorii rispettivamente a C'_2 e C'_1 nella prima congruenza, è manifesto che verranno a determinarsi due congruenze $C_1 C'_1$ e $C_2 C'_2$ tali, che ciascuna avrà due complessi involutorii a due dell'altra, e quindi, come dimostrammo nel § V, tutti i complessi dell'una saranno in involuzione con quelli dell'altra e le due congruenze si diranno in perfetta involuzione.

Le due congruenze $C_1 C'_1$ $C_2 C'_2$ sono dunque in perfetta involuzione fra loro, e ciascuna ha un elemento comune con le due congruenze proposte. Inoltre, esse sono le sole che adempiano tutte queste condizioni.

Allo stesso modo si dimostra che, date due congruenze, esistono due altre congruenze, e due sole in generale, le quali siano perfettamente ortogonali fra loro ed abbiano un elemento comune con ciascuna delle due date.

Fermandoci a quest'ultimo caso, siano G, G' due congruenze date, C_1 e C_2 i complessi che le due congruenze perfettamente ortogonali, la cui esistenza abbiamo or ora provata, hanno comuni con la G; e C'_1 C'_2 i complessi che hanno comuni con la G'. Sarà

$$A_{y_1 y_2} = A_{y_1 y'_2} = A_{y'_1 y_2} = A_{y'_1 y'_2} = 0.$$

Allora, indicando con $u_{\text{I},\text{II}}$ ecc. le coordinate di G e con $u'_{\text{I},\text{II}}$ ecc. quelle di G', si potrà porre $u_{ij} = y_{1,i} y_{2,j} - y_{2,i} y_{1,j}$ e $u'_{ij} = y'_{1,i} y'_{2,j} - y'_{2,i} y'_{1,j}$; e però, in virtù della definizione de' coefficienti c (§ VII) e delle ultime formole del § II, si avrà successivamente

$$A_{uu} = \sum c_{ij,\text{mn}} u_{ij} u_{\text{mn}} = \frac{1}{\beta} \begin{Vmatrix} 0 & y_1 \\ & y_2 \\ y_1 \quad y_2 & \beta \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{y_1 y_1} & A_{y_1 y_2} \\ A_{y_2 y_1} & A_{y_2 y_2} \end{vmatrix} = A_{y_1 y_1} A_{y_2 y_2}$$

e similmente

$$A_{u'u'} = \begin{vmatrix} A_{y'_1y'_1} & A_{y'_1y'_2} \\ A_{y'_2y'_1} & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix} = A_{y'_1y'_1}A_{y'_2y'_2}$$

$$A_{uu'} = \begin{vmatrix} A_{y_1y'_1} & A_{y_1y'_2} \\ A_{y_2y'_1} & A_{y_2y'_2} \end{vmatrix} = A_{y_1y'_1}A_{y_2y'_2}.$$

D'altra parte si ha (§ III)

$$\cos(C_1C'_1) = \frac{A_{y_1y'_1}}{\sqrt{A_{y_1y_1}A_{y'_1y'_1}}}, \quad \cos(C_2C'_2) = \frac{A_{y_2y'_2}}{\sqrt{A_{y_2y_2}A_{y'_2y'_2}}};$$

per conseguenza

$$\cos(C_1C'_1)\cos(C_2C'_2) = \frac{A_{y_1y'_1}A_{y_2y'_2}}{\sqrt{A_{y_1y_1}A_{y_2y_2}\cdot A_{y'_1y'_1}A_{y'_2}A_{y'_2}}} = \frac{A_{uu'}}{\sqrt{A_{uu}A_{u'u'}}},$$

o finalmente [cfr. la (2)]

$$\cos(C_1C'_1)\cos(C_2C'_2) = \cos(GG'). \tag{4}$$

Questa relazione ci pone in grado di esprimere la distanza fra due congruenze in funzione di due distanze fra complessi, secondo l'intento che ci eravamo prefisso.

Il prodotto de' seni delle due distanze $(C_1C'_1)$, $(C_2C'_2)$ ora considerate, si determina come segue.

La seconda delle identità sottintese in fine del § II dà nel caso attuale

$$\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} 0 & & & & y_1 \\ & & & & y_2 \\ & & & & y'_1 \\ & & & & y'_2 \\ y_1 & y_2 & y'_1 & y'_2 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{y_1y_1} & A_{y_1y'_1} & A_{y_1y_2} & A_{y_1y'_2} \\ A_{y'_1y_1} & A_{y'_1y'_1} & A_{y'_1y_2} & A_{y'_1y'_2} \\ A_{y_2y_1} & A_{y_2y'_1} & A_{y_2y_2} & A_{y_2y'_2} \\ A_{y'_2y_1} & A_{y'_2y'_1} & A_{y'_2y_2} & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{y_1y_1} & A_{y_1y'_1} \\ A_{y'_1y_1} & A_{y'_1y'_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{y_2y_2} & A_{y_2y'_2} \\ A_{y'_2y_2} & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix},$$

ed il primo di questi determinanti si sviluppa in

$$\sum \frac{1}{\beta} \frac{\partial^4 \beta}{\partial \beta_{ei} \partial \beta_{fj} \partial \beta_{mp} \partial \beta_{nq}} u_{ef} u_{ij} u'_{mn} u'_{pq},$$

cioè in una funzione biquadratica delle coordinate delle congruenze G e G', la quale potremo indicare con $B_{uuu'u'}$, ove si ponga

$$B_{tt't''t'''} = \sum \frac{1}{\beta} \frac{\partial^4 \beta}{\partial \beta_{ei} \partial \beta_{fj} \partial \beta_{mp} \partial \beta_{nq}} t_{ef} t'_{ij} t''_{mn} t'''_{pq}.$$

Da queste formole e dalla (3) si ottiene

$$\operatorname{sen}(C_1\, C'_1)\operatorname{sen}(C_2 C'_2) = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} A_{y_1y_1} & A_{y_1y'_1} \\ A_{y'_1y_1} & A_{y'_1y'_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{y_2y_2} & A_{y_2y'_2} \\ A_{y'_2y_2} & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix}}{A_{y_1y_1} A_{y'_1y'_1} A_{y_2y_2} A_{y'_2y'_2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{B_{uuu'u'}}{A_{uu} A_{u'u'}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo l' ultimo fratto una funzione omogenea e di grado nullo nelle u, u', ne segue che può assumersi

$$u_{ef} = y_{1,e} y_{2,f} - y_{2,e} y_{1,f}, \quad u'_{mn} = y'_{1,m} y'_{2,n} - y'_{2,m} y'_{1,n}, \text{ ecc.}$$

indicando con le y_1, y_2 le coordinate di due complessi qualunque della congruenza G, e con le y'_1, y'_2 quelle di due complessi qualunque della G'; e in tale ipotesi si ha

$$\operatorname{sen}(C_1\, C'_1)\operatorname{sen}(C_2 C'_2) = \left\{ \frac{B_{uuu'u'}}{A_{uu} A_{u'u'}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$= \left\{ \frac{\begin{vmatrix} A_{y_1y_1} & \cdot & \cdot & A_{y_1y'_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{y'_2y_1} & \cdot & \cdot & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{y_1y_1} & A_{y_1y_2} \\ A_{y_2y_1} & A_{y_2y_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{y'_1y'_1} & A_{y'_1y'_2} \\ A_{y'_2y'_1} & A_{y'_2y'_2} \end{vmatrix}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{b \begin{Vmatrix} 0 & y_1 \\ & y_2 \\ & y'_1 \\ & y'_2 \\ y_1\ y_2\ y'_1\ y'_2 & \beta \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & y_1 \\ & y_2 \\ y_1\ y_2 & \beta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & y'_1 \\ & y'_2 \\ y'_1\ y'_2 & \beta \end{Vmatrix}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Anche qui è lecito mutare le coordinate-raggi nelle coordinate-assi e scambiare mutuamente le b con le β.

SOPRA UN NUOVO PUNTO DI CORRELAZIONE

FRA LE FORME BINARIE DEL QUARTO GRADO

E LE TERNARIE CUBICHE.

(*Da una lettera del prof.* Brioschi *al prof.* Cremona.)

. . . . Voi avrete certamente al pari di me dovuto meditare più volte sulle singolari analogie o correlazioni esistenti fra le forme binarie del quarto grado e le cubiche ternarie. Alcuni anni ora sono in una Nota pubblicata nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (6 aprile 1863) mi era prefisso di porre in evidenza quella analogia considerando le trasformazioni che le due forme indicate possono subire mediante la teorica dei covarianti associati. La lettura di un recente lavoro del sig. Cayley (*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics,* novembre 1874; *A Geometrical Illustration of the cubic Transformation in Elliptic Functions,* pag. 211) ha richiamato la mia attenzione sopra l'argomento della mia Nota del 1863, e parendomi che il nuovo punto di correlazione a cui sono giunto possa portare luce nelle ricerche tanto analitiche quanto geometriche che a quelle forme si legano, mi affretto a comunicarvelo, esprimendovi insieme il desiderio che questa lettera sia pubblicata nel prossimo numero dei nostri *Annali di Matematica.*

1. Indicando con $f(\xi, \eta)$ una forma binaria del quarto grado, rappresento con $h(\xi, \eta)$ il suo hessiano, con $\theta(\xi, \eta)$ il covariante di sesto grado; ossia:

$$h = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(ff)^2, \qquad \theta = 2 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = 2(fh)$$

essendo $f_1 = \frac{1}{4}\frac{df}{d\xi}$, $f_{11} = \frac{1}{3\cdot 4}\frac{d^2f}{d\xi^2}$, ecc....; infine con g_2, g_3 gli invarianti quadratico e cubico. Si ha come è noto la relazione:

$$\theta^2 = -(4h^3 - g_2 hf^2 + g_3 f^3). \tag{1}$$

Pongo ora nella $f(\xi, \eta)$ in luogo di ξ, η i binomj:

$$\xi = \xi_1 X - \tfrac{1}{4}\frac{dh}{d\eta_1} Y; \qquad \eta = \eta_1 X + \tfrac{1}{4}\frac{dh}{d\xi_1} Y \tag{2}$$

si avrà:

$$f(\xi, \eta) = (f, f', f'', f''', f^{\text{IV}})(X, Y)^4 \tag{3}$$

essendo $f', f'', \ldots$ covarianti di f nei quali siensi sostituiti alle ξ, η le ξ_1, η_1. Ma dalla teoria dei covarianti associati si hanno per f', $f'', \ldots$ i valori:

$$f' = -\tfrac{1}{2}\theta, \qquad f'' = \tfrac{1}{4} f(g_2 h - g_3 f), \qquad f''' = -\tfrac{1}{8}\theta(g_2 h - g_3 f)$$
$$f^{\text{IV}} = \tfrac{1}{16} f(g_2 h - g_3 f)^2 + g_3 h^3$$

ossia per la relazione (1)

$$f^{\text{IV}} = \tfrac{1}{16} f(g_2 h - g_3 f)(g_2 h + 3 g_3 f) - \tfrac{1}{4} g_3 \theta^2$$

quindi se supponesi che le ξ_1, η_1 annullino la $f(\xi_1, \eta_1)$, si avranno pei coefficienti della (3) i valori seguenti:

$$f = 0, \quad f' = -\tfrac{1}{2}\theta, \quad f'' = 0, \quad f''' = -\tfrac{1}{8} g_2 h \theta, \quad f^{\text{IV}} = -\tfrac{1}{4} g_3 \theta^2$$

e la (3) stessa diverrà:

$$f(\xi, \eta) = -2\theta Y[X^3 + \tfrac{1}{4} g_2 h X Y^2 + \tfrac{1}{8} g_3 \theta Y^3]. \tag{4}$$

Ora siccome dalle relazioni (2) si deducono le:

$$\xi \frac{df}{d\xi_1} + \eta \frac{df}{d\eta_1} = -2\theta Y; \qquad \xi \frac{dh}{d\xi_1} + \eta \frac{dh}{d\eta_1} = 4hX$$

se poniamo:

$$x = -\frac{\xi \dfrac{dh}{d\xi_1} + \eta \dfrac{dh}{d\eta_1}}{\xi \dfrac{df}{d\xi_1} + \eta \dfrac{df}{d\eta_1}} = 2\frac{hX}{\theta Y} \tag{5}$$

si avrà $X = \tfrac{1}{2}\dfrac{\theta}{h} x Y$, il quale valore sostituito nella (4), rammentando essere per la (1) $\theta^2 = -4h^3$ condurrà alla:

$$f(\xi, \eta) = \tfrac{1}{4}\theta^2 Y^4 (4x^3 - g_2 x - g_3). \tag{6}$$

Finalmente se in quest'ultima poniamo $x = -\tfrac{1}{2} z$ e:

$$g_2 = 3s, \qquad g_3 = -t \tag{7}$$

si avrà:

$$f(\xi, \eta) = \tfrac{1}{8}\theta^2 Y^4 (2t + 3sz - z^3). \tag{8}$$

2. Considero ora la forma ternaria cubica:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,l x_1 x_2 x_3$$

ed indico con s, t i suoi invarianti di quarto e di sesto grado, ossia:

$$s = 4\,l(l^3 - 1) \qquad t = 8\,l^6 + 20\,l^3 - 1$$

con H, K, Θ i suoi covarianti di grado terzo, sesto e nono rispetto alla x_1, x_2, x_3; cioè:

$$H = 6\sum(\pm F_{11} F_{22} F_{33}), \quad K = \sum(FH)^{rs} F_r H_s, \quad \Theta = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

nelle quali

$$F_1 = \tfrac{1}{3}\frac{dF}{dx_1}, \qquad F_{11} = \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2F}{dx_1^2}, \ldots$$

ed

$$(FH)^{rs} = F_{tr} H_{ts} + F_{ts} H_{tr} - F_{tt} H_{rs} - E_{rs} H_{tt}.$$

I valori delle H, K sono i seguenti:

$$H = 6\,[(1 + 8\,l^3) x_1 x_2 x_3 - l^2 F]$$
$$K = -4(1 + 8\,l^3)^2 Q + 4\,l^3(l^3 + 2)F^2 - \tfrac{2}{3}\,l(2\,l^3 + 1)FH + \tfrac{1}{3}\,l^2 H^2$$

essendo $Q = x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3$. È noto d'altronde che il quadrato del covariante Θ si esprime in funzione razionale, intera degli altri covarianti e degli invarianti di F. Pel caso in cui le x_1, x_2, x_3 annullino la F si hanno le:

$$\left.\begin{array}{c} H = 6(1 + 8\,l^3) x_1 x_2 x_3; \qquad K = \tfrac{1}{3}\,l^2 H^2 - 4(1 + 8\,l^3)^2 Q \\ 54\,\Theta^2 = 6^3 K^3 - 3\ 6\cdot sKH^4 + 2\,tH^6. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

3. Rammentate queste formole relative alla teorica delle due forme che qui consideriamo, passo alla ricerca dei rapporti $x_1 : x_2 : x_3$ che soddisfano alle due equazioni:

$$\xi(x_1 + x_2) - \eta x_3 = 0; \qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

od in linguaggio geometrico (Vedi la Nota citata del sig. Cayley), alla ricerca dei punti di intersezione di una retta che passa pel punto di inflessione $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e della cubica $F = 0$. Eliminando dalle due ultime equazioni la x_3, si ottiene:

$$\eta^3(x_1^3 + x_2^3) + \xi^3(x_1 + x_2)^3 + 6\,l\,\xi\eta^2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 0;$$

nella quale ponendo:

$$x_1 = p + q; \qquad x_2 = p - q \text{ e quindi } x_3 = 2p\frac{\xi}{\eta} \tag{10}$$

si deduce la relazione:

$$p^2(4\xi^3 + \eta^3 + 6l\xi\eta^2) = 3q^2\eta^2(2l\xi - \eta)$$

od anche:

$$p^2 f(\xi, \eta) = 3q^2\eta^2(2l\xi - \eta)^2 \tag{11}$$

posto:

$$f(\xi, \eta) = (2l\xi - \eta)(4\xi^3 + \eta^3 + 6l\xi\eta^2).$$

La f è una forma binaria del quarto grado, di cui gli invarianti hanno i valori seguenti:

$$g_2 = 12l(l^3 - 1), \qquad g_3 = 1 - 20l^3 - 8l^6$$

ossia indicando come sopra con s, t gli invarianti della ternaria cubica F:

$$g_2 = 3s, \qquad g_3 = -t$$

come si è supposto nelle relazioni (7). La formola di trasformazione (5) ossia la:

$$z = 2\frac{\xi\frac{dh}{d\xi_1} + \eta\frac{dh}{d\eta_1}}{\xi\frac{df}{d\xi_1} + \eta\frac{df}{d\eta_1}}$$

condurrà quindi alla formola (8). Ma evidentemente la $f(\xi, \eta)$ è annullata ponendo $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 2l$, perciò essendo:

$$h(\xi_1, \eta_1) = -(1 + 8l^3)^2, \qquad \theta(\xi_1, \eta_1) = -2(1 + 8l^3)^3, \quad \frac{df}{d\xi_1} = 8l(1 + 8l^3)$$

$$\frac{1}{4}\frac{dh}{d\xi_1} = -(1 + 2l^3)(1 + 8l^3), \quad \frac{1}{4}\frac{dh}{d\eta_1} = -3l^2(1 + 8l^3), \qquad \frac{df}{d\eta_1} = -4(1 + 8l^3)$$

si avranno le:

$$\xi = -\tfrac{1}{2}(1 + 8l^3)Y(z - 6l^2), \qquad \eta = -(1 + 8l^3)Y(lz + 1 + 2l^3)$$

e la formola di trasformazione sarà la:

$$z = 2\frac{(1 + 2l^3)\xi + 3l^2\eta}{\eta - 2l\xi}. \tag{12}$$

Per questi valori e per la (8) la formola (11) si muta nella:

$$\tfrac{1}{6}p^2(2t + 3sz - z^3) = q^2(lz + 1 + 2l^3)^2$$

per la quale:

$$p = \frac{1}{\rho}(lz + 1 + 2l^3), \qquad q = \frac{1}{\rho}\sqrt{\phi(z)}$$

posto

$$\phi(z) = \tfrac{1}{6}(2t + 3sz - z^3).$$

Le (10) daranno quindi i valori richiesti dei rapporti $x_1 : x_2 : x_3$ e cioè:

$$\rho x_1 = lz + 1 + 2l^3 + \sqrt{\phi(z)}, \quad \rho x_2 = lz + 1 + 2l^3 - \sqrt{\phi(z)}, \quad \rho x_3 = z - 6l^2 \tag{13}$$

essendo ρ una indeterminata; il doppio segno del radicale corrispondendo ad un'altra serie di valori, od all'altro punto di intersezione.

4. I valori (13) annullano quindi la $F(x_1, x_2, x_3)$, i loro rapporti sono cioè coordinate di un punto situato sulla cubica $F = 0$. Sostituendo i valori (13) di x_1, x_2, x_3 nelle espressioni (9) si hanno pei valori dei covarianti H, K in funzione di z:

$$H = \frac{1 + 8l^3}{\rho^3}\alpha, \qquad K = -\frac{(1 + 8l^3)^2}{54\rho^6}(9z\alpha^2 - 72\alpha\beta\gamma + 64\beta^3) \tag{14}$$

essendo:

$$\alpha = z^4 - 6sz^2 - 8tz - 3s^2, \quad \beta = z^3 - 3sz - 2t = -6\phi, \quad \gamma = z^2 - s$$

e la terza delle (9) dà:

$$\Theta = \frac{(1 + 8l^3)^3}{81\rho^3}(27\alpha^3 + 4\cdot 81\alpha^2\gamma^2 - 32\ 27\alpha\beta^2\gamma + 8^3\beta^4)\sqrt{\varphi(z)}.$$

Ora ponendo $\lambda = -\frac{6K}{H^2}$ si deduce dai valori (14) di H, K la equazione seguente del nono grado in z:

$$9(\lambda - z)\alpha^2 + 72\alpha\beta\gamma - 64\beta^3 = 0 \tag{15}$$

mentre dall'ultima delle (9) si ottiene la:

$$3\frac{\Theta}{H^3} = \sqrt{q(\lambda)} \tag{16}$$

e quindi la:

$$27\alpha^3\sqrt{\phi(\lambda)} = (27\alpha^3 + 4\cdot 81\alpha^2\gamma^2 - 32\ 27\alpha\beta^2\gamma + 8^3\beta^4)\sqrt{\varphi(z)}$$

e siccome dalla derivazione della (15) si ottiene:

$$9\alpha^3 d\lambda + (27\alpha^3 + 4\cdot 81\cdot\alpha^2\gamma^2 - 32\ 27\cdot\alpha\beta^2\gamma + 8^3\beta^4)dz$$

si avrà evidentemente dal confronto di queste ultime la equazione trascendente:

$$3\sqrt{q(\lambda)}dz + \sqrt{\phi(z)}d\lambda = 0$$

vale a dire la equazione corrispondente alla triplicazione delle funzioni elittiche, e la (15) è la equazione algebrica del nono grado la quale, come è noto, è il suo integrale (*). I valori (13) delle x_1, x_2, x_3 nei quali pongasi per z una radice della equazione (15) saranno perciò le coordinate dei punti di flesso della cubica $F=0$.

5.° Indicando con ω una radice cubica immaginaria dell'unità, essendo:

$$(\omega^2 x_1^3+\omega x_2^3+x)(x_1^3+\omega^2 x_2^3+x)=(x_1^3+x_2^3+x)'-3(x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+x_1^3x_2^3)$$

supponendo che le x_1, x_2, x_3 rendano $F=0$, si ha dalle relazioni (9) che:

$$(\omega^2 x_1^3+\omega x_2^3+x)(x_1^3+\omega^2 x_2^3+x_3^3)=3(l\,H^2+K)\nu^2 \tag{17}$$

essendo $\nu=\frac{1}{2(1+8l^3)}$. Ma si ha facilmente per la terza delle (9):

$$6^3(l^2H^2+K)^3=2\,[18lK+(10l^3-1)H^2]^2H^2+54\Theta^2$$

od anche:

$$108(l^2H^2+K)^3=$$
$$=\{H[18lK+(10l^3-1)H]+3\Theta\sqrt{-3}\}\{H[18lK+(10l^3-1)H]-3\Theta\sqrt{-3}\}$$

quindi ponendo:

$$y_1=\omega^2x_1^3+\omega x_2^3+x_3^3,\quad y_2=\omega x_1^3+\omega^2x_2^3+x_3^3,\quad -2my_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3 \tag{18}$$

essendo m una indeterminata, facendo come sopra $-\frac{6K}{H^2}=\lambda$ e rammentando la equazione (16) si ha:

$$y_1^3y_2^3=\tfrac{1}{4}\nu^6H^6\{3l\lambda+1-10l^3-\sqrt{-3\phi(\lambda)}\}\{3l\lambda+1-10l^3+\sqrt{-3\phi(\lambda)}\}$$

dalla quale:

$$\left.\begin{aligned} y_1^3&=\tfrac{1}{2}\nu^3H^3\,[3l\lambda+1-10l^3-\sqrt{-3\phi(\lambda)}]\\ y_2^3&=\tfrac{1}{2}\nu^3H^3\,[3l\lambda+1-10l^3+\sqrt{-3\phi(\lambda)}]\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

e per la terza delle (18)

$$my_3=lH\nu. \tag{20}$$

(*) Le formole generali per la moltiplicazione delle funzioni elittiche poste sotto questa forma furono date da me fino dal 1864 (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, n.° 19) deducendole dal teorema d'Abel. Recentemente il sig. Kiepert in una Memoria pubblicata nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band. 75, 1873, pag. 21 ha ottenuto alcune fra quelle formole, partendo dalle funzioni doppiamente periodiche corrispondenti a quella forma di funzioni elittiche.

Le ultime relazioni danno:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=\nu^3 H^3\left[3l\lambda+1-10l^3+\frac{l^3}{m^3}\right]$$

e per le (17) (18) essendo:

$$y_1 y_2 \quad = -\tfrac{1}{2}H^2\nu^2(\lambda-6l) \qquad (21)$$

si avrà:

$$y_1 y_2 y_3 = -\tfrac{1}{2}H^3\nu^3(\lambda-6l)\frac{l}{m}$$

la quale moltiplicata per $6m$ ed aggiunta alla superiore dà:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3+6my_1y_2y_3=H^3\nu^3\left(1+8l^3+\frac{l^3}{m^3}\right)$$

ossia:

$$\Phi=y_1^3+y_2^3+y_3^3+6my_1y_2y_3=0$$

determinando m per modo che sia:

$$8l^3m^3+l^3+m^3=0.$$

Le cubiche $F=0$, $\Phi=0$ hanno fra loro la corrispondenza considerata dal sig. Cayley nel suo recente lavoro, cioè ad un dato punto sulla curva $F=0$ corrisponde un punto sulla $\Phi=0$, ma ad un dato punto sopra quest'ultima ne corrispondono tre sulla prima.

Indicando con v un nuovo parametro ed r una indeterminata, si avrà analogamente (13) che i valori:

$$ry_1=mv+1+2m^3+\sqrt{\psi(v)},\quad ry_2=mv+1+2m^3-\sqrt{\psi(v)},\quad ry_3=v-6m^2, \qquad (22)$$

nei quali:

$$\psi(v)=\tfrac{1}{6}(2\tau+3\sigma v-v^3),\quad \sigma=4m(m^3-1),\quad \tau=8m^6+20m^3-1,$$

soddisfano la $\Phi(y_1, y_2, y_3)=0$. La relazione algebrica esistente fra i parametri λ, v trovasi facilmente dalle quattro relazioni che si deducono dalle (22) e dalle (20) (21), ossia:

$$r^2y_1y_2=(mv+1+2m^3)^2-\psi(v),\qquad y_1y_2=-\tfrac{1}{2}H^2\nu^2(\lambda-6l^2)$$

$$r^2y_3^2=(v-6m^2)^2,\qquad y_3^2=\frac{l^2}{m^2}H^2\nu^2$$

per le quali:

$$\lambda=2\frac{l^2}{m^2}\frac{\psi(v)-(mv+1+2m^3)^2+3m^2(v-6m^2)^2}{(v-6m^2)^2} \qquad (23)$$

che differenziata dà:

$$d\lambda = 2\frac{l^2}{m^2}\frac{\psi(v) + 3(mv + 1 + 2m^3)^2}{(v - 6m^2)^3}\,dv. \tag{24}$$

Ora dai valori (22) si deduce che:

$$r^2(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = \psi(v) + 3(mv + 1 + 2m^3)^2$$

e quindi:

$$-r^2(y_1^3 - y_2^3) = [\psi(v) + 3(mv + 1 + 2m^3)^2](y_1 - y_2)$$

relazione la quale rammentando le (19) (22) diventa:

$$r^3 \nu^3 H^3 \sqrt{-3\phi(\lambda)} = 2[\psi(v) + 3(mv + 1 + 2m^3)]\sqrt{\Psi(v)}.$$

Infine essendo:

$$r^3 y_3^3 = (v - 6m^2)^3, \qquad m^3 y_3^3 = l^3 H^3 \nu^3$$

si avrà:

$$-\frac{m}{l}\sqrt{-3\phi(\lambda)} = 2\frac{l^2}{m^2}\frac{\psi(v) + 3(mv + 1 + 2m^3)^2}{(v - 6m^2)^3}\sqrt{\Psi(v)}$$

la quale posta a confronto della (24) dà la equazione differenziale:

$$l\,d\lambda\sqrt{\Psi(v)} + m\,dv \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{\phi(\lambda)} = 0 \tag{25}$$

di cui l'integrale è la (23) corrispondente alla trasformazione del terzo ordine delle funzioni elittiche (*). Analogamente l'integrale della equazione:

$$m\,dv\sqrt{\phi(z)} + l\,dz\sqrt{-3}\sqrt{\Psi(v)} = 0 \tag{26}$$

sarà la:

$$v = 2\frac{m^2}{l^2}\frac{\varphi(z) - (lz + 1 + 2l^3)^2 + 3l^2(z - 6l^2)^2}{(z - 6l^2)^2} \tag{27}$$

e quindi la equazione differenziale della triplicazione delle funzioni elittiche che si ottiene eliminando il rapporto $\frac{dv}{\sqrt{\psi(v)}}$ dalle (25) (26) ha per integrale la (15) la quale pur ottiensi eliminando il parametro v dalle equazioni algebriche (23) (27).

Notisi infine che dalle (18) si deducono le:

$$3x_1^3 = \omega y_1 + \omega^2 y_2 - 2my_3, \quad 3x_2^3 = \omega^2 y_1 + \omega y_2 - 2my_3, \quad 3x_3^3 = y_1 + y_2 - 2my_3$$

(*) Vedi la mia Nota *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. Comptes Rendus,* novembre 1874, gennajo 1875.

nelle quali le y_1, y_2, y_3 sono date dalle (19) (20). Queste equazioni sono pel caso di $F=0$ paragonabili a quelle date da CLEBSCH nella sua Nota « *Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung* » pubblicata nei *Mathematische Annalen* dell'agosto 1869. Ponendo poi nelle medesime i valori (22) si ottengono le:

$$\begin{aligned} 3rx_1^3 &= -[3mv+1-10m^3-\sqrt{-3\psi(v)}] \\ 3rx_2^3 &= -[3mv+1-10m^3+\sqrt{-3\psi(v)}] \end{aligned} \qquad 3rx_3^3 = 2(1+8m^3)$$

le quali corrispondono alle superiori (19) (20).

Febbrajo 1875.

RECHERCHE DES SURFACES

QUE L'ON PEUT REPRÉSENTER SUR UN PLAN.

[*Méthode de Mr.* O. Bonnet *enseignée cette année aux élèves de l'Ecole Polytechnique* (*).]

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface et α, β, celles du point correspondant sur le plan; on doit avoir:

$$dx^2+dy^2+dz^2=d\alpha^2+d\beta^2 \tag{1}$$

et en remplaçant dx par sa valeur $\frac{dx}{d\alpha}d\alpha+\frac{dx}{d\beta}d\beta$, et faisant de même pour dy et dz, l'équation (1) donne:

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2=1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2=1 \tag{3}$$

$$\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}=0. \tag{4}$$

En prenant les dérivées de ces trois équations par rapport à α et à β, on trouve:

$$\frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\alpha^2}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{d^2z}{d\alpha^2}=0 \quad (5) \qquad \frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\alpha\, d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta}=0 \quad (6)$$

$$\frac{dx}{d\beta}\frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta}+\frac{dy}{d\beta}\frac{d^2y}{d\alpha\, d\beta}+\frac{dz}{d\beta}\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta}=0 \quad (7) \qquad \frac{dx}{d\beta}\frac{d^2x}{d\beta^2}+\frac{dy}{d\beta}\frac{d^2y}{d\beta^2}+\frac{dz}{d\beta}\frac{d^2z}{d\beta^2}=0 \quad (8)$$

$$\frac{dx}{d\beta}\frac{d^2x}{d\alpha^2}+\frac{dy}{d\beta}\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{dz}{d\beta}\frac{d^2z}{d\alpha^2}=0 \quad (9) \qquad \frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\beta^2}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\beta^2}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{d^2z}{d\beta^2}=0 \quad (10)$$

en ayant égard, pour les deux dernières, aux équations (6) (7).

(*) Il chiarissimo geometra sig. Bertrand, Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze, avendomi pochi giorni sono comunicato verbalmente la dimostrazione superiore dovuta all'egregio prof. Bonnet, ebbe, dietro mio invito, la cortesia di dare ad essa forma opportuna per la pubblicazione. F. Brioschi.

Or, si l'on compare les systèmes (5) (9) et (6) (7); puis les systèmes (8) (10) et (6) (7) on en conclut:

$$\frac{\frac{d^2x}{d\alpha^2}}{\frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta}} = \frac{\frac{d^2y}{d\alpha^2}}{\frac{d^2y}{d\alpha\, d\beta}} = \frac{\frac{d^2z}{d\alpha^2}}{\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta}} \tag{A}$$

et:

$$\frac{\frac{d^2x}{d\beta^2}}{\frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta}} = \frac{\frac{d^2y}{d\beta^2}}{\frac{d^2y}{d\alpha\, d\beta}} = \frac{\frac{d^2z}{d\beta^2}}{\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta}} \tag{B}$$

et par conséquent en vertu de (A) $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$, $\frac{dz}{d\alpha}$ sont fonctions d'une même variable, et il en est de même, en vertu de (B) de $\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{dy}{d\beta}$, $\frac{dz}{d\beta}$; mais à cause de (4) ces variables dépendent l'une de l'autre et les six dérivées sont fonctions d'une même variable t.

Cela posé étant:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

on a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{d\alpha} &= p\frac{dx}{d\alpha} + q\frac{dy}{d\alpha} \\ \frac{dz}{d\beta} &= p\frac{dx}{d\beta} + q\frac{dy}{d\beta} \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

et ces équations donnent p et q en fonction de t; donc p est fonction de q, et la surface est, comme l'on sait, l'enveloppe d'un plan mobile.

Les systèmes (5) (9), (8) (10), (C) dont nous avons fait usage ne peuvent être identiques, car il faudrait que les dérivées $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$, $\frac{dz}{d\alpha}$ fussent proportionnelles à $\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{dy}{d\beta}$, $\frac{dz}{d\beta}$; et par conséquent que x fut une fonction de y; ce qui est impossible.

Vous pouvez, cher monsieur Brioschi, faire tel usage qu'il vous plaira de cette élégante démonstration qui est inédite. Elle a reçu dejà une publicité assez grande par l'einsegnement de l'Ecole Polytechnique pour qu'il n'y ait aucune raison à hesiter pour la publier.

Milan, avril 1875.

BARNABA TORTOLINI.

A nessuno più che ai Direttori degli *Annali di Matematica* incombe l'obbligo di onorare la memoria dell'illustre matematico, il cui nome è scritto in cima a quest'articolo. Barnaba Tortolini nacque in Roma nel giorno 19 novembre 1808; studiò lettere e filosofia nel Collegio Romano, dov'ebbe a maestro, fra gli altri, il gesuita A. Caraffa, autore di alcune opere matematiche; e continuò gli studî matematici e filosofici nell'Università della Sapienza, conseguendovi nel 1829 la laurea privilegiata, detta *ad honorem.* Presso la stessa Università compiè il corso tecnico degli ingegneri; indi, studiata teologia, fu ordinato prete nel 1832.

Ebbe nel febbrajo 1835 la nomina a professore di fisica matematica nel Collegio di *Propaganda fide;* nel 1836 fu assunto a supplente al prof. G. Oddi nella cattedra di meccanica e idraulica nell'Università; e nel 1837 vinse per concorso la cattedra d'introduzione al calcolo sublime. Nel medesimo anno fu nominato professore di calcolo differenziale e integrale presso la medesima Università; nel 1845 professore di fisica matematica nel Seminario romano; e nel 1856 direttore della tipografia di *Propaganda fide.* Colpito da paralisi nel 1869 dovette lasciare ogni occupazione. Ritiratosi in Ariccia per assaggiare aria più salubre, vi morì il 24 agosto 1874 (*).

A porgere un'imagine adequata dell'attività scientifica del Tortolini, può utilmente servire il catalogo che delle opere di lui compilò colla sua solita diligenza il sig. principe Boncompagni, catalogo che fu pubblicato negli *Atti dell'Accademia pontificia.* Sono oltre cento Memorie inserite per la maggior parte nel *Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti,* negli *Atti dell'Ac-*

(*) La sostanza di queste notizie è presa da un articolo del prof. Dorio inserito negli *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (sessione 20 dicembre 1874).

cademia pontificia dei Nuovi Lincei, e negli *Annali di Matematica,* relative specialmente alla *Teoria degli integrali definiti,* ed alla *Rappresentazione di aree e di volumi per mezzo di integrali di questa specie;* alla *Teoria degli integrali elittici ed alle loro applicazioni, sia alla divisione degli archi di curve piane, sia ad altre quistioni geometriche;* al *Calcolo dei Residui ed all'uso del medesimo nella integrazione delle equazioni differenziali lineari, di quelle a differenze finite e delle equazioni a derivate parziali;* infine varie Memorie intorno a questioni d'analisi applicata alla geometria.

Ma l'Italia dev'essere grata al Tortolini specialmente per aver egli fondato e pubblicato gli *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Roma, 1850-1857), e poi, insieme coi professori Betti, Brioschi e Genocchi, la prima serie degli *Annali di matematica pura ed applicata* (Roma, 1858-1865). Questi periodici, raccogliendo e diffondendo i lavori de' più operosi e distinti cultori delle scienze esatte, servirono a due nobilissimi fini: l'uno di ravvivare e fecondare l'amore per gli alti studî; l'altro di rappresentare decorosamente, in faccia alle altre nazioni, l'attività scientifica della nostra penisola, anche quando questa era molto lontana dall'aver raggiunto l'unità politica. Per questo titolo il nome del Tortolini sarà onorato finchè duri fra noi il culto della scienza.

Il Tortolini fu uno dei XL della Società Italiana delle scienze (fondata dal Lorgna); era inoltre stato ascritto alle Accademie di Bologna, de' Nuovi Lincei in Roma, di Napoli, di Torino, di Upsal, ecc.

IN MEMORIA DI JACOPO STEINER.

Lettura fatta davanti alla Sezione matematica
della Società svizzera di scienze naturali,
nell' adunanza annuale ch' ebbe luogo in Sciaffusa il 22 agosto 1873,
dal dott. C. F. Geiser, *professore nel Politecnico svizzero* (*).

Chi abbia avuto il piacere, la gioja, l'onore — come devo esprimermi? — di assistere alla seduta pubblica di un' Accademia di scienze, conserverà lungamente la impressione ricevuta da un corpo sì rispettabile. Intorno al gran tavolo verde siedono in tranquillo contegno i personaggi, per massima parte attempati ed incanutiti, che si sogliono riguardare come i più eminenti tra i dotti del loro paese; e la gradazione dei cui meriti vedesi molto acconciamente espressa nella relativa ricchezza delle stelle degli ordini cavallereschi; in quella stessa guisa che l' età degli alberi di una foresta può dirsi scritta nel numero degli anelli annuali.

La mestizia avvolge l' adunanza, quando l'Accademia ricorda i proprii estinti, e specialmente se con particolareggiata commemorazione vien posto un segno di affettuoso ricordo ad un luminare della scienza. E veramente nessun luogo sarebbe più adatto a siffatte solennità, del circolo in cui l' estinto ha passato i suoi ultimi anni, e da cui uscirono i suoi lavori. Non soltanto l' attività sua come dotto, ma tutta quanta la persona continua quivi ad esercitare azione viva; e tante cose a lui attinenti, che altramente sarebbero rimaste ignote, possono in tal luogo venir rintracciate.

Ma sventuratamente le commemorazioni accademiche hanno pure il loro calcagno d' Achille; non senza motivo in Francia si chiamano *éloges*. Il tuono piuttosto freddo e maestoso impone riserbo su tutti i punti dubbiosi; e le contraddizioni, che non si possono lasciare in disparte, vi appajono nella stessa

---

(*) Fu leggermente modificato qualche passo per facoltà gentilmente concessa dal chiarissimo Autore. (T.)

fina maniera che il sorriso del signor di Münchhausen nel romanzo di Immermann, il quale, come si sa, finiva per sorridere tanto finamente, che più nessuno da ultimo poteva accorgersene. Perciò avviene che così fatti elogi spesso ricordino le moderne imagini dei santi, nelle quali si ricorre ai più splendidi colori di anilina per far meglio figurare l'abbigliamento pittoresco col rosso purpureo e coll'azzurro del cielo, e ben si sa che non vi devono mancare le lunghe e bionde anella di capelli elegantemente disposte.

Ma non tutte le teste possono fare da modello ad una siffatta imagine; — e dove troverebbesi, per esempio, il pettine per arricciare in forme accademiche la selvaggia capigliatura di Jacopo Steiner? Questo può ben essere il motivo per cui finora è mancata una commemorazione al nostro grande compatriota, che per quasi trent'anni fu uno dei più splendidi ornamenti dell'Accademia di Berlino. Ormai da più di dieci anni giace egli sepolto nella patria terra; la sua originale personalità comincia a poco a poco a dileguarsi dalla memoria de' suoi contemporanei; eppure non si è per anco trovata una mano amica, che ne descriva la vita e le opere. Sarò io biasimato, se, appoggiandomi alle relazioni di parentela, di persona e di scienza, e alle rimembranze tutte che vi sono connesse, mi accingo ora a tracciare un leggero abbozzo della sua figura? In questa nostra Società non si è tenuti ai riguardi testè accennati; si può dispensare a talento luce ed ombra, e non si vien meno alla vera pietà verso l'estinto, esponendone insieme e pregi e difetti. Del resto, chi non approvasse il carattere della mia esposizione, ed anzi pensasse che allo Zöllner (*), il quale metteva non ha guari a rumore il mondo scientifico, siasi ora accoppiato anche il peccatore, quegli potrà consolarsi nel pensiero, che questo effimero foglio sarà da gran tempo scomparso col vento, quando ancora le opere magistrali di Steiner in crescente splendore seguiteranno ad eccitare l'ammirazione delle generazioni future.

Jacopo Steiner nacque il 18 marzo 1796. Di tal giorno egli più tardi, quando l'iracondia si impadroniva del suo animo, lagnavasi col destino, che per tal modo non gli permettesse di festeggiare in Berlino il proprio natalizio, se non a costo di parere un democratico pericoloso al governo costituitosi dopo il marzo. In Utzenstorf, suo luogo nativo posto circa a mezza via

(*) In ital. *pubblicano.* Il lettore si ricorderà della curiosa opera: *Ueber die Natur der Cometen* pubblicata in Lipsia nel 1872 dal prof. G. F. C. Zöllner. (T.)

tra Burgdorf e Soletta, egli passò la maggior parte della giovinezza, non già come pastorello da idillio di Gessner, ma non appena il potè, come lavoratore agile e diligente nel piccolo podere de' genitori, in compagnia del fratello e delle sorelle. In questo villaggio agricolo non ebbe altro eccitamento intellettuale, fuorchè quello dei più elementari ammaestramenti della scuola, i quali consistevano principalmente nel mandare a memoria il catechismo di Heidelberg e il Libro dei cantici. Neppure ne ebbe dalla famiglia, essendo egli « il primo nella nostra casa » che si elevasse al disopra dell'istruzione elementare, comune nel villaggio. Egli si lagnava ancora nella vecchiaja di non aver imparato a scrivere che a quattordici anni, imperocchè il Pontefice del villaggio non concedeva altra istruzione, finchè gli scolari non sapessero recitare a memoria il catechismo, dal principio alla fine e viceversa. Questo è il motivo per cui Steiner ebbe sempre la mano difficile, e s'acconciava assai di mal animo al lavoro meccanico dello scrivere.

Per ben concepire il suo modo di vivere fino al diciassettesimo anno, dobbiamo far capo agli scritti del suo amico di gioventù Bitzius, il quale, sotto il nome di Geremia Gotthelf, descrive con inarrivabile maestria i costumi e le condizioni del paese di Berna, quali durarono così lungo tempo pressochè invariati. La continua dimora nella libera aria dei campi e dei boschi rinforzò il suo corpo ed aguzzò i suoi sensi. Egli ricordava spesso con orgoglio d'aver visto pascolare le bestie bovine sul lontano Jura circonfuso di splendore azzurrino; e non senza ironica compiacenza, soggiungeva d'aver saputo anche in più tarda età discernere consimili bestie a distanze persino maggiori.

Naturalmente Steiner non fu mai ciò che si direbbe un fanciullo miracoloso, cioè un ragazzo che pàrli correntemente il latino a quattro anni, e che, dopo aver recitato in una società i proprii discorsini, non tenda mai le mani senza invito sul pezzo di torta che gli è destinato. Tuttavia da un certo momento in poi dev' essergli invalso il pensiero, còlto bramosamente e promosso da alcuni tra' suoi amici, che la sua vocazione fosse ben'altra che quella di coltivare i campi del padre e di procacciare, colle cure di un piccolo commercio di pecore, il materiale per le calze della famiglia. Quante volte, standosene dinanzi a libri a stento compresi invece di andare al campo col cavallo e col carro per trasportare il fieno a casa, avrà egli pesato in mente sua i mezzi di dare sfogo all'interno impulso! Le circostanze favorirono ottimamente i suoi ardenti desiderii, aprendogli una via che non poteva essere più propizia allo sviluppo della sua natura originale, e che qui tenterò di descrivere brevemente.

Le conseguenze dolorose della rivoluzione francese, nel massimo infuriar della quale Steiner vedeva la luce, avevano già abbastanza cessato di farsi sentire, quando egli entrava nell'adolescenza, perchè i reggitori della nostra patria potessero pensare ad una ricostruzione di ciò ch'era stato distrutto; ma d'altra parte ne rumoreggiava ancora il tuono sul continente a tal segno che, fin nel tranquillo Utzenstorf, si seguivano con viva attenzione tutti i passi delle patrie autorità. Così avvenne che si parlasse con calore nel solitario villaggio delle aspirazioni attuate in Yverdon, coll'ajuto di governi svizzeri, dal Pestalozzi, il grande educatore del popolo, che aveva già lavorato al principio del secolo nel vicino Burgdorf, colla protezione morale delle autorità francesi. La parte più vecchia della popolazione era avversa a tutto quanto poteva ricordare la rivoluzione e l'Elvetica; parecchi degli uomini pratici e benestanti, i quali manifestavano tale sentimento, erano forse stati presenti nel 1797, allorchè il generale Buonaparte, viaggiando per la Svizzera, fu fermato da paesani bernesi col grido: « maledetto briccone, i bricconi devono stare a casa loro. » Ma la generazione più giovane era già, per vaghezza d'opposizione, di altro avviso, senza contare che la simpatica e nel tempo stesso gagliarda figura del riformatore dell'arte educativa esercitava un'attrattiva irresistibile sopra tutti gli spiriti ardenti.

Il giovane Steiner, più che per chiara riflessione, era forse solo per confuso istinto venuto nella idea che nell'Istituto d'educazione di Yverdon egli potesse progredire nello studio; ma, di ciò convinto una volta, adoprò all'esecuzione del suo pensiero tutta l'ostinata tenacità di un buon bernese. Io devo alla di lui stessa descrizione la notizia delle scene violente che precedettero la decisione della famiglia su questo importante affare. Un senso d'esagerata parsimonia passato anche nel figlio, indusse il padre a negargli i mezzi per l'educazione, tanto più che egli si privava a malincuore d'un collaboratore in sommo grado diligente ed economico, mentre l'altro figlio più giovane non dava di sè le stesse speranze. Fortunatamente Steiner, col suo piccolo commercio, s'era risparmiato un tenue peculio; così che, avendogli poi finalmente il padre, con una meschina aggiunta, dato il permesso di partire, egli, padrone ormai del proprio destino, non senza il sacrificio di cari interessi, si avviò contento al Pestalozzi.

All'arrivo di Steiner il rinomato Istituto era già in decadenza, e fra le strombazzate colle quali i collaboratori di Pestalozzi intrattenevano il mondo sui loro risultati, udivasi assai spesso un doloroso accento che faceva intendere come il grande amico degli uomini vedesse i proprii ideali svanire a poco a poco e sentisse strapparsi con essi il cuore a brano a brano.

È difficile a dirsi che cosa di positivo abbia ricavato Steiner dallo studio in Yverdon, poichè un'istruzione veramente fondata e scientifica non vi si dava; per quel ch'io sappia, Steiner fu il solo scolaro dell'Istituto, a fianco del geografo Carlo Ritter, che siasi guadagnato posto eminente nella repubblica letteraria. Ma altrettanto maggiore ne fu il vantaggio indiretto. Pestalozzi teneva molto a far principiare l'istruzione col tradurre in numeri i concepimenti geometrici, e fu così per la prima volta eccitata la fantasia creatrice dello scolaro vago di sapere. Il quale s'accorse prestamente di essere assai superiore ai proprii insegnanti, ed applicò con successo ai loro assistenti il principio fondamentale del maestro, di eccitare gli scolari ad una loro propria operosità, obbligando quelli a studiare per poter capire ciò che egli novizio vedeva nella propria mente. Fin d'allora si elevava sempre a punti di vista generali, come ne fe' prova la sua prima scoperta geometrica, la quale, per quanto possa parere insignificante e piccola, merita qui un cenno. Il suo maestro gli aveva detto che con tre piani si forma un triedro; al che Steiner, i cui abiti sentivano tuttora della stalla paterna, subito oppose: anzi se ne formano otto.

Il modo, col quale apprese gli elementi della scienza, esercitò un'azione decisiva su tutta quanta la posteriore sua attività. Egli apprezzava anche il successo più modesto, ogni qualvolta fosse risultato da forza propria, da propria meditazione; mentre diffidava e faceva poco conto di cognizioni, anche molto estese, quando non fossero state rielaborate internamente e riprodotte in modo originale. Lo stesso istituto in Yverdon non bastava alla di lui tendenza di elaborare da sè stesso tutto lo scibile. Una volta si lagnò, che, mentre prima d'entrarvi, era capace di disegnare abbastanza bene, istruito che fu nel disegno, non avrebbe più potuto riprodurre sulla carta, distintamente come prima, la chiesa del patrio villaggio.

Steiner deve pure a Pestalozzi una qualità che più tardi diede una particolare attrattiva alle sue lezioni universitarie, cioè il metodo didattico di Socrate, per cui ogni momento si viene a riconoscere fin dove arrivi l'intendimento dello scolaro. Non bastando i limitati mezzi dell'allievo al totale pagamento delle tasse scolastiche, dovette impegnarsi, compìto il corso, nell'ufficio di maestro assistente. Il grande pedagogista sentiva di trovarsi dinanzi ad un ingegno ricco di avvenire, ed ajutava, ogni volta che il potesse, il novello docente; così che questi conservò di lui memoria fedele, professandogli illimitato rispetto ed alta stima, anche quando il destino si scatenò contro il nobile uomo, rendendolo ludibrio della moltitudine. Con quell'acutezza con la quale aveva saputo predire la prossima rovina dello stabilimento in Yverdon, Steiner non perdette mai la fede che l'astro di Pestalozzi avrebbe brillato nuovamente di splendida luce.

Steiner aveva lasciato la casa paterna fra lampi e tempeste per obbedire ad un più nobile impulso, col farsi scolaro di un uomo eminente ed avvezzo ad invigorire altrui, senza per anco sapere qual dovesse essere lo scopo della propria vita, forse dominato soltanto dal pensiero di diventare maestro. Ma ora che alla casa, per lui divenuta seconda patria, sovrastava, per effetto di maggiore tempesta, la rovina, egli abbandonava quest'uomo, collo scopo ben prefissato di dedicare la propria vita alla matematica e sopratutto alla geometria. Per continuare gli studii si diresse ad Heidelberg, senza dubbio colla prospettiva di dovervisi mantenere col ricavo di lezioni private. E per verità, nei tre anni di sua dimora [1818-1821], vi trovò sufficiente sostentamento; ma, è debito di riconoscenza l'avvertire, che parecchi fra i più ricchi compatriotti e condiscepoli suoi giovaronsi del suo insegnamento soltanto per spianare e facilitare la via all'amico volonteroso e più vecchio di loro. Il quale anche nelle ore più tristi della tarda età ripensava con gioja ed amore a questo tempo ed a questi compagni, tra i quali mi limito a nominare il nostro Casimiro Pfyffer e il signor Naef consigliere della Confederazione.

Non è necessario che descriva la meschinità dell'insegnamento che si dava allora in Heidelberg, essendo abbastanza noto qual fosse lo stato della matematica presso quasi tutte le scuole superiori tedesche di quel tempo; mentre in solitaria e suprema grandezza Gauss, sovrastando a tutti i contemporanei, formava la fama e l'orgoglio dell'università di Gottinga. Steiner si guastò presto col suo principale docente, il professore Schweins, dando più tardi, con ischerzo per verità non del tutto ingiusto, alla geometria insegnatagli nella università il nome di questo docente. Più stimolanti erano per lui gli studii privati, fatti con scarsezza di sussidii letterarii, ma con altrettanta intensità di forze intellettuali. Indubbiamente egli pose già in Heidelberg le pietre fondamentali delle sue prime memorie.

Allorchè, compiuti gli studii accademici, accettò un posto di insegnante in un istituto d'educazione privato in Berlino, presentiva forse il novello matematico che sarebbe rimasto in questa città più di quarant'anni, cioè dire, con brevi interruzioni, l'intera sua vita? Probabilmente no; giacchè in principio le cose non andarono secondo desiderava; abbandonò il posto e lavorò qualche tempo come insegnante privato; ed un tentativo di collocarsi durevolmente nel ginnasio Federico Werder, dove allora era stato nominato Dove, non gli riuscì, perchè la rigidezza dello Svizzero non poteva combinarsi cogli elementi tedeschi del settentrione e specialmente di Berlino, ai quali non era ancora assuefatto. Egli pensava già di partirsene; ma frattanto la fama sua, quale distinto insegnante privato, era andata sempre crescendo; ond'è che nel momento decisivo una buona stella lo condusse nella casa di GUGLIELMO di HUMBOLDT, quale istitutore del di lui primogenito. Fu qui che per una felice catena di circostanze STEINER si rivelò in tutto il suo valore, e potè saldamente mettere piede in una vera carriera scientifica.

Quando, dopo l'infelice campagna del 1806, i Prussiani cominciarono a raccogliere le loro forze, essi non erano nella fortunata posizione di un odierno partito in Francia, a cui la Madre di Dio in apparizioni miracolose promette gratuitamente uno splendido avvenire. Lo stato protestante aveva compreso che i mezzi principali per riacquistare la perduta potenza erano quelli di estendere a tutti l'obbligo del servizio militare e di promuovere l'istruzione popolare; ed appunto dietro impulso di HUMBOLDT una schiera di giovani maestri prussiani erasi recata a spese dello Stato a prendere personalmente cognizione della scuola di PESTALOZZI, dandone poi alle competenti autorità una relazione entusiastica. Ciò porse buona occasione a conversazione animata fra il ministro d'allora e il giovine insegnante, il quale, con propria sorpresa, nell'esame dell' allievo aveva dato di sè prova assai favorevole. STEINER si vide d'un subito tirato nel circolo dei personaggi ragguardevoli che frequentavano quella casa rinomata, e i suoi rapporti divennero ben presto aggradevoli, cortesi e cordiali, in quanto che HUMBOLDT era stato qualche tempo in Berna come inviato prussiano, e parlava volontieri delle condizioni della Svizzera, per le quali aveva conservato vivo interesse. E quando poi in una riunione più grande, a cui il privato docente bernese era stato invitato, la moglie di Sua Eccellenza gli porse una tazza di caffè colle parole: « Herr STEINER, weit er öppe-n-e chli Nidle zum Gaffeh? (*) » la di lui venerazione per la eccelsa coppia non ebbe più limiti.

L'Eccellenza medesima però si diede cura che non avesse più a mancare la panna nel caffè al nostro compaesano, il quale ormai era riconosciuto generalmente come insegnante distinto e matematico di molte speranze. Gli si trovò, sebbene non così presto come egli desiderava, un posto nella *Gewerbeschule,* dove ebbe occasione di lavare la macchia del mal riuscito tentativo nel ginnasio WERDER. Ma ciò che ancor più valse si fu, che, alle sue aspirazioni

(*) Parole del dialetto bernese, che significano: « Signor STEINER, volete forse un po' di panna nel caffè? » (T.)

si era ormai rivolto un occhio benevolo, il cui sguardo avrebbe seguìto con attenzione un così ardente ingegno, ed avrebbe sempre curato che non gli mancasse nè la protezione necessaria, nè l'eccitamento. Ho io bisogno di aggiungere che parlo di ALESSANDRO di HUMBOLDT, a cui la scienza tedesca deve moltissimo, anche per riguardo a DIRICHLET e JACOBI? Sino alla morte, il gran dotto enciclopedico restò fedele protettore di STEINER; ed ancora in una delle ultime lettere al matematico diceva in termini commoventi, essergli ricordanza mesta e cara ad un tempo, di aver visto il più giovane collega dell'Accademia per la prima volta in casa del fratello da lungo tempo perduto.

Però non soltanto protettori, ma anche emuli ed amici eranvi in questo tempo pieno di operosità e di speranze. Tra i medesimi prese una posizione intermedia il consigliere superiore ADAMO LODOVICO CRELLE, il quale, ad onta della cèra di protettore, che sapeva vestire di un fino ed elevato sorriso, aveva per il rozzo Svizzero un rispetto diabolico. Ma l'amicizia più cordiale fu quella che il legò ad ABEL, un po' più giovane di lui e che attendeva al proprio perfezionamento in Berlino. STEINER raccontava molto umoristicamente il loro primo incontro presso CRELLE, e come ciascun di loro anche di poi compassionasse ancora segretamente l'altro per la scarsezza delle doti sociali. Fidente nelle forze produttive dei due giovani matematici, il consigliere superiore fondò il giornale, che divenne poi celebre; e spesso lo si incontrava a passeggio coi suoi protetti; laonde i famigliari, con grande amarezza di STEINER, che in tale scherzo certamente ci perdeva, esclamavano: « Ecco Adamo coi figli Caino ed Abele. »

Quasi contemporaneamente sorsero i più intimi rapporti con JACOBI, la cui straordinaria potenza si era fatta conoscere ben tosto, e che recava essenziale vantaggio a STEINER, più maturo, ma più esitante e di coltura meno completa. L'effetto più rilevante di questo avvicinamento va naturalmente veduto nella eccitazione scientifica che muoveva da JACOBI; per la quale, ad ogni convegno degli amici, aprivasi una miniera di nuova e feconda attività mentale. Però anche dopo la traslocazione a Königsberg, il nascente astro matematico non cessò di influire vivamente in pro dell'amico. Dopo la comparsa della *Systematische Entwickelung,* in riconoscimento de' suoi meriti scientifici, gli procacciò il diploma di dottore onorario dell'università di Königsberg; e si deve pure agli sforzi riuniti di JACOBI e di HUMBOLDT l'essere stata fondata per STEINER, nel 1834, una cattedra straordinaria all'università di Berlino; mentre la r. Accademia prussiana delle scienze eleggevalo a socio.

È tempo di dire una parola anche dei lavori di STEINER; e non si troverà biasimevole, che insieme coi risultamenti pubblicati fino all'anno testè nominato, si prenda tosto in considerazione l'intero campo delle sue scoperte. Con ciò diventa possibile di far astrazione dall'ordine cronologico e di trattare insieme le questioni tra loro connesse. Il problema di descrivere un'operosità scientifica di molto momento resta pur sempre abbastanza difficile, poichè quelli che conoscono gli scritti in discorso sanno già stimarne il valore, mentre ad altri deve riuscire senza pregio ogni spiegazione su argomenti a loro estranei. Vogliano specialmente i pratici della materia perdonare la incertezza dei giudizii e delle dilucidazioni. Se un uomo, che tiene un posto distinto anche in mezzo ai primi matematici di tutti i tempi, espresse con squisita modestia la difficoltà di descrivere le opere di un emulo che gli era vicino, si capirà facilmente come uno spigolatore del vasto campo coltivato da STEINER non possa tentare se non con mano timida di tracciare un quadro della ricca messe da lui raccolta.

I primi lavori di STEINER, comparsi in parte negli Annali di GERGONNE, in parte nei primi tomi del Giornale di CRELLE, non rivelano per anco il genio innovatore, ma annunziano già il maestro, pel molteplice modo di riguardare date figure semplici. Alcune delle memorie, in ispecie le ricche *Geometrische Betrachtungen,* nel primo tomo del Giornale di CRELLE, costituiscono una trattazione esemplare delle proprietà dei circoli e delle sfere, alla quale il secondo capitolo del breve e ingegnoso scritto più tardi comparso: *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises,* può in certo qual modo servire da introduzione. Che in virtù della sua forza indagatrice penetrasse più addentro di altri competitori, lo dimostrano e il tentamento di parecchi problemi nuovi, e la soluzione, pubblicata senza dimostrazione, del problema di MALFATTI da lui generalizzato. Lavori di data più recente, condotti per la strada da lui battuta, hanno dato, in confronto delle meschine piccolezze di altri matematici, una splendida giustificazione di STEINER.

Convenevole apprezzamento incontrò la sua memoria: *Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren,* avendo però egli stesso più tardi confessato, che ai suoi tempi si era annessa alla geometria sulla sfera un'importanza esagerata. E qui possiamo anche ricordare la dimostrazione del teorema cardinale d'EULERO sui poliedri; la quale, benchè non si fondi esclusivamente sugli elementi dati della figura, ricorrendo alla misura degli angoli, pure va distinta siccome semplice e facile ad intuirsi.

In seguito a questi lavori vengono altri, contenenti già gran copia di risultati sopra luoghi geometrici, che conducono a coniche e superficie di secondo grado; e fra essi emerge quello comparso nel tomo 19 degli Annali di GERGONNE: *Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques.* Queste ricerche vennero da lui più tardi, in quanto alla sostanza loro, raccolte e fatte argomento di lezioni universitarie, più volte ripetute, sotto il titolo modesto di *Populäer Kegelschnitte.* La maggiore loro attrattiva sta in ciò, che, dalla soluzione di un problema affatto elementare di massimo e minimo, si deducono quasi colla facilità d'un giuochetto i più bei teoremi relativi alle coniche, e specialmente ai loro fuochi. STEINER parlava con grande soddisfazione di questo metodo di pervenire ad estesi risultamenti colle considerazioni più semplici. « Se mi si mette davanti un piatto di ciliege, diceva una volta, io prendo dapprima pensatamente le meno appariscenti e con interno compiacimento vado gustando le più belle alla fine. » Un'altra volta, ai suoi scolari, che avrebbero voluto aprire a vapore le noci geometriche ch'egli loro proponeva, disse: « Se non diventerete innocenti come fanciulli, non entrerete nel regno dei cieli. » Singolarmente bello era il modo con cui metteva in relazione l'iperbola equilatera col triangolo inscritto e la parabola col circoscritto, e ne deduceva i teoremi che vi si connettono « insistendo sempre sullo stesso punto e girando puramente sul tallone. »

In questo indirizzo non poteva mai contentarsi; le note sulle coniche popolari vennero d'anno in anno rivedute ed aumentate; singole parti ne furono anche pubblicate, come, per esempio, le memorie: *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe,* etc. (CRELLE, t. 37) e *Ueber eine neue Erzeugungsart der Kegelschnitte* (t. 45), nelle quali segnatamente è anche svolta la idea di surrogare ai fuochi circoli toccanti la conica due volte. Vi appartengono anche le *Aufgaben und Lehrsätze,* messe fuori in diversi tempi, e tra cui meritano particolar menzione quelle del t. 55; come pure le postume *Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze* (t. 66). Lo studio di queste pubblicazioni si può raccomandare specialmente ai giovani, che per la prima volta bramano distendere le ali e mirano a scopi belli ma non troppo elevati.

Innanzi di provarmi a dire del carattere dell'opera più vasta di STEINER: la *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* [1822], ricorderò brevemente gli sforzi de' suoi predecessori, ripetendo fatti storici noti e sovente enunciati. Per opera di EULERO, LAGRANGE e LAPLACE, la superiorità del metodo analitico e di calcolo, in confronto del sintetico ed intuitivo, sembrava, come GAUSS dice molto nettamente in varii luoghi, talmente stabilita, che per la maggior parte del secolo decimottavo la geometria stette quasi silenziosa.

A questo punto compare Monge, che apre, colla *Géométrie descriptive* e le *Applications de l'Analyse à la Géométrie,* una via nuova, aggiungendo alla scienza in varie direzioni nuovi risultati e creando metodi nuovi. La geometria descrittiva, che rimarrà per sempre legata al nome di Monge, fa nuovamente riconoscere la intuizione come fondamento di ogni scienza dello spazio; mostra come le più semplici regole di costruzione possano condurre ad una lunga serie di verità geometriche, e colle svariatissime applicazioni pratiche di cui è suscettibile risveglia in larghissima sfera l'interesse per la nuova disciplina. Nè meno vivamente influiscono le *Applications*, mostrando che analisi e sintesi non devono atteggiarsi a potenze nemiche l'una contro l'altra, ma bensì collegarsi a penetrare quei profondi misteri della matematica, al cui scoprimento disunite non potrebbero mai pervenire. Quand'anche il libro lasci qualche cosa a desiderare rispetto all'ordinamento della materia, e i metodi di dimostrazione non siano sempre soddisfacenti, pure terrà un durevole posto nella storia della matematica, come felice connubio di acume analitico con spirito geometrico d'invenzione.

Allorchè la via fu aperta, gli scolari continuarono l'opera del maestro, e fra essi con prevalente successo Dupin e Brianchon, Gergonne e Bobillier. Un po' più tardi, ma con splendore straordinario, sorse Poncelet, che, prigioniero di guerra sul Volga, senza verun esterno sussidio, compiva la preparazione di un libro, il quale doveva assicurargli il primo posto fra i geometri francesi del suo tempo.

Nella grand'opera *Traité des propriétés projectives des figures,* che il prigioniero di Saratow diede al pubblico nel 1822, fu per la prima volta fatto un tentativo felice di riassumere in pochi teoremi e principii fondamentali il portentoso numero di proposizioni, che nel corso dei secoli si erano conseguite per le figure rettilinee, il circolo e le coniche. Ed infatti è noto qual folla di risultati potè offrire questo libro, riunendo i metodi scaturiti dalla *Géométrie descriptive* di Monge per mezzo della intuizione, e dalla *Géométrie de position* di Carnot per mezzo del calcolo.

Tre grandi principii geometrici, dei quali fin'allora non si era fatto uso che in casi isolati, vengono per la prima volta in tutta la loro importanza riconosciuti ed esposti da Poncelet, e con ciò segnatamente alcuni germi posti da Monge e Brianchon diventano strumenti fondamentali della geometria. Poncelet si occupa anzitutto di quelle proprietà delle figure piane che restano invariate in una projezione centrale, e col loro mezzo trasporta immediatamente le più essenziali proprietà del circolo alle coniche. Dippoi, basandosi sulla teoria dei poli e delle polari rispetto ad una conica, mostra che ad ogni proposizione projettiva della geometria piana si può farne corrispondere un' altra, scambiando punti con rette, punti in una retta con rette passanti per un punto, ecc. Inoltre si vale continuamente dell'osservazione, che, in tutto il campo da lui considerato, la sussistenza di una proposizione geometrica non dipende menomamente dall' essere reali piuttosto che imaginarie le figure ausiliarie assunte per dimostrarla. Tra i molti risultati nuovi del libro ricorderò in particolare le proposizioni sui poligoni, simultaneamente inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra, a motivo del legame molteplicemente considerato che esse hanno con regioni della matematica apparentemente affatto diverse. Da ultimo vuolsi citare anche il *Supplément,* che contiene il tentativo del passaggio dal piano allo spazio, e che segnatamente per la prima volta fa vedere, che in un fascio di superficie di secondo grado si contengono quattro coni, i cui vertici sono in intimo rapporto colle proprietà armoniche delle superficie considerate.

Poncelet non potè troppo gioire della sua ingegnosa produzione, poichè, non appena comparsa, ne sorse una polemica disgustosa, la quale fu senza dubbio il principale motivo per cui il grande geometra si volse alla matematica applicata ed alla meccanica pratica, ove parimente doveva cogliere allori imperituri. Ripensando oggi a quei giorni di viva discussione, si riconoscerà facilmente, che l'irritazione, manifestata da Poncelet in un secondo volume del *Traité des propriétés projectives* [1866], risale alla campagna non sempre lealmente condotta, in cui Gergonne cercava di soppiantare la teoria delle polari reciproche col proprio principio di dualità, certamente più comprensivo ma non perfettamente stabilito; e Cauchy, con innegabile malevolenza, scandalizzandosi della mancanza di rigore nelle dimostrazioni, assaliva il principio di continuità.

È vero che sulla sterminata onda delle quistioni sollevate, Möbius tracciava ben tosto, nella classica opera *Der barycentrische Calcul* [1827], i tranquilli giri del suo pensiero, che all'occhio esperto dovevano annunziare un acuto maestro della geometria. Ma il concettoso lavoro giacque quasi negletto accanto alla strada maestra delle idee volgari, finchè Steiner col libro, del quale dobbiamo parlare, comparendo sul campo, decise la sorte della battaglia, ed aperse alla scienza, nel pienissimo senso della parola, nuove vie, ch'essa finora non ha per anco terminato di misurare.

Se vogliamo riconoscere tutta l'importanza del nuovo fondamento della geometria creato da Steiner, dobbiamo ricordarci come fosse già stata ampiamente apprezzata per opera di Möbius la proprietà projettiva del doppio rapporto dei segmenti formati da quattro punti in una retta, e da quattro raggi uscenti da un punto; rapporto, che, dai tempi di Pappo sino al *Mémoire sur les lignes de second ordre* di Brianchon ed ai lavori di Poncelet, tornava sempre a rappresentare una parte nei lavori geometrici. Appoggiandosi sulle ricerche del calcolo baricentrico, sgraziatamente però senza conservare il conseguente riguardo dei segni de' segmenti e degli angoli, coordinando projettivamente nei loro elementi in numero semplicemente infinito la punteggiata e il fascio di raggi, Steiner riesce a definire perfettamente ed esporre tutte le più essenziali proprietà delle forme veramente fondamentali, colle quali si possono generare le coniche. Se si considera altresì che il passaggio allo spazio, cioè l'uso del cono retto, non costituisce un anello necessario della teoria, si riconoscerà facilmente il grande progresso fatto in confronto di Poncelet.

Questo progresso invero non apparve in piena luce che nel secondo volume delle lezioni pubblicate [1867] dopo la morte di Steiner; ma le dichiarazioni in data 24 maggio 1836, che sono stampate nella prefazione del medesimo, prese insieme con varii cenni della *Systematische Entwickelung* (fra gli altri a pag. 167), mostrano quanto presto egli avesse già compiuto nei suoi tratti essenziali l'edificio. Anzitutto compare nelle considerazioni senza velo il principio di dualità; la conica vien generata projettivamente, senza abbandonare il piano; i pochi elementi impiegati rivelano non solo la vera natura della involuzione, ma conducono eziandio in modo semplicissimo alla teoria dei poli e delle polari. Finalmente diviene superfluo il principio di continuità, che in Poncelet così spesso intenebra la vera intuizione geometrica, e per es. scinde già il teorema di Pascal in due casi, che in fondo non sono punto diversi.

Non meno che per le coniche, le forme fondamentali di un numero semplicemente infinito di elementi sono importanti nella teoria delle superficie rigate di secondo grado, sulle quali Steiner diede una serie di sviluppi fondamentali. Le medesime inoltre gli servirono a dimostrare un gran numero di proposizioni e porismi, concernenti i poligoni, i moltilateri, i poliedri, nel piano e nello spazio, ed a ricondurre linearmente le necessarie costruzioni alla sua famosa determinazione degli elementi uniti di due punteggiate projettive.

Se si aggiunge, che, svolgendo le *idee preliminari* sino a costituirne complete sezioni dell'opera, secondo l'intenzione primitiva, ne sarebbe seguìto naturalmente l'esposizione della dottrina delle superficie generali del secondo grado, come pure la teoria delle linee gobbe di terzo e quarto ordine (fors'anche le superficie di terz'ordine secondo il modo di generazione di Grassmann), si deplorerà che Steiner non abbia mai tradotto in atto il grande piano che si era prefisso. Forse le belle memorie di Seydewitz, che spiccano come verdi oasi in quello sterminato deserto di sabbia, che è l'Archivio di Grunert, dànno un concetto approssimativo di una parte delle idee balenate alla mente del grande geometra.

Queste dilucidazioni non sarebbero compiute se non facessi notare che Steiner stesso sapeva perfettamente qual durevole vantaggio egli avesse recato alla scienza. Oltre due luoghi nel testo medesimo (pag. 128 e 140) viene qui in acconcio la mirabile prefazione, dalla quale tolgo ciò che segue:

« Nel presente scritto si è tentato di scoprire l'organismo che lega fra loro i più svariati fenomeni dello spazio. Vi ha un piccol numero di relazioni fondamentali e semplicissime, onde si rivela lo schema, secondo il quale la restante congerie di proposizioni si svolge conseguentemente e senza veruna difficoltà. Appropriandosi debitamente le poche idee fondamentali, si diventa padroni di tutto l'argomento; l'ordine subentra al caos, e si vede come tutte le parti naturalmente si connettano, come si dispongano in serie nel più bel modo, e come in gruppi ben delimitati si riuniscano le affini. In tal guisa si giunge, per così dire, al possesso degli elementi, dai quali la natura piglia le mosse per largire infinite proprietà alle figure nella maniera più semplice e colla massima economia ».

Un'opera che rivela, per così dire, il cammino seguìto dalla natura nelle proprie creazioni e formazioni geometriche, ben giustamente parve degna all'autore di essere dedicata al personaggio che egli teneva per il più geniale che avesse visto, ed al quale era altresì per più titoli obbligato. La dedica porta dunque il nome di Guglielmo di Humboldt, e ricorderà ancora per lungo tempo, che due uomini valenti, le cui carriere erano affatto diverse, poterono accostarsi amorevolmente nel corso della vita.

Assai presto si era Steiner, or più or meno, occupato delle curve algebriche d'ordine superiore al secondo, in parte legate colla teoria delle coniche, in parte generabili per via geometrica semplice, indipendentemente dalle coniche. Così incontrava sul bel principio delle sue ricerche sulle parabole inscritte in un trilatero, come inviluppo delle tangenti nei vertici, una mirabile curva di terza classe e quart'ordine, della quale faceva conoscere, però più tardi, una serie di belle proprietà. Inoltre quasi tutte le memorie, che ho designato come spettanti ai *populäre Kegelschnitte,* contengono cenni a curve superiori.

A questo campo egli si avvicinò vieppiù colla scoperta dei nuovi metodi geometrici, come lo mostra l'appendice alla *Systematische Entwickelung*, dove si contengono parecchi problemi e teoremi che vi si riferiscono. Il § 59 contiene anche il primo esempio di una trasformazione superiore di figure piane, e può quindi considerarsi come il punto di partenza di importanti lavori più recenti. E qui possiamo anche notare, che STEINER conosceva la trasformazione per raggi vettori reciproci, col mezzo della quale ingegnosamente conseguiva teoremi mirabili sulle serie circolari e sferiche.

Maggior estensione hanno i suoi lavori sulle curve di terz'ordine, che sventuratamente non pubblicò, allora quando sarebbero stati ancora tutti nuovi. Per una parte si valse dei bei teoremi di MACLAURIN e di PONCELET; per un'altra studiò la curva da nuovi punti da vista, considerandola come luogo dei vertici dei triangoli armonici di una rete di coniche. Conobbe anche la sua relazione prospettiva con la curva fondamentale di un fascio di superficie di secondo grado. E comunque sia, parecchi dei risultati da lui pubblicati hanno un gran pregio, come segnatamente quelli che versano sui poligoni inscritti, e quelli che si riferiscono alle coniche aventi contatto sipunto (*sechspunktig*).

D'assai più durevole importanza è però l'articolo: *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven*, letto nell'agosto 1848 dinanzi all'Accademia di Berlino, e comparso di poi anche nel tomo 47 del Giornale di CRELLE. In esso vedonsi definite, seguendo BOBILLIER, le diverse polari di un punto rispetto ad una curva d'ordine n, e studiati gli inviluppi polari; vi si trova sviluppata per la prima volta la generazione di curve algebriche per mezzo di fasci projettivi d'ordine inferiore; inoltre dichiarate le singolarità delle curve nodali; e finalmente spiegato nella sua forma più generale il paradosso di CRAMER. Un'occhiata alla *Introduzione* di CREMONA, dove questi risultamenti sono trattati per disteso insieme con molti altri, giova ottimamente a riconoscere nella sua vera luce tutta l'importanza della memoria di STEINER.

La fecondità di queste proprietà generali si è manifestata in due esempii: nel problema delle normali alle curve algebriche, ed in quello delle tangenti doppie di una curva di quarto ordine. STEINER risolvette nei suoi punti principali questo secondo problema al tempo stesso di HESSE (CRELLE, t. 49), ma con mezzi affatto diversi da quelli impiegati dal celebre analista. Dalle indicazioni che STEINER dà nei tomi 45 e 47 del citato Giornale non soltanto emerge quanto presto egli abbia trattato il difficile problema, ma con esse si sono anche potute ristabilire « le combinazioni degli elementi dati, insolite ed intrecciate in modo particolare » che menano alla soluzione. Oltre i risultati sulle curve di quarto ordine, si trovano nella memoria belle proposizioni sulle curve di terzo ordine e loro curve nodali, e sulle curve di terza classe, che adesso portano il nome di Cayley.

Nominerò ancora, siccome appartenente a questo campo, la grande memoria: *Ueber solche algebraische Curven, welche Mittelpunkte haben*, etc. Nella stessa guisa che, nel lavoro sulle tangenti doppie, Steiner aveva dato splendida prova della propria maestria in una sfera la cui intima essenza, a lui affatto straniera, risiede nella teoria delle equazioni algebriche, come è fatto palese dalla connessavi teoria di certe funzioni abeliane; così qui non è stato meno felice nel proposito di rendere idonei i suoi metodi geometrici generali per i problemi connessi coll'idea della misura. Ed anche l'aver egli confessato, che parecchie delle stabilite proposizioni non sono fondate con bastante solidità, non scema il gran valore delle ricerche in questo difficile argomento.

Oltre le curve algebriche dovettero essere da lui trattate anche le superficie algebriche; ma, pur troppo, di queste nulla è stato pubblicato, donde si possano trarre bastanti induzioni circa i risultamenti di Steiner pel caso generale delle superficie dell'ordine n. Ne è però compenso il suo ingegnoso lavoro sulle superficie di terzo ordine, che, principiato assai prima delle ricerche altrui sullo stesso argomento, e senza bastante cognizione delle investigazioni che andavano pubblicando i matematici inglesi, egli presentò all'Accademia nel gennaio 1856. Il pregio capitale di questo lavoro sta nei varii modi di generazione delle superficie « pei quali le medesime diventano d'ora innanzi presso che così accessibili e facili a trattarsi come finora le superficie di secondo grado. » Ma anche quei risultati che risguardano la superficie nodale, come la teoria delle polari in generale, palesano l'ingegno creatore di lui, benchè qui appunto avessero gli inglesi lavorato con segnalato successo.

Alle ricerche già menzionate sulle normali alle curve algebriche, Steiner fe' tosto seguire considerazioni sulle normali alle superficie algebriche, le quali furono specialmente svolte pel secondo grado. All'infuori di queste due memorie non esiste forse una prova stampata delle ricerche di Steiner sulle superficie d'ordine superiore; se non si fa valere come tale la comunicazione fatta da altri (*) circa la superficie *Romana*. Forse non manca d'interesse il sapere, che Steiner asseriva di aver preso le mosse dall'angolo retto nel semicircolo per generare questa superficie; ed infatti il teorema sull'involuzione, a cui si vuole alludere, esteso allo spazio, fu preso anche da Schröter come base della nota sua memoria sullo stesso argomento.

(*) Monatsberichte dell'Accad. di Berlino, 1863, 333. (T.)

Un interesse tutto loro proprio presentano poi quei lavori che versano, per così dire, sulla geometria infinitesimale. Qui vuolsi nominare anzitutto la memoria sul baricentro di curvatura delle curve piane, dove vedesi dedotta in modo assai semplice la proposizione fondamentale circa le aree delle curve pedali di una curva data, ed inoltre scoperte le reciproche relazioni di curve che rotolano l'una sull'altra. Già in coteste questioni assumono rilevante interesse i massimi e minimi geometrici, ai quali STEINER, dopo una serie di minori articoli affini, dedicò la celebre memoria: *Sur le maximum et le minimum des figures* (CRELLE, t. 24).

Uno dei più acuti matematici viventi pose nella propria dissertazione la tesi: « la matematica essere ad un tempo arte e scienza, » al che EISENSTEIN oppose: « la matematica essere bensì arte, ma non scienza ». Questo paradosso non potevasi difendere in modo più luminoso di quello che richiamandosi alla nominata memoria. Senza ombra di dubbio, STEINER ha fornito lavori più grandiosi e che al progresso della scienza hanno finora contribuito più efficacemente di queste ricerche; ma nondimeno, se guardo alla varietà di concetti ingegnosi ed alla bellezza della forma, non esito a dichiarare le ricerche stesse come la cosa più splendida che la ricchezza del suo genio ci abbia regalato. Sui più piccoli oggetti sa spandere una luce chiara che li rende interessanti, in quanto chè si riconoscono legati con forme superiori; e viceversa, riduce problemi, che prima di lui sembravano insolubili, a proposizioni affatto elementari giuocandosi di ogni difficoltà. Qui innanzi tutto confermavasi il suo intento di tenere continuamente in moto le figure geometriche per poterne sorprendere le proprietà; irrigidire freddamente egli non le lascia mai, bensì le tiene sempre in calda corrente.

Chi voglia convincersi in qual modo sorprendente operino i suoi metodi di dimostrazione, paragoni le dimostrazioni di LEGENDRE e di STEINER pel teorema « di due poligoni regolari d'egual perimetro, contenere maggior area quello che ha il maggior numero di lati; » e chi voglia ravvisare quanto STEINER sorpassi L'HUILIER, da lui medesimo senza invidia riconosciuto qual precursore in questo argomento, confronti specialmente quei problemi, nei quali « la natura si ride delle condizioni ai limiti da noi impostele. » Il calcolo delle variazioni non seppe trovare, che lungo tempo dopo STEINER e per la via da lui aperta, i mezzi di tener dietro alla sintesi nella risoluzione di così fatte quistioni.

DIRICHLET era tutto lode per questa memoria, e ne spiegò calorosamente l'importanza al grande fisiologo GIOVANNI MÜLLER, il quale si era meravigliato che nell'Accademia si trattassero argomenti di tanta semplicità. È cosa caratteristica, che quegli, dal punto di vista dell'estremo rigore, notasse allora come difetto, che la dimostrazione Steineriana del teorema fondamentale « fra tutte le figure d'egual perimetro, il circolo contenere la massima area » suppone l'esistenza di un massimo, mentre sarebbe possibile un infinito avvicinamento assintotico ad un limite non raggiungibile.

Steiner è stato in tutto e per tutto un sintetico, così che sovente, ma a torto, lo si designava come avversario dei metodi analitici, ai quali nondimeno accordava una parte onorevole, benchè naturalmente con riserva, come, per es., nella prefazione alla *Systematische Entwickelung* e nella introduzione ai *Maximum et minimum.* Altri hanno anche creduto, che sapesse d'analisi più di quanto volesse concedere (*), e che, come dicevasi argutamente, a porte chiuse numerasse le costanti. Secondo a me pare, la cosa è all'incirca così. Nel primo periodo delle sue creazioni, che comprende nominatamente anche le due grandi produzioni testè menzionate, egli seguiva interamente il proprio ingegno; ma più tardi, quando s'impegnò nella teoria delle curve e superficie algebriche d'ordine superiore, prendeva talvolta dall'analisi e dall'algebra (che allora certamente sapeva adoperare con grande acume) una serie di proposizioni semplici, senza poterne investigare ulteriormente la esattezza da punti di vista puramente geometrici; e tal'altra, quando si facevano innanzi questioni più remote, rivolgevasi per notizie a matematici amici. Dei fecondi ajuti portigli segnatamente da Jacobi, Aronhold e Schlaefli, cui egli sapeva sempre dare l'impronta della sua mente originale, si possono riconoscere qua e là le orme, specialmente nei lavori non pubblicati. Questo egli lo riconosceva anche volentieri, benchè qualche volta in forma comica; come quando in onore di Jacobi, che mediante il parametro arbitrario in un fascio di curve avevagli risolto parecchie questioni importanti, parlò nella scuola con grande ammirazione dell'utilità del *giudaico coefficiente* (**), e come quando ad un matematico più giovane, che lo potè una volta ajutare con un teorema della teorica dei determinanti, gridò, con sguardo indescrivibile, stranamente misto di diffidenza e gratitudine: « Come? il birbaccione s'intende anche di determinanti? »

Jacobi e Dirichlet, praticando a lungo con Steiner, sapevano, avere egli non

(*) E quest'opinione probabilmente durerà; sembrandoci che non mancherà mai chi troverà la principal ragione della grandezza di Steiner nell'aver egli avuto, come gli altri grandi geometri moderni, concepimenti di una generalità somigliante a quella che già da tempo si era introdotta nei concepimenti analitici. (T.)

(**) Steiner soleva chiamare Jacobi: l'*Ebreo.* (T.)

solo una immaginazione veramente sconfinata, ma eziandio una rara potenza di combinazione; e però, desiderando di far fruttare queste grandi qualità anche in altre parti della matematica oltre la geometria, lo indussero a provarsi nella teoria dei numeri e nella meccanica (specialmente nel problema dei tre corpi). Ne è però emerso, che all'ingegno suo erano pur imposti certi limiti; essendo che niun successo degno di nota coronasse gli sforzi in questa via.

L'operosità di Steiner come pubblico insegnante ci riconduce, nella nostra esposizione, dalle sue opere scientifiche alla carriera esteriore. Abbiamo già detto che si era esercitato nell'insegnare sotto la direzione di Pestalozzi, il cui metodo, affine al socratico, ritenne anche di poi. Per tal guisa si procacciava l'inapprezzabile vantaggio di conoscere ad ogni momento lo stato degli scolari e di poter ordinare la lezione corrispondentemente ai loro bisogni. Il punto di partenza consisteva sempre in cose affatto elementari, che egli rischiarava in modo sorprendente da punti di vista più elevati, così che gli uditori, con un po' di riflessione da parte loro, venivano introdotti rapidamente nelle teorie più generali, e non già con trattazione astratta di aridi teoremi, ma bensì ognora per mezzo di esempi ben scelti, chiari e facili all'intuito. Certamente era indispensabile l'attività propria del discente, non bastando il semplice udire e trascrivere. Steiner a questo riguardo soleva usare la similitudine: « Non tutti quelli che a me dicono *Signore, Signore,* entreranno nel regno de' cieli. »

Ciò che ne rendeva le lezioni particolarmente interessanti, erano le frasi originali, per cui mezzo pareva ch'egli plasmasse la materia in trattazione; così che le figure, specialmente quelle nello spazio, non avevano bisogno di essere disegnate, comparendo all'occhio in virtù della pura descrizione. Ciò aveva tanto maggior valore, inquantochè Steiner serbavasi fedele a questo principio già prima enunciato: « Le considerazioni stereometriche non si comprendono esattamente se non quando si intuiscono, senza ricorrere ai sensi, puramente colla immaginazione. » Le sue lezioni pertanto costituivano un eccellente mezzo generale di educazione, che specialmente Jacobi apprezzava in sommo grado, solendo dare agli studenti il consiglio di assistere alle lezioni di Steiner prima che alle sue. La forza della imaginativa geometrica diede a tutta la personalità di Steiner un'impronta affatto propria anche al di fuori dell'attività scientifica e pedagogica. Essa lo abilitava in alto grado a giudicare opere d'arte plastiche, come si vide segnatamente nel suo viaggio in Italia; imperocchè senza ammaestramenti sapeva cogliere in statue mutilate le intenzioni dello scultore, e discutere i fattivi ristauri, in quanto alla loro giustezza, con un acume che veniva altamente apprezzato dagli esperti. Persino produzioni letterarie considerava egli in quanto manifestassero l'arte dell'esprimere chiaramente; e da ciò si spiega come ammirasse vivamente la ruvida possanza e il descrivere realistico di GOTTHELF, sebbene suo avversario politico (*).

Nello scrivere non poteva tenersi mai pago, finchè non avesse trovato dovunque l'esatta espressione del pensiero; ciascun lavoro riscriveva due, tre volte, prima della definitiva redazione. Per tal modo conseguì il grande vantaggio, che non solo i risultamenti trovati, ma anche i metodi usati e tutta quanta la esposizione ottenessero un valore durevole; mentre, per contrario, accade pur troppo spesso, che gli scritti di matematici anche distinti non ottengano un tale valore, se non per virtù di trasformazioni operate da scienziati posteriori. Il proposito suo di dare vita, moto, calore alla lingua da usarsi per questa materia apparentemente fredda e morta, chi non rammenta quanto già spicchi nelle nuove denominazioni, che sempre esprimono felicemente alcunchè dell'essenza della cosa; come, per esempio, *Strahlbüschel, Kegelschnittschaar, Schaar-Schaar, Kerncurve, Flächengebüsch, Voll-und Theil-Curve,* ecc.? Quanto miseri sotto questo rapporto ci si mostrano questi ultimi tempi, in cui o si presta ai nomi un culto esagerato, benchè giustificabile in qualche grado, o peggio, fra noja senza conforto ci si presenta un pajo di curve, denominandole *Pippian* e *Quippian* pel solo motivo che nella memoria del loro scopritore erano designate colle lettere P e Q (**).

Finchè il fuoco della giovinezza e la forza della migliore età virile durarono, la maggior attrattiva della vita per STEINER stette nella instancabile attività, come nella pura gioja delle sue scoperte stette il più alto piacere; avendosi così in lui una conferma, quale di rado in altri, della verità del detto, che il vero genio voglia compagno il più intenso lavoro. Ma pur troppo col crescere dell'età la cosa mutò aspetto. Per le straordinarie fatiche intellettuali il suo organismo restò offeso, e mentre prima egli aveva combattuto con successo, giusta l'espressione di HESSE, lo spettro imaginario nel piano e nello spazio, ora dovette intraprendere un infelice combattimento cogli spettri reali nel suo addome. Da questo punto andò effettuandosi un triste rivolgimento in tutto

---

(*) BITZIUS era conservatore e STEINER liberale. (T.)
(**) Phil. Transactions 1857, p. 415. (T.)

l'essere suo. Sentiva venir meno la propria forza creatrice, la memoria svanire, e nel tempo stesso vedevasi di fronte una gran serie di problemi, la cui soluzione avrebbe richiesto tutto il suo vigore primiero. Contemporaneamente cominciò ad occuparsi, più del bisogno, del suo posto nella scienza; voleva sapere riconosciuto ogni più piccolo titolo della sua fama, benchè di riconoscimento non gliene mancasse punto. Ed invero l'Accademia di Parigi, propostolo a socio corrispondente « au premier rang et hors de ligne » lo eleggeva con tutti i voti, tranne uno; e negli ultimi anni della di lui vita lo poneva nella lista dei candidati per la nomina a membro straniero. Persino nel suo Cantone nativo si cercava di provargli quanto altamente vi fosse stimato, volendosi istituire per lui una cattedra nell'Università di Berna, la quale sotto qualche rapporto sarebbegli stata più vantaggiosa di quella di Berlino.

I geometri sono davvero una gente curiosa. Se la loro forza creativa in matematica ha da dare buoni risultamenti, bisogna che vi si aggiunga molta fantasia; ma se questa salti dalle astratte forme dello spazio alla concreta realtà della vita, può esser oagione di casi disgustosi. Ciò era già avvenuto nella spiacevole lotta dei geometri francesi, di cui femmo parola, e si rinnovò allorchè apparvero gli ultimi scritti di Poncelet, nei quali persino a Steiner, suo amico ed allora appena defunto, toccò una stretta di mano un po' troppo energica. Nè meno vivamente si manifestò la cosa stessa, quando si seppe per mezzo del signor Dronke, come il consigliere intimo Plücker solesse, nel prendere una tazza di leggiero the, espandere il proprio cuore spettrale-analitico-geometrico; e quando fra i tuttora viventi vedemmo compiersi una seconda edizione della lotta col dragone (*). E chi sa che in seguito non si adduca precisamente anche questo mio ricordo a Jacopo Steiner come nuovo esempio illustrativo della fatta osservazione generale?

Steiner aveva, naturalmente, bastante prudenza per non far nulla stampare delle sue segrete querele, quantunque una volta avesse preparato una *Aufklärungsbrochure.* Ma chi avesse desiderato di ascoltarlo, ben poteva seguire la corrente de' suoi discorsi per intiere notti in estate passeggiando, o per lunghe sere d'inverno sedendo in una bottiglieria, senza riuscire a vederne nè anche in lontananza il termine. Il modo di discorrere, da lui usato in simili occasioni, suole nella vita ordinaria qualificarsi per ingiurioso, ed in questo era quasi an-

(*) In ted. *Drache.* Cfr. *Rendiconti dell'Istituto Lombardo,* 7 maggio 1868; *Zeitschrift di* Schlömilch, t. 12, *Supplement;* t. 13, p. 353. (T.)

cora più grande che in geometria. Io ebbi il piacere di praticare persone, che sotto questo rapporto tengono tra i viventi un posto assai distinto, ma, senza voler offendere nessuno, devo confessare, che nessuno di loro, nè anche da lontano, può stare a petto del vecchio Steiner. Le di lui espressioni originali, la facoltà d' esporre, plastica ed energica, lo aiutavano in ciò egregiamente: quando egli prorompeva, le sommità dell'Olimpo tremavano, ed il sole, la luna e le stelle nascondevano la loro luce dietro la nube che sorgeva terribilmente procellosa. Io sono fermamente convinto, che, se avesse vissuto un pajo di secoli fa, noi venereremmo adesso in lui uno dei maggiori teologi del suo tempo.

Che tali qualità dovessero nuocere assai alla di lui posizione sociale nei circoli dell'Università e dell'Accademia, si capisce senz'altro. Nondimeno mi credo in obbligo di aggiungere qualche parola circa i suoi rapporti con Jacobi, dei quali tradizionalmente si parla assai, e che hanno dato occasione a non pochi aneddoti, e ciò affinchè non paja egli il solo colpevole. Le relazioni d'amicizia fra i due personaggi erano sorte assai presto, e si erano fatte ancora più strette quando entrò nel loro circolo Dirichlet, che, d'indole nobile e mite, appianava le asprezze degli altri. Questo era necessario, in quanto che il legittimo sentimento di sè da parte di Jacobi facevasi valere talvolta più del convenevole, e per contraccambio, Steiner dimenticava pur troppo volontieri i molti servigi ricevuti. Se, in questi scontri, l'uno vibrava l'affilatissima lama del proprio spirito berlinese dinanzi al viso dell'avversario, questi strepitava intorno alle orecchie dell'altro col robusto coreggiato di sua innata ruvidezza bernese, sino a farlo uscire fuori di sè.

Jacobi, che presumibilmente ha reso possibili gli accurati richiami nella *Systematische Entwickelung,* dovette ben tosto riconoscere una delle principali debolezze di Steiner. Questi era stato, pur troppo anche nelle imperfezioni, scolaro di Pestalozzi, il quale un giorno si vantava di non aver letto libri pel corso di trent'anni. Benchè non si possa condannare recisamente la parsimonia delle citazioni di Steiner rimpetto alla moderna smania citatrice, per la quale s'incomincia anzi a nominare quelli che non si dovrebbe; nondimeno alcuni casi di silenzio su lavori altrui sono troppo sorprendenti. Io qui alludo segnatamente al modo singolare con cui egli introduce nelle proprie memorie le formole di Plücker, il più durevole titolo di gloria del loro scopritore, che del resto, sotto questo rapporto, non era migliore di lui nè anche d'un capello.

Che Jacobi profittasse di cotali avvenimenti per farla a Steiner, s'intende da sè. Per caso mirabile si deve ad una di queste sfuriate la cognizione di una importante memoria di Abel. A Jacobi piaceva di comunicare in succinto e rendere intelligibile a Steiner la sostanza de' proprii lavori, sebbene questi non a tutte le di lui idee potesse tener dietro. Ora avvenne che il Sintetico un po' irritato rinfacciasse una volta all'Analista: « Ah! questo m'è già stato raccontato molti anni fa da Abel, che l'ha pure comunicato all'Accademia di Parigi. » I discorsi occasionati da questa dichiarazione devono essere stati il primo indizio dell' esistenza del *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes*, venuto in luce soltanto dopo energici richiami di Jacobi.

Non mi piace di dare minuto ragguaglio del tramonto del grande geometra, nè di descrivere come per lunghi anni traesse in estate « uno spento cratere » da un luogo di bagni ad un altro « con fastidio suo ed altrui, » ripigliando a fatica l'insegnamento nell'inverno, d'onde però di quando in quando, comunque disgraziato, sapeva trarre belle ore per sè e per gli scolari. Si sente stringersi il cuore al vedere come destino infelice e colpa propria lo opprimessero sempre più, come una vera ed una imaginaria malattia sconvolgessero e minassero il suo corpo, come malcontento e diffidenza gli intenebrassero l'anima. E basta; morì il primo d'aprile 1863 in Berna, colla triste certezza di morire per voler della natura, avendo persino cacciati via i medici.

Ma presto l'amaro ricordo delle scorie di sua persona sarà svanito, e però lasciamolo in disparte, e compiaciamoci di considerare di nuovo benevolmente le sue care e grandi qualità, la sua potenza di lavoro, la sua mente creatrice, congiunte all'affetto per la patria e per i suoi buoni costumi antichi. Ancora negli ultimi anni della vita non si faceva rincrescere, per le vie e pei campi del luogo nativo, di farsi raccontare per disteso da fanciulli sconosciuti qual fosse la loro provenienza, o di ajutare qualche vecchio contadino a rimettere in moto il carro affondato. E mentre il premio Steiner dell' Accademia di Berlino attesterà per lungo tempo la sua passionata devozione alla scienza, il premio al calcolatore mentale, da lui fondato per la scuola elementare, ricorderà ogni anno nell'ameno Utzenstorf il figlio fedele al paese nativo.

Se a conclusione di questi ricordi, il cui svariato tenore non basta di certo per abbracciare interamente la vita e le opere di Steiner, io dovessi tentare di esprimere in compendio tutto il valore dell'uomo con un confronto, sentirei una certa difficoltà. Quando morì von Staudt, in Monaco si aveva come il sentimento della morte del moderno Euclide; un altro eminente geometra, tuttora in vita, che divide col più grande matematico dell' antichità la sorprendente particolarità di non aver letto le memorie in tedesco del Giornale di Crelle, è stato chiamato l'Archimede del nostro secolo. Un confronto retrospettivo nell'antichità, quale volentieri si fa in queste occasioni, mi è dunque in sostanza precluso; perciò mi volgo all'avvenire e dico: se in una lontana età un geometra supererà in splendore tutti i colleghi ed emuli suoi per l'esuberanza della forza inventiva e il magistero dell'esposizione, desso si chiamerà il redivivo Jacopo Steiner.

Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperelittiche (*).

(*Memoria di* A. Clebsch, *traduzione con note ed aggiunte di* F. Brioschi.)

La forma binaria più generale del sesto ordine (f) può rappresentarsi in vari modi sotto la forma $f = v^2 - u^3$, essendo u una funzione quadratica e v una funzione del terzo ordine. Già da molto tempo mi occupava del problema di trasformazione corrispondente a questa equazione, quando il sig. Cayley nel IX volume del *Quarterly Journal*, pag. 215, faceva conoscere il complesso delle equazioni dalle quali il problema dipende. In queste equazioni gli invarianti di f sono espressi in funzione degli invarianti simultanei di u e di v e fra gli ultimi si ottiene anche un sistema di quattro equazioni di grado superiore. Una superficiale computazione farebbe credere che la soluzione del problema debba dipendere da una equazione del quarantacinquesimo grado, ma una più scrupolosa ricerca dimostra che la equazione finale del problema è soltanto del grado quarantesimo.

Questa equazione del 40° grado mi parve possedere molte notabili proprietà, ed alcune di esse comunicai al mio onorevole amico, il signor Camillo Jordan di Parigi, il quale, occupato in ricerche intorno le equazioni corrispondenti alla divisione delle funzioni Abeliane, ha ad un tratto riconosciuto, che le stesse proprietà appartengono a quella equazione del 40° grado a cui conduce la trisezione delle funzioni iperelittiche della prima classe. Infatti potei dimostrare che le due equazioni sono identiche, e che perciò il problema di trasformazione sopra enunciato conduce alla equazione modulare corrispondente alla quistione indicata nella teoria delle funzioni iperelittiche.

(*) *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Gottinga,* vol. XIV. Anno 1869.

Mentre quest'ultima circostanza lascia scorgere facilmente il modo di raggrupparsi delle 40 soluzioni, la presente Memoria versa sulla connessione algebrica esistente fra le varie soluzioni del problema e specialmente fra esse ed una qualsivoglia. Dimostrasi infatti, che allorquando una soluzione del problema è data, le altre 39 si trovano per mezzo di radicali non superiori al terzo grado. Queste 39 soluzioni si dividono in due classi, delle quali una comprende 27 soluzioni, l'altra dodici. Le prime 27 formano 9 gruppi ciascuno di 3, ed i nove gruppi dipendono da una equazione Hessiana del nono grado; le altre dodici sono date da una equazione del dodicesimo grado, la quale può considerarsi come la nota risolvente del dodicesimo grado che deducesi da una equazione Hessiana; essa cioè risolvesi per mezzo di una equazione del quarto grado, di cui il primo invariante è nullo, la quale è altresì la equazione caratteristica delle equazioni Hessiane del nono grado.

È di molto interesse il nuovo caso di equazione Hessiana del nono grado indicato più sopra e svolto interamente nelle pagine seguenti. Il problema, che ad essa conduce, può esprimersi nel modo seguente: Sieno date due funzioni u, v, di due variabili, la prima del secondo l'altra del terzo ordine. Si vuole determinare una funzione lineare ξ per modo che la espressione $2v-3u\xi+\xi^3$ sia un cubo perfetto.

La ricerca del modo con cui 39 soluzioni del problema si raggruppano rispetto alla quarantesima, conduce ad un aggruppamento delle soluzioni che algebricamente è della maggiore importanza, ed ha un'intima connessione colle ricerche relative alla trisezione delle funzioni iperelittiche pubblicate di poi dal signor Jordan (*Comptes Rendus,* 12 aprile 1869). Dimostrasi, cioè, che le 40 soluzioni formano 90 quadrupli, i quali nuovamente si dividono in 45 paja di quadrupli, e perciò possono determinarsi mediante una equazione del quarantacinquesimo grado. Le 40 soluzioni poi si possono disporre in 27 differenti modi in 5 paja di quadrupli; e la equazione del quarantacinquesimo grado conduce così ulteriormente ad una equazione del ventisettesimo grado, per la quale si risolve quella del quarantesimo grado. A questo stesso risultato giunse il sig. Jordan nella sua *Teoria delle sostituzioni.*

Gottinga, il 5 giugno 1869.

§ 1.

Correlazione fra il problema della riduzione di una forma binaria f del sesto grado alla forma $v^2 - u^3$ e la trisezione delle funzioni iperelittiche ($p = 2$).

Le curve normali delle funzioni iperelittiche ($p = 2$) sono curve del quarto ordine con un punto doppio. La equazione di una tale curva si può sempre porre sotto la forma:

$$z^2 \phi(x, y) = \psi(x, y) \tag{1}$$

dove ϕ è una funzione omogenea del secondo ordine, ψ del quarto ordine, delle x, y. Il punto doppio è determinato da $x = 0$, $y = 0$; le sue tangenti non coincidono. Gli integrali iperelittici di prima specie, a cui l'equazione (1) conduce, sono della forma:

$$s = \int \frac{(\alpha x + \beta y)(x dy - y dx)}{\sqrt{\varphi \cdot \psi}}$$

$$t = \int \frac{(\alpha' x + \beta' y)(x dy - y dx)}{\sqrt{\varphi \cdot \psi}}.$$

La espressione $\phi \cdot \psi$ sotto il segno radicale è una funzione del sesto grado, la quale indicheremo con:

$$f = \phi \cdot \psi.$$

Gli integrali si estendono fra due limiti inferiori x_0, y_0 fissati ad arbitrio con segni determinati pel radicale $\sqrt{\phi \cdot \psi}$, fino ad una coppia di valori variabili delle x, y.

Indicando gli integrali, con altri limiti superiori, mediante le stesse lettere con un apice, si avrà che il problema inverso delle funzioni iperelittiche è espresso dalle equazioni:

$$s + s' = \sigma$$

$$t + t' = \tau.$$

Sia ora v una indeterminata funzione omogenea del terzo grado in x, y; la equazione:

$$z \phi = v \tag{2}$$

rappresenta una curva del terzo ordine, la quale pure ha nel punto $x = 0$,

$y=0$ un punto doppio, punto doppio che possiede le stesse tangenti del punto doppio della curva (1). Dei dodici punti di intersezione delle curve (1) (2) sei coincidono quindi con questo punto, gli altri si ottengono dalla equazione del sesto grado:

$$v^2=z^2\phi^2=\varphi\psi=f. \tag{3}$$

Per gli integrali iperelittici, i quali corrispondono a questi punti di intersezione, sussistono in conseguenza del teorema d'Abel le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} s^{(1)}+s^{(2)}+\cdots+s^{(6)}&=c \\ t^{(1)}+t^{(2)}+\cdots+t^{(6)}&=\gamma \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ove c, γ indicano due costanti le quali sono indipendenti dalle costanti della funzione v. Mediante queste equazioni due punti di intersezione sono determinati per gli altri.

Cerchiamo ora in particolare le curve (2) le quali hanno colla data, in due punti differenti, un contatto tripunto. Per esse la equazione (3) deve avere due radici triple, deve cioè essere identicamente:

$$v^2=f+u^3$$

essendo u una funzione quadratica di x, y; o, ciò che è lo stesso, deve la funzione f poter essere posta sotto la forma:

$$f=v^2-u^3.$$

A' ciascuna rappresentazione della funzione f sotto questa forma corrisponde una curva di contatto della specie richiesta, o piuttosto ne corrispondono due, le quali sono date dalle equazioni:

$$z\phi-v=0 \qquad z\phi+v=0.$$

Contemporaneamente nelle equazioni (4) gli argomenti diventano eguali fra loro a tre a tre e le equazioni stesse diventano:

$$3[s^{(1)}+s^{(2)}]=c, \qquad 3[t^{(1)}+t^{(2)}]=\gamma. \tag{5}$$

Ma la equazione (2) manifestamente riesce pure soddisfatta nel modo qui richiesto mediante una curva impropria del terzo ordine che consista di una retta passante pel punto doppio, e da contarsi tre volte. Una qualsivoglia linea di questa specie seghi la curva data in due punti, ai quali corrispondano gli integrali $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$; $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, si avrà anche:

$$3[\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}]=c, \qquad 3[\tau^{(1)}+\tau^{(2)}]=\gamma$$

e perciò in luogo delle equazioni (5) le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}3[s^{(1)}+s^{(2)}]&=3[\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}]\\ 3[t^{(1)}+t^{(2)}]&=3[\tau^{(1)}+\tau^{(2)}].\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Le espressioni dei due membri di queste equazioni possono, come è noto, differire di periodi degli integrali di prima specie; sieno P, Q, questi corrispondenti periodi, le equazioni (6) si potranno porre sotto la forma:

$$s^{(1)}+s^{(2)}=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}+\frac{P}{3}$$

$$t^{(1)}+t^{(2)}=\tau^{(1)}+\tau^{(2)}+\frac{Q}{3}.$$

In queste equazioni sta scritto il problema della speciale trisezione delle funzioni iperelittiche (Vedi Clebsch e Gordan: *Teoria delle funzioni Abeliane,* pag. 235 e seguenti). Per $P=0$, $Q=0$, la soluzione del problema di inversione contenuto in queste equazioni è conosciuta; essa corrisponde alla sopra accennata impropria ed insieme indeterminata soluzione della quistione. Rimangono ancora $3^4-1=80$ altre soluzioni proprie, le quali corrispondono ai vari modi di rappresentazione della funzione f nella forma v^2-u^3. Ma queste 80 soluzioni sono due a due in tale rapporto fra loro, che quando una di esse conduce a v, l'altra che vi corrisponde dà $-v$. Infatti consideriamo due soluzioni, le quali differiscano l'una dall'altra soltanto in ciò, che i periodi dell'una sieno gli opposti a quelli dell'altra (o ciò che in questo caso è lo stesso, i doppi dei medesimi). Indichiamo gli integrali appartenenti ad una soluzione cogli indici 1, 2, quelli appartenenti all'altra cogli indici 3, 4; avremo:

$$s^{(1)}+s^{(2)}+s^{(3)}+s^{(4)}+\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}=3[\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}]=c$$

$$t^{(1)}+t^{(2)}+t^{(3)}+t^{(4)}+\tau^{(1)}+\tau^{(2)}=3[\tau^{(1)}+\tau^{(2)}]=\gamma.$$

I punti di contatto delle due curve di contatto impiegate coincidono così coi punti nei quali una retta qualsivoglia passante pel doppio punto sega una curva (2) nelle condizioni presupposte per le equazioni (4). Ma questa curva del terzo ordine sarebbe segata in quattro punti dalla retta arbitraria condotta pel punto doppio; e quindi essa consisterà della retta stessa e di una conica; la quale finalmente dovendo tagliare la curva data ancora quattro volte nel punto doppio, epperò avere quivi un punto doppio, si spezza in due rette. Perciò i punti di contatto di una delle curve di contatto come quelli dell'altra sono situati sopra due rette passanti pel punto doppio; la equazione $v^2-f=0$ deve dare le stesse radici per entrambe, cioè le due v possono soltanto differire pel segno. Due soluzioni di questa specie conducono così alla stessa trasformazione di f.

§ 2.

Aggruppamento delle soluzioni del precedente problema, quando una delle stesse è data. Soluzioni di prima e di seconda classe. — Problema ausiliare.

Allo scopo di ricercare le varie soluzioni del problema di esprimere la funzione f nella forma $v^2 - u^3$, suppongasi che una di queste trasformazioni sia conosciuta, cioè la funzione f sia già data nella forma $v^2 - u^3$, e si chieda di esprimere quella funzione in altro modo nella stessa forma $v'^2 - u'^3$. Si dovrà perciò soddisfare identicamente all'equazione

$$v^2 - u^3 = v'^2 - u'^3.$$

Questa equazione si può scrivere sotto la forma:

$$v^2 - v'^2 = u^3 - u'^3$$

od anche:

$$(v + v')(v - v') = (u - u')(u - \varepsilon u')(u - \varepsilon^2 u')$$

essendo ε una radice cubica immaginaria dell'unità.

Si scorge tosto che questa equazione può essere soddisfatta in due maniere affatto diverse, e che perciò *tutte le altre soluzioni del problema si suddividono rispetto ad una di esse in due gruppi.* Nel primo caso ciascuno dei due fattori cubici:

$$v + v', \qquad v - v'$$

contiene interamente uno dei tre fattori quadratici:

$$u - u', \qquad u - \varepsilon u', \qquad u - \varepsilon^2 u';$$

nel secondo ciascuno dei primi fattori ha comune con ciascuno degli ultimi soltanto un fattore lineare. Le soluzioni u', v' saranno denominate, verificandosi il primo od il secondo caso, *soluzioni di prima o di seconda classe rispetto ad una data soluzione* u, v. Consideriamo il primo caso. Evidentemente è affatto indifferente il modo col quale si legano i primi due fattori agli altri tre; infatti v', u' non sono interamente determinati; ma nel primo rimane indeterminato il segno e nel secondo un fattore eguale alla radice cubica dell'unità. Mutando questi elementi, i fattori superiori si permutano l'uno nell'altro, e si può quindi colla determinazione di questi elementi arbitrari legare fra loro quei fattori in modo arbitrario.

Sieno perciò $u-\varepsilon u'$, ed $u-\varepsilon^2 u'$ i due fattori quadratici, i quali devono essere contenuti interamente nei cubici. Se si indicano con $\xi-\varepsilon\eta$, $\xi-\varepsilon^2\eta$ i fattori lineari che devono entrare in quelle relazioni, si otterranno le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} v+v' &= (\xi-\varepsilon\,\eta)(u-\varepsilon\,u') \\ v-v' &= (\xi-\varepsilon^2\eta)(u-\varepsilon^2 u') \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e la equazione

$$v^2-v'^2=u^3-u'^3$$

dà luogo per le (7) alla:

$$u-u'=(\xi-\varepsilon\eta)(\xi-\varepsilon^2\eta). \tag{8}$$

Le tre equazioni (7) (8) conducono alla determinazione delle u', v', ξ, η. Infatti eguagliando a zero, nelle medesime, i coefficienti delle varie potenze delle variabili, che indicheremo con x_1, x_2, si ottengono undici equazioni, ed in egual numero sono le incognite.

Le equazioni (7) (8) si possono facilmente risolvere per le u', v', v e si ottengono le:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u-\xi^2-\xi\eta-\eta^2 \\ 2\,v' &= \varepsilon(\varepsilon-1)[(\xi+2\eta)u-(\xi+\eta)(\xi^2+\xi\eta+\eta^2)] \\ 2\,v &= 3u\xi-\xi^3+\eta^3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Le prime due fra queste equazioni danno la nuova soluzione, allorquando si suppongano trovati i valori delle espressioni lineari ξ, η. L'ultima di esse offre poi il mezzo di determinare queste espressioni, e conduce ad un nuovo problema di trasformazione, il quale per le chieste soluzioni della prima classe è caratteristico.

Possiamo intanto osservare che a ciascuna soluzione ξ, η della terza equazione (9) corrispondono tre soluzioni del dato problema. Infatti l'ultima equazione (9) contenendo soltanto il cubo di η, questa funzione viene determinata fino alla radice terza dell'unità; quindi se la stessa muta, varia anche il sistema u', v'. Tre soluzioni u', v' così connesse si denominerà un triplo. Si dimostra così che le soluzioni della prima classe costituiscono nove tripli, poichè la terza equazione (9) conduce ad una equazione del nono grado. Si può osservare infine che questa equazione del nono grado è una equazione Hessiana.

Il problema a cui abbiamo condotto la ricerca delle soluzioni della prima classe è il seguente:

Problema. Sieno date due forme binarie, u del secondo, v del terzo grado; si devono determinare due espressioni lineari ξ, η, per modo che si abbia identicamente:

$$2v = 3\xi u - \xi^3 + \eta^3 \tag{10}$$

od anche, si deve determinare una espressione lineare ξ per modo che la espressione $2v - 3\xi u + \xi^3$ sia un cubo perfetto.

Eguagliando nei due membri della equazione (10) i coefficienti delle stesse potenze delle variabili, si ottengono quattro equazioni le quali contengono come incognite i coefficienti di ξ, η; e quindi il problema è interamente determinato. Passo ora alla ricerca della equazione del nono grado dalla quale il problema dipende, ed a questo scopo faccio precedere quanto può essere necessario rispetto al sistema di forme simultanee delle u, v.

§ 3.

Il sistema di forme simultanee di u e di v.

Dovendo nelle pagine seguenti fare uso pressochè di tutte le forme algebriche che dal sistema delle u, v si derivano, parmi opportuno innanzi tutto rammentare come il sig. Gordan, nel vol. II, pag. 265, dei *Matematischen Annalen,* e nel vol. LXIX del Giornale del sig. Borchardt, ha dimostrato che tutte le forme del sistema richiesto si possono esprimere come funzioni intiere delle 15 seguenti forme, fra le quali sono comprese le u, v.

	Ordine rispetto a u,	v,	x	
$v = \alpha^3_x = \beta^3_x$	0,	1,	3	(1)
$\tau = (\alpha\beta)^2 \alpha_x \beta_x = \tau^2_x$	0,	2,	2	(2)
$\omega = (\tau\alpha)\alpha^2_x \tau_x = \omega^3_x$	0,	3,	3	(3)
$A_{\tau\tau} = (\tau\tau')^2$	0,	4,	0	(4)
$u = a^2_x = b^2_x$	1,	0,	2	(5)
$\vartheta = (a\alpha)\alpha^2_x a_x$	1,	1,	3	(6)
$p = (a\alpha)^2 \alpha_x$	1,	1,	1	(7)
$\rho = (a\tau) a_x \tau_x$	1,	2,	2	(8)
$A_{u\tau} = (a\tau)^2$	1,	2,	0	(9)
$r = (a\omega)^2 \omega_x$	1,	3,	1	(10)
$A_{uu} = (ab)^2$	2,	0,	0	(11)
$q = (ap) a_x$	2,	1,	1	(12)
$s = (\alpha p)^2 \alpha_x$	2,	3,	1	(13)
$A_{u,pp} = (ap)^2$	3,	2,	0	(14)
$M = (\alpha p)^3$	3,	4,	0.	(15)

Questa tabella è evidentemente ordinata dapprima tenendo conto dell'ordine discendente dei coefficienti di u, e dei coefficienti di v; infine scendendo dalle più alte forme nelle x a quelle d'ordine minore. La notazione per gli invarianti è scelta in modo che l'invariante di due forme quadratiche φ, ψ il quale contiene linearmente i coefficienti delle medesime, è indicato con $A_{\varphi,\psi}$. Fra le forme sopra esposte si trovano:

5 invarianti, dei quali uno gobbo;
4 forme lineari, delle quali due gobbe;
3 forme quadratiche, delle quali una gobba;
3 Forme cubiche, delle quali due gobbe.

Siccome i prodotti ed i quadrati delle forme gobbe si ponno sempre esprimere in funzioni intere di forme dirette, così una forma qualsivoglia del sistema può rappresentarsi come segue:

$$A + B\omega + C\vartheta + D\rho + Er + Fq + GM$$

dove A, B... G, sono funzioni intiere di v, u, τ, p, s e dei quattro invarianti diretti. Fra le espressioni, le quali si possono ottenere pei quadrati e pei prodotti di forme gobbe, scelgo le seguenti, di cui trarremo profitto più avanti:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta^2 &= -\tfrac{1}{2}(v^2 A_{uu} - 2uvp + u^2\tau) \\ \vartheta\omega &= \tfrac{1}{2}(\tau v p - \tau^2 u - v^2 A_{u\tau}) \\ \vartheta\rho &= \tfrac{1}{2}(\tau u p + vu A_{u\tau} - \tau v A_{uu}) \\ \rho^2 &= vs - \tfrac{1}{2}\tau p^2. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Una seconda serie di formole comprende le relazioni lineari fra le forme gobbe, i coefficienti delle quali sono composte soltanto con forme dirette. Fra queste citeremo la:

$$\tau\vartheta - u\omega = v\rho. \qquad (\mathrm{II})$$

Infine relativamente alle equazioni sussistenti fra le forme dirette scelgo le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} us &= vA_{u,pp} - p(uA_{u\tau} - \tau A_{uu}) - p^3 \\ \tau s &= vA_{\tau,pp} - p(uA_{\tau\tau} - \tau A_{u\tau}) \\ A_{\tau,pp} &= \tfrac{1}{2}(A_{uu}A_{\tau\tau} - A^2_{u\tau}). \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{III})$$

Tutte queste formole sono conosciute o si ponno dimostrare facilmente; mi limito quindi alla loro enunciazione (*).

(*) Vedi Nota 1ª e seguenti dopo il § 9.°

§ 4.

Ricerca della equazione del nono grado dalla quale dipende il problema ausiliare.

Il problema a risolversi consiste nella ricerca di due funzioni lineari ξ, η per le quali la equazione:

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3 \tag{1}$$

sia soddisfatta. In luogo di eguagliare ora i coefficienti della x nei due membri della equazione (1) considero dapprima le ξ, η come variabili, e paragono in seguito i coefficienti. Si ha identicamente:

$$(\xi\eta)^3 v = (\xi\eta)^3 a_x^3 = [(\alpha\eta)\xi_x - (\alpha\xi)\eta_x]^3$$
$$(\xi\eta)^2 u = (\xi\eta)^2 a_x^2 = [(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x]^2.$$

Si sostituiscano questi valori nella equazione (1) ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di ξ, η, si ottengono le:

$$\left.\begin{aligned} 2(\alpha\eta)^3 &= 3(\xi\eta)(a\eta)^2 - (\xi\eta)^3 \\ -6(\alpha\eta)^2(\alpha\xi) &= -6(\xi\eta)(a\eta)(a\xi) \\ 6(\alpha\eta)(\alpha\xi)^2 &= 3(\xi\eta)(a\xi)^2 \\ -2(\alpha\xi)^3 &= (\xi\eta)^3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Da queste equazioni si devono dedurre i valori delle ξ, η. Io voglio dapprima eliminare le η, e quindi giungere ad una equazione, la quale contenga solamente il rapporto $\frac{\xi_1}{\xi_2}$. Per giungere al primo scopo, basta soltanto osservare che dalla terza delle equazioni (2) si deducono le:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\eta_1 &= 2(\alpha\xi)^2\alpha_1 - (a\xi)^2\xi_1 \\ \varkappa\eta_2 &= 2(\alpha\xi)^2\alpha_2 - (a\xi)^2\xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

nelle quali $\varkappa$ è un fattore a determinarsi. Da queste equazioni segue la:

$$\varkappa(\xi\eta) = -2(\alpha\xi)^3$$

e questa posta a confronto coll' ultima delle equazioni (2) dà per la determinazione di $\varkappa$ la equazione:

$$\varkappa^3 = 4(\alpha\xi)^3\cdot(\beta\xi)^3. \tag{4}$$

Le equazioni (3) (4), allorquando sieno determinate le ξ, daranno il valore delle espressioni η fino a radici cubiche dell'unità; e che queste non possano essere determinate più completamente è chiaro dal fatto che la equazione (1) contiene soltanto il cubo di η.

.Delle equazioni (2) rimangono ora a considerarsi le prime due, le quali quando si ponga pei rapporti delle η i valori dati dalla (3), diventano equazioni fra le sole ξ. Per ottenere queste ultime, considero dapprima le espressioni $(a\xi)(a\eta)$, $(a\eta)^2$, $(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2$, $(\alpha\eta)^3$, le quali coll'introduzione dei valori di η diventano:

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa(a\xi)(a\eta) = 2(a\alpha)(\alpha\xi)^2(a\xi)-(a\xi)^2(b\xi)^2\\
&\varkappa^2(a\eta)^2 = 4(a\alpha)(a\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2-4(a\alpha)(a\xi)(\alpha\xi)^2(b\xi)^2+(a\xi)^2(b\xi)^2(c\xi)^2\\
&\varkappa^2(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2 = 4(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\xi)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2-4(\alpha\beta)(\alpha\xi)^3(\beta\xi)^2(a\xi)^2+\\
&\qquad+(\alpha\xi)^3(a\xi)^2(b\xi)^2\\
&\varkappa^3(\alpha\eta)^3 = 8(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(\delta\xi)^2-12(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\xi)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(a\xi)^2+\\
&\qquad+6(\alpha\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2(a\xi)^2(b\xi)^2-(\alpha\xi)^3(a\xi)^2(b\xi)^2(c\xi)^2
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

In seguito supporremo che nelle forme appartenenti al sistema u, v, di cui faremo uso, siasi posto $x_1=\xi_2$, ed $x_2=-\xi_1$. In questo senso si potrà scrivere v in luogo di $(\alpha\xi)^3$, u in luogo di $(a\xi)^2$ e così via. La equazione (4) condurrà per esempio alla:

$$\varkappa^3=4v^2 \tag{6}$$

e la prima delle equazioni (5) si muterà nella:

$$\varkappa(a\xi)(a\eta)=2\vartheta-u^2. \tag{7}$$

Quanto alla seconda equazione (5), osservo dapprima che col quadrare la identità:

$$(a\alpha)(\beta\xi)-(a\beta)(\alpha\xi)=-(\alpha\beta)(a\xi)$$

si ottiene la:

$$(a\alpha)(a\beta)(\beta\xi)(\alpha\xi)=\tfrac{1}{2}[(a\alpha)^2(\beta\xi)^2+(a\beta)^2(\alpha\xi)^2-(\alpha\beta)^2(a\xi)^2],$$

epperò il primo termine del secondo membro della seconda equazione (5) diventa:

$$(a\alpha)(a\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2=pv-\tfrac{1}{12}\tau u$$

e l'intera equazione si muta nella:

$$\varkappa^2(a\eta)^2=4pv-2\tau u-4\vartheta u+u^3. \tag{8}$$

Nella terza equazione (5) sparisce identicamente il secondo termine giacchè permutando α e β il suo segno cambia; e pel primo sussiste la identità:

$$(\alpha\beta)(\gamma\xi)-(\alpha\gamma)(\beta\xi)=-(\beta\gamma)(\alpha\xi)$$

che quadrata dà:

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\xi)(\gamma\xi)=\tfrac{1}{2}[(\alpha\beta)^2(\gamma\xi)^2+(\alpha\gamma)^2(\beta\xi)^2-(\beta\gamma)^2(\alpha\xi)^2]$$

e perciò:

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\xi)(\gamma\xi)(\alpha\xi)=\tfrac{1}{2}\tau v$$

così che la terza equazione (5) diventa:

$$\varkappa^2(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2=v(2\tau+u^3). \tag{9}$$

Infine la stessa identità, che ci ha or ora giovato, conduce alla:

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(\beta\xi)(\gamma\xi)^2(\delta\xi)^2=(\tau\delta)(\delta\xi)^2(\tau\xi)\cdot v=v\omega$$

e la quarta equazione (5) prende quindi la forma:

$$\varkappa^3(\alpha\eta)^3=v(8\omega-6\tau u-u^3). \tag{10}$$

Per mezzo delle relazioni (7)... (10), quando si sostituisca nelle prime due equazioni (2) i rapporti delle η dedotti dalle (3), si ponno ora avere le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}0&=4\omega-6u\tau+6vp-6\vartheta u+u^3-2v^2\\0&=2\tau+4\vartheta-u^2\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

nelle quali si è ommesso un fattor comune v.

Le due equazioni (11) non sono omogenee in ξ_1, ξ_2; dalle stesse devesi ora dedurne una sola la quale sia omogenea rispetto a queste quantità. A tale scopo pongo $\frac{\xi_1}{\lambda}$, $\frac{\xi_2}{\lambda}$ in luogo di ξ_1, ξ_2; le equazioni (12) prendono così la forma:

$$\left.\begin{aligned}0&=4\omega\lambda^3-6u\tau\lambda^2+6vp\lambda^2-6\vartheta u\lambda+u^3-2v^2\\0&=2\tau\lambda^2+4\vartheta\lambda-u^3\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

e la cercata equazione si dedurrà da queste due colla eliminazione di λ.

Aggiungendo alla prima equazione (12) moltiplicata per due, la seconda moltiplicata per $3u$, si ottiene la:

$$0=8\omega\lambda^3+6(2vp-u\tau)\lambda^2-(u^3+4v^2). \tag{13}$$

Formo ora con questa e colla seconda delle equazioni (12) il determinante funzionale di λ, e di $\frac{1}{\lambda}$, il quale parimenti deve essere eguale a zero. Si ha:

$$0=\begin{vmatrix} 8\omega\lambda^2+4(2vp-u\tau)\lambda & 2\tau\lambda+2\vartheta \\ 2(2vp-u\tau)\lambda^2-(u^3+4v^2) & 2\vartheta\lambda-u^2 \end{vmatrix}$$

ossia dividendo pel fattore 2:

$$0=\lambda^3(8\omega\vartheta-4\tau vp+2\tau^2 u)+\lambda^2(4\vartheta vp-2\vartheta u\tau-4u^2\omega)+$$
$$+\lambda(3u^3\tau+4v^2\tau-4u^2vp)+\vartheta(u^3+4v^2).$$

Sottraendo da questa la equazione (13) moltiplicata per ϑ, ed aggiungendo la seconda delle (12) moltiplicata per $\lambda(2pv-u\tau)+2\vartheta u$, si otterrà dopo alcune riduzioni la equazione quadratica in λ:

$$0=4\lambda^2u(\tau\vartheta-u\omega)+\lambda(4\tau v^2+4\tau u^3-6u^2vp+8u\vartheta^2)+8\vartheta v^2. \tag{14}$$

Questa equazione è divisibile pel fattore v; rammentando infatti le relazioni I, II, § 3.°, ossia le:

$$\tau\vartheta-u\omega=\rho v, \qquad \vartheta^2=-\tfrac{1}{2}(\tau u^2-2uvp+A_{uu}v^2)$$

e sostituendo, si ottiene dividendo per v la seguente:

$$0=4\lambda^2u\rho+\lambda(4\tau v-4uvA_{uu}+2u^2p)+8\vartheta v. \tag{15}$$

A questa ed alla seconda equazione (12) si può aggiungere come terza equazione del secondo grado, quella che risulta dall'eliminare nella (13) e nella seconda della (12) le più alte potenze di λ: essa è:

$$0=(12vp\tau-6u\tau^2-16\omega\vartheta)\lambda^2+4\omega u^2\lambda-\tau(u^3+4v^2).$$

Sottraendo da quest'ultima la seconda delle (12) moltiplicata per $u\tau$ e dividendo per 4 si ha:

$$0=(3vp\tau-2u\tau^2-4\omega\vartheta)\lambda^2+u(\omega u-\tau\vartheta)\lambda-\tau v^2$$

equazione pure divisibile per v. Infatti sostituendo per $\vartheta\tau-u\omega$ il valore ρv, e rammentando essere:

$$\vartheta\omega=-\tfrac{1}{2}(\tau^2u+v^2A_{u\tau}-\tau vp)$$

si giunge alla:

$$0=(\tau p+2vA_{u\tau})\lambda^2-u\rho\lambda-\tau v. \tag{16}$$

Deducendo dalle (15) (16) i rapporti di λ^2, λ, 1, si trova che essi sono ancora divisibili per v. Infatti indicando con ν una indeterminata si hanno le:

$$\nu\lambda^2=v[-4\tau^2v+2\tau uvA_{uu}-2u^2p\tau+8\vartheta\rho u]$$
$$\nu\lambda\ =v[8\vartheta\tau p+16\vartheta vA_{u\tau}+4u\rho\tau]$$
$$\nu 1\ =v[-4\tau^2p+2u\tau pA_{uu}-8\tau vA_{u\tau}+4uvA_{uu}A_{u\tau}-4u^2pA_{u\tau}]-2u^2(p^2\tau+2\rho^2).$$

Ma dalle I è $p^2\tau + 2\rho^2 = 2vs$, e perciò i secondi membri delle equazioni superiori sono tutti divisibili per v; supponendo questo fattore anche compreso in ν e ponendo per $\vartheta\rho$, us, i valori dati dalle I, III § 3.° si ottengono le:

$$\left.\begin{aligned} \nu\cdot\lambda^2 &= -4\tau^2 v - 2\tau u A_{uu} + u^2 p\tau + 2u^2 p\tau + 4u^2 v A_{u\tau} \\ \nu\cdot\lambda &= 8\vartheta\tau p + 16\vartheta v A_{u\tau} + 4u\rho\tau \\ \nu\cdot 1 &= -4\tau^2 p - 2u\tau p A_{uu} - 8\tau v A_{u\tau} + 4uv(A_{uu}A_{u\tau} - A_{u,pp}) + 4up^3 \end{aligned}\right\}\quad(17)$$

i quali valori sostituiti nella seconda delle equazioni (12) conducono alla richiesta equazione del nono grado:

$$\left.\begin{aligned} 0 = v[-8\tau^3 + 12\tau^2 A_{uu} - 8u^2\tau A_{u\tau} - 4u^3(A_{uu}A_{u\tau} - A_{u\,p\tau})] + \\ + 2u^3\tau p A_{uu} - 4u^3p^3 + 32\tau v p^2 u - 16(\tau A_{uu} - 4uA_{u\tau})v^2 p - 32A_{uu}A_{u\tau}v^3. \end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Questa equazione dà i rapporti delle ξ; indicando con $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ una radice dell'equazione, e sostituendo in luogo delle ξ nelle equazioni (17) i valori assoluti delle ζ, comunque determinati, si otterrà il valore di λ e perciò i richiesti valori delle ξ saranno dati dalle equazioni:

$$\xi_1 = \frac{\zeta_1}{\lambda}, \qquad \xi_2 = \frac{\zeta_2}{\lambda}.$$

Si può adunque determinare in nove modi una funzione lineare ξ per la quale la espressione $2v - 3u\xi + \xi^3$ sia un cubo perfetto (*).

Voglio ora dimostrare che la equazione (18) è una equazione Hessiana.

§ 5.

Aggruppamento delle radici della equazione del nono grado rispetto ad una di esse.

Supponiamo che una soluzione del problema sia conosciuta, siano cioè noti i valori di due espressioni ξ, η che diano identicamente:

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3.$$

Per una seconda soluzione ξ', η' dovrà sussistere identicamente la:

$$3u\xi - \xi^3 + \eta^3 = 3u\xi' - \xi'^3 + \eta'^3$$

(*) Vedi Nota 2ª.

ossia:

$$(\xi'-\xi)[\xi'^2+\xi'\xi+\xi^2-3u]=\eta'^3-\eta^3. \tag{19}$$

Si vede da quest'ultima che $\xi'-\xi$ non può differire che di una costante da uno dei tre fattori di $\eta'^3-\eta^3$, e quindi, se indicasi con ε una certa immaginaria radice cubica dell'unità, e con m un fattore costante, dovrà essere:

$$\eta'-\varepsilon\eta=\varepsilon m(\xi'-\xi); \tag{20}$$

ed in altre parole esisterà sempre una funzione lineare z tale che:

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\xi+z\\ \eta'&=\varepsilon(\eta+mz).\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Posti questi valori di ξ', η' nella equazione (19), dividendo pel fattore $\xi'-\xi$, si ottiene la equazione:

$$3u=3(\xi^2-m\eta^2)+3(\xi-m^2\eta)z+(1-m^3)z^2. \tag{22}$$

Per risolvere questa equazione si introduca una nuova funzione lineare ζ legata alla z dalla relazione:

$$z=\tfrac{3}{2}\,\frac{2\zeta-(\xi-m^2\eta)}{1-m^3} \tag{23}$$

e la (22) si trasforma facilmente nella equazione:

$$\zeta^2=\frac{1-m^3}{3}(u-\xi^2+m\eta^2)+\tfrac{1}{4}(\xi-m^2\eta)^2. \tag{24}$$

La quantità costante m deve così essere determinata per modo che il secondo membro di questa equazione sia un quadrato, ossia il discriminante della espressione quadratica del secondo membro deve essere nullo. Ora, rammentando quanto si disse al § 3.° rispetto alla notazione degli invarianti simultanei, si otterrà pel valore di quel discriminante:

$$\frac{(1-m^3)^2}{9}\Big[A_{uu}-2A_{u,\xi\xi}+2mA_{u,\eta\eta}-2mA_{\xi\xi,\eta\eta}\Big]+$$
$$+\frac{1-m^3}{6}\Big[A_{u,\xi\xi}-2m^2A_{u,\xi\eta}+m^4A_{u,\eta\eta}+m(1-m^3)A_{\xi\xi,\eta\eta}\Big].$$

Dividendo pel fattore $\dfrac{1-m^3}{3}$, ponendo per brevità:

$$A_{u,\xi\xi}=A,\qquad A_{u,\xi\eta}=B,\qquad A_{u,\eta\eta}=C$$

ed osservando che:

$$A_{\xi\xi,\eta\eta}=\xi_1^2\eta_2^2-2\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2+\xi_2^2\eta_1^2=(\xi\eta)^2$$

si avrà per la determinazione di m la equazione biquadratica:

$$0=\frac{1-m^3}{3}\left[A_{uu}-2A+2mC-\tfrac{1}{2}m(\xi\eta)^2\right]+\tfrac{1}{2}\left[A-2m^2B+m^4C\right]. \qquad (25)$$

Rimane così dimostrato che rispetto ad una soluzione qualsivoglia ξ, η del proposto problema, tutte le altre si aggruppano in quattro coppie, la ricerca delle quali dipende dalla risoluzione dell'equazione biquadratica (25) e dalle equazioni (21) (23) (24).

Questa equazione del quarto grado ha proprietà molto rimarchevoli. Scrivendola ordinata secondo la potenza di m dà:

$$0=m^4[(\xi\eta)^2-C]+4m^3[A-\tfrac{1}{2}A_{uu}]-6m^2B+4m[C-\tfrac{1}{4}(\xi\eta)^2]+2A_{uu}-A$$

e quindi il suo primo invariante sarà eguale all'espressione:

$$i=[(\xi\eta)^2-C][2A_{uu}-A]-[4C-(\xi\eta)^2][A-\tfrac{1}{2}A_{uu}]+3B^2=$$
$$=\tfrac{3}{2}(\xi\eta)^2A_{uu}-3(AC-B^2).$$

Ma:

$$AC-B^2=\tfrac{1}{2}[(a\xi)^2(b\eta)^2-2(a\xi)(b\xi)(a\eta)(b\eta)+(a\eta)^2(b\xi)^2]=$$
$$=\tfrac{1}{2}[(a\xi)(b\eta)-(a\eta)(b\xi)]^2=\tfrac{1}{2}(ab)^2(\xi\eta)^2=\tfrac{1}{2}A_{uu}(\xi\eta)^2$$

perciò $i=0$ ossia il primo invariante della equazione biquadratica è identicamente nullo.

Si può inoltre trovare facilmente una sostituzione lineare per la quale l'equazione biquadratica si trasformi in un altra di cui i coefficienti non contengano più le ξ, η ma soltanto gli invarianti simultanei delle forme u, v.

Sostituendo nella equazione biquadratica:

$$m^4a+4m^3b+6m^2c+4md+e=0$$

la nuova variabile σ legata alla m dalla equazione:

$$ma=-\sigma-b$$

si giunge alla:

$$\sigma^4+6\alpha\sigma^2+4\beta\sigma+\gamma=0$$

nella quale:

$$\alpha=ac-b^2, \qquad \beta=3abc-da^2-2b^3$$

e siccome ogniqualvolta, come nel presente caso, che il primo invariante svanisce si ha:

$$\gamma=-3\alpha^2$$

così la equazione biquadratica prende la forma:

$$\sigma^4 + 6\alpha\sigma^2 + 4\beta\sigma - 3\alpha^2 = 0.$$

Nel caso che si considera, la equazione di sostituzione è:

$$m = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A - \sigma}{(\xi\eta)^2 - C} \tag{26}$$

ed i coefficienti α, β hanno i valori:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -B[(\xi\eta)^2 - C] - (A - \frac{1}{2}A_{uv})^2 \\ \beta = -3B[(\xi\eta)^2 - C][A - \frac{1}{2}A_{uu}] - [C - \frac{1}{4}(\xi\eta)][(\xi\eta)^2 - C]^2 - 2[A - \frac{1}{2}A_{uu}]^3. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Si vuol dimostrare che queste espressioni sono funzioni razionali degli invarianti simultanei delle funzioni u, v. A questo scopo determino le forme simultanee di u e di v, prendendo per v la espressione

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3.$$

Si ha identicamente:

$$u(\xi\eta)^2 = C\xi^2 - 2B\xi\eta + A\eta^2$$

quindi anche:

$$2v(\xi\eta)^2 = [3C - (\xi\eta)^2]\xi^3 - 6B\xi^2\eta + 3A\xi\eta^2 + (\xi\eta)^2\eta^3,$$

inoltre se si determinano le varie forme simultanee relative alle variabili ξ, η e si moltiplicano per opportune potenze di $(\xi\eta)$, si ottengono le:

$$A_{uu}(\xi\eta)^2 = 2(AC - B^2)$$

$$2p(\xi\eta)^2 = 4\xi(AC - B^2) - A\xi(\xi\eta)^2 + \eta C(\xi\eta)^2$$

ossia quando si divida per $(\xi\eta)^2$:

$$2p = \xi[2A_{uu} - A] + \eta C$$

e perciò:

$$4A_{u,pp} = A^3 + C^3 - 2ABC + 4A_{uu}(BC - A^2) + 4A^2_{uu}A.$$

Così si ottiene:

$$2\tau(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} 3C - (\xi\eta)^2 & -2B & \eta^2 \\ -2B & A & -\xi\eta \\ A & (\xi\eta)^2 & \xi^2 \end{vmatrix}$$

da cui:

$$2A_{u\tau}(\xi\eta)^{\cdot} = \begin{vmatrix} 3C - (\xi\eta)^2 & -2B & C \\ -2B & A & -B \\ A & (\xi\eta)^2 & A \end{vmatrix}$$

o sottraendo dagli elementi della prima colonna quelli dell'ultima, sviluppando il determinante e dividendo per $(\xi\eta)^2$:

$$2A_{u\tau} = -A^2 + BC + A_{uu}A - B(\xi\eta)$$

per la quale:

$$\alpha = 2A_{u\tau} - \tfrac{1}{4}A^2_{uu}. \tag{28}$$

Infine essendo:

$$8A_{\tau\tau}(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & 6AC-2A(\xi\eta)^2-8B^2 \\ -2B & A & 2AB+3C(\xi\eta)^2-(\xi\eta)^4 \\ A & (\xi\eta)^2 & -4B(\xi\eta)-2A^2 \end{vmatrix}$$

se agli elementi dell'ultima colonna si aggiungono quelli della prima moltiplicati per $2A$ e quelli della seconda moltiplicati per $2B$, si ottiene dividendo per $(\xi\eta)^2$:

$$8A_{\tau\tau} = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & 6A_{uu}-4A \\ -2B & A & 3C-(\xi\eta)^2 \\ A & (\xi\eta) & -2B \end{vmatrix} =$$

$$= 4A^3 + 8B^3 - 12ABC - 6A_{uu}A^2 + (\xi\eta)^2[12AB - 12A_{uu}B - 9C^2] + \\ + 6C(\xi\eta)^4 - (\xi\eta)^6$$

e perciò:

$$\beta = 5A_{uu}A_{u\tau} - 2A_{\tau\tau} - 4A_{u,pp} + \tfrac{1}{4}A^3_{uu}. \tag{29}$$

La ricerca delle altre otto radici, quando una è data, dipende quindi dalla risoluzione della equazione biquadratica (*):

$$\left.\begin{aligned} \sigma^4 + 6(2A_{u\tau} - \tfrac{1}{4}A^2_{uu})\sigma^2 + 4(5A_{uu}A_{u\tau} - 2A_{\tau\tau} - 4A_{u,pp} + \tfrac{1}{4}A^3_{uv})\sigma - \\ - 3(2A_{u\tau} - \tfrac{1}{4}A^2_{uv})^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

A ciascuna radice σ di questa equazione corrispondono due soluzioni le quali sono date dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + \tfrac{3}{2}\frac{\pm 2\zeta - (\xi - m^2\eta)}{1 - m^3}, & \varepsilon^2\eta' &= \eta + \frac{3m}{2}\frac{\pm 2\zeta - (\xi - m^2\eta)}{1 - m^3} \\ \zeta^2 &= \frac{1-m^3}{3}(u - \xi^2 - m\eta^2) + \tfrac{1}{4}(\xi - m^2\eta)^2, & m &= \frac{\tfrac{1}{2}A_{uu} - \sigma - A}{(\xi\eta)^2 - C}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Osserviamo ora che per le equazioni (3) del § 4.° il rapporto delle η essendo esprimibile per le ξ, si avrà:

$$\varkappa\eta_1 = \eta_1^0 \qquad \varkappa\eta_2 = \eta_2^0$$

(*) Vedi Nota 3ª.

dove η_1^0, η_2^0 sono funzioni note delle ξ, e $\varkappa^3$ è altresì esprimibile per le ξ. Perciò l'ultima delle equazioni (31) dà:

$$m = \varkappa\, m^0$$

essendo m^0 una funzione razionale di ξ_1, ξ_2, σ; e quindi risulta:

$$\zeta^2 = \frac{1 - \varkappa^6 m^{0^3}}{3}(u - \xi^2 - m^0 \eta^{0^2}) + \tfrac{1}{4}(\xi - \varkappa^3 m^{0^2} \eta^0)^2$$

una funzione razionale delle sole ξ_1, ξ_2, σ; come anche i secondi membri delle prime due equazioni (31):

$$\xi' = \xi + \tfrac{3}{2}\,\frac{\pm 2\zeta - \xi + m^{0^2}\varkappa^3 \eta^0}{1 - \varkappa^6 m^{0^3}}$$

$$\varepsilon^2 \eta' \varkappa = \eta^0 + \frac{3\varkappa^3 m^0}{2}\,\frac{\pm 2\zeta - \xi + m^{0^2}\varkappa^3 \eta^0}{1 - \varkappa^6 m^{0^3}}$$

non contengono che quelle quantità. A queste ultime formole può anche darsi la forma schematica:

$$\xi' = M + N\sqrt{\Omega(\xi_1,\ \xi_2,\ \sigma)}$$

$$\varepsilon^2 \varkappa \eta' = M' + N'\sqrt{\Omega(\xi_1,\ \xi_2,\ \sigma)}$$

essendo M, N, M', N' funzioni lineari e Ω una costante, le quali contengono le ξ_1, ξ_2, σ solo razionalmente.

§ 6.

Soluzioni conjugate.

Tre soluzioni del problema, di cui due si deducono da una medesima mediante la stessa radice della equazione biquadratica, si denomineranno soluzioni conjugate. Voglio ora dimostrare, che le medesime rimangono sempre conjugate qualunque sia quella delle tre da cui si parte.

Infatti se si indica nuovamente l'originaria soluzione con ξ, η e le conjugate con ξ', η'; ξ'', η'', si hanno per le equazioni (21) le:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + z & \eta' &= \varepsilon(\eta + mz) \\ \xi'' &= \xi + z_1 & \eta'' &= \varepsilon_1(\eta + mz_1) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

essendo ε, ε_1 radici cubiche dell'unità. Ma queste equazioni si ponno porre sotto la forma:

$$\xi = \xi' - z \qquad \eta = \varepsilon^2(\eta' - m\varepsilon z)$$
$$\xi'' = \xi' + (z_1 - z) \qquad \eta'' = \varepsilon^2\varepsilon_1[\eta' + m\varepsilon(z_1 - z)]$$

le quali dimostrano il seguente teorema:

Se invece di partire da una soluzione ξ, η si parte da una ξ', η' conjugata con quella per mezzo della radice m della equazione biquadratica, riesce di nuovo conjugata con ξ', η' anzitutto ξ, η, e poi la soluzione che in prima era conjugata con ξ, η e ξ', η'. Perciò tre soluzioni le quali sieno una volta conjugate lo rimangono sempre da qualunque delle tre si parta. Ed in vero partendo da ξ', η', invece che da ξ, η non si ha che a porre $m\varepsilon$ in luogo di m; $-z$ e $z_1 - z$ in luogo di z e z_1. La terza potenza della radice m della equazione biquadratica rimane quindi inalterata.

Si può facilmente dimostrare che anche la radice σ corrispondente alla ridotta equazione biquadratica (30) rimane inalterata, e perciò appartiene ad un sistema di radici conjugate. Indicando a questo scopo con A', B', C' i valori delle A, B, C allorquando si sostituiscano in queste ultime quantità le ξ', η' in luogo delle ξ, η; si dovrà quindi dimostrare essere (vedi equaz. 26):

$$m[(\xi\eta) - C] + A = \varepsilon m[(\xi'\eta') - C'] + A'.$$

Rammentando la equazione (22):

$$3u = 3(\xi^2 - m\eta^2) + 3(\xi - m^2\eta)z + (1 - m^3)z^2 \tag{33}$$

e ponendo in essa in luogo di ξ, η, m, z le ξ', η', $m\varepsilon$, $-z$ si ottiene la:

$$3u = 3(\xi'^2 - m\varepsilon\eta'^2) - 3(\xi' - m^2\varepsilon^2\eta')z + (1 - m^3)z^2. \tag{34}$$

Pongasi ora nella prima di queste equazioni (33) $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$ oppure $x_1 = \eta_2$, $x_2 = -\eta_1$; e nella seconda $x_1 = \xi'_2$, $x_2 = -\xi'_1$ oppure $x_1 = \eta'_2$, $x_2 = -\eta'_1$; si otterranno le quattro equazioni:

$$\begin{aligned}
3A &= -\ 3m(\xi\eta)^2 - 3m^2(\xi\eta)(\xi z) + (1 - m^3)(\xi z)^2\\
3C &= \ 3(\xi\eta)^2 + 3(\xi\eta)(z\eta) + (1 - m^3)(z\eta)^2\\
3A' &= -3\varepsilon m(\xi'\eta')^2 + 3\varepsilon^2 m^2(\xi'\eta')(\xi' z) + (1 - m^3)(\xi' z)^2\\
3C' &= \ 3(\xi'\eta')^2 - 3(\xi'\eta')(z\eta') + (1 - m^3)(z\eta')^2
\end{aligned}$$

dalle quali:

$$\left.\begin{aligned} A-A' &= -m[(\xi\eta)^2-\varepsilon(\xi'\eta')^2]-m\,[(\xi\eta)(\xi z)+\varepsilon^2(\xi'\eta')(\xi' z)]+\frac{1-m^3}{3}[(\xi z)^2-(\xi' z)^2] \\ C-\varepsilon C' &= [(\xi\eta)^2-\varepsilon(\xi'\eta')^2]+[(\xi\eta)(z\eta)+\varepsilon(\xi'\eta')(z\eta')]+\frac{1-m^3}{3}[(z\eta)^2-\varepsilon(z\eta')^2]. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Ora essendo:

$$(\xi z)^2 - (\xi' z)^2 = [(\xi z)+(\xi' z)](\xi-\xi',\, z)=0$$

$$(z\eta)^2-\varepsilon(z\eta')^2=[(z\eta)+\varepsilon^2(z\eta')](z,\, \eta-\varepsilon^2\eta')=0$$

si deduce dalla (35) la:

$$A-A'-m(C-\varepsilon C')=$$

$$=-2m[(\xi\eta)^2-\varepsilon(\xi'\eta')\,]+m(\xi\eta)(z,\, m\xi-\eta)+m\varepsilon(\xi'\eta')(z,\, \varepsilon m\xi'-\eta').$$

Pongasi ora in quest'ultima $\xi'-\xi$ in luogo di z e si osservi che:

$$\varepsilon m\xi'-\eta'=\varepsilon(m\xi-\eta),$$

la equazione stessa prenderà la forma:

$$A-A'-m(C-\varepsilon C')=$$

$$=-2m[(\xi\eta)^2-\varepsilon(\xi'\eta')\,]-\varepsilon^2 m(\xi\eta)(\xi'\eta')+m(\xi\eta)^2+\varepsilon^2 m(\xi\eta)(\xi'\eta')-\varepsilon^2 m(\xi'\eta')^2=$$

$$=-m[(\xi\eta)^2-\varepsilon(\xi'\eta')\,]$$

come doveva dimostrarsi.

La equazione biquadratica (30) appare quindi come fondamentale nella risoluzione della equazione del nono grado. Siccome ciascuna radice di quest'ultima appartiene a quattro sistemi conjugati, così essa deve dare $\frac{9\cdot 4}{3}=12$ sistemi aventi la proprietà che a tre a tre devono corrispondere ad una radice della equazione biquadratica. E che ciò sia dimostrasi ancora più chiaramente formando la equazione del dodicesimo grado dalla quale dipendono i dodici sistemi conjugati, in quanto che essa per mezzo della equazione biquadratica (30) si spezza in quattro equazioni del terzo grado. Ciò che vedremo nel susseguente paragrafo.

§ 7.

Ricerca della equazione del dodicesimo grado, dalla quale dipendono i dodici sistemi conjugati delle radici della equazione del nono grado.

La relazione (20) § 5.°

$$\eta' - \varepsilon\eta = \varepsilon m(\xi' - \xi)$$

che si è dimostrato sussistere fra due soluzioni ξ, η e ξ', η' di un sistema conjugato, si può soddisfare identicamente quando si introduca una funzione lineare t per mezzo della equazione:

$$\eta = m(\xi + t). \tag{36}$$

La equazione superiore conduce quindi alla:

$$\eta' = \varepsilon m(\xi' + t) \tag{37}$$

e le equazioni (32) danno per la terza soluzione appartenente al sistema delle conjugate:

$$\eta'' = \varepsilon_1 m(\xi'' + t). \tag{38}$$

Queste tre espressioni di η condurranno quindi alle tre identità:

$$\begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi + t)^3 \\ 2v &= 3u\xi' - \xi'^3 + m^3(\xi' + t)^3 \\ 2v &= 3u\xi'' - \xi''^3 + m^3(\xi'' + t)^3. \end{aligned}$$

Le tre soluzioni conjugate ξ, ξ', ξ'' sono quindi, allorquando si suppongano determinate le m^3, t, le radici della equazione cubica:

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi + t)^3 \tag{39}$$

e la determinazione delle t ed m^3 risulta dalla condizione che questa equazione in ξ sia risolvibile per modo che le irrazionalità dipendenti da quella soluzione affettino soltanto i coefficienti delle x.

Pongasi ora, per risolvere la equazione cubica:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{m^3 t + \mu + \nu}{1 - m^3} & \eta &= m\frac{t + \mu + \nu}{1 - m^3} \\ \xi' &= \frac{m^3 t + \varkappa\mu + \varkappa^2\nu}{1 - m^3} & \eta' &= \varepsilon m\frac{t + \varkappa\mu + \varkappa^2\nu}{1 - m^3} \\ \xi'' &= \frac{m^3 t + \varkappa^2\mu + \varkappa\nu}{1 - m^3} & \eta'' &= \varepsilon^2 m\frac{t + \varkappa^2\mu + \varkappa\nu}{1 - m^3} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

ove $\varkappa$ è una radice cubica dell'unità; si otterranno per la determinazione delle funzioni lineari μ, ν, t e della costante m^3 le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\nu = m^3 t^2 + u(1-m^3)\\ &\mu^3+\nu^3 = m^3(1+m^3)t^3 + 3m^3(1-m^5)tu - 2(1-m^3)^2 v\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

le quali devono essere soddisfatte identicamente. Eguagliando infatti i coefficienti delle $\varkappa$ nei due membri di ciascuna di queste equazioni si ottengono sette equazioni nelle quali le incognite sono le sette quantità μ_1, μ_2; ν_1, ν_2; t_1, t_2; m^3. Vogliamo ora mostrare che la soluzione di questo problema dipende da una equazione del dodicesimo grado.

Allo scopo di dedurre dalle equazioni (41) altre equazioni le quali non contengano le espressioni lineari μ, ν, osserviamo dapprima che le due forme di secondo e di terzo grado:

$$\mu\nu = u' \qquad \mu^3+\nu^3 = v'$$

hanno la proprietà (ciò che risulta manifesto se si considerano le μ, ν come variabili) che la forma p che risulta da esse (§ 3.°) s'annulla identicamente. Inoltre la forma τ corrispondente a v' è eguale a $2\mu\nu$ moltiplicato pel quadrato del determinante di μ e di ν; e d'altra parte è anche:

$$A_{u'u'} = -\tfrac{1}{2}(u\nu)^2.$$

Devonsi ora formare le due identità:

$$(p)_{u'v'} = 0; \qquad (\tau)_{v'} = -4\mu\nu A_{u'u'} \quad (42)$$

quando per u', v' si pongano i secondi membri delle equazioni (41).

La forma p corrispondente alle due forme:

$$u_x'^2 = m^3 t^2 + (1-m^3)u$$
$$v_x'^3 = m^3(1+m^3)t^3 + 3m^3(1-m^3)tu - 2(1-m^3)^2 v$$

si trova facilmente quando dalla $v_x'^3$ deducasi la espressione:

$$v_x' v_y'^2 = m^3(1+m^3)t_x t_y^2 + m^3(1-m^3)(t_x a_y^2 + 2t_y a_x a_y) - 2(1-m^3)^2 \alpha_x \alpha_y^2 \quad (43)$$

e nella medesima sostituiscansi alle y_1^2, $-y_1 y_2$, y_2^2 i coefficienti delle u' in ordine inverso, e siccome ciò si eseguisce per le due parti della espressione soltanto sopra u', così ottiensi tosto:

$$(p)_{u',v'} = m^6(1-m^3)t_x(at) - 2(1-m^3)^2 m^3 \alpha_x(\alpha t)^2 + m^3(1-m^6)t_x(at)^2 +$$
$$+ m^3(1-m^3)^2[t_x A_{uu} + 2(tb)a_x(ab)] - 2(1-m^3)^3 \alpha_x(\alpha a)^2$$

nella quale ancora un termine rimane ad ulteriormente trasformarsi, cioè

$$(tb)a_x(ab)=\tfrac{1}{2}(ab)[a_x(tb)-b_x(ta)]=\tfrac{1}{2}A_{uu}t_x$$

cosicchè la equazione $(p)_{u',v'}=0$ togliendo il fattore comune $1-m^3$ diventa:

$$0=m^3(1+2m^3)t_x(at)^2-2m^3(1-m^3)\alpha_x(\alpha t)^2+2m^3(1-m^3)A_{uu}t_x-2(1-m^3)^2p_x.$$

Questa equazione deve essere soddisfatta per tutti i valori delle x. Pongasi dapprima $x_1=t_2$, $x_2=-t_1$, essa può scriversi tralasciando il fattore $-2(1-m^3)$:

$$m^3(\alpha t)^3+(1-m^3)(pt)=0. \tag{44}$$

Pongasi in secondo luogo $x_1=p_2$, $x_2=-p_1$, essa diventa dividendola per m^3:

$$0=(1+2m^3)(tp)(at)^2-2(1-m^3)(\alpha p)(\alpha t)^2+2(1-m^3)A_{uu}(tp).$$

Ma:

$$(\alpha p)(\alpha t)^2=(\alpha b)(a\beta)^2(\alpha t)^2=\tfrac{1}{2}(\alpha\beta)[(\alpha t)(a\beta)+(\beta t)(a\alpha)][(\alpha t)(a\beta)-(\beta t)(a\alpha)]=$$
$$=(\alpha b)\ (a t)(\alpha t)(a\beta)=(a t)(\tau t)(a\tau)=(\rho t)^2\ \ (\S\ 3.^{\circ})$$

quindi si può dare all'equazione superiore la forma:

$$(1+2m^3)(pt)(at)^2+2(1-m^3)(\rho t)^2+2(1-m^3)A_{uu}(pt)=0. \tag{45}$$

Per la determinazione delle tre incognite t_1, t_2, m oltre le (44) (45) è necessaria ancora una equazione, la quale deducasi dalla seconda delle (42) nella ipotesi che $x_1=t_2$, $x_2=-t_1$ e quindi $t=0$. In questa ipotesi la (43) si trasforma nella:

$$(v't)v_y'^2=2m^3(1-m^3)t_y a_y(at)-2(1-m^3)^2(\alpha t)\alpha^2_y$$

e si ottiene $(\tau)_{v'}$ quando pongasi in questa espressione per y_1^2, $-y_1y_2$, y_2^2 i coefficienti della espressione stessa in ordine inverso; così si ha:

$$(\tau)_{v'}=-2m^6(1-m^3)^2(at)^2(bt)^2+8m^3(1-m^3)^3(\alpha t)^2(a\alpha)(at)+4(1-m)^4(\alpha t)(\beta t)(\alpha\beta)^2$$
$$=-2m^6(1-m^3)^2(at)^2(bt)^2+8m^3(1-m^3)^3(\vartheta t)^3+4(1-m^3)^4(\tau t)^2.$$

Analogamente si ha:

$$A_{u'u'}=(1-m^3)^2A_{uu}+2m^3(1-m^3)(at)^2.$$

La seconda equazione (42) divisa per $2(1-m^3)^2$ si trasforma quindi nella:

$$\left.\begin{aligned}0=-m^6(at)^2(bt)^2+4m^3(1-m^3)(\vartheta t)^3+2(1-m^3)^2(\tau t)^2+\\+2(at)^2[(1-m^3)A_{uu}+2m^3(at)^2].\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Nelle formole seguenti supporremo che nelle varie forme le quali entrano nelle medesime siasi posto $x_1 = t_2$, $x_2 = -t_1$. In questa ipotesi le equazioni (44) (45) (46) assumono la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= m^3 v + (1 - m^3) p \\ 0 &= (1 + 2m^3) pu + 2(1 - m^3)\rho + 2(1 - m^3) A_{uu} p \\ 0 &= m^3(4 - m^3) u^2 + 4m^3(1 - m^3)\vartheta + 2(1 - m^3)^2 \tau + 2(1 - m^3) A_{uu} u. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Queste equazioni contengono le incognite t_1, t_2, m. Ponendo nelle medesime in luogo di t_1, t_2 i rapporti $\frac{t_1}{\lambda}$, $\frac{t_2}{\lambda}$ si hanno le:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= m^3 v + (1 - m^3) p \lambda^2 \\ 0 &= (1 + 2m^3) pu + 2(1 - m^3)\rho\lambda + 2(1 - m^3) A_{uu} p \lambda^2 \\ 0 &= m^3(4 - m^3) u^2 + 4m^3(1 - m^3)\vartheta\lambda + [2(1 - m^3)^2 \tau + 2(1 - m^3) A_{uu} u]\lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

dalle quali eliminando le λ, m si ottiene una equazione omogenea nelle t_1, t_2 che è la richiesta equazione del dodicesimo grado. Dalla prima delle superiori equazioni si deduce:

$$m^3 = \frac{p\lambda^2}{p\lambda^2 - v} \quad (49)$$

il qual valore posto nelle altre due dà:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (v - 3p\lambda^2) pu + 2v\rho\lambda + 2vA_{uu} p\lambda^2 \\ 0 &= -(4v - 3p\lambda^2) pu^2 - 4pv\vartheta\lambda + 2v[v\tau + (v - p\lambda^2) A_{uu} u] \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

delle quali l'ultima fu divisa per λ^2. Aggiungendo alla seconda delle (50) la prima moltiplicata per u si ottiene una equazione divisibile per v e cioè:

$$0 = -3pu^2 - (4p\vartheta - 2u\rho)\lambda + 2v(\tau + A_{uu} u)$$

dalla quale:

$$\lambda = \frac{-3pu^2 + 2v(\tau + A_{uu} u)}{4p\vartheta - 2u\rho} \quad (51)$$

e sostituendo questo valore di λ nella prima delle (50) si ottiene la:

$$p(3up - 2A_{uu} v)[3pu^2 - 2A_{uu} uv - 2\tau v]^2 - upv(4\vartheta p - 2u\rho)^2 +$$
$$+ 2\rho v(4\vartheta p - 2u\rho)[3pu^2 - 2A_{uu} uv - 2\tau v] = 0.$$

Questa equazione è del quattordicesimo grado, essa però riducesi al dodicesimo giacchè, come dimostrasi facilmente, è divisibile per u. Infatti i termini della medesima che non contengono u sono:

$$-16pv^2\tau(\vartheta\rho+\tfrac{1}{2}A_{uu}\tau v)$$

è questa espressione per valore di $\vartheta\rho$ dato dalla tabella I.ª è eguale alla:

$$-8pv^2\tau u(A_{u\tau}v+p\tau).$$

Sostituendo infine per ρ^2, $\vartheta\rho$, ϑ^2 le formole date della tabella I.ª

$$\vartheta^2=-\tfrac{1}{2}(A_{uu}v^2-2vup+\tau u^2)$$
$$\vartheta\rho=\tfrac{1}{2}(A_{u\tau}uv-A_{uu}v\tau+p\tau u)$$
$$\rho^2=vs-\tfrac{1}{2}\tau p^2$$

e nel risultato ponendo in luogo di us, τs le formole date dalla tabella III.ª ossia:

$$us=vA_{u,pp}+p(A_{uu}\tau-A_{u\tau}u)-p^3$$
$$\tau s=vA_{\tau,pp}+p(A_{u\tau}\tau-A_{\tau\tau}u)$$

si giunge, dividendo per u, alla richiesta equazione:

$$0=27p^4u^4-54A_{uu}vp^3u^3+36(A^2_{uu}+A_{u\tau})v^2p^2u^2-$$
$$-8(A^3_{uu}+2A_{uu}A_{u\tau}+2A_{u,pp}+A_{\tau\tau})v^3pu+8(A_{uu}A_{u,pp}+A_{\tau,pp})v^4.$$

Questa equazione del dodicesimo grado non contiene più la forma τ; essa è infatti una equazione biquadratica in $\frac{pu}{v}$ e la sua soluzione dipende dalla soluzione di una equazione biquadratica e da quella di più equazioni cubiche. La equazione biquadratica non è altro in conclusione che la equazione (30) giacchè mediante la sostituzione:

$$3pu=(\sigma+\tfrac{3}{2}A_{uv})v \tag{52}$$

si passa dalla equazione del dodicesimo grado alla biquadratica (30), ossia:

$$\left.\begin{aligned}&0=\sigma^4+6(2A_{u\tau}-\tfrac{1}{4}A^2_{uv})\sigma^2+\\&+4(5A_{uu}A_{u\tau}-2A_{\tau\tau}-4A_{u,pp}+\tfrac{1}{4}A^3_{uv})\sigma-3(2A_{u\tau}-\tfrac{1}{4}A^2_{uv})^2\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

ed il problema è così ridotto alla risoluzione di questa equazione del quarto grado ed a quella delle equazioni cubiche (52). Le ultime danno i tre sistemi conjugati, i quali corrispondono ad una radice della equazione (53) e devono contenere, ciascuno solo una volta, tutte le radici della equazione del nono grado (*).

(*) Vedi Nota 4ª.

§ 8.

Altra derivazione delle equazioni ausiliari cubiche. La risoluzione della equazione del nono grado.

Gli sviluppi di calcolo necessari allo scopo che ci eravamo proposti nel paragrafo antecedente, ponno essere evitati se procedesi in modo diretto alla ricerca della equazione cubica (52). Si è trovato sopra (26)

$$m = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A - \sigma}{(\xi\eta)^2 - C}$$

ed inoltre si è mostrato al § 6.° che quando le ξ, η sieno sostituite per ξ', η' o per ξ'', η'', m si muta in $m\varepsilon$ ed in $m\varepsilon_1$. Si hanno così le:

$$m\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A' - \sigma}{(\xi'\eta')^2 - C'}$$

$$m\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A'' - \sigma}{(\xi''\eta'')^2 - C''}$$

nelle quali A', C'; A'', C'' indicano i valori delle A, C allorquando si pongano nelle medesime ξ', η'; ξ'', η'' in luogo di ξ, η.

Pongasi ora in queste tre equazioni in luogo delle ξ, η; ξ', η'; ξ'', η'' le espressioni (40) delle soluzioni conjugate, si otterrà moltiplicando pei denominatori la seguente:

$$m^3[(t\mu) + (t\nu)]^2 - m^3[(at) + (a\mu) + (a\nu)]^2 =$$
$$= (1 - m^3)^2[\tfrac{1}{2}A_{uu} - \sigma] - [m^3(at) + (a\mu) + (a\nu)]^2$$

ed altre due equazioni le quali deduconsi da questa sostituendo nella medesima in luogo di μ, ν le $\varkappa\mu$, $\varkappa^2\nu$ oppure $\varkappa^2\mu$, $\varkappa\nu$; essendo $\varkappa$ una radice immaginaria cubica dell'unità. La equazione superiore si spezza perciò nelle tre seguenti:

$$m^3(t\mu)^2 - m^3[(a\mu)^2 + 2(at)(a\nu)] = -(a\mu)^2 - 2m^3(at)(a\nu)$$
$$m^3(t\nu)^2 - m^3[(a\nu)^2 + 2(at)(a\mu)] = -(a\nu)^2 - 2m^3(at)(a\mu)$$
$$2m^3(t\mu)(t\nu) - m^3[(at)^2 + 2(a\mu)(a\nu)] = (1-m^3)^2[\tfrac{1}{2}A_{uu} - \sigma] - m^6(at)^2 - 2(a\mu)(a\nu).$$

Ma dalle equazioni (41) si hanno le:

$$(t\mu)(t\nu) = (1 - m^3)(at)^2, \qquad (a\mu)(a\nu) = m^3(at)^2 + (1 - m^3)A_{uu}$$

le quali sostituite nella terza delle superiori, e ponendo nella medesima $x_1 = t_2$, $x_2 = -t_1$ quindi $(at)^2 = u$, danno, dividendo pel fattore $1 - m^3$, la seguente:

$$0 = (1 - m^3)[\tfrac{3}{2} A_{uu} + \sigma] + 3m^3 u.$$

Aggiungendo a questa equazione la prima delle (47) cioè:

$$0 = (1 - m^3)p + m^3 v$$

od eliminando da esse la m si ottiene:

$$3up = v(\sigma + \tfrac{3}{2} A_{uv})$$

ossia la equazione cubica (52) (*).

La risoluzione della equazione del nono grado presentasi per i risultati precedenti nella forma seguente. Si cerchino due radici σ, σ' della equazione biquadratica (53) e si risolvano le due corrispondenti equazioni cubiche (52) le quali daranno dapprima i valori dei rapporti delle corrispondenti t, poi anche i valori assoluti per mezzo delle (51) (49), come pure i valori della m^3.

Sieno ora t, t' due funzioni lineari ottenute da due equazioni cubiche differenti. Si ha, dalla (39), che per una certa soluzione ξ del problema sussistono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi + t)^3 \\ 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m'^3(\xi + t')^3. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Da queste, immaginando i valori delle m, m' determinati dai dati valori di m^3, m'^3, si deduce la:

$$m(\xi + t) = \varepsilon m'(\xi + t')$$

dalla quale:

$$\xi = -\frac{mt - \varepsilon m't'}{m - \varepsilon m'}.$$

Rimane ora soltanto a determinarsi la ε. Ponendo in una delle equazioni (54) il valore superiore di ξ si ottiene:

$$2v = -3u\frac{mt - \varepsilon m't'}{m - \varepsilon m'} + \frac{m^3 m'^3}{(m - \varepsilon m')^3}(t' - t)^3 + \frac{(mt - \varepsilon m't')^3}{(m - \varepsilon m')^3}$$

la quale equazione non potendo essere soddisfatta che da un solo valore di ε, conduce perciò alla sua determinazione.

(*) Vedi Nota 5ª.

§ 9.

Aggruppamento delle soluzioni di tripli diversi rispetto alle soluzioni di un triplo.

Considerando nel loro assieme tutte le soluzioni della prima classe vedesi che esse costituiscono nove tripli i quali dipendono da una equazione hessiana del nono grado.

Ma fra le soluzioni dei diversi tripli sussistono delle relazioni le quali sono espresse per mezzo della equazione (36). Sieno ξ ed:

$$\eta = m(\xi + t) \tag{1}$$

due funzioni lineari, le quali insieme costituiscono una soluzione della equazione:

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3. \tag{2}$$

e determinano una soluzione della prima classe. Appartengono allo stesso triplo le soluzioni, le quali si esprimono colla ξ e rispettivamente colle espressioni:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \varepsilon\, m(\xi + t) \\ \eta'' &= \varepsilon^2 m(\xi + t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ad un secondo triplo, caratterizzato colla funzione lineare ξ_1 corrisponderanno così le espressioni:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= m(\xi_1 + t) \\ \eta'_1 &= \varepsilon\, m(\xi_1 + t) \\ \eta''_1 &= \varepsilon^2 m(\xi_1 + t) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ed ai due tripli considerati è conjugato un terzo, il quale si esprime colla ξ_2 in modo analogo:

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 &= m(\xi_2 + t) \\ \eta'_2 &= \varepsilon\, m(\xi_2 + t) \\ \eta''_2 &= \varepsilon^2 m(\xi_2 + t). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sostituendo in queste equazioni in luogo delle m, t le m', t'; m'', t''; m''', t'''; essendo m, m', m'', m''' le quattro radici della equazione (25) si ottengono i tre altri sistemi di tripli conjugati ai quali appartiene il primo.

Per queste formole alle soluzioni di un triplo sono coordinate ad una ad una quelle di ciascuno degli altri otto, inquantochè la potenza di ε che entra nelle medesime rimane la stessa per soluzioni corrispondenti. Si presenta ora la domanda, se questa specie di coordinamento rimane inalterato, quando in luogo della soluzione ξ, η si assuma dapprincipio una soluzione di un altro triplo, per esempio ξ_1, η_1.

Dapprima scorgesi facilmente che pei tripli conjugati nei quali entrano ξ, η; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2, il coordinamento non può alterarsi, e quindi tre tripli conjugati possiedono sempre uno stabile coordinamento delle soluzioni in essi contenute.

Infatti le equazioni superiori continuano a sussistere da qualunque delle tre soluzioni si parta. Ma è facile dimostrare che per uno degli altri sei tripli il coordinamento non può persistere. Sieno ξ, η le soluzioni dalle quali dapprima siamo partiti; ξ_1, η_1 quello da cui vogliamo ora incominciare, le quali colle ξ_0, η_0 costituiscano tre soluzioni non appartenenti ad un triplo conjugato; si avrà:

$$\eta_0 = m'(\xi_0 + t'), \qquad \eta_1 = m'(\xi_1 + t').$$

Se ora la specie di coordinamento deve rimanere inalterata anche quando si parta da ξ_1, η_1, dovrà essere altresì:

$$\eta_0 = m''(\xi_0 + t''), \qquad \eta_1 = m''(\xi_1 + t'').$$

Si ottengono così per l'eliminazione delle t le tre equazioni:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta &= m\ (\xi_1 - \xi) \\ \eta - \eta_0 &= m'\ (\xi - \xi_0) \\ \eta_0 - \eta_1 &= m''(\xi_0 - \xi_1) \end{aligned}$$

ed anche la:

$$0 = m(\xi_1 - \xi) + m'(\xi - \xi_0) + m''(\xi_0 - \xi_1)$$

e siccome le m sono in generale fra loro differenti, ne segue che le ξ avranno la forma:

$$\begin{aligned} \xi &= A + m''B \\ \xi_1 &= A + m'\ B \\ \xi_0 &= A + m\ B \end{aligned}$$

essendo A, B due funzioni lineari. Per queste si hanno le:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta &= m\ (m' - m'')B \\ \eta - \eta_0 &= m'\ (m'' - m\ )B \\ \eta_0 - \eta_1 &= m''(m - m')B \end{aligned}$$

dalle quali:

$$\begin{aligned} \eta &= C + m'mB \\ \eta_1 &= C + mm''B \\ \eta_0 &= C + m''m'B \end{aligned}$$

indicando pure con C una funzione lineare arbitraria.

D'altra parte siccome le ξ, η; ξ_1, η_1; ξ_0, η_0 soddisfano le equazioni:

$$\begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + \eta^3 \\ 2v &= 3u\xi_1 - {}^3_1 + \eta_1^3 \\ 2v &= 3u\xi_0 - {}^3_0 + \eta_0^3 \end{aligned}$$

ne segue essere identicamente:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta^3 - \xi^3 \\ 1 & \xi_1 & \eta_1^3 - \xi_1^3 \\ 1 & \xi_0 & \eta_0^3 - \xi_0^3 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo in questa i valori delle ξ, η, si ha dapprima omettendo il fattore B:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & m'' & \eta^3 - \xi^3 \\ 1 & m' & \eta_1^3 - \xi_1^3 \\ 1 & m & \eta_0^3 - \xi_0^3 \end{vmatrix}$$

poi eliminando per mezzo degli elementi della prima e della seconda colonna alcuni fra i termini degli elementi corrispondenti dell'ultima, si vede tosto che la equazione è nuovamente divisibile per B, e che il solo termine il quale non ammette d'essere diviso per B una terza volta è il seguente:

$$\begin{vmatrix} 1 & m'' & 3mm'C^2 \\ 1 & m' & 3m''mC^2 \\ 1 & m & 3m'm''C^2 \end{vmatrix} = 3C^2 \begin{vmatrix} 1 & m'' & m''^2 \\ 1 & m' & m'^2 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}$$

Ora siccome il prodotto della differenza delle m non svanisce, dovrebbe essere C divisibile per B e quindi le η non dovrebbero differire l'una dall'altra che per fattori costanti, il che in generale non può essere.

Se dunque ξ_1, η_1; ξ_0, η_0 sieno coordinate alla soluzione ξ, η ma appartenenti a tripli i quali non sieno conjugati col triplo che comprende le ξ, η, si avranno in questo caso non solo le:

$$\begin{aligned} \eta &= m(\xi + t) \qquad & \eta_1 &= m(\xi_1 + t) \\ \eta &= m'(\xi + t') \qquad & \eta_0 &= m'(\xi_0 + t') \end{aligned}$$

ma anche:

$$\eta_1 = m''(\xi_1 + t'')$$
$$\eta_0 = em''(\xi_0 + t'')$$

essendo e una radice cubica immaginaria dell'unità. Le soluzioni del triplo ξ_0, η_0 non sono dunque così coordinate a quelle del triplo ξ_1, η_1 come si corrispondono tra loro in causa del loro simultaneo coordinamento al triplo ξ, η; ma nelle soluzioni di uno dei tripli bisogna fare una sostituzione ciclica per ottenere la nuova correlazione.

Consideriamo ora il triplo conjugato a ξ_1, η_1; ξ_0, η_0. Questo deve avere con ξ, η un modo di coordinamento che non coincide nè con quello del triplo ξ_1, η_1, nè con quello del triplo ξ_0, η_0. Indicando dunque con ξ_3, η_3 la soluzione di questo triplo per la quale hanno luogo le equazioni:

$$\eta = m'''(\xi + t'''), \qquad \eta_3 = m'''(\xi_3 + t''')$$

il modo di coordinamento relativamente a ξ_1, η_1 deve esprimersi colle equazioni:

$$\eta_1 = m''(\xi_1 + t'') \qquad \eta_3 = e^2 m''(\xi_3 + t'').$$

Partendo dunque da altro triplo ξ_1, η_1 anzichè dal triplo ξ, η e considerando due tripli conjugati con quello, fra i quali non si trovi ξ, η, si ottiene il modo del loro coordinamento al triplo ξ_1, η_1 applicando le due diverse sostituzioni cicliche ai loro coordinamenti rispetto al triplo ξ, η.

Ciò deve naturalmente aver luogo anche reciprocamente, ritornando da ξ_1, η_1 come triplo da partenza a ξ, η. Nel nuovo modo di coordinamento due tripli conjugati con ξ, η devono dunque comportarsi in modo da doversi applicare al loro modo di coordinamento rispetto a ξ_1, η_1 due diverse sostituzioni cicliche per ritornar al primitivo coordinamento.

Per tale mezzo tutto riesce ora facilmente determinato. Indichiamo i nove tripli nei numeri 1 sino a 9; il coordinamento rispetto al triplo 1 con indici a, b, c di guisa che il triplo i contenga le soluzioni i_a, i_b, i_c coordinate alle soluzioni 1_a, 1_b, 1_c. Le ventisette soluzioni di prima classe ordinate rispetto al triplo 1 il quale è sottolineato, si possono allora disporre come segue:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underline{1_a} & \underline{1_b} & \underline{1_c} & \quad & 4_a & 4_b & 4_c & \quad & 7_a & 7_b & 7_c \\
2_a & 2_b & 2_c & & 5_a & 5_b & 5_c & & 8_a & 8_b & 8_c \\
3_a & 3_b & 3_c & & 6_a & 6_b & 6_c & & 9_a & 9_b & 9_c.
\end{array}$$

Inoltre i dodici sistemi di tripli conjugati, distinti in quattro gruppi di tre ciascuno corrispondentemente alle radici della equazione biquadratica, sieno i seguenti

1	2	3	1	4	7	1	5	9	1	6	8
4	5	6	2	5	8	2	6	7	2	4	9
7	8	9	3	6	9	3	4	8	3	5	7.

Volendo ora cercare il coordinamento dei nove tripli rispetto ad uno qualunque degli altri, per esempio 2, si pigliano dapprima due tripli conjugati con 2, per esempio 5, e 8; nell'uno, (sia il 5) a, b, c si mutano in b, c, a; nell'altro, 8, in c, a, b. I nuovi coordinamenti degli altri tripli si trovano cercando i sistemi conjugati che contengono 5 ovvero 8 od 1; il che conduce a 9 e 6, e poscia ancora quelli che contengono 2 e 9 ovvero 6, il che conduce infine a 4 e 7. Applicando sempre le due proposizioni precedenti si ottiene il seguente nuovo coordinamento dei tripli, in cui il triplo 2 serve di punto di partenza:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & \quad & 4_b & 4_c & 4_a & \quad & 7_c & 7_a & 7_b \\
\underline{2_a} & \underline{2_b} & \underline{2_c} & & 5_b & 5_c & 5_a & & 8_c & 8_a & 8_b \\
3_a & 3_b & 3_c & & 6_b & 6_c & 6_a & & 9_c & 9_a & 9_b.
\end{array}$$

Volendo invece trovare il nuovo coordinamento dei tripli nel quale è posto a base il triplo 3, bisogna permutare di nuovo ciclicamente nei posti corrispondenti a, b, c; però in modo che mentre i tre primi tripli restano invariati il coordinamento degli altri non coincida nè con quello relativo ad 1, nè con quello relativo a 2. Si ottiene dunque il seguente coordinamento dei tripli:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & \quad & 4_c & 4_a & 4_b & \quad & 7_b & 7_c & 7_a \\
2_a & 2_b & 2_c & & 5_c & 5_a & 5_b & & 8_b & 8_c & 8_a \\
\underline{3_a} & \underline{3_b} & \underline{3_c} & & 6_c & 6_a & 6_b & & 9_b & 9_c & 9_a.
\end{array}$$

Il coordinamento rispetto ad ognuno dei sei altri tripli è, dopo l'esposto, facile a trovarsi, non avendosi che da applicare sempre le proposizioni precedenti e profittare dei tre schema superiori; ed infatti si ottengono senz'altro i seguenti nuovi schemi:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & \quad & \underline{4_a} & \underline{4_b} & \underline{4_c} & \quad & 7_a & 7_b & 7_c \\
2_c & 2_a & 2_b & & 5_c & 5_a & 5_b & & 8_c & 8_a & 8_b \\
3_b & 3_c & 3_a & & 6_b & 6_c & 6_a & & 9_b & 9_c & 9_a
\end{array}$$

1_a	1_b	1_c	4_b	4_c	4_a	7_c	7_a	7_b
2_c	2_a	2_b	$\underline{5_a}$	$\underline{5_b}$	$\underline{5_c}$	8_b	8_c	8_a
3_b	3_c	3_a	6_c	6_a	6_b	9_a	9_b	9_c

1_a	1_b	1_c	4_c	4_a	4_b	7_b	7_c	7_a
2_c	2_a	2_b	5_b	5_c	5_a	8_a	8_b	8_c
3_b	3_c	3_a	$\underline{6_a}$	$\underline{6_b}$	$\underline{6_c}$	9_c	9_a	9_b

1_a	1_b	1_c	4_a	4_b	4_c	$\underline{7_a}$	$\underline{7_b}$	$\underline{7_c}$
2_b	2_c	2_a	5_b	5_c	5_a	8_b	8_c	8_a
3_c	3_a	3_b	6_c	6_a	6_b	9_c	9_a	9_b

1_a	1_b	1_c	4_b	4_c	4_a	7_c	7_a	7_b
2_b	2_c	2_a	5_c	5_a	5_b	$\underline{8_a}$	$\underline{8_b}$	$\underline{8_c}$
3_c	3_a	3_b	6_a	6_b	6_c	9_b	9_c	9_a

1_a	1_b	1_c	4_c	4_a	4_b	7_b	7_c	7_a
2_b	2_c	2_a	5_a	5_b	5_c	8_c	8_a	8_b
3_c	3_a	3_b	6_b	6_c	6_a	$\underline{9_a}$	$\underline{9_b}$	$\underline{9_c}$.

AVVERTENZA.

Col § 9.° compiendosi quella parte della Memoria di Clebsch che ha più specialmente riguardo alle soluzioni della prima classe, che comprende, cioè, la soluzione del problema ausiliare del § 2.° indicato alla pag. 95, crediamo opportuno di interrompere la pubblicazione della Memoria per far seguire questa parte dalle Note e dalle Aggiunte relative alla medesima.

NOTA 1ª.

Raccogliamo in questa Nota alcune fra le più importanti formole relative al sistema di forme simultanee di una quadratica u e di una cubica v.

Sieno:

$$u=(a_0, a_1, a_2)(x_1, x_2)^2, \qquad v=(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(x_1, x_2)^3.$$

Per la prima si ha l'invariante $A=\frac{1}{2}(uu)^2$; per la seconda il covariante quadratico (hessiano):

$$\tau=(vv)^2=(c_0, c_1, c_2)(x_1, x_2)^2$$

il covariante cubico $\omega=(v\tau)$, l'invariante $C=\frac{1}{2}(\tau\tau)^2$. Si hanno così sei forme comprese le due date. Come forme simultanee si presentano dapprima le combinazioni della forma u colla forma v e coi suoi covarianti, cioè le seguenti:

$$\vartheta=(uv), \quad p=(uv)^2; \qquad \rho=(u\tau), \quad B=\tfrac{1}{2}(u\tau)^2; \qquad (u\omega), \quad r=(u\omega)^2$$

dalle quali escludiamo la $(u\omega)$ perchè funzione razionale, intera delle altre, potendosi facilmente dimostrare essere:

$$(u\omega)=2Bv-p\tau.$$

Combinando il covariante p colle forme u, v si hanno le ulteriori quattro forme simultanee:

$$q=(up), \quad E=\tfrac{1}{2}(up)^2, \quad (vp)=(u\tau)=\rho, \quad s=(vp)^2, \quad K=\tfrac{1}{2}(vp)^3.$$

Queste colle undici superiori formano l'intero sistema di forme simultanee di una quadratica e di una cubica, composto come segue:

5 invarianti A, B, C, E, K dei quali l'ultimo gobbo;

4 forme lineari p, q, r, s delle quali la seconda e la terza gobbe;

3 forme quadratiche u, τ, ρ l'ultima delle quali gobba;

3 forme cubiche v, ω, ϑ le ultime due gobbe.

Rammentiamo dapprima le note relazioni:

$$(\tau p)^2=2(AC-B^2), \qquad (\rho p)^2=2K$$

e ponendo $G = AC - B^2$ la (*):

$$K^2 = -(AG^2 - 2BGE + CE^2).$$

Fra i quattro covarianti lineari devono evidentemente sussistere due relazioni lineari; esse sono:

$$\left.\begin{aligned} Kp + Gq + Er &= 0 \\ (AG - BE)p - Kq + Es &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Assumendo i covarianti lineari p, q come nuove variabili in luogo delle x_1, x_2, si ottengono le seguenti rappresentazioni tipiche per le forme u, v ed i loro covarianti:

$$\left.\begin{aligned} 2Eu &= Ap^2 + q^2 \\ 2E^2\tau &= (2BE - AG)p^2 + 2Kpq + Gq^2 = E[Bp^2 + ps - qr] \\ 2E^2\rho &= -AKp^2 + 2(BE - AG)pq + Kq^2 = E[Apr + Bpq + qs] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dalle quali:

$$2G\tau = Cp^2 + r^2; \qquad 2K\rho = Gp^2 + s^2 \qquad (3)$$

e le:

$$\left.\begin{aligned} 4E^3v &= (2E^2 + A^2G - ABE)p^3 - 3AKp^2q - 3(AG - BE)pq^2 + Kq^3 \\ 4E^3\vartheta &= A^2Kp^3 + (2E^2 + 3A^2G - 3ABE)p^2q - 3AKpq^2 - (AG - BE)q^3 \\ 4E^3\omega &= -(AB + 2E)Kp^3 + 3(B^2E - GE - ABG)p^2q + 3BKpq^2 + (BG - CE)q^3. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La prima di queste dà per le (1):

$$4E^2v = sq^2 + 2Apqr + 2Bpq^2 - Ap^2s + 2Ep^3$$

o ponendo per q^2 e qr i valori dati dalle prime due relazioni (2):

$$2Ev = su + 2p(Bu - A\tau) + p^3 \qquad (5)$$

ossia la prima delle formole III di Clebsch.

Analogamente si ottiene dalle superiori la seconda di queste stesse formole ossia la:

$$2Gv = s\tau + 2p(Cu - B\tau) \qquad (6)$$

e la terza della medesima specie non considerata dall'Autore, ossia:

$$2Kv = s\rho - p^2r. \qquad (7)$$

(*) Vedi Bessel, *Ueber die Invarianten*, etc. *Mathematische Annalen.* Erster Band., pag. 182.

Dalle relazioni (2) si ottengono anche facilmente le:

$$ps = E\tau - Gu, \qquad Gp^2 - s^2 = 2E(Cu - B\tau) - 2G(Bu - A\tau)$$

per le quali moltiplicando la (5) per s, e sostituendo i valori di s^2, ps dati dalle medesime, si ottiene la:

$$sv = -Cu^2 + 2Bu\tau - A\tau^2 + \tfrac{1}{2}p^2\tau. \tag{8}$$

Le espressioni pei quadrati e pei prodotti dei covarianti gobbi si ottengono applicando ai medesimi le formole seguenti. Sieno ϕ, ψ due forme binarie; indicando con ϕ_1, ϕ_{11}, $\phi_{12}\dots$ le rispettive derivate divise pel grado del polinomio, si dimostrano tosto le:

$$\begin{aligned}
2\phi_1\psi_1 &= \phi\psi_{11} + \psi\phi_{11} - (\phi\psi)^2 x_2^2 \\
\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 &= \phi\psi_{12} + \psi\phi_{12} + (\phi\psi)^2 \cdot x_1 x_2 \\
2\phi_2\psi_2 &= \phi\psi_{22} + \psi\phi_{22} - (\phi\psi)^2 x_1^2
\end{aligned}$$

le quali conducono alla formola generale per la moltiplicazione, ossia:

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha\phi)(\beta\psi) + (\alpha\psi)(\beta\phi) = \tfrac{1}{2}[\alpha\phi(\beta\psi)^2 + \alpha\psi(\beta\phi)^2 + \beta\phi(\alpha\psi)^2 + \beta\psi(\alpha\phi)^2 - \\
-2\alpha\beta(\phi\psi)^2 - 2\phi\psi(\alpha\beta)^2]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

essendo α, β due altre forme binarie.

Da queste si deducono due formole particolari. Supponendo dapprima $\beta = \alpha$, si ha:

$$(\alpha\phi)(\alpha\psi) = \tfrac{1}{2}[\alpha\phi(\alpha\psi)^2 + \alpha\psi(\alpha\phi)^2 - \alpha^2(\phi\psi)^2 - \phi\psi(\alpha\alpha)^2] \tag{10}$$

e supponendo inoltre $\psi = \phi$ si ottiene:

$$[(\alpha\phi)]^2 = \tfrac{1}{2}[2\alpha\phi(\alpha\phi)^2 - \alpha^2(\phi\phi)^2 - \phi^2(\alpha\alpha)^2]. \tag{11}$$

A complemento di queste formole dobbiamo aggiungere le:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(\phi\psi) + \phi(\psi\alpha) + \psi(\alpha\phi) = 0 \\
(\alpha\phi)(\beta\psi) - (\alpha\psi)(\beta\phi) = (\alpha\beta)(\phi\psi)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

facilmente dimostrabili.

Applichiamo ora queste formole al caso considerato in questa Nota. Sieno dapprima $\alpha = u$, $\phi = v$, $\psi = \tau$, le relazioni (11) (10) danno:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2 &= \tfrac{1}{2}[2uvp - u^2\tau - 2Av^2] \\
\vartheta\rho &= \tfrac{1}{2}[2Buv + up\tau - 2Av\tau]
\end{aligned}$$

essendo $(v\tau)^2 = 0$. In secondo luogo supponendo $\alpha = v$, $\phi = \tau$, $\psi = u$ le relazioni suindicate danno:

$$\omega^2 = -\tfrac{1}{2}[2Cv^2 + \tau^3]$$

$$\vartheta\omega = \tfrac{1}{2}[2Bv^2 + u\tau^2 - vp\tau],$$

da ultimo ponendo $\alpha = \tau$, $\phi = u$, $\psi = v$ si ottengono le:

$$\rho^2 = 2Bu\tau - A\tau^2 - Cu^2$$

$$\rho\omega = \tfrac{1}{2}[2Bv\tau - p\tau^2 - 2Cuv]$$

la prima delle quali per la equazione (8) dà:

$$\rho^2 = sv - \tfrac{1}{2}p^2\tau.$$

La prima delle relazioni (12) in ciascuna delle tre ipotesi superiori dà la:

$$u\omega - \rho v + \vartheta\tau = 0$$

la quale completa il numero delle relazioni che volevamo trovare fra le forme simultanee di una quadratica e di una cubica (*).

(*) Fra la notazione di Clebsch e quella adottata nella presente Nota e nelle seguenti esiste qualche differenza e cioè:

nella Memoria	A_{uu}	$A_{u\tau}$	$A_{\tau\tau}$	$A_{u,pp}$	$A_{\tau,pp}$	M	ω
nelle Note	$2A$	$2B$	$2C$	$2E$	$2G$	$2K$	$-\omega$.

NOTA 2ª.

Se con $x_1 : x_2 : x_3$ si indicano i rapporti fra le coordinate di una curva piana, la equazione:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3ux_3 + 2v = 0$$

nella quale u, v sono due forme del secondo e del terzo grado in x_1, x_2, rappresenta una cubica generale.

La retta:

$$x_3 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = \xi$$

sega in generale la cubica in tre punti; se questi costituiscono un punto di flesso della curva, dovrà essere:

$$F(x_1, x_2, \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) = (\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)^3 = \eta^3$$

dovrà cioè sussistere identicamente la equazione:

$$\xi^3 - 3u\xi + 2v = \eta^3$$

e quindi il problema del § 2, pag. 95 della Memoria, equivale a quello che ha per iscopo la ricerca dei punti di flesso di una curva del terzo ordine.

Indichiamo con $f(x_1, x_2)$ una forma binaria dell'ordine n, con ϕ una forma binaria dell'ordine m, e sia:

$$f = \phi^r$$

per cui $n = mr$. Ponendo $h = \frac{1}{2}(ff)^2$ si ottiene facilmente:

$$h = \frac{1}{2}\frac{m-1}{n-1}\phi^{2(r-1)}(\phi\phi)^2$$

eccetto il caso in cui ϕ lineare nel quale $h = 0$. Se ϕ è una funzione quadratica sarà $(\phi\phi)^2$ costante rispetto alle x_1, x_2 e quindi pel risultante valore di h si avrà il covariante $(fh) = 0$. Si hanno così i due teoremi:

1.° Se una forma binaria dell'ordine n è eguale alla potenza ennesima di una funzione lineare, i due covarianti della forma stessa:

$$h = \frac{1}{2}(ff)^2, \qquad (fh)$$

sono identicamente nulli.

2.° Se una forma binaria dell'ordine n pari è eguale alla potenza $\frac{n}{2}$ di una forma quadratica, il covariante (fh) della medesima è identicamente nullo.

Sia:

$$f(x_1, x_2) = (a, 0, b, c \dots \delta, \gamma, \beta, \alpha)(\xi, 1)^n \tag{1}$$

nella quale $\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$; e le $a, b, c \dots \delta, \gamma, \beta, \alpha$ sono degli ordini 0, 2, 3... $(n-3)$, $(n-2)$, $(n-1)$, n rispetto alle x_1, x_2.

Ponendo:

$$A = (b_{11}, c_{11}, \dots \gamma_{11}, \beta_{11}, \alpha_{11})(\xi, 1)^{n-2}$$

$$B = (b_{12}, c_{12}, \dots \gamma_{12}, \beta_{12}, \alpha_{12})(\xi, 1)^{n-2}$$

$$C = (b_{22}, c_{22}, \dots \gamma_{22}, \beta_{22}, \alpha_{22})(\xi, 1)^{n-2}$$

$$G = (a, 0, b, c, \dots \delta, \gamma)(\xi, 1)^{n-2}$$

e:

$$D = (n-2) b_1 \xi^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} c_1 \xi^{n-4} + \dots + (n-2)\gamma_1 \xi + \beta_1$$

$$E = (n-2) b_2 \xi^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} c_2 \xi^{n-4} + \dots + (n-2)\gamma_2 \xi + \beta_2$$

nelle quali $b_1 = \frac{1}{2}\frac{db}{dx_1}$, $c_1 = \frac{1}{3}\frac{dc}{dx_1} \cdots$, si ottiene facilmente:

$$h = G[A\xi_2^2 - 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_1^2] + AC - B^2 + 2[E(A\xi_2 - B\xi_1) - D(B\xi_2 - C\xi_1)] - (E\xi_1 - D\xi_2)^2.$$

Se il covariante h è identicamente nullo, sarà pure eguale a zero il valore di h che si ottiene ponendo $\xi_2, -\xi_1$ in luogo delle x_1, x_2; e siccome in questa ipotesi diventano:

$$A = \alpha_{11}, \quad B = \alpha_{12}, \quad C = \alpha_{22}, \quad G = \gamma, \quad D = \beta_1, \quad E = \beta_2$$

la identità $h = 0$ darà luogo alla equazione:

$$\alpha\gamma - \beta^2 + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)^2 + 2(\alpha\beta) = 0.$$

Nello stesso modo e nelle stesse ipotesi trovasi per la identità $(fh) = 0$ la equazione:

$$\alpha^2\delta - 3\alpha\beta\gamma + 2\beta^3 + 3\alpha(\alpha\gamma) + 3\alpha(\alpha\beta)^2 - 6\beta(\alpha\beta) - 6\beta\sigma + 2(\alpha\sigma) = 0$$

posto $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha\alpha)^2$.

Queste due equazioni non sono evidentemente omogenee, ponendo come nella Memoria $\frac{\xi_1}{\lambda}$, $\frac{\xi_2}{\lambda}$ in luogo di ξ_1, ξ_2 si potranno sostituire ad esse le:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma\lambda^2+2(\alpha\beta)\lambda+\alpha\gamma-\beta^2=0\\ 2(\alpha\sigma)\lambda^3+3[\alpha(\alpha\beta)^2-2\beta\sigma]\lambda^2+3[\alpha(\alpha\gamma)-2\beta(\alpha\beta)]\lambda+\alpha^2\delta-3\alpha\beta\gamma+2\beta^3=0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Pel caso di $n=3$ ponendo $a=\delta=1$, $\alpha=2v$, $\beta=-u$, $\gamma=0$ e quindi per le denominazioni della Nota 1ª:

$$\sigma=2\tau,\quad (\alpha\beta)=2\vartheta,\quad (\alpha\sigma)=4\omega,\quad (\alpha\beta)^2=-2p,\quad (\alpha\gamma)=0$$

la equazione (1) diventa la:

$$f(x_1, x_2)=\xi^3-3u\xi+2v$$

e le (2) danno:

$$2\tau\lambda^2+4\vartheta\lambda-u^2=0$$

$$4\omega\lambda^3+6(\tau u-pv)\lambda^2+6u\vartheta\lambda+2v^2-u^3=0$$

ossia le equazioni (12) pag. 100 della Memoria.

La eliminazione di λ dalle due equazioni (3) e quindi la richiesta equazione del nono grado, si ottiene facilmente col seguente processo.

Sieno ϕ, ψ due funzioni omogenee delle variabili x, y di secondo e di terzo ordine, e si indichino con D, Δ i loro hessiani:

$$D=(\phi\phi)^2,\qquad \Delta=(\psi\psi)^2.$$

Si determinino le forme simultanee:

$$P=(\phi\psi)^2,\qquad Q=(\phi\Delta)^2,\qquad R=(\phi P)^2$$

la equazione risultante dalla eliminazione del rapporto x, y dalle equazioni $\phi=0$, $\psi=0$ è la (*):

$$R-2DQ=0.$$

Applicando questo risultato alle equazioni (3) si hanno facilmente, col mezzo delle relazioni trovate nella Nota 1ª, le seguenti:

$$D=-4(u^2\tau+2\vartheta^2)=8v(Av-up)$$

$$Q=8v^2(2Auvp-4Bv^2-p^2u^2)$$

$$R=32v^2[v(\tau^3+2Au\tau^2+2Bu^2\tau+4ABu^3-Eu^3)-4uvp^2\tau+$$
$$+4Ap\tau v^2+8A^2uv^2p-12Au^2vp^2+\tfrac{9}{2}u^3p^3].$$

(*) *Theorie der binären algebraischen formen* von A. Clebsch, § 27.

Ora essendo:

$$2DQ = 128v^3[2A^2uv^2p - 3Au^2vp^2 + u^3p^3 + 4Buv^2p - 4ABv^3]$$

la equazione $R - 2DQ = 0$ è divisibile per $32v^3$ e si ottiene la equazione del nono grado:

$$v[\tau^3 + 2Au\tau^2 + 2Bu^2\tau + (4AB - E)u^3] + \tfrac{1}{2}u^3p^3 - 4up^2v\tau +$$
$$+ 4pv^2(A\tau - 4Bu) + 16ABv^3 = 0 \ (*).$$

Se la cubica fosse dotata di un punto doppio sarebbero $a = \delta = 0$ e le due equazioni in λ diverrebbero le:

$$2\tau\lambda^2 + 4\vartheta\lambda - u^2 = 0$$
$$4\omega\lambda^3 + 6(u\tau - vp)\lambda^2 + 6u\vartheta\lambda - u^3 = 0.$$

In questo caso essendo:

$$\mathfrak{D} = 8v(Av - up), \qquad Q = 8uv^2p(2Av - up)$$
$$R = 32uv^3[8A^2v^2p - 12Auvp^2 + 4ABu^2v - Eu^2v + \tfrac{9}{2}u^2p^3]$$

si avrà per la equazione $R - 2DQ = 0$ la equazione del terzo grado:

$$2(4AB - E)v + p^3 = 0.$$

3.° I risultati ottenuti nel precedente paragrafo si ponno anche porre sotto una forma più generale la quale trova riscontro in altre ricerche geometriche. È noto che per ottenere la equazione della curva reciproca ad una data $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ non si ha che ad eliminare una delle indeterminate, per esempio x_3, dalla equazione $F = 0$ e dalla:

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

ed eguagliare quindi a zero il discriminante della forma in x_1, x_2 che si ottiene da quella eliminazione.

Ora se supponiamo dapprima essere $F(x_1, x_2, x_3)$ del terzo ordine e quindi pure del terzo ordine la forma binaria $f(x_1, x_2)$ che risulta dalla eliminazione di x_3, si ha, come è noto, che il complesso dei covarianti e degli invarianti indipendenti relativi alla medesima si compone delle forme:

$$f, \qquad h = \tfrac{1}{2}(ff)^2, \qquad \theta = (fh), \qquad D = \tfrac{1}{2}(hh)^2$$

(*) L'equazione (18) dell'Autore contiene due errori di calcolazione che sono corretti nella superiore.

fra le quali ha luogo la relazione identica:

$$\theta^2 + h^3 + Df^2 = 0.$$

Indichiamo con P, Q i valori che assumono le forme h, θ, allorquando pongansi in esse in luogo delle x_1, x_2 le ξ_2, $-\xi_1$; se, come nel § 1.° si ha:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3ux_3 + 2v$$

la equazione superiore si trasformerà nella:

$$Q^2 + P^3 + 4Dv^2 = 0$$

ed i valori delle P, Q, saranno evidentemente i primi membri delle equazioni (3) nei quali siasi posto $-\xi_3$ in luogo di λ.

Si avranno cioè le:

$$P = 2\tau\xi_3^2 - 4\vartheta\xi_3 - u^2$$
$$Q = -4\omega\xi_3^3 + 6(\tau u - pv)\xi_3^2 - 6u\vartheta\xi_3 + 2v^2 - u^3$$

pei quali valori si ottiene:

$$D = 4C\xi_3^6 - 12r\xi_3^6 + 3(8A\tau - 4Bu - 3p^2)\xi_3^4 - 2(8A\vartheta - qu - 2\omega)\xi_3^3 -$$
$$- 3(Au^2 + 2\tau u - 2pv)\xi_3^2 + 6u\vartheta\xi_3 + u^3 - v^2.$$

La eliminazione della ξ_3 dalle equazioni $P=0$, $Q=0$ darà quindi la equazione del nono grado in ξ_1, ξ_2 corrispondente ai punti di flesso e la $D=0$ è la equazione della curva reciproca alla data.

Le nove tangenti di flesso della cubica $F=0$ sono quindi tangenti alla curva $P=0$ della quarta classe ed alla $Q=0$ della classe sesta.

NOTA 3ª.

1.° La teorica delle forme simultanee di una forma binaria può avere una opportuna applicazione nelle ricerche sulle forme ad un maggior numero di indeterminate.

Considerando la forma ternaria cubica:

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_3^3 - 3u x_3 + 2v$$

è evidente che i covarianti di essa potranno esprimersi per polinomj in x_3 di cui i coefficienti saranno forme simultanee delle forme binarie u, v. Indicando con H l'hessiano di F trovasi infatti essere:

$$H = Ax_3^3 - 2px_3^2 + (Au + 2\tau)x_3 + 2(Av - pu)$$

ed indicando con C il contravariante che corrisponde alla curva di Cayley si ha:

$$C = 2B\xi_3^3 - q\xi_3^2 + (Au - \tau)\xi_3 + \vartheta$$

nella quale intendesi posto nelle q, u, τ, ϑ le ξ_2, $-\xi_1$ in luogo di x_1, x_2. Ora operando col contravariante C sulle forme F, H si ottengono le:

$$C(F) = -12(A^2 - 4B), \qquad C(H) = 4(A^3 + 10AB - 2C - 4E)$$

espressioni le quali non differiscono che di un coefficiente numerico dagli invarianti s, t della forma F, essendo:

$$s = 4(A^2 - 4B) \qquad t = -8(A^3 + 10AB - 2C - 4E). \tag{1}$$

2.° Il valore di H trovato sopra potendo porsi sotto la forma:

$$H = AF - 2[px_3^2 - (2Au + \tau)x_3 + pu]$$

la eliminazione della x_3 dalle equazioni $F = 0$, $H = 0$ si potrà ottenere eliminando la x_3 dalla $F = 0$ e dalla:

$$px_3^2 - (2Au + \tau)x_3 + pu = 0$$

vale a dire eliminando la x_3 da una quadratica e da una cubica. Applicando il metodo indicato nella Nota precedente, si avranno in questo caso le

$$D = \tfrac{1}{2}[4p^2u - (2Au + \tau)^2]$$
$$Q = 2[v(2Au + \tau) - 2pu^2]$$
$$R = p[2pv - u(2Au + \tau)]^2$$

quindi la equazione risultante:

$$R - 2DQ = 0$$

condurrà alla equazione del nono grado nelle x_1, x_2 seguente:

$$2v(2Au+\tau)^3 - 3pu^2(2Au+\tau)^2 - 12p^2uv(2Au+\tau) + 16p^3u^3 + 4p^3v^2 = 0 \quad (2)$$

che corrisponde alla (18) dell'Autore.

3.° È noto che l'Hessiano della forma:

$$\lambda F + 6\mu H \quad (3)$$

nella quale λ, μ sono due indeterminate, è eguale a:

$$\lambda_1 F + \mu_1 H$$

posto:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}s\lambda^2\mu + t\lambda\mu^2 + \tfrac{1}{2}s^2\mu^3, \qquad \mu_1 = \lambda^3 - 3s\lambda\mu^2 - 2t\mu^3$$

le s, t essendo gli invarianti della forma F.

È noto altresì che per ciascuno dei valori del rapporto $\lambda:\mu$ i quali soddisfano alla equazione:

$$\lambda\mu_1 - 6\mu\lambda_1 = 0 \quad (4)$$

la equazione (3) rappresenta tre rette, ciascuna delle quali passa per tre punti di flesso della cubica $F = 0$.

Ora la equazione (4) pei valori superiori di λ_1, μ_1 è eguale alla:

$$\lambda^4 - 6s\lambda^2\mu^2 - 8t\lambda\mu^3 - 3s^2\mu^4 = 0$$

o ponendo in questa $\frac{\lambda}{\mu} = 2\sigma$, eguale alla:

$$\sigma^4 - \tfrac{3}{2}s\sigma^2 - t\sigma - \tfrac{3}{16}s^2 = 0. \quad (5)$$

Sostituendo in quest'ultima per s, t i loro valori (1) si otterrà quindi la:

$$\sigma^4 - 6(A^2 - 4B)\sigma^2 + 8(A^3 + 10AB - 2C - 4E)\sigma - 3(A^2 - 4B)^2 = 0 \quad (6)$$

la quale coincide colla equazione (30) di Clebsch.

Dalla equazione (6) deducesi facilmente la equazione che dà il prodotto delle dodici rette corrispondenti ai quattro valori del rapporto $\lambda:\mu$. Ponendo infatti nella $\lambda F + 6\mu H = 0$, 2σ in luogo di $\lambda : \mu$ si ottiene la:

$$\sigma F + 3H = 0 \tag{7}$$

il primo membro della quale rappresenta il *prodotto di tre rette* per ogni valore di σ che soddisfa la (5) o la (6). Eliminando quindi la σ dalle equazioni (6) (7) si avrà la equazione richiesta, ossia la:

$$27H^4 - 18(A^2 - 4B)H^2F^2 - 8(A^3 + 10AB - 2C - 4E)HF^3 - (A^2 - 4B)^2F^4 = 0$$

come aveva già dimostrato in una breve Nota *pubblicata* nel Giornale di Crelle nel 1856, vol. 53.

NOTA 4ª.

1.° Dalle espressioni di F e di H della Nota precedente si ottiene la:

$$\sigma F+3H=kx_3^3-6px_3^2+3(4Au+2\tau-ku)x_3+2(kv-3pu) \tag{1}$$

posto $k=\sigma+3A$. È noto che la espressione $\sigma F+3H$ si decompone in tre fattori lineari per ogni valore di σ che soddisfa la equazione (4) della Nota 3ª; cioè la:

$$\sigma^4-\tfrac{3}{2}s\sigma^2-t\sigma-\tfrac{3}{16}s^2=0 \tag{2}$$

perciò la equazione che si ottiene eguagliando a zero l'ultimo termine della (1), ossia la:

$$3pu=(\sigma+3A)v \tag{3}$$

che coincide colla (52) dell'Autore, dà per ciascun valore di σ tre sistemi conjugati.

Riservandoci di ritornare sulla equazione (3) nella Nota 5ª, vogliamo ora mostrare come si effettui la decomposizione della $\sigma F+3H$ in tre fattori lineari, e come per mezzo di essa si ottengano le formole generali per la trasformazione di una forma cubica ternaria nella sua forma canonica.

2.° Indicando la espressione (1) colla:

$$(A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3)(x_3,\ 1)^3$$

si ottengono facilmente le:

$$\left.\begin{aligned}
C_0&=A_0A_2-A_1^2=-k^2u+2(2Au+\tau)k-4p^2\\
C_1&=\tfrac{1}{2}(A_0A_3-A_1A_2)=k\,v-4kpu+2p(2Au+\tau)\\
C_2&=A_1A_3-A_2^2=-k\,u^2+4(2Au^2+\tau u-pv)k+12p^2u-4(2Au+\tau)^2
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

per le quali:

$$P=A_0C_1-A_1C_0=k^3v-6k^2pu+6kp(2Au+\tau)-8p^3 \tag{5}$$

e:

$$\left.\begin{aligned} D = C_0 C_2 - C_1^2 = k^4(u^3 - v^2) - 6k^3 u(2Au^2 + u\tau - 2pv) + \\ + 12k^2[u(2Au+\tau)^2 - pv(2Au+\tau) + 2p^2 u] - \\ - 8k[(2Au+\tau)^3 - 3p^2 u(2Au+\tau) - 2p^3 v] + 12p^2[(2Au+\tau)^2 - 4p^2 u]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Questa espressione D del sesto ordine in x_1, x_2 può trasformarsi per modo che risulti eguale al quadrato di una forma binaria del terzo ordine. A questo scopo faremo precedere alcune considerazioni sulla equazione del quarto grado in k di cui faremo uso in luogo della biquadratica (2) in σ.

3.° Ponendo nella equazione (6) della Nota precedente $k - 3A$ in luogo di σ, si ottiene la:

$$k^4 - 3\alpha k^3 + 6\beta k^2 - 4\gamma k + 3(\alpha\gamma - \beta^2) = 0 \quad (7)$$

posto:

$$\alpha = 4A, \qquad \beta = 4(2A^2 + B), \qquad \gamma = 4(4A^3 + 4AB + C + 2E) \quad (8)$$

per le quali

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 16(G + 2AE).$$

Questa equazione in k ha due proprietà che vogliamo notare. Essa può porsi sotto la forma:

$$(k^3 - \gamma)(\tfrac{4}{3}k - \alpha) - (k^2 - \beta)^2 = 0 \quad (9)$$

che ci sarà utile in seguito; inoltre ponendo:

$$h = \frac{1}{k}, \qquad \tfrac{9}{4}a = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}, \qquad 3b = \frac{\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}, \qquad 4c = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

si ha:

$$3(ac - b^2) = \frac{1}{3(\alpha\gamma - \beta^2)}$$

e quindi dalla superiore si ottiene la equazione seguente della stessa forma:

$$h^4 - 3ah^3 + 6bh^2 - 4ch + 3(ac - b^2) = 0$$

affatto analogamente a quanto verificasi per la equazione del moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine delle funzioni ellittiche.

4.° Ritornando ora al valore superiore di D, noteremo dapprima come indicando con $\vartheta = (uv)$, $\omega = (v\tau)$ i due covarianti simultanei del terzo ordine delle forme u, v (vedi Nota 1ª), e ponendo:

$$w = \omega - 2A\vartheta - qu \quad (10)$$

si ha il seguente gruppo di relazioni, le quali si ponno facilmente dimostrare per mezzo delle formole contenute nella Nota 1ª. Esse sono:

$$\left.\begin{aligned} &u[u(2Au+\tau)-2pv]=\tfrac{1}{2}\alpha(u^3-v^2)-2\vartheta^2\\ &u(2Au+\tau)^2-pv(2Au+\tau)-2p^2u^2=\tfrac{1}{2}\beta(u^3-v^2)+2\vartheta w\\ &(2Au+\tau)^3-3p^2u(2Au+\tau)-2p^3v=\tfrac{1}{2}\gamma(u^3-v^2)-2w^2\\ &p^2[(2Au+\tau)^2-4p^2u]=\tfrac{1}{4}(\alpha\gamma-\beta^2)(u^3-v^2)-(\alpha w^2+2\beta w\vartheta+\gamma\vartheta^2)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

nelle quali le α, β, γ hanno i valori (8); e la espressione D si trasforma per le medesime, avuto riguardo alla equazione (7), nella seguente:

$$D=12[k^3\vartheta^2+2k^2\vartheta w+\tfrac{4}{3}kw^2-(\alpha w^2+2\beta w\vartheta+\gamma\vartheta^2)]$$

ossia:

$$\tfrac{1}{12}D=(\tfrac{4}{3}k-\alpha)w^2+2(k^2-\beta)w\vartheta+(k^3-\gamma)\vartheta^2$$

la quale appunto per la equazione (9) dimostra essere D il quadrato di una forma del terzo ordine. Da essa si ottiene la:

$$\sqrt{-D}=3n[(\tfrac{4}{3}k-\alpha)w+(k^2-\beta)\vartheta]\qquad(12)$$

posto:

$$n=\frac{2}{\sqrt{3\alpha-4k}}=\frac{1}{\sqrt{-\sigma}}.\qquad(13)$$

5.° Rammentando ora come le C_0, P, D sono formate colle A_0, A_1, A_2, A_3 si verifica tosto la identità della equazione:

$$C_0^3+P^2+A_0^2D=0$$

la quale posto:

$$l=\sqrt[3]{P+k\sqrt{-D}};\qquad m=\sqrt[3]{P-k\sqrt{-D}}\qquad(14)$$

osservando essere $A_0=k$, conduce alle:

$$lm=-C_0,\qquad l^3+m^3=2P,\qquad l^3-m^3=2k\sqrt{-D}\qquad(15)$$

essendo l, m, funzioni lineari delle x_1, x_2.

Ma la espressione (1) di $\sigma F+3H$ pei valori (4) (5) di C_0 e di P può scriversi:

$$\sigma F+3H=\frac{1}{k^2}[(kx_3-2p)^3-3(kx_3-2p)lm+l^3+m^3]$$

od infine:

$$\sigma F+3H=\frac{1}{k^2}X_1X_2X_3$$

posto:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= kx_3 - 2p + l + m \\ X_2 &= kx_3 - 2p + e^2 l + em \\ X_3 &= kx_3 - 2p + el + e^2 m \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

essendo e una radice cubica immaginaria dell'unità. Passiamo ora alla ricerca dei valori delle funzioni lineari l, m.

6.° Se nella espressione (4) di C_0 poniamo in luogo di u e di τ i loro valori in funzione dei covarianti simultanei lineari p, q trovati nella Nota 1ª, si ottiene la:

$$2E^2 C_0 = \alpha_0 p^2 + 2\alpha_1 pq + \alpha_2 q^2$$

essendo:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = -AEk + 2(2A^2E + 2BE - AG)k - 8E \\ &\alpha_1 = 2Kk, \qquad \alpha_2 = -Ek^2 + 2(G + 2AE)k. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Analogamente esprimendo il valore (5) di P coi covarianti lineari p, q si giunge alla:

$$4E^3 P = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(p, q)^3$$

nella quale:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_0 = (2E^2 + A^2G - ABE)k^3 - 12AE^2k^2 + 12E(2A^2E + 2BE - AG)k - 32E^3 \\ &\beta_1 = -(Ak^2 - 8E)Kk, \quad \beta_2 = [(BE - AG)k^2 - 4E^2k + 4E(G + 2AE)]k, \quad \beta_3 = Kk^3 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

e ripetendo la stessa operazione per la espressione (12) di $\sqrt{-D}$ si avrà:

$$4E^3\sqrt{-D} = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(p, q)^3$$

posto:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 &= nK[3A^2k^2 - 4(2A^3 + AB + 2E)k + 24AE] \\ \gamma_1 &= n[(2E^2 + 3A^2G - 3ABE)k^2 + \\ &+ 4(B^2E - GE - ABG - 2A^3G + 2A^2BE - 2AE^2)k + \\ &+ 8A^2E^2 - 8BE^2 + 12AGE] \\ \gamma_2 &= nKk[-3Ak + 8A^2 + 4B], \\ \gamma_3 &= n[3(BE - AG)k^2 + 4(BG - CE + 2A^2G - 2ABE - 2E^2)k + \\ &+ 12E(G + 2AE)]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Le equazioni (15) daranno quindi le:

$$\left.\begin{aligned} &2E^2 lm = -(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)(p, q) \;; \quad 2E^3(l^3 + m^3) = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(p, q)^3 \\ &2E^3(l^3 - m^3) = k(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(p, q)^3. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Incominciamo dapprima dal dimostrare essere le l, m funzioni lineari dei covarianti p, q. Le equazioni (17) (18) (19) danno infatti, avuto riguardo alla equazione del quarto grado in k, le relazioni seguenti:

$$\alpha_0\beta_2-2\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0=0 \qquad \alpha_0\gamma_2-2\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_0=0$$
$$\alpha_0\beta_3-2\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0 \qquad \alpha_0\gamma_3-2\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1=0$$

le quali dinotano essere identicamente nullo il covariante simultaneo lineare che ottiensi dalle forme quadratica e cubiche che costituiscono i secondi membri delle equazioni (20) operando su di esse come si ottenne il covariante p dalle u, v; proprietà, come è noto, necessaria per la sussistenza delle equazioni (20). Si hanno inoltre le:

$$\left.\begin{array}{lll} \beta_1^2-\beta_0\beta_2=2\alpha_0\delta^2, & \beta_1\beta_2-\beta_0\beta_3=4\alpha_1\delta^2, & \beta_2^2-\beta_1\beta_3=2\alpha_2\delta^2 \\ k\,(\gamma_0\gamma_2-\gamma_1^2)=2\alpha_0\delta^2, & k^2(\gamma_0\gamma_3-\gamma_1\gamma_2)=4\alpha_1\delta^2, & k\,(\gamma_1\gamma_3-\gamma_2^2)=2\alpha_2\delta^2 \end{array}\right\} \quad (21)$$

posto $\delta^2=\alpha_1^2-\alpha_0\alpha_2$, le quali corrispondono ad una seconda proprietà pure necessaria e relativa al covariante quadratico analogo al covariante τ. Se infine osservasi sussistere le:

$$\beta_0\gamma_2-2\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_0=0$$
$$\beta_0\gamma_3-(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)+\beta_3\gamma_0=0$$
$$\beta_1\gamma_3-2\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_1=0$$

si deducono da queste e dalle superiori le:

$$(\beta_0\pm k\gamma_0)(\beta_2\pm k\gamma_2)-(\beta_1\pm k\gamma_1)^2=0$$
$$(\beta_0\pm k\gamma_0)(\beta_3\pm k\gamma_3)-(\beta_1\pm k\gamma_1)(\beta_2\pm k\gamma_2)=0$$
$$(\beta_1\pm k\gamma_1)(\beta_3\pm k\gamma_3)-(\beta_2\pm k\gamma_2)^2=0$$

le quali dimostrano che le forme cubiche in p, q;

$$(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)(p,\ q)^3\pm k(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)(p,\ q)^3$$

sono ciascuna eguali al cubo di una funzione lineare delle stesse p, q.

Le l, m sono adunque funzioni lineari delle p, q e potremo porre:

$$El=a_1p+a_2q, \qquad Em=b_1p+b_2q. \tag{22}$$

7.° Per questi valori di l, m la prima delle equazioni (20) dà:

$$2a_1b_1=-\alpha_0, \qquad a_1b_2+a_2b_1=-\alpha_1, \qquad 2a_2b_2=-\alpha_2 \tag{23}$$

dalle quali ponendo $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ si ha:

$$\delta^2 = \alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2. \tag{24}$$

Così dalle altre due equazioni (20) si ottengono le:

$$\left.\begin{array}{llll} a_1^3+b_1^3=\frac{1}{2}\beta_0 & a_1^2 a_2+b_1^2 b_2=\frac{1}{2}\beta_1 & a_1 a_2^2+b_1 b_2^2=\frac{1}{2}\beta_2 & a_2^3+b_2^3=\frac{1}{2}\beta_3 \\ a_1^3-b_1^3=\frac{1}{2}k\gamma_0 & a_1^2 a_2-b_1^2 b_2=\frac{1}{2}k\gamma_1 & a_1 a_2^2-b_1 b_2^2=\frac{1}{2}k\gamma_2 & a_2^3-b_2^3=\frac{1}{2}k\gamma_3. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Le (23) (24) danno evidentemente le:

$$a_1 = \frac{\alpha_1 - \delta}{\alpha_2} a_2 \qquad b_1 = \frac{\alpha_1 + \delta}{\alpha_2} b_2$$

e le a_2, b_2 sono per le ultime (25) eguali a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\beta_3 \pm k\gamma_3)}$.

Le formole di trasformazione saranno quindi per le (16):

$$\left.\begin{array}{l} EX_1 = Ekx_3 + \frac{1}{\alpha_2}[\alpha_1(a_2 + b_2) - \delta(a_2 - b_2) - 2E\alpha_2]p + (a_2 + b_2)q \\ EX_2 = Ekx_3 + \frac{1}{\alpha_2}[\alpha_1(e^2 a_2 + e b_2) - \delta(e^2 a_2 - e b_2) - 2E\alpha_2]p + (e^2 a_2 + e b_2)q \\ EX_3 = Ekx_3 + \frac{1}{\alpha_2}[\alpha_1(e a_2 + e^2 b_2) - \delta(e a_2 - e^2 b_2) - 2E\alpha_2]p + (e a_2 + e^2 b_2)q \end{array}\right\} \tag{26}$$

ed il modulo della sostituzione che indicheremo con Δ avrà il valore

$$\Delta = -6\frac{k\delta}{E}\sqrt{-3}, \tag{27}$$

Da queste ponendo:

$$X_1 + e^2 X_2 + e X_3 = X, \qquad X_1 + e X_2 + e^2 X_3 = Y, \qquad X_1 + X_2 + X_3 = Z$$

si otterranno per la sostituzione reciproca i valori seguenti:

$$\left.\begin{array}{c} 3\delta k x_3 = \delta Z - 2E(a_2 X - b_2 Y), \qquad 3\delta p = E(b_2 Y - a_2 X), \\ 3\delta q = \frac{E}{\alpha_2}[\alpha_1(a_2 X - b_2 Y) - \delta(a_2 X + b_2 Y)] \end{array}\right\} \tag{28}$$

per mezzo delle quali si può operare la trasformazione della forma cubica ternaria:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3u x_3 + 2v$$

nella sua forma canonica, supponendo espresse le u, v in funzione dei covarianti lineari simultanei p, q.

Però la forma di questa trasformata essendo, come è noto, la:

$$c_1 X_1^3 + c_2 X_2^3 + c_3 X_3^3 + 6 c X_1 X_2 X_3$$

si potranno più facilmente determinare i valori delle c_1, c_2, c_3, c facendo uso delle (26) o meglio delle (16). Sostituendo infatti in quest'ultima per X_1, X_2, X_3 i valori (16) si ottiene per la medesima la espressione:

$$\left.\begin{aligned}(\nu + 6c)(kx_3 - 2p)^3 + 3(\lambda l + \mu m)(kx_3 - 2p)^2 + \\ + 3(\mu l^2 + \lambda m^2 - 2\nu C_0 + 6c\,C_0)(kx_3 - 2p) + 2P(\nu + 6c) - 3C_0(\lambda l + \mu m)\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

essendosi posto $2P$, $-C_0$ in luogo di $l^3 + m^3$, e di lm; ed avendo indicato con λ, μ, ν, le:

$$\lambda = c_1 + e^2 c_2 + e c_3, \qquad \mu = c_1 + e c_2 + e^2 c_3, \qquad \nu = c_1 + c_2 + c_3. \quad (30)$$

Il coefficiente di x_3^3 nella formola superiore risultando eguale a $(\nu + 6c)k^3$ dovrà la medesima essere identica alla:

$$(\nu + 6c)k^3 F(x_1, x_2, x_3).$$

Perciò il coefficiente di x_3^2 dovendo essere nullo si avrà:

$$\lambda l + \mu m = 2p(\nu + 6c)$$

e quindi pei valori (22) delle l, m:

$$\lambda a_1 + \mu b_1 = 2E(\nu + 6c); \qquad \lambda a_2 + \mu b_2 = 0$$

da cui:

$$\delta\lambda = 2Eb_2(\nu + 6c); \qquad \delta\mu = -2Ea_2(\nu + 6c). \quad (31)$$

Da queste deducesi la:

$$\delta(\mu l^2 + \lambda m^2) = 2E(\nu + 6c)(b_2 m^2 - a_2 l^2)$$

ossia:

$$\delta(\mu l^2 + \lambda m^2) = \frac{2}{E}(\nu + 6c)[(b_2 b_1^2 - a_2 a_1^2)p^2 + 2(b_1 b_2^2 - a_1 a_2^2)pq + (b_2^3 - a_2^3)q^2]$$

la quale per le relazioni (25) dà la seguente:

$$\delta(\mu l^2 + \lambda m^2) = -\frac{\nu + 6c}{E}k(\gamma_1 p^2 + 2\gamma_2 pq + \gamma_3 q^2). \quad (32)$$

Ciò posto confrontando i coefficienti di x_3 si ottiene:

$$4p\,(\nu + 6c) + \frac{k}{E\delta}(\nu + 6c)(\gamma_1 p^2 + 2\gamma_2 pq + \gamma_3 q\,) + 2(\nu - 3c)C_0 = k^2(\nu + 6c)u$$

nella quale esprimendo le C_0, u, in funzione di p, q, si dedurranno dal confronto dei coefficienti di p^2, pq, q^2 le relazioni seguenti:

$$(\nu+6c)E\left(8E+2\frac{k}{\delta}\gamma_1-Ak^2\right)+2(\nu-3c)\alpha_0=0$$

$$E(\nu+6c)\frac{k}{\delta}\gamma_2+(\nu-3c)\alpha_1=0 \qquad E(\nu+6c)\left(2\frac{k}{\delta}\gamma_3-k^2\right)+2(\nu-3c)\alpha_2=0$$

dalle quali si hanno le due condizioni:

$$\alpha_0\gamma_2-\alpha_1\gamma_1=\tfrac{1}{2}(8E-Ak^2)\frac{\delta}{k}\alpha_1, \qquad \alpha_1\gamma_3-\alpha_2\gamma_2=\tfrac{1}{2}k\delta\alpha_1 \tag{33}$$

ed il valore:

$$\nu=3c\frac{\delta\alpha_1-2Ek\gamma_2}{\delta\alpha_1+Ek\gamma_2}. \tag{34}$$

Ora per le (17) (19) si ottiene:

$$\alpha_1\gamma_3-\alpha_2\gamma_2=\frac{n}{4}EKk[-3\alpha k^3+10\beta k^2-8\gamma k+6(\alpha\gamma-\beta^2)]$$

ossia per la equazione (7) in k:

$$\alpha_1\gamma_3-\alpha_2\gamma_2=-\frac{n}{2}EKk^3(k^2-\tfrac{3}{2}\alpha k+\beta).$$

La seconda condizione (33) darà quindi:

$$\delta=-\frac{n}{2}Ek(k\ -\tfrac{3}{2}\alpha k+\beta) \tag{35}$$

che verificasi colla

$$\delta^2=\alpha_1^2-\alpha_0\alpha_2$$

come alla (24). La prima delle (33) conduce allo stesso valore di δ, e per esso si hanno anche facilmente, rammentando il valore (13) di n:

$$\delta\alpha_1+Ek\gamma_2=EK\frac{k^3}{n}, \qquad \delta\alpha_1-2Ek\gamma_2=-nEKk^2(k^2-3\alpha k+3\beta)$$

le quali sostituite nella (34) danno:

$$\nu=3c\frac{k^2-3\alpha k+3\beta}{k(k-\frac{3}{4}\alpha)} \tag{36}$$

e quindi si avranno per le (31):

$$\lambda=36\frac{cn}{k^2}b_2, \qquad \mu=-36\frac{cn}{k^2}a_2.$$

Richiamando ora le (30) si ottengono pei valori di c_1, c_2, c_3 le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{cn}{k^2}[12(b_2 - a_2) - nk(k^2 - 3\alpha k + 3\beta)] \\ c_2 &= \frac{cn}{k^2}[12(eb_2 - e^2 a_2) - nk(k^2 - 3\alpha k + 3\beta)] \\ c_3 &= \frac{cn}{k^2}[12(e^2 b_2 - ea_2) - nk(k^2 - 3\alpha k + 3\beta)] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

e non rimane a trovarsi che il valore di c. Perciò supponendo:

$$F(x_1, x_2, x_3) = c_1 X_1^3 + c_2 X_2^3 + c_3 X_3^3 + 6c X_1 X_2 X_3$$

dovrà per la (29) essere:

$$(\nu + 6c)k^3 = 1$$

e da questa pel valore (36) di ν:

$$c = \frac{1}{9} \frac{k - \frac{3}{4}\alpha}{k^2(k^2 - \frac{3}{2}\alpha k + \beta)} = \frac{1}{9k^2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 - \frac{1}{4}s} \cdot \tag{38}$$

Questa espressione di c rammentando le equazioni (35) e (27) dà le altre due:

$$c = \frac{E}{18kn\delta} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\Delta\sqrt{3}} \tag{39}$$

ed osservando inoltre che dalle (37) si ottiene dopo alcune riduzioni la:

$$c_1 c_2 c_3 = c^3 \frac{\sigma^2 - \frac{9}{4}s}{\sigma^2}$$

si avrà anche:

$$c = \sqrt[3]{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \frac{9}{4}s}} \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}$$

ma dimostrasi facilmente essere:

$$(\sigma^2 - \tfrac{1}{4}s)^3 = (t^2 - s^3)\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \frac{9}{4}s}$$

perciò:

$$c = \frac{\sigma^2 - \frac{1}{4}s}{\sqrt[3]{t^2 - s^3}} \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}.$$

Ponendo infine:

$$X_1\sqrt[3]{c_1} = y_1, \qquad X_2\sqrt[3]{c_2} = y_2, \qquad X_3\sqrt[3]{c_3} = y_3 \tag{40}$$

si avrà che la forma cubica ternaria $F(x_1, x_2, x_3)$ riducesi alla forma canonica:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6 g y_1 y_2 y_3$$

nella quale:

$$g = \frac{\sigma^2 - \frac{1}{4} s}{\sqrt[3]{t^2 - s^3}}. \tag{41}$$

8.° Riassumendo le cose esposte in questa Nota possiamo enunciare il seguente risultato.

La forma cubica ternaria generale:

$$F = x_3^3 - 3 u x_3 + 2 v$$

mediante la sostituzione lineare (26) o la sua reciproca (28), e la sostituzione (40) si trasforma nella:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6 g y_1 y_2 y_3$$

essendo i valori dei coefficienti c_1, c_2, c_3, g dati dalle formole (37), (41), e quelli delle a_2, b_2 dalle ultime (25).

NOTA 5ª.

La risoluzione della equazione:

$$kv - 3pu = 0$$

si ottiene tosto pei risultati ottenuti nella Nota precedente osservando che per le relazioni (16) della medesima i fattori lineari del primo membro di quella equazione sono:

$$-2p + l + m, \qquad -2p + e^2 l + em, \qquad -2p + el + e^2 m.$$

Un risultato più importante possiamo ricavare dalle (16) o meglio dalle (26) ed è la determinazione delle coordinate dei punti di flesso di una cubica, od infine la risoluzione della equazione del nono grado [(2) della Nota 3ª]

$$2v(2Au+\tau)^3 - 3pu^2(2Au+\tau)^2 - 12p^2uv(2Au+\tau) + 16p^3u^3 + 4p^3v^2 = 0. \quad (1)$$

È noto infatti che i nove punti di flesso della cubica:

$$c_1X_1^3 + c_2X_2^3 + c_3X_3^3 + 6cX_1X_2X_3$$

sono determinati dalla intersezione delle rette:

$$\begin{array}{llll} X_1 = 0 \text{ colle } & h_2X_2 + h_3X_3 = 0, & e^2h_2X_2 + eh_3X_3 = 0, & eh_2X_2 + e^2h_3X_3 = 0 \\ X_2 = 0 \quad \text{»} & h_3X_3 + h_1X_1 = 0, & e^2h_3X_3 + eh_1X_1 = 0, & eh_3X_3 + e^2h_1X_1 = 0 \\ X_3 = 0 \quad \text{»} & h_1X_1 + h_2X_2 = 0, & e^2h_1X_1 + eh_2X_2 = 0, & eh_1X_1 + e^2h_2X_2 = 0 \end{array}$$

nelle quali:

$$h_1 = \sqrt[3]{c_1}, \qquad h_2 = \sqrt[3]{c_2}, \qquad h_3 = \sqrt[3]{c_3}.$$

Ora ponendo per brevità:

$$\begin{array}{lll} U = a_2 - b_2, & V = e^2a_2 - eb_2, & W = ea_2 - e^2b_2 \\ U_0 = a_2 + b_2, & V_0 = e^2a_2 + eb_2, & W_0 = ea_2 + e^2b_2 \end{array}$$

si hanno pei rapporti delle p, q che soddisfano alle equazioni superiori i valori seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} \rho p' = \alpha_2(\ h_2W - \ h_3V) & \rho p_0' = \alpha_2(\ h_3U - \ h_1W) & \rho p_1' = \alpha_2(\ h_1V - \ h_2U) \\ \rho p'' = \alpha_2(e^2h_2W - e\,h_3V) & \rho p_0'' = \alpha_2(e^2h_3U - e\,h_1W) & \rho p_1'' = \alpha_2(e^2h_1V - e\,h_2U) \\ \rho p''' = \alpha_2(e\,h_2W - e^2h_3V) & \rho p_0''' = \alpha_2(e\,h_3U - e^2h_1W) & \rho p_1''' = \alpha_2(e\,h_1V - e^2h_2U) \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\rho q' = \delta(\ h_2 W_0 - \ h_3 V_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p' & \rho q'_0 = \delta(\ h_3 U_0 - \ h_1 W_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p'_0 \\ \multicolumn{2}{c}{\rho q'_1 = \delta(\ h_1 V_0 - \ h_2 U_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p'_1} \\ \rho q'' = \delta(e^2 h_2 W_0 - e\ h_3 V_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p'' & \rho q''_0 = \delta(e^2 h_3 U_0 - e\ h_1 W_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p''_0 \\ \multicolumn{2}{c}{\rho q''_1 = \delta(e^2 h_1 V_0 - e\ h_2 U_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p''_1} \\ \rho q''' = \delta(e\ h_2 W_0 - e^2 h_3 V_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p''' & \rho q'''_0 = \delta(e\ h_3 U_0 - e^2 h_1 W_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p'''_0 \\ \multicolumn{2}{c}{\rho q'''_1 = \delta(e\ h_1 V_0 - e^2 h_2 U_0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho p'''_1}\end{array}\right\} \quad (3)$$

La risoluzione della equazione del nono grado (1) non dipende quindi che dalla risoluzione della biquadratica in k od in σ e dalle estrazioni di radici cubiche necessarie per avere i valori di a_2, b_2, h_1, h_2, h_3.

Per le ricerche che intendiamo esporre intorno a questa equazione dobbiamo anzitutto determinare il valore di ρ. A ciò osserviamo che dal gruppo di equazioni (2) si ottengono le:

$$\rho^3 p'p''p''' = \alpha_2^3(c_2 W^3 - c_3 V^3), \qquad \rho^3 p'_0 p''_0 p'''_0 = \alpha_2^3(c_3 U^3 - c_1 W^3),$$
$$\rho^3 p'_1 p''_1 p'''_1 = \alpha_2^3(c_1 V^3 - c_2 U^3)$$

e quindi per le (23) (25) e le (37) della Nota precedente:

$$\rho^3 p'p''p''' = \tfrac{3}{2}(e - e^2)\frac{cn}{k}\alpha_2^3(4\gamma_3 - n\phi\alpha_2)U_0 \tag{4}$$

essendo $\phi = k^2 - 3\alpha k + 3\beta$. Ora per le formole (17) (18) (19) che danno i valori delle α_0, $\alpha_1 \dots \gamma_0$, $\gamma_1 \dots$ nella Nota precedente, si ottiene:

$$4\gamma_3 - n\phi\alpha_2 = -2n(G + 2AE)k(k^2 - \tfrac{3}{2}\alpha k + \beta)$$

o rammentando il valore (35) di δ:

$$4\gamma_3 - n\phi\alpha_2 = 4\frac{G + 2AE}{E}\delta$$

quindi sostituendo nella (4) superiore si avrà:

$$\rho^3 p'p''p''' = 6(e - e^2)\frac{G + 2AE}{E}\frac{cn\delta}{k}\alpha_2^3 U_0$$

ma pel valore di c (39) della Nota 4ª si ha:

$$\frac{6cn\delta}{E} = \frac{1}{3k}$$

perciò il prodotto superiore sarà eguale a:

$$\rho^3 p' p'' p''' = \frac{e-e^2}{3}\frac{\alpha_2^3}{k^2}(G+2AE)U_0.$$

Affatto analogamente si otterranno i valori degli altri due prodotti mutando in quest'ultimo U_0 in V_0, W_0. Indicando quindi con Πp il prodotto di tutte le nove p', p''... si avrà:

$$\rho^9 \Pi p = \tfrac{1}{2}\frac{(e-e^2)^3}{27}(G+2AE)^3 \frac{\alpha_2^9}{k^6}\beta_3$$

ossia pel valore (18) di β_3:

$$\rho^9 \Pi p = \tfrac{1}{2}\frac{(e-e^2)^3}{27}(G+2AE)^3 K \frac{\alpha_2^9}{k^3}\cdot \tag{5}$$

Ora indicando con Q il primo membro della equazione (1) del nono grado, vedesi tosto per le relazioni (2) (4) stabilite nella Nota 1ª che introducendo nella medesima in luogo delle v, u, τ i loro valori in p, q si ha pel coefficiente di q^9 la espressione

$$\frac{K(G+2AE)^3}{16E^9}$$

quindi essendo:

$$Q = \Pi(pq' - qp')$$

si avrà:

$$\Pi p = -\frac{K(G+2AE)^3}{16E^9}$$

e la (5) superiore darà:

$$\rho^3 = \frac{2}{\sqrt{-3}}\frac{E^3\alpha_2^3}{k}$$

da cui il valore di ρ.

Ciò posto indichiamo con L la espressione:

$$L = (pq' - qp')(pq'' - qp'')(pq''' - qp''')$$

e con L_0, L_1 le analoghe per cui $LL_0L_1 = Q$. Sostituendo nelle medesime i valori (2) (3) si trovano dapprima rappresentate sotto la forma seguente:

$$\rho^3 L = c_3[(\alpha_1 p + \alpha_2 q)V - \delta V_0 p]^3 - c_2[(\alpha_1 p + \alpha_2 q)W - \delta W_0 p]^3,$$

quindi con qualche maggiore lunghezza di calcolazione si ottiene pel valore del secondo membro la

$$\frac{E\alpha_2^2}{2k^3\sqrt{-3}}[XU_0 + YU + Z]$$

e perciò rammentando il valore di ρ^3:

$$L = \frac{1}{4E^2k^2\alpha_2}[XU_0 + YU + Z].$$

I valori delle X, Y, Z sono i seguenti:

$$X = 4\{(\beta_1 p^2 + 2\beta_2 pq + \beta_3 q^2)p - EC_0 k[K + (G + 2AE)q]\}$$

$$Y = -E^2 C_0 pnk\phi, \qquad Z = 12E^2 C_0 p\alpha_2$$

nei quali tutte le lettere hanno lo stesso significato che nella Nota precedente.

Le altre due espressioni saranno analogamente:

$$L_0 = \frac{1}{4E^2k^2\alpha_2}[XV_0 + YV + Z], \qquad L_1 = \frac{1}{4E^2k^2\alpha_2}[XW_0 + YW + Z]$$

e quindi la equazione (1) del nono grado si potrà porre sotto la forma:

$$LL_0L_1 = \frac{1}{4^3 \cdot E^6 k^6 \alpha_2^3}[\tfrac{1}{2}\beta_3(X^2 + 3Y^2)X + \tfrac{1}{2}k\gamma_3(Y^2 + 3X^2)Y +$$
$$+ \tfrac{3}{2}\alpha_2 Z(X^2 - Y^2) + Z^3] = 0.$$

Dalle espressioni (2) (3) si ponno facilmente dedurre le proprietà già note pei lavori di Hesse e di altri geometri, e relative alle radici della equazione del nono grado che dà i punti di inflessione di una curva piana del terzo ordine.

Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine.

(*Memoria presentata per la laurea all'Università di Roma da* Ettore Caporali.)

Ci proponiamo in questo lavoro di iniziare lo studio d'una superficie algebrica del quinto ordine dotata d'una curva doppia ancora del quinto ordine; essa è rappresentabile sopra un piano, e gode di interessantissime proprietà. La prima menzione precisa della superficie si trova in una nota posta alla fine della Memoria di Clebsch: *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächen-Abbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (*). Vi si fa cenno delle sue rette e della sua rappresentazione sopra un piano. Il prof. Cremona, nella sua Memoria *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (**), accenna ancora alla rappresentazione della superficie ed alle coniche esistenti su di essa. Infine il sig. Sturm enuncia le principali sue proprietà nella Memoria *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung* (***). Noi abbiamo in animo di presentare ed estendere questi risultati, cercando specialmente di porre in evidenza l'utilità della rappresentazione piana, dalla quale, per altre superficie, si è già tratto tanto profitto.

§ 1.

Formazione di un sistema lineare di superficie del quinto ordine.

1. Sia data in uno spazio S una curva gobba razionale del quarto ordine (2^{a} specie) Q; l'assoggettare una superficie generale del terzo ordine a contenere questa curva, equivale a tredici condizioni lineari: vale a dire, le su-

(*) Mathematische Annalen, vol. III.
(**) Mathematische Annalen, vol. IV.
(***) Mathematische Annalen, vol. IV.

perficie del terzo ordine passanti per tale quartica, sono in numero sei volte infinito. Se quindi si considerano tutte quelle che hanno in un certo punto O un piano tangente T comune, si ha un sistema lineare (triplicemente infinito) di superficie cubiche Φ. Due qualunque di queste superficie hanno in comune, oltre la quartica Q, una curva del quinto ordine (che chiameremo R), la quale passa per O con due rami toccati dal piano T. Questa curva incontra la quadrica H determinata dalla quartica Q, in punti tutti situati sulla stessa curva Q: infatti, se vi fosse un punto comune ad R ed H, fuori di Q, per esso passerebbe una trisecante di Q che sarebbe contenuta per intero sulle superficie cubiche passanti per le curve Q ed R. Dunque:

Le intersezioni variabili R delle superficie del sistema Φ sono curve del 5° ordine con un punto doppio in O (le tangenti essendo nel piano T) e seganti 10 volte la curva Q.

Consideriamo tre superficie del sistema: la quintica ulteriore intersezione di due di esse incontra la terza in 15 punti, dei quali 4 coincidono in O e 10 sono sulla curva Q. Ne segue che:

Tre qualunque delle superficie Φ s'incontrano in un solo punto non comune a tutto il sistema. Ossia: Le superficie Φ formano un sistema omaloidico; vale a dire, possono farsi corrispondere punto per punto ai piani d'uno spazio Σ.

Viene ad essere così stabilita una corrispondenza razionale (univoca) fra i punti dei due spazï S e Σ. Noi la esamineremo, seguendo le nozioni generali sull'argomento, già stabilite da altri (*). Frattanto è evidente che:

Alle rette dello spazio Σ corrispondono le curve R.

2. Cerchiamo la Jacobiana del sistema delle superficie Φ: essa è dell'ottavo ordine e risulta dall'insieme delle superficie dello spazio S alle quali corrispondono linee o punti nello spazio Σ (**). Per ciò, consideriamo una delle superficie Φ, e immaginiamo il piano corrispondente φ nello spazio Σ: tra le 27 rette della superficie ve ne sono due che incontrano la quartica Q tre volte, e cinque che non hanno con essa alcun punto comune (***). Le due prime rette non incontrano le superficie Φ in punti variabili: quindi ad esse corrispondono due punti del piano φ. Il luogo di tutte le rette analoghe è la quadrica H, che perciò fa parte della Jacobiana delle superficie Φ. Il luogo dei

(*) Noether, Math. Annalen, t. 2, 3. — Cremona, Annali di Matem., s. 2ª, t. 5.
(**) Noether, Cremona, l. c.
(***) Cremona, *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre:* G. Crelle-Borchardt, t. 68.

punti corrispondenti ad esse è una curva C dello spazio Σ, fondamentale per la trasformazione: essa è una conica (perchè sopra ogni piano vi sono due de' suoi punti) ed è contenuta semplicemente dalle superficie dello spazio Σ che corrispondono ai piani dello spazio S, vale a dire dalle superficie del sistema omaloidico, del quale andremo gradatamente determinando la natura (*).

Le cinque rette d'una superficie Φ che non incontrano la curva Q, determinano col punto O cinque piani, i quali segnano sulla superficie medesima cinque coniche che incontrano Q quattro volte e toccano in O il piano T: esse non incontrano in punti variabili le superficie del sistema, e per conseguenza hanno per corrispondenti (in un piano dello spazio Σ) cinque punti. Tutte le coniche analoghe formano un sistema semplicemente infinito, il cui luogo è una superficie K che fa parte della Jacobiana delle Φ. A questa superficie corrisponde nello spazio Σ una curva fondamentale E del 5^o ordine (perchè sopra una delle Φ vi sono cinque coniche generatrici di K): essa è doppia per le superficie del sistema omaloidico (**).

3. Determiniamo la natura della superficie K. Se si considera una retta passante per O e appoggiata alla quartica Q, le coniche generatrici che la incontrano passano necessariamente pel punto d'appoggio: vale a dire, il numero delle coniche generatrici che partono da un punto della curva Q è lo stesso che il numero di quelle che incontrano una retta passante per O. Ciò posto, le superficie cubiche che contengono la quartica Q ed hanno un punto doppio in O formano una rete: una retta L passante per O ne determina una, la quale è appunto il luogo delle coniche che incontrano quattro volte la Q, passano per O e incontrano la stessa retta L. Il piano T sega la superficie secondo una cubica con un nodo in O; i punti di questa cubica sono le intersezioni ulteriori col piano T delle coniche sopraindicate: ma la cubica ha due punti infinitamente vicini ad O; dunque la retta L è incontrata da due coniche generatrici di K. La quartica Q è quindi doppia per la superficie K: siccome una superficie Φ incontra la K nella quartica e in cinque coniche generatrici, K è del 6^o ordine: ne segue inoltre che il punto O è per essa quadruplo. Riassumendo,

La superficie K luogo delle coniche che incontrano quattro volte la quartica Q e toccano nel punto O il piano T, è del 6^o ordine; contiene la curva Q come doppia e il punto O come quadruplo.

(*) Noether, Cremona, l. c.
(**) Noether, Cremona, l. c.

4. Le superficie H e K formano tutta la Jacobiana dello spazio S: quindi nello spazio Σ non vi sono altri elementi fondamentali oltre le curve C ed E. Le superficie corrispondenti ai piani dello spazio S sono del 5° ordine, perchè questi piani incontrano in cinque punti le curve R corrispondenti alle rette dello spazio Σ. Dunque:

Ai piani dello spazio S corrispondono superficie Ψ del 5° ordine, le quali hanno in comune una curva doppia del 5° ordine E e una conica C.

Le curve dello spazio Σ corrispondenti alle rette dello spazio S sono del 3° ordine, perchè del 3° ordine sono le superficie Φ. Il numero delle loro intersezioni variabili con una curva fondamentale è eguale all'ordine della superficie corrispondente a questa curva. Dunque:

Alle rette dello spazio S corrispondono nello spazio Σ le cubiche gobbe che incontrano sei volte la quintica E e due volte la conica C: queste cubiche non sono soggette ad altre condizioni, perchè formano già un sistema quadruplamente infinito.

5. Esaminiamo meglio la superficie K e quindi la curva corrispondente E. Alcune coniche generatrici di K si spezzano in due rette e sono le seguenti:

1.° Il piano T sega la quartica fondamentale in quattro punti: si consideri la retta che congiunge uno di questi punti al punto O; essa incontra l'iperboloide H in un altro punto, pel quale si potrà condurre una generatrice trisecante della curva Q. Questa retta e la prima formano insieme una delle coniche generatrici della superficie K. Vi sono quattro coniche così degenerate: ognuna di esse corrisponde evidentemente ad un punto di E situato anche su C, perchè ai punti della conica C corrispondono le generatrici dell'iperboloide H. Dunque:

Le curve fondamentali C ed E dello spazio Σ hanno quattro punti comuni.

2.° Pel punto O passano tre corde D_1, D_2, D_3 della quartica Q: due qualunque di queste rette rappresentano ancora una conica generatrice di K: ciascuna delle tre corde appartenendo a due di tali coniche, è chiaro che le tre rette corrispondono ad uno stesso punto singolare della curva E, che chiameremo U. Il punto U è triplo per la quintica E; e secondochè ad esso si giunga per uno o per un altro dei tre rami della curva, gli si deve considerare come corrispondente una od un'altra delle tre coppie di rette che si ottengono combinando le D_1, D_2, D_3. Queste ultime sono rette doppie per la superficie K.

6. Alle rette dello spazio Σ passanti per il punto U, corrispondono (togliendo dalle curve R le tre rette D_1, D_2, D_3 corrispondenti al punto U) le coniche che passano per O e segano quattro volte la quartica Q. Queste coniche incontrano in due punti variabili un piano qualunque dello spazio S: lo stesso avviene quindi delle rette passanti per U rispetto alla superficie corrispondente a quel piano: vale a dire che U è triplo per quella superficie. Dunque:

La curva del quinto ordine E che è doppia per le superficie Ψ, è dotata di un punto triplo U che è triplo anche per le superficie.

§ 2.

Jacobiana del sistema Ψ. — Proprietà della trasformazione.

7. La ricerca della Jacobiana delle superficie Ψ ci farà conoscere completamente la trasformazione di cui ci occupiamo.

Un punto di Q è semplice per le superficie Φ e per la quadrica H, mentre è doppio per la superficie K: dunque ai punti di Q corrispondono le rette che incontrano due volte E ed una volta C (*). Il luogo di queste rette è una superficie gobba che chiameremo J: essa è del 10° ordine, perchè le curve R (dello spazio S) incontrano 10 volte la curva Q: ha la conica C tripla, perchè le generatrici della quadrica H trisecano Q: possiede la quintica E come quadrupla, perchè le coniche generatrici della superficie K incontrano Q quattro volte: infine la superficie J ha un punto sestuplo in U, perchè le coniche dello spazio S corrispondenti alle rette uscenti da U incontrano in quattro punti variabili la quartica fondamentale.

8. Al punto fondamentale O dello spazio S deve corrispondere in Σ una superficie del 2° ordine, inquantochè alle rette dello spazio Σ corrispondono le curve R che passano con due rami per O. Infatti la quintica E è projettata dal punto U da un cono quadrico, il quale non incontra le superficie Ψ in punti variabili, ma soltanto nella quintica stessa. Questo cono adunque, che chiameremo I, corrisponde al punto O.

La superficie J e il cono I contato tre volte (**), formano insieme tutta la Jacobiana del sistema lineare Ψ.

(*) Cremona, l. c.
(**) Cremona, l. c.

9. Siccome non è nostro scopo principale lo studio generale della trasformazione, ci limiteremo ad indicare i risultati che ci saranno utili in seguito.

Quando una retta si appoggia ad una curva fondamentale del proprio spazio, la linea che corrisponde al punto d'appoggio si stacca dalla curva corrispondente alla retta. Se ne deduce in particolare che:

Alle rette che si appoggiano alle curve E e C corrispondono le coniche che incontrano tre volte la curva Q e toccano in O il piano T.

Alle corde della quintica E corrispondono le corde della quartica Q. Alle tangenti di E corrispondono le corde di Q che toccano la superficie R.

Abbiamo veduto (6) che alle rette (dello spazio Σ) passanti pel punto U corrispondono le coniche che passano per O e segano quattro volte Q: in particolare, alle rette che projettano la conica C da U corrispondono le rette che projettano da O la quartica Q.

10. Fra le coniche dello spazio S corrispondenti alle rette passanti per U, sono a considerare quelle formate da una delle rette D_1, D_2, D_3 (5) (per esempio D_1) e da un'altra corda della quartica Q appoggiata alla stessa (D_1): di queste corde il numero è semplicemente infinito; e tutte corrispondono a rette dello spazio Σ, le quali oltre al passare per U, incontrano ogni superficie Ψ in un solo punto variabile; vale a dire, corrispondono a rette che hanno in U quattro punti comuni con una superficie Ψ. Queste rette formano uno dei piani tangenti in U alle superficie medesime; piani tangenti i quali sono fissi, essendo evidentemente le faccie del triedro determinato dalle tre tangenti in U alla quintica E. Chiameremo questi tre piani x_1, x_2, x_3: ad essi corrispondono nello spazio S tre superficie gobbe del 3° ordine che contengono la quartica Q ed hanno rispettivamente per rette doppie le D_1, D_2, D_3.

11. Se una superficie nello spazio Σ ha in U un punto r^{plo}, la superficie corrispondente nello spazio S conterrà come r-ple le rette D_1, D_2, D_3. Così:

Ai piani passanti per U corrispondono le superficie cubiche che contengono la curva Q e le rette D_1, D_2, D_3; vale a dire, che hanno un punto doppio in O.

Dalla superficie corrispondente al piano della conica C si stacca l'iperboloide H corrispondente alla conica medesima. Quindi:

Al piano della conica C corrisponde il piano T.

Inoltre: ai punti del piano T infinitamente vicini ad O corrispondono le generatrici del cono I.

Ai piani dello spazio S passanti pel punto O corrispondono (staccando dalle superficie Ψ il cono I) le superficie del terzo ordine contenenti le curve C ed E ed aventi per conseguenza un punto doppio conico in U. Se il piano nello spazio S passa per la retta D_1, il cono osculatore in U della superficie corrispondente si spezza in due piani, uno dei quali è il piano x_1 e l'altro passa per la retta $x_2 x_3$. Al piano delle corde D_2, D_3, corrisponde ancora una superficie cubica con un punto biplanare in U; ma i due piani tangenti sono i piani $x_2 x_3$. Le tre superficie corrispondenti ai piani $D_2 D_3$, $D_3 D_1$, $D_1 D_2$ sono completamente determinate dal dover contenere le curve C ed E e dall'aver per piani tangenti in U rispettivamente due dei piani x_1, x_2, x_3 (*).

12. L'attuale trasformazione offre allo studio diverse superficie interessanti. Una fra queste è la superficie K. Inoltre, per esempio, da una superficie del 2° ordine posta nello spazio Σ e contenente la conica C, si ottiene nello spazio S la superficie del 4° ordine dotata di un punto uniplanare (in O), che è stata rappresentata punto per punto sopra un piano dal sig. NOETHER. Da una quadrica qualunque dello spazio Σ, si ricava una superficie del 6° ordine, con una quartica di 2ª specie (Q) doppia e con un punto (O) doppio uniplanare, ecc.

(*) È facile scrivere le formole che si riferiscono a due curve corrispondenti qualunque. Abbiasi nello spazio Σ una curva d'ordine n la quale tocchi in U i piani x_1, x_2, x_3 rispettivamente con α_1, α_2, α_3 rami, passi ancora per U con altri δ rami, incontri β volte la quintica E e γ volte la conica C. La curva corrispondente nello spazio S incontrerà le rette D_1, D_2, D_3 rispettivamente α_1, α_2, α_3 volte: inoltre sia m il suo ordine, incontri s volte la quartica Q, tocchi in O il piano T con p rami e passi per O con altri q rami. Si hanno allora le formole

$$m = 5n - 4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 2\beta - \gamma - 3\delta$$
$$s = 10n - 8(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 4\beta - 3\gamma - 6\delta$$
$$p = 2n - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \beta - 2\delta, \qquad q = \delta$$

e inversamente

$$n = 3m - 2p - q - s$$
$$\beta = 6m - 5p - 4q - 2s - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$\gamma = 2m - s, \qquad \delta = q.$$

Se N ed M sono i numeri delle condizioni lineari che sarebbero necessarie a determinare le due curve, si trova facilmente dalle eguaglianze precedenti che

$$N - 4n = M - 4m.$$

Questa formola è vera in generale per due curve corrispondenti, situate in due spazî che si corrispondono punto per punto secondo una legge qualunque: vale a dire, il numero $N - 4n$ non è alterato da una trasformazione razionale.

§ 3.

Rappresentazione piana d'una superficie Ψ. — Rette della superficie.

13. Prendiamo come fisso un piano Ω nello spazio S e quindi la corrispondente superficie del 5° ordine Ψ nello spazio Σ; il piano Ω potrà assumersi come piano rappresentativo della superficie Ψ. Esso incontra la quartica Q in quattro punti 1, 2, 3, 4, che chiameremo punti fondamentali del piano, e le rette D_1, D_2, D_3 in tre punti O_1, O_2, O_3, che chiameremo punti principali. Questi tre punti (5) rappresentano il punto triplo della superficie Ψ: vale a dire, un punto della superficie infinitamente vicino al punto triplo U sarà rappresentato in Ω da un punto infinitamente vicino all'uno o all'altro dei punti O_1, O_2, O_3; e ciò secondochè esso sarà situato nell'uno o nell'altro dei piani tangenti alla superficie in U. Quindi, se una curva della superficie Ψ ha in U un punto multiplo secondo $m_1 + m_2 + m_3$, toccando con m_1, m_2, m_3 rami rispettivamente i piani x_1, x_2, x_3, la sua immagine nel piano Ω passerà rispettivamente con m_1, m_2, m_3 rami pei punti O_1, O_2, O_3.

14. I quattro punti fondamentali 1, 2, 3, 4 (appartenenti alla quartica Q) rappresentano (7) quattro rette della superficie Ψ che indicheremo con a_1, a_2, a_3, a_4. Le rette che congiungono due a due i punti fondamentali (corde della quartica Q) rappresentano (9) altre 6 rette della superficie che indicheremo con b_{23}, b_{31}, b_{12}, b_{14}, b_{24}, b_{34}. Ora è facile verificare che, se ad una retta dello spazio Σ non corrisponde un punto od una retta, corrisponde necessariamente una linea gobba o una linea piana passante per O e quindi non contenuta nel piano Ω. Se ne conclude adunque che *la superficie Ψ possiede dieci rette. Esse sono corde della curva doppia E* (7, 9) (*).

Evidentemente due rette b s'incontrano solamente quando le loro immagini non passano per uno stesso punto fondamentale; e una retta a e una retta b s'incontrano quando l'immagine della retta b passa pel punto immagine della retta a. Segue da ciò che *una retta della superficie* (per esempio a_1) *ne incontra tre* (b_{12}, b_{13}, b_{14}). E quindi:

Le 10 rette sono distribuite due a due in quindici piani α e s'incontrano in quindici punti β. Per ogni retta passano tre piani α: per ogni punto β passano 5 piani α e in ogni piano α vi sono cinque punti β.

(*) Clebsch, Math. Annalen, t. 3.

I piani α s'incontrano secondo altre 75 rette delle quali per ogni punto β ne passano quattro.

15. Poichè una retta della superficie non ne incontra sei, vi sono $\frac{6 \cdot 10}{2} = 30$ coppie di rette che non s'incontrano.

Presa una di queste coppie vi sono tre rette della superficie che non la incontrano: quindi vi sono $\frac{3 \cdot 30}{3}$ terne di rette che non s'incontrano.

Due gruppi (per esempio $a_1 b_{23} b_{34}$, $a_2 b_{13} b_{14}$) tali che le rette di ciascun gruppo non s'incontrano, mentre ciascuna ne incontra due dell'altro gruppo, si diranno conjugati (Doppeldreien). Due rette che non s'incontrano (come a_1, a_2 nell'esempio scelto) determinano una coppia di gruppi conjugati; d'altra parte in questa coppia vi sono tre coppie di rette che non s'incontrano; ne segue vi sono $\frac{30}{3} = 10$ coppie di gruppi conjugati; esse sono le seguenti

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
a_2 b_{12} b_{24} & a_3 b_{23} b_{34} & a_1 b_{31} b_{14} & a_1 b_{31} b_{12} & a_2 b_{12} b_{23} & a_3 b_{23} b_{31} \\
a_3 b_{31} b_{34} & a_1 b_{12} b_{14} & a_2 b_{23} b_{24} & a_4 b_{43} b_{42} & a_4 b_{41} b_{43} & a_4 b_{42} b_{41} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
a_2\ a_3\ a_4 & a_3\ a_4\ a_1 & a_4\ a_1\ a_2 & a_1\ a_2\ a_3 \\
b_{34} b_{42} b_{23} & b_{41} b_{13} b_{34} & b_{12} b_{24} b_{41} & b_{23} b_{31} b_{12}
\end{array}$$

Le altre 10 terne di rette che non s'incontrano godono della proprietà che per ciascuna terna vi è una retta che le incontra tutte tre (14).

Presa una coppia di terne conjugate vi è una retta che non incontra nessuna delle 6 rette della coppia: questa retta insieme a ciascuna terna forma un gruppo di quattro rette che non s'incontrano. Vi sono cinque di queste quaterne di rette: una è rappresentata dai quattro punti fondamentali e le altre quattro da ciascun punto fondamentale insieme alle rette che congiungono gli altri tre: vale a dire, esse sono le seguenti

$$a_1 a_2 a_3 a_4, \qquad a_1 b_{23} b_{24} b_{34}, \qquad a_2 b_{31} b_{34} b_{14}, \qquad a_3 b_{12} b_{14} b_{24}, \qquad a_4 b_{23} b_{31} b_{12}.$$

Questi gruppi sono, come si vedrà, della massima importanza.

§ 4.

Immagine della curva doppia.
Costruzione di una rappresentazione piana della superficie Ψ.

16. L'immagine della curva doppia della superficie è data dalla intersezione del piano rappresentativo colla superficie fondamentale K: essa è quindi

una curva Θ del 6° ordine la quale ha sette punti doppi nei punti fondamentali e principali (3, 5). Un punto della curva doppia E ha per immagini due punti della curva Θ, e precisamente i due punti in cui la corrispondente conica generatrice di K incontra il piano rappresentativo. Quindi i punti della curva Θ sono conjugati due a due: anzi, poichè la quintica E è razionale (avendo un punto triplo), la curva Θ è iperellittica.

17. Il piano di una conica generatrice della superficie K è un piano tangente della superficie stessa: infatti la sua sezione ha un punto doppio di più della sezione fatta con un piano qualunque passante per O. Quindi l'inviluppo dei piani delle coniche generatrici è il cono circoscritto alla superficie K col vertice in O: ora la sezione nella superficie d'un piano passante per O è una curva della 10^{a} classe e perciò dal punto O (quadruplo) le si possono condurre due sole tangenti. Il cono circoscritto è dunque del secondo ordine: ne segue che, nel piano rappresentativo, l'inviluppo delle rette che contengono le coppie di punti conjugati della immagine della curva doppia, è una conica (che diremo Δ) la quale tocca in sei punti l'immagine stessa. I tre punti O_1, O_2, O_3 sono conjugati evidentemente due a due, perchè colle tre coppie che formano, rappresentano i tre punti della curva doppia infinitamente vicini al punto triplo. Dunque:

La conica Δ è inscritta nel triangolo dei punti principali.

Questa conica corrisponde punto per punto alla curva doppia, come risulta dalla sua generazione. Essa è l'immagine di una curva gobba del 6° ordine (perchè incontra in sei punti le superficie Φ), la quale può esser costruita direttamente nello spazio. Infatti i punti della sua immagine Δ sono le intersezioni del piano rappresentativo colle rette che passano pel punto O e toccano la superficie K; e a tali rette corrispondono nello spazio Σ coniche tangenti alla curva E, che passano per U e bisecano la conica C. Dunque:

Le coniche che passano pel punto triplo della superficie Ψ, bisecano la conica C e toccano la curva doppia, incontrano la superficie in un solo altro punto il cui luogo è una curva gobba del 6° ordine che ha per immagine la conica Δ.

Il luogo di queste coniche (corrispondente al cono circoscritto alla superficie K) è una superficie del 6° ordine per la quale la curva E è cuspidale, la conica C è doppia e il punto U è quadruplo: essa interseca ulteriormente la superficie Ψ lungo la suddetta curva del 6° ordine. Del resto i piani delle coniche che servono alla costruzione di questa curva sono i piani tangenti del cono I che projetta da U la curva doppia.

18. La costruzione ora indicata rientra in un'altra colla quale si può ottenere direttamente la rappresentazione della superficie Ψ sopra un piano.

I punti del piano rappresentativo Ω (nello spazio S) corrispondono univocamente alle rette che li congiungono al punto O. Ciò dimostra, per mezzo della trasformazione, la seguente proprietà, nello spazio Σ: un punto della superficie Ψ determina una (ed una sola) conica che passi pel punto triplo e seghi due volte le curve E e C: vale a dire, un punto della superficie determina un certo piano. Inversamente ciascun piano passante pel punto U sega le curve E e C in quattro punti che insieme ad U determinano una conica, la quale incontra la superficie Ψ in un altro solo punto: vale a dire, un piano passante per U determina un punto di Ψ.

Segando quindi con un piano Λ la stella dei piani passanti per U, le coniche ora considerate ci permettono di stabilire una corrispondenza univoca fra le rette del piano Λ e i punti della superficie Ψ.

19. Le rette del piano Λ corrispondenti ai punti di una sezione piana di Ψ inviluppano una curva che rappresenta la sezione piana medesima. La classe di questa curva è eguale al numero delle coniche determinate dai punti della sezione piana, le quali incontrano ulteriormente una retta passante per U: ora queste coniche si trasformano nelle rette (dello spazio S) passanti per O e situate in un piano, le quali incontrano una sezione piana d'una superficie omaloide Φ; e tali rette sono tre. Dunque nella rappresentazione della superficie Ψ che abbiamo costruita, le sue sezioni piane hanno per immagini curve della terza classe; e perciò tale rappresentazione è la trasformata per dualità di quella punto per punto che abbiamo precedentemente stabilita, ossia della rappresentazione normale.

§ 5.

Sezioni piane di Ψ. — Piani tangenti e bitangenti. Quartiche piane della superficie.

20. Ritorniamo allo studio del piano rappresentativo Ω. Le sezioni piane della superficie Ψ sono rappresentate dalle intersezioni del piano Ω colle superficie del sistema Φ e perciò sono cubiche passanti pei quattro punti fondamentali. I dieci punti d'intersezione d'una qualunque di queste immagini colla immagine Θ della curva doppia debbono formare cinque coppie di punti con-

jugati (16) rappresentanti i cinque punti doppi della sezione di Ψ. Siccome quelle cubiche debbono essere in numero tre volte infinito, ne deduciamo, a posteriori, che le cubiche passanti pei quattro punti fondamentali, le quali incontrano in due coppie di punti conjugati la curva Θ, la incontrano ancora in altre tre coppie di punti conjugati. Del resto, questo sarà chiarito in seguito: e così ci riserbiamo di ricercare la completa determinazione geometrica del sistema delle immagini delle sezioni piane e della immagine della curva doppia.

21. Le sezioni prodotte dai piani passanti pel punto triplo sono evidentemente rappresentate dalla rete delle cubiche passanti pei sette punti fissi del piano (fondamentali e principali) (13).

22. Preso un punto ad arbitrio nel piano, vi è una cubica del sistema lineare (tre volte infinito) che ha ivi un punto doppio: questa cubica è l'immagine della sezione fatta nella superficie dal piano tangente nel punto corrispondente a quello assunto nel piano.

Se si conduce pel punto triplo un piano tangente alla superficie, l'immagine della sua sezione è una cubica passante pei sette punti (21) fissi e dotata di un punto doppio. Dunque la Hessiana della rete delle cubiche pei sette punti, è l'immagine della curva di contatto del cono circoscritto alla superficie, che ha il vertice in U. Questa Hessiana è una curva del 6° ordine (che chiameremo Π) la quale passa con due rami per ciascuno dei punti 1, 2, 3, 4, O_1, O_2, O_3: essa incontra le immagini delle sezioni piane in 10 punti; dunque la curva di contatto è una curva del 10° ordine: infatti si può verificare direttamente che il cono circoscritto è del 4° ordine.

23. La curva di contatto del cono circoscritto deve passare pei punti cuspidali della curva doppia e viceversa, i punti comuni alle due curve sono cuspidali per la seconda: ora le curve Θ e Π s'incontrano in 8 punti ω; dunque sulla curva doppia vi sono 8 punti nei quali i due piani tangenti alla superficie coincidono.

24. La sezione di un piano bitangente, dovendo possedere sette punti doppi, deve necessariamente essere composta di due curve, le quali possono essere una retta ed una quartica, ovvero una conica ed una cubica.

I piani passanti per una retta della superficie sono bitangenti: si hanno dunque intanto dieci fasci di piani bitangenti, ed anche dieci serie di curve piane del quarto ordine, ciascuna coordinata ad una retta della superficie. Esse sono rappresentate come segue:

1.° dalle sei serie di coniche che passano per due punti fondamentali e incontrano la curva Θ in due coppie di punti conjugati; queste coniche incontrano la curva Θ in una terza coppia di punti conjugati, e in due punti fissi conjugati a quelli in cui l'immagine della retta coordinata alla serie incontra la stessa curva Θ;

2.° dalle quattro serie di cubiche assoggettate ad avere un punto doppio in uno dei punti fondamentali, a passare per gli altri tre e ad incontrare la curva Θ in due coppie di punti conjugati; esse la incontrano in altri due punti conjugati variabili, e in due punti fissi determinati sulla curva Θ da quella delle cubiche della serie che passa per i punti O_1, O_2, O_3.

Infatti, sulla superficie, le quartiche di una serie hanno tutte tre punti doppi sulla curva E e inoltre la incontrano in due punti fissi che sono comuni anche alla retta asse del fascio. Quindi questa retta e le curve della serie hanno in comune due punti variabili, i quali generano sulla retta una involuzione. Vi sono due quartiche della serie che toccano la retta coordinata: i punti di contatto sono punti parabolici della superficie: vale a dire, i piani delle due quartiche sono piani tangenti stazionarî.

Risulta immediatamente dalle immagini nel piano rappresentativo, che due quartiche appartenenti a due serie diverse hanno in comune quattro o tre punti, secondochè le due serie sono coordinate a due rette che s'incontrano oppur no. Per un punto della superficie passano evidentemente dieci curve piane del quarto ordine: quelle passanti per U hanno ivi un punto triplo.

§ 6.

Coniche; cubiche piane. — Sviluppabili dei piani bitangenti.

25. La sezione di un piano bitangente può esser formata anche da una conica ed una cubica. Ora una conica della superficie non può aver per immagine che una retta passante per uno dei punti fondamentali, ovvero una conica passante per tutti quattro. Perciò vi sono sulla superficie cinque serie semplicemente infinite di coniche, le quali sono rappresentate dal fascio delle coniche passanti pei punti 1, 2, 3, 4, e dai quattro fasci di rette aventi i centri in questi stessi punti (*).

Si vede che ognuna di questa serie è coordinata ad uno dei cinque gruppi di quattro rette, che abbiamo già distinti (15): e precisamente le coniche di

(*) CREMONA, STURM, l. c.

una serie incontrano le quattro rette d'un gruppo e non incontrano le altre sei. Una conica qualunque incontra in quattro punti la curva doppia. Due coniche della stessa serie non s'incontrano: due coniche di serie diverse hanno in generale un punto comune.

Per un punto qualunque della superficie passano cinque coniche, una per ciascuna serie: per un punto di una retta passano due sole coniche, le altre tre avendo degenerato in coppie di rette: per uno dei quindici punti β, comuni alle rette della superficie, non passa nessuna conica propria. Per un punto della curva doppia passano dieci coniche, due per ciascuna serie: pel punto triplo ne passano quindici, tre per ciascuna serie.

26. Nel piano rappresentativo, per un punto fondamentale possono condursi quattro tangenti alla immagine di una sezione piana: dunque una sezione piana della superficie è toccata da quattro coniche di una serie. Questa proprietà, come è facile scorgere, può essere enunciata così: il luogo dei poli, rispetto alle coniche d'una serie, delle rette comuni ai loro piani e ad un piano fisso, è una curva gobba del quarto ordine.

In ispecie:

Il luogo dei centri delle coniche d'una serie, è una curva gobba del quarto ordine: nella serie vi sono quattro parabole (*).

27. Ecco altre proprietà, che riferite al piano rappresentativo diventano evidenti. Le quattro punteggiate che una serie di coniche genera sulle quattro rette che la caratterizzano, sono projettive. Se si considerano due serie di coniche, v'è una retta della superficie che è incontrata da ambedue le serie: diremo che le coniche delle due serie si corrispondono projettivamente, quando projettivamente si corrispondono i punti in cui esse incontrano quella retta. Il luogo dei punti comuni alle coniche corrispondenti è una curva gobba di quarto ordine e seconda specie, che incontra due volte quella retta.

28. L'esistenza di cinque serie di coniche porta con sè quella di cinque serie di cubiche piane: queste cubiche hanno un punto doppio sulla curva E e la incontrano in altri quattro punti pei quali passa la conica che completa la sezione piana. Ogni serie di cubiche è congiunta ad una serie di coniche: le cubiche incontrano le sei rette che non sono incontrate dalle coniche. Queste cubiche piane sono rappresentate delle rette che congiungono due punti conjugati della curva Θ e dalle coniche che passano per tre punti fondamentali e incontrano Θ in due punti conjugati.

(*) Sturm, l. c.

Due cubiche della stessa serie hanno un punto comune: ne segue che le cubiche d'una serie hanno un inviluppo. Abbiamo già veduto che le rette che congiungono i punti conjugati della curva Θ inviluppano la conica Δ (17), la quale rappresenta una certa curva gobba del 6° ordine: questa curva è dunque l'inviluppo della prima serie di cubiche piane. Tale proprietà mostra che la conica C, che ha servito alla costruzione di questa curva nello spazio a tre dimensioni, gode di una proprietà speciale che la distingue dalle altre della sua serie.

Quella curva del 6° ordine tocca in 6 punti la curva doppia, ed ha per corde le 6 rette che incontrano le cubiche inviluppate, mentre non incontra le altre. Queste proprietà, che valgono anche per le altre 4 curve analoghe prodotte dalle altre serie, fanno conoscere senz'altro le loro immagini. Così l'immagine dell'inviluppo dell'altra serie delle cubiche piane che non incontrano la retta a_1, è una curva del quarto ordine per la quale i punti 2, 3, 4, sono doppi: essa è toccata dalle tre coniche che passano pei punti 2, 3, 4 e per due punti principali.

29. Intanto si vede che per un punto della superficie passano dieci cubiche piane, due per ciascuna serie. Pel punto triplo ne passano tre per ciascuna serie. Per un punto della curva doppia (e per una data serie, per esempio la prima) passa una cubica piana avente ivi un punto doppio, e ne passano semplicemente altre due, le quali hanno un altro punto comune. Troviamo il luogo di questo punto. Il problema riportato nel piano rappresentativo è questo: trovare il luogo del punto comune alle tangenti condotte alla conica Δ da due punti conjugati della curva Θ. Ora, si consideri una tangente di Δ; essa incontra Θ in due punti conjugati e in altri quattro punti: pei punti conjugati a questi ultimi si conducano le tangenti alla conica, le quali determineranno sulla tangente considerata quattro punti del luogo cercato: esso è quindi del quarto ordine, passa evidentemente pei punti O_1, O_2, O_3, ed è razionale, perchè i suoi punti corrispondono univocamente alle tangenti della conica Δ. Dunque: il luogo dei punti comuni alle cubiche piane d'una serie, le quali s'incontrano diggià sulla curva doppia, è una curva gobba razionale del 12° ordine che passa per U con tre rami, ha tre punti nodali ed è incontrata quattro volte dalle sei rette coordinate alla serie.

30. Le cinque serie di piani bitangenti che segano la superficie secondo una conica ed una cubica, inviluppano cinque sviluppabili che chiameremo S, S_1, S_2, S_3, S_4, in corrispondenza alle cinque quaterne di rette della superficie, che le distinguono. Abbiamo veduto che per un punto qualunque della super-

ficie passa una conica d'una serie e due cubiche piane della serie congiunta, vale a dire, vi passano tre piani bitangenti d'una stessa serie. Dunque le cinque sviluppabili S sono della terza classe e per conseguenza del quarto ordine.

Consideriamo la S. La curva Δ che abbiamo già considerato come inviluppo delle cubiche piane (28) è evidentemente la curva d'intersezione della sviluppabile colla superficie: e siccome questa curva è incontrata da sei rette della superficie in due punti, senza esserlo dalle altre quattro, ne segue che la sviluppabile S ha per tangenti doppie le quattro rette del gruppo coordinato e per tangenti semplici le altre sei (*).

31. L'immagine della curva di contatto della sviluppabile S sarà il luogo dei punti comuni ad una retta che contiene due punti conjugati, e alla conica passante pei punti 1, 2, 3, 4, che insieme colla retta forma l'immagine d'una sezione piana. Ora, per questo luogo i punti fondamentali sono doppi, perchè per ciascuno di essi passano due delle rette (le tangenti alla conica Δ) e le due coniche corrispondenti. Inoltre, sopra una conica del fascio non vi sono altri punti del luogo che i quattro punti doppi e i due punti nei quali la conica è segata dalla retta corrispondente. Dunque l'immagine cercata è del quinto ordine: essa incontra in sette punti variabili l'immagine di una sezione piana; e perciò la curva di contatto della sviluppabile S è del 7° ordine. Essa ha per corde le quattro rette del gruppo coordinato ed è incontrata una volta dalle altre sei rette.

Questa curva passa evidentemente per gli otto punti cuspidali (23) della curva doppia, e pei punti in cui la curva doppia è toccata dalla curva del 6° ordine, secondo la quale la sviluppabile sega la superficie: quindi la sua immagine incontra la curva Θ negli otto punti ω e nei 6 punti conjugati ai punti di contatto delle curve Δ e Θ.

Come si vede, le coppie di punti di contatto sono segnate sulla curva dalle coniche della serie corrispondente: sei di queste coniche toccano la curva, i punti di contatto essendo punti parabolici della superficie.

32. Tutto quel che s'è detto vale anche per altre quattro sviluppabili bitangenti: le immagini delle loro curve di contatto sono le curve del quarto ordine che hanno un punto doppio in un punto fondamentale, passano per gli altri tre e per gli otto punti ω, ciò che basta a determinarle.

(*) Vale a dire che ogni retta della superficie tocca due volte due delle cinque sviluppabili e una volta le altre tre. — STURM, l. c.

§ 7.

Piani tritangenti.

33. Affinchè un piano tocchi in tre punti la superficie, è necessario che la sua sezione (dovendo avere otto punti doppï) si spezzi in tre curve, le quali potranno essere, o due rette e una cubica, o una retta e due coniche.

Ne segue che i quindici piani che contengono due rette della superficie, sono piani tritangenti. I tre punti di contatto sono il punto d'incontro delle due rette e i due punti in cui le rette incontrano la cubica fuori della curva doppia.

I piani passanti per una retta della superficie la segano secondo una serie di quartiche: quante di esse si spezzano in due coniche? Consideriamo, per fissare le idee, la retta b_{12}, rappresentata dalla retta 12: le quartiche piane relative hanno per immagini le coniche che passano pei punti 3, 4 e pei due punti α e β conjugati a quelli nei quali la retta 12 incontra la curva Θ: quindi le coppie di rette $\alpha 3$, $\beta 4$ e $\beta 3$, $\alpha 4$, rappresentano due quartiche piane degenerate in coppie di coniche. Perciò, oltre quelli già considerati, passano per una retta altri due piani tritangenti. Concludendo:

La superficie possiede in tutto 35 piani tritangenti, 20 dei quali segano la superficie secondo due coniche e una retta e 15 secondo due rette e una cubica: per ogni retta, ne passano due della prima specie e tre della seconda.

§ 8.

Punti conjugati della superficie.

34. Veniamo ad uno studio più accurato della curva Θ immagine della curva doppia della superficie.

Le sezioni fatte nella superficie dai piani passanti pel punto triplo, hanno per immagini (21) le cubiche passanti pei sette punti doppï della curva Θ: ora, le medesime sezioni, hanno due punti doppi sulla curva doppia; quindi, nel piano rappresentativo, le cubiche della rete determinata dai sette punti doppï della curva Θ, la incontrano in due coppie di punti conjugati. Le curve della rete, le quali passano per un punto fisso della curva Θ, rappresentano le sezioni fatte dai piani i quali passano pel punto triplo e per un altro punto della curva doppia: esse hanno in quest' ultimo un punto doppio, che è rappresentato dal punto assunto sulla curva Θ e dal suo conjugato. Ne segue che tutte le cubiche Γ (*) che passano per un punto della curva Θ passano anche pel punto conjugato.

Ciò posto, è naturale di far rientrare la corrispondenza di punti sulla curva Θ, in una corrispondenza di tutti i punti del piano rappresentativo. Chiameremo conjugati due punti del piano rappresentativo i quali formano insieme coi sette punti fissi, i punti base di un fascio di cubiche. La corrispondenza è univoca e costituisce una trasformazione razionale del piano su sè stesso.

35. Quando un punto del piano percorre una certa linea, il conjugato descrive una linea conjugata alla prima. La curva Θ è conjugata a sè stessa.

La curva conjugata ad una retta è stata trovata direttamente da Geiser (**); ma nel nostro caso può essere agevolmente ottenuta con considerazioni speciali. È evidente che due punti conjugati del piano rappresentativo sono le immagini di due punti della superficie allineati col punto triplo: quindi due curve conjugate sono le immagini di due curve costituenti la completa intersezione della superficie con un certo cono avente il vertice nel punto U. Ora, una retta del piano rappresenta una cubica gobba della superficie: questa è projettata dal punto U per mezzo di un cono del terzo ordine, il quale sega inoltre la superficie secondo una curva del 12° ordine, che passa con nove rami per U e incontra tre volte ciascuna delle rette a: la sua immagine è quindi una curva dell' ottavo ordine avente come tripli i sette punti fissi del piano. Le curve analoghe a questa formano una rete razionale conjugata alle rette del piano (***).

36. Deve esservi un luogo di punti conjugati a loro stessi. Una retta incontra la curva conjugata in otto punti: fra queste vi è una sola coppia di punti conjugati, perchè pel punto triplo della superficie si può condurre una sola corda ad una sua cubica gobba: gli altri sei punti d'incontro sono quindi conjugati a loro stessi. Infatti i punti che coincidono coi loro conjugati, sono

(*) Chiameremo così le immagini delle sezioni piane passanti per U.
(**) Geiser, *Ueber zwei geometrische Probleme:* Crelle, t. 67.
(***) Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.*

i punti doppî delle cubiche Γ, il cui luogo è la Hessiana Π, che abbiamo già considerata (22) come immagine del luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da U alla superficie.

37. Le cubiche Γ sono conjugate a sè stesse. Considerandone una, le rette che congiungono i punti conjugati su di essa passano per un punto fisso della cubica stessa (the coresidual, secondo SYLVESTER). Il luogo di questo punto [per proprietà note (*)] per tutte le cubiche dotate di punto doppio, coincide coll'inviluppo delle rette del piano sulle quali i due punti conjugati coincidono. Questo inviluppo è una curva della quarta classe e del 12° ordine, i cui punti doppî sono: 7 nei punti fissi del piano e altri 21, uno su ciascuna delle coniche determinate dai sette punti presi cinque a cinque.

38. Queste proprietà del piano rappresentativo danno le seguenti altre della superficie:

Le rette del piano sono le immagini di una serie doppiamente infinita di cubiche gobbe (**); i due punti conjugati su ciascuna retta sono le immagini dei due punti della cubica gobba allineati col punto U;

Ciò posto, data la sezione fatta da un piano passante per U, tutte le cubiche gobbe d'un sistema le quali contengono due punti della sezione allineati con U, passano per un altro punto fisso della sezione stessa. Il luogo di questo punto per le sezioni di tutti i piani tangenti alla superficie, coincide coll'inviluppo delle cubiche gobbe (dello stesso sistema), le quali hanno una tangente passante per U: questo inviluppo è una curva del 28° ordine, che passa con 6 rami pel punto triplo, incontra due volte quattro rette e otto volte le altre sei, ed ha 21 punti doppî.

39. Preso un punto P nel piano rappresentativo, il luogo delle coppie di punti conjugati situate su tutte le rette passanti per esso, è una cubica della rete (***). La retta che congiunge al punto P un punto comune a questa cubica ed alla curva Θ contiene necessariamente un altro punto comune a queste due curve (34); e siccome la cubica incontra in quattro punti la curva Θ, ne segue che nel punto P passano due rette, ognuna delle quali contiene una coppia di punti conjugati della curva Θ. Queste due rette sono infatti le tangenti condotte da P alla conica Δ (17).

(*) SALMON, *Higher plane curves,* 2ª ed., art. 264.

(**) Vi sono, come vedremo, altri sistemi di queste curve, i quali però godono di analoghe proprietà.

(***) SALMON, l. c.

§ 9.

Caratteri iperellittici della curva Θ.
Costruzione del sistema delle immagini delle sezioni piane.

40. Poichè una cubica Γ incontra in generale la curva Θ in due coppie di punti conjugati, quando essa la tocca in un punto, la tocca necessariamente anche nel conjugato: vale a dire, vi è un sistema semplicemente infinito di cubiche Γ che hanno un doppio contatto colla curva Θ. Queste cubiche sono le immagini delle sezioni prodotte nella superficie dai piani passanti per U e tangenti alla curva doppia. Il punto coresiduale (37) dei sette punti fissi sopra una qualunque di queste coniche bitangenti è un punto della conica Δ, per la quale si ottiene quindi un modo di generazione per punti.

Vi sono 8 serie di cubiche Γ tali che tutte quelle di una serie toccano la curva Θ in uno stesso punto, che è un punto conjugato a sè stesso, ossia un punto ω (23): esse rappresentano le sezioni prodotte nella superficie dagli 8 fasci di piani aventi per assi le rette che vanno dal punto U ai punti cuspidali della curva doppia. Così vi sono 28 cubiche Γ che toccano Θ in due punti ω.

41. Queste proprietà che fanno eccezione alle proprietà generali delle curve, dipendono dalla natura iperellittica della curva Θ. Ancor più interessanti sono le proprietà analoghe del sistema lineare delle cubiche immagini delle sezioni piane della superficie.

Così, vi è una serie semplicemente infinita di queste cubiche, osculatrici in due punti conjugati della curva Θ: esse rappresentano le sezioni fatte dai piani osculatori della curva E. Vi è un numero semplicemente infinito di quelle cubiche, che hanno quattro contatti bipunti colla curva Θ; sono le immagini delle sezioni fatte dai piani bitangenti della curva doppia. Vi sono ancora 8 cubiche che hanno due contatti quadripunti e 12 che hanno due contatti tripunti e due semplici colla curva Θ: infatti la curva doppia ha otto piani stazionarî, e dodici piani osculatori in un punto e tangenti in un altro.

Di più, vi sono a considerare i piani passanti per uno, due o tre punti cuspidali, e si vede che vi sono 8 serie doppiamente infinite di cubiche del sistema lineare tangenti a Θ in un punto ω conjugato a sè stesso, 28 serie semplicemente infinite di cubiche tangenti in due punti ω e 56 cubiche tritangenti, i punti di contatto essendo conjugati a sè stessi.

42. La curva Θ avendo 7 punti doppî è della sedicesima classe: quindi essa ha 32 tangenti in comune colla conica Δ: otto di queste sono le tangenti nei punti ω; le rimanenti sono le tangenti della curva Θ che contengono una coppia di punti conjugati, ossia rappresentano le cubiche piane di una serie, tangenti alla curva doppia. Dodici di quelle tangenti sono assorbite dalle tangenti alla conica Δ nei punti in cui essa tocca la curva Θ.

43. Ricerchiamo ora come si possa geometricamente determinare un sistema lineare di cubiche capaci di rappresentare le sezioni piane della nostra superficie.

Supponiamo in primo luogo assunti ad arbitrio i sette punti 1, 2, 3, 4, O_1', O_2, O_3; allora i punti del piano diventano conjugati due a due, nel senso che abbiamo già fissato. La curva Θ, nella sua natura geometrica, è completamente definita dall'essere una curva del 6° ordine conjugata a sè stessa. Quest'ultima condizione porta con sè l'esistenza dei 7 punti doppî: per tutte le curve così fatte, l'inviluppo delle rette che congiungono i punti conjugati è una conica. Inversamente: presa una conica qualunque, il luogo delle coppie dei punti conjugati situate sulle sue tangenti è una curva del 6° ordine. E poichè le coniche sono in numero cinque volte infinito, ne segue che le curve del 6° ordine conjugate a sè stesse, sono in numero cinque volte infinito.

D'altronde, si può vedere direttamente come cinque punti arbitrarî $A_1 \ldots A_5$ determinano una (ed una sola) di tali curve. Infatti, sia A_0 il punto conjugato ad A_1: siccome una curva del 6° ordine è determinata da 27 condizioni, così i sei punti A_0, $A_1, \ldots A_5$ e i sette punti fissi presi come doppî determinano una di queste curve: e questa curva è conjugata a sè stessa, perchè pei sette punti fissi e pei punti A_0, A_1 passa un fascio di cubiche le quali incontrano la curva in due punti variabili, che sono conjugati.

44. Ciò posto, venga fissata una cubica passante pei punti 1, 2, 3, 4 e del resto arbitraria: la sua curva conjugata è una curva del 12° ordine che passa con quattro rami per ciascuno dei punti fondamentali (*): le due curve s'incontrano in 20 punti; togliendone le dieci intersezioni della cubica colla

(*) Questo si trova come abbiamo trovato la curva conjugata ad una retta (35).

Hessiana Π (36), risulta che sulla cubica, esistono cinque coppie di punti conjugati. Se si prendono cinque punti, uno per ciascuna coppia, essi determinano una curva del 6° ordine conjugata a sè stessa e passante per conseguenza anche per gli altri cinque punti: assumendo questa curva come immagine della curva doppia, la cubica, incontrandola in cinque coppie di punti conjugati, rappresenterà una sezione piana della superficie.

Dunque il sistema triplicemente infinito delle immagini delle sezioni piane, può essere determinato per mezzo della rete delle cubiche pei sette punti fissi e di una cubica qualunque pei punti 1, 2, 3, 4.

§ 10.

Singolarità ordinarie della superficie. — Curva parabolica.

45. Le sezioni piane della superficie, essendo curve del quinto ordine dotate di cinque punti doppï, sono della 10^a classe: quindi, il cono circoscritto alla superficie che ha il vertice in un punto qualunque dello spazio è del 10° ordine.

46. Le immagini delle sezioni prodotte dai piani passanti per una retta formano un fascio di cubiche, i punti base essendo le immagini dei cinque punti d'incontro della retta colla superficie e i quattro punti fondamentali: fra le curve del fascio ve ne sono dodici che hanno un punto doppio e che rappresentano sezioni di piani tangenti: dunque la superficie è della 12^a classe.

47. La sviluppabile dei piani bitangenti essendo formata da 10 fasci di piani (24) e da cinque sviluppabili della terza classe (30), ne segue che per un punto dello spazio passano 25 piani bitangenti.

Ora che conosciamo l'ordine del cono circoscritto alla superficie (45), la sua classe (46) e i suoi piani tangenti doppï, le formole di Plücker ci danno immediatamente le altre singolarità. E si trova che per un punto dello spazio passano 18 rette osculatrici della superficie, 12 tangenti doppie e 24 piani stazionarï.

48. Se il cono circoscritto ha il vertice in un punto della superficie, diviene dell'ottavo ordine, mentre conserva la stessa classe e lo stesso numero di piani tangenti inflessionali, come nel caso precedente. Se ne ricava che

per un punto della superficie passano quattro tangenti doppie e 12 rette osculatrici.

In un piano qualunque vi sono 15 rette osculatrici e 20 rette bitangenti. Fra le tangenti in un punto alla superficie, ve ne sono quattro che la toccano altrove.

49. Abbiamo veduto che la sviluppabile dei piani stazionarï è della 24^a classe (47): essa tocca la superficie lungo la curva parabolica, secondo la quale la superficie stessa è incontrata dalla sua Hessiana. La Hessiana è del 12^o ordine: la curva doppia della superficie deve contarsi otto volte nella intersezione (*): quindi la curva parabolica è del 20^o ordine. Quale è la sua immagine? Una retta del piano rappresenta una cubica la quale incontra la Hessiana quattro volte in ciascuno dei 6 punti che la cubica ha comuni colla curva doppia e in altri 12 punti: quindi l'immagine della curva parabolica è una curva del 12^o ordine.

Ogni retta della superficie tocca in due punti la curva parabolica (24): quindi i punti fondamentali 1, 2, 3, 4 sono quadrupli per la sua immagine, le tangenti distinte in ciascuno essendo soltanto due. I sei lati del quadrangolo dei punti fondamentali, sono tangenti doppie dell'immagine.

50. Abbiamo veduto che sulla curva di contatto di una delle sviluppabili S dei piani bitangenti, vi sono sei punti parabolici (31); in questi punti la curva di contatto e la curva parabolica si toccano. Le immagini delle due curve s'incontrano 28 volte: 12 intersezioni sono assorbite dai sei punti di contatto e le altre 16 dalle immagini dei punti cuspidali della curva doppia (punti ω). La curva di contatto dei piani bitangenti passando semplicemente per ciascun punto cuspidale, la curva parabolica vi passerà con due rami (**).

(*) Sappiamo che ogni retta della superficie ha comuni due coppie di punti colla curva parabolica (24): le altre 8 intersezioni sono sulla curva doppia.

(**) Diversi dei risultati di questo paragrafo possono essere verificati colla considerazione delle superficie polari: queste superficie essendo del quarto ordine e passando per la curva doppia, le loro intersezioni variabili colla superficie hanno per immagini curve del 6^o ordine che passano due volte pei punti fondamentali. Due di queste curve s'incontrano nei punti ω (perchè le polari toccano la superficie nei punti cuspidali) e in altri 12 punti: dunque la superficie è della 12^a classe. Una di queste curve incontra la curva Θ nei punti ω e in altri 12 punti: dunque la sviluppabile dei piani tangenti alla superficie lungo la curva doppia è della dodicesima classe. Una di quelle immagini incontra 40 volte l'immagine della curva parabolica: 24 intersezioni dipendono dal fatto che la sviluppabile dei piani stazionarï è della 24^a classe: le altre 16 sono assorbite dai punti ω: dunque i punti ω sono doppi per l'immagine della curva parabolica.

§ 11.

Curve gobbe della superficie. — Sistemi di curve iperellittiche.

51. Fermiamoci un momento sulle curve tracciate in generale sulla superficie. Sia C_{mp} una curva della superficie d'ordine m e di genere p, senza punti multipli effettivi: e supponiamo che la sua immagine nel piano rappresentativo sia una curva d'ordine n, per la quale i punti fondamentali siano multipli secondo α_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Si avranno le formole

$$m=3n-\sum\alpha_i, \qquad p=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\sum\tfrac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-1).$$

Per determinare completamente l'immagine, bisogna fissare

$$\frac{n}{2}(n+3)-\sum\tfrac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i+1)$$

punti: in virtù delle formole precedenti, questo numero diviene $m+p-1$: quindi, una curva della superficie d'ordine m e di genere p è determinata da $m+p-1$ punti: ossia per questi punti passa un numero finito N di curve.

Si troverebbe facilmente in modo analogo, che: per $m+p-2$ punti della superficie passano N serie semplicemente infinite di curve C_{mp}: le curve di ciascuna serie hanno in comune altri p punti fissi e nessun punto variabile: fra le curve di ciascuna serie ve ne sono $m+6p+1$ dotate di un punto doppio (*).

Per $m+p-3$ punti passano N serie doppiamente infinite di curve C_{mp}: il luogo dei punti di contratto delle curve d'una serie, è una curva d'ordine $3m-5$ (*).

Il cono del 2° ordine che contiene la curva doppia incontra la superficie soltanto nella curva doppia medesima. Quindi: Una curva C_m incontra in $2m$ punti la curva doppia.

52. Le cubiche gobbe della superficie formano cinque serie doppiamente infinite: le loro immagini sono le rette del piano rappresentativo e le coniche passanti per tre punti fondamentali. Ciascuna serie è coordinata ad una quaterna di rette: ogni cubica non incontra le rette della quaterna, mentre sega una volta le altre sei.

(*) Quest'ultimo numero è esatto solo quando nessuna delle α sia eguale a zero.

Ci si sono già presentate alcune proprietà di queste curve. Una cubica è toccata da due coniche della superficie. La curva doppia è toccata in un suo punto da due cubiche d'una stessa serie: le loro immagini (per la prima serie) sono le tangenti alla curva Θ in due punti conjugati: quelle cubiche hanno un punto comune, il cui luogo è una curva che corrisponde univocamente alla curva doppia.

La curva Θ ha 30 tangenti stazionarie e 72 tangenti doppie: quindi, fra le cubiche d'una serie, ve ne sono 30 che osculano la curva doppia e 72 che hanno con essa un doppio contatto.

53. La superficie non possiede curve del quarto ordine e di prima specie. Vi sono invece 10 serie triplicemente infinite di quartiche gobbe razionali, che sono rappresentate dalle coniche passanti per due punti fondamentali e dalle cubiche aventi un punto doppio e tre punti semplici nei punti fondamentali. Le quartiche d'una serie incontrano due volte una retta della superficie, e perciò ogni serie è coordinata ad una retta: le curve d'una serie non incontrano le tre rette appoggiate alla prima e incontrano una volta le altre sei. Queste curve del quarto ordine possono tutte esser generate mediante le intersezioni delle coniche di due serie corrispondentisi proiettivamente (27).

54. Sono interessanti, per le proprietà delle loro immagini, le curve d'intersezione della superficie coi coni che hanno il vertice nel punto triplo. Queste intersezioni sono rappresentate da curve conjugate a sè stesse nella corrispondenza di 8° grado che abbiamo stabilita (34, 35). Se il cono è d'ordine n l'immagine della sua intersezione colla superficie è una curva d'ordine $3n$ che passa con n rami per ciascuno dei 7 punti fissi. Il cono essendo determinato da $\frac{n}{2}(n+3)$ condizioni, ne segue che le curve d'ordine $3n$ conjugate a sè stesse formano una serie $\frac{n}{2}(n+3)$ volte infinita.

Per un punto del piano passano n rette che contengono due punti conjugati dell'immagine: ossia, l'inviluppo delle rette che congiungono due punti conjugati è una curva della classe n (39).

Quando questo inviluppo è una curva razionale, la curva immagine è iperellittica. Dunque: le curve iperellittiche d'ordine $3n$ con 7 punti n-pli, sono in numero $3n-1$ volte infinito. In questo caso l'inviluppo è d'ordine $2(n-1)$, possiede $2(n-2)(n-3)$ punti doppi, $3(n-2)$ cuspidi e $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ tangenti doppie. Se osserviamo che questo inviluppo è il luogo dei punti coresiduali (37) per le cubiche bitangenti alla curva iperellittica, si deduce dai numeri precedenti, che:

Data una curva iperellittica d'ordine $3n$ con 7 punti n-pli, fra le cubiche passanti per questi sette punti, ve ne sono $2(n-2)(n-3)$ che toccano in quattro punti la curva e ve ne sono $3(n-2)$ che la osculano in due punti (*).

Inoltre: La curva ha $4n$ punti conjugati a sè stessi (i punti d'intersezione colla Hessiana Π). In ciascuno di questi punti essa è toccata da un numero infinito di cubiche passanti pei sette punti multipli: fra queste ve ne sono $2(n-2)$ che hanno inoltre colla curva un doppio contatto. Infatti, i coresiduali di queste cubiche stanno nei punti d'intersezione della curva inviluppo colla sua tangente corrispondente al punto conjugato a sè stesso che si considera.

La curva inviluppo ha una tangente doppia, quando la curva data ha due punti conjugati doppï. Quindi: la curva iperellittica possiede $(n-1)(n-2)$ punti doppï, situati in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ coppie di punti conjugati. Questo ci mostra che si ottiene una immagine iperellittica, quando si seghi la superficie con un cono razionale; e che il cono e la curva inviluppo nel piano rappresentativo, si corrispondono per dualità.

55. Terminiamo accennando all'esistenza di certe altre curve che danno luogo ad una bella proprietà della curva Θ. Sulla superficie possono essere tracciati cinque sistemi cinque volte infiniti di curve gobbe razionali del 6° ordine: esse sono rappresentate dalle coniche del piano rappresentativo e dalle curve del quarto ordine che hanno per punti doppï tre punti fondamentali. Ciascun sistema è coordinato ad una quaterna di rette. Fra queste curve sono da contarsi le linee d'intersezione della superficie colle sviluppabili dei suoi piani bitangenti. Abbiamo indicato una maniera di costruire la curva che ha per immagine la conica Δ: le coniche dello spazio, in numero semplicemente infinito, che passano pel punto triplo U della superficie, toccano la curva doppia E e segano due volte una certa conica C (la conica fondamentale nel sistema lineare delle superficie del 5° ordine), incontrano di nuovo la superficie in un punto variabile che descrive la curva rappresentata dalla conica Δ. Ora, invece della conica C, qualunque altra conica della serie può servire ad una costru-

(*) Se la curva iperellittica è del 9° ordine, vi sono tre cubiche della rete che hanno con essa due contatti tripunti; le tre corde di contatto passano per uno stesso punto. Se la curva è del 12° ordine, vi sono quattro cubiche della rete che hanno con essa due doppi contatti; le otto corde di contatto toccano una stessa conica.

zione analoga: e si ottengono altre curve della stessa natura, rappresentate da coniche, le quali, come Δ, toccano in sei punti la curva Θ. Dunque:

La curva Θ è toccata in 6 punti dalle coniche di un sistema semplicemente infinito.

§ 12.

Equazione della superficie. — Formole della rappresentazione piana. Equazione della conica Δ.

56. Prima di abbandonare questa superficie, vogliamo dare le principali equazioni che si riferiscono alla sua rappresentazione. Sappiamo (11) che vi sono tre superficie cubiche completamente individuate dalle condizioni di dover contenere la quintica E e la conica C e di avere nel punto U per piani tangenti due dei tre piani x_1, x_2, x_3, il cui triedro ha per spigoli le tangenti in U alla quintica E.

Indichiamo con $P=0$ l'equazione (che per ora lasciamo indeterminata) del cono che projetta da U la conica C. Sia $x_4=0$ il piano di questa conica e siano δ_1, δ_2, δ_3, le coordinate del punto della quintica E situato su questo piano fuori della conica. Allora le equazioni

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= d'\ x_2x_3x_4-P(\delta_3x_2-\delta_2x_3)=0\\ \Phi_2 &= d''\ x_3x_1x_4-P(\delta_1x_3-\delta_3x_1)=0\\ \Phi_3 &= d'''x_1x_2x_4-P(\delta_2x_1-\delta_1x_2)=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

rappresentano tre superficie le quali hanno il punto doppio e i piani tangenti sopra indicati, segano il piano $x_4=0$ secondo la conica C e, rispettivamente, secondo le rette che congiungono il punto δ_1, δ_2, δ_3 alle traccie degli spigoli del triedro $x_1\ x_2\ x_3$: inoltre se si elimina la x_4 dalle tre equazioni combinate due a due, le tre risultanti hanno in comune il fattore

$$P(d'\delta_1x_2x_3+d''\delta_2x_3x_1+d'''\delta_3x_1x_2),$$

purchè le costanti d', d'', d''', soddisfino alla relazione

$$d'+d''+d'''=0.$$

Posta quindi questa condizione alla quale soddisfaremo collo scrivere

$$d'=d_2-d_3,\qquad d''=d_3-d_1,\qquad d'''=d_1-d_2,$$

le equazioni 1) rappresenteranno le tre superficie cubiche di cui abbiamo parlato: e l'equazione

$$I = d'\delta_1 x_2 x_3 + d''\delta_2 x_3 x_1 + d'''\delta_3 x_1 x_2 = 0$$

rappresenterà il cono quadrico I che contiene la quintica E.

57. Ciò posto, la nostra superficie del quinto ordine Ψ e il cono $P=0$ formano insieme un luogo del 7° ordine pel quale sono doppie le curve C ed E, ossia le curve comuni alle tre superficie Φ_1, Φ_2, Φ_3. Questo luogo sarà dunque rappresentato da una equazione della forma

$$X'\Phi_1^2 + X''\Phi_2^2 + X'''\Phi_3^2 + X_1\Phi_2\Phi_3 + X_2\Phi_3\Phi_1 + X_3\Phi_1\Phi_2 = 0,$$

dove le X sono espressioni lineari nelle x_1, x_2, x_3.

La parte di questa equazione che non contiene P è

$$\{ d'^2 x_2^2 x_3^2 X' + d''^2 x_3^2 x_1^2 X'' + d'''^2 x_1^2 x_2^2 X''' +$$
$$+ x_1 x_2 x_3 (d'' d''' x_1 X_1 + d''' d' x_2 X_2 + d' d'' x_3 X_3) \} x_4^2;$$

e affinchè essa sia, come vogliamo (*), della forma $\lambda x_1 x_2 x_3 x_4^2 P$, basta porre identicamente

$$X' = X'' = X''' = 0.$$

Scriveremo dunque

$$X_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad X_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad X_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3;$$

$$P = d'' d''' x_1 X_1 + d''' d' x_2 X_2 + d' d'' x_3 X_3; \tag{2}$$

$$S = X_1 \Phi_2 \Phi_3 + X_2 \Phi_3 \Phi_1 + X_3 \Phi_1 \Phi_2; \tag{3}$$

e l'equazione della superficie Ψ sarà

$$\Psi = \frac{S}{P} = 0,$$

e sviluppata, avrà la forma

$$\psi = x_1 x_2 x_3 x_4^2 - F x_4 + GP = 0.$$

58. Frattanto osserviamo che le equazioni 1) si possono scrivere così:

$$\Phi_1 = x_2(d_3 x_3 x_4 - \delta_3 P) - x_3(d_2 x_2 x_4 - \delta_2 P)$$
$$\Phi_2 = x_3(d_1 x_1 x_4 - \delta_1 P) - x_1(d_3 x_3 x_4 - \delta_3 P)$$
$$\Phi_3 = x_1(d_2 x_2 x_4 - \delta_2 P) - x_2(d_1 x_1 x_4 - \delta_1 P).$$

(*) Il coefficiente di x_4^2 nell'equazione della superficie Ψ deve essere il prodotto delle equazioni dei piani tangenti alla superficie in U, ossia $x_1 x_2 x_3$.

Quindi, se poniamo

$$\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = y_1 : y_2 : y_3,$$

ne risulta

$$\left.\begin{array}{c} y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0 \\ y_1(d_1 x_1 x_4 - \delta_1 P) + y_2(d_2 x_2 x_4 - \delta_2 P) + y_3(d_3 x_3 x_4 - \delta_3 P) = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dalla prima di queste due equazioni e dalla 3) che diviene

$$y_2 y_3 X_1 + y_3 y_1 X_2 + y_1 y_2 X_3 = 0,$$

Si ricava

$$x_1 : x_2 : x_3 = L : M : N, \qquad (5)$$

dove

$$L = y_2 W - y_3 V, \qquad M = y_3 U - y_1 W, \qquad N = y_1 V - y_2 U$$

e

$$\begin{aligned} U &= a_1 y_2 y_3 + b_1 y_3 y_1 + c_1 y_1 y_2 \\ V &= a_2 y_2 y_9 + b_2 y_3 y_1 + c_2 y_1 y_2 \\ W &= a_3 y_2 y_3 + b_3 y_3 y_1 + c_3 y_1 y_2. \end{aligned}$$

Posti i valori 5) nella seconda delle 4), se ne può ricavare x_4, e scrivere quindi il sistema di formole

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= L\,(d_1 y_1 L + d_2 y_2 M + d_3 y_3 N) \\ \rho x_2 &= M(d_1 y_1 L + d_2 y_2 M + d_3 y_3 N) \\ \rho x_3 &= N(d_1 y_1 L + d_2 y_2 M + d_3 y_3 N) \\ \rho x_4 &= P(\delta_1 y_1 \quad + \delta_2 y_2 \quad + \delta_3 y_3) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dove ρ è una quantità arbitraria e P si intende espresso con $y_1 y_2 y_3$ in virtù delle 5)

Queste formole esprimono ancora il luogo rappresentato dalla equazione 3) $S = 0$, alla quale si ritornerebbe eliminando da esse le quantità ρ, y_1, y_2, y_3.

Ma osserviamo che

$$\begin{aligned} a_1 L + a_2 M + a_3 N &= y_1 A \\ b_1 L + b_2 M + b_3 N &= y_2 B \\ c_1 L + c_2 M + c_3 N &= y_3 C, \end{aligned}$$

dove

$$A = y_2 v - y_3 w, \qquad B = y_3 w - y_1 u, \qquad C = y_1 u - y_2 v$$

e quindi

$$A+B+C=0;$$

e dove u, v, w, sono i tre determinanti (in y_1, y_2, y_3) tratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

In conseguenza di ciò, si ottiene

$$\left. \begin{aligned} P&=d''d'''y_1AL+d'''d'y_2BM+d'd''y_3CN= \\ &=(d_1A+d_2B+d_3C)(d_1y_1L+d_2y_2M+d_3y_3N): \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

e perciò dalle formole 6) si può togliere il fattore che si riferisce al cono $P=0$, e si ottengono le formole

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1&=y_2W-y_3V=L \\ \rho x_2&=y_3U-y_1W=M \\ \rho x_3&=y_1V-y_2U=N \\ \rho x_4&=(\delta_1y_1+\delta_2y_2+\delta_3y_3)(d_1A+d_2B+d_3C)=\delta D \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

le quali esprimono le coordinate di un punto qualunque della superficie Ψ in funzione dei parametri variabili y_1, y_2, y_3.

59. Se le y_1, y_2, y_3 si considerano come le coordinate di un punto del piano Ω (13), si ottiene precisamente la rappresentazione piana della superficie Ψ, che abbiamo studiato fin qui.

Le curve

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0,$$

hanno in comune sette punti rappresentati dalle soluzioni comuni alle equazioni

$$\frac{U}{y_1}=\frac{V}{y_2}=\frac{W}{y_3}:$$

tre di questi punti sono i vertici del triangolo

$$y_1=0, \qquad y_2=0, \qquad y_3=0,$$

che sono i punti O_1, O_2, O_3: ognuno di questi è doppio per una delle tre cubiche; del resto esse sono le immagini delle sezioni fatte nella superficie dai piani tangenti nel punto U.

Le curve composte

$$y_1 A = 0, \qquad y_2 B = 0, \qquad y_3 C = 0,$$

come abbiamo veduto, sono espresse linearmente colle L, M, N, vale a dire, appartengono alla rete da queste determinata. Esse rappresentano evidentemente le sezioni dei tre piani bitangenti della serie coordinata alla prima quaterna di rette, i quali passano per U.

Frattanto i quattro punti fondamentali sono i punti comuni alle coniche

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

ossia i punti dati dalle equazioni

$$y_1 u = y_2 v = y_3 w.$$

Il piano $x_4 = 0$ è anch'esso un piano bitangente la cui sezione è rappresentata dal luogo

$$\delta D = 0.$$

60. Conosciamo diggià quattro rette

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad \delta = 0,$$

che rappresentano cubiche piane della prima serie: troviamo l'immagine di una cubica piana qualunque della stessa serie. Una sezione piana qualunque è rappresentata dall'equazione

$$\lambda_1 L + \lambda_2 M + \lambda_3 N + \lambda_4 \delta D = 0$$

ovvero anche dall'altra

$$\omega_1 y_1 A + \omega_2 y_2 B + \omega_3 y_3 C + \omega_4 \delta D = 0.$$

Determiniamo i parametri ω in modo che quest'ultima rappresenti la sezione di un piano bitangente, vale a dire sia della forma

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)(l y_1 + m y_2 + n y_3) = 0.$$

Per identificare le due equazioni, basta porle sotto la forma

$$(\omega_2 y_2 - \omega_3 y_3 + \omega_4 d' \delta) y_1 u + (\omega_3 y_3 - \omega_1 y_1 + \omega_4 d'' \delta) y_2 v + (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_4 d''' \delta) y_3 w = 0$$

$$(l y_1 + m y_2 + n y_3)\{(\mu - \nu) y_1 u + (\nu - \lambda) y_2 v + (\lambda - \mu) y_3 w\} = 0.$$

Eguagliando i coefficienti di u, v, w, se ne ricava

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = \frac{\delta_1}{\mu - \nu} : \frac{\delta_2}{\nu - \lambda} : \frac{\delta_3}{\lambda - \mu} : \frac{1}{d'\lambda + d''\mu + d'''\nu} \qquad (9)$$

$$l:m:n = \frac{d'\delta_1}{\mu-\nu} : \frac{d''\delta_2}{\nu-\lambda} : \frac{d'''\delta_3}{\lambda-\mu} \tag{10}$$

ed anche

$$\frac{d'\delta_1}{l} + \frac{d''\delta_2}{m} + \frac{d'''\delta_3}{n} = 0.$$

Ne segue che la retta

$$ly_1 + my_2 + ny_3 = 0,$$

qualora rappresenti una cubica piana, è una tangente della conica

$$\sqrt{d'\delta_1 y_1} + \sqrt{d''\delta_2 y_2} + \sqrt{d'''\delta_3 y_3} = 0.$$

Questa è dunque l'equazione della conica Δ, immagine della curva d'intersezione della sviluppabile S dei piani bitangenti, colla superficie. Per avere l'immagine della curva di contatto della sviluppabile medesima, basta eliminare λ, μ, ν, dalle equazioni

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

$$\frac{d'\delta_1}{\mu-\nu} y_1 + \frac{d''\delta_2}{\nu-\lambda} y_2 + \frac{d'''\delta_3}{\lambda-\mu} y_3 = 0.$$

Si ottiene la risultante

$$d'\delta_1 y_1 BC + d''\delta_2 y_2 CA + d'''\delta_3 y_3 AB = 0$$

che rappresenta l'immagine richiesta. Non ci dilunghiamo nel ritrovare su queste equazioni le proprietà che abbiamo già studiate.

61. Poichè la conica

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

passa per quattro punti fissi, le quantità λ, μ, ν debbono esprimersi per mezzo d'un parametro variabile. Si riconoscerà molto opportuno il porre

$$\lambda = d_1\theta + d_2 d_3, \qquad \mu = d_2\theta + d_3 d_1, \qquad \nu = d_3\theta + d_1 d_2.$$

Allora le formole 9) e 10) diventano

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = \frac{\delta_1}{d'(\theta - d_1)} : \frac{\delta_2}{d''(\theta - d_2)} : \frac{\delta_3}{d'''(\theta - d_3)} : -\frac{1}{d'\,d''\,d'''}$$

$$l:m:n = \frac{\delta_1}{\theta - d_1} : \frac{\delta_2}{\theta - d_2} : \frac{\delta_3}{\theta - d_3}.$$

I diversi valori di θ corrispondono nel piano rappresentativo alle coppie di punti conjugati della curva Θ: la retta che congiunge due punti conjugati è

$$\frac{\delta_1 y_1}{\theta - d_1} + \frac{\delta_2 y_2}{\theta - d_2} + \frac{\delta_3 y_3}{\theta - d_3} = 0.$$

Dai valori delle ω, si ricava che l'equazione di un piano bitangente della prima serie è

$$\frac{d'' d''' \delta_1}{\theta - d_1} X_1 + \frac{d''' d' \delta_2}{\theta - d_2} X_2 + \frac{d' d'' \delta_3}{\theta - d_3} X_3 - x_4 = 0.$$

Il discriminante di questa equazione, considerata come funzione del parametro θ, è l'equazione della sviluppabile S.

§ 13.

Equazioni delle curve Π e Θ. — Curve conjugate a sè stesse.

62. Scriviamo le formole di quella trasformazione razionale, nella quale due punti corrispondenti sono le immagini di due punti della superficie allineati col punto triplo. Ad una retta qualunque del piano corrisponde (35) una curva dell'ottavo ordine passante con tre rami per ciascuno dei sette punti fissi. D'altra parte in conseguenza della definizione geometrica di due punti conjugati, alla retta che congiunge due punti fondamentali della trasformazione, corrisponde la conica determinata dagli altri cinque. Ne segue che ad un punto fondamentale corrisponde la cubica che passa per esso con due rami e contiene gli altri sei. Così alle rette

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0$$

corrispondono le coniche

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0;$$

ed ai vertici del triangolo ch'esse formano, corrispondono le coniche

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Dunque le formole della trasformazione sono

$$y_1 : y_2 : y_3 = AMN : BNL : CLM.$$

63. La curva conjugata alla retta

$$y_1 + \lambda y_2 = 0$$

è

$$AM+\lambda BL=0.$$

I quattro punti d'intersezione (dipendenti da λ) delle due linee, sono punti dell'Hessiana Π: quindi eliminando λ fra le due equazioni, si avrà per la curva Π l'equazione

$$y_1 BL-y_2 AM=0,$$

che può scriversi più simmetricamente come segue:

$$y_2 y_3 AU+y_3 y_1 BV+y_1 y_2 CW=0. \tag{11}$$

64. Alla retta

$$ly_1+my_2+ny_3=0$$

corrisponde la curva

$$lAMN+mBNL+nCLM=0.$$

Ponendo per L, M, N le loro espressioni 8), questa equazione può essere facilmente ridotta alla forma

$$\begin{aligned}&(y_2 y_3 AU+y_3 y_1 BV+y_1 y_2 CW)(lU+mV+nW)+\\&+(y_1 AVW+y_2 BWU+y_3 CUV)(ly_1+my_2+ny_3)=0.\end{aligned}$$

Così, in primo luogo è posto in evidenza che i punti d'incontro della retta colla Hessiana appartengono alla curva conjugata. Inoltre, vediamo che la coppia di punti conjugati della retta

$$ly_1+my_2+ny_3=0 \tag{12}$$

è determinata su di essa dalla conica

$$lU+mV+nW=0 \tag{13}$$

che passa pei punti O_1, O_2, O_3.

65. I due punti conjugati coincidono, se è verificata la condizione

$$\sqrt{ll'}+\sqrt{mm'}+\sqrt{nn'}=0 \tag{14}$$

dove l', m', n' sono formate colle l, m, n come le X colle x. Questa è l'equazione tangenziale dell'inviluppo delle rette sulle quali i due punti conjugati coincidono (37).

66. Se si vuole il luogo delle coppie di punti conjugati situati nelle rette d'un fascio il cui centro è il punto y'_1, y'_2 y'_3, basterà eliminare l, m, n fra

l'equazione

$$ly'_1+my'_2+ny'_3=0$$

e le 12) e 13): si ottiene

$$y'_1L+y'_2M+y'_3N=0,$$

che è l'equazione di una cubica qualunque della rete, dove però sono poste in evidenza le coordinate del punto coresiduale che serve a determinarla.

67. Le coordinate della retta che congiunge due punti conjugati della curva Θ soddisfano (60) alla relazione

$$\frac{d'\delta_1}{l}+\frac{d''\delta_2}{m}+\frac{d'''\delta_3}{n}=0;$$

se fra questa equazione e le 12) e 13) si eliminano le quantità l, m, n, si ottiene l'equazione della curva Θ, che è la seguente

$$d'\delta_1 MN+d''\delta_2 NL+d'''\delta_3 LM=0.$$

Questa equazione poteva scriversi direttamente, osservando che il cono quadrico che contiene la curva doppia e non incontra la superficie fuori di essa, ha per equazione (56)

$$d'\delta_1 x_2x_3+d''\delta_2 x_3x_1+d'''\delta_3 x_1x_2=0.$$

68. La risoluzione delle equazioni 12) e 13) dà le coordinate di due punti conjugati qualunque: i loro valori possono essere posti sotto la forma

$$\begin{aligned}
y_1&=k_1(mm'-nn')+l\,(k_2m-k_3n)\pm k_1\sqrt{\Omega}\\
y_2&=k_2(nn'-ll')+m(k_3n-k_1l)\pm k_2\sqrt{\Omega}\\
y_3&=k_3(ll'-mm')+n\,(k_1l-k_2m)\pm k_3\sqrt{\Omega}
\end{aligned}$$

dove l', m', n' hanno il significato loro attribuito più sopra (65); k_1, k_2, k_3 sono tre quantità arbitrarie, ma che soddisfano la relazione

$$lk_1+mk_2+nk_3=0;$$

Ω è il primo membro della condizione di contatto fra le linee 12) e 13), ossia è il primo membro della 14) resa razionale (*).

(*) Queste formole sono facili a stabilirsi: k_1, k_2, k_3, sono le coordinate di un punto qualunque della retta 12): le parti che precedono i doppï segni sono le coordinate del punto reciproco a questo, rispetto alla conica 13) e situato sulla retta stessa.

Se la retta 12) contiene due punti conjugati della curva Θ, si ha

$$l:m:n=\frac{\delta_1}{\theta-d_1}:\frac{\delta_2}{\theta-d_2}:\frac{\delta_3}{\theta-d_3}:$$

Supponendo sostituiti nelle formole precedenti questi valori, esse esprimono le coordinate di un punto della curva Θ per mezzo del parametro θ; è così posto in evidenza il carattere iperellittico delle curva stessa.

Fatta la sostituzione medesima nella equazione

$$\Omega=0,$$

essa diventa una equazione dell'ottavo grado in θ, le cui radici sono i parametri dei punti ω, immagini dei punti cuspidali della curva doppia.

69. Le cubiche

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0,$$

sono conjugate a sè stesse: quindi una equazione della forma

$$F(L,\ M,\ N)=0$$

rappresenta una curva conjugata a sè stessa. Inversamente l'equazione di ogni curva conjugata a sè stessa, deve potersi porre sotto quella forma; perchè una tal curva è l'immagine della intersezione della superficie con un cono

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3)=0.$$

Così per esempio il quadrato dell'equazione 11) della Hessiana Π può esser posto sotto la forma

$$\begin{vmatrix} O & N & M & y_1A \\ N & O & L & y_2B \\ M & L & O & y_3C \\ y_1A & y_2B & y_3C & O \end{vmatrix}=0;$$

e noi sappiamo che i prodotti y_1A, y_2B, y_3C sono esprimibili per le L, M, N. Questo risultato ci mostra che l'equazione del cono circoscritto alla superficie col vertice nel punto triplo è

$$\begin{vmatrix} O & x_3 & x_2 & X_1 \\ x_3 & O & x_1 & X_2 \\ x_2 & x_1 & O & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & O \end{vmatrix}=0$$

ovvero

$$\sqrt{x_1 X_1} + \sqrt{x_2 X_2} + \sqrt{x_3 X_3} = 0:$$

il cono è adunque generale nel proprio ordine; e sono posti in evidenza sei dei suoi piani bitangenti.

Così ancora il prodotto delle equazioni di due curve conjugate deve essere esprimibile razionalmente per le funzioni L, M, N: ne abbiamo incontrato un esempio nell'equazione 7), dove i due fattori

$$d_1 A + d_2 B + d_3 C \quad \text{e} \quad d_1 y_1 L + d_2 y_2 M + d_3 y_3 N$$

eguagliati a zero rappresentano due curve conjugate.

Sia

$$f(l, m, n) = 0$$

l'equazione in coordinate di rette di una curva qualunque di classe μ: se si eliminano le l, m, n fra questa equazione e le 12) e 13), si ottiene la risultante

$$f(L, M, N) = 0,$$

che rappresenta il luogo delle coppie di punti conjugati situati sulle tangenti della curva data: il luogo è una curva d'ordine 3μ. Si ritrovano così le proprietà precedentemente enumerate (54).

Mediante questa osservazione, si poteva passare immediatamente dalla equazione 14) alla 15).

§ 14.

Formole della corrispondenza fra gli spazï S e Σ.

70. Possiamo infine scrivere le formole della trasformazione che collega gli spazï S e Σ (§ 1).

Siano

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0$$

le facce del triedro formato dalle tre corde D_1, D_2, D_3 della quartica Q passanti per O: sappiamo (11) che a questi piani corrispondono nello spazio Σ le superficie

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0;$$

mentre al loro punto comune O corrisponde il cono

$$I=0$$

che contiene la quintica E. Sia inoltre $y_4=0$ il piano Ω al quale corrisponde la superficie del 5° ordine (57)

$$\Psi=0.$$

Allora le formole che esprimono un punto dello spazio S per mezzo del punto corrispondente dello spazio Σ, sono

$$\rho y_1=\Phi_1 I$$
$$\rho y_2=\Phi_2 I$$
$$\rho y_3=\Phi_3 I$$
$$\rho y_4=\Psi.$$

71. Troviamo le formole inverse. In primo luogo rammentiamo che, per l'equazione 7), alla intersezione colla superficie Ψ del cono $P=0$ corrisponde nello spazio S e sul piano $y_4=0$, il luogo

$$(d_1 A+d_2 B+d_3 C)(d_1 y_1 L+d_2 y_2 M+d_3 y_3 N)=0:$$

d'altronde al cono $P=0$ corrisponde il cono che projetta da O la quartica Q, mentre alla conica C contenuta nel cono $P=0$ corrisponde l'iperboloide contenente la quartica Q (2, 9). Segue da ciò che l'equazione del cono che contiene la quartica Q è

$$d_1 y_1 L+d_2 y_2 M+d_3 y_3 N=0. \tag{16}$$

Ciò posto, ai piani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, dello spazio Σ, corrispondono (10) le superficie cubiche che contengono semplicemente la quartica Q e due delle rette D_1, D_2, D_3 e contengono come doppia la terza retta. Le sezioni di queste superficie nel piano $y_4=0$, sono le curve

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0:$$

le equazioni delle tre superficie sono le seguenti

$$d' \, y_2 y_3 y_4+L=0$$
$$d'' \, y_3 y_1 y_4+M=0$$
$$d''' y_1 y_2 y_4+N=0.$$

Infatti, se da queste equazioni prese due a due si elimina la y_4, le tre risultanti hanno in comune, come fattore, il primo membro della 16) (*).

Sarà dunque frattanto

$$x_1 : x_2 : x_3 = d' y_2 y_3 y_4 + L : d'' y_3 y_1 y_4 + M : d''' y_1 y_2 y_4 + N. \qquad (17)$$

Al piano $x_4 = 0$ corrisponde (11) un luogo formato dall'iperboloide H e dal piano T. L'equazione del piano T è quella della sua traccia sul piano Ω, vale a dire

$$\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 = 0.$$

Per trovare l'equazione dell'iperboloide, osserviamo che se l'equazione del cono P, ossia

$$d'' d''' x_1 X_1 + d''' d' x_2 + d' d'' x_3 X_3 = 0,$$

si trasforma colle formole 17), si deve ottenere il prodotto dell'equazione

$$d_1 y_1 L + d_2 y_2 M + d_3 y_3 N = 0$$

e dell'equazione della quadrica H. Siccome si conosce l'uno dei due fattori, è facile ricavar l'altro; e si trova per l'equazione dell'iperboloide

$$H = d' d'' d''' y_4^2 + (d'' d''' p + d''' d' q + d' d'' r) y_4 + d_1 A + d_2 B + d_3 C = 0,$$

dove

$$p = a_3 y_2 - a_2 y_3, \qquad q = b_1 y_3 - b_3 y_1, \qquad r = c_2 y_1 - c_1 y_2.$$

Ciò posto, le formole inverse cercate saranno

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= d' \, y_2 y_3 y_4 + L \\ \sigma x_2 &= d'' \, y_3 y_1 y_4 + M \\ \sigma x_3 &= d''' y_1 y_2 y_4 + N \\ \sigma x_4 &= (\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3) H. \end{aligned}$$

72. Se i valori 17) si sostituiscono nell'equazione

$$d' \delta_1 x_2 x_3 + d'' \delta_2 x_3 x_1 + d''' \delta_3 x_1 x_2 = 0$$

del cono I, si ottiene l'equazione della superficie fondamentale K. Qualora si ponga

$$P = d_1 y_1 y_4 - U, \qquad Q = d_2 y_2 y_4 - V, \qquad R = d_3 y_3 y_4 - W,$$

(*) Per vederlo subito, basta rammentare che si ha identicamente

$$d' + d'' + d''' = 0, \qquad y_1 L + y_2 M + y_3 N = 0.$$

l'equazione può scriversi così

$$\begin{vmatrix} 0 & d'''\delta_3 & d''\delta_2 & y_1 & P \\ d'''\delta_3 & 0 & d'\delta_1 & y_2 & Q \\ d''\delta_2 & d'\delta_1 & 0 & y_3 & R \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \\ P & Q & R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Forse ritorneremo su quest'ultima superficie, che presenta molto interesse.

Roma, 6 luglio 1875.

Sulle condizioni per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari.

(*Nota del prof.* F. Brioschi, *a Milano.*)

1.° È noto che se una cubica ternaria è decomponibile in tre fattori lineari la stessa proprietà ha luogo per l'hessiano di essa, il quale eguaglia il prodotto di quei tre fattori lineari per un coefficiente costante.

Il sig. Salmon nel suo eccellente libro: *A treatise on the higher plane curves*, (2.ª Edizione, pag. 190) considerando questo caso, osserva che per la suddetta proprietà dell'hessiano devono i coefficienti delle varie potenze e prodotti delle variabili di esso essere proporzionali ai corrispondenti coefficienti della forma data; ottenendosi così un sistema di quarantacinque equazioni, che in realtà deve potersi ridurre ad uno composto di sole tre equazioni.

Scopo di questa Nota è di completare in questa parte le ricerche del signor Salmon col determinare effettivamente le tre equazioni, condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari.

Supporremo la forma cubica ternaria posta sotto la forma:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3ux_3 + 2v$$

nella quale u, v sono due forme binarie in x_1, x_2 quadratica la prima, cubica la seconda.

Assumendo le notazioni o denominazioni delle Note 1ª e 3ª da me aggiunte alla Memoria di Clebsch: *Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperellittiche* (Vedi Annali di Matematica, t. VII, pag. 123, 132) si ha che l'hessiano della forma F è:

$$H = Ax_3^3 - 2px_3^2 + (Au + 2\tau)x_3 + 2(Av - pu)$$

essendo:

$$A=\tfrac{1}{2}(uu)^2, \qquad \tau=(v\tau)^2, \qquad p=(uv)^2.$$

Ora se F è decomponibile in tre fattori lineari, si ha identicamente:

$$H=\mu F \tag{1}$$

essendo μ un coefficiente costante; e quindi dal confronto dei coefficienti delle medesime potenze di x_3 si avranno le relazioni:

$$A=\mu, \qquad p=0, \qquad Au+2\tau=-3\mu u, \qquad Av-pu=2\mu v.$$

La prima e la seconda di queste rendono l'ultima una identità, e trasformano la terza nella:

$$2Au+\tau=0. \tag{2}$$

Le condizioni quindi per la sussistenza della equazione (1) sarebbero quest'ultima e la $p=0$, ma osservando essere in generale $(\tau v)^2=0$, riesce evidente che la $p=0$ non è che una conseguenza della (2), e quindi che la condizione richiesta è l'annullarsi identicamente della espressione di secondo ordine $2Au+\tau$. Si hanno cioè effettivamente tre condizioni le quali risultano dall'eguagliare a zero i coefficienti del primo membro della equazione (2).

Se non che possiamo a queste tre condizioni sostituirne altre più opportune. Infatti essendo $2Au+\tau=0$ si hanno tosto per gli invarianti:

$$B=\tfrac{1}{2}(u\tau)^2 \qquad C=\tfrac{1}{2}(\tau\tau)^2$$

i valori:

$$B=-2A^2, \qquad C=4A^3$$

ed essendo $p=0$ si ha l'invariante $E=(up)^2=0$.

Possiamo così enunciare il seguente teorema:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma cubica ternaria generale:

$$F=x_3^3-3ux_3+2v$$

sia il prodotto di tre fattori lineari, sono le tre seguenti:

$$B=-2A^2, \qquad C=4A^3, \qquad E=0$$

essendo A, B, C, E invarianti simultanei delle forme u, v.

2.° Pei valori superiori degli invarianti B, C, E, le espressioni degli invarianti s, t della forma cubica F, cioè:

$$s=4(A^2-4B), \qquad t=-8(A^3+10AB-2C-4E)$$

diventano:

$$s = 2^2 \cdot 3^2 \cdot A^2, \qquad t = 2^3 \cdot 3^3 \cdot A^3$$

e quindi sarà nullo il discriminante della medesima. Da queste ultime si ha evidentemente

$$A = \frac{s^2}{6t} = \frac{t}{6s}$$

e quindi essendo $\mu = A$, per la (1) si avranno le:

$$s^2 F - 6tH = 0, \qquad tF - 6sH = 0 \ (*).$$

Rammentando inoltre che pel covariante $\omega = (v\tau)$ si ha in generale:

$$\omega^2 = -\tfrac{1}{2}[2Cv^2 + \tau^3]$$

si avrà per le $2Au + \tau = 0$, $C = 4A^3$ la:

$$\omega^2 = C(u^3 - v^2)$$

dalla quale:

$$u^3 = \left[v + \frac{\omega}{\sqrt{-C}}\right]\left[v - \frac{\omega}{\sqrt{-C}}\right].$$

Vogliamo ora dimostrare che i fattori del secondo membro di quest'ultima equazione od in generale la espressione:

$$\phi = v \pm \frac{\omega}{\sqrt{-C}}$$

è il cubo di una funzione lineare delle x_1, x_2. Infatti formando l'hessiano della forma ϕ si ottiene:

$$(\phi\phi)^2 = (vv)^2 \pm \frac{2}{\sqrt{-C}}(\omega v)^2 - \frac{1}{C}(\omega\omega)^2;$$

(*) È noto che essendo $f(x_1, x_2)$ una forma binaria biquadratica, se essa è eguale al quadrato di una forma del secondo ordine, indicando con h l'hessiano della medesima, si ha, analogamente all'equazione (1) superiore, $h = \mu f$, essendo μ costante. (Vedi Annali di Matematica, pag. 127, Tomo VII.) Se quindi si fanno coesistere insieme le equazioni di una ternaria biquadratica o di una curva del quarto ordine e quella di una retta; oppure le equazioni di una quaternaria cubica o di una superficie del terzo ordine e quella di un piano; e si suppone che le forme risultanti (binaria nel primo caso, ternaria nel secondo), abbiano la proprietà analitica qui considerata, per le quali in amendue i casi l'hessiano è proporzionale alla forma stessa, si avrà che questa condizione o le altre che se ne deducono sono le condizioni perchè la retta, nel primo caso, sia tangente doppia della curva del quarto ordine, ed il piano nel secondo sia piano tritangente alla superficie. Da questa prima analogia altre ne derivano assai importanti che formeranno argomento di uno speciale lavoro.

ed essendo in generale:

$$(\omega v)^2 = 0, \qquad (\omega\omega)^2 = C\tau$$

si avrà $(\phi\phi)^2 = 0$, come si è annunciato. Ciò posto indicando con l, m le espressioni:

$$l = \sqrt[3]{v + \frac{\omega}{\sqrt{-C}}}, \qquad m = \sqrt[3]{v - \frac{\omega}{\sqrt{-C}}}$$

si hanno le:

$$lm = u, \qquad l^3 + m^3 = 2v$$

e la espressione della cubica ternaria F può scriversi:

$$F = x_3^3 - 3lmx_3 + l^3 + m^3$$

ossia:

$$F = (x_3 + l + m)(x_3 + e^2 l + em)(x_3 + el + e'm)$$

nella quale e è una radice cubica immaginaria dell'unità. Così si è anche ottenuta la decomposizione della forma cubica ternaria nei suoi fattori lineari.

Possiamo infine per le cose sovraesposte enunciare il seguente teorema:

Sia v una forma binaria del terzo ordine, $\tau = (vv)^2$ il suo hessiano, $C = \frac{1}{2}(\tau\tau)^2$ il suo discriminante; la espressione più generale di una forma cubica ternaria decomponibile in tre fattori lineari è la seguente:

$$F = x_3^3 + 3\frac{\tau}{\sqrt[3]{2C}}x_3 + 2v.$$

Correzione alla Memoria intitolata: Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante? (*)

(*del prof.* L. Schlaefli, *a Berna*).

Uno scambio di lettere col sig. Klein, professore in Erlangen (**), m'ha convinto, che il modo di contare il numero dei nessi nelle cinque specie della superficie generale di terz'ordine, adoperato da me nella Memoria citata, è difettoso. Avuto riguardo alla sola idea del nesso, si può sostituire, per esempio, alla quinta specie il sistema di un piano e di una sfera non intersecantisi realmente; e l'errore commesso sta in ciò, che ho attribuito al piano il numero zero, come se il piano fosse equivalente alla sfera, in riguardo al nesso. Ma comunque si trasformi il piano in una superficie sferica, non si potrà far corrispondere, senza eccezione, ad ogni punto di questa un solo punto di quello e viceversa. Quando vi si adopra, per esempio, la projezione stereografica, a quel punto unico della sfera, il quale serve di centro di projezione, corrisponderanno gl'innumerevoli punti della retta all'infinito nel piano. Ma una siffatta singolarità reale distrugge il concetto di nesso. Questo si fonda sull'intuizione; e da ciò parrebbe che la difficoltà che proviamo nell'adattarlo al piano nascesse dall'idea dell'infinito che si sottrae all'intuizione e richiede il soccorso dell'analisi. Ma fortunatamente la retta, a cui l'analisi assegna un solo punto all'infinito, porge il sussidio bastante a vincere questa difficoltà.

Se in ciò che segue farò uso di rette e di sezioni coniche, anzichè di curve arbitrarie, ciò servirà a semplificare il discorso, senza derogare alla generalità delle considerazioni. Con questi sussidï si potrà fare meglio attenzione al passaggio delle superficie attraverso il piano all'infinito.

(*) Nel tomo 5° di questi Annali, p. 289.

(**) Ora professore a Monaco (Baviera).

Qual numero dei nessi per la superficie sferica io assegnai lo zero. Imperocchè, fissati su questa superficie due punti A e B qualisivogliano, è possibile di muovere un cerchio per modo da descrivere tutta la superficie senza passare due volte per verun punto, a cominciare da un cerchio piccolissimo intorno ad A e terminando con un cerchio simile intorno a B. Lo stesso non è possibile in una porzione del piano racchiusa, per esempio, in un cerchio; si può fissare un solo punto A, e poi descrivere tutta la superficie cominciando da un circoletto intorno ad A e terminando al contorno. Ma se si volesse fissare ancora un altro punto B, la linea rappresentante il nesso intorno ad A (un circoletto positivo) si cambierebbe al più nel sistema del contorno positivo e di un circoletto negativo intorno a B. L'ostacolo che il contorno della superficie oppone alla linea del nesso ordinario, mentre questa col suo moto tenderebbe a circondare il punto B, m'ha indotto ad assegnare alla porzione del piano il numero 1.

Ora consideriamo il piano illimitato e fissiamo in esso due punti A e B, coll'intento di descrivere tutto il piano con una sezione conica mobile, che abbia da sorpassare ogni punto del piano una sola volta, tranne i punti A e B, e che cominci da un piccolo cerchio intorno ad A. La curva, dopo avere percorso una serie di ellissi e infine una parabola intorno ad A, tali che B rimanga sempre di fuori di esse, sarà obbligata a cambiarsi in un'iperbola, di modo che A si trovi dalla parte concava di un ramo di essa, mentre B sta dalla convessa per ambedue i rami. L'ultimo termine del moto della curva del nesso sarebbe una retta doppia passante pel punto B, o, poichè questo termine, come singolarità, non deve ammettersi, sarebbe un'iperbola vicinissima a quella retta doppia, fra i cui rami troverebbesi il punto B, e non sarebbe già un circoletto intorno a B. Benchè quella retta doppia passante per B non sia affatto determinata, come lo sarebbe un contorno di superficie, nondimeno credo di doverla riguardare come un ostacolo alla curva del nesso ordinario intorno ad A, e da ciò mi veggo costretto ad assegnare il numero 1 al piano illimitato, e non già lo zero, come venne fatto nella Memoria citata.

A conferma di questa decisione adduco ancora un'altro procedimento, sempre contando il punto del piano una sola volta. Una retta illimitata non separa il piano in due pezzi, giacchè si può partire da un lato di essa ed arrivare all'altro lato, seguendo, per esempio, un'altra retta. Quella retta, essendo un taglio circolare, conta per zero, epperò non muta il numero de' nessi. Dopo fatto questo taglio, la superficie ha un solo orlo, come facilmente si vede sostituendo alla retta doppia, quale orlo, un'iperbola pochissimo differente da essa; e si può descrivere tutta la superficie con una conica mobile, che cominci da un piccolo cerchio e finisca nell'orlo; perlocchè si ha da attribuire alla superficie segata il numero 1 di nessi. Lo stesso numero dunque appartiene anche al piano.

Il sistema di un piano e di una superficie sferica, che non lo interseca realmente, conta in conseguenza di ciò, 1 per il piano, 0 per la sfera, e -2 per la separazione delle due superficie; in somma -1. E poichè, riguardo al numero dei nessi, tala sistema è equivalente alla specie quinta della superficie generale di terz'ordine, mi veggo obbligato a correggere i numeri dati nella Memoria citata in 7, 5, 3, 1, -1 per le cinque specie.

Il sig. Klein nella sua Memoria: *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (t. 7 Mathematische Annalen, pag. 549) s'è deciso a contare ogni punto d'una superficie due volte; la prima volta come punto della faccia superiore, la seconda come punto della faccia inferiore. Allora la retta doppia cessa di costituire una singolarità, atteso che una retta appartiene alla faccia superiore, l'altra all'inferiore, e che esse non hanno in comune che i loro punti all'infinito, precisamente come i due rami d'un'iperbola, uno nella faccia superiore, l'altro nell'inferiore (*). La retta doppia dunque, la quale, per fissar le idee, immaginiamo diretta dall'indietro all'avanti, costituisce lo stato di transito da un'iperbola infinitamente poco diversa dalla retta, ed il cui ramo superiore corre alla sinistra del ramo inferiore della medesima, ad un'altra iperbola il cui ramo superiore corre alla destra del proprio altro ramo. Da ciò si fa evidente che, dati due punti A e B, per esempio ambedue nella faccia superiore del piano, una conica variabile può descrivere tutte e due le faccie del piano passando una sola volta per ciascun punto di ciascuna faccia, e cominciando da un circoletto intorno ad A e terminando in un circoletto intorno a B; epperò si deve attribuire al piano il numero zero di nessi.

Alla stessa conclusione si giunge per mezzo di un taglio. Una retta doppia, composta di una retta superiore e di una inferiore, che ancora vogliamo immaginare diretta dall'indietro all'innanzi, sega il piano in due pezzi, uno consistente della parte sinistra della faccia superiore e della destra della faccia inferiore del piano, l'altro consistente delle parti rimanenti. Ciascun pezzo ha

(*) Immaginando una retta che seghi il piano sotto angolo piccolissimo, si può riconoscere più facilmente ciò che or ora si disse, vale a dire, che al punto tendente all'infinito in una retta della faccia superiore del piano, ed in un senso che diremo anteriore, succeda nella corrispondente retta della faccia inferiore il punto che tende all'infinito nel senso contrario, cioè posteriore.

un solo orlo ed è semplicemente connesso; e poichè lo spezzamento semplice conta per -2, il numero dei nessi del sistema dei due pezzi si trova essere

$$1+1-2=0.$$

Siccome poi il taglio fatto nel piano è circolare, epperò non conta nulla, così per il piano illimitato, qual numero dei nessi, si ottiene lo zero.

Ma ormai anche nella superficie sferica si deve distinguere la faccia esterna dalla interna; e poichè non v'è alcun nesso tra le due facce, si ottiene

$$0+0-2=-2$$

come numero dei nessi per la superficie sferica. Il piano contava zero, la separazione del piano e della sfera conta per -2; dunque il sistema del piano e della sfera non intersecantisi conta per -4.

In conseguenza di ciò, i numeri da assegnarsi alle cinque specie della superficie generale del terzo ordine diventano 12, 8, 4, 0, -4.

Berna, 2 settembre 1875.

Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale algebrica.

(*Nota* (*) *del prof.* F. Casorati, *a Pavia.*)

---

1. Si rappresentino con a, b, c tre funzioni delle variabili u, v, e si prenda in considerazione l'equazione risultante dall'eliminazione della costante arbitraria Ω tra

$$a\Omega^2 + 2b\Omega + c = 0 \tag{1}$$

e la differenziale

$$da\Omega^2 + 2db\Omega + dc = 0.$$

Questa risultante è

$$(cda - adc)^2 - 4(adb - bda)(bdc - cdb) = 0. \tag{2}$$

Pongasi

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \qquad k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad k^2 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix}, \tag{3}$$

dove s'intenda che l'ultimo determinante sia quello ad elementi reciproci, od in altre parole, quello del sistema aggiunto al sistema degli elementi di k.

Col mezzo di g, la (2) può ridursi alla importante forma

$$(dg)^2 - 4g[da \cdot dc - (db)^2] = 0; \tag{2_2}$$

(*) Letta nell'adunanza del 10 dicembre 1874 del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e quì riprodotta per essere seguita da applicazioni.

laonde si ha per la risultante l'una e l'altra espressione in du, dv

$$(b_v du - b_u dv)^2 - 4(c_v du - c_u dv)(a_v du - a_u dv) = 0, \tag{2$_3$}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2 - 4g\left[\left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial c}{\partial u}du + \frac{\partial c}{\partial v}dv\right) - \left(\frac{\partial b}{\partial u}du + \frac{\partial b}{\partial v}dv\right)^2\right] = 0. \tag{2$_4$}$$

Epperò, esprimendo la risultante con

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0, \tag{2$_5$}$$

si hanno per A, B, C i due sistemi di espressioni

$$\left.\begin{aligned} A &= b_v^2 - 4a_v c_v \\ B &= -b_u b_v + 2a_u c_v + 2a_v c_u \\ C &= b_u^2 - 4a_u c_u \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} - \left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)^2\right] \\ B &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - 2g\left[\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u} - 2\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v}\right] \\ C &= \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} - \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4$_2$}$$

Si cerchi il rapporto del discriminante

$$G = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \tag{5}$$

al g. Dalle formole (4) si cava

$$G = 4(a_u b_v - a_v b_u)(b_u c_v - b_v c_u) - 4(c_u a_v - c_v a_u)^2$$

e dalle (3), per una nota proprietà dei determinanti ad elementi reciproci,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial k^2}{\partial a_0} &= b_u c_v - b_v c_u = ka, \\ \frac{\partial k^2}{\partial b_0} &= c_u a_v - c_v a_u = kb, \\ \frac{\partial k^2}{\partial c_0} &= a_u b_v - a_v b_u = kc; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

quindi il rapporto si trova espresso dalla formola notabile (*)

$$\frac{G}{g}=4k^2. \tag{7}$$

Nel determinante k si può e giova introdurre g con le sue derivate, invece di una tra le funzioni a, b, c e rispettive derivate. Ne scaturiscono tre formole, le quali, esprimendo i valori delle incognite c, $-2b$, a cavati dal sistema di equazioni algebriche lineari

$$\left.\begin{aligned} ca\ -2bb\ +ac\ &=2g \\ c\frac{\partial a}{\partial u}-2b\frac{\partial b}{\partial u}+a\frac{\partial c}{\partial u}&=\frac{\partial g}{\partial u} \\ c\frac{\partial a}{\partial v}-2b\frac{\partial b}{\partial v}+a\frac{\partial c}{\partial v}&=\frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

sono

$$ck=\begin{vmatrix} 2g & b & c \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix},\quad -2bk=\begin{vmatrix} a & 2g & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix},\quad ak=\begin{vmatrix} a & b & 2g \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{9}$$

2. Tutte le formole esposte sussistono qualunque sia la natura delle funzioni a, b, c; ma acquistano la maggiore importanza quando le a, b, c suppongansi algebriche, razionali, intere. In tale supposizione, tra le conseguenze di esse formole, sono da notarsi primamente quelle che si riconoscono confrontando i due discriminanti e il determinante k tra loro.

Un fattore che entri m volte in g, entra almeno $m-1$ volte in k. Ed invero, si consideri, per semplicità, un fattore primo φ di detto fattore che in questo entri r volte; entrando $rm-1$ volte in ogni elemento di una colonna del secondo membro di ciascuna (9), il fattore φ entrerà $rm-1$ volte

(*) Questa formola, che trovai nel 1869, in ricerche che quest'anno soltanto ebbi agio di ripigliare, la vidi trovata anche dal sig. Catalan, sotto la forma

$$B^2-4AC=(P^2-4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy}-\frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

cioè per $a=1$, nella eliminazione che egli pure ebbe a fare della costante arbitraria c fra l'equazione $c^2+Pc+Q=0$ e la sua differenziale immediata (Compte R. de l'Acad. des sciences du 4 juillet 1870).

in ogni primo membro, e però in k. Nel caso che una potenza φ^{μ} di questo fattore dividesse simultaneamente a, b, c, si avrebbe il fattore $\varphi^{\mu-1}$ in entrambe le altre due colonne dei secondi membri, e potendosi quindi raccogliere, come fattori dei medesimi, le potenze φ^{rm-1}, $\varphi^{\mu-1}$, $\varphi^{\mu-1}$ dalle colonne e φ dalla prima linea, si vede che φ dovrebbe entrare in k almeno $rm+\mu-2 \geqq m-1$ volte.

Non si può, reciprocamente, dalla esistenza di fattori in k conchiudere a quella dei fattori stessi in g. Pigliando, p. es., una a contenente $\varphi^{\mu+1}$ ed una b non divisibile per φ, si avrà un k contenente φ^{μ} ed un g non divisibile per φ.

Nel fatto confronto di g con k, si può prendere $ba-c^2$ oppure $cb-a^2$ invece di $ac-b^2$, come valore di g.

Poichè k entra due volte in G, dall'esposto teorema segue che k dividerà il determinante

$$K=\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Designando ordinatamente con

$$m, \qquad m', \qquad m''$$

i gradi di multiplicità di un fattore primo in

$$g, \qquad k, \qquad G,$$

la (7) dà

$$m+2m'=m'', \tag{11}$$

e da questa relazione e dal teorema concernente g e k hannosi le diseguaglianze

$$3m' \geqq m''-1, \qquad m'' \geqq 3m-2, \qquad m' \geqq m-1. \tag{12}$$

Fra le proposizioni, che stanno qui scritte, quelle da notarsi adesso sono più particolarmente le seguenti: *Ogni fattore primo, semplice di G è fattore semplice di g e non divide k; Ogni fattore primo, multiplo in G è anche fattore di k.*

3. Si imagini ora che la (1) sia l'integrale generale della equazione differenziale

$$\alpha du^2+2\beta du dv+\gamma dv^2=0 \tag{13}$$

dove α, β, γ significano funzioni razionali, intere di u, v. Il confronto di questa equazione colla (2_5) dà

$$A=\theta\cdot\alpha, \qquad B=\theta\cdot\beta, \qquad C=\theta\cdot\gamma; \tag{14}$$

donde

$$G = 4(ac - b^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = \theta^2(\alpha\gamma - \beta^2), \tag{15}$$

ed anche

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} = \theta^3 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Le funzioni α, β, γ ritengansi da quì innanzi prime tra loro. Ne segue che il fattore razionale θ dev'essere intero.

Indicando con ς il discriminante della (13), cioè ponendo

$$\varsigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}, \text{ dondè } G = \theta^2\varsigma, \tag{17}$$

scriveremo la (7) o (15) come segue

$$4gk^2 = \theta^2\varsigma. \tag{18}$$

Per quanto precede è chiaro che ogni fattore primo di θ dev'essere fattore di k. L'eguaglianza

$$\theta(\alpha du^2 + 2\beta du dv + \gamma dv^2) = (dg)^2 - 4g[da \cdot dc - (db)^2] \tag{19}$$

fa manifesto che un fattore il quale entri una sola volta in g non divide θ; giacchè nel caso contrario dovrebbe dividere dg, ossia entrambe le derivate prime parziali di g, la qual cosa non ha luogo che per fattori multipli in g. Per questi invece, la eguaglianza stessa dice che un fattore, il quale entri in g più volte, entra almeno altrettante volte in θ.

Confrontando ς con g, vediamo nella (18), che, ogni fattore primo entra in tutti e due questi discriminanti un numero dispari, od in tutti e due un numero pari di volte; così che, in particolare, i fattori, che entrano un numero dispari di volte sono gli stessi per ambi i discriminanti. E rispetto a ς e k noteremo, che, ogni fattore, il quale entri più volte in ς, entra anche in k.

Studi analitici sulle curve del quarto ordine.

(*Memoria del prof.* F. Brioschi, *a Milano.*)

Sono noti i lavori di Hesse, di Aronhold, di Salmon, di Clebsch, di Geiser (*), sulle curve del quarto ordine, e di essi faremo menzione più avanti allorquando i nostri studi si incontreranno con quelle ricerche. Il nostro punto di vista è un po' differente, giacchè non è tanto alle proprietà geometriche della curva del quarto ordine che si rivolge la nostra attenzione, quanto alle proprietà delle forme ternarie biquadratiche che eguagliate a zero rappresentano le curve stesse.

1.°

Sieno x_1, x_2, x_3 le coordinate di una curva del quarto ordine, esprimeremo la equazione di essa eguagliando a zero la forma ternaria quartica:

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = a x_3^4 + 6\gamma x_3^2 + 4\beta x_3 + \alpha \tag{1}$$

nella quale a è costante, e le γ, β, α sono forme binarie degli ordini 2, 3, 4 nelle x_1, x_2. I covarianti della quartica F saranno evidentemente polinomj in x_3 di cui i coefficienti saranno funzioni intere e razionali di a, delle γ, β, α e delle forme simultanee di queste tre forme binarie. Analogamente gli invarianti di F saranno funzioni intere e razionali di a e degli invarianti simultanei delle forme binarie γ, β, α.

Sia:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

(*) Hesse, Journal de Crelle, vol. 49, pag. 243. — Aronhold, Monatsberichte der K. Akademie zu Berlin, 1864, pag. 499. — Salmon, *A Treatise on the higher plane Curves.* Second Edition, pag. 206. — Clebsch, Journal für die Mathematik, Band. 59, pag. 125. — Geiser, Mathematische Annalen, Band. 1, pag. 129.

l'equazione di una retta; eliminando da questa e dalla $F=0$ una delle coordinate, per esempio la x_3, si ottiene la:

$$f(x_1, x_2)=a(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)^4+6\gamma\xi_3^2(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)^2-4\beta\xi_3^3(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)+\alpha\xi_3^4$$

vale a dire una forma f binaria del quarto ordine, i coefficienti della quale sono del quarto grado nelle ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Sia:

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(ff)^2, \qquad \psi=(f\varphi), \qquad \sigma=\tfrac{1}{2}(ff)^4, \qquad \tau=\tfrac{1}{3}(f\varphi)^4$$

il sistema di forme corrispondenti alla biquadratica f. Le espressioni σ, τ sono, come è noto, contravarianti della forma ternaria quartica $F(x_1, x_2, x_3)$; e fra la forma f, i covarianti φ, ψ e gli invarianti σ, τ di essa, ha luogo la relazione identica:

$$\tau f^3=\sigma\varphi f^2-4\varphi^3-4\psi^2. \tag{2}$$

Se nei covarianti φ, ψ si sostituiscono alle x_1, x_2 le ξ_2, $-\xi_1$, si ottengono le espressioni (*):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0&=h\xi_3^2-2(\alpha\beta)\xi_3+\alpha\gamma-\beta^2\\ 2\psi_0&=-2(\alpha h)\xi_3^3+3[\alpha(\alpha\beta)^2-2\beta h]\xi_3^2-3[\alpha(\alpha\gamma)-2\beta(\alpha\beta)]\xi_3+2\beta^3-3\alpha\beta\gamma\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

moltiplicate per potenze di ξ_3 e nelle quali $h=\frac{1}{2}(\alpha\alpha)^2$; inoltre si ha:

$$\sigma=\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)^4\xi_3^4-4(\alpha\beta)^3\xi_3^3+6[(\alpha\gamma)^2-(\beta\beta)^2]\xi_3^2-12(\gamma\beta)\xi_3+a\alpha+3\gamma^2 \tag{4}$$

dai quali valori e dalla equazione identica (2) si deduce il valore di τ.

2.°

La equazione:

$$f(x_1, x_2)=0$$

può avere le quattro radici eguali, oppure tre radici eguali, od in fine due coppie di radici eguali. Nel primo caso il covariante φ è identicamente eguale a zero, e si avranno così le equazioni:

$$\varphi_0=0, \qquad \psi_0=0$$

per la determinazione dei rapporti delle ξ_1, ξ_2, ξ_3. Nel secondo, corrispondente

(*) Vedi la II.ª delle Note aggiunte dall'Autore alla traduzione di una Memoria di Clebsch negli Annali di Matematica, vol. 7, pag. 128.

ai punti di flesso della curva del quarto ordine, saranno:

$$\sigma=0, \qquad \tau=0;$$

finalmente nell'ultimo, che corrisponde al problema delle tangenti doppie, si avrà:

$$\varphi=\mu f$$

essendo μ una costante. Questa relazione dà in primo luogo ψ identicamente eguale a zero, e quindi:

$$\psi_0=0; \tag{5}$$

inoltre si hanno le:

$$(f\varphi)^2=\mu(ff)^2; \qquad (f\varphi)^4=\mu(ff)^4$$

od osservando essere $(f\varphi)^2=\frac{1}{6}\sigma f$, le:

$$\sigma f=12\mu\varphi; \qquad 3\tau=2\mu\sigma.$$

Sostituendo il valore di μ data da quest'ultima nella precedente e nella $\varphi=\mu f$, si ottengono le due seguenti:

$$\sigma^2 f-18\tau\varphi=0; \qquad 2\sigma\varphi-3\tau f=0 \tag{6}$$

dalle quali:

$$\sigma^3-27\tau^2=0.$$

Le equazioni (6) sussistendo identicamente si potrà porre nelle medesime ξ_2, $-\xi_1$ in luogo di x_1, x_2 e si avranno le:

$$\sigma^2\alpha-18\tau\varphi_0=0, \qquad 2\sigma\varphi_0-3\tau\alpha=0 \tag{7}$$

dalle quali eliminando τ si otterrà la:

$$\sigma\alpha^2-12\varphi_0^2=0.$$

Possiamo così enunciare il seguente teorema:

Le tangenti doppie di una curva del quarto ordine sono insieme tangenti comuni a due curve:

$$\psi_0=0, \qquad \sigma\alpha^2-12\varphi_0^2=0 \tag{8}$$

la prima della nona classe, la seconda della dodicesima.

Clebsch nella sua Memoria: *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 59, pag. 52) ha dimostrato un teorema analogo al superiore, sostituendo a quelle due curve speciali un sistema di curve della decima classe che può dedursi dalla seconda delle (7). Ma le superiori sono, fra le varie della stessa specie, quelle nelle quali è meno alto il grado della ξ_3 e perciò le più opportune nelle ricerche che esigono la eliminazione della stessa ξ_3.

3.°

Supponiamo dapprima nella espressione (1):

$$\gamma = \upsilon, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = u.$$

La equazione della curva del quarto ordine che consideriamo dapprima sarà la:

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = a x_3^4 + 6 \upsilon x_3^2 + u = 0 \tag{9}$$

essendo υ, u forme binarie in x_1, x_2 quadratica la prima, biquadratica la seconda.

Le forme simultanee indipendenti del sistema u, υ sono, come è noto, in numero di diciotto, e cioè un covariante di sesto ordine, cinque covarianti di quarto ordine, sei covarianti di secondo ordine e sei invarianti. Abbiamo creduto opportuno di assumere come forme principali del sistema le seguenti:

	Ordine rispetto u,	υ,	x	
u	1,	0,	4	(1)
υ	0,	1,	2	(2)
$\frac{1}{2}(uu)^2 = h$	2,	0,	4	(3)
$(uh) = g$	3,	0,	6	(4)
$\frac{1}{2}(uu)^4 = i$	2,	0,	0	(5)
$\frac{1}{3}(uh)^4 = j$	3,	0,	0	(6)
$\frac{1}{2}(\upsilon\upsilon)^2 = k$	0,	2,	0	(7)
$(u\upsilon) = \omega$	1,	1,	4	(8)
$(h\upsilon) = \vartheta$	2,	1,	4	(9)
$(g\upsilon)^2 = \rho$	3,	1,	4	(10)
$(u\upsilon)^2 = w$	1,	1,	2	(11)
$(uw)^2 = t$	2,	1,	2	(12)
$(wt) = l$	3,	2,	2	(13)
$(t\upsilon) = m$	2,	2,	2	(14)
$(\upsilon w) = n$	1,	2,	2	(15)
$(\upsilon w)^2 = I$	1,	2,	0	(16)
$\frac{1}{2}(ww)^2 = \frac{1}{2}(\upsilon t)^2 = J$	2,	2,	0	(17)

ed infine l'invariante:

$$G=\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}$$

Quest'ultimo invariante è gobbo, e lo sono anche le forme g, ω, ϑ, l, m, n.

I quadrati ed i prodotti di covarianti gobbi potendo esprimersi in funzione intera e razionale degli altri, si avrà il primo gruppo di relazioni:

$$\left.\begin{aligned} 4g^2 &= -4h^3+ihu^2-ju^3 \\ \omega^2 &= uvw-ku^2-hv^2 \\ 12\vartheta^2 &= 3htv-ihv^2-3juv^2-12kh^2 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} 4g\omega &= 2huw+iu^2v-u^2t-4h^2v \\ 4g\vartheta &= ju^2v-hut+2h^2w \\ 4\omega\vartheta &= uvt+2hvw-iuv^2-4khu. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Così osservando essere:

$$\tfrac{1}{2}(tt)^2=iJ+jI; \qquad (wt)^2=iI+4jk$$

si hanno pei quadrati e prodotti dei covarianti quadratici l, m, n il secondo gruppo:

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= (iI+4jk)wt-(iJ+jI)w^2-Jt^2 \\ m^2 &= 2Jvt-kt^2-(iJ+jI)v^2 \\ n^2 &= Ivw-Jv^2-kw^2 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} 2mn &= (iI+4jk)v^2-Ivt-2Jvw+2ktw \\ 2nl &= 2J(w^2+tv)-(iI+4jk)vw-Itw \\ 2lm &= It^2-(iI+4jk)vt+2(iJ+jI)vw-2Jtw. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Infine moltiplicando G pel determinante:

$$\begin{vmatrix} v_{22} & -2v_{12} & v_{11} \\ w_{22} & -2w_{12} & w_{11} \\ t_{22} & -2t_{12} & t_{11} \end{vmatrix}=2G$$

si ottiene la

$$G^2=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2k & I & 2J \\ I & 2J & iI+4jk \\ 2J & iI+4jk & 2(iJ+jI) \end{vmatrix}$$

dalla quale:

$$G^2 k = AC - B^2 \tag{14}$$

posto:

$$A = 4kJ - I^2, \qquad B = IJ - ikI - 4k^2 j, \qquad C = k(iJ + jI) - J^2. \tag{15}$$

Dai valori di v, w, t deducendo quelli di x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 e sostituendoli nelle forme quadratiche l, m, n si ottengono per queste ultime i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned} 2Gl &= (Ai^2 - 4Ci + 4Bj)v + 2Ajw - (Ai - 4C)t \\ 2Gm &= 2Ajv + 4Cw + 2Bt \\ 2Gn &= -(Ai - 4C)v + 2Bw + At. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Analogamente si otterranno le:

$$\left.\begin{aligned} G^2 u &= -(Ai - 4C)jv^2 + (Aj + Bi)w^2 + Bt^2 + 4Cwt + 2Ajtv + 4Bjvw \\ G^2 h &= Aj^2 v^2 + (Bj + Ci)w^2 + Ct^2 + (Aj + Bi)wt + 2Bjtv + 4Cjvw \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

alle quali devesi aggiungere la equazione identica:

$$(Ai^2 - 4Ci + 4Bj)v^2 + 4Cw^2 + At^2 + 4Bwt - 2(Ai - 4C)tv + 4Ajvw = 0$$

ossia la:

$$lv + mw + nt = 0. \tag{18}$$

Le equazioni (17) (18) danno facilmente le tre relazioni:

$$\left.\begin{aligned} Iu + 4kh &= w^2 - iv^2 + 2vt \\ Ju + Ih &= jv^2 + wt \\ (iI + 4kj)u + 4Jh &= iw^2 + t^2 + 4jvw \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

già da noi fatte conoscere alcuni anni sono nella breve Nota: *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double*; Math. Annalen, 1871.

Infine indicando con Δ il discriminante simultaneo od il risultante delle forme u, v si ha:

$$\Delta = I^2 - 16k(J - ki). \tag{20}$$

4.°

Addottando le denominazioni del paragrafo antecedente si hanno così per le (3) (4):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 = h\xi_3^2 + uv, \qquad \psi_0 = -\xi_3[g\xi_3^2 + \tfrac{3}{2}u\omega] \\ \sigma = i\xi_3^4 + 6w\xi_3^2 + au + 3v^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

per le quali e per la relazione (2):

$$\tau = j\xi_3^6 + (3t - 2iv)\xi_3^4 + (ah - 3vw + 9ku)\xi_3^2 + v(au - v^2). \qquad (22)$$

Le espressioni σ, τ sono contravarianti quartico e sestico della forma F (9) del quarto ordine, già calcolati dal sig. Salmon e dal P. Joubert (*), ed è confrontando le espressioni stesse con quelle date da questi Autori che si può formare un giusto criterio della molta opportunità di far dipendere la ricerca dei covarianti e degli invarianti di una forma ternaria dalle forme simultanee di forme binarie.

Il valore del covariante di Hesse è il seguente:

$$H = akx_3^6 + (aw - 3kv)x_3^4 + (ah + 4ku - 3vw)x_3^2 + hv$$

sul quale operando col contravariante σ si ottiene un primo covariante quadratico del quinto grado, cioè:

$$L = [a^2j + a(3J + 7ki) - 6kI]x_3^2 + (9aj - 5J - 7ki)v + (ai - I)w + 16kt.$$

Così operando colla forma F sul contravariante τ si ha un contravariante quadratico del quarto grado:

$$P = (3aj + 5J - ki)\xi_3^2 + (ai - 3I)v + 8kw + 2at$$

nel quale le v, w, t sono funzioni delle ξ_1, ξ_2. Infine operando col contravariante P sulla forma F si ha un secondo covariante quadratico del quinto grado:

$$N = [3a^2j + a(9J + ki) + 2kI]x_3^2 + (7aj + 5J - ki)v + 3(ai - I)w + 8kt.$$

Dai due covarianti quadratici L, N possiamo dedurne un terzo assai semplice che sostituiremo ad uno di essi ed è il seguente:

$$\lambda = \tfrac{1}{20}(3L - N) = k(ai - I)x_3^2 + (aj - ki - J)v + 2kt.$$

Questo covariante quadratico ha una speciale importanza geometrica nelle ricerche intorno ad una classe di curve del quarto ordine già considerate da Clebsch e che forma soggetto di una interessantissima Memoria del sig. Lüroth (**). Per questa classe di curve, di cui la proprietà caratteristica consiste nel ridursi della forma F alla somma di cinque quarte potenze, deve essere

(*) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Premier Semestre, 1863.

(**) *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung;* Math. Annalen, Erster Band, pag. 37.

nullo l'invariante di sesto grado della forma F medesima dato dal determinante sestuplo:

$$E=\begin{vmatrix} F_{1111} & F_{1122} & F_{1133} & F_{1123} & F_{1131} & F_{1112} \\ F_{2211} & F_{2222} & F_{2233} & F_{2223} & F_{2231} & F_{2212} \\ F_{3311} & F_{3322} & F_{3333} & F_{3323} & F_{3331} & F_{3312} \\ F_{2311} & F_{2322} & F_{2333} & F_{2323} & F_{2331} & F_{2312} \\ F_{3111} & F_{3122} & F_{3133} & F_{3123} & F_{3131} & F_{3112} \\ F_{1211} & F_{1222} & F_{1233} & F_{1223} & F_{1231} & F_{1212} \end{vmatrix}$$

di cui il valore è:

$$E=k(aj+ki-J).$$

Se $E=0$ dovrà essere $aj=J-ki$ ed il covariante λ riducesi per quella classe di curve al seguente:

$$\lambda=k[(ai-I)x_3^2-2(iv-t)]$$

e le cinque rette A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 le quali danno:

$$F=\Sigma\rho_i A^4{}_i$$

sono tangenti alla conica $\lambda=0$ od alla:

$$K=(ai-I)x_3^2-2(iv-t)=0.$$

Dal determinante E possiamo dedurre un contravariante del quarto ordine che può esprimersi colla:

$$\Omega=\Sigma E_{mnrs}\xi_m\xi_n\xi_r\xi_s$$

supposto essere $E_{mnrs}=\dfrac{dE}{dF_{mnrs}}$. Ora il valore di questo contravariante essendo:

$$\Omega=kj\xi_3^4+[(aj+2ki-J)v-kt]\xi_3^2+k(ah+ku-vw)$$

si otterrà facilmente per le formole (19) del § 3.° che:

$$\Omega kj=k^2[j\xi_3^2+\tfrac{1}{2}(iv-t)]^2+E(jv\xi_3^2+kh)$$

e quindi per le curve per le quali $E=0$ la curva $\Omega=0$ della quarta classe riducesi alla conica ripetuta:

$$j\xi_3^2+\tfrac{1}{2}(iv-t)=0$$

ossia alla $K=0$, essendo la equazione superiore quella della conica K espressa in coordinate lineari.

Infine il covariante S del quarto ordine che si ottiene dalla polare cubica della forma F, il quale dà la curva $S=0$ che passa pei punti di intersezione delle cinque rette A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ha il valore:

$$S=4k^2x_3^4-2[a(iv-t)+2kw]x_3^2+iv^2+w^2-Iu$$

ed il covariante T del sesto ordine il seguente:

$$T=8k^3x_3^6+2\{a[(5ki-2J)v+2Iw-5kt]-6k^2w\}x_3^4+$$
$$+\{a^2(ih-ju)+3a(2Ju-ivw-wt)+3kIu+24k^2h+3(J-ki)v^2-3Ivw\}x_3^2-$$
$$-w^3+3iv^2w-u(4Jv+2kiv-Iw-2kt).$$

5.°

Le equazioni delle due curve (8) saranno in questo caso:

$$\left.\begin{aligned}\xi_3(g\xi_3^2+\tfrac{3}{2}u\omega)=0\\(iu^2-12h^2)\xi_3^4+6u(uw-4hv)\xi_3^2+u^2(au-9v^2)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

La prima di esse è evidentemente soddisfatta eguagliando a zero l'uno o l'altro dei fattori del suo primo membro, ossia dalle:

$$\xi_3=0,\qquad g\xi_3^2+\tfrac{3}{2}u\omega=0.$$

Nel primo caso la seconda equazione (23) dà:

$$au-9v^2=0$$

ossia la equazione biquadratica dalla quale si dedurranno i valori del rapporto $\xi_1:\xi_2$ corrispondenti alle quattro tangenti doppie che passano pel punto x_1, x_2.

Nel secondo caso eliminando ξ_3^2 e sostituendo per g^2, $g\omega$, ω^2, i valori dati dalle relazioni (10) (11) giungesi ad una equazione divisibile pel fattore u^3, equazione che per mezzo delle prime due (19) riducesi alla:

$$9[(J-ki)u^3-Ihu^2+4kh^2u]-a[4h^3-ihu^2+ju^3]=0.\qquad(24)$$

Supponiamo dapprima $a=0$, l'equazione è nuovamente divisibile per u e si ha l'equazione dell'ottavo grado:

$$(J-ki)u^2-Ihu+4kh^2=0$$

decomponibile evidentemente nelle due del quarto grado:

$$Eu-4kh=0,\qquad Du-4kh=0\qquad(25)$$

posto:

$$E = \tfrac{1}{2}[I - \sqrt{\Delta}], \qquad D = \tfrac{1}{2}[I + \sqrt{\Delta}] \tag{26}$$

avendo Δ il valore (20).

La ricerca delle tangenti doppie ad una curva del quarto ordine con un punto doppio dipende quindi dalla risoluzione di due equazioni del quarto grado (25), come abbiamo già dimostrato in altro modo nella Nota sopracitata. Ottenuti i valori del rapporto delle ξ_1, ξ_2 dalle equazioni stesse, la prima delle (23) darà il valore di ξ_3. Nel caso particolare osservando che per la prima delle (25) le (10) (11) danno le:

$$E^3 g^2 = M h^3, \qquad E^2 g \omega = [(4k^2 i - E^2)\upsilon + 2Ekw - 4k^2 t]h^2$$

nelle quali:

$$M = -E^3 + 4k^2 iE - 16k^3 j$$

si otterrà la relazione seguente:

$$M\xi_3^2 + 6k[(4k^2 i - E^2)\upsilon + 2Ekw - 4k^2 t] = 0. \tag{27}$$

Se a non eguale a zero la equazione (24) decomponesi evidentemente in una biquadratica:

$$zu + h = 0 \tag{28}$$

e nella cubica:

$$4az^3 + 36kz^2 + (9I - ai)z - (aj + 9ki - 9J) = 0 \tag{29}$$

dalle quali si otterranno i valori dal rapporto delle ξ_1, ξ_2, mentre i valori della ξ_3 saranno dati dalla:

$$(4z^3 - iz - j)\xi_3^2 = \tfrac{3}{2}(4\upsilon z^2 + 2wz + t - i\upsilon)$$

ossia per la (29) la:

$$(4kz^2 + Iz + J - ki)\xi_3^2 = -\tfrac{1}{6}(4\upsilon z^2 + 2wz + t - i\upsilon)$$

od anche indicando con φ la forma quadratica:

$$\varphi = 4\upsilon z^2 + 2wz + t - i\upsilon$$

la seguente:

$$(\varphi\upsilon)^2 \xi_3^2 = -\tfrac{1}{3}\varphi. \tag{30}$$

Possiamo così enunciare il teorema:

La ricerca delle tangenti doppie di una curva del quarto ordine rappresentabile per mezzo della equazione:

$$F = ax_3^4 + 6\upsilon x_3^2 + u = 0$$

nella quale v, u sono forme binarie di secondo e quarto ordine, dipende dalla risoluzione di equazioni cubiche e biquadratiche.

Nel caso in cui $a=0$, vale a dire se la quartica ha un punto doppio, la ricerca delle tangenti doppie non richiede che la risoluzione di una biquadratica.

La equazione cubica (29) ha una proprietà assai interessante la quale veniamo a stabilire. Rammentiamo essersi dimostrato più addietro che le quattro tangenti doppie passanti pel punto x_1, x_2 si ottengono dalla risoluzione della equazione:

$$au-9v^2=0. \tag{31}$$

Ora se indichiamo con g_2, g_3 gli invarianti quadratico e cubico della forma biquadratica primo membro di questa equazione, si trovano le:

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= a\,(ai-9I)+108k^2 \\ g_3 &= a^2(aj+9ki-9J)-3ak(ai-9I)-216k^3 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

pei quali valori la (29), moltiplicata per a^2, può scriversi:

$$4(az+3k)^3-g_2(az+3k)-g_3=0$$

o ponendo:

$$az+3k=y$$

la (29) trasformasi nella:

$$4y^3-g_2y-g_3=0 \tag{33}$$

ossia nella nota risolvente della equazione di quarto grado (31). Ciò posto indicando con p, q, r, s. quattro funzioni lineari, cioè $p=p_1\xi_2-p_2\xi_1$ ecc. e ponendo:

$$au-9v^2=pqrs \tag{34}$$

si hanno per le radici y_1, y_2, y_3 della equazione (33) i seguenti valori:

$$\left.\begin{aligned} y_1=\tfrac{1}{12}[(ps)(qr)+(pr)(qs)], \qquad y_2=\tfrac{1}{12}[(pq)(rs)+(ps)(rq)], \\ y_3=\tfrac{1}{12}[(pr)(sq)+(pq)(sr)]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Si ha così il teorema:

Se si indicano con $p=p_1x_1+p_2x_2=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ le equazioni delle quattro tangenti doppie passanti pel punto x_1, x_2, i valori del rapporto dei parametri ξ_1, ξ_2, delle altre 24 bitangenti si otterranno risolvendo le tre equazioni biquadratiche:

$$(y-3k)u+ah=0 \tag{36}$$

che risultano dal porre nella superiore per y le y_1, y_2, y_3 date dalle (35).

Dalla equazione (34) deducendosi la:

$$au = 9v^2 + pqrs$$

si hanno, rammentando essere:

$$w = (uv)^2, \qquad t = (uw)^2$$

le relazioni seguenti:

$$aw = 12kv + \tfrac{1}{6}V$$

$$\begin{aligned} a^2 t = 9aIv - 72k^2 v + kV + \tfrac{1}{6}rs[y_1 V_{pq} - \tfrac{1}{4}(pq)^2 V_{rs}] + \\ + \tfrac{1}{6}sq[y_2 V_{pr} - \tfrac{1}{4}(pr)^2 V_{sq}] + \tfrac{1}{6}qr[y_3 V_{ps} - \tfrac{1}{4}(ps)^2 V_{qr}] + \\ + \tfrac{1}{6}pq[y_1 V_{rs} - \tfrac{1}{4}(rs)^2 V_{pq}] + \tfrac{1}{6}pr[y_2 V_{sq} - \tfrac{1}{4}(sq)^2 V_{pr}] \\ + \tfrac{1}{6}ps[y_3 V_{qr} - \tfrac{1}{4}(qr)^2 V_{ps}] \end{aligned}$$

essendo:

$$V = rsV_{pq} + sqV_{pr} + qrV_{ps} + pqV_{rs} + prV_{sq} + psV_{qr}$$

$$V_{pq} = v_{11}p_2 q_2 - v_{12}(p_1 q_2 + p_2 q_1) + v_{22}p_1 q_1.$$

Per queste relazioni la forma quadratica:

$$\varphi = 4vz^2 + 2wz + t - iv$$

in cui pongasi $z = \dfrac{y - 3k}{a}$ e per y le y_1, y_2, y_3 dà luogo alle seguenti tre espressioni:

$$\left.\begin{aligned} a^2\varphi_1 &= (4y_1^2 - g_2)v + \tfrac{1}{2}rs[y_1 V_{pq} - \tfrac{1}{4}(pq)^2 V_{rs}] + \tfrac{1}{2}pq[y_1 V_{rs} - \tfrac{1}{4}(rs)^2 V_{pq}] \\ a^2\varphi_2 &= (4y_2^2 - g_2)v + \tfrac{1}{2}sq[y_2 V_{pr} - \tfrac{1}{4}(pr)^2 V_{sq}] + \tfrac{1}{2}pr[y_2 V_{sq} - \tfrac{1}{4}(sq)^2 V_{pr}] \\ a^2\varphi_3 &= (4y_3^2 - g_2)v + \tfrac{1}{2}qr[y_3 V_{ps} - \tfrac{1}{4}(ps)^2 V_{qr}] + \tfrac{1}{2}ps[y_3 V_{qr} - \tfrac{1}{4}(qr)^2 V_{ps}] \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

dalle quali si deducono facilmente la:

$$a^2(\varphi_1 v)^2 = 2k(4y_1^2 - g_2) + y_1 V_{pq} V_{rs} - \tfrac{1}{8}(pq)^2 V^2_{rs} - \tfrac{1}{8}(rs)^2 V^2_{pq} \qquad (38)$$

e le analoghe, e quindi per la equazione (30) il valore di ξ_3 in funzione delle ξ_1, ξ_2, dei coefficienti della v e di quelli delle p, q, r, s. Notiamo che essendo:

$$y_1 V_{pq} V_{rs} + y_2 V_{pr} V_{sq} + y_3 V_{ps} V_{qr} = 2kg_2$$

se indichiamo con R la espressione:

$$R = (pq)^2 V^2_{rs} + (rs)^2 V^2_{pq} + (pr)^2 V^2_{sq} + (sq)^2 V^2_{pr} + (ps)^2 V^2_{qr} + (qr)^2 V^2_{ps}$$

si ottiene la:

$$R = -8a^2[(\varphi_1 \nu)^2 + (\varphi_2 \nu)^2 + (\varphi_3 \nu)^2]. \tag{39}$$

Rimane a considerarsi la equazione $zu + h = 0$ dalla quale dobbiamo dedurre i valori del rapporto delle ξ_1, ξ_2. Rammentiamo anzitutto che indicando con G_2, G_3 gli invarianti del primo membro della medesima, si hanno, come è noto:

$$\left.\begin{aligned} G_2 &= iz^2 + 3jz + \tfrac{1}{12}i^2 \\ G_3 &= jz^3 + \tfrac{1}{6}i^2z^2 + \tfrac{1}{4}ijz + \tfrac{1}{216}(54j^2 - i^3) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

per le quali il discriminante ha la proprietà pure nota:

$$\sqrt{G_2^3 - 27G_3^2} = \tfrac{1}{4}(4z^3 - iz - j)\sqrt{i^3 - 27j^2}$$

ossia per la (29):

$$8a\sqrt{G_2^3 - 27G_3^2} = 9(\varphi\nu)^2\sqrt{i^3 - 27j^2}. \tag{41}$$

I valori delle i, j formati coi coefficienti di ν e delle p, q, r, s, sono i seguenti:

$$\left.\begin{aligned} a^2 i &= 108k^2 + g_2 + 3P \\ a^3 j &= 216k^3 + 6kg_2 + g_3 + 9kP - \tfrac{3}{16}R \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

nelle quali espressioni:

$$P = V_{pq}V_{rs} + V_{pr}V_{sq} + V_{ps}V_{qr}$$

ed R ha il valore superiore (39).

Infine siccome ponendo:

$$U = (pq)^2r^2s^2 + (rs)^2p^2q^2 + (pr)^2s^2q^2 + (sq)^2p^2r^2 + (ps)^2q^2r^2 + (qr)^2p^2s^2$$

si ottiene la:

$$a^2h = 27k\nu^2 - 6kpqrs + \tfrac{3}{2}V\nu - \tfrac{1}{8}U$$

la equazione stessa $zu + h = 0$ o la (36) si trasforma nella:

$$y(9\nu^2 + pqrs) - 9kpqrs + \tfrac{3}{2}V\nu - \tfrac{1}{8}U = 0. \tag{43}$$

Riassumendo avremo così ottenuto il seguente risultato:

Le 28 bitangenti ad una curva del quarto ordine rappresentabile colla equazione:

$$F = ax_3^4 + 6\nu x_3^2 + u = 0$$

si distinguono nelle quattro $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ passanti pel punto x_1, x_2 date dall'uguaglianza

$$au - 9\nu^2 = pqrs$$

per la quale, l'equazione della curva trasformasi nella:

$$(ax_3^2+3\upsilon)^2+pqrs=0.$$

Le altre ventiquattro bitangenti si distinguono in due serie di dodici ciascuna, rappresentabili mediante le:

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0, \qquad \xi_1 x_1+\xi_2 x_2-\xi_3 x_3=0.$$

I dodici valori del rapporto $\xi_1:\xi_2$ sono dati dalla risoluzione di tre equazioni del quarto grado (43) di cui i coefficienti sono funzioni dei coefficienti di υ e delle p, q, r, s ed i valori corrispondenti di ξ_3 si deducono dalla equazione (30) ponendo in essa per φ, $(\varphi\upsilon)^2$ i valori (37) (38).

La equazione (34) conduce ad una relazione fra i parametri delle p, q, r, s che veniamo a stabilire. Indichiamo con u_p, υ_p i valori delle u, υ ponendo nelle medesime p_1, p_2 in luogo delle ξ_1, ξ_2. Si avranno le:

$$3\upsilon_p-\sqrt{au_p}=0, \qquad 3\upsilon_q-\sqrt{au_q}=0, \qquad 3\upsilon_r-\sqrt{au_r}=0, \qquad 3\upsilon_s-\sqrt{au_s}=0$$

dalle quali eliminando a ed i coefficienti di υ si ottiene:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_2^2 & \sqrt{u_p} \\ q_1^2 & q_1q_2 & q_2^2 & \sqrt{u_q} \\ r_1^2 & r_1r_2 & r_2^2 & \sqrt{u_r} \\ s_1^2 & s_1s_2 & s_2^2 & \sqrt{u_s} \end{vmatrix}=0$$

o pel teorema di Abel la:

$$\int\frac{p_1dp_2-p_2dp_1}{\sqrt{u_p}}+\int\frac{q_1dq_2-q_2dq_1}{\sqrt{u_q}}+\int\frac{r_1dr_2-r_2dr_1}{\sqrt{u_r}}+\int\frac{s_1ds_2-s_2ds_1}{\sqrt{u_s}}=\text{Cost.}^e$$

la quale ponendo:

$$p_0u_p+h_p=0, \qquad q_0u_q+h_q=0, \qquad r_0u_r+h_r=0, \qquad s_0u_s+h_s=0 \tag{44}$$

trasformasi, come è noto, nella:

$$\int\frac{dp_0}{\sqrt{\psi(p_0)}}+\int\frac{dq_0}{\sqrt{\psi(q_0)}}+\int\frac{dr_0}{\sqrt{\psi(r_0)}}+\int\frac{ds_0}{\sqrt{\psi(s_0)}}=\text{Cost.}^e \tag{45}$$

essendo:

$$\psi(p_0)=4p_0^3-ip_0-j.$$

Supponendo ora:

$$\left.\begin{aligned} p_0&=e_2sn^2\cdot\pi+e_3cn^2\cdot\pi & \quad r_0&=e^2sn^2\cdot\rho+e_3cn^2\cdot\rho \\ q_0&=e_2sn^2\cdot\varkappa+e_3cn^2\cdot\varkappa & \quad s_0&=e_2sn^2\cdot\sigma+e_3cn^2\cdot\sigma \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

nelle quali e_2, e_3 ed e_1 sono le radici dell'equazione cubica:

$$4e^3 - ie - j = 0$$

si hanno le:

$$4p_0^3 - ip_0 - j = 4(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 sn^2\pi cn^2\pi dn^2\pi$$

$$dp_0 = 2(e_2 - e_3) sn\pi cn\pi dn\pi d\pi; \qquad k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1}$$

e da esse:

$$\frac{dp_0}{\sqrt{4p_0^3 - ip_0 - j}} = \frac{d\pi}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

La (45) diventerà quindi la seguente:

$$\pi + \varkappa + \rho + \sigma = \text{Cost.}^e$$

e si avrà il teorema:

I valori dei rapporti dei parametri delle bitangenti $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ ponno esprimersi per le relazioni (44) (46) col mezzo di funzioni elittiche, di cui gli argomenti π, $\varkappa$, ρ, σ hanno la proprietà che la loro somma è costante.

(*Continua.*)

Sulle forze in equilibrio.

[*Memoria del prof.* RODOLFO STURM, *a Darmstadt* (*).]

1. La ricerca della posizione scambievole di quattro fino a sette rette, lungo le quali agiscano forze in equilibrio, nonchè della grandezza di queste forze fu, per quel ch'io ne sappia, intrapresa per la prima volta da MÖBIUS nel suo classico *Lehrbuch der Statik* (**). MÖBIUS trovò l'interessante teorema, che se quattro forze sono in equilibrio le rette secondo cui agiscono devono appartenere allo stesso sistema di generatrici di un iperboloide, ed ottenne i rapporti delle quattro forze pel caso che le loro linee d'azione soddisfacessero a questa condizione.

Ecco i suoi risultati per gli altri casi ch'egli non tratta così a fondo:

Siano date quattro rette ad arbitrio; tutte quelle rette, ciascuna delle quali può rappresentare una forza in equilibrio con forze agenti lungo le quattro date, o, ch'è lo stesso, una forza che presa in senso opposto sia a queste equivalente, sia la loro risultante, sono così distribuite nello spazio che per ciascun punto ne passa una, e in ciascun piano ne giace una. Tutte queste rette formano dunque ciò che ora si chiama una congruenza lineare (di 1° ordine e di 1ª classe).

Se sono date cinque rette ad arbitrio, passano per ciascun punto, giacciono in ciascun piano infinite rette formanti un fascio, delle quali ciascuna può divenire linea d'azione d'una forza equilibrata con forze agenti sulle cinque rette date. Tutte quelle rette formano dunque un complesso lineare (di 1° grado) secondo l'odierna terminologia.

Se sono date sette o più rette ad arbitrio, esse ponno sempre assumersi come linee d'azione di forze in equilibrio.

(*) La traduzione di questa Memoria fu dalla Direzione affidata al prof. JUNG.

(**) Lipsia, 1837, t. 1, § 98-103.

2. Möbius ha trovato il teorema (*): Secondochè si possano assegnare o no delle forze equilibrate le quali abbiano per linee d'azione delle rette date, sussisterà o no una dipendenza fra i momenti, rispetto a quelle rette come assi, di un qualsivoglia sistema di forze (somme de'momenti delle singole forze del sistema).

Mentre di solito per momento di una forza rispetto ad un asse s'intende il momento della projezione della forza sopra un piano perpendicolare all'asse, rispetto al piede del medesimo, Möbius riferisce il momento ad un asse limitato e intende per momento il volume del tetraedro che ha per spigoli opposti la forza e l'asse; al che naturalmente vanno aggiunte ancora in ambedue i casi le considerazioni che fissano il segno del momento.

I due momenti sono proporzionali e svaniscono insieme, quando cioè la linea d'azione della forza e l'asse siano nel medesimo piano.

Usando la denominazione introdotta dal sig. Cayley (**), il quale chiama momento di due rette il prodotto della loro minima distanza pel seno dell'angolo da esse compreso, si rileva che: se si moltiplica il momento dell'asse e della linea d'azione della forza, per la forza, ovvero per la forza e per l'asse, si ottiene risp. il momento solito, ovvero il momento di Möbius, della forza considerata.

3. Per opera di Poinsot (***), di Möbius (****) e di Chasles (*****) fu scoperta l'analogia fra le rotazioni infinitesime e le forze, e in particolare fu enunciata la proposizione: Se un sistema di rotazioni infinitesime si annulla, sarà in equilibrio ogni sistema di forze ad esse proporzionali e agenti lungo i loro assi di rotazione.

4. I teoremi relativi a forze in equilibrio si possono sempre, in virtù dei n.i 2 e 3, enunciare ancora in due altri modi.

5. Molte Memorie su questo oggetto furono pubblicate, particolarmente nei Comptes rendus del precedente decennio, Memorie in parte interessanti per ciò che, come l'indole stessa della materia comporta, esse sono i precursori della geometria dei complessi.

Il sig. Sylvester (******) riprende la questione nei Comptes rendus (*******)

(*) L. c.; § 97.
(**) Comptes rendus, t. 11, p. 829.
(***) *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* 1834; nelle edizioni posteriori della *Statique.*
(****) *Lehrbuch der Statik,* § 183 e nel Giornale di Crelle, t. 18 (1838), p. 189.
(*****) Comptes rendus, t. 16 (1843), p. 1420.
(******) Devo al sig. Hirst la notizia che il sig. Sylvester ha trattato questo argomento nei Comptes rendus.
(*******) C. R. LII (1861), p. 741.

e dapprima dà una costruzione geometrica di quelle rette che, insieme a 5 rette date, possono essere linee d'azione di forze equilibrate, ovvero assi di movimenti infinitesimi annullantisi; poi comunica in un'altra Nota (*) la condizione analitica affinchè 6, 5, 4 rette possano essere tali linee d'azione o assi, ossia, affinchè possano essere rette in involuzione, com'egli le chiama già nella prima Nota: questa condizione è l'annullarsi di 1, 2, 3 certi determinanti.

Il sig. Cayley, che poco prima (**) era pervenuto al concetto delle coordinate della retta, se ne serve e dà nel medesimo volume dei Comptes rendus (***) un determinante più semplice formato con le 36 coordinate di 6 rette, il quale uguagliato a zero esprime la condizione dell'involuzione delle 6 rette; e trova anche la condizione geometrica perchè sei corde di una curva gobba del 3° ordine siano in involuzione.

In parte quale aggiunta a queste Note di Sylvester e Cayley il sig. Chasles deduce (****) altri casi di rette in involuzione e teoremi sulle stesse, dai teoremi sulle rotazioni infinitesime nella sua Memoria già citata.

Nel luogo già citato al n.° 2 il sig. Cayley riprende nuovamente la questione delle grandezze di quattro forze equilibrate, il che fa pure il sig. Chelini nelle Memorie dell'Accademia di Bologna (*****). Questa stessa questione relativa ad un numero qualunque di rette ha poi occupato ancora i signori Spottiswood (******) e Chelini (*******).

6. Ora che le forme (figure) della geometria de'complessi sono divenute imagini famigliari e che, mediante la Statica grafica, la trattazione geometrica di problemi meccanici è entrata sempre più nelle istituzioni scolastiche, non mi pare inopportuno di riprendere tale questione, tanto più che le Note citate contengono spesso teoremi non dimostrati; epperò nelle prime tre parti di questa Memoria, mi permetto di pubblicarne una esposizione puramente geometrica. Nell'ultima parte mi propongo inoltre di mostrare come si possa considerare la questione mediante le teorie di Grassmann (********), ed ottengo la maggior parte dei risultati analitici di Möbius, Sylvester, Cayley, Spottiswood. Dal

(*) Ibidem, p. 815.
(**) Quarterly Journ., t. 3, p. 225.
(***) Pag. 1039.
(****) Pag. 745-1042-1094.
(*****) 1866, p. 1, specialmente n.° 26.
(******) Comptes rendus, t. 66 (1868), p. 97.
(*******) Memorie dell'Acc. di Bologna, 1870, p. 370.
(********) *Ansdehnungslehre,* Leipzig, 1844; 2ª ediz. Berlin, 1862.

proponimento del sig. Grassmann di pubblicare in seguito applicazioni della sua teoria alla Statica, si può presumere ch'egli stesso si sia occupato della predetta quistione.

Nella estesa Memoria: *Ueber projektive Behandlung der Mechanik starrer Körper,* pubblicata tempo fa dal sig. Lindemann (*), questa questione fu trattata a p. 142 analiticamente sotto un punto di vista più generale; tuttavia la mia trattazione più semplice non mi pare inutile, tanto più che il sig. Lindemann si addentra poco nei particolari di quest'oggetto.

I.

7. Se le forze di un sistema equilibrato variano tutte proporzionalmente l'equilibrio continua a sussistere; essendo dunque sempre ammessa la possibilità di tali variazioni, non se ne farà cenno speciale.

8. Se lungo n rette $g_1, g_2, \dots g_n$ agiscono due sistemi equilibrati diversi (cioè non proporzionali) $P_1, P_2, \dots P_n$, $P'_1, P'_2, \dots P'_n$; anche le n forze $\lambda P_1 + \lambda' P'_1$, $\lambda P_2 + \lambda' P'_2, \dots \lambda P_n + \lambda' P'_n$ agenti lungo le rette $g_1, g_2, \dots g_n$ formeranno un sistema equilibrato, quali pur siano i valori di λ e λ'. Cosicchè attribuendo al rapporto $\lambda : \lambda'$ tale un valore che riesca nulla la forza agente lungo una delle rette, si avrà un sistema equilibrato lungo le altre $n-1$ rette.

Quindi se fra le n rette non ve ne sono $n-1$ rappresentanti un sistema equilibrato; lungo le n rette non potranno agire due sistemi equilibrati diversi, cioè non proporzionali.

Se invece le $n-1$ rette $g_1, g_2, \dots g_{n-1}$ sono linee d'azione di altrettante forze in equilibrio $P_1, P_2, \dots P_{n-1}$, e si aggiunge una n^{ma} retta arbitraria g_n, per modo che non siano possibili altri aggruppamenti di $n-1$ rette rappresentanti sistemi equilibrati; sarà P_1, P_2, P_{n-1}, 0 l'unico sistema equilibrato rappresentabile dalle n rette $g_1, g_2, \dots g_n$. Eppero se n è tale, che in generale $n-1$ rette non possano rappresentare un sistema equilibrato, e se lungo n rette si vogliono fare agire altrettante forze in equilibrio, le quali tutte siano diverse da zero, si dovrà evitare che fra quelle n rette ve ne siano $n-1$ le quali possano rappresentare un sistema equilibrato.

9. Se imaginiamo che n rette rappresentino due sistemi equilibrati diversi, nei quali coincidano (o siano proporzionali) le forze agenti lungo r rette, ma

(*) Math. Annalen, t. 7, p. 56.

non le altre, si ottiene per sottrazione un sistema in equilibrio rappresentato da $n-r$ rette. Per ciò se di n rette $n-r$ non sono tali da poter rappresentare un sistema equilibrato, lungo le n rette non possono agire due sistemi equilibrati nei quali r delle forze, ma non le altre, siano coincidenti.

10. Se tutte le forze P_i (agenti lungo g_i) di un sistema non piano Σ si trasportano parallelamente a sè stesse in un punto qualsivoglia O dello spazio, ciascuna forza P_i è scomposta in una forza equipollente passante per O, ed in una coppia situata nel piano Og_i, il cui momento è uguale a quello di P_i rispetto ad O. Come le forze in O si compongono in una risultante R mediante il poligono delle forze, così tutte le coppie si compongono in una coppia risultante mediante il poligono dei momenti o degli assi: vale a dire si riducono i loro momenti (P_i, O) ad una base b, cioè si cercano le altezze di parallelogrammi di base data b e che siano equivalenti alle aree-momenti, si portano questi momenti ridotti, perpendicolarmente sui piani g_iO delle coppie e da quella banda dalla quale il piano, per effetto della coppia, si vedrebbe girare in un senso convenuto, p. es. quello dell'indice di un orologio; di questi segmenti normali o assi si forma il poligono degli assi; la retta che chiude il poligono, dall'origine al termine, rappresenta l'asse della coppia risultante, cioè è normale al piano di questa coppia ed è uguale al suo momento ridotto.

11. La projezione ortogonale sopra una retta l, passante per O, della retta che chiude il poligono degli assi è uguale al momento (solito) ridotto di Σ rispetto a questa retta.

Se questo momento è nullo, p. es. quando l incontra le linee d'azione di tutte le forze, o la retta che chiude il poligono degli assi sarà perpendicolare ad l, o questo poligono sarà chiuso.

12. Variando O, R resta equipollente a sè stessa, cioè non varia di grandezza, di direzione e di senso, ma varia invece l'asse della coppia risultante.

Se il poligono delle forze si chiude per una posizione di O, cosicchè sia $R=0$, esso si chiuderà sempre. Allora Σ è equivalente ad una coppia il cui asse è indipendente da O; epperò quando il poligono delle forze è chiuso, la retta che chiude il poligono degli assi è equipollente per tutte le posizioni di O.

13. L'equilibrio di Σ richiede che siano nulle la risultante e la coppia risultante, e conseguentemente che per qualsivoglia punto O siano chiusi ambedue i poligoni, e quindi anche che sia nullo il momento rispetto a qualsivoglia retta come asse. Perciò, se una retta l incontra le linee d'azione g_1, g_2, g_{n-1} di $n-1$ fra n forze equilibrate, incontrerà anche la linea d'azione della n^{ma}

forza. Il che può vedersi anche senza far uso dei momenti rispetto ad un asse, nel seguente modo dovuto a Chelini (*): si trasportino le forze P_1, P_2,... P_{n-2}, P_n al punto $O \equiv g_{n-1} l$; le coppie provenienti dalla traslazione di P_1, P_2,... P_{n-2} giacendo in piani per l, lo stesso avviene della loro coppia risultante: P_{n-1} non produce alcuna coppia, e quella proveniente da P_n giace nel piano $g_n O$. Ora, il sistema essendo equilibrato, quella coppia risultante e quest'ultima devono elidersi tra loro, epperò devono trovarsi in piani paralleli, o identici, poichè ce le imaginiamo tutt'e due in piani passanti per O; quindi l giace in $g_n O$ e incontra g_n.

14. È da questo teorema che Möbius dedusse l'altro già ricordato, cioè che le linee d'azione di quattro forze in equilibrio sono generatrici del medesimo sistema di un iperboloide; e così pure risulta dal medesimo che le linee d'azione di due o di tre forze equilibrate sono risp. identiche o appartengono ad uno stesso fascio (piano) di raggi.

Se finalmente si ammette che si possano prendere i momenti rispetto ad assi imaginari, si può fin d'ora concludere che le linee d'azione di 5 forze in equilibrio devono trovarsi nella stessa congruenza lineare, imperocchè le due rette reali o imaginarie che ne incontrano quattro devono incontrare anche la quinta, e quindi divengono le direttrici della congruenza.

15. Reciprocamente quattro rette $g_1 g_2 g_3 g_4$ di un sistema (cioè di uno dei sistemi di generatrici d'un iperboloide), se pur possono rappresentare un sistema equilibrato di forze, ne potranno rappresentare uno solo; perchè tre qualunque di quelle rette non possono esser linee d'azione di forze in equilibrio (n.° 8).

16. È noto che se un poligono delle forze (o un moltilatero) si chiude per un dato ordine delle forze (o dei lati) si chiuderà anche quando si muti comunque quest'ordine. Per un ordine determinato, p. es. $g_1 g_2 g_3 g_4$, si può costruire un solo quadrilatero chiuso, i cui lati siano paralleli a quattro rette date, generatrici dello stesso sistema di un iperboloide generale, tali cioè che tre qualunque di esse non risultino parallele ad uno stesso piano. Si può facilmente persuadersene attribuendo al lato del quadrilatero ch'è parallelo a g_2 una lunghezza arbitraria $K_2 K_3$ [il che è lecito essendo lecite le variazioni proporzionali (n.° 7)], e conducendo pei suoi termini le parallele a g_1, g_3: esiste allora una sola retta che abbia la direzione di g_4 e che incontri (in $K_1 K_4$) queste due parallele.

(*) Mem. dell'Accad. di Bologna, 1870, p. 357.

Quindi lungo le quattro rette $g_1 g_2 g_3 g_4$ del sistema si possono fare agire in un solo modo forze tali che il relativo poligono delle forze sia chiuso. Io dico che queste forze si trovano in equilibrio.

Infatti, essendo chiuso il poligono delle forze, la retta che chiude il poligono dei momenti, ammesso che esista, è di direzione costante per qualsivoglia posizione di O (n.° 12); ma quando O si trova sull'iperboloide, vi è una retta passante per O che incontra tutte quattro le rette g_i e rispetto alla quale quindi il momento delle quattro forze è nullo; la retta che chiude il poligono de'momenti dovrebbe dunque, se esistesse, essere normale a tutte le direttrici dell'iperboloide, il che non è possibile se, come qui, si tratta di un vero iperboloide. Dunque anche il poligono dei momenti riesce chiuso, epperò le quattro forze sono in equilibrio.

Il teorema è evidentemente vero per un numero qualsivoglia di forze formanti un poligono chiuso e agenti secondo rette appartenenti allo stesso sistema di generatrici di un vero iperboloide.

17. Un quadrilatero chiuso, i cui lati siano paralleli a quattro generatrici di un vero iperboloide, potrebbe costruirsi anche sull'iperboloide medesimo, giovandosi delle direttrici parallele a due generatrici non consecutive $g_2 g_4$. Indicando g'_i la direttrice parallela a g_i, G_{ik} il punto $g_i g'_k$, G_{ki} il punto $g_k g'_i$; i punti G_{ik} e G_{ki} sono simmetrici rispetto al centro M dell'iperboloide; le rette $G_{ik} G_{il}$ e $G_{ki} G_{li}$ sono uguali parallele ma di senso opposto, e quindi le $G_{li} G_{ki}$ e $G_{ik} G_{il}$ sono equipollenti. Il quadrilatero chiuso è $G_{14} G_{12} G_{32} G_{34}$ e le richieste forze in equilibrio agenti lungo le $g_1 g_2 g_3 g_4$ sono uguali o proporzionali a $G_{14} G_{12}$, $G_{23} G_{21}$, $G_{32} G_{34}$, $G_{41} G_{43}$; di modo che, come già si era osservato nel numero precedente, una delle quattro forze può prendersi ad arbitrio. Attribuendo ad una il valore zero, sono nulle anche tutte le altre forze; invero se nel quadrilatero costruito al n.° 15 si fanno coincidere K_2 e K_3 in un punto, tutt'e quattro i lati passano per questo punto e hanno lunghezze nulle.

Concludo: Stabilito un ordine ciclico, si costruisca l'intersezione di ciascuna delle quattro linee d'azione (generatrici di un iperboloide) con le direttrici parallele alle due vicine e si otterranno i segmenti che misurano le forze. Il senso delle quali, per due non consecutive, è dato dal senso del segmento che ha per origine l'intersezione della forza con la parallela alla forza precedente e per termine la sua intersezione con la parallela alla forza susseguente; ed è opposto al senso dell'analogo segmento, per le altre due forze.

Lo stesso vale evidentemente per un numero pari qualunque di rette, generatrici dello stesso sistema di un iperboloide.

La costruzione è lineare.

18. L'ordine di successione essendo qui senza influenza, se ne può facilmente ricavare un teorema relativo a un numero pari di generatrici e ai segmenti determinati su queste dalle direttrici parallele; teorema che d'altronde è una conseguenza della nota proprietà che le rette dell'un sistema incontrano quelle dell'altro in punteggiate projettive.

19. Dalla simmetria dei punti G_{ik} e G_{ki} rispetto ad M risulta, che i tetraedri $G_{23}G_{21}G_{41}G_{43}$ e $G_{32}G_{12}G_{14}G_{34}$ sono di ugual volume; ma essi sono di senso opposto, perchè i due triangoli simmetrici $G_{21}G_{41}G_{43}$ e $G_{12}G_{14}G_{34}$ sono percorsi in senso opposto quando sieno veduti da M, epperò anche quando siano veduti risp. da G_{23} e G_{32}, punti che, come M, sono tutti e due dalla stessa banda dei piani dei triangoli o tutti e due da bande opposte.

Inoltre è

$$G_{14}G_{12}G_{32}G_{34} = - G_{32}G_{12}G_{14}G_{34};$$

perchè con tre permutazioni si può passare dall'una all'altra di queste due notazioni dello stesso tetraedro; per ciò è anche

$$G_{14}G_{12}G_{32}G_{34} = G_{23}G_{21}G_{41}G_{43}.$$

Uno di questi due tetraedri ha per spigoli opposti le due forze $G_{14}G_{12}$, $G_{32}G_{34}$ agenti lungo g_1, g_3, e l'altro le due forze $G_{23}G_{21}$, $G_{41}G_{43}$ agenti lungo g_2, g_4, ciascuna forza essendo così percorsa nel proprio senso. Dunque: Se quattro forze sono in equilibrio, il tetraedro formato da due di esse, percorso nel loro senso, è uguale anche pel segno al volume del tetraedro formato dalle altre due.

Se le forze di uno dei due tetraedri si prendono in senso contrario, cosicchè esse divengano equivalenti a quelle dell'altro, il tetraedro non cambia di segno. Se ne ricava il noto teorema di Chasles.

20. Nelle precedenti considerazioni si è pertanto trovato il seguente risultato: Data una forza agente lungo una di quattro generatrici $g_1g_2g_3g_4$ (dello stesso sistema) di un iperboloide, non si può trovare che un solo sistema di forze che siano in equilibrio (o equivalenti) con quella e che agiscano lungo le tre altre generatrici.

Se sono date soltanto tre rette $g_1g_2g_3$, si possono prendere ad arbitrio le forze agenti lungo due di esse; dopo di che tanto la forza che agisce lungo la terza retta quanto la linea d'azione e la grandezza di quella forza ch'è in equilibrio (o equivalente) con quelle tre, sono determinate univocamente; la linea d'azione di quest'ultima è una generatrice dello stesso sistema di $g_1 g_2 g_3$ dell'iperboloide $[g_1 g_2 g_3]$.

Infatti, se sono date P_1, P_2, si cerchi sulla direttrice parallela g'_1 il punto G_{41} determinato, anche riguardo ai segni, dalla proporzione $G_{41}G_{21}:G_{21}G_{23} = P_1:P_2$; la generatrice passante per G_{41} è la linea d'azione della quarta forza, e si ha $P_1:P_2:P_3:P_4 = G_{41}G_{21}:G_{21}G_{23}:G_{23}G_{43}:G_{43}G_{41}$.

Se $P_1=0$, $P_2 \gtrless 0$, G_{41} coincide con G_{21} e G_{43} con G_{23}; anche P_3 diviene $=0$ e P_4 ha la stessa linea d'azione di P_2, ma è $=-P_2$.

Facendo K_4K_1, K_1K_2 equipollenti a P_1, P_2, conducendo per K_2 la parallela s_3 a g_3, e per K_4 le parallele a tutte le generatrici dell'iperboloide, il cono di 2° grado che così ne risulta, ha un lato parallelo ad s_3; l'altro lato che è incontrato da s_3 (in K_3) dà il quarto lato del poligono chiuso.

Se anche g_3 si muove descrivendo l'iperboloide, anche s_3 descrive un cono; i due coni oltre la conica nel piano all'infinito ne hanno in comune un'altra, sulla quale s'incontrano rette corrispondenti s_3, s_4.

Le rette g_3, g_4 descrivono, come risulta facilmente dalle promesse, una serie involutoria di generatrici; ma d'altronde esse sono rette corrispondenti del *Nullsystem* di ciascun sistema di forze equivalenti a (P_1, g_1), (P_2, g_2), e l'involuzione è una proprietà del *Nullsystem* (*).

21. Se le rette date sono le generatrici di un paraboloide anzichè di un iperboloide, tutto il ragionamento del n.° 16 cade, poichè le direttrici essendo tutte parallele a uno stesso piano, possono riuscir tutte normali alla retta che chiude il poligono de'momenti. Qui si ha invece il teorema: Se lungo un numero qualunque n di generatrici d'un paraboloide rigato, appartenenti allo stesso sistema, agiscano forze il cui poligono è chiuso, il piano della coppia equivalente a questo gruppo di forze è parallelo al piano direttore delle generatrici dell'altro sistema.

D'altronde in questo caso il poligono delle forze è sempre piano ed è possibile che si chiuda, qualunque siano le grandezze di $n-1$ delle forze.

(*) Staudt, *Beitr. z. Geom. d. Lage*, n.° 94. *Nullsystem* è un sistema di figure polari reciproche nello spazio, dove ciascun piano passa pel corrispondente polo (*Nullebene, Nullpunkt*).

II (*).

22. Una congruenza di 1° ordine e di 1ª classe o una congruenza lineare è determinata, com'è noto, da quattro de'suoi raggi $g_1 g_2 g_3 g_4$ che non appartengano al medesimo fascio gobbo (**). Essa può essere generata completamente prendendo dal fascio passante per tre dei quattro raggi, p. es. per $g_1 g_2 g_3$, un raggio fisso (p. es. uno di questi tre) e un raggio variabile, e congiungendoli mediante un fascio con g_4.

La sola retta passante per un punto O, situata risp. in un piano ω, che incontri g_4 e il raggio fisso del fascio $[g_1 g_2 g_3]$, incontra ancora un altro raggio del fascio: ed è questo raggio variabile quello che determina il fascio dal quale si ricava il raggio della congruenza passante per O, risp. posto in ω; cosicchè questo raggio si ottiene con costruzioni lineari.

Un fascio gobbo contenente tre raggi della congruenza, le appartiene completamente. Le direttrici della congruenza sono le due trasversali delle quattro rette g_i e sono raggi dei fasci direttori (gobbi) della congruenza; quattro raggi qualunque della medesima sono da esse incontrati.

Due fasci qualsivogliano della congruenza hanno due raggi comuni; sono le intersezioni dei due iperboloidi su cui sono situati, e che inoltre hanno due direttrici comuni.

Prendendo tre o due direttrici qualunque del primo fascio, e una o due direttrici qualunque del secondo fascio, le due trasversali comuni di queste quattro rette sono appunto quei due raggi comuni; e si costruiscono nel modo indicato nel n.° 57 del *Syst. Entw.* di Steiner. In quanto segue è sempre noto

(*) Si cfr. Möbius, *Statik,* I, § 84-87 e Giorn. di Crelle, t. 10, p. 317; Reye, *Geometrie der Lage,* II, 9 Vortrag e in Plücker, *Neue Geometrie,* v. i capitoli sui complessi lineari e sulle congruenze lineari, o le Memorie di Reye e Silldorf nel Giornale di Borchardt, t. 69 e nel Giorn. di Schlömilch, t. 20. Parlandosi qui esclusivamente di complessi e di congruenze lineari, ommetterò spesso in seguito l'aggiunto «lineari».

(**) Il tedesco Regelschaar, che esprime la serie di tutte le generatrici d'un iperboloide, appartenenti allo stesso sistema, è qui tradotto per brevità con fascio gobbo o fascio generatore. L'altro sistema di generatrici che dai tedeschi è detto Leitschaar (rispetto al Regelschaar) può dirsi fascio direttore. Fascio piano (Strahlenbüschel) è il sistema di tutte le rette poste in un piano e concorrenti in un punto. Stella di raggi o stella (Strahlenbündel) è il sistema di tutte le rette concorrenti in un punto dello spazio. T.

uno dei due raggi, epperò la determinazione dell'altro diviene lineare e più semplice. I raggi della congruenza che sono appoggiati ad una retta arbitraria formano un fascio (gobbo), tre raggi del quale si ottengono facilmente con costruzioni lineari.

23. Un complesso lineare o di 1° grado è determinato da cinque dei suoi raggi, che non si trovino nella stessa congruenza (lineare). Il complesso contiene completamente ogni fascio passante per tre dei suoi raggi, ogni congruenza passante per quattro dei suoi raggi, epperò anche ogni retta che incontri le due trasversali di quattro dei suoi raggi.

Date cinque rette $g_1, \dots g_5$, il complesso da esse individuato si può ottenere così: quattro rette, siano $g_1, \dots g_4$, determinano una congruenza, due raggi della quale, uno fisso e uno variabile, determinano con g_5 un fascio (gobbo); oppure tre, delle cinque rette, siano $g_1 g_2 g_3$, determinano un fascio (gobbo), due raggi del quale, uno fisso e uno variabile, insieme alle altre due rette g_4, g_5 determinano una congruenza.

I raggi del complesso che concorrono in un punto O giacciono in un piano ω, epperò formano un fascio piano; e viceversa.

Il complesso s'intenda generato nel primo modo da $g_1, \dots g_5$: si costruisca la retta m (unica) passante per O, risp. situata in ω, che incontra g_5 e il raggio fisso della congruenza $[g_1, \dots g_4]$; essa è una direttrice di tutt'i fasci (gobbi) che forniscono raggi del complesso passanti per O, risp. posti in ω, e quindi è incontrata anche da tutt'i raggi variabili della congruenza $[g_1, \dots g_4]$ che servono a determinare quei fasci; per ciò essi stessi formano un fascio (gobbo), contenente anche il raggio fisso (n.° 22); g_5 incontra, oltre m, un'altra direttrice n di questo fascio, la quale risulta direttrice per tutt'i fasci (gobbi) che conducono ai raggi del complesso passanti per O, risp. posti in ω; conseguentemente questi raggi formano un fascio (piano) intorno ad O nel piano $\omega \equiv On$, risp. nel piano ω intorno al punto $O \equiv \omega n$. Questa costruzione di ω, risp. di O, è lineare.

24. I punti O e i corrispondenti piani ω formano, com'è noto, un *Nullsystem* e si chiamano, secondo MÖBIUS, Nullpunkt e Nullebene o anche polo e piano polare. Se O descrive una retta l, ω ruota intorno ad una retta l', la corrispondente di l nel *Nullsystem* o, secondo PLÜCKER, la conjugata di l rispetto al complesso. Tutti i raggi del complesso che incontrano una retta l, ne incontrano dunque un'altra l', formando una congruenza le cui direttrici sono l, l'. Le rette conjugate del complesso, o le rette corrispondenti dell'an-

nesso *Nullsystem*, sono identiche alle direttrici delle congruenze contenute nel complesso o alle trasversali di tutti i gruppi di quattro raggi del complesso. Ogni retta appoggiata a due di queste rette conjugate è un raggio del complesso. Ogni raggio del complesso è una retta coincidente con la propria conjugata.

Si considerino un fascio (gobbo) e una congruenza appartenenti ad uno stesso complesso, e sia l una direttrice del fascio; i raggi della congruenza che l'incontrano formano (n.° 22) un fascio (gobbo), del quale si costruiscono facilmente tre raggi, quando la congruenza è data mediante quattro rette; questo fascio e il dato si trovano nella stessa congruenza, quella formata dai raggi del complesso appoggiati ad l; quindi essi, epperò anche il fascio dato e la congruenza data, hanno due raggi comuni, la costruzione dei quali fu già indicata al n.° 22.

25. Dalle 5 rette $g_1, \ldots g_5$ si può ricavare il piano polare del punto O anche nel seguente modo: si formino con le cinque rette due gruppi di quattro ciascuno, e si costruiscano le due coppie di trasversali di questi gruppi; le due rette uscenti da O, appoggiate a queste due coppie, sono raggi del complesso e determinano il piano polare ω; gli altri tre gruppi di quattro rette forniscono tre altri raggi del fascio piano (O, ω).

26. Se l descrive un fascio piano (O, ω'), la retta conjugata descrive un fascio piano projettivo (O', ω): proprietà del *Nullsystem;* il raggio del complesso $OO' \equiv \omega\omega'$ corrisponde a sè stesso.

Sia g un raggio del complesso incontrato dalle due trasversali d'uno di quei gruppi di quattro rette; O e O' siano due suoi punti, i cui piani polari ω, ω' passino per g; e, f siano pure raggi del complesso appoggiati all'una o all'altra delle cinque coppie di trasversali, e incontrino i piani ω, ω' risp. in E, F, E', F'. Siccome $O'E$ giace in ω, passa per O' e incontra e, la sua conjugata, dovendo passare per O, giacere in ω' e incontrare la e stessa, sarà la OE'; e così sono conjugate $O'F$ e OF'. Abbiamo dunque tre paja di raggi corrispondenti dei due fasci (piani) projettivi (O', ω) (O, ω'), cioè: $O'(O, E, F)$ ed $O(O', E', F')$; per ciò le altre paja di raggi corrispondenti, anch'essi conjugati, si possono costruire linearmente. D'altronde ogni retta che incontra due di questi raggi corrispondenti appartiene al complesso, epperò per ottenere completamente il complesso bastano i due fasci piani.

Le costruzioni date nei n.i 25 e 26 furono comunicate senza dimostrazione dal sig. Sylvester nellá prima delle Note citate sopra e, sia per ciò, sia perchè nel seguito saranno necessarie, mi sono qui occupato un po'a lungo delle proprietà di un complesso. Queste costruzioni presuppongono problemi di secondo grado, mentre le prime sono lineari.

27. Le corde di una cubica gobba, che siano inoltre raggi di un complesso lineare, generano una superficie di 4° grado, perchè per ciascun punto della curva e per nessun altro passano due di tali rette; donde già si conclude il grado della superficie (*). Ma il cono i cui piani tangenti projettano le rette della superficie da un punto della curva doppia è di 2° grado; si ha quindi il teorema del sig. CAYLEY (**) che 6 corde in involuzione di una cubica gobba sono projettate da un punto della curva secondo 6 tangenti di una conica; la generazione della curva mediante stelle (*Strahlenbündel*) collineari manifesta che, se 6 corde sono projettate in tal modo da un punto della curva, lo stesso avverrà per qualsivoglia altro punto della medesima.

III.

28. Siano P_1 $P_2 \dots$ P_5 cinque forze in equilibrio agenti lungo le rette g_1 $g_2 \dots$ g_5, e si determini su g_3 una forza P'_3 in modo ch'essa possa comporsi con P_1 e P_2 in una unica risultante P', il che può farsi, pel n.° 20, in uno ed un solo modo. La linea d'azione g' di questa forza P' appartiene al fascio gobbo $[g_1 g_2 g_3]$; ora poichè le forze P', $P''_3 = P_3 - P'_3$, P_4, P_5 sono in equilibrio e le loro linee d'azione g', g_3, g_4, g_5 appartengono allo stesso fascio gobbo, epperò tanto $g_1 g_2 g_3 g'$ quanto $g' g_3 g_4 g_5$ si trovano nel medesimo fascio, le $g_1 g_2 g_3 g_4 g_5$ sono raggi di una medesima congruenza (lineare) (n.° 22). Dunque: Le linee d'azione di cinque forze in equilibrio si trovano sempre in una stessa congruenza lineare ed ammettono due trasversali comuni (n.° 14).

29. Viceversa, se sono date cinque rette $g_1 \dots$ g_5 di una congruenza, e si prende ad arbitrio su una di esse, p. es. su g_1, la forza P_1; le forze che sono in equilibrio con questa e che agiscono lungo le altre quattro rette, sono univocamente determinate. Infatti, i fasci gobbi $[g_1 g_2 g_3]$ e $[g_3 g_4 g_5]$ appartenendo alla stessa congruenza hanno, oltre g_3, un secondo raggio (reale) comune, g', che si costruisce linearmente (n.° 22). Ora essendo data P_1, e $g_1 g_2 g_3 g'$ essendo nel medesimo fascio,

(*) Cfr. anche HALPHEN, Comptes rendus, janv. 1872.
(**) Comptes rendus, t. 52, p. 1041.

vi è uno ed un solo sistema di forze P_2, P'_3, $-P'$ agenti lungo le $g_2 g_3 g'$ che siano in equilibrio con P_1 (n.° 16); epperò P' è la risultante di P_1, P_2, P'_3. Parimenti, $g' g_3 g_4 g_5$ essendo nel medesimo fascio e P' essendo nota, vi è un solo sistema di forze P''_3, P_4, P_5 agenti lungo $g_3 g_4 g_5$, le quali siano in equilibrio con P' ossia con P_1, P_2, P'_3. Quindi le forze P_1, P_2, $P_3 = P'_3 + P''_3$, P_4, P_5 sono in equilibrio e possono costruirsi secondo il n.° 16 o 17.

Variando P_1, variano proporzionalmente anche le altre forze.

Il n.° 9 prova che mutando l'ordine non si perviene a soluzioni diverse. Se $g_1 g_2 g_3 g_4$ appartenessero al medesimo fascio gobbo, la forza P_5 sarebbe nulla e le forze agenti secondo $g_1 \ldots g_4$ costituirebbero esse il sistema equilibrato.

30. Se sono date solamente quattro rette $g_1 g_2 g_3 g_4$ e tre di esse si prendano come linee d'azione di forze arbitrarie $P_1 P_2 P_3$, si può determinare una sola forza P_4 agente lungo g_4, in modo che $P_1 P_2 P_3 P_4$ facciano equilibrio ad un'unica forza P_5 (o siano equivalenti a $-P_5$). Dapprima si determini P'_3 su g_3 così, che $P_1 P_2 P'_3$ siano equivalenti ad una forza P', il che può farsi sempre e in un solo modo (n.° 20); la linea d'azione g' di P' si trova nel fascio gobbo $[g_1 g_2 g_3]$. Poi si determini P_4 su g_4 così, che P', $P''_3 = P_3 - P'_3$, P_4 siano in equilibrio con una sola forza P_5. Allora P_5 è in equilibrio con $P_1 P_2 P_3 P_4$ e la sua linea d'azione g_5 appartiene al fascio $[g' g_3 g_4]$, epperò alla congruenza $[g_1 g_2 g_3 g_4]$.

Se invece P_3 non è data, non è data nemmeno P''_3; ma P'_3, P', g' non dipendendo da P_3, il fascio $[g' g_3 g_4]$ resta fisso, mentre g_5 si muove in esso e naturalmente le P_3, P_4, P_5 variano con g_5. Dunque: Se sono date quattro rette $g_1 g_2 g_3 g_4$ nonchè le forze agenti lungo una o due o tre di esse; la retta g_5 lungo la quale agisce una forza che sia in equilibrio con le forze date e con forze agenti lungo le altre rette, si troverà nella congruenza $[g_1 g_2 g_3 g_4]$, e vi potrà prendere una posizione qualsivoglia o sarà legata a trovarsi in un certo fascio gobbo (contenente le due rette secondo le quali agiscono le due forze non date) o ad assumervi una posizione affatto determinata.

Se assumiamo che di tre forze date $P_1 P_2 P_3$, sia $P_1 = 0$, ma P_2 e P_3 diverse da zero, allora viene $P'_3 = 0$, $P''_3 = P_3$, g' coincidente con g_2 e $P' = P_2$ (n.° 20); e, com'era da prevedersi, g_5 diviene la linea d'azione di quella forza che sta in equilibrio con le P_2, P_3 agenti lungo g_2, g_3 e con una forza agente lungo g_4.

31. Con ragionamenti analoghi si concludono i teoremi seguenti:

Le linee d'azione di sei forze in equilibrio sono sempre raggi di un medesimo complesso (lineare).

Viceversa, presi ad arbitrio sei raggi di un complesso ed una forza pure arbitraria agente lungo uno di essi, le forze agenti lungo gli altri cinque raggi, che costituiscono con quella un sistema equilibrato, sono determinate univocamente.

Basta ricorrere al teorema sopra ricordato, che un fascio (gobbo) e una congruenza appartenenti allo stesso complesso hanno due raggi comuni (n.° 24), e tener presente il n.° 9.

Al contrario se sono date soltanto cinque rette $g_1g_2g_3g_4g_5$ e se le forze agenti lungo la prima o lungo le due, tre, quattro prime si assumono ad arbitrio, la linea d'azione g_6 di una forza in equilibrio con le forze date e con altre agenti lungo le rimanenti rette, si troverà sempre nel complesso $[g_1g_2g_3g_4g_5]$ e vi potrà assumere una posizione qualsivoglia, o sarà legata a trovarsi in una certa congruenza, contenente le rette $g_3g_4g_5$, o in un certo fascio (gobbo) contenente le rette g_4, g_5, o a prendervi una posizione completamente determinata.

32. Se sono date ad arbitrio sei rette $g_1g_2...g_6$ nonchè le forze agenti lungo la prima, o lungo le due,... cinque prime; la linea d'azione g_7 di una forza, che sia in equilibrio con le forze date e con altre agenti lungo le restanti rette, potrà avere una posizione qualsivoglia nello spazio, o sarà legata a trovarsi in un certo complesso o in una certa congruenza o in un certo fascio (gobbo) contenente le rette lungo le quali agiscono le forze non date, o ad avere una posizione affatto determinata; e le forze incognite in quest'ultimo caso (ed evidentemente anche negli altri, quando siasi fissata una delle posizioni lecite) sono univocamente determinate.

A persuadersene giova ricordare il teorema che un fascio (gobbo) e un complesso, o due congruenze, hanno due raggi comuni.

33. Ora siano date ad arbitrio otto rette $g_1g_2...g_8$; la congruenza $[g_1...g_4]$ ed il complesso $[g_4...g_8]$ hanno in comune un fascio (gobbo) contenente il raggio g_4. Assumendo ad arbitrio le forze P_1, P_2 sopra g_1g_2, la linea d'azione della forza ch'è in equilibrio con queste e con altre forze agenti lungo le g_3g_4 sarà, pel n.° 30, raggio di un fascio (gobbo) contenente g_3g_4 e appartenente alla congruenza $[g_1...g_4]$. Quest'ultimo fascio e quello sopra nominato, trovandosi nella medesima congruenza $[g_1...g_4]$, avranno in comune un altro raggio g', oltre g_4. E quindi vi sarà una forza P' agente lungo g', equivalente a P_1, P_2 e a certe forze P_3, P'_4 agenti lungo le g_3g_4. D'altra parte g' è anche raggio del complesso $[g_4...g_8]$, epperò esistono delle forze P''_4, $P_5,...$, P_8 equilibrate

con la P'. Le otto forze P_1, P_2, P_3, $P_4 = P'_4 + P''_4$, P_5, P_6, P_7, P_8, delle quali le due prime sono arbitrarie, sono dunque in equilibrio.

Sei rette arbitrarie non potendo in generale rappresentare un sistema equilibrato di forze, segue dal n.° 9 che il testè trovato è il solo sistema di forze equilibrate agenti lungo le $g_1 \dots g_8$, che sia compatibile con $P_1 P_2$.

Si potevano invece considerare il complesso $[g_1 \dots g_5]$ e la congruenza $[g_5 \dots g_8]$; e allora sarebbe stato necessario il teorema, che una congruenza e un fascio (gobbo) appartenenti allo stesso complesso hanno due raggi comuni.

34. Siano date solamente sette rette $g_1 \dots g_7$ e se ne prendano sei come linee d'azione di forze: $P_1 P_2 \dots P_6$. Si cerchi quella forza P'_4, agente lungo g_4, che composta con $P_1 P_2 P_3$ dà per risultante una forza P' (n.° 30), la cui linea d'azione g' apparterrà alla congruenza $[g_1 \dots g_4]$. Allora la linea di azione g_8 di una forza che insieme alle P', $P''_4 = P_4 - P'_4$, P_5, P_6 e ad un'altra forza agente lungo la g_7 forma un sistema equilibrato, appartiene (n.° 31) al complesso $[g' g_4 g_5 g_6 g_7]$. Se P_6 o P_5, P_6 o P_4, P_5, P_6 non sono date, la g_8, appartenendo sempre al complesso $[g' g_4 \dots g_7]$, potrà percorrervi un fascio (gobbo) contenente $g_6 g_7$ o percorrervi una congruenza contenente $g_5 g_6 g_7$ o assumervi qualsivoglia posizione.

35. Possiamo ora dimostrare i precedenti teoremi per un numero qualsivoglia di forze, assumendoli veri per numeri minori di forze.

Siano dunque date n rette $g_1 \dots g_n$ $(n > 6)$ ed $n - 6$ fra esse, $g_1 \dots g_{n-6}$, si assumano come linee d'azione di forze arbitrarie $P_1 \dots P_{n-6}$. È sempre e in infiniti modi possibile di trovare una retta secondo la quale deva agire una forza che sia equivalente al sistema delle $P_1 \dots P_{n-6}$ e di certe altre forze, da determinarsi, agenti lungo g_{n-5}, g_{n-4}, imperocchè il teorema che nel prossimo numero dovrà dimostrarsi per $n - 1$ è assunto vero per $n - 4$. Il luogo di quella retta è un fascio (gobbo) contenente g_{n-5} e g_{n-4}, il quale ha in comune col complesso $[g_{n-4} \dots g_n]$ un'altra retta g' oltre g_{n-4}. Sia P' la forza, agente lungo g', ch'è in equilibrio con le $P_1 \dots P_{n-6}$ e con certe due forze P_{n-5}, P'_{n-4} univocamente determinate agenti secondo g_{n-5}, g_{n-4}; appartenendo le $g' g_{n-4} \dots g_n$ allo stesso complesso, esisteranno delle forze P''_{n-4}, $P_{n-3}, \dots P_n$ agenti lungo le $g_{n-4}, \dots g_n$ ed equilibrate con P', ossia anche con $P_1, \dots P_{n-6}$, P_{n-5}, P'_{n-4}; e, pel n.° 9, il sistema $P_1, \dots P_{n-5}$, $P_{n-4} = P'_{n-4} + P''_{n-4}$, $P_{n-3}, \dots P_n$ è il solo sistema di forze equilibrate agenti lungo $g_1, \dots, g_n$, compatibile con le forze date P_1, $P_2, \dots P_{n-6}$.

36. Se non sono date che $n - 1$ rette $g_1, \dots, g_{n-1}$, lungo $n - 2$ di esse ponno farsi agire altrettante forze arbitrarie $P_1, \dots, P_{n-2}$. E si può determinare

sulla g_{n-4} una forza P'_{n-4} tale, che $P_1, \ldots, P_{n-5}$, P'_{n-4} siano in equilibrio con una sola forza P', la cui linea d'azione diremo g': imperocchè, come sopra, il teorema che qui stiamo dimostrando per $n-1$ è già vero per $n-4$.

Quindi ancora (n.° 31) una sola retta g_n esiste, lungo la quale agisca una forza P_n, in equilibrio con P', $P''_{n-4} = P_{n-4} - P'_{n-4}$, P_{n-3}, P_{n-2} e con una certa forza P_{n-1} da determinarsi, agente lungo la g_{n-1}; ed essa appartiene al complesso $[g' g_{n-4} \ldots g_{n-1}]$. Che se, al contrario, delle forze P_{n-4}, P_{n-3}, P_{n-2} si dànno soltanto le due prime, la prima, o nessuna, la g_n potrà percorrere un fascio (gobbo) contenente g_{n-2}, g_{n-1} o una congruenza contenente g_{n-3}, g_{n-2}, g_{n-1} (appartenenti ambedue a quel complesso) o potrà percorrere tutto il complesso; e se non è data nemmeno P_{n-5}, la g_n potrà assumere qualsivoglia posizione nello spazio, come è dimostrato dal n.° precedente. Quindi, date ad arbitrio n rette nello spazio ($n > 6$), lungo $n-6$ di esse si ponno fare agire altrettante forze pure arbitrarie; dopo di che le forze agenti lungo le rimanenti rette che con queste sono in equilibrio sono univocamente determinate.

Se invece non sono date che $n-1$ rette e su $n-6$, $n-5, \ldots, n-2$ di esse sono date altrettante forze, la linea d'azione della forza ch'è in equilibrio con queste e con certe forze (da determinarsi) agenti lungo le altre rette, descriverà l'intero spazio, o un complesso, o una congruenza, o un fascio gobbo (ciascuna di queste forme comprendendo in sè le successive, nell'ordine qui considerato, e ciascuna contenendo come raggi le rette che sono linee d'azione delle forze risp. non date) o avrà una (unica) posizione determinata nel fascio ultimo nominato.

37. Un sistema di m forze di cui sono date le linee d'azione e le intensità può, per un noto teorema della Statica, in infiniti modi ridursi a un sistema di due forze; è indifferente prendere uno piuttosto che l'altro di queste paja di forze conjugate; perchè essendo tutte fra loro equivalenti, se un pajo è in equilibrio con certe altre forze, avverrà lo stesso di ogni altro pajo: epperò le soluzioni a cui si perviene adoperandone uno, si ripeteranno adoperando un altro pajo qualsivoglia. I nostri teoremi relativi ad n rette ed $n-6$ forze, o ad $n-1$ rette ed $n-6$, $n-5, \ldots$ o $n-2$ forze sono dunque identici ai teoremi relativi ad 8, 7, 6,... 3 rette e a 2 forze (n.i 34, 33, 32, 31, 30, 20); nell'ultimo caso, in cui sono date $n-1$ rette ed $n-2$ forze, anche la retta data g_{n-1} e la g_n, non data, sono linee d'azione di due forze equivalenti al gruppo di quelle $n-2$, epperò sono rette corrispondenti nel *Nullsystem* con-

nesso a tale sistema di forze, ossia rette conjugate in quest'ultimo sistema; quindi l'esistenza di una (unica) retta g_n è una cosa nota.

38. Le forze non date essendo in equilibrio con ogni pajo di forze conjugate nel sistema delle forze date, ne ricaviamo i seguenti teoremi:

Se sono date m forze in grandezza e posizione, ed inoltre una, due o tre rette, g_{m+1}; g_{m+1}, g_{m+2}; $g_{m+1}, g_{m+2}, g_{m+3}$ rispettivamente, tutt'i fasci (gobbi) contenenti la g_{m+1} e due rette qualsivogliano conjugate nel sistema di forze date, contengono inoltre una retta fissa, — teorema noto, perchè g_{m+1} e questa retta fissa sono esse stesse conjugate, ed ogni fascio gobbo che contiene due rette conjugate e una terza retta, deve contenere anche la conjugata di quest'ultima —; tutte le congruenze contenenti un pajo di queste rette conjugate nonchè le g_{m+1} e g_{m+2} hanno in comune un fascio, e tutti i complessi contenenti un pajo di queste rette conjugate nonchè le $g_{m+1}, g_{m+2}, g_{m+3}$, hanno in comune una congruenza.

Si noti però che i due ultimi teoremi (i quali d'altronde possono enunciarsi come teoremi puramente geometrici relativi a rette corrispondenti di un *Nullsystem* o a rette conjugate di un complesso lineare) scaturiscono dal primo. Infatti i due fasci (gobbi) che contengono due rette conjugate e risp. g_{m+1}, g_{m+2} appartengono alla congruenza determinata da queste quattro rette; e d'altra parte essi contengono, pel primo teorema, risp. le rette g'_{m+1}, g'_{m+2} conjugate di g_{m+1}, g_{m+2}. Di modo che, così le rette g'_{m+1}, g'_{m+2} come il fascio gobbo $[g_{m+1}, g'_{m+1}, g_{m+2}, g'_{m+2}]$ sono contenuti in quella congruenza; il che dimostra il secondo teorema, e in modo analogo si deduce il terzo.

IV.

39. Siano, secondo Grassmann (*), $E_1E_2E_3E_4$ i punti-unità (vertici del tetraedro fondamentale); $\alpha_1\ldots\alpha_4$ e $\beta_1\ldots\beta_4$ siano i loro coefficienti (pesi) nella rappresentazione di due punti A, B come somme di quei punti o, ch'è lo stesso, le coordinate baricentriche di Möbius de'punti A e B, cosicchè

$$A = \sum_1^4 \alpha_\rho E_\rho, \qquad B = \sum_1^4 \beta_\rho E_\rho \tag{1}$$

ove per semplicità si suppone $\sum \alpha_\rho = \sum \beta_\rho = 1$.

(*) *Ausdehnungslehre,* 2ª edizione, v. in particolare il primo Abschnitt, cap. 5; v. anche la Memoria di Grassmann nei Math. Ann., t. 7, p. 538, § 2.

Se si moltiplicano i due punti A e B secondo le regole della moltiplicazione esterna (*), si ottiene un segmento rettilineo (*Linientheil*) $[AB]$ come somma dei segmenti terminati ai vertici del tetraedro $E_1E_2E_3E_4$ e affetti da certi coefficienti. L'addizione di segmenti è una conseguenza dell'addizione e moltiplicazione di punti e si effettua allo stesso modo come la composizione delle forze da essi rappresentate.

Risulta dunque:

$$[AB]=\gamma_{12}[E_1E_2]+\gamma_{23}[E_2E_3]+\gamma_{31}[E_3E_1]+\gamma_{34}[E_3E_4]+\gamma_{14}[E_1E_4]+\gamma_{24}[E_2E_4],$$

ove

$$\gamma_{\rho\sigma}=\alpha_\rho\beta_\sigma-\alpha_\sigma\beta_\rho \tag{2}$$

epperò le sei $\gamma_{\rho\sigma}$ sono le coordinate della retta AB nel senso della Geometria de' complessi e sono legate, com'è noto, dalla relazione

$$\gamma_{12}\gamma_{34}+\gamma_{23}\gamma_{14}+\gamma_{31}\gamma_{24}=0. \tag{3}$$

40. Due altri punti della stessa retta conducono bensì a sei altre $\gamma_{\rho\sigma}$, ma queste sono alle prime proporzionali, il rapporto essendo quello delle lunghezze dei due segmenti rettilinei. A tutti i segmenti (o forze) uguali spetta uno di questi gruppi proporzionali, e le 6 quantità del gruppo si possono chiamare le coordinate del segmento o della forza; come coordinate della retta illimitata si possono prendere le 6 quantità di uno qualunque dei gruppi; ma per le nostre considerazioni è preferibile di prendere quelle del gruppo corrispondente ai segmenti uguali all'unità, ed è ciò che faremo nel seguito. In conseguenza $a\gamma_{\rho\sigma}$ sono le coordinate di un segmento di lunghezza a (di una forza d'intensità a) di una retta (agente lungo una retta) di coordinate $\gamma_{\rho\sigma}$; a invece è il rapporto della lunghezza del segmento che si considera alla lunghezza del segmento che ha per coordinate le coordinate della retta.

41. La somma di più segmenti $[A_iB_i]$ di coordinate $a_i\gamma^i_{\rho\sigma}$ può sempre considerarsi come somma di due segmenti $[A'B']$ e $[A''B'']$, uno dei quali appartiene a una retta $\gamma'_{\rho\sigma}$ data.

Infatti l'equazione di Grassmann

$$\sum[A_iB_i]=[A'B']+[A''B'']$$

(*) Nella moltiplicazione esterna lo scambio di due fattori estensivi di 1ª specie (*Stufe*) produce un cambiamento di segno, epperò la loro identità rende nullo il prodotto; per tale moltiplicazione sussistono bensì i principî d'associazione e di distribuzione, ma non quello di commutazione.

comprende in sè le 6 equazioni ordinarie

$$\left.\begin{array}{l} \sum a_i \gamma^i_{12} = x' \gamma'_{12} + x'' \gamma''_{12} \\ \sum a_i \gamma^i_{23} = x' \gamma'_{23} + x'' \gamma''_{23} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum a_i \gamma^i_{24} = x' \gamma'_{24} + x'' \gamma''_{24} \end{array}\right\} \quad (4)$$

ove x' e $x'' \gamma''_{\rho\sigma}$ rappresentano la lunghezza del segmento sulla retta data e le coordinate del segmento incognito, le quali ultime devono inoltre soddisfare alla relazione identica (3). Ora risolvendo le (4) rispetto alle $x'' \gamma''_{\rho\sigma}$ e sostituendo nella (3) i valori di queste quantità, viene a mancare il termine in x'^2, perchè le $\gamma'_{\rho\sigma}$ soddisfanno alla (3); epperò, l'equazione essendo di primo grado in x', il problema non ammette che una soluzione.

La condizione esprimente che la somma di più segmenti si riduce a un unico segmento è

$$\sum a_i \gamma^i_{12} \cdot \sum a_i \gamma^i_{34} + \sum a_i \gamma^i_{23} \cdot \sum a_i \gamma^i_{14} + \sum a_i \gamma^i_{31} \cdot \sum a_i \gamma^i_{24} = 0,$$

la quale, applicando la moltiplicazione esterna, equivale a

$$\sum [A_i B_i] \cdot \sum [A_i B_i] = 0 \quad (*).$$

42. Il prodotto di due segmenti $[A_i B_i]$ e $[A_k B_k]$ di coordinate $a_i \gamma^i_{\rho\sigma}$ e $a_k \gamma^k_{\rho\sigma}$ è il parallelepipedo (lo Spat secondo il sig. Grassmann) $[A_i B_i A_k B_k]$; la moltiplicazione esterna dà

$$\left.\begin{array}{l} [A_i B_i A_k B_k] = \\ a_i a_k (\gamma^i_{12} \gamma^k_{34} + \gamma^i_{34} \gamma^k_{12} + \gamma^i_{23} \gamma^k_{14} + \gamma^i_{14} \gamma^k_{23} + \gamma^i_{31} \gamma^k_{24} + \gamma^i_{24} \gamma^k_{31}) [E_1 E_2 E_3 E_4] \end{array}\right\} \quad (5)$$

essendo $[E_1 E_2 E_3 E_4]$ il parallelepipedo dei quattro punti-unità. Se, come fa il sig. Cayley, si dinota con (i, k) la quantità in parentesi, sarà $(i, k) = (k, i)$, e $(i, i) = 0$ a motivo della (3); ed $a_i a_k (i, k)$ esprime il rapporto fra il momento (secondo Möbius) di un segmento rispetto all'altro ed il volume del tetraedro delle E_i, mentre (i, k) esprime il rapporto fra il momento delle due rette (secondo Cayley) e il volume dello stesso tetraedro (n.° 2).

(*) V. Grassmann, l. c., p. 182. — Anche Plücker con gli ordinarî metodi analitico-meccanici era arrivato al concetto delle coordinate di una forza, e quindi anche al teorema che le forze si compongono addizionandone le coordinate omologhe (*Fundamental views regarding Mechanics*, Philos. Transactions, 1866, p. 361; *Neue Geom.*, n.° 25; cfr. anche Klein, Math. Ann., t. 4, p. 403 e Lindemann, ibidem, t. 7, p. 121).

Se le rette alle quali appartengono i due segmenti sono in un piano, il parallelepipedo $[A_i B_i A_k B_k]$ si annulla, e si ha

$$(i,\ k)=0. \tag{6}$$

Il parallelepipedo $[A_i B_i E_1 E_2]$, per la moltiplicazione esterna, si trova uguale ad $a_i \gamma_{34}[E_3 E_4 E_1 E_2]=a_i \gamma_{34}[E_1 E_2 E_3 E_4]$; e lo stesso dicasi degli altri formati dal segmento $[A_i B_i]$ coi lati del tetraedro fondamentale.

Preso un segmento sopra una retta, le coordinate di quello e le coordinate di questa sono dunque proporzionali ai parallelepipedi o tetraedri che il segmento forma con gli spigoli del tetraedro fondamentale (*).

43. Dunque per trovare delle forze in equilibrio agenti lungo n rette g_i di coordinate $\gamma^i_{\rho\sigma}$, sulle quali i segmenti $[A_i B_i]$ siano uguali all'unità, si devono determinare delle quantità x_i tali che sia

$$\sum_1^n x_i [A_i B_i]=0, \tag{7}$$

equazione che si scinde nelle sei seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum x_i \gamma^i_{12}=0, & \sum x_i \gamma^i_{23}=0, & \sum x_i \gamma^i_{31}=0 \\ \sum x_i \gamma^i_{34}=0, & \sum x_i \gamma^i_{14}=0, & \sum x_i \gamma^i_{24}=0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

44. La moltiplicazione esterna dell'equazione (7) con gli n segmenti $[A_i B_i]$ conduce ad n equazioni, esprimenti che la somma de' momenti delle n forze rispetto a ciascuno degli n segmenti come assi limitati (o rispetto alla propria linea d'azione) è nulla.

Dalle (5) e (3), dividendo anche per $[E_1 E_2 E_3 E_4]$, si deduce che queste n equazioni sono:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \quad +x_2(1,\ 2)+x_3(1,\ 3)+\cdots+x_n(1,\ n)=0 \\ x_1(2,\ 1)+\quad \cdot \quad +x_3(2,\ 3)+\cdots+x_n(2,\ n)=0 \\ x_1(3,\ 1)+x_2(3,\ 2)+\quad \cdot \quad +\cdots+x_n(3,\ n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1(n,\ 1)+x_2(n,\ 2)+x_3(n,\ 3)+\cdots+\quad \cdot \quad =0; \end{array}\right\} \tag{9}$$

le quali, quando $n>6$, sono equivalenti alle sei equazioni (8), e quindi $n-6$ di esse sono conseguenza delle rimanenti; perciò non determinano univoca-

(*) Cfr. Zeuthen, Math. Ann., t. 1, p. 432.

mente le x_i; bensì $n-6$ di queste possono assumersi ad arbitrio; e allora le altre x_i sono univocamente determinate. Invece, quando $n<6$ le (9) non bastano a produrre l'equilibrio; allora esse non sono equivalenti alle (8).

Le (8) sono le equazioni che si trovano sotto lo stesso n.° a pag. 99 della Memoria sopra citata del sig. Spottiswoode, soltanto che ivi le P non rappresentano i valori assoluti delle forze; non facendovisi sulle coordinate delle linee d'azione un concetto analogo al nostro; almeno il sig. Spottiswoode non lo dice esplicitamente.

Dalle medesime egli ricava mediante eliminazioni le equazioni (9), alle quali il sig. Chelini è arrivato per altra via più geometrica (*).

Per $n=4$ le equazioni (9) furono già trovate da Möbius nella sua *Statik:* sono le (4) del § 102; noi abbiamo ripreso il suo metodo; anche le sue p, q, r, s, che corrispondono alle nostre x_i, sono i rapporti fra le forze e certi segmenti delle linee d'azione, che non sono precisamente uguali all'unità.

45. Per $n=6$, la condizione per la coesistenza delle (8) è:

$$D_6=\begin{vmatrix} \gamma^1_{12} & \gamma^2_{12}\cdots & \gamma^6_{12} \\ \gamma^1_{23} & \gamma^2_{23}\cdots & \gamma^6_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^1_{24} & \gamma^2_{24}\cdots & \gamma^6_{24} \end{vmatrix}=0; \tag{10}$$

che è il determinante di Cayley (**).

La condizione per la coesistenza delle sei equazioni (9), che sono completamente equivalenti alle (8), è

$$\Delta_6=\begin{vmatrix} 0, & (1,2), & (1,3),\ldots, & (1,6) \\ (2,1), & 0, & (2,3),\ldots, & (2,6) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (6,1), & (6,2), & (6,3),\ldots, & 0 \end{vmatrix}=0; \tag{11}$$

che è il determinante di Sylvester (***).

L'equazione $D_6=0$ esprime immediatamente che le 6 rette $g_1\ldots g_6$ appartengono allo stesso complesso lineare; la $\Delta_6=0$ deve esprimere la stessa cosa,

(*) Mem. di Bologna, 1870, p. 370.
(**) Comptes rendus, t. 52, p. 1040.
(***) Ibidem, p. 815.

benchè sia di 2° grado rispetto alle coordinate di queste rette. Ma già il signor Sylvester ha notato essere il suo determinante il quadrato di quello di Cayley; il che d'altronde si manifesta subito, moltiplicando per sè stesso il determinante D_6 dopo avervi scambiato le tre prime con le tre ultime linee.

Indicando con $\Gamma^i_{\rho\sigma}$ i determinanti complementari degli elementi $\gamma^i_{\rho\sigma}$ in D_6, si avrà dunque:

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_6 = \Gamma^1_{\rho\sigma} : \Gamma^2_{\rho\sigma} : \cdots : \Gamma^6_{\rho\sigma} \tag{12}$$

quali pur siano i valori degl'indici ρ, σ; similmente le forze x_i sono proporzionali ai determinanti complementari degli elementi di una linea qualsivoglia di Δ_6.

46. Quando $n = 5$, le sei equazioni (8) coesistono tostochè siano nulli tutti i determinanti inclusi nella matrice

$$\left\| \begin{matrix} \gamma^1_{12} & \gamma^2_{12} \cdots & \gamma^5_{12} \\ \gamma^1_{23} & \gamma^2_{23} \cdots & \gamma^5_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^1_{24} & \gamma^2_{24} \cdots & \gamma^5_{24} \end{matrix} \right\|, \tag{13}$$

determinanti che sono le $\Gamma^6_{\rho\sigma}$ di D_6. Le sei condizioni, com'è noto, si riducono ora a due; uno qualsivoglia dei determinanti inclusi in (13), uguagliato a zero, esprime che cinque delle equazioni (8) sono risolvibili e i valori delle x_i sono proporzionali ai suoi determinanti complementari; l'altra condizione richiede che la sesta equazione sia soddisfatta da questi valori, vale a dire richiede che siano nulli gli altri cinque determinanti in (13).

Queste due condizioni esprimono che le $g_1 \ldots g_5$ si trovano simultaneamente in due complessi lineari.

Se le sei $\Gamma^6_{\rho\sigma}$ sono nulle, è nullo anche D_6, e ciò indipendentemente dai valori di $\gamma^6_{\rho\sigma}$ ossia dalla posizione di g_6; la x_6 si annulla anch'essa, a motivo delle (12), com'è d'altronde staticamente necessario; cfr. n.° 8.

La condizione per la coesistenza delle cinque equazioni (9) è $\Delta_5 = 0$, Δ_5 essendo il determinante complementare — indipendente da g_6 — di (6, 6) in Δ_6. Ma le (9) non essendo sufficienti a effettuare l'equilibrio, si aggiunga una sesta retta g_6 che soddisfaccia alla condizione $\Delta_6 = 0$; esistono allora sei forze in equilibrio agenti lungo le sei rette $g_1 \ldots g_6$ e proporzionali ai determinanti complementari degli elementi dell'ultima linea di Δ_6; quindi x_6 è proporzionale a Δ_5, epperò è nullo. Ne viene che le forze agenti lungo $g_1 \dots g_5$ sono già in equilibrio e quindi che la g_6 può assumere qualsivoglia posizione. Dunque è necessario, affinchè cinque rette possano rappresentare un sistema equilibrato di forze, che sia $\Delta_5 = 0$ ed inoltre che per una, epperò per qualsivoglia, posizione arbitraria di g_6 sia $\Delta_6 = 0$; vale a dire che $g_1 \dots g_5$ devono appartenere con una sesta retta arbitraria ad uno stesso complesso lineare, o in altri termini che esse devono trovarsi in una congruenza lineare. Queste sono le due condizioni date dal sig. SYLVESTER (*).

Quando siano soddisfatte, le forze equilibrate agenti lungo $g_1 \dots g_5$ sono proporzionali ai determinanti complementari degli elementi d'una linea qualsivoglia di Δ_5.

Il semplice annullarsi di Δ_5 esprime l'esistenza di forze agenti lungo $g_1 \dots g_5$ e tali che la somma dei loro momenti rispetto a ciascuna delle cinque rette è nulla. Secondo il sig. SYLVESTER, $\Delta_5 = 0$ è la condizione perchè le cinque rette ammettano una trasversale comune g_x, e quindi con le equazioni

$$(x,\ 1) = 0, \qquad (x,\ 2) = 0, \dots \qquad (x,\ 5) = 0$$

coesista la

$$(x,\ x) = 0.$$

Essa è anche la condizione perchè le cinque rette siano situate sopra una superficie di 3° ordine (**).

47. Per $n = 4$, le equazioni (8) coesistono se tutti i determinanti inclusi in

$$\left\| \begin{matrix} \gamma^1_{12} & \gamma^2_{12} \cdots & \gamma^4_{12} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma^1_{24} & \gamma^2_{24} \cdots & \gamma^4_{24} \end{matrix} \right\| \qquad (14)$$

sono nulli, il che ha luogo quando se ne annullino tre. Le quattro rette si trovano dunque negli stessi tre complessi lineari.

Ricorrendo ancora alle (9) si rileva che le quattro rette devono soddisfare alle condizioni $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$, nelle quali g_5 e g_6 sono rette arbitrarie (SYLVESTER), di modo che esse si trovano in una stessa congruenza lineare con qualsivoglia quinta retta e in uno stesso complesso lineare con due altre rette qualsivogliano.

(*) L. c., p. 816.
(**) CAYLEY, Proc. London Math. Soc., III, p. 84.

La

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \cdot & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & \cdot & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & \cdot & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & \cdot \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

non basta da sola per l'equilibrio; essa esprime soltanto che le quattro equazioni (9) coesistono e che per ciò esistono tali forze, agenti lungo le quattro rette, che la somma de' loro momenti rispetto a ciascuna linea d'azione è nulla.

Sviluppando Δ_4 si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} (1,2)^2\cdot(3,4)^2+(1,3)^2\cdot(2,4)^2+(1,4)^2\cdot(2,3)^2- \\ -2\cdot(1,2)\cdot(3,4)\cdot(1,3)\cdot(2,4)-2\cdot(1,2)\cdot(3,4)\cdot(1,4)\cdot(2,3) \\ -2\cdot(1,3)\cdot(2,4)\cdot(1,4)\cdot(2,3)=0 \end{array}\right\} \qquad (15^a)$$

ossia

$$\sqrt{(1,2)\cdot(3,4)}+\sqrt{(1,3)\cdot(2,4)}+\sqrt{(1,4)\cdot(2,3)}=0, \qquad (15^b)$$

ove i radicali hanno i segni $++-$, $+-+$, $+--$, secondo che è numericamente maggiore la quantità sottoposta al terzo, secondo o primo radicale.

48. Queste due formole furono date già da Möbius (*); il quale però le ritiene sufficienti per l'equilibrio e ne conclude che quattro rette soddisfacenti alla condizione (15) sono generatrici dello stesso sistema di un iperboloide, perchè ciò è necessario per l'equilibrio. Egli ne dà anche una dimostrazione geometrica, la quale a prima vista sembra non ammettere obbiezioni; imperocchè egli mostra che, se le quattro rette soddisfanno la (15), esse determinano sulle loro due trasversali gruppi di punti aventi uguali rapporti anarmonici. Ma d'altra parte quanto sopra si è detto, nonchè la circostanza che una sola condizione non basta a che quattro rette siano generatrici di un iperboloide, appartenenti allo stesso sistema, manifesta che anche la dimostrazione geometrica è erronea.

È il sig. Cayley che ha scoperto la cosa.

Già nei Comptes rendus (**) il sig. Sylvester ricorda aver Cayley trovato la $\Delta_4=0$, come condizione perchè le quattro rette non ammettano che una sola trasversale (***), o, per adoperare la frase dello stesso sig. Cayley (****),

(*) *Statik*, I, p. 185 (7) e p. 189.
(**) T. 52, p. 816.
(***) Cfr. Voss, Math. Ann., t. 8, p. 60.
(****) Comptes rendus, t. 61, p. 830.

perchè ciascuna delle quattro rette tocchi l'iperboloide delle tre altre (di che è soltanto un caso particolare che tutte quattro siano situate sull'iperboloide). Se quindi le $\gamma^4_{\rho\sigma}$ si considerano come coordinate variabili, la $\Delta_4 = 0$ è la equazione del complesso delle tangenti dell'iperboloide $[g_1 g_2 g_3]$. Ma se le $g_1 \ldots g_4$ ammettono una sola trasversale, la dimostrazione di Möbius cade.

49. Tuttavia, servendosi delle sue considerazioni si può ricavare la dimostrazione del teorema esatto.

Se quattro rette $g_1 \ldots g_4$ ammettono due trasversali a e b che le incontrino risp. in $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, sarà

$$\frac{(1,3)}{(2,3)} : \frac{(1,4)}{(2,4)} = \frac{\text{Tetr.} A_1 B_1 A_3 B_3}{\text{Tetr.} A_2 B_2 A_3 B_3} : \frac{\text{Tetr.} A_1 B_1 A_4 B_4}{\text{Tetr.} A_2 B_2 A_4 B_4},$$

elidendosi i prodotti degli spigoli opposti, quindi anche

$$= \frac{\text{Tetr.} A_1 A_3 B_1 B_3}{\text{Tetr.} A_2 A_3 B_2 B_3} : \frac{\text{Tetr.} A_1 A_4 B_1 B_4}{\text{Tetr.} A_2 A_4 B_2 B_4};$$

ma gli spigoli opposti $A_i A_k$ e $B_i B_k$ giacciono sempre sulle stesse rette a e b, quindi:

$$\frac{(1,3)}{(2,3)} : \frac{(1,4)}{(2,4)} = \frac{A_1 A_3 \cdot B_1 B_3}{A_2 A_3 \cdot B_2 B_3} : \frac{A_1 A_4 \cdot B_1 B_4}{A_2 A_4 \cdot B_2 B_4} = (A_1 A_2 A_3 A_4) \cdot (B_1 B_2 B_3 B_4), \quad (16)$$

epperò il rapporto anarmonico dei quattro momenti è uguale al prodotto dei rapporti anarmonici de' due gruppi di punti determinati dalle quattro rette sulle loro due trasversali. È quindi naturale che, col sig. Voss (*), denominiamo rapporto anarmonico delle quattro rette la quantità $\sqrt{\frac{(1,3)}{(2,3)} : \frac{(1,4)}{(2,4)}}$. Infatti se le quattro rette sono generatrici (dello stesso sistema) di un iperboloide, i rapporti anarmonici dei gruppi di punti ch'esse determinano su tutte le trasversali sono fra loro uguali; epperò il rapporto anarmonico di quattro generatrici di un iperboloide è uguale a quello dei quattro punti nei quali sono incontrate da qualsivoglia direttrice. Ma se le quattro rette ammettono invece una sola trasversale che le incontri in $A_1 \ldots A_4$? In questo caso, quando non si voglia considerarlo come caso limite dell'altro nè si voglia aver che fare con trasversali infinitamente vicine e con tetraedri infinitesimali, si può mostrare che se, tenute fisse tre, $g_1 g_2 g_3$, delle quattro rette, si fa muovere la quarta g_4 intorno alla sua intersezione A_4 con la trasversale (unica) l in

(*) L. c., p. 61.

modo che le $g_1 \ldots g_4$ ammettano sempre una e soltanto una trasversale, il rapporto $\frac{(1,4)}{(2,4)}$ e quindi anche il rapporto anarmonico $\frac{(1,3)}{(2,3)} : \frac{(1,4)}{(2,4)}$ restano costanti. Infatti, la retta g_4 descriverà un fascio nel piano α_4 che tocca l'iperboloide $[g_1 g_2 g_3]$ in A_4, piano che contiene la l. Siano $B_1 B_2$ due punti fissi di g_1, g_2 e B_4 l'intersezione variabile della g_4 con una qualsivoglia parallela ad l in α_4; sarà

$$\frac{(1,4)}{(2,4)} = \frac{\text{Tetr.} A_1 B_1 A_4 B_4 : A_1 B_1}{\text{Tetr.} A_2 B_2 A_4 B_4 : A_2 B_2},$$

elidendosi $A_4 B_4$. Ma i volumi dei due tetraedri si conservano uguali, poichè il solo vertice variabile B_4 si muove sopra una retta parallela ai piani delle rispettive basi; dunque è dimostrato l'asserto.

Ora in questo movimento la g_4 coinciderà una volta con una generatrice appartenente al sistema delle $g_1 g_2 g_3$: essendo per questa posizione di g_4

$$\sqrt{\frac{(1,3)}{(2,3)} : \frac{(1,4)}{(2,4)}} = (A_1 A_2 A_3 A_4),$$

tale eguaglianza sussisterà anche per le altre sue posizioni. E quindi il rapporto anarmonico di quattro rette che ammettono una sola trasversale è uguale a quello dei quattro punti da esse determinati sulla medesima.

50. Dividendo la (15^b) pel radicale numericamente maggiore, e supposto che questo sia $\sqrt{(1,3)\cdot(2,4)}$, si ottiene:

$$\sqrt{\frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(1,3)\cdot(2,4)}} + \sqrt{\frac{(1,4)\cdot(2,3)}{(1,3)\cdot(2,4)}} = 1$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{(2,1)}{(3,1)} : \frac{(2,4)}{(3,4)}} + \sqrt{\frac{(2,3)}{(1,3)} : \frac{(2,4)}{(3,4)}} = 1.$$

Siano le quattro rette generatrici dello stesso sistema di un iperboloide o sia che ammettano una sola trasversale, dinotando con $A_1 \ldots A_4$ le loro intersezioni con qualsivoglia direttrice o risp. con quella trasversale, si avrà

$$(A_2 A_3 A_1 A_4) + (A_2 A_1 A_3 A_4) = 1$$

che è manifestamente esatta; se invece ammettono due, e soltanto due trasversali, che siano da esse incontrate nei gruppi di punti $A_1 \ldots, A_4$, $B_1 \ldots B_4$ aventi rapporti anarmonici differenti, la formola superiore esprimerebbe che

$$\sqrt{(A_2 A_3 A_1 A_4)\cdot(B_2 B_3 B_1 B_4)} + \sqrt{(A_2 A_1 A_3 A_4)\cdot(B_2 B_1 B_3 B_4)} = 1,$$

ossia che

$$\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=1,$$

relazione impossibile per x e y disuguali.

51. Se le quattro rette sono generatrici di un iperboloide, appartenenti allo stesso sistema, o se ammettono una sola trasversale, si sono trovate or ora le relazioni:

$$\sqrt{\frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(1,3)\cdot(2,4)}}=(A_2A_3A_1A_4)$$

e

$$\sqrt{\frac{(1,4)\cdot(2,3)}{(1,3)\cdot(2,4)}}=(A_2A_1A_3A_4);$$

se i quattro punti A_i si succedono nell'ordine $A_1A_2A_3A_4$, epperò se anche le rette g_i (nel caso che siano generatrici dello stesso sistema di un iperboloide) si succedono nell'ordine $g_1g_2g_3g_4$, il rapporto anarmonico $(A_2A_3A_1A_4)$, e quindi anche il suo complementare $(A_2A_1A_3A_4)$, sono evidentemente compresi fra 0 e 1; per ciò $(1,3)\cdot(2,4)$ è maggiore di $(1,2)\cdot(3,4)$ e di $(1,4)\cdot(2,3)$, e conseguentemente nella (15^b) devesi prendere la successione di segni $+-+$, appunto come dice Möbius.

52. Perciò se la (15) è soddisfatta, cioè se le quattro rette ammettono una sola trasversale o appartengono allo stesso sistema di generatrici di un iperboloide, le (9) sono risolvibili e conducono mediante la (15^b) ai valori

$$\left.\begin{aligned} x_1:x_2:x_3:x_4=\sqrt{(2,3)\cdot(2,4)\cdot(3,4)}:-\sqrt{(1,3)\cdot(1,4)\cdot(3,4)}:\\ :\sqrt{(1,2)\cdot(1,4)\cdot(2,4)}:-\sqrt{(1,2)\cdot(1,3)\cdot(2,3)}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

nell'ipotesi che l'ordine di successione sia quello detto sopra.

Nel caso che le quattro rette ammettano una trasversale unica, le x_i sono le forze che agiscono lungo le medesime e per le quali è nulla la somma dei momenti rispetto a ciascuna; nel caso invece che le rette siano generatrici dello stesso sistema di un iperboloide, le x_i sono forze in equilibrio agenti lungo le medesime.

Le equazioni (17) si trovano in Möbius (*Statik*, I, pag. 189), in Cayley (Comptes rendus, t. 61, p. 830) e in Chelini nei due luoghi citati, ma sono date pel solo caso dell'equilibrio, anche dal sig. Cayley; il quale le ha ricavate probabilmente col metodo da noi esposto e ne ha poi dedotto il teorema di Chasles, mentre Möbius e Chelini deducono quelle da que to.

Dunque il teorema di Chasles è vero non soltanto nel secondo caso speciale dell'equilibrio, ma anche nel primo caso generale; e lo stesso dicasi della relazione

$$x_i x_k (i, k) + x_k x_l (k, l) + x_l x_i (l, i) = 0$$

fra tre delle quattro forze, trovata da Möbius (pag. 188).

53. Möbius (pag. 187) servendosi delle sue equazioni (4), che corrispondono alle nostre (9), ha trovato ancora per quattro forze equilibrate agenti lungo generatrici dello stesso sistema di un iperboloide delle relazioni, formate coi segmenti scambievolmente determinati dalle quattro generatrici e da due direttrici a, b qualsivogliano: indicando A_i e B_i i punti d'incontro con le due direttrici, si ha per es.

$$x_1 : x_2 = \frac{A_2 A_3}{A_1 A_3} \cdot A_1 B_1 : -\frac{B_1 B_4}{B_2 B_4} \cdot A_2 B_2$$

ovvero

$$= \frac{A_2 A_4}{A_1 A_4} \cdot A_1 B_1 : -\frac{B_1 B_3}{B_2 B_3} \cdot A_2 B_2,$$

il che può d'altronde ottenersi facilmente dalle (17); infatti dalle (17) segue

$$x_1 : x_2 = \sqrt{(2, 3) \cdot (2, 4)} : -\sqrt{(1, 3) \cdot (1, 4)}$$

$$= \frac{1}{A_2 B_2} \sqrt{\text{Tetr.}\, A_2 B_2 A_3 B_3 \cdot \text{Tetr.}\, A_2 B_2 A_4 B_4}$$

$$: -\frac{1}{A_1 B_1} \sqrt{\text{Tetr.}\, A_1 B_1 A_3 B_3 \cdot \text{Tetr.}\, A_1 B_1 A_4 B_4},$$

elidendosi $A_3 B_3$ e $A_4 B_4$.

Per conseguenza

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{A_2 B_2} \sqrt{A_2 A_3 \cdot B_2 B_3 \cdot A_2 A_4 \cdot B_2 B_4} : -\frac{1}{A_1 B_1} \sqrt{A_1 A_3 \cdot B_1 B_3 \cdot A_1 A_4 \cdot B_1 B_4};$$

ma

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_1 B_2 B_3 B_4),$$

dunque

$$A_2 A_4 \cdot B_2 B_3 : A_1 A_4 \cdot B_1 B_3 = A_2 A_3 \cdot B_2 B_4 : A_1 A_3 \cdot B_1 B_4.$$

Se ora nel valore di $x_1 : x_2$ si eliminano i primi due o gli ultimi due termini di questa proporzione si ricava o la prima o la seconda delle relazioni di Möbius.

Parimenti si ha

$$x_1 : x_3 = \frac{A_3 A_2}{A_1 A_2} \cdot A_1 B_1 : -\frac{B_1 B_4}{B_3 B_4} \cdot A_3 B_3;$$

e prendendo per le due direttrici a, b quelle che sono parallele a g_2, g_4, viene $\frac{A_3A_2}{A_1A_2}=\frac{B_1B_4}{B_3B_4}=1$, quindi

$$x_1:x_3=A_1B_1:-A_3B_3$$

ossia, tenute presenti le notazioni del n.° 17_f

$$x_1:x_3=G_{12}G_{14}:-G_{32}G_{34}=G_{14}G_{12}:G_{32}G_{34};$$

donde segue il risultato ivi trovato.

54. A esaurire l'argomento resta a dire di quei casi nei quali fra le forze ve ne sono di date; a queste possono sempre sostituirsi due forze (n.° 41), le coordinate delle quali siano $a'\gamma'_{\rho\sigma}$, $a''\gamma''_{\rho\sigma}$; se $g^i_{\rho\sigma}$ sono le coordinate delle linee d'azione di cinque forze incognite ed equilibrate con quelle, ha luogo la relazione:

$$\begin{vmatrix} a'\gamma'_{12}+a''\gamma''_{12}, & \gamma^1_{12},\dots & \gamma^5_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'\gamma'_{24}+a''\gamma''_{24}, & \gamma^1_{24},\dots & \gamma^5_{24} \end{vmatrix}=0,$$

la quale esprime che ciascuna linea d'azione delle cinque forze incognite deve trovarsi in un certo complesso determinato dalle forze date e contenente le altre quattro linee d'azione.

Analogamente si rileva che se quattro o tre forze incognite sono in equilibrio con altre date, le loro linee d'azione si trovano in una certa congruenza o in un certo fascio (gobbo).

Il caso di due forze incognite fu risoluto al n.° 41.

Darmstadt, 18 ottobre 1875.

ERRATA-CORRIGE.

pag.	218	lin.	7	dall'ult.	invece di	11	leggi	61
„	222	„	12	„	„	(un moltilatero)	„	(dei segmenti)
„	„	„	11	„	„	lati	„	segmenti
„	223	„	11	„	„	n.° 15	„	n.° 16.

Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperelittiche (*).

(*Memoria di* A. Clebsch, *traduzione con note ed aggiunte di* F. Brioschi.)

§ 10.

Soluzioni della seconda classe. — Loro riferimento al problema ausiliare.

Per quanto spetta alla equazione Hessiana le soluzioni di essa si ponno porre facilmente in rapporto colle note proprietà corrispondenti al problema dei punti di flesso di una curva del terzo ordine. Così le soluzioni conjugate corrispondono ai punti di flesso situati sopra una stessa retta; alla equazione cubica (52) corrisponde un triangolo di punti di flesso, ed infine alla equazione biquadratica i quattro triangoli dei punti di flesso (**). Si può dimostrare che le stesse rappresentazioni servono inoltre a rendere evidente il raggruppamento delle soluzioni della seconda classe, alla considerazione delle quali passiamo in questo paragrafo.

Le soluzioni della seconda classe risultano dal supporre (vedi § 2) che ciascuno dei fattori:

$$v+v', \qquad v-v'$$

ha un fattore comune lineare con ciascuno dei fattori:

$$u-u', \qquad u-\varepsilon u', \qquad u-\varepsilon^2 u'.$$

Si può quindi porre:

$$\begin{aligned} u-u' &= ab \qquad & v+v' &= aa'a'' \\ u-\varepsilon u' &= a'b' \qquad & v-v' &= bb'b'' \\ u-\varepsilon^2 u' &= a''b'' \end{aligned}$$

rappresentando le a, b le funzioni lineari.

(*) Continuazione, vedi Annali di Matematica, t. 7, pag. 89.
(**) Vedi Nota VI.ª

Queste equazioni si ponno trattare come lo furono più addietro quelle che corrispondono alle soluzioni della prima classe; perciò assumendo in luogo delle prime tre equazioni quelle che risultano dalla loro somma moltiplicando le stesse dapprima per 1, 1, 1; poi per 1, ε, ε^2; infine per 1, ε^2, ε; ed in luogo delle seconde quelle che risultano dalla loro somma e dalla loro differenza, si ottengono le:

$$\left.\begin{aligned} 3u &= ab + a'b' + a''b'' & -3u' &= ab + \varepsilon^2 a'b' + \varepsilon a''b'' \\ 0 &= ab + \varepsilon a'b' + \varepsilon^2 a''b'' & 2v' &= aa'a'' - bb'b''. \\ 2v &= aa'a'' + bb'b'' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Le ultime fra queste equazioni danno le nuove soluzioni quando si suppongano note le funzioni lineari a, b; le prime offrono il mezzo per la loro determinazione. Se non che queste funzioni lineari non sono completamente determinate dalle equazioni (1). Queste infatti non si alterano alloraquando alle funzioni:

$$a,\quad b,\quad a',\quad b',\quad a'',\quad b''$$

si sostituiscano le:

$$\varkappa a,\quad \frac{1}{\varkappa}b,\quad \varkappa' a',\quad \frac{1}{\varkappa'}b',\quad \varkappa'' a'',\quad \frac{1}{\varkappa''}b''$$

purchè:

$$\varkappa\varkappa'\varkappa'' = 1.$$

Si introducano in luogo delle sei funzioni a, b le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha &= a + a' + a'' & 3\beta &= b + b' + b'' \\ 3\alpha' &= a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'' & 3\beta' &= b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b'' \\ 3\alpha'' &= a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'' & 3\beta'' &= b + \varepsilon^2 b' + \varepsilon b'' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

si può sempre per mezzo dei fattori $\varkappa$ modificare le a per modo che α si annulli identicamente; condizione la quale è sufficiente per la completa determinazione dei rapporti delle $\varkappa$. Posto quindi $\alpha = 0$, la risoluzione delle equazioni (2) dà luogo alle:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha' + \alpha'' & b &= \beta + \beta' + \beta'' \\ a' &= \varepsilon^2\alpha' + \varepsilon\alpha'' & b' &= \beta + \varepsilon^2\beta' + \varepsilon\beta'' \\ a'' &= \varepsilon\alpha' + \varepsilon^2\alpha'' & b'' &= \beta + \varepsilon\beta' + \varepsilon^2\beta'' \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

espressioni le quali introdotte nelle (1) conducono alle seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha'\beta'' + \beta'\alpha'' \\ 0 &= \alpha'\beta + \alpha''\beta'' \\ 2v &= \alpha'^3 + \alpha''^3 + \beta^3 + \beta'^3 + \beta''^3 - 3\beta\beta'\beta'' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} -u' &= \alpha'\beta' + \alpha''\beta \\ 2v' &= \alpha'^3 + \alpha''^3 - \beta^3 - \beta'^3 - \beta''^3 + 3\beta\beta'\beta''. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

La seconda delle equazioni (4) può essere soddisfatta identicamente. Suppongasi dapprima che le α', α'' differiscano soltanto di una costante, trovasi facilmente che le equazioni provenienti da questa ipotesi non ponno essere in generale soddisfatte. Ottiensi infatti che le a non differiscono che di un fattore costante, e siccome questo può ritenersi compreso nelle b, così le equazioni (1) si mutano nelle:

$$\begin{aligned} 3u &= a(b + b' + b'') & \qquad -3u' &= a(b + \varepsilon^2 b' + \varepsilon b'') \\ 0 &= a(b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b'') & 2v' &= a^3 - bb'b''. \\ 2v &= a^3 + bb'b'' \end{aligned}$$

Ora siccome a non può essere nulla, così deve annullarsi la espressione $b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b''$; ossia quando si esprimano come nelle (2) le b colle nuove quantità β, si avrà $\beta' = 0$, e perciò:

$$u = a\beta, \qquad 2v = a^3 + \beta^3 + \beta''^3.$$

Egli è chiaro che in generale le u, v non ponno essere rappresentate sotto questa forma, la quale contiene solamente sei costanti.

Devesi perciò soddisfare alla seconda equazione (4) ponendo:

$$\alpha' = \varkappa\beta'', \qquad \alpha'' = -\varkappa\beta$$

ove $\varkappa$ è una costante ancora indeterminata. Le altre equazioni (4) (5) si trasformano per le superiori nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varkappa(\beta''^2 - \beta\beta') \\ 2v &= (1 - \varkappa^3)\beta^3 + \beta'^3 + (1 + \varkappa^3)\beta''^3 - 3\beta\beta'\beta'' \\ u' &= -\varkappa(\beta^2 + \beta'\beta'') \\ 2v' &= -(1 + \varkappa^3)\beta^3 - \beta'^3 - (1 - \varkappa^3)\beta''^3 + 3\beta\beta'\beta''. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le prime due fra queste equazioni non differiscono ora dalle equazioni (41), le quali sopra condussero ad una equazione del dodicesimo grado, risolvibile per mezzo di una biquadratica. Infatti servendosi delle medesime per dedurre i valori di $\beta\beta'$ e di $(1 - x^3)\beta^3 + \beta'^3$, si ottengono le:

$$\beta\beta' = \beta''^2 - \frac{u}{\varkappa}$$

$$(1 - \varkappa^3)\beta^3 + \beta'^3 = 2v + (2 - \varkappa^3)\beta''^3 - 3\frac{u\beta''}{\varkappa}$$

e quando si ponga in queste:

$$\beta''=\frac{\varkappa m^3 t}{1-m^3},\qquad \varkappa^3=-\frac{1-m^3}{m^3},\qquad \beta=-\frac{m\mu}{(1-m^3)^{\frac{2}{3}}},\qquad \beta'=-\frac{\nu}{(1-m^3)^{\frac{2}{3}}}$$

si ottengono nuovamente le equazioni (41)

$$\left.\begin{aligned}\mu\nu&=m^3t^2+u(1-m^3)\\ \mu^3+\nu^3&=m^3(1+m^3)t^3+3m^3(1-m^3)tu-2(1-m^3)^2 v\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

ed analogamente le altre due equazioni (6) diventano le:

$$\left.\begin{aligned}u'&=-\frac{m}{1-m^3}(\mu^2-\nu t)\\ 2v'&=\frac{1}{(1-m^3)^2}[\nu^3-(1-2m^3)\mu^3+m^3t^3-3m^3\mu\nu t].\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Si scrivano ora le (7) come queste ultime, esprimendo cioè le u, v in funzione delle μ, ν, t, m; si hanno le:

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{1-m^3}(\mu\nu-m^3t^2)\\ 2v&=\frac{1}{(1-m^3)^2}[m^3(1-2m^3)t^3-\mu^3-\nu^3+3m^3\mu\nu t].\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Dal complesso delle (8) (9) si deducono tosto le:

$$\left.\begin{aligned}(1-m^3)(u-u')&=(\mu-mt)\,(\nu+m\mu+m^2t)\\ (1-m^3)(u-\varepsilon u')&=(\mu-\varepsilon mt)\,(\nu+\varepsilon m\mu+\varepsilon^2m^2t)\\ (1-m^3)(u-\varepsilon^2u')&=(\mu-\varepsilon^2mt)(\nu+\varepsilon^2m\mu+\varepsilon m^2t)\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-m^3)\,(v+v')&=-(\mu-mt)(\mu-\varepsilon mt)(\mu-\varepsilon^2mt)\\ (1-m^3)^2(v-v')&=-(\nu+m\mu+m^2t)(\nu+\varepsilon m\mu+\varepsilon^2m^2t)(\nu+\varepsilon^2m\mu+\varepsilon m^2t)\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

per le quali si rende chiaro lo spezzamento delle espressioni $u^3-u'^3$, $v^2-v'^2$ appropriato alle soluzioni di questa classe.

§ 11.

Dimostrazione che le trovate soluzioni di seconda classe sono due a due identiche.

Per ciò che precede sembra essere 24 il numero totale delle soluzioni di seconda classe appartenenti alla soluzione u, v. Imperocchè, dapprima si hanno dodici sistemi delle quantità t, m^3; ed a ciascuno spettano tre paja di espressioni μ, ν, che si ottengono da uno fra essi moltiplicando μ per ε od ε^2 ed in pari tempo ν per ε^2 o per ε. Ma vedesi facilmente che quest'ultima operazione e la sostituzione di εm ed $\varepsilon^2 m$ ad m, non muta affatto v' mentre la u' diventa $\varepsilon u'$ od $\varepsilon^2 u'$. Per ciascuno dei dodici sistemi t, m^3, si ottengono dunque solamente due soluzioni diverse, in quanto che μ, ν ponno essere scambiate l'una coll'altra; dunque si otterrebbero in tutto 24 soluzioni di questa specie.

Ma un esame più preciso mostra che queste soluzioni sono eguali due a due, così che in fatti esistono soltanto 12 soluzioni diverse di seconda classe.

Ed infatti affinchè ricompaja la medesima soluzione di seconda classe con u, v; nelle quali perciò bisogna introdurre al posto delle quantità m, t, μ, ν altre quantità m_1, t_1, μ_1, ν_1, è necessario o che i tre fattori di $v+v'$ (equazioni 11) siano eguali, astrazion fatta da fattori costanti, ai corrispondenti della nuova forma, e che ai corrispondenti di essa siano parimenti eguali i fattori di $v-v'$; ovvero che i fattori di $v+v'$ nell'una forma sieno eguali ai fattori di $v-v'$ nell'altra. E poichè u' non può diversificare in ambo le forme che di una radice cubica dell'unità, così la maniera secondo cui devesi far corrispondere i tre fattori dell'una a quelli dell'altra resta determinata, salva una trasposizione ciclica: la quale però corrisponderebbe ad un semplice aumento di un fattore ε od ε^2 per m od m_1; il che è insignificante. Si può così nel primo caso scrivere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1-m_1t_1 &= a(\mu-mt), & \nu_1+m_1\mu_1+m_1^2t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}(\nu+m\mu+m^2t)\\
\mu_1-\varepsilon m_1t_1 &= a'(\mu-\varepsilon mt), & \nu_1+\varepsilon m_1\mu_1+\varepsilon^2m_1^2t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a'(1-m^3)}(\nu+\varepsilon m\mu+\varepsilon^2m^2t)\\
\mu_1-\varepsilon^2m_1t_1 &= a''(\mu-\varepsilon^2mt), & \nu_1+\varepsilon^2m_1\mu_1+\varepsilon m_1^2t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a''(1-m^3)}(\nu+\varepsilon^2m\mu+\varepsilon m^2t)
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$aa'a'' = \frac{1-m_1^3}{1-m^3} \quad (13)$$

e nel secondo caso le:

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1+m_1\mu_1+m_1^2t_1 &= a(\mu-mt), & \mu_1-m_1t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}(\nu+m\mu+m^2t)\\
\nu_1+\varepsilon m_1\mu_1+\varepsilon^2m_1^2t_1 &= a'(\mu-\varepsilon mt), & \mu_1-\varepsilon m_1t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a'(1-m^3)}(\nu+\varepsilon m\mu+\varepsilon^2m^2t)\\
\nu_1+\varepsilon^2m_1\mu_1+\varepsilon m_1^2t_1 &= a''(\mu-\varepsilon^2mt), & \mu_1-\varepsilon^2m_1t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a''(1-m^3)}(\nu+\varepsilon^2m\mu+\varepsilon m^2t)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$a a' a'' = \frac{(1-m_1^3)^2}{1-m^3} \tag{15}$$

dove le a, a', a'' tanto in un caso che nell'altro indicano costanti.

Considerando ora dapprima le equazioni (12), dalle prime di esse si può ricavare la seguente:

$$a(\mu - mt) + \varepsilon a'(\mu - \varepsilon mt) + \varepsilon^2 a''(\mu - \varepsilon^2 mt) = 0$$

e siccome le due funzioni lineari μ, t sono differenti:

$$a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'' = 0$$

$$a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'' = 0$$

o, ciò che è lo stesso $a = a' = a''$. Le ultime tre equazioni (12) danno quindi:

$$\nu_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}\nu; \qquad m_1\mu_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)} m\mu; \qquad m_1^2 t_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)} m^2 t;$$

mentre dalle prime si ottengono le:

$$\mu_1 = a\mu, \qquad m_1 t_1 = amt$$

e siccome dal confronto delle espressioni di $\frac{\mu_1}{\mu}$ si ha:

$$a^2 = \frac{m}{m_1}\frac{1-m_1^3}{1-m^3}$$

essendo per la (13):

$$a^3 = \frac{1-m_1^3}{1-m^3}$$

sarà $a = \frac{m_1}{m}$, il qual valore sostituito in quest'ultima dà $m_1^3 = m^3$. Le equazioni (12) (13) non conducono quindi ad alcuna quantità t_1, μ_1, ν_1, m_1, la quale differisca realmente dalla quantità t, μ, ν, m.

Ad un risultato assai differente conducono le equazioni (14) (15). Infatti dalle prime tre equazioni (14) si deducono le:

$$\left.\begin{aligned} 3\nu_1 &= (a + a' + a'')\mu - (a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'')mt \\ 3m_1\mu_1 &= (a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'')\mu - (a + a' + a'')mt \\ 3m_1^2 t_1 &= (a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'')\mu - (a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'')mt; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

le quali sostituite nelle seconde (14) danno:

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu+m\mu\ \ +m^2t)\ =\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{3}\cdot\frac{a}{m_1}[(a''-a')\mu\ \ +(\varepsilon a'-\varepsilon^2a'')mt]$$

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu+\varepsilon m\mu\ +\varepsilon^2m^2t)=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{3}\cdot\frac{a'}{m_1}[(a\ -a'')\varepsilon^2\mu+(\varepsilon a''-\varepsilon^2a)mt]$$

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu+\varepsilon^2m\mu+\varepsilon m^2t)=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{3}\cdot\frac{a''}{m_1}[(a'-a)\varepsilon\mu\ \ +(\varepsilon a\ -\varepsilon^2a')mt].$$

Si moltiplichino queste ultime prima per 1, 1, 1; poi per 1, ε^2, ε; infine per 1, ε, ε^2; e si sommino ogni volta, si otterranno le:

$$\left.\begin{aligned}
3\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\nu\ \ &=-\frac{1}{m_1}[(a'a''+\varepsilon^2a''a+\varepsilon aa')\mu+(a'a''+a''a+aa')mt]\\
3\frac{1-m_1^3}{1-m^3}m\mu &= \ \ \frac{\mu}{m_1}(a'a''\ +\varepsilon a''a\ +\varepsilon^2aa')\\
3\frac{1-m_1^3}{1-m^3}mt &= \ \ \frac{mt}{m_1}(a'a''\ +\varepsilon a''a\ +\varepsilon^2aa').
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Vedesi tosto che le due ultime equazioni riduconsi ad una sola fra costanti e cioè:

$$a'a''+\varepsilon a''a+\varepsilon^2aa'=3mm_1\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\cdot \tag{18}$$

La prima delle equazioni (17) deve all'incontro tornare alla identità esistente fra le funzioni lineari μ, ν, t:

$$\nu(\mu t)+\mu(t\nu)+t(\nu\mu)=0$$

e perciò indicando con $\varkappa$ un fattore indeterminato si può porre:

$$\left.\begin{aligned}
a'a''+\varepsilon^2a''a+\varepsilon aa' &=\varkappa(t\nu)\\
a'a''+a''a\ \ +aa'\ &=\frac{\varkappa}{m}(\nu\mu)\\
3m_1\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\qquad\ \ &=\varkappa(\mu t)
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

e siccome alla equazione (18) può ora darsi la forma:

$$a'a''+\varepsilon a''a+\varepsilon^2aa'=\varkappa m(\mu t) \tag{20}$$

dalle equazioni (19) (20) si deducono le:

$$\left.\begin{aligned}
a'a'' &= \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m}+m(\mu t)\ \ +(t\nu)\right]\\
a''a &= \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m}+\varepsilon^2 m(\mu t)+\varepsilon(t\nu)\right]\\
aa' &= \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m}+\varepsilon m(\mu t)\ \ +\varepsilon^2(t\nu)\right].
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Moltiplicando fra loro queste equazioni, e sostituendo al prodotto dei primi membri il suo valore (15), trovasi infine:

$$\frac{(1-m_1^3)^4}{(1-m^3)^2}=\frac{m_1^3}{(\mu t)^3}\cdot\frac{(1-m_1^3)^3}{(1-m^3)^3}\left[\frac{(\nu\mu)^3}{m^3}+m^3(\mu t)^3+(t\nu)^3-3(\nu\mu)(\mu t)(t\nu)\right],$$

per cui m_1^3 sarà determinato dalla equazione:

$$\frac{1}{m_1^3}=\frac{1}{(1-m^3)(\mu t)^3}\left[\frac{(\nu\mu)^3}{m^3}+(\mu t)^3+(t\nu)^3-3(\nu\mu)(\mu t)(t\nu)\right].$$

Trovasi così un sistema m_1, μ_1, ν_1, t_1 il quale somministra nuovamente la stessa soluzione di seconda classe, e per ciò è dimostrato, che il numero totale delle soluzioni di seconda classe è soltanto dodici.

Ma contemporaneamente egli è facile porre in chiaro per le altre relazioni quelle soluzioni del problema del § 7 le quali conducono alla stessa soluzione della seconda classe.

A questo scopo si osservi che dalla equazione (16) si deduce la:

$$\begin{aligned}
81\,m_1^5(\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1) = -m^2(\mu t)^2\cdot&[(a+a'+a'')(a+\varepsilon^2 a'+\varepsilon a'')-(u+\varepsilon a'+\varepsilon^2 a'')^2]\\
\cdot&[(a+a'+a'')(a+\varepsilon a'+\varepsilon^2 a'')-(a+\varepsilon^2 a'+\varepsilon a'')^2]
\end{aligned}$$

ossia:

$$9\,m_1^5(\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1)=-m^2(\mu t)^2(a'a''+\varepsilon a''a+\varepsilon^2 aa')(a'a''+\varepsilon^2 a''a+\varepsilon aa').$$

Si introducano nel secondo membro i valori (19) (20), si ha:

$$\frac{m_1^3(\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1)}{(1-m_1^3)^2}=\frac{m^3(\mu t)(\nu t)}{(1-m^3)^2}.\tag{22}$$

Ma dalla prima equazione (7) del paragrafo precedente si ottiene:

$$(\mu t)(\nu t)=u(1-m^3)$$

supposto essersi sostituito in u alle $-x_2$, x_1 i coefficienti di t; quindi sarà anche:

$$(\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1)=u(1-m_1^3)$$

dove in u alle $-x_2$, x_1 si intendano sostituiti i coefficienti di t_1.

Rammentando ora la prima delle (47) e la (52) del § 7 si ha:

$$\frac{(\mu\nu)(\nu t)m^3}{(1-m^3)^2}=\frac{um^3}{1-m^3}=-\frac{pu}{\upsilon}=-\left(\frac{\sigma}{3}+\tfrac{1}{2}A_{uu}\right)$$

e per la espressione formata colle μ_1, ν_1, t_1, m_1 si ottiene lo stesso valore. La equazione (22) insegna quindi che due soluzioni del problema del § 7 le quali conducono alla stessa soluzione della seconda classe, sono coordinate alla stessa radice σ della equazione biquadratica.

Le tre soluzioni del problema del § 7 le quali deduconsi dalla equazione cubica (52) corrispondente ad una radice σ della equazione biquadratica, conducono così a sei soluzioni di seconda classe, che però sono due a due eguali, restandone quindi distinte l'una dall'altra soltanto tre.

Se si paragonano le quattro radici della equazione biquadratica coi quattro flesso-triangoli di una curva del terzo ordine, le soluzioni della equazione cubica (52) coi lati di un flesso-triangolo, devonsi paragonare le dodici soluzioni di seconda classe coi dodici vertici dei flesso-triangoli.

Le stesse formano quattro gruppi di tre ciascuno; di queste tre ciascuna è coordinata a due soluzioni del problema del § 7 nello stesso modo che un vertice di un flesso-triangolo, il qual vertice sta nello stesso rapporto ai due lati che concorrono in esso.

§ 12.

Aggruppamento delle soluzioni, assumendo per base un'altra soluzione u, υ. — Quadruplo.

Abbiamo finora investigato l'aggruppamento delle radici della equazione alla quale conduce il nostro problema, esclusivamente in quanto per rispetto ad una radice data tutte le altre si comportavano diversamente. Abbiamo veduto che esistono altre 39 radici, così che la equazione originaria deve essere del quarantesimo grado. Le 39 radici costituiscono due distinti gruppi, cioè 27 radici sono della prima classe, 12 della seconda. Le 27 radici della prima classe formano nove tripli i quali sono determinati per mezzo di una equazione Hessiana; presupposte le radici di un certo triplo quelle di ciascuno degli altri si coordinano alle stesse in modo unico. I nove tripli formano dodici sistemi conjugati di tre ciascuno, i quali nuovamente costituiscono quattro gruppi di tre, analogamente ai flesso-lati di una curva del terzo ordine. Le 12 soluzioni di seconda classe formano altresì quattro gruppi di tre, analogamente ai vertici dei flesso-triangoli.

Vogliamo ora ricercare come si modifichi questo raggruppamento, quando in luogo della soluzione u, v assunta finora si prenda a base un'altra soluzione. Si hanno a considerare due casi, secondo che la nuova soluzione fondamentale sia rispetto alla antecedente della prima o della seconda classe.

Supponiamo dapprima che la nuova fondamentale soluzione u', v' sia una soluzione di prima classe rispetto alla u, v. Per determinare il modo di comportarsi delle altre radici, dovremo di nuovo distinguere una serie di casi.

Dalla definizione stessa, presa a base per le soluzioni di prima classe, deducesi che fra due soluzioni della medesima esiste una specie di relazione di reciprocità per la quale quando u', v' rispetto ad u, v appartiene alla prima classe, anche u, v rispetto ad u', v', appartiene a quella classe; ed altresì quando una soluzione rispetto all'altra sia di seconda classe, sarà anche l'ultima rispetto alla prima della seconda classe.

Supponiamo siano le u', v' (vedi § 2) date per le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' &= \varepsilon(\varepsilon-1)[(\xi+2\eta)u - (\xi+\eta)(\xi^2+\xi\eta+\eta^2)] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

essendo:

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3. \tag{2}$$

Analogamente una soluzione, la quale sia della prima classe rispetto alle u', v', sarà data dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} u'' &= u' - \xi'^2 - \xi'\eta' - \eta'^2 \\ 2v'' &= \varepsilon(\varepsilon-1)[(\xi'+2\eta')u' - (\xi'+\eta')(\xi'^2+\xi'\eta'+\eta'^2)] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ove le ξ', η' sono determinate per mezzo della equazione:

$$2v' = 3u'\xi' - \xi'^3 + \eta'^3. \tag{4}$$

La equazione (4) per le (1) è soddisfatta ponendo:

$$\xi' = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi+2\eta), \qquad \eta' = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi-\eta) \tag{5}$$

dalle quali viceversa deduconsi, osservando essere $\varepsilon^2(\varepsilon-1)^2 = -3$, le seguenti:

$$\xi = -\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi'+2\eta'), \qquad \eta = -\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi'-\eta')$$

per le quali le (3) danno:

$$u'' = u, \qquad v'' = -v.$$

Le espressioni (5) riconducono così alla originaria fondamentale soluzione.

Se in luogo della seconda delle espressioni (5) si pongono per η' le $\varepsilon\eta'$ oppure $\varepsilon^2\eta'$, si ottengono le:

$$u'' = u - \xi^2 - \varepsilon^2\xi\eta - \varepsilon\eta^2$$

oppure:

$$u'' = u - \xi^2 - \varepsilon\xi\eta - \varepsilon^2\eta^2.$$

Si ha così il teorema:

Quando in luogo della soluzione u, v si assume come fondamentale, una soluzione di prima classe u', v', questa forma un triplo di prima classe appartenente ad u', v', con quelle due soluzioni le quali dapprima formavano con u', v' un triplo di prima classe appartenente ad u, v.

Devesi notare che le soluzioni dapprima caratterizzate con ξ, $\varepsilon\eta$; ξ, $\varepsilon^2\eta$ sonosi ora tramutate in quelle caratterizzate con ξ', $\varepsilon^2\eta'$; ξ', $\varepsilon\eta'$, ed hanno dunque subìto nel loro modo di comportarsi un permutamento.

Una soluzione qualsiasi costituisce, come si vede dalle superiori, con tre soluzioni che relativamente ad essa formino un triplo di prima classe, un sistema originale. Il quale è caratterizzato da ciò che, ponendo a base una qualunque di tali quattro soluzioni, le altre tre formano sempre un triplo coordinato di prima classe. Un sistema siffatto di quattro soluzioni si chiamerà un Quadruplo.

Esistono novanta quadrupli. Imperocchè, ciascuna soluzione conducendo a nove tripli, vi sono $40 \cdot 9$ combinazioni di una soluzione con quelle di un triplo che le appartiene. Ma, secondo il teorema precedente, ognuna di queste combinazioni si presenta quattro volte, e perciò il numero dei quadrupli eguaglia il numero superiore diviso per 4.

(*Continua.*)

Sulle serie $\sum_0^\infty A_n X_n$.

(*Memoria del prof.* G. Ascoli, *a Milano.*)

1.

Il prof. Dini in una Memoria inserita nel tomo 6° di questi Annali (*) dimostrò il teorema:

Se, fatta astrazione di un gruppo di punti dell'ordine r (**) compresi tra 1 e -1, si ha

$$\sum A_n X_n = \sum B_n X_n$$

per gli altri punti dello stesso intervallo, sarà:

$$A_n = B_n.$$

Questo teorema può enunciarsi anche nel modo che segue:

Una funzione $f(x)$ nulla tra 1 e -1, tranne che per un gruppo di punti dell'ordine r (e circa al significato della medesima in essi punti nulla viene supposto), può esprimersi in un sol modo, fatta astrazione del gruppo indicato, per serie della forma:

$$\sum a_n X_n,$$

essendo $a_n = 0$, oppure, ciò che torna lo stesso,

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_n \, dx.$$

Tale proposizione è caso particolare della seguente, che mi propongo di dimostrare in questa Memoria:

(*) V. pag. 216.

(**) Per gruppo di punti dell'ordine r intendo ciò che nella mia Memoria: *Sulla serie di Fourier* ho chiamato sistema di punti r volte infinito. V. il vol. 6° di questi Annali, pag. 55 e seguente.

Se la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione ovunque integrabile; che va all'infinito in un numero limitato di punti, purchè, considerata soltanto nelle estreme vicinanze dei valori $+1$ e -1, si possa integrare anche presa sempre con lo stesso segno, sarà:

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}(\sum_0 {}_s A_s X_s) X_n dx.$$

Questo teorema riesce molto interessante, in quanto per provarne la verità fa di mestieri toccare alcuni punti fondamentali del Calcolo integrale. Anzi, ciò che mi indusse a scrivere questa Memoria non è già il desiderio di dimostrare la proposizione enunciata, che pur non mi sembra scevra da qualche interesse, ma bensì la brama di esporre alcune ricerche di Calcolo integrale ed altre relative alla teoria delle funzioni X_n, le quali sono necessarie per porre in sodo il teorema indicato.

2.

Anzitutto converrà chiarire ciò che va inteso dicendo la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile (*).

Supposto che $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sieno due funzioni finite dei punti del segmento ab ed in esso integrabili, consideriamo il simbolo $\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$. Questo può essere ovunque scevro da significato, il che avrebbe luogo ad es. se la $\varphi_1(x)$ fosse eguale ad 1 in tutti i punti distanti dall'origine di lunghezze commensurabili con la unità di misura, non avendo luogo dipendenza per gli altri, e se la $\varphi_2(x)$ fosse nulla in questi ultimi e non esistesse nei primi. Il simbolo $\varphi_1 \pm \varphi_2$ potrà anche aver significato in un numero limitato o illimitato di punti. Quando poi in un intervallo qualsivoglia di ab esiste un punto, e quindi infiniti, pel quale il segno $\varphi_1 \pm \varphi_2$ rappresenta una grandezza, gli è chiaro che, se si pone $\varphi = \varphi_1 \pm \varphi_2$, sarà:

$$\int_c^d \varphi(x)dx = \int_c^d \varphi_1(x)dx \pm \int_c^d \varphi_2(x)dx, \qquad a \leqq c < d \leqq b.$$

(*) Per l'intelligenza di questo paragrafo e di alcuni di quelli che seguono fa d'uopo leggere la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito,* inserita nel t. 2° della Serie 2ª degli Atti della Reale Accademia dei Lincei.

È altresì manifesto come due funzioni non integrabili φ_1, φ_2 possano dare origine ad una funzione integrabile $\varphi_1-\varphi_2$ oppure $\varphi_1+\varphi_2$; in questa ipotesi però le due espressioni $\varphi_1-\varphi_2$, $\varphi_1+\varphi_2$ non sono integrabili nel medesimo tempo.

Ciò posto, sieno φ_1 e φ_2 due funzioni finite tra a e b integrabili insieme all'altra $\varphi_1-\varphi_2$, in guisa che sia

$$\int_c^d \varphi_1(x)dx-\int_c^d \varphi_2(x)dx=0, \qquad a\leq c<d\leq b,$$

e studiamo la funzione $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ il cui integrale è nullo.

Dico G_1, G_2, $G_3,\ldots$, $G_s,\ldots$ una serie illimitata di gruppi di punti nel segmento ab, scelta in guisa che i punti di qualsiasi gruppo G_s appartengano al successivo G_{s+1} e che, indicati con $\delta_s^{(1)}$, $\delta_s^{(2)},\ldots$ gli intervalli corrispondenti a G_s, si abbia $\lim_{s=\infty}\delta_s^{(r)}=0$, quale si sia r. Chiamo poi $S_{(s)}$ la somma degli spazi δ relativi a G_s nei quali, inclusi i limiti, la funzione $\varphi(x)$ assume valori positivi e negativi, somma che potrà essere anche nulla. Ora, la quantità $S_{(s)}$ converge a zero con $\frac{1}{s}$ oppure ciò non ha luogo: suppongo anzitutto il primo caso. In tale ipotesi attribuisco ad s un valore s_1+r ($r\geq 0$) tale, che la somma $S_{(s_1+r)}$ sia arbitrariamente piccola. In ciascuno degli spazi δ non appartenenti a $S_{(s_1+r)}$ la funzione $\varphi(x)$ sarà, compresi i limiti, sempre positiva o negativa: poniamo che nel tratto $\delta_{s_1+r}^{(k)}$ abbia il segno $+$, essendo p e q le ascisse dei suoi estremi. Quindi, considerato il gruppo G_{s_1+r+t} e posto mente che per la fatta ipotesi si ha

$$\int_{p_1}^{q_1} \varphi(x)dx=0, \qquad p\leq p_1<q_1\leq q,$$

la somma degli spazi appartenenti al tratto $\delta_{s_1+r}^{(k)}$, nei quali la funzione $\varphi(x)$ ha un limite superiore che non è più piccolo della quantità arbitraria σ, convergerà a zero con $\frac{1}{t}\cdot$ Il numero dei tratti δ_{s_1+r} in ciascuno dei quali, inclusi i limiti, la $\varphi(x)$ è sempre dello stesso segno, è limitato per ogni valor particolare del numero intero s_1+r, e per ciò la somma dei segmenti δ_{s_1+r+t} appartenenti ai medesimi, nei quali il limite superiore od inferiore supera, astrazion fatta dal segno, la quantità arbitraria σ, va a zero con $\frac{1}{t}\cdot$ Adunque nel caso ora contemplato la somma degli spazi nei quali la funzione studiata assume, non tenendo calcolo del segno, un valore più grande della quantità arbitraria σ, si annulla con $\frac{1}{s}$.

Poniamo ora che l'espressione $S_{(s)}$ non tenda a zero con $\frac{1}{s}$.

Sia s scelto in guisa che le quantità $S_{(s)}$ e $\sum_r A_s^{(r)} \delta_s^{(r)}$ sieno arbitrariamente vicine al loro limite, $A_s^{(r)}$ essendo il limite superiore della funzione $\varphi(x)$ nel tratto $\delta_s^{(r)}$, i confini compresi. Ciò posto, formando l'integrale $\int \varphi(x) dx$ si potrà moltiplicare ciascuno dei tratti appartenenti alla somma $S_{(s)}$ pel limite superiore dei valori della $\varphi(x)$ nel medesimo, e poichè per gli intervalli non appartenenti ad $S_{(s)}$ vale il ragionamento fatto or ora, ne consegue che anche la somma degli spazi δ_s appartenenti ad $S_{(s)}$, nei quali il limite superiore è maggiore di σ, va a zero con $\frac{1}{s}$. Se poi calcolando l'integrale moltiplicassi ciascuno dei tratti appartenenti ad $S_{(s)}$ pel suo limite inferiore, ne inferirei che la somma degli spazi appartenenti ad $S_{(s)}$ e nei quali la $\varphi(x)$ ha, astrazion fatta dal segno, un limite inferiore più grande di σ, converge a zero con $\frac{1}{s}$. Adunque:

Se una funzione dei punti di *ab* ha il suo integrale nullo, dovrà convergere a zero la somma degli spazi nei quali essa raggiunge valori maggiori, astrazion fatta dal segno, di una quantità arbitraria; e reciprocamente.

Se consideriamo la funzione $\varphi(x)$ in un tratto qualsivoglia appartenente ad *ab*, nel quale è sempre positiva, supposto che tale tratto possa assegnarsi, sarà il limite inferiore dei valori assunti della medesima in esso, compresi amendue i limiti o uno o nessuno, eguale a zero. Questa asserzione non trae però di necessaria conseguenza che la $\varphi(x)$ abbia a raggiungere questo valore in esso segmento. Così per es., se definissi nell'intervallo $\frac{1}{2}$ 1 una funzione per modo, che in tutti i punti di ascissa $\frac{p}{q}$ fosse eguale al valore corrispondente $\frac{1}{q}$, mentre negli altri non avesse luogo dipendenza, otterrei una funzione sempre positiva il cui integrale è nullo e che non raggiunge mai lo zero.

Ora possiamo spiegare ciò che va inteso col dire la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile.

Essendo $c_1, c_2, c_3, \ldots$ una serie illimitata di grandezze, consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_1^{\frac{1}{x}} {}_n c_n,$$

la quale esiste soltanto per valori di x della forma $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Facendo convergere x allo zero la $f(x)$ potrà restar finita o no: poniamo che si verifichi il primo caso. In tale ipotesi la $f(x)$ oscillerà per $x = +0$ fra due rette limite (*), le equazioni delle quali sieno $y = A$, $y = B$ $(A \geqq B)$. Indicheremo questo fatto dicendo che la serie $\sum c_n$ si mantiene finita e che la sua somma oscilla tra le quantità A e B.

Lasciando indeterminato il significato della serie $\sum A_n X_n$ in un gruppo di punti dell'ordine r, poniamo che essa del resto si mantenga finita per ogni valor particolare di x compreso tra $+1$ e -1, e sieno $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ le quantità tra le quali oscilla la sua somma. Voglio dire con ciò che, essendo x_1 un punto appartenente a questo gruppo, ignoriamo se i simboli $\theta_1(x_1)$, $\theta_2(x_1)$ rappresentino o no una grandezza. Stando le cose in questi termini diremo che il simbolo $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile quando sieno tali le due funzioni $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, e di più sia

$$\int_c^d \theta_1(x)\,dx = \int_c^d \theta_2(x)\,dx, \qquad c < d, \qquad c \geqq -1, \qquad d \leqq +1.$$

L'asserire poi che la funzione $\sum A_n X_n$ va all'infinito in un numero limitato di punti equivale all'ammettere che la funzione $\theta_1(x)$ o la $\theta_2(x)$, oppure amendue, crescano o diminuiscano al di là di ogni limite per un numero assegnabile di punti. Osservo che se una delle funzioni $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ si comporta nel modo indicato in un punto del segmento $-1\ +1$, ciò non ha luogo di necessità dell'altra.

Infatti, se si considera nell'intervallo $+0\varepsilon$ una funzione che va all'infinito per $x = +0$ (**), non potrà assegnarsi al certo una almeno delle rette limite corrispondenti al medesimo, oppure nessuna delle due. Nel caso che ne esista una, essa sarà una funzione di ε, la quale si scosta indefinitamente per $\varepsilon = +0$ oppure converge ad una posizione.

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 28. Ivi io mi accosto al punto $a+0$ che è a distanza finita supponendo la funzione continua tra a e b $(a < b)$ e finita. Di queste condizioni però basta che sia soddisfatta la terza perchè esistano le due rette limite. La differenza $A - B$ è la oscillazione O_{+0} a destra della origine della funzione $f(x)$. V. anche la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, n.° III, par. 2.

(**) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 33 e seg.^te

Ammesso poi che la $\theta_1(x)$ vada per $x=+0$ ad es. all'infinito, se non esistono le due rette limite corrispondenti al tratto $+0\varepsilon$ dovrà la $\theta_2(x)$ crescere oltre ogni misura, astrazion fatta dal segno, per $x=+0$. Perchè se ciò non avesse luogo, essendo sempre $\theta_2(x)<\theta_1(x)$, la $\theta_1(x)$ avrebbe un limite inferiore nel tratto $+0\varepsilon$; la qual cosa è contraria all'ipotesi. Supposto invece che nell'intervallo $+0\varepsilon$ la $\theta_1(x)$ manchi della retta limite superiore soltanto, se la retta limite inferiore va all'infinito per $\varepsilon=+0$ anche la $\theta_2(x)$ crescerà per $x=+0$ oltre ogni confine, inquantochè l'integrale della funzione $\theta_1(x)-\theta_2(x)$ essendo. per ipotesi nullo, si può sempre assegnare nel tratto $+0\varepsilon$, quale si sia ε, un punto, in cui la espressione $\theta_1(x)-\theta_2(x)$ è arbitrariamente piccola. Se all'incontro la retta limite inferiore convergesse per $\varepsilon=+0$ ad una posizione assegnabile, la $\theta_2(x)$ non andrebbe per $x=+0$ di necessità all'infinito. Per ultimo, se nell'intervallo $+0\varepsilon$ la $\theta_1(x)$ non ammettesse la retta limite inferiore soltanto, la $\theta_2(x)$ crescerebbe, astrazion fatta dal segno, al di là di ogni limite per $x=+0$.

Gli è chiaro adunque ciò che debba intendersi col dire la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile o meglio è atta all'integrazione, e come l'integrabilità della serie non porti di necessaria conseguenza che la medesima abbia a convergere sia pure in un sol punto del tratto -1 $+1$.

Il sig. Paul du Bois-Reymond asserisce in una Memoria sulle serie trigonometriche (*) che una serie di cui tutti i termini sono funzioni della x debba convergere almeno una volta, e quindi infinite, in un intervallo qualsivoglia per essere integrabile; asserzione che per quanto or ora fù detto non mi sembra del tutto esatta.

Diamo adesso alcuni schiarimenti circa alle condizioni imposte alla serie nelle estreme vicinanze dei punti -1 e $+1$ e, a tal fine, dimostriamo il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione finita dei punti del segmento ab ed in esso integrabile, nel medesimo segmento la funzione $f_1(x)=+\sqrt{[f(x)]^2}$ sarà atta all'integrazione.

Infatti, sia G_1, G_2,... G_s,... una serie illimitata di gruppi nel segmento ab, tali che i punti formanti un gruppo appartengano anche al successivo. Supposto s_1 sufficientemente grande, la somma $S_{s_1+t}(t\geqq 0)$ degli spazi nei quali la oscillazione massima della $f(x)$ è eguale o maggiore alla quantità arbitraria

(*) *Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W.* II. Cl. XII Bd. I Abth.

σ, sarà piccola quanto si vuole. Ciò posto, è chiaro che in uno qualunque degli intervalli δ_{s_1+t} non appartenenti ad S_{s_1+t} i valori della $f(x)$ saranno, compresi i limiti, o tutti positivi o tutti negativi, e, se di segno contrario, in valore assoluto non potranno nè eccedere nè eguagliare σ, poichè, se non fossero soddisfatte queste condizioni, la oscillazione della $f(x)$ nel tratto considerato sarebbe superiore a σ. Ora, è evidente che la somma degli spazi nei quali la oscillazione della funzione $f_1(x)$ è maggiore di σ relativamente al gruppo $G_{s_1+t}(t \geqq 0)$ non è più grande di S_{s_1+t}. L'asserzione è quindi dimostrata.

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ vada all'infinito per $x=+0$, non conservando lo stesso segno, e che l'integrale $\int_\varepsilon f(x)dx$ converga per $\varepsilon=+0$; di più la $f(x)$, considerata che sia nel tratto 0ε, manchi di una retta limite soltanto e per fissar le idee della superiore: in tale ipotesi è facile a vedersi come la espressione $\int_\varepsilon f_1(x)dx$ converga ad un limite per $\varepsilon=+0$. Infatti, la funzione $f(x)-f_1(x)$ non va all'infinito per $x=+0$, e quindi la stessa cosa ha luogo per la differenza $\int_x f(x)dx - \int_x f_1(x)dx$, perciò l'integrale $\int_\varepsilon f_1(x)dx$, che non oscilla all'annullarsi di ε, tende ad un limite. Se però la funzione $f(x)$ mancasse di amendue le rette limite nel tratto $+0\varepsilon$ e l'integrale $\int_\varepsilon f(x)dx$ convergesse, ciò non avrebbe luogo necessariamente dell'altro $\int_\varepsilon f_1(x)dx$ (*). Si può anche enunciare il seguente teorema:

Se una funzione dei punti di un segmento, la quale non sia sempre dello stesso segno, è integrabile, dovrà convergere a zero la somma degli spazi, nei quali essa è positiva e negativa ed in pari tempo consegue valori che, astrazion fatta dal segno, non sono inferiori ad una quantità arbitraria σ.

Adunque, riepilogando, le condizioni imposte alla serie $\sum A_n X_n$ nell'enunciato del teorema da dimostrarsi sono:

I. Che si mantenga finita per ogni valor particolare della va-

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 41 e seg.^{ti}

riabile x compreso tra -1 e $+1$, astrazion fatta di un gruppo di punti dell'ordine r, nei quali si ignora il modo di comportarsi della medesima.

II. Sia ovunque integrabile e vada all'infinito tutto al più in un numero limitato di punti, che supporremmo facciano parte del gruppo dell'ordine r, purchè, considerata soltanto nelle estreme vicinanze dei punti $+1$ e -1, si possa integrare presa sempre con lo stesso segno.

3.

Per la dimostrazione del nostro teorema è necessario far vedere come si abbia

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{\mathrm{cotg}\,\theta\,\mathrm{sen}\left(\rho\,\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}} + \frac{p_n}{n^2\sqrt{n}}, \tag{1}$$

ove $\rho = n + \frac{1}{2}$, p_n resta finito ed è funzione continua di θ quale si sia n, e θ è compreso tra ε e $\pi - \varepsilon$, essendo ε una quantità arbitrariamente piccola.

Il sig. Bonnet nella Memoria: *Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions X_n et Y_n* (Journal de Liouville, t. 17, Année 1852) trova invece tra gli stessi limiti

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{4n}\right) + \frac{\mathrm{cotg}\,\theta\,\mathrm{sen}\left(\rho\,\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}}, \tag{α}$$

p avendo un significato analogo a quello di p_n.

Indicherò alla fine di questo paragrafo le obbiezioni che, a mio credere, si ponno fare alla dimostrazione del sig. Bonnet.

Ecco come parmi si possa porre in sodo la formola (1) giovandosi di quanto è esposto a pag. 99 e seg.[ti] dell'opera del sig. Heine: *Handbuch der Kugelfunctionen.*

Si ha con Laplace

$$\pi P_n(x) = \int_0^\pi (x + \cos\varphi\sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi,$$

e ponendo nell'ultimo integrale $\varphi = \pi - \varphi_1$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(x-\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi;$$

fatto poi $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi = z$, si ottiene:

$$\pi P_n(x) = \int_0^{\frac{1}{2}}[x+(1-2z)\sqrt{x^2-1}]^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} +$$
$$+\int_0^{\frac{1}{2}}[x-(1-2z)\sqrt{x^2-1}]^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}.$$

Posto quindi

$$\xi = x+\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}} = \frac{1}{\xi^{-1}},$$

si ricava:

$$\pi P_n(x) = \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\xi}z\right)^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} +$$
$$+\xi^{-n}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\xi^{-1}}z\right)^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}.$$

Faccio adesso

$$a = 2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\xi}, \qquad a_1 = -2\xi\sqrt{x^2-1},$$
$$x=\cos\theta, \text{ quindi } \xi = x+\sqrt{x^2-1} = e^{i\theta},$$

ed ho:

$$\pi P_n(\cos\theta) = e^{in\theta}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-az)^n\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} + e^{-in\theta}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-a_1 z)^n\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}$$
$$= e^{in\theta}H + e^{-in\theta}K,$$

K deducendosi da H mutando i in $-i$.

Considerando in prima l'integrale H, decomponiamolo in due, l'uno da 0 ad $n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$, $\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$, l'altro da $n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$ sino ad $\frac{1}{2}$. Gli è facile il vedere come la espressione

$$\int_{n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}}^{\frac{1}{2}}(1-az)^n\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}$$

diventi zero di ordine infinito al crescere indefinito di n $\left(\frac{1}{n}\right.$ considerandosi come uno zero di primo ordine per $\left.n=\infty\right)$; ciò risulta dalle seguenti considerazioni.

Si ha

$$a=2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\xi}=2(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)i\operatorname{sen}\theta=2\operatorname{sen}^2\theta+i\operatorname{sen}2\theta,$$

e

$$\operatorname{mod}[1-az]=\sqrt{(1-2z\operatorname{sen}^2\theta)^2+z^2\operatorname{sen}^2 2\theta}=\sqrt{1-4(z-z^2)\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Ora, poichè la funzione $z-z^2$ cresce sempre da $z=0$ a $z=\frac{1}{2}$, il modulo di $(1-az)$ decresce sempre tra gli stessi limiti variando da 1 a $+\sqrt{\cos^2\theta}$. Avremo quindi:

$$\log(1-az)=-\eta+\varphi i,$$

essendo $\eta>0$ per tutti i valori di z fuori che per $z=0$, pel quale valore si annulla. L'espressione

$$(1-az)^n=e^{-n\eta}(\cos n\varphi+i\operatorname{sen}n\varphi)$$

va adunque a zero con infinita rapidità per tutti i valori di z maggiori od eguali ad una quantità comunque piccola, oppure per tutti i valori di $z\geqq\varphi(n)$, essendo $\lim_{n=\infty}\varphi(n)=0$, quando $(1-az)^n$ si annulli con rapidità infinita per $z=\varphi(n)$ ed $n=\infty$.

È facile vedere che la funzione $\varphi(n)=n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$ soddisfa alle condizioni accennate.

Infatti, essendo $\operatorname{mod}a=2\operatorname{sen}\theta$, $z<\frac{1}{2}$, e quindi $\operatorname{mod}az<1$, si ha:

$$\log(1-az)=-az-\frac{a^2z^2}{2}-\frac{a^3z^3}{3}-\cdots,$$

perciò:

$$(1-az)^n=e^{-naz\left(1+\frac{az}{2}+\frac{a^2z^2}{3}+\dots\right)},$$

e, facendo $z=n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$,

$$(1-az)^n=e^{-an^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}}\left(1+\frac{a}{2}n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}+\dots\right)}.$$

Questa espressione va a zero come $e^{-2\operatorname{sen}^2\theta n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}}}$, ossia diviene zero di ordine infinito, perchè, essendo $\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$, si ha $\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}<1$.

Consideriamo ora l'integrale

$$I_n = \int_0^b (1-az)^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} \qquad \left(b = n^{\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \theta}-1}\right);$$

ponendo $z = \frac{y}{n}$ si otterrà:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay\left(1+\frac{ay}{2n}+\frac{a^2y^2}{3n^2}+\cdots\right)} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} \left[1 - \frac{a^2y^2}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{a^4y^4}{n^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{a^6y^6}{n^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)^3 + \cdots\right] dy.$$

L'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}$$

è, essendo $y \leq n^{\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \theta}} < n$, eguale a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \sqrt{y}\, dy + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} y^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5}{6}\frac{y}{n}+\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\frac{y^2}{n^2}+\cdots\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \sqrt{y}\, dy + \frac{q_n}{n^2\sqrt{n}},$$

e q_n non cresce oltre ogni limite con n. Questo aggregato potrà poi presentarsi nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-ay} \sqrt{y}\, dy + \frac{q'_n}{n^2\sqrt{n}},$$

q'_n avendo un significato analogo a quello di q_n, e ciò perchè gli integrali

$$\int_{nb}^{\infty} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad \int_{nb}^{\infty} e^{-ay} \sqrt{y}\, dy$$

vanno a zero con rapidità infinita mentre n cresce al di là di ogni limite.

Ora, poichè la parte reale di a è positiva, si ha:

$$\int_0^\infty e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ay}\sqrt{y}\,dy=\left(\sqrt{y}\frac{e^{-ay}}{-a}\right)_0^\infty+\frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

laonde:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{4an\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{q'_n}{n^2\sqrt{n}}.$$

D'altra parte, l'integrale I_n può mettersi nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}-\frac{a^2}{n\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)y^2\,dy+$$

$$+\frac{a^4}{2n^2\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}y^4\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\frac{a^2y^2}{n}\left(\frac{1}{2}+\cdots\right)^3+\cdots\right]dy.$$

L'espressione

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\frac{a^2y^2}{n}\left(\frac{1}{2}+\cdots\right)^3+\cdots-\frac{1}{4},$$

supposto θ scelto in guisa che si abbia

$$2\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1<0,$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, poichè per $y \leqq nb$ la quantità

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{ay}{3n}+\cdots\right)^s$$

converge ad $\frac{1}{2^s}$ e l'altra $\left(\frac{a^2y^2}{n}\right)^s$ va a zero con $\frac{1}{n}$, quale si sia s. L'ipotesi che si abbia $2\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1<0$ non impedisce che θ possa avvicinarsi ai valori 0 e π quanto si vuole, purchè ε sia scelto convenientemente.

Ciò posto, l'integrale I_n può scriversi anche così

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{4an\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{q''_n}{n^2\sqrt{n}}-\frac{a^2}{n\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}y^2\,dy-$$

$$-\frac{a^3}{n^2\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}\left(\frac{1}{3}+\frac{a\,y}{4\,n}+\cdots\right)y^3\,dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{4an\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{a^2}{2n\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}\frac{y^2}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}dy+\frac{r_n}{n^2\sqrt{n}},$$

q''_n ed r_n essendo due quantità che non vanno all'infinito con n.

Ma

$$\int_0^{nb} y^2 e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}=\int_0^{nb} e^{-ay}y^{\frac{3}{2}}dy+\frac{1}{2n}\int_0^{nb} e^{-ay}y^{\frac{5}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{y}{n}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{y^2}{n^2}+\cdots\right)dy,$$

quindi:

$$\frac{a^2}{2n\sqrt{n}}\int_0^{nb} y^2 e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}}=\frac{a^2}{2n\sqrt{n}}\int_0^{nb} e^{-ay}y^{\frac{3}{2}}dy+\frac{t'_n}{n^2\sqrt{n}}=$$

$$\frac{a^2}{2n\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-ay}y^{\frac{3}{2}}dy+\frac{t_n}{n^2\sqrt{n}},$$

t_n e t'_n non crescendo oltre ogni limite con n.

Ora,

$$\int_0^{\infty} e^{-ay}y^{\frac{3}{2}}dy=\left(y^{\frac{3}{2}}\frac{e^{-ay}}{-a}\right)_0^{\infty}+\frac{3}{2}\frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-ay}\sqrt{y}\,dy=$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{a}\left(\sqrt{y}\frac{e^{-ay}}{-a}\right)_0^{\infty}+\frac{3}{4}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-ay}\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{3}{4}\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

per cui:

$$I_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{4an\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{3}{8n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\frac{s_n}{n^2\sqrt{n}},$$

ed s_n non va all'infinito con n.

D'altra parte,

$$a = 2(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,i\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{sen}\,\theta + i\cos\theta) =$$

$$2\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta},$$

quindi:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}}\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{3i\frac{\theta}{2}}e^{-3i\frac{\pi}{4}} -$$

$$-\frac{3}{8n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{s_n}{n^2\sqrt{n}},$$

perciò:

$$H = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}}\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{3i\frac{\theta}{2}}e^{-3i\frac{\pi}{4}} -$$

$$-\frac{3}{8n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{s'_n}{n^2\sqrt{n}},$$

s'_n avendo significato analogo a quello di s_n.

L'integrale K deducendosi da H mutando i in $-i$, si ha:

$$K = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}}\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{-3i\frac{\theta}{2}}e^{3i\frac{\pi}{4}} -$$

$$-\frac{3}{8n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{s''_n}{n^2\sqrt{n}},$$

per cui finalmente:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4n\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{\mathrm{cotg}\,\theta}{4n\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,\mathrm{sen}\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4n\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\theta}}\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_n}{n^2\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\left(1-\frac{1}{4n}\right) + \frac{\mathrm{cotg}\,\theta}{4n\sqrt{2n\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}}\,\mathrm{sen}\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_n}{n^2\sqrt{n}},$$

p_n essendo una funzione finita e continua di θ, quale si sia n.

Accenno ora brevemente alle obbiezioni che si possono fare alla dimostrazione del sig. Bonnet, che mi sembra appuntabile in due punti.

L'autore trova con operazioni lecite le due eguaglianze (*)

$$0=\frac{\delta\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k}-\frac{\delta}{8k^2}\left[3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)-\frac{a}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right]+\frac{p\delta}{k^3}+\frac{q}{k^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}}e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}}=\frac{\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k}-\frac{\delta}{8k^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)+\frac{a}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right]+\frac{p\delta}{k^3}+\frac{q}{k^3}.$$

Però, convien avvertire che le quantità δ ed ε, le quali compariscono nella prima delle due formole precedenti, sono funzioni del numero pari e positivo $2k$, mentre le quantità δ ed ε della seconda sono funzioni formate nello stesso modo delle altre col numero impari e positivo $2k+1$.

Ora, trovate queste relazioni, il sig. Bonnet opera sovra esse come se le quantità δ ed ε che compariscono nella prima fossero eguali alle quantità indicate egualmente nella seconda, mentre nulla permette di asserire che tale eguaglianza abbia luogo. Ricava quindi

$$\delta=\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\pm\frac{1}{n\sqrt{2n\pi}}+\frac{p}{n\sqrt{n}},\qquad \varepsilon=-\frac{\pi}{4}-\frac{a}{8n}+\frac{q}{n^2},$$

il segno superiore riferendosi al caso di n pari, l'altro a quello di n impari (v. p. 276). La sostituzione di questi valori nella equazione

$$u=\frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{n}-\frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{2n^2}-\frac{\delta}{8n^2}\operatorname{sen}(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma\frac{d\gamma'}{\operatorname{sen}^2\gamma'}+\frac{p\delta}{n^3}+\frac{q}{n^3}$$

$$\left(\rho=n+\frac{1}{2}\right)$$

non dà origine alla formola trovata dal sig. Bonnet, che è

$$u=\frac{2\cos\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}}+(-1)^n\frac{\cos\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}+\frac{\operatorname{cotg}\gamma\operatorname{sen}\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}}+\frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

ma bensì all'altra

$$\frac{2\cos\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi n}}\pm\frac{\cos\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}-\frac{2\cos\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}+\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{4n\sqrt{2n\pi}}\operatorname{sen}\left(\rho\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

il segno superiore valendo per n pari, l'inferiore per n impari. Questa sostituzione è il secondo dei punti critici ai quali allusi poco fà.

(*) V. pag. 270-277 della Memoria citata.

Anche intorno alla dimostrazione data dal sig. BONNET circa alla sviluppabilità di una funzione per serie di funzioni sferiche si ponno fare alcune osservazioni. Circa alla medesima il prof. DINI, in una Memoria inserita nel tomo sesto di questi Annali (p. 112), dice: « Uno dei teoremi più importanti dell'Analisi è quello che permette di esprimere analiticamente per una serie di funzioni sferiche una funzione di due variabili reali data arbitrariamente sopra la sfera. Le dimostrazioni però di DIRICHLET e di BONNET, che ordinariamente si danno di questo teorema, non mi pare che possano dirsi del tutto rigorose, a meno che non si facciano sulla natura della funzione certe restrizioni delle quali nelle dimostrazioni stesse non si fà parola ».

Ora, tenendo conto soltanto della dimostrazione del sig. BONNET, non parmi che regga la obbiezione del sig. DINI. Egli è vero, l'Autore francese non enuncia a principio della sua dimostrazione tutte le proprietà che dee avere una funzione per essere esprimibile per serie di funzioni sferiche, o meglio, perchè alla medesima possano applicarsi le sue ricerche; ma però esse scaturiscono dai ragionamenti successivi, ossia la dimostrazione stessa restringe di più in più la natura delle funzioni per le quali essa è valevole.

Per non parlare di mende di minor momento, la inesattezza principale consiste, a mio credere, nel far uso della formola (α), che non è vera, nella dimostrazione del teorema in discorso. Ciò non pertanto alcune leggiere modificazioni, mentre semplificano di un tantino detta dimostrazione, la rendono altresì rigorosa, ed esse si riducono ad ommettere le considerazioni circa alle due serie

$$\sum\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\,\varphi(\gamma)\,d\gamma,\qquad \sum\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{sen} n\gamma\,\varphi(\gamma)\,d\gamma$$

estese ai valori pari od impari soltanto di n (*).

Anche il prof. DINI accetta nella Memoria di cui parlo al primo paragrafo la formola del sig. BONNET: ad onta di ciò la sua dimostrazione non abbisogna di verun mutamento, se si esclude quello della quantità $(-1)^n$ in -1 in tutte le formole nella quale comparisce.

4.

Per le ricerche seguenti giova studiare il modo di comportarsi dei coefficienti della serie data al crescere indefinito di n.

(*) V. p. 291-294 della Memoria citata.

A questa domanda risponde il teorema:

Se la serie $\sum A_n X_n$ è in tutti i punti di un intervallo comunque piccolo kh $(-1 \leqq k < h \leqq +1)$ finita, e tale che la differenza $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ in esso tratto sia integrabile ed il suo integrale abbia un valore nullo, dovrà la quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ convergere a zero con $\frac{1}{n}$.

La verità di questa proposizione risulta da quanto segue.

Data una serie illimitata di grandezze $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$, le quali non crescono indefinitamente con n, siano $y = A$ ed $y = B$ le equazioni delle rette limite corrispondenti alla funzione $\varphi(m) = c_{\frac{1}{m}}$ per $m = +0$; $A - B$ indica adunque la oscillazione di $\varphi(m)$ a destra dell'origine delle coordinate. Scelta quindi dalla serie proposta l'altra $c_{r_1}, c_{r_2}, \ldots$ pure illimitata, e da quest'ultima la terza $c_{r_{s_1}}, c_{r_{s_2}}, \ldots, c_{r_{s_t}}, \ldots$, mentre t cresce al di là di ogni limite la quantità $c_{r_{s_t}}$ oscillerà tra due grandezze M ed N $(M \geqq N)$, la prima delle quali non potrà essere manifestamente maggiore di A, l'altra non minore di B. Invertendo questo ragionamento si ha il teorema:

Data una serie illimitata di grandezze $c_1, c_2, c_3, \ldots$, tale, che, pigliata dalla medesima arbitrariamente un'altra pure senza fine $c_{r_1}, c_{r_2}, c_{r_3}, \ldots$, da quest'ultima possa sempre scegliersi una terza $c_{r_{s_1}}, c_{r_{s_2}}, \ldots, c_{r_{s_t}}, \ldots$ in guisa che $c_{r_{s_t}}$ al crescere indefinito di t oscilli tra due grandezze A e B $(A \geqq B)$, delle quali la prima non supera la quantità A_1, la seconda non è inferiore a $B_1 (A_1 \geqq B_1)$, dovrà altresì c_r per r infinito oscillare tra due grandezze, l'una non maggiore di A_1, l'altra non minore di B_1.

Poniamo per un momento che ciò non abbia luogo. In tale ipotesi la quantità c_n per n infinito andrà pure all'infinito, oppure oscillerà tra due grandezze M ed N $(M \geqq N)$. Il primo caso non può aver luogo, poichè, scelta la serie $c_{\upsilon_1}, c_{\upsilon_2}, \ldots, \upsilon_1 < \upsilon_2 < \ldots, c_{\upsilon_1} < c_{\upsilon_2} < \ldots, \lim_{s=\infty} c_{\upsilon_s} = \infty$, qualsiasi serie illimitata tolta da quest'ultima non avrà al certo i suoi termini oscillanti tra due grandezze l'una non maggiore di A_1, l'altra non minore di B_1, ma all'incontro essi andranno all'infinito sempre crescendo. Consideriamo ora l'altro caso: poniamo, per fissare le idee, che M sia maggiore di A_1, senza asserire nulla circa alla relazione che ha luogo tra B_1 ed N. In tale caso potremo scegliere dalla data una serie $c_{t_1}, c_{t_2}, \ldots$ in guisa che si abbia $\lim_{s=\infty} c_{t_s} = M$, dalla quale non si può al certo levare un'altra che soddisfi alle condizioni ammesse per ipotesi.

Si consideri ora un intervallo $p_1 q_1$ di $k_1 h_1$ per tutti i punti del quale la funzione $\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)$ $[\varphi_1(\theta) = \theta_1(x)$, $\varphi_2(\theta) = \theta_2(x)$, $x = \cos\theta$, $p = \cos p_1$, $q = \cos q_1$, $k = \cos k_1$, $h = \cos h_1]$ raggiunge valori minori della quantità arbitrariamente piccola σ, astrazion fatta dal segno, intervallo che può al certo assegnarsi, essendo $\int_{k_1}^{\theta_1} [\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)] d\theta = 0$, $k_1 < \theta_1 \leqq h_1$. Per questi valori di θ la quantità $A_n P_n(\cos\theta)$ oscilla al crescere indefinito di n tra due grandezze M ed N $(M \geqq N)$, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ. Ed invero, essendo la quantità $\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)$ pei valori considerati di θ minore di σ, astrazion fatta dal segno, la oscillazione della somma

$$\psi(n) = \sum_1^n {}_r A_r P_r(\cos\theta),$$

per $n = +\infty$ e per questi valori particolari di θ, è pure più piccola di σ; quindi, a partire da un valore opportuno di n, le due somme

$$\sum_1^n {}_r A_r P_r(\cos\theta), \qquad \sum_1^{n+m} {}_r A_r P_r(\cos\theta)$$

differiscono, quale si sia m, di una quantità inferiore a σ. Osservando poi che in virtù della formola dimostrata nel paragrafo precedente si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n P_n(\cos\theta)}{\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = 1, \qquad \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

si potrà asserire che per tutti i punti del tratto $p_1 q_1$ la quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ assume valori minori di σ, astrazion fatta dal segno, al crescere indefinito di n.

In luogo del teorema detto a principio di questo paragrafo dimostriamo ora il seguente che è più generale:

Se, data una grandezza arbitraria σ, si può assegnare un intervallo $p_1 q_1$ per ciascun punto del quale la quantità

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

al crescere indefinito di n oscilli tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ, sarà $\lim \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0$ per n crescente al di là di ogni limite.

Ciò posto, rammento il seguente teorema del sig. Cantor: (*)

Indicandosi con x_1, x_2, x_3,... una serie illimitata di numeri interi e positivi, tale, che si abbia $x_2 > kx_1$, $x_3 > k^2 x_2$, $x_4 > k^3 x_3$,..., $k > 1$, si può assegnare una quantità Ω in guisa che il prodotto $x_n \Omega$ differisca da un numero impari $2y_n + 1$ di una quantità Θ_n, che converge a zero con $\frac{1}{n}$, e la grandezza Ω può pigliarsi in un intervallo dato qualsivoglia.

Scelgo ora ad arbitrio dalla serie illimitata

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots \qquad \left[\alpha_n = \frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

un'altra, e sia essa

$$\alpha_{r_1}, \quad \alpha_{r_2}, \quad \alpha_{r_3}, \ldots \qquad (r_1 < r_2 < r_3 < \ldots),$$

da quest'ultima poi la terza

$$\alpha_{r_{t_1}}, \quad \alpha_{r_{t_2}}, \quad \alpha_{r_{t_3}}, \ldots,$$

per modo che si abbia

$$r_{t_2} > k r_{t_1}, \qquad r_{t_3} > k^2 r_{t_2}, \ldots \qquad (k > 1).$$

Prendo quindi, giovandomi del teorema rammentato, una grandezza Ω nell'intervallo $\frac{0p_1}{\pi} \frac{0q_1}{\pi}$ in guisa che sia

$$\Omega r_{t_s} - (2y_s + 1) = \Theta_s,$$

essendo y_s un numero intero e positivo, quale si sia s, e Θ_s una quantità che va a zero con $\frac{1}{s}$. Posto poi $\underset{\prime}{\Omega} = \Omega\pi$, è chiaro che la grandezza $\underset{\prime}{\Omega}$ sarà compresa tra $0p_1$ ed $0q_1$, e si avrà:

$$\underset{\prime}{\Omega} r_{t_s} - (2y_s + 1)\pi = \underset{\prime}{\Omega} r_{t_s} + \frac{1}{2}\underset{\prime}{\Omega} - \frac{1}{2}\underset{\prime}{\Omega} - (2y_s + 1)\pi = \underset{\prime}{\Omega}\left(r_{t_s} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\underset{\prime}{\Omega} - (2y_s + 1)\pi = \underset{\prime}{\Theta}_s,$$

essendo $\underset{\prime}{\Theta}_s = \Theta_s \pi$ una quantità che si annulla con $\frac{1}{s}$.

L'espressione

$$\frac{A r_{t_s}}{\sqrt{r_{t_s}}} \cos\left[\left(r_{t_s} + \frac{1}{2}\right)\underset{\prime}{\Omega} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{A r_{t_s}}{\sqrt{r_{t_s}}} \cos\left[(2y_s + 1)\pi + \underset{\prime}{\Theta}_s + \frac{\underset{\prime}{\Omega}}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = -\frac{A r_{t_s}}{\sqrt{r_{t_s}}} \cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\underset{\prime}{\Omega}}{2} - \underset{\prime}{\Theta}_s\right]$$

(*) V. Clebsch e Neumann, Mathematische Annalen, t. 4°, pag. 139.

al crescere indefinito di s oscillerà quindi tra due grandezze, ciascuna delle quali è, fatta astrazione dal segno, minore di σ. Ma la grandezza σ è arbitraria, e poichè Ω non eccede, quale si sia σ, i limiti 0 e π, l'arco $\frac{\pi}{4}-\frac{\Omega}{2}$ non si accosterà indefinitamente a $-\frac{\pi}{2}$; quindi, rammentando le considerazioni fatte al principio di questo paragrafo, e non essendo

$$\lim_{n=\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Omega}{2}-\Theta_s\right)=0,$$

sarà:

$$\lim_{n=\infty}\frac{A}{\sqrt{n}}=0,$$

la qual cosa si voleva dimostrare.

L'ultimo dei teoremi enunciato in questo numero è caso particolare del seguente:

Se, data una quantità arbitraria σ, si può assegnare un intervallo pq per ciascun punto del quale la espressione

$$a_n \operatorname{sen}\varphi(n)x + b_n \cos\varphi(n)x,$$

$$\varphi(1)<\varphi(2)<\varphi(3)<\cdots \qquad (\lim_{n=\infty}\varphi(n)=\infty)$$

al crescere indefinito di n oscilli tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0, \qquad n=\infty.$$

La verità di questa proposizione risulta dalle considerazioni che seguono.

Lemma I. Detta $\varphi(\mu_1)$, $\varphi(\mu_2)$,... una serie illimitata di quantità positive, tale, che si abbia

$$\varphi(\mu_2)>k\varphi(\mu_1), \qquad \varphi(\mu_3)>k^2\varphi(\mu_2),\ldots \qquad (k>1),$$

si potrà assegnare una grandezza Ω entro un intervallo qualsivoglia $\alpha\beta$, in guisa che la differenza

$$\Omega\varphi(\mu_s)-(2y_s+1)$$

converga a zero con $\frac{1}{s}$, y_s essendo un numero intero e positivo.

Questo teorema generalizza quello del sig. Cantor enunciato poco fà, e si dimostra nello stesso modo.

Lemma II. Se, data una grandezza arbitraria σ, si può assegnare un intervallo tu per ciascun punto del quale la quantità

$$a_n \operatorname{sen} \varphi(n) x$$

oscilli al crescere indefinito di n tra due grandezze, nessuna delle quali è maggiore di σ, sarà $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, essendo $\varphi(n)$ una funzione positiva di n, la quale per n infinito va all'infinito insieme alla retta limite inferiore corrispondente al tratto $n\infty$.

Dalla serie $\varphi(1)$, $\varphi(2)$,... scelgo ad arbitrio un altra pure illimitata $\varphi(r_1)$, $\varphi(r_2)$,..., e da quest'ultima la terza $\varphi(r_{\rho_1})$, $\varphi(r_{\rho_2})$,..., in guisa che si abbia

$$\varphi(r_{\rho_2}) \geqq k\varphi(r_{\rho_1}), \qquad \varphi(r_{\rho_3}) \geqq k^2 \varphi(r_{\rho_2}), \ldots \qquad (k > 1).$$

Si determini ora una quantità Ω nel tratto i cui estremi hanno per ascisse $2\frac{0t}{\pi}$, $2\frac{0u}{\pi}$ per modo che l'espressione

$$\Omega \varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1) = \varepsilon$$

converga a zero con $\frac{1}{s}$, e quindi anche l'altra:

$$\Omega \frac{\pi}{2} \varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1)\frac{\pi}{2} = \mathfrak{Q}\varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1)\frac{\pi}{2} = \varepsilon \frac{\pi}{2},$$

essendo $\mathfrak{Q}$ una quantità che cade nell'intervallo tu. Per l'ipotesi fatta $c_n \operatorname{sen} \varphi(n)\mathfrak{Q}$ al crescere indefinito di n oscilla tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ; ciò si verifica quindi anche per l'altra:

$$c_{r_{\rho_s}} \operatorname{sen} \varphi(r_{\rho_s})\mathfrak{Q} = \pm c_{r_{\rho_s}} \cos \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

all'annullarsi di $\frac{1}{s}$. Adunque i termini della serie

$$c_{r_{\rho_1}}, \quad c_{r_{\rho_2}}, \quad c_{r_{\rho_3}}, \ldots, \quad c_{r_{\rho_s}}, \ldots,$$

a partire da valore opportuno di s non sono maggiori di σ, astrazion fatta dal segno. Il lemma è dunque dimostrato, quando si rammentino le ricerche fatte al principio di questo paragrafo, e si ponga mente che la quantità σ è di quella piccolezza che si vuole.

Gli è facil cosa il porre ora in sodo il teorema enunciato.

Infatti, detto m il punto di mezzo del segmento tu, si faccia

$$a_n \cos\varphi(n)m - b_n \operatorname{sen}\varphi(n)m = c_n,$$
$$a_n \operatorname{sen}\varphi(n)m + b_n \cos\varphi(n)m = d_n.$$

Dalle due ultime eguaglianze si deduce:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= c_n \cos\varphi(n)m + d_n \operatorname{sen}\varphi(n)m \\ b_n &= -c_n \operatorname{sen}\varphi(n)m + d_n \cos\varphi(n)m. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ora, la quantità d_n al crescere indefinito di n oscilla tra due grandezze nessuna delle quali è maggiore di σ, e ciò per dato. Anche la quantità c_n soddisfa alla stessa condizione, in quanto ciò ha luogo per le due grandezze

$$a_n \operatorname{sen}\varphi(n)(m+x) + b_n \cos\varphi(n)(m+x), \qquad a_n \operatorname{sen}\varphi(n)(m-x) + b_n \cos\varphi(n)(m-x),$$
$$0m < x < 0q, \qquad 0p < x < 0m,$$

e quindi anche per l'altra:

$$[a_n \cos\varphi(n)m - b_n \operatorname{sen}\varphi(n)m] \operatorname{sen}\varphi(n)x,$$

e, pel lemma II, altresì per la espressione:

$$a_n \cos\varphi(n)m - b_n \operatorname{sen}\varphi(n)m = d_n.$$

Per le relazioni (α) poi ne consegue che all'annullarsi di $\frac{1}{n}$ ciascuna delle quantità a_n e b_n oscilla tra due grandezze non maggiori in valore assoluto di 2σ; e poichè il numero σ è arbitrario, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad (n = \infty).$$

Il teorema ora dimostrato contiene come caso particolare il seguente dovuto a Riemann (*) e dimostrato dal sig. Cantor nella Memoria citata:

Se per tutti i punti di un intervallo comunque piccolo la quantità

$$a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$$

converge a zero con $\frac{1}{n}$, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad (n = \infty).$$

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, p. 21 e seg.[te], e quella di Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, pag. 25.

5.

Facciamo ora alcune ricerche di Calcolo integrale le quali sono necessarie per la risoluzione del problema che ci siamo proposti, e dimostriamo anzitutto il teorema:

Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ indicano due funzioni finite dei punti del segmento ab ed integrabili, il simbolo $\varphi(x)\psi(x)$, quando non si possa assegnare un intervallo di ab per ciascun punto del quale esso sia scevro da significato, rappresenterà una funzione integrabile.

Infatti, detta G_1, G_2,..., G_s,... una serie illimitata di gruppi di punti, $\delta_1^{(s)}$, $\delta_2^{(s)}$,... i tratti corrispondenti al gruppo G_s ed $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$,..., $B_1^{(s)}$, $B_2^{(s)}$,..., $a_1^{(s)}$ $a_2^{(s)}$,..., $b_1^{(s)}$ $b_2^{(s)}$,... i limiti superiori ed inferiori delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ nei medesimi rispettivamente, sarà:

$$\lim_{s=\infty} \sum_r \delta_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) = 0, \qquad \lim_{s=\infty} \sum_r \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}) = 0,$$

essendo per ipotesi le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ integrabili nel segmento ab.

Per dimostrare con tutta chiarezza il teorema or ora enunciato giova distinguere più casi, cioè:

1. le due funzioni φ e ψ sono amendue positive nel tratto $\delta_r^{(s)}$, i limiti inclusi;
2. amendue negative;
3. l'una negativa e l'altra positiva;
4. l'una positiva e l'altra positiva e negativa;
5. l'una negativa e l'altra positiva e negativa;
6. amendue positive e negative, sempre i limiti inclusi, e supposto che la prima ipotesi valga per la funzione φ la seconda per ψ.

Indicando con $P_r^{(s)}$ e $p_r^{(s)}$ il limite superiore ed inferiore rispettivamente del prodotto $\varphi(x)$ $\psi(x)$ nell'intervallo $\delta_r^{(s)}$, inclusi i limiti, si ha nel primo caso:

$$P_r^{(s)} \leqq A_r^{(s)} B_r^{(s)}, \qquad p_r^{(s)} \geqq a_r^{(s)} b_r^{(s)},$$

nel secondo:

$$P_r^{(s)} \leqq a_r^{(s)} b_r^{(s)}, \qquad p_r^{(s)} \geqq A_r^{(s)} B_r^{(s)},$$

nel terzo:

$$P_r^{(s)} \leqq A_r^{(s)} b_r^{(s)}, \qquad p_r^{(s)} \geqq a_r^{(s)} B_r^{(s)},$$

nel quarto:
$$P_r^{(s)} \leqq A_r^{(s)} B_r^{(s)}, \qquad p_r^{(s)} \geqq A_r^{(s)} b_r^{(s)},$$
nel quinto:
$$P_r^{(s)} \leqq a_r^{(s)} b_r^{(s)}, \qquad p_r^{(s)} \geqq a_r^{(s)} B_r^{(s)},$$
nell'ultimo infine $P_r^{(s)}$ non potrà superare la massima delle due grandezze $A_r^{(s)} B_r^{(s)}$, $a_r^{(s)} b_r^{(s)}$, e $p_r^{(s)}$ non sarà inferiore alla più piccola delle due $A_r^{(s)} b_r^{(s)}$, $a_r^{(s)} B_r^{(s)}$.

Rispetto ai casi contemplati si ha quindi ordinatamente:
$$\begin{aligned}
P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leqq A_r^{(s)} B_r^{(s)} - a_r^{(s)} b_r^{(s)} = A_r^{(s)}(B_r^{(s)} - b_r^{(s)}) + b_r^{(s)}(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}),\\
P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leqq a_r^{(s)} b_r^{(s)} - A_r^{(s)} B_r^{(s)} = A_r^{(s)}(b_r^{(s)} - B_r^{(s)}) + b_r^{(s)}(a_r^{(s)} - A_r^{(s)}),\\
\text{''} &\leqq A_r^{(s)} b_r^{(s)} - a_r^{(s)} B_r^{(s)} = A_r^{(s)}(b_r^{(s)} - B_r^{(s)}) + B_r^{(s)}(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}),\\
\text{''} &\leqq A_r^{(s)} B_r^{(s)} - A_r^{(s)} b_r^{(s)} = A_r^{(s)}(B_r^{(s)} - b_r^{(s)}),\\
\text{''} &\leqq a_r^{(s)} b_r^{(s)} - a_r^{(s)} B_r^{(s)} = a_r^{(s)}(b_r^{(s)} - B_r^{(s)}),\\
P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leqq A_r^{(s)}(B_r^{(s)} - b_r^{(s)}), \quad \leqq B_r^{(s)}(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}), \quad \leqq b_r^{(s)}(a_r^{(s)} - A_r^{(s)}),\\
&\qquad \leqq a_r^{(s)}(b_r^{(s)} - B_r^{(s)}),
\end{aligned}$$
gli ultimi quattro casi riferendosi all'ipotesi che amendue le funzioni φ e ψ siano e positive e negative nel tratto $\delta_r^{(s)}$.

Se indichiamo ora con M una quantità non minore del più grande dei limiti superiori dei valori numerici di φ e di ψ nell'intervallo ab, sarà in ogni caso, osservate le ultime diseguaglianze:
$$P_r^{(s)} - p_r^{(s)} \leqq M[(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) + (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})],$$
astrazion fatta dal segno, in quanto in ogni tratto determinato dal gruppo G_s dee aver luogo uno dei sei casi contemplati. Abbiamo quindi:
$$\sum_r \delta_r^{(s)}(P_r^{(s)} - p_r^{(s)}) \leqq M \sum_r \delta_r^{(s)}(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) + M \sum_r \delta_r^{(s)}(B_r^{(s)} - b_r^{(s)}),$$
e perciò:
$$\lim_{s=\infty} \sum_r \delta_r^{(s)}(P_r^{(s)} - p_r^{(s)}) = 0,$$
l'asserto è adunque vero.

Il sig. Paul du Bois-Reymond dimostra questo teorema a pag. 24 e seg.^{te} del t. 79° del Giornale di Borchardt in un modo più breve, è vero, ma però, a mio credere, non del tutto rigoroso.

Dimostriamo ora la proposizione:

Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni integrabili dei punti del segmento ab, ciascuna delle quali va all'infinito in un numero limitato di punti, gli infiniti dell'una essendo diversi da quelli dell'altra, sarà:

$$\int_a^b\left(\varphi(\alpha)\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_a^b\varphi(\alpha)d\alpha\int_a^b\psi(\alpha)d\alpha-\int_a^b\left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha. \qquad (K)$$

Supponiamo in prima che le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si mantengano finite; detti $A_r^{(s)}$, $a_r^{(s)}$, $B_r^{(s)}$, $b_r^{(s)}$ i limiti superiori ed inferiori delle funzioni φ e ψ nel tratto $\delta_r^{(s)}$ rispettivamente, si ha l'identità:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}(B_1^{(s)}\delta_1^{(s)})+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)}(B_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+B_2^{(s)}\delta_2^{(s)})+A_3^{(s)}\delta_3^{(s)}(B_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+\\
&\qquad B_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+B_3^{(s)}\delta_3^{(s)})+\cdots=\\
&(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+\cdots)(B_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+B_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+\cdots)-B_2^{(s)}\delta_2^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)})-\\
&B_3^{(s)}\delta_3^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)})-B_4^{(s)}\delta_4^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+A_3^{(s)}\delta_3^{(s)})-\cdots\\
&=(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+\cdots)(B_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+B_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+\cdots)-B_1^{(s)}\delta_1^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)})-\\
&B_2^{(s)}\delta_2^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)})-B_3^{(s)}\delta_3^{(s)}(A_1^{(s)}\delta_1^{(s)}+A_2^{(s)}\delta_2^{(s)}+A_3^{(s)}\delta_3^{(s)})-\\
&\qquad\cdots+B_1^{(s)}A_1^{(s)}\overline{\delta_1^{(s)2}}+B_2^{(s)}A_2^{(s)}\overline{\delta_2^{(s)2}}+\cdots.
\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Gli è facile il vedere come il primo membro di questa eguaglianza al crescere indefinito di s tenda al valore

$$\int_a^b\left(\varphi(\alpha)\int_a^x\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha.$$

Infatti, consideriamo i valori conseguiti dalla funzione φ nell'intervallo $\delta_r^{(s)}$, i limiti inclusi. Tra questi ci sarà anche la quantità $A_r^{(s)}$, oppure ciò non avrà luogo: in quest'ultimo caso si può assegnare un punto c dell'intervallo considerato, tale, che il limite superiore dei valori della espressione $\varphi(x)$ nel tratto $\overline{c+\eta}\ \overline{c+0}$ o $\overline{c-\eta}\ \overline{c-0}$, oppure in amendue, sia eguale ad $A_r^{(s)}$, per quanto piccolo sia il numero η. Il valore che la funzione continua $\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta$ consegue nel punto c è $\int_a^c\psi(\beta)d\beta$. Essendo poi $\delta_1^{(s)}$, $\delta_2^{(s)}$,... $\delta_p^{(s)}$ gli intervalli $\delta^{(s)}$ che hanno un numero illimitato di punti comuni col segmento ac, sarà la somma $\sum_1^p {}_r \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})$ a partire da valori opportuni di s arbitrariamente piccola, e quindi la espressione $\sum_1^p {}_r \delta_r^{(s)} B_r^{(s)}$ vicinissima all'integrale $\int_a^c \psi(x)dx$, quale si sia c. Ciò ha luogo perchè l'aggregato $\sum_r \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})$ esteso a tutti i segmenti $\delta^{(s)}$ ha i suoi termini positivi e converge a zero con $\frac{1}{s}$. Potremo dunque porre:

$$\sum_1^p {}_s B_r^{(s)} \delta_r^{(s)} = \int_a^c \psi(\beta) d\beta + \sigma_c,$$

essendo σ_c una funzione dei punti di ab, la quale è sempre arbitrariamente piccola per valori opportuni di s.

Il prodotto

$$\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta$$

è in virtù del teorema or ora dimostrato integrabile, e di più la funzione

$$\psi_1(\alpha) = \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta$$

è continua nell'intervallo ab, inclusi i limiti.

D'altra parte, l'integrale

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \psi_1(\alpha) d\alpha$$

può considerarsi come il limite della espressione

$$\sum_1 {}_r \delta_r^{(s)} D_r^{(s)} A_r^{(s)}$$

per s infinito, essendo $D_r^{(s)}$ il valore raggiunto dalla funzione $\psi_1(x)$ nel punto c del tratto $\delta_r^{(s)}$, nel quale la funzione $\varphi(x)$ raggiunge il valore $A_r^{(s)}$, oppure accostandosi al quale, da una parte almeno, il limite superiore della medesima nel segmento che rimane è $A_r^{(s)}$. Questa asserzione risulta manifesta quando si osservi che la quantità $D_r^{(s)} A_r^{(s)}$ non è maggiore del limite superiore della funzione $\varphi(x)\psi_1(x)$ nell'intervallo $\delta_r^{(s)}$, nè più piccola del limite inferiore.

Si ha adunque:

$$\sum_r \left(\delta_r^{(s)} A_r^{(s)} \sum_1^r {}_t \delta_t^{(s)} B_t^{(s)}\right) = \sum_r \left(\delta_r^{(s)} A_r^{(s)} D_r^{(s)}\right) + \sum_r \delta_r^{(s)} A_r^{(s)} \sigma_c,$$

e quindi:

$$\lim_{s=\infty} \sum_r \left(\delta_r^{(s)} A_r^{(s)} \sum_1^r {}_t \delta_t^{(s)} B_t^{(s)}\right) = \int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta\right) d\alpha.$$

Così pure si ha manifestamente

$$\lim_{s=\infty} \left\{\sum_r \delta_r^{(s)} A_r^{(s)}\right\}\left\{\sum_r \delta_r^{(s)} B_r^{(s)}\right\} = \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^b \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$\lim_{s=\infty} \sum_r \left(\delta_r^{(s)} B_r^{(s)} \sum_1^r {}_t \delta_t^{(s)} A_t^{(s)}\right) = \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta\right) d\alpha,$$

il teorema è quindi dimostrato in virtù della eguaglianza (α), se si pone mente che si ha

$$\lim_{s=\infty} \sum_r A_r^{(s)} B_r^{(s)} \overline{\delta_r^{(s)2}} = 0,$$

quando le funzioni date siano sempre finite.

Poniamo ora che la $\psi(x)$ vada all'infinito nel punto di ascissa m restando integrabile, in guisa cioè che la espressione

$$\left(\int^{m-\varepsilon} + \int_{m+\varepsilon_1}\right) \psi(\alpha) d\alpha$$

converga ad un limite mentre ε ed ε_1 si annullano in modo arbitrario, $\varphi(x)$ poi resti finita per $x = m$.

Si ha in tale ipotesi:

$$\int_a^{m-\varepsilon} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta\right) d\alpha = \int_a^{m-\varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha - \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta\right) d\alpha, \quad (1)$$

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^\alpha \psi(\beta) d\beta\right) d\alpha = \int_{m+\varepsilon_1}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+\varepsilon_1}^b \psi(\alpha) d\alpha - \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^\alpha \varphi(\beta) d\beta\right) d\alpha. \quad (2)$$

Queste relazioni esistono anche se si fa ε ed ε_1 eguali a $+0$, poichè esse sono vere comunque siano piccole queste quantità, e di più abbiamo

$$\lim_{\varepsilon=+0} \int_a^{m-\varepsilon} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta\right) d\alpha = \int_a^{m-0} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta\right) d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon=+0} \int_a^{m-\varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha = \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon_1=+0}\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\varphi(\alpha)\int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_{m+0}^{b}\left(\varphi(\alpha)\int_{m+0}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\varphi(\alpha)d\alpha\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\psi(\alpha)d\alpha=\int_{m+0}^{b}\varphi(\alpha)d\alpha\int_{m+0}^{b}\psi(\alpha)d\alpha.$$

Di queste quattro eguaglianze la penultima abbisogna forse di alcune parole di schiarimento; eccole: se si pone

$$\int_{m+0}^{m+\varepsilon_1}\psi(\beta)d\beta=d,$$

essendo d una quantità che si annulla con ε_1, ne consegue:

$$\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\varphi(\alpha)\int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_{m+0}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta-d\right)\right]d\alpha=$$
$$\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\varphi(\alpha)\int_{m+0}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha-d\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\varphi(\alpha)d\alpha.$$

Facendo ora convergere ε_1 allo zero si otterrà la relazione in discorso.

Per maggior chiarezza diamo anche il significato della quantità

$$\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\psi(\alpha)\int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha$$

che forma il secondo termine del secondo membro della relazione (2). Posto

$$\int_{m+0}^{m+\varepsilon_1}\varphi(\beta)d\beta=c_1,$$

sarà:

$$\lim_{\varepsilon_1=0}c_1=0,$$

e quindi:

$$\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\psi(\alpha)\int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left[\psi(\alpha)\left(\int_{m+0}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta-c_1\right)\right]d\alpha=$$
$$\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\psi(\alpha)\int_{m+0}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha-c_1\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\psi(\alpha)d\alpha,$$

per cui:

$$\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\psi(\alpha)\int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^{b}\left(\psi(\alpha)\int_{m+0}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha.$$

Il significato poi del secondo termine del secondo membro della relazione (1) per $\varepsilon = +0$ è così palese che non abbisogna di schiarimento.

D'altra parte, si ha

$$\int_a^b\left(\varphi(\alpha)\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_a^{m-0}\left(\varphi(\alpha)\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha+\int_{m+0}^b\left(\varphi(\alpha)\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha$$

$$=\int_a^{m-0}\left(\varphi(\alpha)\int_a^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha+\int_{m+0}^b\left(\varphi(\alpha)\int_a^{m-0}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha+\int_{m+0}^b\left(\varphi(\alpha)\int_{m+0}^\alpha\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha,$$

$$\int_a^b\varphi(\alpha)d\alpha\int_a^b\psi(\alpha)d\alpha=\int_a^{m-0}\varphi(\alpha)d\alpha\int_a^{m-0}\psi(\alpha)d\alpha+\int_a^{m-0}\varphi(\alpha)d\alpha\int_{m+0}^b\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$\int_{m+0}^b\varphi(\alpha)d\alpha\int_a^{m-0}\psi(\alpha)d\alpha+\int_{m+0}^b\varphi(\alpha)d\alpha\int_{m+0}^b\psi(\alpha)d\alpha,$$

$$\int_a^b\left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_a^{m-0}\left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha+\int_{m+0}^b\left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha$$

$$=\lim_{\varepsilon=+0}\int_a^{m-\varepsilon}\left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha+\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^b\left(\psi(\alpha)\int_a^{m-0}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha+$$

$$\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{m+\varepsilon_1}^b\left(\psi(\alpha)\int_{m+0}^\alpha\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha.$$

Osservate attentamente queste ultime tre relazioni, sommando le eguaglianze che si ricavano facendo $\varepsilon = +0$ ed $\varepsilon_1 = +0$ nelle relazioni (1) e (2), ed aggiungendo ad ambo i membri della somma ottenuta la quantità

$$\int_{m+0}^b\varphi(\alpha)d\alpha\int_a^{m-0}\psi(\alpha)d\alpha,$$

ed al secondo la differenza

$$\int_{m+0}^b\psi(\alpha)d\alpha\int_a^{m-0}\varphi(\alpha)d\alpha-\int_{m+0}^b\psi(\alpha)d\alpha\int_a^{m-0}\varphi(\alpha)d\alpha,$$

ne consegue la verità della formola (K) anche se la funzione $\psi(x)$ va all'infinito in un punto dell'intervallo ab, restando però integrabile.

È poi manifesto come le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ possano andare all'infinito in un numero limitato di punti restando integrabili, senza che il teorema cessi di aver luogo, supposto però che gli infiniti delle medesime non cadano negli stessi punti.

Essendo ora $\psi(x)$ e $\theta(x)$ due funzioni integrabili nel tratto $a\,\overline{m-0}$, le quali vanno all'infinito soltanto nel punto $\overline{m-0}$, posto

$$\psi_1(x)=\int_a^x \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

sarà:

$$\int_a^{m-\varepsilon} \theta(x)\psi_1(x)\,dx=\left[\psi_1(x)\int_a^x \theta(\alpha)\,d\alpha\right]_a^{m-\varepsilon}-\int_a^{m-\varepsilon}\left(\psi(x)\int_a^x \theta(\alpha)\,d\alpha\right)dx.$$

Infatti, pel teorema or ora dimostrato si ottiene:

$$\int_a^{m-\varepsilon}\left(\theta(x)\int_a^x \psi(\alpha)\,d\alpha\right)dx=\int_a^{m-\varepsilon}\theta(\alpha)\,d\alpha\int_a^{m-\varepsilon}\psi(\alpha)\,d\alpha-\int_a^{m-\varepsilon}\left(\psi(x)\int_a^x \theta(\alpha)\,d\alpha\right)dx,$$

e d'altra parte si ha

$$\int_a^{m-\varepsilon}\theta(\alpha)\,d\alpha\int_a^{m-\varepsilon}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\left[\psi_1(x)\int_a^x \theta(\alpha)\,d\alpha\right]_a^{m-\varepsilon}.$$

Quindi il teorema:

S e $\theta(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni integrabili nel tratto $a\,\overline{m-0}$, che vanno all'infinito soltanto per $x=m-0$, i due integrali

$$\int_a^{m-\varepsilon}\left(\theta(x)\int_a^x \psi(\alpha)\,d\alpha\right)dx,\qquad \int_a^{m-\varepsilon}\left(\psi(x)\int_a^x \theta(\alpha)\,d\alpha\right)dx$$

convergeranno o divergeranno insieme all'annullarsi di ε (*).

Aggiungo a questo teorema alcune osservazioni.

La funzione $\psi_1(x)$ gode adunque della proprietà indicata dalla eguaglianza

$$\int_a^x \psi(x)\,dx=\psi_1(x),$$

$\psi(x)$ crescendo al di là di ogni limite tutto al più in un numero limitato di punti. È poi manifesto che, se esiste una funzione $\psi(x)$ ovunque integrabile la quale abbia questa proprietà, se ne potranno assegnare tante quante si vuole,

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 41-43.

bastando aggiungere a $\psi(x)$ un'altra funzione $f_1(x)$, tale, che sia

$$\int_c^d f_1(x)\,dx = 0, \qquad a \leqq c < d \leqq b.$$

Giova osservare come il simbolo $\int_a^m \psi(x)\,dx$ possa avere significato anche se il numero dei punti nei quali la $\psi(x)$ va all'infinito non è assegnabile nel tratto am, quando esso si interpreti convenientemente. Valga ad esempio la funzione

$$\theta(x) = \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\mu} - \frac{\mu \cos\frac{1}{x}}{x\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{1-\mu}} \qquad (0<\mu<1),$$

che va all'infinito in un numero illimitato di punti formanti un gruppo del primo ordine nel tratto 0 1, e per la quale la quantità $\int_0^1 \theta(x)\,dx$ è eguale a $(\operatorname{sen} 1)^{\mu}$, essendo

$$\int_0^1 \theta(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=+0} \int_\varepsilon^1 \theta(x)\,dx,$$

e

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\mu}\right] = \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\mu} - \frac{\mu\cos\frac{1}{x}}{x\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{1-\mu}}.$$

6.

Del teorema espresso dalla formola (K) può darsi anche la seguente dimostrazione.

Sia $\varphi(x)$ una funzione finita ed integrabile dei punti del segmento $ab\,(a<b)$, e $\psi(x)$ una funzione ovunque continua in esso tratto, oppure discontinua soltanto in un numero limitato di punti, per modo che, detto c uno dei medesimi, i simboli $\psi(c+0)$ e $\psi(c-0)$ abbiano significato. Si divida l'intervallo ab nelle parti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, e si indichi con $\varphi_1(x)$ una funzione costante in ciascuna delle medesime ed eguale nel tratto Δ_s al limite inferiore dei valori in esso assunti dalla $\varphi(x)$, inclusi i limiti; sarà in tale ipotesi per un noto teorema:

$$\int_a^b \left(\varphi_1(\alpha)\int_a^\alpha \psi(\beta)\,d\beta\right)d\alpha - \int_a^b \varphi_1(\alpha)\,d\alpha \int_a^b \psi(\alpha)\,d\alpha + \int_a^b \left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha \varphi_1(\beta)\,d\beta\right)d\alpha = 0. \quad (1)$$

Si suppone per semplicità che la funzione $\varphi_1(x)$ non esista nei punti che limitano i segmenti $\Delta_1, \Delta_2, \dots$.

Indichiamo ora con $\varphi_2(x)$ una funzione scevra da significato nei punti estremi dei tratti $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ e del resto eguale a

$$\varphi(x) - \varphi_1(x).$$

In allora è facile vedere che si avrà, qualunque sia c,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^c \varphi_2(x)dx = 0, \qquad a < c \leqq b,$$

poichè

$$\int_a^c \varphi_2(x)dx \leqq \sum_1^m {}_r \Delta_r O_r, \qquad \int_a^c \varphi_2(x)dx \geqq 0, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_1^m {}_r \Delta_r O_r = 0,$$

O_r essendo la oscillazione massima della $\varphi(x)$ nel tratto Δ_r, e Δ_m indicando quell'intervallo che contiene nel suo interno il punto c, oppure che lo ha per estremo destro.

Ciò posto, è manifesto che la espressione

$$\int_a^b \left(\varphi_2(\alpha)\int_a^\alpha \psi(\beta)d\beta\right)d\alpha - \int_a^b \varphi_2(\alpha)d\alpha \int_a^b \psi(\alpha)d\alpha + \int_a^b \left(\psi(\alpha)\int_a^\alpha \varphi_2(\beta)d\beta\right)d\alpha = \varepsilon_n$$

converge a zero al crescere indefinito di n, basta por mente che si può fare

$$\int_a^b \left(\varphi_2(\alpha)\int_a^\alpha \psi(\beta)d\beta\right)d\alpha < M\int_a^b \varphi_2(\alpha)d\alpha, \qquad \varphi_2(\alpha) \geqq 0,$$

astrazion fatta dal segno, M essendo una quantità positiva. Addizionando ora le due ultime eguaglianze e mandando quindi n all'infinito ne consegue la verità del teorema, quale si sia la funzione $\varphi(x)$, purchè nell'intervallo ab finita ed integrabile. Con metodo del tutto analogo si farebbe ora vedere come il teorema esiste anche se la $\psi(x)$ è soltanto finita ed integrabile nel segmento ab.

Questa dimostrazione è tolta in parte dal paragrafo 12 della Memoria già citata sulle serie trigonometriche del sig. Paul du Bois-Reymond. Il suddetto però enuncia il teorema in discorso nel modo seguente (V. p. 13):

Es sei $\varphi(x)$ stetig und der Differentialquotient $\varphi'(x)$ sei integrirbar, ferner sei $f(x)$ integrirbar, so soll gezeigt werden, dass:

$$\int_a^b \varphi(\alpha)f(\alpha)d\alpha = \varphi(b)\int_a^b f(\alpha)d\alpha - \int_a^b d\alpha\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\beta f(\beta).$$

Ora, l'idea di introdurre nell'enunciato del teorema il concetto di derivata, è, a quanto parmi, superflua e rende la dimostrazione più complessa. Questa asserzione è subito giustificata, quando si ponga mente come il sig. Paul du Bois-Reymond dimostri la eguaglianza

$$\varphi(\alpha)=\varphi(a)+\int_a^\alpha \varphi'(\beta)\,d\beta$$

per porre in sodo il teorema. La dimostrazione poi di quest'ultima relazione, data nell'appendice della Memoria citata, comunque in complesso soddisfacente, non mi pare condotta con quella accuratezza che è indispensabile in tali ricerche.

In ciò che segue dimostro due teoremi, il primo dei quali soltanto riesce necessario alla risoluzione del problema che ci siamo proposti in questa Memoria.

Se $\rho(x)$ è una funzione continua nell'intervallo ab, compresi i limiti, e se in ogni punto interno al medesimo la quantità

$$\frac{\rho(x+\varepsilon)-2\rho(x)+\rho(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla all'annullarsi di ε tra due grandezze A_x e B_x ($A_x \geqq B_x$), che si mantengono finite e soddisfanno alla condizione

$$\int_a^y A_x dx=\int_a^y B_x dx=0, \qquad a<y\leqq b,$$

si avrà:

$$\rho(x)=Cx+C',$$

C e C' essendo due costanti.

Se $\rho_1(x)$ è una funzione continua di x nell'intervallo ab (*), e se per ogni valor particolare di x ($a<x<b$) le espressioni

$$\frac{\rho_1(x+\varepsilon)-\rho_1(x)}{\varepsilon}, \qquad \frac{\rho_1(x-\varepsilon)-\rho_1(x)}{-\varepsilon}$$

oscillano per $\varepsilon=+0$ rispettivamente tra le quantità finite M_x, N_x ($M_x \geqq N_x$), ed M'_x, N'_x ($M'_x \geqq N'_x$), essendo

$$\int_a^y M_x dx=\int_a^y N_x dx=\int_a^y M'_x dx=\int_a^y N' dx=0, \qquad a<y\leqq b,$$

(*) Circa ai limiti non si fa alcuna ipotesi.

sarà:

$$\rho_1(x) = C,$$

C indicando una costante.

Dimostriamo anzitutto la prima di queste due proposizioni.

Sia G_1, G_2, $G_3, \ldots$, $G_s, \ldots$ una serie illimitata di gruppi nel tratto ab, scelta in guisa che i punti di un gruppo appartengano al successivo e che si abbia $\delta_s^{(1)} = \delta_s^{(2)} = \cdots$, quale si sia s. Ciò posto, si assegni un valore s_1 per modo che sia piccola quanto si vuole la somma degli spazi appartenenti al gruppo $G_{s_1+t}(t \geqq 0)$, nei quali, inclusi i limiti, cadono punti in cui la differenza $A_x - B_x$ non è minore della quantità arbitraria σ: la qual cosa è al certo possibile per le ricerche del paragrafo 2. Supponiamo altresì s_1 tale, che sia arbitrariamente piccolo l'aggregato dei tratti spettanti al gruppo $G_{s_1+t}(t \geqq 0)$ e contenenti nell'interno o sul contorno punti nei quali la funzione A_x raggiunge, astrazion fatta dal segno, valori maggiori di σ. Nelle fatte ipotesi sarà ciascuna delle quantità

$$\sum_1 {}_r A^{(r)}_{s_1+t} \delta^{(r)}_{s_1+t}, \qquad \sum_1 {}_r B^{(r)}_{s_1+t} \delta^{(r)}_{s_1+t},$$

piccola oltre ogni dire, $A^{(r)}_{s_1+t}$ e $B^{(r)}_{s_1+t}$ essendo i limiti superiori delle funzioni A_x e B_x nell'intervallo $\delta^{(r)}_{s_1+t}$ rispettivamente, e le somme estendendosi ai tratti che sono entro ab. Detta poi $a_1 b_1$ $(a_1 < b_1)$ una parte di ab, si inserisca nella medesima a partire da a_1 l'intervallo $\delta_{s_1+t}(t \geqq 0)$ tante volte quante è possibile. Ora, è chiaro che quando s_1 abbia valore opportuno, anche la somma degli spazi δ_{s_1+t} appartenenti ad $a_1 b_1$, i quali hanno le proprietà or ora indicate, sarà arbitrariamente piccola.

Indicato con α un segmento qualsivoglia minore di ab, si ponga

$$\alpha = m\delta_{s_1+t} + \eta,$$

essendo η una quantità maggiore di zero ma non di δ_{s_1+t} ed m un numero intero e positivo, e si consideri la funzione

$$G(x_1) = \sum_0^{m-1} {}_p \delta_{s_1+t} \rho(x_1 + p\,\delta_{s_1+t}) = \delta_{s_1+t} \sum_0^{m-1} {}_p \rho(x_1 + p\,\delta_{s_1+t}), \qquad a \leqq x_1 \leqq \overline{b - \alpha}.$$

Questa somma, quando s_1 sia scelto in modo conveniente, è vicina quanto si vuole al valore dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_1+\alpha} \rho(x)\,dx,$$

quale si sia il punto x_1 nel tratto $a\,\overline{b-\alpha}$, in quanto una funzione continua in un certo intervallo, compresi i limiti, è in esso uniformemente tale.

D'altra parte, per valori sufficientemente piccoli di ε la quantità

$$\frac{\Delta^2 \rho(x_1+p\,\delta_{s_1+t})}{\varepsilon^2} = \frac{\rho(x_1+p\,\delta_{s_1+t}+\varepsilon)-2\rho(x_1+p\,\delta_{s_1+t})+\rho(x_1+p\,\delta_{s_1+t}-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

oscilla per ogni valor particolare x_1 $(a<x_1<\overline{b-\alpha})$, quale si sia p $(0 \leq p \leq m-1)$, tra le grandezze $\overline{A_{x_1+p\delta_{s_1+t}}+\varepsilon_1}$, $\overline{B_{x_1+p\delta_{s_1+t}}-\varepsilon_1}$, ε_1 essendo di quella piccolezza che si vuole. Adunque la somma

$$\sum_0^{m-1} {}_p\,\delta_{s_1+t}\frac{\Delta^2\rho(x_1+p\,\delta_{s_1+t})}{\varepsilon^2}$$

è arbitrariamente vicina allo zero a partire da valori opportuni di ε, per ogni valor particolare x_1 interno al segmento $a\,\overline{b-\alpha}$. La funzione

$$G(x) = \sum_0^{m-1} {}_p\,\delta_{s_1+t}\,\rho(x+p\,\delta_{s_1+t})$$

poi è manifestamente continua nell'intervallo ac $(c=\overline{b-\alpha})$, i limiti inclusi.

Consideriamo ora col sig. Paul du Bois-Reymond le due funzioni (*)

$$H(x) = G(x)-G(a)-\frac{x-a}{c-a}[G(c)-G(a)], \tag{1}$$

$$K(x) = \gamma H(x)-\frac{r^2}{2}(x-a)(c-x), \tag{2}$$

essendo $\gamma=\pm 1$, r una quantità reale arbitraria, e c eguale a $\overline{b-\alpha}$.

Si ha manifestamente

$$\Delta^2 K(x) = \varepsilon^2 r^2\left(1+\frac{\gamma}{r^2}\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2}\right),$$

e le funzioni $H(x)$ e $K(x)$ soddisfanno alle seguenti condizioni:

1. $H(a)=H(c)=K(a)=K(c)=0$,

2. $K(x)$ è continua nel tratto ac $(a \leq x \leq c)$, tanto se γ è eguale $+1$, quanto se è eguale a -1,

3. $\Delta^2 K(x)$ è positiva per ogni valore particolare x_1 $(a<x_1<c)$.

(*) V. pag. 30 della Memoria più volte citata.

L'ultima condizione è soddisfatta a partire da valore opportuno s_1 di s e quando ε non ecceda un limite conveniente, poichè, per quanto piccolo sia r, si potrà assegnare per s_1 ed ε valori tali che la quantità

$$\left(\frac{\gamma}{r^2}\frac{\Delta^2 G(x_1)}{\varepsilon^2}\right)^2$$

sia minore di uno, e che si abbia quindi:

$$1+\frac{\gamma}{r^2}\frac{\Delta^2 G(x_1)}{\varepsilon^2}>0.$$

Da quanto precede si deduce di leggieri che la funzione $K(x)$ non può assumere valori positivi. Imperocchè, se la funzione $K(x)$ fosse positiva in un qualche punto dell'intervallo ac, sarebbe altresì positivo il limite superiore dei suoi valori, il quale verrebbe raggiunto in un punto x_1 $(a<x_1<c)$, essendo la funzione studiata continua nel tratto ac, i limiti compresi. Si avrebbe perciò:

$$K(x_1+\varepsilon)-K(x_1)\leqq 0,$$
$$K(x_1-\varepsilon)-K(x_1)\leqq 0,$$

quindi:

$$\Delta^2 K(x_1)=K(x_1+\varepsilon)-2K(x_1)+K(x_1-\varepsilon)\leqq 0,$$

quale si sia ε, purchè non maggiore della piu piccola tra le due grandezze $c-x_1$, x_1-a. Ma l'ultima diseguaglianza è impossibile per le cose dette poco fa, e si ha perciò:

$$K(x)=\pm H(x)-\frac{r^2}{2}(x-a)(c-x)\leqq 0,$$

qualunque sia il segno attribuito alla funzione $H(x)$. Abbiamo quindi:

$$\text{mod.}\,H(x)-\frac{r^2}{2}(x-a)(c-x)\leqq 0,$$

ossia l'eccesso di $\text{mod.}\,H(x)$ sullo zero può rendersi arbitrariamente piccolo impicciolendo di più in più r.

Facciamo ora decrescere indefinitamente r ed ε in guisa che sia sempre

$$1+\frac{\pm 1}{r^2}\frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2}>0.$$

In tale ipotesi $G(x_1)$ si avvicinerà senza confine al valore

$$\int_{x_1}^{x_1+\alpha}\rho(x)\,dx,$$

quale si sia x_1 nell'intervallo $a\ \overline{b-\alpha}$, e sarà in virtù della relazione (1):

$$\int_{x_1}^{x_1+\alpha} \rho(x)dx = C' + C'_1 x_1,$$

C' e C'_1 essendo costanti. Dall'ultima eguaglianza si deduce:

$$\alpha\rho(x_1+\theta\alpha) = C_1 + C'_1 x_1, \qquad 0<\theta<1,$$

quindi:

$$\rho(x_1+\theta\alpha) = \frac{C_1}{\alpha} + C'_1\frac{x_1}{\alpha},$$

ed indicando con x'_1 ed x'_2 due valori particolari tra a e $\overline{b-\alpha}$:

$$\rho(x'_1+\theta_1\alpha) - \rho(x'_2+\theta_2\alpha) = \frac{C'_1}{\alpha}(x'_1 - x'_2)$$

$$0<\theta_1<1, \qquad 0<\theta_2<1.$$

Supposto ora che α vada diminuendo senza limite, il primo membro si accosterà di più in più alla grandezza $\rho(x'_1)-\rho(x'_2)$, e perciò si avrà:

$$\lim_{\alpha=+0}\frac{C'_1}{\alpha} = \frac{\rho(x'_1)-\rho(x'_2)}{x'_1 - x'_2} = C,$$

ed anche il quoziente $\frac{C_1}{\alpha}$ tenderà ad un valore C'. Si ha quindi:

$$\rho(x) = Cx + C',$$

ed il primo teorema è dimostrato.

Dalla proposizione ora studiata consegue che:

Se una funzione $\rho(x)$ è continua nell'intervallo ab, i limiti inclusi, e se l'espressione

$$\frac{\rho(x+\varepsilon) - 2\rho(x) + \rho(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla per ogni valore particolare di x intorno ad ab per $\varepsilon=+0$ tra le due quantità ovunque finite A_x e B_x, tali, che si abbia

$$\int_c^d A_x dx = \int_c^d B_x dx = 0, \qquad a\leqq c<d\leqq b,$$

sarà, inclusi i limiti:

$$A_x = B_x = 0.$$

Il secondo teorema detto a principio di questo paragrafo può dedursi facilmente da quello già dimostrato; ciò risulta da quanto segue.

Consideriamo la funzione

$$L(x)=\int_x^{x+\alpha}\rho_1(\beta)\,d\beta,$$

x essendo un valore compreso tra a e $\overline{b-\alpha}$, la quale è continua per ogni punto interno all'intervallo $a\ \overline{b-\alpha}$. Infatti, si ha

$$L(x\pm\varepsilon)-L(x)=\int_{x\pm\varepsilon}^{x+\alpha\pm\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta-\int_x^{x+\alpha}\rho_1(\beta)\,d\beta=$$

$$-\int_x^{x\pm\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta+\int_{x+\alpha}^{x+\alpha\pm\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta,$$

per ogni valore di x tra a e $\overline{b-\alpha}$.

Ora,

$$\frac{L(x+\varepsilon)-2L(x)+L(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\int_{x+\varepsilon}^{x+\alpha+\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta-2\int_x^{x+\alpha}\rho_1(\beta)\,d\beta+\int_{x-\varepsilon}^{x+\alpha-\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta\right]=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x+\alpha}^{x+\alpha+\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x+\alpha}^{x+\alpha-\varepsilon}\rho_1(\beta)\,d\beta+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x+\varepsilon}^{x}\rho_1(\beta)\,d\beta+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x-\varepsilon}^{x}\rho_1(\beta)\,d\beta=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}[\rho_1(x+\alpha+\beta)-\rho_1(x+\alpha-\beta)+\rho_1(x-\beta)-\rho_1(x+\beta)]\,d\beta=$$

$$[\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon)+\rho_1(x-\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\theta\varepsilon)]\frac{1}{\varepsilon}=$$

$$\frac{\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\alpha)}{\varepsilon}-\frac{\rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\alpha)}{\varepsilon}$$

$$+\frac{\rho_1(x-\theta\varepsilon)-\rho_1(x)}{\varepsilon}-\frac{\rho_1(x+\theta\varepsilon)-\rho_1(x)}{\varepsilon}=$$

$$\frac{\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\alpha)}{\theta\varepsilon}\theta+\frac{\rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon)-\rho_1(x+\alpha)}{-\theta\varepsilon}\theta$$

$$-\frac{\rho_1(x-\theta\varepsilon)-\rho_1(x)}{-\theta\varepsilon}\theta-\frac{\rho_1(x+\theta\varepsilon)-\rho_1(x)}{\theta\varepsilon}\theta.$$

Adunque, poichè θ è sempre compreso tra 0 ed 1, la espressione

$$\frac{\Delta^2 L(x)}{\varepsilon^2}$$

oscilla al decrescere indefinito di ε per ogni valor particolare x interno al segmento $a\,\overline{b-\alpha}$ tra due quantità S_x e T_x ($S_x \geqq T_x$) tali, che si ha

$$\int_c^d S_x dx = \int_c^d T_x dx = 0, \qquad a \leqq c < d \leqq \overline{b-\alpha}.$$

Ciò ha luogo perchè, fatta astrazione dei punti appartenenti ad una somma di spazi che può rendersi piccola ad arbitrio, i valori conseguiti dalle funzioni M_x, N_x, M'_x ed N'_x nel tratto $a\,\overline{b-\alpha}$ sono di quella piccolezza che si vuole, e questa condizione si verifica manifestamente anche per le quantità S_x e T_x. Detta quindi η una quantità positiva piccolissima, sarà nel tratto $\overline{a+\eta}\;\overline{b-\alpha-\eta}$ pel primo teorema:

$$L(x) = Cx + C_1,$$

e poichè le due funzioni $L(x)$, $Cx + C_1$ sono continue nell'intervallo $a\,\overline{b-\alpha}$, la eguaglianza precedente sarà vera anche per $\eta = +0$. Ma

$$\int_x^{x+\alpha} \rho_1(\beta)\, d\beta = Cx + C_1,$$

quindi:

$$\alpha \rho_1[x + \theta\alpha] = Cx + C_1, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$\rho_1(x + \theta\alpha) = \frac{C}{\alpha} x + \frac{C_1}{\alpha},$$

e mandando α a zero:

$$\rho_1(x) = C'x + C'_1.$$

D'altra parte, rammentando come per ipotesi si comporti la quantità

$$\frac{\rho_1(x \pm \varepsilon) - \rho_1(x)}{\pm \varepsilon}$$

all'annullarsi di ε, sarà: $C' = 0$, ed il teorema è dimostrato.

Come corollario si ha:

Se una funzione $\rho_1(x)$ è continua in un intervallo ab (*), e se per

(*) Non si fa veruna ipotesi circa ai limiti.

tutti i punti interni al segmento ab le espressioni

$$\frac{\rho_1(x\pm\varepsilon)-\rho_1(x)}{\pm\varepsilon}$$

oscillano rispettivamente tra le quantità ovunque finite

$$M_x,\ N_x\ (M_x \geqq N_x), \qquad M'_x,\ N'_x\ (M'_x \geqq N'_x),$$

essendo

$$\int_c^d M_x dx = \int_c^d N_x dx = \int_c^d M'_x dx = \int_c^d N'_x dx = 0, \qquad a \leqq c < d \leqq b,$$

sarà:

$$M_x = N_x = M'_x = N'_x = 0.$$

A quest'ultimo teorema aggiungiamo la conseguenza:

Se $F(x)$ è tale una funzione continua per tutti i punti del tratto ab (*), che le espressioni

$$\frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon}, \qquad \frac{F(x-\varepsilon)-F(x)}{-\varepsilon}$$

oscillino per ciascun punto compreso nel tratto ab rispettivamente tra le quantità ovunque finite A_x e B_x $(A_x \geqq B_x)$, A'_x e B'_x $(A'_x \geqq B'_x)$, che soddisfanno alle relazioni

$$\int_c^d (A_x - B_x) dx = \int_c^d (A'_x - B'_x) dx = 0,$$

$$\int_c^d A_x dx = \int_c^d A'_x dx, \qquad a \leqq c < d \leqq b,$$

sarà:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x A_x dx = \int_a^x B_x dx = \int_a^x A'_x dx = \int_a^x B'_x dx.$$

Infatti, la funzione

$$\psi(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x A_x dx,$$

$$= F(x) - F(a) - \int_a^x A'_x dx,$$

(*) Non si fa alcuna ipotesi circa ai limiti.

$$= F(x) - F(a) - \int_a^x B_x dx,$$

$$= F(x) - F(a) - \int_a^x B'_x dx$$

si annulla per $x = a$, e la espressione

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}$$

oscilla tra due grandezze ovunque finite, integrabili ed aventi il loro integrale nullo tanto per $\varepsilon = +0$, quanto per $\varepsilon = -0$.

Infatti, detto N_{x+0} il minimo limite inferiore della funzione A_x nel tratto $x\ \overline{x+\varepsilon}$, ed O_{x+0} la oscillazione laterale destra della medesima nel punto x, in cui si tien calcolo del valore A_x, sarà:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} A_x dx = N_{x+0} + \theta O_{x+0} + \varepsilon_1, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

essendo ε_1 di quella piccolezza che si vuole a partire da valore opportuno di ε. Supposto poi l'indice del gruppo abbastanza grande, sarà piccola oltre ogni dire la somma degli spazi nei quali, incluso il contorno, cadono punti x tali, che la quantità O_{x+0} non sia minore della grandezza arbitraria σ. In ciascuno dei punti appartenenti agli altri tratti, la somma dei quali è vicinissima ad ab, la quantità $N_{x+0} + \theta O_{x+0} + \varepsilon_1$ oscilla al decrescere indefinito di ε tra valori che non eccedono i limiti arbitrariamente vicini $A_x + \sigma$, $A_x - \sigma$. Se si pone poi mente che a partire da valori opportuni dell'indice del gruppo anche la somma degli spazi nei quali la differenza $A_x - B_x$, inclusi i limiti, non è inferiore a σ è piccola quanto si vuole, ne consegue che l'espressione

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}$$

per ciascun valore particolare di x $(a < x < b)$ oscilla tra due quantità P_x, Q_x, che si mantengono sempre finite e soddisfanno alla relazione

$$\int P_x = \int Q_x = 0.$$

La quantità

$$\frac{\psi(x-\varepsilon) - \psi(x)}{-\varepsilon},$$

si comporta nello stesso modo: l'asserzione è quindi dimostrata.

Il sig. Paul du Bois-Reymond enuncia come segue la proposizione ora dimostrata (*):

Ist $F(x)$ eine Function die differenzirt die Function $f(x)$ liefert, und ist $F(x)$ im Intervall $A \leqq x \leqq B$ stetig, so ist:

$$\lim_{n=\infty}[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(x-x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

wo $A < a < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x < B$ im nämlichen Intervall von x genau gleich $F(x)-F(a)$.

Osservando come il limite di $\frac{F(x\pm\varepsilon)-F(x)}{\pm\varepsilon}$ possa essere indeterminato, sembra più conveniente di questo il mio enunciato. L'autore tedesco dimostra questa proposizione in modo diverso dal mio.

Lo stesso poi opina che, se una funzione $f(x)$ è integrabile, debba esistere in ogni intervallo, per quanto sia piccolo, un punto pel quale si ha

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) \quad (**).$$

Questa asserzione non mi sembra esatta, imperocchè la condizione (***) di integrabilità di una funzione $f(x)$ finita in un intervallo ab è, che converga a zero con $\frac{1}{s}$ la somma degli spazi, i quali contengono nel loro interno punti la oscillazione dei quali non è inferiore alla quantità arbitraria σ, s essendo l'indice del gruppo. Ora, questo fatto non porta di necessaria conseguenza che vi debba essere in ogni tratticello di ab un punto, e quindi infiniti, nel quale la funzione $f(x)$ ha un oscillazione nulla. Certamente, in un intervallo qualsivoglia di ab il limite inferiore di ciascuna delle tre funzioni O_{x+0}, O_{x-0}, O_x sarà eguale a zero, ed è questo soltanto ciò che, a mio credere, si può asserire con sicurezza: nulla però autorizza di ammettere che questo limite venga raggiunto. Ed è appunto per questa considerazione che nell'enunciato dell'ultimo teorema del paragrafo precedente dico che la $\psi_1(x)$ è eguale all'integrale $\int_a^x \psi(x)dx$, non già che ammette per derivata la funzione $\psi(x)$.

(*) V. la Memoria citata da ultimo, pag. 45-50.
(**) V. p. 45 e 46 della stessa Memoria.
(***) V. la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito,* n.° III.

Si avverte di leggieri che non è necessaria la condizione di continuità imposta alla $\rho(x)$ ai limiti del tratto ab nel primo dei teoremi enunciati in questo paragrafo e nel suo corollario. Chè, se non si facesse alcuna ipotesi circa al comportarsi della medesima in essi punti, basterebbe considerare il segmento $\overline{a+\varepsilon\ b-\varepsilon}$, ε essendo una quantità piccola oltre ogni dire, in luogo dell'altro ab, e nel primo sarebbe:

$$\rho(x) = Cx + C'.$$

Questa eguaglianza poi, essendo la funzione $Cx + C'$ ovunque continua ed ε di quella piccolezza che si vuole, regge anche nel tratto ab.

Nella seconda delle proposizioni dette in questo numero e nei suoi corollari la continuità della funzione $\rho_1(x)$ è conseguenza delle altre ipotesi.

7.

Consideriamo ora la serie $\sum_1 n A_n X_n$ che può presentarsi anche sotto alla forma

$$\sum_1 n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[\frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{2\operatorname{cotg}\theta\operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right] + \sum_1 n \frac{A_n p_n}{n^2\sqrt{n}}, \qquad (\alpha)$$

in quanto, $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ annullandosi con $\frac{1}{n}$ e p_n non crescendo indefinitamente con n per le ricerche dei paragrafi 3 e 4, il simbolo $\sum_1 n \frac{A_n p_n}{n^2\sqrt{n}}$ rappresenta una grandezza. Moltiplicando ciascun termine della serie (α) per $\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta$ si ottiene l'altra:

$$\sum_1 n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[2\operatorname{sen}\theta\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n}\right] + {}_n\sum_1 \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}, \qquad (\beta)$$

la somma della quale oscilla tra le quantità

$$\varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta - A_0\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta \text{ e } \varphi_2(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta - A_0\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta,$$

quando il valor particolare θ non corrisponda ad un punto del gruppo dell'ordine r del quale si fa parola nel primo paragrafo.

L'aggregato (β) può trasformarsi nell'altro

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1 n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right.\\&\left.\frac{1}{8n}\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+\sum_1 n\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}},\end{aligned}\right\}\quad(\beta')$$

che, integrando due volte ciascuno dei suoi termini, dà la serie:

$$\left.\begin{aligned}&-\sum_1 n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2}\right)+\right.\\&\left.\frac{1}{8n}\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}+\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2}\right)\right]+\sum_1 n\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\,\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\,d\theta}{n^2\sqrt{n}}\\&=F_1(\theta)\end{aligned}\right|\quad(\gamma)$$

convergente insieme a quella dei suoi moduli nell'intervallo $\overline{\pi-\eta}$, η essendo maggiore di zero e di quella piccolezza che si vuole, e la quale nel medesimo rappresenta una funzione continua, inclusi i limiti.

Consideriamo ora la funzione

$$F_{11}(\theta)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,\varphi_1(\beta)\,d\beta,$$

la quale è continua, compresi i confini, nel tratto $\eta\,\overline{\pi-\eta}$, ed i limiti cui tendono le quantità

$$\frac{F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'annullarsi di ε, supposto che la $\varphi_1(\theta)$ non vada all'infinito pel valor considerato.

Se si pone

$$\varphi(\alpha)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,\varphi_1(\beta)\,d\beta,$$

sarà:

$$F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta+\varepsilon}\varphi(\alpha)d\alpha-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\varphi(\alpha)d\alpha+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta-\varepsilon}\varphi(\alpha)d\alpha=$$

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\varphi(\alpha)d\alpha-\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta}\varphi(\alpha)d\alpha=\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}[\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha-\varepsilon)]d\alpha=\varepsilon\{\varphi(\theta+\lambda\varepsilon)-\varphi[\theta-(1-\lambda)\varepsilon]\},$$

$$1>\lambda>0.$$

Ora,

$$\varphi(\theta+\lambda\varepsilon)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta+\lambda\varepsilon}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,\varphi_1(\beta)d\beta,\qquad \varphi[\theta-(1-\lambda)\varepsilon]=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta-(1-\lambda)\varepsilon}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,\varphi_1(\beta)d\beta,$$

quindi:

$$\varphi(\theta+\lambda\varepsilon)-\varphi[\theta-(1-\lambda)\varepsilon]=\int_{\theta-(1-\lambda)\varepsilon}^{\theta+\lambda\varepsilon}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,\varphi_1(\beta)d\beta=\varepsilon[M_\theta-\eta(M_\theta-N_\theta)],$$

$$0\leqq\eta\leqq 1,$$

essendo M_θ ed N_θ i limiti superiore ed inferiore rispettivamente della funzione $\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\,\varphi_1(\theta)$ nel tratto $\overline{\theta-(1-\lambda)\varepsilon}\ \overline{\theta+\lambda\varepsilon}$, compreso un confine amendue o nessuno. Si ha perciò:

$$\frac{F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2}=M_\theta-\eta(M_\theta-N_\theta),$$

la quale eguaglianza vuol dire che il primo membro ha un valore che non eccede i limiti M_θ ed N_θ. All'indefinito decrescere di ε la quantità $M_\theta-N_\theta$ tende all'oscillazione O_θ della funzione $\varphi_1(\theta)$ nel punto θ (*) ed M_θ tende pure ad un limite che diremo M'_θ. Abbiamo quindi che i limiti tra i quali oscilla la espressione

$$\frac{F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

per $\varepsilon=+0$ non eccedono le quantità M'_θ, $M'_\theta-O_\theta$.

La espressione

$$\frac{F_{11}(\theta+\varepsilon)-2F_{11}(\theta)+F_{11}(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

converge manifestamente allo zero con ε, quale si sia θ.

(*) V. la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, n.° III, § 3.

Consideriamo ora la funzione

$$S(\theta)=F_{11}(\theta)-F_1(\theta)-A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta,$$

la quale è continua nell'intervallo da η a $\overline{\pi-\eta}$, inclusi i limiti, per quanto piccola sia la quantità η, e studiamo il modo di comportarsi delle espressioni

$$\frac{S(\theta+\varepsilon)-2S(\theta)+S(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{S(\theta+\varepsilon)-2S(\theta)+S(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'indefinito diminuire di ε. A tale fine consideriamo i valori assunti dalle quantità

$$\frac{F_1(\theta+\varepsilon)-2F_1(\theta)+F_1(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{F_1(\theta+\varepsilon)-2F_1(\theta)+F_1(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

per ε tendente a zero.

Posto

$$\sum_1 {}_n\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\,\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}=\tau(\theta),$$

$$-\sum_1 {}_n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2}\right)+\frac{1}{8n}\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}+\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2}\right)\right]=\omega(\theta),$$

rammentando la relazione γ, sarà:

$$F_1(\theta)=\omega(\theta)+\tau(\theta).$$

Ora, si ha manifestamente

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\tau(\theta+\varepsilon)-2\tau(\theta)+\tau(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2}=\sum_1 {}_n\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}},$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\tau(\theta+\varepsilon)-2\tau(\theta)+\tau(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}=0,$$

quale si sia θ; fa di mestieri quindi studiare il modo di comportarsi delle espressioni

$$\frac{\omega(\theta+\varepsilon)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{\omega(\theta+\varepsilon)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'annullarsi di ε.

Facciamo adunque questa ricerca.

8.

Si ha

$$\sum_1^m n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{8n}\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}=$$

$$\sum_1^m n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$\sum_1^m n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left(1-\frac{3}{8n}\right)\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\sum_1^m n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$\sum_1^m n \frac{A_{n+2}}{\sqrt{2(n+2)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(n+2)}\right)\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$\frac{A_1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{3}{8}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{A_2}{\sqrt{4\pi}}\left(1-\frac{3}{16}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$\frac{A_{m+1}}{\sqrt{2(m+1)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(m+1)}\right)\operatorname{sen}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$\frac{A_{m+2}}{\sqrt{2(m+2)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(m+2)}\right)\operatorname{sen}\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right].$$

Ora, le quantità

$$\frac{A_{m+1}}{\sqrt{2(m+1)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(m+1)}\right)\operatorname{sen}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\frac{A_{m+2}}{\sqrt{2(m+2)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(m+2)}\right)\operatorname{sen}\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]$$

tendono a zero al crescere indefinito di m, quindi le due serie

$$-\frac{A_1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{3}{8}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{A_2}{\sqrt{4\pi}}\left(1-\frac{3}{16}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\sum_1 n\left[\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)-\frac{A_{n+2}}{\sqrt{2(n+2)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(n+2)}\right)\right]\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sum_1 n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{8n}\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

si comportano egualmente per ogni valore di θ.

Se si pone

$$\alpha_1=\frac{A_1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3}{8}-1\right),\qquad \alpha_2=\frac{A_2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{3}{16}-1\right),$$

$$\alpha_{n+2}=-\frac{A_{n+2}}{\sqrt{2(n+2)\pi}}\left(1-\frac{3}{8(n+2)}\right)-\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{1}{8n}-1\right),\qquad n\geq 1,$$

sarà:

$$\omega(\theta)=-\sum_1 n\,\alpha_n\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2},$$

e quindi:

$$\lambda(\alpha)=\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2}=\sum_1 n\,\alpha_n\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\left(\frac{\operatorname{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2$$

$$=\sum_1 n K_n\left(\frac{\operatorname{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2,$$

essendosi posto per brevità

$$K_n=\alpha_n\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right].$$

Indicando con A e B i limiti superiore ed inferiore rispettivamente dei valori assunti dalla funzione

$$\varphi(z)=\sum_1^{\frac{1}{z}} r K_r$$

per $z=+0$ e per un valor particolare di θ, non appartenente al gruppo dell'ordine r per ciascun punto del quale è ignoto il comportarsi della serie

$\sum A_n P_n(\cos\theta)$, è chiaro che si avrà:

$$\lambda(\alpha)=$$
$$\left[A\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)^2-(A-K_1)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)^2\right]+$$
$$\left[(A-K_1)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\alpha}{\frac{3}{2}\alpha}\right)^2-(A-K_1-K_2)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\alpha}{\frac{3}{2}\alpha}\right)^2\right]+$$
$$\left[(A-K_1-K_2)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{5}{2}\alpha}{\frac{5}{2}\alpha}\right)^2-(A-K_1-K_2-K_3)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{5}{2}\alpha}{\frac{5}{2}\alpha}\right)^2\right]+$$

. . . .

Posto

$$A-K_1-K_2-\cdots-K_r=\varepsilon_r,$$

sarà:

$$\lambda(\alpha)=A\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)^2-\sum_1{}_r\varepsilon_r\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right],$$

poichè l'espressione

$$\varepsilon_r\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2$$

si annulla con $\frac{1}{r}$.

Decomponiamo ora la somma

$$\sum_1{}_r\varepsilon_r\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]$$

in tre (*)

1. da 1 sino ad m inclusivamente,

(*) V. la Memoria di Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,* pag. 27.

2. da $m+1$ sino ad s, essendo s il massimo numero intero che soddisfa alla relazione $\frac{\pi}{\alpha}\geqq s+\frac{1}{2}$,

3. da $s+1$ in poi.

La prima consta di un numero limitato di termini, qualunque valore si attribuisca alla variabile α, e quindi si annulla con essa; la seconda può porsi eguale a

$$\delta\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right],$$

essendo in ciascun termine della medesima il fattore di ε_r positivo, e δ una quantità intermedia alle grandezze $\varepsilon_{m+1},\ldots,\varepsilon_s$. Quanto alla terza somma si ha

$$\varepsilon_r\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]=$$

$$\varepsilon_r\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]+$$

$$\varepsilon_r\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-1+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]=$$

$$\varepsilon_r\left[\frac{1}{\left[\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}-\frac{1}{\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}\right]\operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha+$$

$$\frac{\varepsilon_r}{\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}\left[\operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha-\operatorname{sen}^2\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha\right].$$

Detta k una quantità qualsivoglia, non però un numero intero e negativo, si ha:

$$\frac{1}{k}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots=\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots,$$

e facendo $k = s + \frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{s+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)} + \cdots,$$

e così pure

$$\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(s+\frac{7}{2}\right)^2} + \cdots =$$

$$\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{5}{2}\right)} \cdot \frac{s+\frac{5}{2}}{s+\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{7}{2}\right)} \cdot \frac{s+\frac{7}{2}}{s+\frac{5}{2}} + \cdots.$$

D'altra parte,

$$\operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha - \operatorname{sen}^2\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha =$$

$$\left[\operatorname{sen}\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha + \operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\left[\operatorname{sen}\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha - \operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha\right] =$$

$$-4 \operatorname{sen} r\alpha \cos r\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = -\operatorname{sen} 2r\alpha \operatorname{sen}\alpha.$$

Abbiamo adunque:

$$\sum_{s+1} {}_r \varepsilon_r \left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen}\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right] =$$

$$\left[\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]_{s+1} \frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2} + \left[-\varepsilon_r \operatorname{sen} 2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{r+\frac{3}{2}}{r+\frac{1}{2}}\right]_{s+1} \frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)\alpha},$$

indicandosi con $\left[\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]_{s+1}$ ed $\left[-\varepsilon_r \operatorname{sen} 2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{r+\frac{3}{2}}{r+\frac{1}{2}}\right]_{s+1}$ quantità intermedie alle seguenti

$$\varepsilon_{s+1} \operatorname{sen}^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha, \qquad \varepsilon_{s+2} \operatorname{sen}^2\left(s+\frac{3}{2}\right)\alpha, \ldots,$$

$$-\varepsilon_{s+1} \operatorname{sen} 2(s+1)\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{s+\frac{5}{2}}{s+\frac{3}{2}}, \qquad -\varepsilon_{s+2} \operatorname{sen} 2(s+2)\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{s+\frac{7}{2}}{s+\frac{5}{2}}, \ldots$$

rispettivamente.

Ciò posto, se si fa decrescere indefinitamente la quantità α, l'espressione

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2$$

tenderà al valore $\left(\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2$. Detto poi m un numero abbastanza grande, la somma $\sum_1^{m+r} {}_t K_t$ $(r \geqq 0)$ non potrà eccedere i limiti $A+\sigma$ e $B-\sigma$, essendo σ un numero arbitrariamente piccolo, nè ε_r, al crescere indefinito di r, potrà eccedere le quantità $A-B+\sigma$, $-\sigma$. Il prodotto

$$\delta\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]$$

non assumerà perciò all'annullarsi di α valori maggiori di $A-B+\sigma$ e minori di $-\sigma$.

Le quantità

$$\left[\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]_{s+1}\frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}, \qquad \left[-\varepsilon_r \operatorname{sen} 2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\frac{r+\frac{3}{2}}{r+\frac{1}{2}}\right]_{s+1}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}$$

alla lor volta non eccederanno rispettivamente i limiti

$$\frac{A-B+\sigma}{\pi^2}, \quad \frac{-\sigma}{\pi^2}, \quad \frac{A-B+\sigma}{\pi}, \quad -\frac{A-B+\sigma}{\pi}.$$

Ciò ha luogo perchè il fattore $\operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha$ del prodotto $\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha$ è sempre positivo, mentre non si può dire altrettanto della quantità $\operatorname{sen} 2r\alpha$ che si presenta nella espressione

$$-\varepsilon_r \operatorname{sen} 2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\frac{r+\frac{3}{2}}{r+\frac{1}{2}}.$$

Quindi, ponendo mente che

$$\lambda(\alpha)=A\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)^2-\left\{\delta\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen}\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+\left[\varepsilon_r\operatorname{sen}^2\left(r-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]_{s+1}\frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}+\left[-\varepsilon_r\operatorname{sen}2r\alpha\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\frac{r+\frac{3}{2}}{r+\frac{1}{2}}\right]_{s+1}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)\alpha}\right\},$$

la funzione

$$\lambda(\alpha)=\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

oscilla al decrescere indefinito di α tra due quantità che non eccedono nè i limiti

$$A+\sigma+\frac{\sigma}{\pi^2}+\frac{A-B+\sigma}{\pi}=A+\frac{A-B}{\pi}+\sigma\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right),$$

$$A-(A-B)\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)-\sigma\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right),$$

nè, poichè σ è arbitrariamente piccola, gli altri

$$A+\frac{A-B}{\pi},\qquad A-(A-B)\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right).$$

I valori tra i quali resta compresa la funzione $\lambda(\alpha)$ all'annullarsi di α ponno ancora restringersi.

Consideriamo a tal fine la serie.

$$\sum_1 n(-\alpha_n)\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right],$$

la somma della quale oscilla al crescere indefinito di n tra $-A$ e $-B$, $-A$ essendo il limite inferiore, e facciamo su questa tutti i ragionamenti fatti sull'altra

$$\sum_1 n\,\alpha_n\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right];$$

ne conseguirà che la espressione

$$-\lambda(\alpha)=-\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

è compresa all'annullarsi di α tra due quantità, l'una non maggiore di

$-B+\frac{-B+A}{\pi}$, l'altra non minore di $-B-(-B+A)\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)$. Quindi il teorema:

Se $y=A_\theta$ ed $y=B_\theta$ ($A_\theta \geqq B_\theta$) sono le equazioni delle rette limite corrispondenti alla funzione

$$\rho(z)=\sum_1^{\frac{1}{z}}{}_n\alpha_n \operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right] \qquad (\lim_{n=\infty}\alpha_n=0)$$

per $z=0$, posto

$$\omega(\theta)=-\sum_1^{\frac{1}{z}}{}_n\alpha_n\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2},$$

e dette $y=P_\theta$, $y=Q_\theta$ ($P_\theta \geqq Q_\theta$) le rette limite corrispondenti alla espressione

$$\frac{\omega(\theta+\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-\alpha)}{4\alpha^2}$$

per $\alpha=0$, non sarà:

$$A_\theta+\frac{A_\theta-B_\theta}{\pi}<P_\theta, \qquad B_\theta-\frac{A_\theta-B_\theta}{\pi}>Q_\theta \text{ (*)}.$$

È chiaro che si ha

$$A_\theta+\sum_1 {}_n\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}+A_0\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta=\varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta,$$

$$B_\theta+\sum_1 {}_n\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^3\sqrt{n}}+A_0\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta=\varphi_2(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta,$$

fatta astrazione dei punti nei quali è ignoto il comportarsi della serie

$$\sum_0 {}_n A_n P_n(\cos\theta),$$

e quindi:

$$A_\theta-B_\theta=[\varphi_1(\theta)-\varphi_2(\theta)]\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta.$$

È facile poi vedere che si ha

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-z\alpha)}{\alpha}=0.$$

(*) Il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND assegna alla funzione $\lambda(\alpha)$ per $\alpha=0$ limiti meno ristretti di questi. (V. pag. 20.)

Infatti,

$$\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{2\alpha}=2\alpha\sum_1{}_n K_n\left(\frac{\operatorname{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2.$$

Si decomponga ora con Riemann (*) la somma $\sum_1{}_n K_n\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2$ in tre, la prima delle quali contenga tutti i termini sino ad un indice fisso m tale, che $K_{m+s}<\varepsilon$ $(s\geqq 1)$, essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, la seconda quelli pei quali $n\alpha$ è eguale o minore ad una grandezza determinata c, la terza il resto della serie. In tale ipotesi si avverte di leggieri che, decrescendo α indefinitamente, la prima somma resta finita, cioè minore di una quantità assegnabile Q, la seconda $<\varepsilon(n-m)$, perchè $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$ è sempre <1, e quindi altresì di $\varepsilon n=\frac{\varepsilon n\alpha}{\alpha}\leqq\frac{\varepsilon c}{\alpha}$, e la terza più piccola di

$$\varepsilon\sum_{c<n\alpha}{}_n\frac{1}{n^2\alpha^2}<\frac{\varepsilon}{n\alpha^2}<\frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Si ha quindi, astrazion fatta dal segno:

$$\frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{2\alpha}<2\left[\alpha Q+\varepsilon\left(c+\frac{1}{c}\right)\right];$$

e il teorema è dimostrato.

Pertanto, ora è noto ciò che avviene delle due espressioni

$$\frac{S(\theta+2\alpha)-2S(\theta)+S(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2},$$

$$\frac{S(\theta+2\alpha)-2S(\theta)+S(\theta-2\alpha)}{2\alpha}$$

all'indefinito diminuire di α, quando θ non sia un punto nel quale si ignora il modo di comportarsi della serie

$$\sum_0{}_n A_n P_n(\cos\theta).$$

Precisamente si ha, quale si sia θ,

$$\lim_{\alpha=0}\frac{S(\theta+2\alpha)-2S(\theta)+S(\theta-2\alpha)}{2\alpha}=0,$$

(*) V. Memoria citata, pag. 29.

mentre, fatta astrazione dei punti più volte indicati, il quoto

$$\frac{S(\theta+2\alpha)-2S(\theta)+S(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

oscilla per $\alpha=+0$ tra due grandezze T_θ, V_θ ($T_\theta \geqq V_\theta$) tali, che non si ha

$$\left.\begin{aligned} T_\theta &> M'_\theta - \varphi_2(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta + \frac{\varphi_1(\theta)-\varphi_2(\theta)}{\pi}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta, \\ V_\theta &< N'_\theta - \varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta - \frac{\varphi_1(\theta)-\varphi_2(\theta)}{\pi}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (\mu)$$

M'_θ ed N'_θ essendo le quantità cui convergono all'annullarsi di ε rispettivamente il limite superiore ed inferiore della funzione $\varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta$ nel tratto $\overline{\theta+\varepsilon\;\theta-\varepsilon}$. Questa asserzione è manifesta quando si rammenti la eguaglianza

$$S(\theta)=F_{11}(\theta)-F_1(\theta)-A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta,$$

ove

$$F_1(\theta)=\omega(\theta)+\tau(\theta).$$

9.

Giovandoci delle ricerche contenute nei paragrafi precedenti è facile vedere che si ha

$$S(\theta)=C\theta+C_1,$$

C e C_1 essendo due costanti.

Infatti, sia G_1, G_2, G_3,... G_s,... una serie illimitata di gruppi di punti nell'intervallo $\overline{\eta\;\pi-\eta}$, essendo la quantità η piccola quanto si vuole. Poichè la funzione $\varphi_1(\theta)$ è integrabile in questo tratto, si potrà assegnare un valore per s tale, che per esso e per tutti i successivi sia arbitrariamente piccola la somma $\sum$ degli spazi, i quali, inclusi i limiti, contengono punti in cui la oscillazione è maggiore di σ, σ essendo di quella piccolezza che si vuole. Si potrà altresì supporre che i tratti formanti la somma $\sum$ contengano nel loro interno o sul contorno tutti quei punti in cui $A_\theta - B_\theta$ è superiore a σ, e quelli nei quali è ignoto il comportarsi della serie $\sum A_n P_n(\cos\theta)$. Se θ è un punto che non cade negli intervalli che costituiscono $\sum$, inclusi i limiti, la differenza

$$M'_\theta-\eta_1 O_\theta, \qquad 0 \leqq \eta_1 \leqq 1,$$

sarà vicina quanto si vuole alla quantità $\varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta$, M'_θ essendo il limite superiore dei valori della medesima nel tratto $\overline{\theta-\varepsilon\ \theta+\varepsilon}$ per $\varepsilon=+0$, ed O_θ la oscillazione di $\varphi_1(\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta$ nel punto θ. Ne consegue che le funzioni T_θ, V_θ, tra le quali oscilla il quoziente

$$\frac{S(\theta+\varepsilon)-2S(\theta)+S(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

per $\varepsilon=+0$, sono ovunque definite nel tratto $\overline{\eta\ \pi-\eta}$, fatta astrazione dei punti appartenenti al gruppo dell'ordine r rammentato più volte. Si avverte poi di leggieri, ricordando le relazioni (μ) del paragrafo precedente, che esse sono integrabili nel segmento $\overline{\eta\ \pi-\eta}$, e di più che si ha:

$$\int_c^d T_\theta d\theta=\int_c^d V_\theta d\theta=0, \qquad \eta\leqq c<d\leqq\overline{\pi-\eta}.$$

L'ultima asserzione è manifesta quando si ponga mente che la differenza $T_\theta-V_\theta$ non è maggiore di

$$O_\theta+[\varphi_1(\theta)-\varphi_2(\theta)]\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta.$$

Riepilogando, la funzione $S(\theta)$, che è eguale a

$$F_{11}(\theta)-F_1(\theta)-A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta=$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta-\sum_1{}_n\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta}{n^2\sqrt{n}}+$$

$$\sum_1{}_n K_n\frac{1}{(\rho-1)^2}-A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta,$$

gode delle seguenti proprietà:

1. essa è continua nell'intervallo $\overline{\eta\ \pi-\eta}$, inclusi i limiti, essendo η di quella piccolezza che si vuole;

2. per ogni valore di θ in questo intervallo si ha

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{S(\theta+\varepsilon)-2S(\theta)+S(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon}=0;$$

3. tolto un gruppo di punti dell'ordine r compreso nel tratto $\overline{\eta\ \pi-\eta}$, la espressione

$$\frac{S(\theta+\varepsilon)-2S(\theta)+S(\theta-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla tra due funzioni integrabili T_θ, V_θ, tali, che si ha

$$\int_c^d T_\theta d\theta = \int_c^d V_\theta d\theta = 0, \qquad \eta \leqq c < d \leqq \overline{\pi-\eta}.$$

Adunque (*):

$$S(\theta) = C\theta + C_1, \qquad \eta \leqq \theta \leqq \overline{\pi-\eta},$$

C e C_1 essendo due costanti.

10.

L'ultima relazione del paragrafo precedente si può scrivere sotto la forma

$$\sum_{1}{}_n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2}\right)+\frac{\operatorname{sen}\left(\rho(+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{8n(\rho+1)^2}+\frac{\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{8n(\rho-1)^2}\right]$$

$$-\sum_{1}{}_n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} A_n p_n \frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta}{n^2\sqrt{n}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - C\theta - C_1 = 0.$$

Ora, si ha (**)

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}\left[(\rho+1)\beta-\frac{\pi}{4}\right] d\beta =$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho+1)^2}-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho+1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

(*) V. Clebsch e Neumann, Mathematische Annalen, t. 5°, pag. 13 e seg.ti V. anche il volume 6° di questi Annali, pag. 59-61.

(**) V. la Memoria del prof. Dini inserita nel t. 6° di questi Annali, pag. 220 e seg.ti

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}\left[(\rho-1)\beta-\frac{\pi}{4}\right] d\beta =$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}+\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho-1)^2}+\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho-1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

Quindi, sostituendo questi valori nella relazione che precede e rammentando la eguaglianza

$$X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta = P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta =$$

$$\frac{2\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}}\left(1-\frac{1}{4n}\right)\operatorname{sen}\theta+\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}}+\frac{p_n\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}=$$

$$\left(1-\frac{1}{4n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{8n\sqrt{2n\pi}}\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{p_n\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}},$$

si otterrà facilmente:

$$\left.\begin{aligned}&-\sum_1{}_n A_n\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} P_n(\cos\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\rho-1}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\\ &C'\theta+C'_1-A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta-C\theta-C_1=0,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

quando si faccia

$$C'=\sum_1{}_n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4n(\rho+1)}-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4n(\rho-1)}+\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8n(\rho+1)}-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8n(\rho-1)}\right]=$$

$$\sum_1{}_n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left[-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8n(\rho+1)}-\frac{3\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8n(\rho-1)}\right]=$$

$$-\sum_1{}_n\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\frac{(2\rho+1)\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4n(\rho^2-1)},$$

$$C'_1 = \sum_1 {}_n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \Big[\Big(1 - \frac{1}{4n}\Big)\Big(\frac{1}{(\rho+1)^2} + \frac{1}{(\rho-1)^2}\Big) \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2} -$$

$$\frac{1}{8n}\Big(\frac{1}{(\rho-1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\Big)\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16n}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{\rho+1} + \frac{3}{\rho-1}\Big)\Big]$$

$$= \sum_1 {}_n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(\frac{1-\frac{1}{8n}}{(\rho+1)^2} + \frac{1-\frac{3}{8n}}{(\rho-1)^2} \right) \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2\rho+1)}{8n(\rho^2-1)}\cos(n+1)\frac{\pi}{2} \right].$$

La relazione (1) può presentarsi sotto l'aspetto

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1 {}_n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} P_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \Big(\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1}\Big)\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big) \right] + \\ &A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta = C_{11}\theta + C'_{11} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

essendo

$$C_{11} = C' - C, \qquad C'_{11} = C'_1 - C_1.$$

Ora,

$$\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} = \frac{1}{(n+1)\Big(1+\frac{1}{2(n+1)}\Big)} + \frac{1}{(n+1)\Big(1-\frac{3}{2(n+1)}\Big)} =$$

$$\frac{1}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)^2} - \cdots\Big) +$$

$$\frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{3}{2(n+1)} + \frac{9}{4(n+1)^2} + \cdots\Big) = \frac{2}{n+1} + \frac{c_n}{n^2},$$

c_n convergendo ad uno all'annullarsi di $\frac{1}{n}$. La eguaglianza (2) potrà quindi scriversi:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1 {}_n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}}\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big) \right] + A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta = \\ &C_{111}\theta + C'_{111} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

essendo

$$C_{111} = C_{11} + \sum_1 n A_n \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \frac{c_n}{n^2},$$

$$C'_{111} = C'_{11} - \frac{\pi}{2} \sum_1 n A_n \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \frac{c_n}{n^2}.$$

Supposto sempre θ compreso tra η e $\overline{\pi-\eta}$, η essendo una quantità arbitrariamente piccola, si avrà:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}\beta\, d\beta =$$

$$\sqrt{\operatorname{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\delta\, d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta,$$

e quindi la relazione (3), quando sia moltiplicata per $\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$, potrà presentarsi nella forma:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1 n A_n \Bigg[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}\beta\, d\beta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\delta\, d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - \\ &\qquad \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} \Bigg] + A_0 \sqrt{\operatorname{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta = \\ &\qquad (C_{111}\theta + C'_{111}) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} + \sqrt{\operatorname{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dalla equazione (3) poi si deduce facilmente l'altra:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1 n A_n\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\delta\, d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta - \right. \\ \left. \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\beta}}\right)''\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) d\alpha\right] \\ +A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\delta\, d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta = \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}(C_{111}\beta + C'_{111})\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\beta}}\right)'' d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\delta\, d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta,\end{array}\right\} \quad (5)$$

poichè la serie che compare nella eguaglianza (3) converge in egual grado, la quantità θ restando compresa tra η e $\overline{\pi-\eta}$. D'altra parte, si ha

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\beta}}\right)''\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) d\beta =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\beta}}\right)''\beta\, d\beta - \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\beta}}\right)'' d\beta =$$

$$-\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\pi}{2}-\cos\theta+\frac{\pi}{2}\sqrt{\operatorname{sen}\theta}-\frac{\pi}{2} = -\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\theta,$$

laonde addizionando le relazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\sum_1 n A_n\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}\beta\, d\beta + \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}}\cos\theta\right] +$$

$$A_0\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta + A_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\delta\, d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)'' d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\, d\beta =$$

$$(C_{111}\theta+C'_{111})\sqrt{\operatorname{sen}\theta}+C_{111}\left(-\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\pi}{2}-\cos\theta\right)-C'_{111}(\sqrt{\operatorname{sen}\theta}-1)+$$
$$\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta+$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\operatorname{sen}\delta\,d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)''d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta=$$
$$C_{111}\left(\frac{\pi}{2}-\cos\theta\right)+C'_{111}+\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta+$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\operatorname{sen}\delta\,d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)''d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\varphi_1(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta.$$

Ponendo nell'ultima equazione x in luogo di $\cos\theta$ si ha:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1 {}_n A_n\left[\int_0^x d\alpha\int_0^\alpha X_n\,d\beta+\frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}}x\right]+A_0\int_0^x d\alpha\int_0^\alpha d\beta=\\ C_{111}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C'_{111}+\int_0^x d\alpha\int_0^\alpha \theta_1(\beta)\,d\beta,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

essendo

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\psi(\beta)\operatorname{sen}\beta\,d\beta=$$
$$\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\psi(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\delta\,d\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\right)''d\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma}d\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\psi(\beta)\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\beta\,d\beta,$$

ove $\psi(\beta)$ rappresenta una funzione ovunque integrabile e che va all'infinito in un numero limitato di punti.

Ora, se $n>0$, si ha

$$\int_0^\alpha X_n\,d\beta=\frac{X_{n+1}-X_{n-1}}{2n+1}-\frac{X^{(0)}{}_{n+1}-X^{(0)}{}_{n-1}}{2n+1},$$

ossia, in virtù della nota formola

$$(n+1)X^{(0)}{}_{n+1} + nX^{(0)}{}_{n-1} = 0,$$

$$\int_0^\alpha X_n d\beta = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} + \frac{X^{(0)}{}_{n-1}}{n+1};$$

quindi per $n > 1$ si avrà:

$$\int_0^x d\alpha \int_0^\alpha X_n d\beta =$$

$$\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{X^{(0)}{}_{n-1}}{n+1}x - \frac{X^{(0)}{}_{n+2} - X^{(0)}{}_n}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{X^{(0)}{}_n - X^{(0)}{}_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{X^{(0)}{}_{n-1}}{n+1}x + \frac{X^{(0)}{}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}{}_{n-2}}{(2n+1)n},$$

e per $n = 1$

$$\int_0^x d\alpha \int_0^\alpha X_1 d\beta = \frac{x^3}{2\cdot 3} = \frac{X_3 - X_1}{3\cdot 5} + \frac{X_1}{6}.$$

D'altra parte, per la formola dimostrata al paragrafo terzo, si ha:

$$\frac{X^{(0)}{}_{n-1}}{n+1} = -\frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2(n-1)\pi}}\left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) + \frac{p^{(0)}{}_{n-1}}{(n+1)(n-1)^2\sqrt{n-1}}$$

$$= -\frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} + \frac{b_n}{n^2\sqrt{n}}$$

b_n non crescendo al di là di ogni limite con n. Sostituendo questi valori nella relazione (6) si ottiene:

$$A_1\left(\int_0^x d\alpha \int_0^\alpha X_1 d\beta - \frac{2x}{2\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_2^\infty A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)}\right.$$

$$\left. + \frac{X^{(0)}{}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}{}_{n-2}}{(2n+1)n} + \frac{b_n x}{n^2\sqrt{n}}\right] + A_0 \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta =$$

$$C_{111}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C'_{111} + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta$$

Le serie

$$\sum_2 {}_n A_n \left(\frac{X^{(0)}{}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}{}_{n-2}}{(2n+1)n} \right), \qquad \sum_2 {}_n \frac{b_n x}{n^2 \sqrt{n}}$$

convergono indipendentemente dall' ordine dei termini, l' ultima eguaglianza può scriversi quindi anche, nel modo seguente:

$$A_0 \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta + A_1 \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha X_1 d\beta +$$

$$\sum_2 {}_n A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right] = Dx + D' + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta,$$

D e D' essendo due costanti il valore delle quali è facile ad assegnarsi, oppure anche nell' altro:

$$\left. \begin{aligned} A_0 \frac{X_2 - X_0}{3} + A_1 \frac{X_3 - X_1}{3 \cdot 5} + \sum_2 {}_n A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right] = \\ D_1 x + D'_1 + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ordinando poi secondo le funzioni X_n si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} \right) X_0 + \left(-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} \right) X_1 + \\ \sum_0 {}_n \left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+7)} + \frac{A_{n+4}}{(2n+7)(2n+9)} \right] X_{n+2} = \\ D_1 x + D'_1 + \int_0^x d\alpha \int_0^x \theta_1(\beta) d\beta = D_1 x + D'_1 + \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

ove

$$\psi(x) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta.$$

11.

Dimostriamo ora la eguaglianza

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} X_n \theta_1(\beta) d\beta,$$

$$= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n \theta_2(\beta)\,d\beta,$$

$$= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n f(\beta)\,d\beta,$$

essendo

$$\theta_2(\beta) \leqq f(\beta) \leqq \theta_1(\beta)$$

per tutti i punti dell'intervallo 0π, ad eccezione di quelli che appartengono al gruppo dell'ordine ν, del quale si fa parola nel primo paragrafo.

La relazione

$$\left.\begin{array}{c} \left(-\frac{A_0}{3}+\frac{A_2}{3\cdot 5}\right)X_0+\left(-\frac{A_1}{3\cdot 5}+\frac{A_3}{5\cdot 7}\right)X_1+ \\ \sum_0^n\left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)}-\frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+7)}+\frac{A_{n+4}}{(2n+7)(2n+9)}\right]X_{n+2} \\ = D_1 x + D'_1 + \psi(x) \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

fu dimostrata per tutti i valori di θ compresi tra η e $\overline{\pi-\eta}$, oppure per tutti i valori di x che sono tra $\overline{-1+\varepsilon}$ e $\overline{1-\varepsilon}$, η ed ε essendo di quella piccolezza che si vuole. Ora, osservando che la serie del primo membro converge in egual grado, e che la funzione $\psi(x)$ è continua nell'intervallo $-1+1$, i limiti inclusi, si vede di leggieri che questa equazione è vera per tutti i valori tra 1 e -1, compresi questi ultimi.

Occupiamoci in prima dei coefficienti della forma A_{2n}.

Rammentate le relazioni

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

si moltiplichi l'equazione (α) per X_0 e si integri da -1 a $+1$, si otterrà:

$$-\frac{A_0}{3}+\frac{A_2}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_0\,dx + D'_1,$$

ed in modo analogo:

$$\frac{A_{2n}}{(4n+1)(4n+3)}-\frac{A_{2n+2}}{(4n+3)(4n+5)}-\frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)}+\frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)} =$$

$$\frac{4n+5}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_{2n+2}\,dx.$$

Se ora nell'ultima relazione facciamo successivamente $n=0, 1, \ldots, n$ e sommiamo le equazioni in tal guisa ottenute con la prima delle due precedenti, avremo:

$$-\frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)}+\frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)}=$$
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)[X_0+5X_2+9X_4+\cdots+(4n+5)X_{2n+2}]dx+D'_1.$$

Ora,

$$\frac{dX_{2n+3}}{dx}=\sum_0^{n+1}{}_s(4s+1)X_{2s},$$

quindi:

$$-\frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)}+\frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)}=$$
$$D'_1+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X'_{2n+3}dx=D'_1+\frac{1}{2}\Big[\psi(x)X_{2n+3}\Big]_{-1}^{+1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}X_{2n+3}\psi'(x)dx$$
$$=D'_1+\frac{1}{2}[\psi(+1)+\psi(-1)]-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}X_{2n+3}\psi'(x)dx.$$

Ma per la relazione (7) del paragrafo precedente si ha:

$$\psi(+1)+D_1+D'_1=0,\qquad \psi(-1)-D_1+D'_1=0,$$

quindi:

$$\psi(+1)+\psi(-1)+2D'_1=0.$$

Nella eguaglianza

$$-\frac{A_{2n+2}}{4n+5}+\frac{A_{2n+4}}{4n+9}=-\frac{4n+7}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)X_{2n+3}dx$$

faccio successivamente $n=0, 1, 2, \ldots, n$ e sommo i risultati; ricavo in tal modo:

$$-\frac{A_2}{5}+\frac{A_{2n+4}}{4n+9}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)\Big[\sum_0^n{}_s(4s+7)X_{2s+3}\Big]dx,$$

e poichè

$$-\frac{A_0}{1}+\frac{A_2}{5}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_0dx+3D'_1=$$
$$\frac{3}{2}[\psi(+1)+\psi(-1)+2D'_1]-\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}X_1\psi'(x)dx=-\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}X_1\psi'(x)dx,$$

addizionando queste due relazioni ottengo:

$$\frac{A_{2n+4}}{4n+9}-\frac{A_0}{1}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)[\sum_{-1}^{n}{}_s(4s+7)X_{2s+3}]dx=$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)X'_{2n+4}dx=$$

$$\left[\frac{1}{2}\psi'(x)X_{2n+4}\right]_{+1}^{-1}+\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+4}dx=\frac{1}{2}[\psi'(-1)-\psi'(+1)]+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+4}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+4}dx.$$

Quindi:

$$A_{2n+4}=(4n+9)\left(c+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+4}dx\right),$$

essendo

$$c=A_0-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)dx.$$

Dimostriamo ora che $c=0$.

La quantità $\frac{A_{2n}}{\sqrt{2n}}$ va a zero con $\frac{1}{n}$, ossia

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\left(c+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n}dx\right)=0,$$

perciò:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n}dx=-c+\varphi(n),$$

essendo

$$\lim\varphi(n)\sqrt{n}=0 \qquad (n=\infty).$$

Decomponiamo l'integrale

$$\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n}dx$$

nei tre seguenti

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}, \qquad \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}, \qquad \int_{1-\varepsilon_1}^{1}.$$

Supposto ε_1 sufficientemente piccolo, si avrà:

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} f_1(x)\,dx < \lambda,$$

essendo $f_1(x) = +\sqrt{[f(x)]^2}$ e λ una grandezza positiva piccola quanto si vuole, quindi:

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} f(x) X_{2n}\,dx < \lambda,$$

quale si sia n, perchè si suppose che l'integrale della funzione $f_1(x)$ converga nelle estreme vicinanze dei punti $\overline{-1+0}$ e $\overline{+1-0}$ (*). Nello stesso modo si vede che l'integrale

$$\int_{1-\varepsilon_1}^{1} f(x) X_{2n}\,dx$$

è minore di λ, quando ε_1 sia scelto convenientemente.

Occupiamoci ora della espressione

$$\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x) X_{2n}\,dx = \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) P_{2n}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta\,d\theta =$$

$$= \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{2\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{\sqrt{4n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)d\theta +$$

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{8n\sqrt{4n\pi\operatorname{sen}\theta}}\,d\theta + \frac{1}{4n^2\sqrt{2n}}\int_{\eta}^{\pi-\eta} p_{2n} f_{11}(\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta,$$

$$f_{11}(\theta) = f(\cos\theta),$$

che al crescere indefinito di n si comporta come l'altra

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{2\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{\sqrt{4n\pi}}\,d\theta,$$

(*) Fatta astrazione da una somma di spazî che può rendersi piccola quanto si vuole, ciascuna delle differenze

$$\varphi_1(\beta) - \varphi_2(\beta), \qquad \varphi_1(\beta) - f(\beta)$$

è arbitrariamente vicina allo zero. Quindi, se si suppone che una qualsivoglia delle funzioni $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$, $f(\beta)$ sia integrabile nei tratti $\overline{+0\ \eta}$, $\overline{\pi-\eta\ \pi}$ anche pigliata con lo stesso segno, ciò avrà luogo altresì per le altre.

poichè espressioni della forma

$$\frac{1}{n^\mu}\int_\eta^{\pi-\eta} f_{111}(\theta)\operatorname{sen}2n\theta\,d\theta, \qquad \frac{1}{n^\mu}\int_\eta^{\pi-\eta} f_{111}(\theta)\cos 2n\theta\,d\theta, \qquad \mu \geqq 1,$$

si annullano con $\frac{1}{n}$, $f_{111}(\theta)$ essendo una funzione ovunque integrabile nel tratto $\overline{\eta\ \pi-\eta}$ che va all'infinito in un numero limitato di punti. Infatti, si ha

$$\int_\eta^{\pi-\eta} f_{111}(\theta)\operatorname{sen}2n\theta\,d\theta = \left[\operatorname{sen}2n\theta\int_{\eta+0}^{\theta} f_{111}(\theta)\,d\theta\right]_\eta^{\pi-\eta} - 2n\int_\eta^{\pi-\eta}\cos 2n\theta\,d\theta\int_{\eta+0}^{\theta} f_{111}(\beta)\,d\beta,$$

e l'integrale

$$\int_\eta^{\pi-\eta}\cos 2n\theta\,d\theta\int_{\eta+0}^{\theta} f_{111}(\beta)\,d\beta$$

si annulla con $\frac{1}{n}$.

Ora, se la funzione $f(x)$ fosse finita oppure andasse all'infinito in guisa che fosse

$$\lim_{n=\infty}\int_\eta^{\pi-\eta} f_{11}(\theta)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = 0,$$

sarebbe:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x) X_{2n}\,dx = 0,$$

e quindi:

$$c = 0.$$

Questa relazione ha sempre luogo nel nostro caso, come risulta dal teorema dimostrato nel paragrafo seguente.

12.

Se

$$\lim\frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0, \qquad n = \infty,$$

sarà:

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{\mu+1}{2\sqrt{\mu}}\int_b^c \psi(x)\lambda(x)\frac{d^2 X_\mu}{dx^2}\,dx = 0,$$

quando si ponga

$$\psi(x)-(C_0x^3+C_1x^2+C_2x+C_3)=\sum_2 {}_n A_n\left[\frac{X_{n+2}-X_n}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{X_n-X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)}\right],$$

e si dica $\lambda(x)$ una funzione continua tra b e c $(\eta \leqq b < c \leqq \pi - \eta)$ insieme alla sua derivata prima, che si annulla ai limiti con la medesima e di cui la derivata seconda non ha infiniti massimi e minimi.

Ed invero, poichè la serie precedente converge in egual grado, sarà:

$$\int_b^c [\psi(x)-(C_0x^3+C_1x^2+C_2x+C_3)]\lambda(x)\frac{d^2X_\mu}{dx^2}dx=$$

$$\sum_2 {}_n A_n\int_b^c\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\lambda(x)\frac{d^2X_\mu}{dx^2}dx.$$

D'altra parte,

$$\int_b^c\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\lambda(x)\frac{d^2X_\mu}{dx^2}dx=$$

$$\left[\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\lambda(x)\frac{dX_\mu}{dx}\right]_b^c-\int_b^c\left[\left(\int_{-1}^x X_n dx\right)\lambda(x)+\lambda'(x)\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\right]\frac{dX_\mu}{dx}dx=$$

$$-\int_b^c\left[\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)\lambda(x)+\lambda'(x)\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\right]\frac{dX_\mu}{dx}dx,$$

essendo per ipotesi $\lambda(b)=\lambda(c)=0$. Rammentando poi che $\lambda'(b)=\lambda'(c)=0$, si ha:

$$\int_b^c\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\lambda(x)\frac{d^2X_\mu}{dx}dx=$$

$$\int_b^c X_\mu\left[\lambda''(x)\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)+2\lambda'(x)\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)+\lambda(x)X_n\right]dx.$$

Abbiamo quindi:

$$\sum_2 {}_n A_n\int_b^c\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\lambda(\beta)\frac{d^2X_\mu}{dx}dx=$$

$$\sum_2 {}_n A_n\int_b^c \lambda''(x)\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)X_\mu dx+\sum_2 {}_n A_n\int_b^c X_\mu\left[2\lambda'(x)\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)+\lambda(x)X_n\right]dx.$$

Si vede facilmente che la espressione

$$\sqrt{\mu}\sum_2 n A_n \int_b^c \lambda''(x)\left[\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right] X_\mu dx$$

va a zero con $\frac{1}{\mu}$: infatti, si ha

$$\sqrt{\mu}\sum_2 n A_n \int_b^c \lambda''(x)\left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right) X_\mu dx =$$

$$-\sum_2 n A_n \int_{b_1}^{c_1} \lambda''(\cos\theta)\left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\cdot$$

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi\operatorname{sen}\theta}}\left(1-\frac{1}{4\mu}\right)\cos\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\theta}{4\mu\sqrt{2\pi\operatorname{sen}\theta}}\operatorname{sen}\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{p_\mu}{\mu^2}\right]\operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

essendo $\rho_1=\mu+\frac{1}{2}$ e $\cos\theta=x$, $\cos b_1=b$, $\cos c_1=c$. Questa serie poi può decomporsi nelle quattro sèguenti

$$-\sum_2 n A_n \int_{b_1}^{c_1}\left(\frac{X_{n+2}-X_n}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{X_n-X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)}\right)\frac{2\lambda''(\cos\theta)}{\sqrt{2\pi\operatorname{sen}\theta}}\cos\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

$+\frac{1}{4\mu}$ » » » » » » ,

$-\frac{1}{4\mu}$ » » » » $\operatorname{sen}\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\theta\, d\theta,$

$-\frac{1}{\mu^2}$ » » » $\lambda''(\cos\theta)p_\mu \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$

Le tre ultime si annullano con $\frac{1}{\mu}$, e poichè la prima converge, quale si sia μ, ed il termine

$$A_n\int_{b_1}^{c_1}\left(\int_{-1}^x d\alpha\int_{-1}^\alpha X_n d\beta\right)\frac{2\lambda''(\cos\theta)}{\sqrt{2\pi}}\cos\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

tende a zero con $\frac{1}{\mu}$, ne viene che lo stesso ha luogo per la sua somma.

Consideriamo ora l'aggregato

$$\sqrt{\mu}\sum_2 n A_n \int_b^c X_\mu \left[2\lambda'(x)\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)+\lambda(x)X_n\right]dx,$$

che può scindersi nelle due serie convergenti

$$2\sqrt{\mu}\sum_2 n A_n \int_b^c X_\mu \lambda'(x)\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)dx,$$

$$\sqrt{\mu}\sum_2 n A_n \int_b^c \lambda(x) X_n X_\mu dx.$$

Infatti, si ha

$$\int_b^c X_\mu \lambda'(x)\left(\int_{-1}^x X_n d\beta\right)dx = \int_b^c X_\mu \lambda'(x)\frac{X_{n+1}-X_{n-1}}{2n+1}dx,$$

$$\frac{1}{2n+1}\int_b^c X_\mu \lambda'(x) X_{n+1} dx =$$

$$\frac{-1}{2n+1}\int_{b_1}^{c_1}\lambda'(\cos\theta)\left[\frac{2\cos\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi\mu\operatorname{sen}\theta}}\left(1-\frac{1}{4\mu}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\theta\operatorname{sen}\left(\rho_1\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{4\mu\sqrt{2\pi\mu\operatorname{sen}\theta}}+\frac{p_\mu}{\mu^2\sqrt{\mu}}\right]$$

$$\left[\frac{2\cos\left(\rho_{11}\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi(n+1)\operatorname{sen}\theta}}\left(1-\frac{1}{4(n+1)}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\theta\operatorname{sen}\left(\rho_{11}\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{4(n+1)\sqrt{2\pi(n+1)\operatorname{sen}\theta}}+\frac{p_{n+1}}{(n+1)^2\sqrt{n+1}}\right]\operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

essendo $\rho_{11}=n+\frac{3}{2}\cdot$ La serie

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2n+1}\sum_2 n A_n \int_b^c \lambda'(x) X_\mu X_{n+1} dx,$$

e così pure l'altra

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2n+1}\sum_2 n A_n \int_b^c \lambda'(x) X_\mu X_{n-1} dx,$$

può decomporsi quindi in sedici altre, dodici delle quali sono, come di leggieri si avverte, convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini ed hanno una somma che si annulla con $\frac{1}{\mu}\cdot$ Resta a dimostrarsi prima la convergenza delle quattro

$$\sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos\theta) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos\theta) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos\theta) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\, d\theta, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos\theta) p_\mu \cos\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta, \tag{4}$$

e delle quattro analoghe.

Ponendo mente che

$$\int_{b_1}^{c_1} p_\mu \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, \lambda'(\cos\theta) \cos\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{\rho_{11}} \left[p_\mu \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, \lambda'(\cos\theta) \operatorname{sen}\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{b_1}^{c_1} - \frac{1}{\rho_{11}} \int_{b_1}^{c_1} \operatorname{sen}\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, \lambda'(\cos\theta)]'_\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{\rho_{11}} \int_{b_1}^{c_1} \operatorname{sen}\left(\rho_{11}\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, \lambda'(\cos\theta)]'_\theta\, d\theta,$$

$$\lambda'(\cos b_1) = \lambda'(\cos c_1) = 0,$$

si vede subito che l'ultima di queste serie converge indipendentemente dall'ordine dei termini; di più essa si annulla con $\frac{1}{\mu}$, essendo

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{D'_\theta p_\mu}{\mu^2} = 0,$$

come è noto.

La serie (1), fatta astrazione del termine nel quale $\rho_1 = \rho_{11}$, può porsi sotto la forma

$$\frac{1}{2} \sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\cos\left((\rho_1 + \rho_{11})\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\rho_1 - \rho_{11})\theta\right] \lambda'(\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\operatorname{sen}\left((\rho_1 + \rho_{11})\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\rho_1 + \rho_{11}} + \frac{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_{11})\theta}{\rho_1 - \rho_{11}}\right] \lambda''(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

e si scinde quindi in due, la prima delle quali converge e si annulla con $\frac{1}{\mu}$.
Anche l'aggregato

$$\sum_2 {}_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda''(\cos\theta) \frac{\operatorname{sen}(\rho_1-\rho_{11})\theta}{\rho_1-\rho_{11}} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \qquad (\alpha)$$

rappresenta evidentemente una grandezza, che, come è facile a vedersi, tende a zero mentre μ va all'infinito. Infatti, si può al certo assegnare un numero m tale, che la quantità

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda''(\cos\theta) \operatorname{sen}(\rho_1-\rho_{11})\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta, \qquad n \geqq m,$$

sia arbitrariamente piccola, quale si sia μ, essendo

$$\lim \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0, \qquad (n=\infty);$$

si potrà poi pigliare μ sì grande che per $n<m$ il termine precedente risulti piccolo oltre ogni dire. La somma (α) è quindi minore della serie

$$\sum_2 {}_n \frac{1}{(2n+1)(\rho_{11}-\rho_1)} = \sum_2 {}_n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1-\mu},$$
$$1 < n \gtrless \mu - 1,$$

moltiplicata per una quantità che va a zero con $\frac{1}{\mu}$: basterà dunque far vedere che questa serie non va all'infinito con μ.

Si ha

$$\sum \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1} = -\sum_2^{\mu-2} {}_n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{-n+\mu-1} + \sum_\mu {}_n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1}.$$

La serie

$$\sum_\mu {}_n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1} = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2\mu+3} \cdot \frac{1}{2} + \cdots$$

va a zero con $\frac{1}{\mu}$, resta a considerarsi la somma

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\mu-3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\mu-4} + \cdots + \frac{1}{2\mu-5} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu-3} \cdot \frac{1}{1} = \sum_1^{\mu-3} {}_s \frac{1}{2\mu-(2s+1)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Determiniamo il massimo numero intero s_1 in guisa, che si abbia

$$2\mu - (2s_1+1) \geqq s_1,$$

ossia

$$s_1 \leq \frac{2\mu - 1}{3}.$$

Ciò posto, la somma

$$\sum_1^{s_1} {}_s \frac{1}{2\mu - (2s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

va a zero al crescere indefinito di μ, perchè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente e la quantità $2\mu - (2s+1)$ $(s \leq s_1)$ va con μ all'infinito. Per la stessa ragione si ha:

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_{s_1+1}^{\mu-3} {}_s \frac{1}{2\mu - (2s+1)} \cdot \frac{1}{s} = 0.$$

È chiaro adesso che anche le serie (2) e (3) convergono e si annullano con $\frac{1}{\mu}$. Dimostriamo ora che la espressione

$$\sqrt{\mu} \sum_2 {}_n A_n \int_b^c X_n X_\mu \lambda(x) dx$$

va a zero con $\frac{1}{\mu}$. Posti per X_n ed X_μ i loro valori in funzione di θ, essa assume la forma

$$- \sum_2 {}_n A_n \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi n \operatorname{sen}\theta}} - \frac{\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2\pi n \operatorname{sen}\theta}} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{4n\sqrt{2\pi n \operatorname{sen}\theta}} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_n}{n^2\sqrt{n}} \right]$$
$$\left[\frac{2\cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi \operatorname{sen}\theta}} - \frac{\cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{2\mu\sqrt{2\pi \operatorname{sen}\theta}} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{4\mu\sqrt{2\pi \operatorname{sen}\theta}} \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_\mu}{\mu^2} \right] \lambda(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

La serie

$$\sqrt{\mu} \sum_2 {}_n A_n \int_b^c X_n X_\mu \lambda(x) dx,$$

astrazion fatta da fattori indipendenti da μ e da θ, può, come vedrassi tra breve, porsi eguale alla somma delle sedici serie seguenti

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \tag{1'}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \tag{2'}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{3'}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} p_n \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{4'}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{\mu\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{5}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{6}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{7}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu} p_n \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{8}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{9}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{10}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}^2\theta\,\lambda(\cos\theta)\,d\theta, \tag{11}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu} p_n \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{12}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{13}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{14}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\theta\,\lambda(\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta, \tag{15}$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu^2} p_\mu p_n \lambda(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta\,d\theta. \tag{16}$$

Le serie (4'), (8), (12), (16) sono convergenti e vanno a zero con $\frac{1}{\mu}$.

Consideriamo ora la serie (1') che, fatta astrazione del termine nel quale $\rho=\rho_1$, può porsi sotto la forma

$$\sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\cos\left((\rho+\rho_1)\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\cos[(\rho-\rho_1)\theta]\right]\lambda(\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\operatorname{sen}\left((\rho+\rho_1)\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\rho+\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}(\rho-\rho_1)\theta}{\rho-\rho_1}\right]\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$=\sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\cos\left((\rho+\rho_1)\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{(\rho+\rho_1)^2}+\frac{\cos(\rho-\rho_1)\theta}{(\rho-\rho_1)^2}\right][\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta]'_\theta\,d\theta$$

$$=\sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} [\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta)]'_\theta \frac{\cos\left((\rho+\rho_1)-\frac{\pi}{2}\right)}{(\rho+\rho_1)^2}\,d\theta+\sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} [\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta]'_\theta \frac{\cos(\rho-\rho_1)\theta}{(\rho-\rho_1)^2}\,d\theta.$$

La serie (1') risulta in tal modo decomposta in due che convergono indipendentemente dall'ordine dei termini, e la prima delle quali va al certo a zero con $\frac{1}{\mu}$. È facile poi vedere che altrettanto avviene della seconda. Infatti, potrò sempre determinare un numero m tale, che per tutti i valori di $n \geqq m$ si abbia, astrazion fatta dal segno,

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho-\rho_1)\theta]\,[\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta]'_\theta\,d\theta \leqq \varepsilon,$$

essendo ε una quantità arbitraria; d'altra parte, assunto μ sufficientemente grande, ogni termine della forma

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho-\rho_1)\theta]\,[\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta]'_\theta\,d\theta, \qquad n<m,$$

è piccolo oltre ogni dire. Il valore numerico della serie

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{(\rho-\rho_1)^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho-\rho_1)\theta]\,[\lambda'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta]'_\theta\,d\theta,$$

sarà più piccolo della espressione

$$\sum \frac{1}{(n-\mu)^2}, \qquad 0<n \lesseqgtr \mu,$$

moltiplicata per una quantità che si annulla con $\frac{1}{\mu}$. Basta quindi far vedere che la serie convergente

$$\sum \frac{1}{(n-\mu)^2}, \qquad 1 < n \leq \mu,$$

non va con μ all'infinito. Che ciò abbia luogo, è subito visto, quando si ponga mente che

$$\sum_{1<n\leq\mu} \frac{1}{(n-\mu)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(\mu-2)^2} + \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2}.$$

È manifesto ora che le serie (2'), (3'), (5), (6), (7), (9), (10), (11) convergono e tendono a zero al crescere indefinito di μ.

Resta a considerarsi le serie (13), (14), (15). Dimostriamo che la (13) ad es. converge e si annulla con $\frac{1}{\mu}$; lo stesso procedimento servirebbe per le altre due.

Si ha

$$\frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \, \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta =$$

$$-\frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\rho\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}]'_\theta \, d\theta =$$

$$-\frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\rho^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}]''_{\theta^2} \, d\theta.$$

Le quantità

$$D^2_{\theta^2} \frac{p_\mu}{\mu^2}, \qquad D'_\theta \frac{p_\mu}{\mu}$$

non vanno all'infinito con μ, come è noto, quindi il termine

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\mu^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}]''_{\theta^2} \, d\theta$$

sarà arbitrariamente piccolo, quale si sia μ, a partire da valore opportuno di n, mentre la quantità

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

converge a zero con $\frac{1}{\mu}$ per gli altri valori di n. Quindi:

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 0.$$

Facciamo ora vedere che

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{\mu} \int_b^c (C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \frac{d^2 X_\mu}{d x^2} \lambda(x) dx = 0.$$

Consideriamo a tal fine l'integrale

$$\int_b^c x^m \frac{d^2 X_\mu}{d x^2} \lambda(x) dx,$$

nel quale m è un numero intero e positivo o anche lo zero. Si ha

$$\int_b^c x^m \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{d x^2} dx = -\int_b^c [m x^{m-1} \lambda(x) + x^m \lambda'(x)] \frac{d X_\mu}{d x} dx$$

$$= \int_b^c [m(m-1) x^{m-2} \lambda(x) + 2 m x^{m-1} \lambda'(x) + x^m \lambda''(x)] X_\mu dx,$$

essendo $\lambda(b) = \lambda(c) = \lambda'(b) = \lambda'(c) = 0$. Se si pone poi in luogo di X_μ la sua espressione per mezzo di θ, ne consegue:

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{\mu} \int_b^c x^m \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{d x^2} dx = 0,$$

poichè la funzione $\lambda''(x)$ è scevra da infiniti massimi e minimi. Il teorema enunciato a principio di questo paragrafo risulta quindi dimostrato.

Possiamo ora osservare che, data una serie della forma $\sum A_n X_n$ tale, che si abbia $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0$, la somma

$$\frac{A_2}{3 \cdot 5} X_0 + \frac{A_3}{5 \cdot 7} X_1 +$$

$$\sum_0^n \left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+7)} + \frac{A_{n+4}}{(2n+7)(2n+9)}\right] X_{n+2}$$

definisce una funzione continua $l(x)$ nell'intervallo $-1\ +1$, i limiti inclusi.

La quantità A_s poi si può porre sotto l'aspetto di un integrale definito in virtù delle ricerche del paragrafo 10; si ha cioè:

$$A_{2n} = \frac{4n+1}{2}\int_{-1}^{+1} l(x)\frac{d^2X_{2n}}{dx^2}dx,$$

$$A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2}\int_{-1}^{+1} l(x)\frac{d^2X_{2n+1}}{dx^2}dx.$$

Ciò posto, è facile vedere che

$$\lim \sqrt{n}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x)X_{2n}dx = 0, \qquad n=\infty.$$

Infatti, detti $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$ i punti posti tra -1 e $+1$ pei quali la $f(x)$ va all'infinito, l'aggregato

$$\sqrt{n}\left(\int_{-1+\varepsilon_1}^{x_1-\rho}+\int_{x_1+\rho}^{x_2-\rho}+\cdots+\int_{x_\tau+\rho}^{-1+\varepsilon_1}\right)f(x)X_{2n}dx$$

si annulla al certo con $\frac{1}{n}$, ρ essendo una quantità arbitrariamente piccola; basta quindi far vedere che

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} f(x)X_{2n}dx = 0, \qquad r=1, 2, \ldots, \tau.$$

Pel teorema or ora dimostrato si ha:

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho}\nu(x)\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta\right)X''_n\,dx = 0,$$

indicando $\nu(x)$ una funzione continua tra $\overline{x_r-\rho}$ e $\overline{x_r+\rho}$ insieme alla sua derivata prima e seconda e tale, che si abbia

$$\nu(x_r-\rho) = \nu(x_r+\rho) = \nu'(x_r-\rho) = \nu'(x_r+\rho) = 0,$$

mentre $\nu(x)=1$ quando la variabile x non ecceda i limiti $\overline{x_r-\rho_1}$ e $\overline{x_r+\rho_1}$, $\rho_1<\rho$.

Ciò posto, abbiamo

$$\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho}\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta\right)\nu(x)X''_n\,dx =$$

$$-\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho}\left[\nu'(x)\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)d\beta\right)+\nu(x)\left(\int_{-1}^{x}f(\beta)d\beta\right)\right]X'_n\,dx=$$

$$\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho}\left[\nu''(x)\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)d\beta\right)+2\nu'(x)\left(\int_{-1}^{x}f(\beta)d\beta\right)+\nu(x)f(x)\right]X_n\,dx,$$

ed è chiaro che

$$\lim_{\mu=\infty}\sqrt{n}\int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho}\left[\nu''(x)\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)d\beta\right)+2\nu'(x)\left(\int_{-1}^{x}f(\beta)d\beta\right)+\nu(x)f(x)\right]X_n\,dx=$$

$$\lim_{\mu=\infty}\sqrt{n}\int_{x_r-\rho_1}^{x_r+\rho_1}\left[\nu''(x)\left(\int_{-1}^{x}d\alpha\int_{-1}^{\alpha}f(\beta)d\beta\right)+2\nu'(x)\left(\int_{-1}^{x}f(\beta)d\beta\right)+\nu(x)f(x)\right]X_n\,dx=$$

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_{x_r-\rho_1}^{x_r+\rho_1}f(x)\,X_n\,dx.$$

Quindi:

$$c=0,$$

ossia

$$A_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx.$$

Determiniamo ora la espressione dei coefficienti della forma A_{2n+1}. Si ha

$$-\frac{A_1}{3\cdot5}+\frac{A_3}{5\cdot7}=D_1+\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_1\,dx,$$

$$\frac{A_1}{3\cdot5}-\frac{A_3}{5\cdot7}-\frac{A_3}{7\cdot9}+\frac{A_5}{9\cdot11}=\frac{7}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_3\,dx,$$

. . . .

$$\frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)}-\frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)}-\frac{A_{2n-1}}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{A_{2n+1}}{(4n+1)(4n+3)}=$$

$$\frac{4n-1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)X_{2n-1}\,dx,$$

e quindi:

$$-\frac{A_{2n-1}}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{A_{2n+1}}{(4n+1)(4n+3)}=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)[3X_1+7X_3+\cdots+(4n-1)X_{2n-1}]dx+D_1=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)\frac{dX_{2n}}{dx}dx+D_1=\frac{1}{2}\Big[\psi(x)X_{2n}\Big]_{-1}^{+1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)X_{2n}dx+D_1=$$

$$\frac{1}{2}[\psi(+1)-\psi(-1)]-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)X_{2n}dx+D_1=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)X_{2n}dx,$$

essendo

$$\psi(+1)+D_1+D'_1=0,\qquad \psi(-1)-D_1+D'_1=0.$$

Abbiamo perciò:

$$-\frac{A_1}{3}+\frac{A_{2n+1}}{4n+3}=$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)[5X_2+9X_4+\cdots+(4n+1)X_{2n}]dx=$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)\frac{dX_{2n+1}}{dx}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi'(x)dx=$$

$$-\frac{1}{2}[\psi'(+1)+\psi'(-1)]+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+1}+\frac{1}{2}[\psi(+1)-\psi(-1)]=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_1dx.$$

Ma

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+1}dx=0,$$

quindi:

$$A_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_1dx,\qquad A_{2n+1}=\frac{4n+3}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_{2n+1}dx;$$

il problema che ci siamo proposto è adunque risoluto.

CONTENTUTO.

ERRATA-CORRIGE.

a pag.	277,	linea 10	leggi	*enunciati*	in luogo di	*enunciato*
„	280,	„ 2	„	*proposto*	„	*proposti*
„	289,	„ 20	„	*che*	„	*come*
„	292,	„ 4	„	ε^2	„	ε nel denominatore della seconda frazione
„	311,	„ 10	„	$\frac{\omega(\theta+\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-\alpha)}{\alpha^2}$	„	$\frac{\omega(\theta+\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-\alpha)}{4\alpha^2}$

Fine del Tomo VII.° (Serie II.ª)

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VII.° (SERIE II.ª)

Indice.